



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

GENERACIÓN DE OSCILACIONES PERIÓDICAS UTILIZANDO
CONTROLADORES DE ESTRUCTURA VARIABLE: EXPERIMENTO CON
UN SISTEMA MECÁNICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
INGENIERO ELÉCTRICO ELECTRÓNICO

P R E S E N T A

ALFREDO SOSA BALBUENA

T U T O R

M. I. RAFAEL IRIARTE VIVAR BALDERRAMA

2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente : M.I. RICARDO GARIBAY JIMÉNEZ
Vocal : M.I. RAFAEL IRIARTE VIVAR BALDERRAMA
Secretario : DR. LEONID FRIDMAN
1o. Suplente : DR. PAUL ROLANDO MAYA ORTIZ
2o. Suplente : DR. JORGE ÁNGEL DÁVILA MONTOYA

Lugar donde se realizó la tesis:

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería
México, D.F.

TUTOR DE TESIS

M.I. RAFAEL IRIARTE VIVAR BALDERRAMA

FIRMA

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está dedicado con todo mi cariño a la memoria de mi tío Juan César. A mis padres José Alfredo e Isabel y a mis hermanos Alain y Jezabel.

Quiero agradecer a Ariel Balbuena Sánchez, quien más que un tío ha sido y siempre será un amigo y un padre para mí. A mis tías Cecilia y Toña por todos sus esfuerzos y sacrificios para que yo pudiera dar este paso en mi vida. A toda mi familia por su sincero e incondicional cariño, gracias a ustedes he aprendido el verdadero significado de la palabra *familia*. A ti Edith, por tu amor, tu paciencia, tu sonrisa... es un privilegio crecer a tu lado.

También quiero agradecer a la familia Núñez Ramírez por abrirme las puertas de su hogar y dejarme formar parte de su familia; nunca terminaré de agradecer todo lo que hicieron por mí. A Josué Quino por su confianza y apoyo al inicio de la licenciatura. A todos mis amigos, ustedes saben quiénes son y cuánto los estimo.

Finalmente, quiero agradecer a la UNAM todo lo que me ha brindado a lo largo de estos años; es un orgullo ser parte de esta institución. Al grupo del Laboratorio de Modos Deslizantes por sus comentarios, sugerencias y correcciones, en especial a Alex y a Alejandra por su tiempo y dedicación. Al M.I. Iriarte, por su motivación y consejos. Al Dr. Fridman, gracias por haberme guiado hacia el camino de la ciencia; éste es sólo mi primer paso.

Índice general

1	Introducción	1
1.1	Antecedentes	1
1.1.1	Oscilaciones	1
1.1.2	El Paradigma del Péndulo	2
1.1.3	Ciclos Límites	4
1.2	Problema a Resolver	5
1.3	Contribuciones	6
2	Rueda de Inercia	7
2.1	Modelo Matemático	7
2.2	Puntos de Equilibrio	18
3	Controlador de Estructuras Variables	24
3.1	Esquema General	24
3.2	Linealización por Retroalimentación	25
3.3	El Controlador de Dos Relevadores	31
3.3.1	Función Descriptiva	31
3.3.2	Ajuste de los Parámetros del Controlador	35
4	Controlador por Restricciones Holonómicas	37
4.1	Preliminares: Restricciones Holonómicas	37
4.2	Planeación de Trayectorias	38
4.3	Diseño del Controlador	43
5	Estimación de la Velocidad	46
5.1	Diferenciadores	46
5.1.1	Diferenciador de Levant	46
5.1.2	La Derivada Clásica por Diferenciales: Con y Sin Filtro	47
5.2	Observadores	48
5.2.1	Observador de Luenberger	48
5.2.2	Observador de Alta Ganancia	49

6	Simulaciones	51
6.1	Controlador de Dos Relevadores	51
6.1.1	Linealización por Medio del Jacobiano	51
6.1.2	Linealización por Retroalimentación	55
6.2	Controlador por Restricciones Holonómicas	58
7	Pruebas Experimentales: Controlador de Dos Relevadores	62
7.1	Linealización por Retroalimentación	62
8	Conclusiones	66
A	Linealización Exacta: Condiciones Suficientes y Necesarias	69
B	Código Programable Auxiliar	71

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

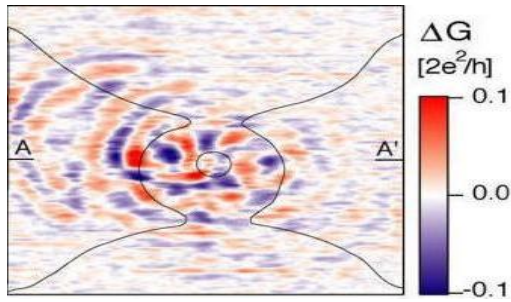
1.1.1. Oscilaciones

Una oscilación es una *fluctuación* de un sistema respecto a una variable de interés, generalmente siendo ésta el tiempo. Este comportamiento se puede apreciar desde el nivel cuántico hasta el nivel macroscópico, e.g. las variaciones en la conductividad de un superconductor y la rotación de los planetas alrededor del sol que se muestran en la Figura 1.1. En este último ejemplo las trayectorias de los planetas se repiten después de un cierto periodo, aproximadamente 365 días en el caso de la tierra, y por lo tanto se denominan como *oscilaciones periódicas*.

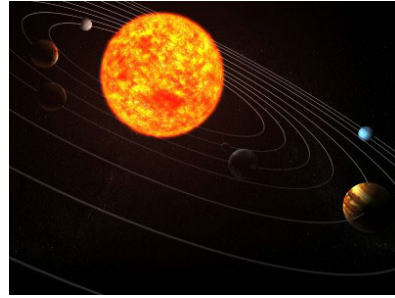
La dinámica oscilatoria también es responsable directa de distintos fenómenos físicos; cuando una oscilación se manifiesta en un medio material se genera el fenómeno del sonido, una oscilación en una corriente eléctrica genera un campo electromagnético, etc. Por otro lado, en muchas aplicaciones de ingeniería esta dinámica suele inducir perturbaciones no contempladas, vibraciones indeseadas, ruido y desgaste excesivo de los componentes físicos, entre otros factores adversos. En estas situaciones las oscilaciones en el sistema pueden comprometer su funcionamiento por lo que se busca evitarlas o contrarrestarlas. Algunos ejemplos de esto incluyen

- las oscilaciones en las grúas
- las vibraciones en las alas de un avión
- el rechinado en el frenado de un coche
- los efectos de los temblores en los edificios

No obstante, diversas aplicaciones cotidianas también dependen de la generación de estas oscilaciones, dentro de las cuales se puede mencionar



(a) Fluctuación de la conductividad de un superconductor ante un campo magnético



(b) Órbitas planetarias del sistema solar

Figura 1.1: Fenómenos oscilatorios

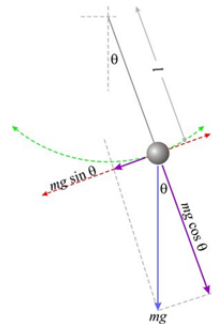


Figura 1.2: El péndulo simple

- la tomografía por resonancia magnética
- los hornos de microondas
- lograr que un robot bípedo camine
- la técnica *dither* para atenuar fricción

Se puede afirmar entonces que el fenómeno oscilatorio tiene una naturaleza ambigua; en ciertos escenarios se desea excluirlo de un sistema y en otros se busca introducirlo. Cualquiera que sea el caso, la importancia de estudiar este comportamiento es clara puesto que se presenta continuamente en diversos sistemas que abarcan todos los niveles de la materia y como tal es un concepto fundamental para lograr una mejor comprensión de la dinámica del universo.

1.1.2. El Paradigma del Péndulo

El péndulo es uno de los ejemplos más importantes en el campo de Control y ha sido estudiado extensivamente desde Galileo Galilei. Este sistema está constituido por

un hilo, idealmente considerado inextensible y de masa despreciable, sostenido por su extremo superior de un punto fijo, con una masa puntual m en su extremo inferior que oscila libremente. Como se aprecia en la Figura 1.2 la fuerza de gravedad que actúa sobre la masa se descompone en una fuerza perpendicular y una fuerza paralela al movimiento circular del péndulo. Esto permite derivar la ecuación de movimiento para este sistema al asociar la aceleración lineal, a , de la masa con la fuerza paralela:

$$F_{\parallel} = -mg \sin(\theta) = ma \quad (1.1)$$

A partir de la longitud de arco

$$s = l\theta$$

la aceleración lineal se puede expresar como

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = l\ddot{\theta}$$

con lo que, de la ecuación (1.1), se obtiene la identidad

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \quad (1.2)$$

La ecuación diferencial ordinaria (1.2) es no-lineal debido al término $\sin(\theta)$. Sin embargo, para valores pequeños de θ se cumple que

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

Por lo tanto (1.2) se puede aproximar por la ecuación diferencial *lineal*

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0$$

donde $\omega_n \triangleq 2\pi f = \sqrt{\frac{g}{l}}$ es la frecuencia angular de oscilación. Es decir, el péndulo simple es un sistema que, restringido a desviaciones de pequeña amplitud, exhibe oscilaciones periódicas sin necesidad de otra excitación más que el efecto de la gravedad. El periodo de estas oscilaciones libres puede ser aproximado por

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

La importancia del péndulo se deriva en que diversos sistemas ingenieriles y esquemas de control se pueden modelar aproximadamente por la ecuación (1.2). Entre estos se puede mencionar cohetes espaciales, las articulaciones de un robot bípedo además de estabilización de barcos, gruas y líquidos [1]. Todos estos ejemplos, junto con la amplia presencia del fenómeno oscilatorio, motivan a estudiar el péndulo y sistemas afines. Actualmente se cuenta con una gran variedad de péndulos para fines tanto académicos como industriales, como por ejemplo el péndulo de Furuta, el péndulo carro y el Pendubot entre otros. *La Rueda de Inercia* es el dispositivo más nuevo y sencillo, debido a la simetría de sus componentes, de la familia de péndulos. Este sistema de dos grados de libertad, cuyas aportaciones al desarrollo tecnológico incluyen el control de altitud de un satélite, será el objeto de estudio del presente trabajo.

1.1.3. Ciclos Límites

El diseño de un sistema de control generalmente tiene como propósito llevar a cabo una de dos tareas: la regulación de variables o el seguimiento de trayectorias. La primera de éstas consiste en estabilizar un conjunto de variables alrededor de un punto de operación y representa una de las aplicaciones de la teoría de control más implementadas en la industria moderna, e.g. el control de temperatura del procesador en una computadora o la regulación de la velocidad angular de un generador eléctrico. Por otro lado, el problema de seguimiento busca establecer una evolución deseada y prediseñada de un sistema dado. Este tipo de control se presenta en la automatización de la ruta del vuelo de un avión o en la programación de un brazo robótico para trazar un círculo. Sin embargo, existen otros problemas de control que no se pueden clasificar dentro de ninguna de estas dos categorías como es el caso de la generación de *movimiento funcional*. Este movimiento es una dinámica que se puede provocar en ciertos tipos de sistemas sin la necesidad de diseñar un esquema de seguimiento ni de especificar alguna otra propiedad del mismo [2].

El fenómeno oscilatorio periódico es una instancia particular del concepto de movimiento funcional y exhibe propiedades interesantes, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Este comportamiento se presenta en una clase de sistemas *no-lineales* que pueden generar oscilaciones de amplitud y periodo constante, sin la necesidad de una excitación externa, y en este caso se conoce como ciclo límite. Cabe mencionar que este comportamiento no es exclusivo de los sistemas no-lineales ya que un sistema lineal también puede oscilar en dos instancias particulares:

- cuando se presenta una excitación senoidal en la entrada.
- bajo la condición de estabilidad marginal que se cumple cuando el punto de equilibrio (único) es un centro, i.e. cuando el sistema tiene polos estrictamente imaginarios, como se ilustra en la Figura 1.3, y en el caso de que algunos de estos polos tengan parte real, ésta es negativa.

No obstante, se debe señalar que existen diferencias significantes entre el fenómeno oscilatorio lineal y el no-lineal. Primero, la amplitud de las oscilaciones en un sistema lineal marginalmente estable depende directamente de las condiciones iniciales. En contraste, las condiciones iniciales no determinan la amplitud de un ciclo límite, siendo su estabilidad la única propiedad que se puede alterar ante una variación en dichas condiciones iniciales. Segundo, las oscilaciones de un sistema lineal carecen de la importante propiedad de robustez; cualquier perturbación infinitesimal o incertidumbre paramétrica puede trasladar a los valores propios imaginarios del sistema hacia el semiplano derecho, llevándolo así a la inestabilidad. En cambio ciertos ciclos límites, como los que se muestran en la Figura 1.4(a) y 1.4(b), tienen una estructura estable que permite preservar el comportamiento oscilatorio del sistema ante perturbaciones, siempre y cuando éstas no excedan un cierto umbral de magnitud.

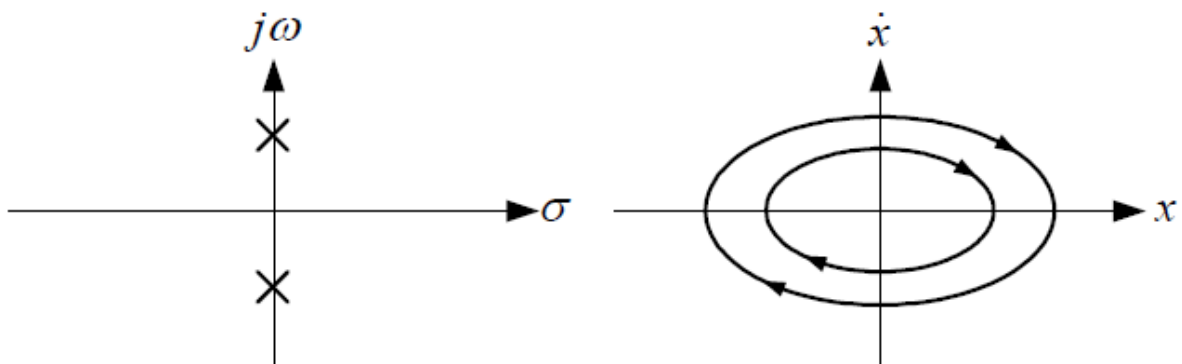


Figura 1.3: Comportamiento oscilatorio de un centro

Como se puede apreciar, si se desea hacer oscilar de manera controlada a un sistema *físicamente realizable* entonces se deben diseñar ciclos límites, no oscilaciones lineales. Esto se debe a que cualquier implementación práctica requiere tanto robustez como libertad de diseño ya que el oscilador estará sujeto a perturbaciones y por lo tanto no se puede descartar este factor asumiendo un caso ideal sin incertidumbres. También resulta difícil producir y reproducir condiciones iniciales distintas de cero lo que reduce significativamente el tipo de oscilaciones que se pueden lograr bajo un esquema lineal. Lo anterior manifiesta la necesidad de utilizar herramientas no-lineales mas no implica que se deba descartar todo análisis lineal. Al contrario, la incorporación de ambos enfoques matemáticos resulta en una mayor flexibilidad que permite abordar un espectro más amplio de problemas.

1.2. Problema a Resolver

El enfoque principal del presente trabajo es *generar oscilaciones periódicas en un sistema mecánico subactuado, la Rueda de Inercia*. Específicamente, se busca que estas oscilaciones se manifiesten en el grado de libertad sin actuación, el del péndulo. La dificultad principal en esta empresa reside en que, por falta de una acción de control inmediata, el movimiento del péndulo se debe manipular por medio de la única entrada de control del sistema, la cual se ubica en el rotor. Bajo esta restricción el objetivo de rechazo a perturbaciones se complica si éstas se presentan en el péndulo ya que no es posible compensarlas directamente. Consecuentemente, el concepto de robustez cobra una mayor relevancia; se deben diseñar ciclos límites estables, Figura 1.4(a), para la variable que representa el ángulo del péndulo.

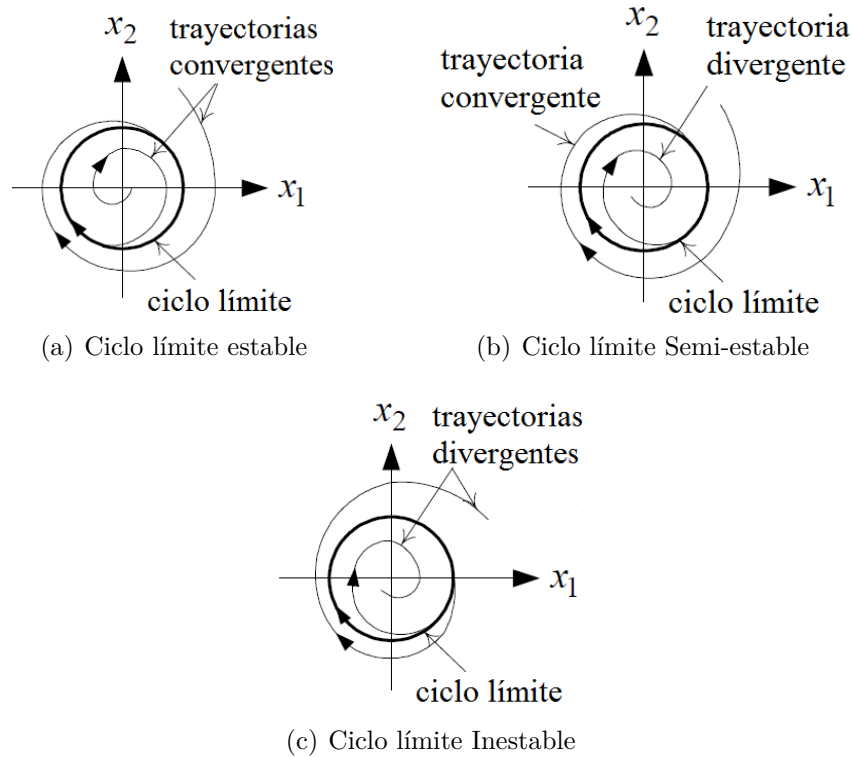


Figura 1.4: Las condiciones iniciales no afectan la amplitud de un ciclo límite, si acaso su estabilidad

1.3. Contribuciones

Diversas metodologías se han diseñado para generar oscilaciones periódicas en la Rueda de Inercia. Por ejemplo, una estrategia reciente [3] basada en linealización por retroalimentación y técnicas de “averaging” se puede aplicar a la Rueda de Inercia para este propósito, así como también controladores basados en pasividad, redes neuronales recurrentes, restricciones holonómicas virtuales [4] o la modificación del controlador *Twisting* de modos deslizantes [2]. Las aportaciones principales de este trabajo son dos: la primera es hacer una comparación, de índole teórica, de los dos controladores propuestos por estas últimas dos técnicas, el controlador por restricciones holonómicas y el controlador de dos relevadores; la segunda es hacer una comparación *experimental* entre dos distintos tipos de linealización, uno utilizando el Jacobiano y el otro por retroalimentación de estados. Adicionalmente se implementaron diversos métodos para estimar las velocidades en la Rueda de Inercia, entre ellos el diferenciador de Levant [5] y un observador de alta ganancia [6].

Capítulo 2

Rueda de Inercia

2.1. Modelo Matemático

El primer paso en el diseño de cualquier esquema de control es, inexorablemente, obtener un modelo matemático del sistema que se desea controlar; el objetivo de esta sección será entonces encontrar un conjunto de ecuaciones que representen la dinámica de la Rueda de Inercia adecuadamente. Como el concepto de la derivada permite relacionar distintas variables a través de los cambios que inducen entre sí, se utilizarán conjuntos de ecuaciones diferenciales para representar de manera cuantitativa el comportamiento complejo que exhibe este sistema mecánico. Se partirá del hecho de que todo modelo matemático se obtiene basándose en diversas suposiciones y simplificaciones, las cuales se deben llevar a cabo tomando en consideración un criterio básico de simplicidad contra precisión. Un modelo demasiado elaborado, aunque sea muy preciso, no necesariamente es el adecuado debido a la mayor demanda en capacidad y tiempo de procesamiento computacional que se requerirá para resolver la mayor cantidad de ecuaciones involucradas. Por otro lado, una representación más reducida tiende a ignorar ciertas dinámicas y propiedades físicas inherentes al sistema; estas simplificaciones generan incertidumbres que pueden comprometer el desempeño del control propuesto. Por lo tanto, antes de ignorar o incorporar dinámicas al modelo matemático, es preciso analizar el sistema a controlar.

El sistema físico que se pretende controlar, y por ende modelar, es conocido como Péndulo de Rueda Inercial. El prototipo experimental¹ mostrado en la Figura 2.1(a) es un péndulo simple con un rotor acoplado en el extremo. Adicionalmente, este rotor es activado a través de un motor de corriente directa por lo que este sistema puede ser catalogado como electro-mecánico. Sin embargo, para reducir el grado de complejidad que involucran estos sistemas híbridos se harán las siguientes consideraciones:

¹Parte de un equipo mecatrónico llamado *Mechatronics Control Kit*, o *MKT* por su abreviación en inglés

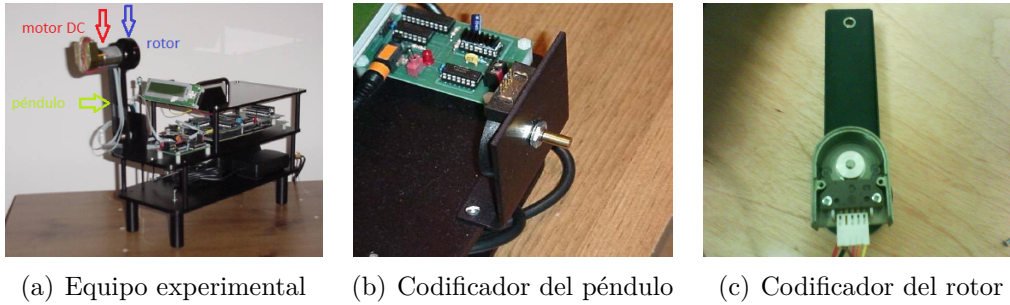


Figura 2.1: El MKT de Quanser® y sus codificadores incrementales ópticos

Suposición 2.1:

Las dinámicas eléctricas del motor son despreciables.

- Si bien la dinámica del motor requiere un análisis en sí misma, se debe descartar del modelo en aras de la simplicidad. No obstante, se deben tomar en cuenta factores físicos, como valores máximos de corriente y par entre otros, a la hora de realizar cualquier prueba experimental.

Suposición 2.2:

Las masas del péndulo y el rotor tienen distribuciones homogéneas (parámetros lineales) y se pueden considerar como puntuales.

- El equipo fue elaborado meticulosamente por el fabricante con el propósito de que se puede hacer una suposición como esta.

Suposición 2.3:

Las distancias óptimas a los ejes de rotación correspondientes son constantes.

- Esta suposición es necesaria para calcular los momentos de inercia requeridos de manera más fácil. Dadas las características de los materiales de fabricación, cualquier discrepancia que exista en una prueba experimental con esta suposición es despreciable.

Suposición 2.4:

Las fuerzas de fricción presentes en el sistema son despreciables.

- La fuerza de fricción es un factor muy importante que se presenta constantemente en aplicaciones reales. Este fenómeno exhibe comportamientos muy complejos difíciles de predecir, modelar y compensar que pueden modificar radicalmente la dinámica de un sistema. Específicamente, se sabe que la fricción es una fuerza que disipa energía por lo que la energía total del sistema se ve afectada directamente por la presencia de la fricción. No obstante, la interacción de esta fuerza es más relevante a muy bajas y a muy altas velocidades, Figura 2.2, por lo que esta suposición se sostiene.

Suposición 2.5:

Los componentes de la Rueda de Inercia son rígidos y por lo tanto la única fuente de energía potencial es la gravedad.

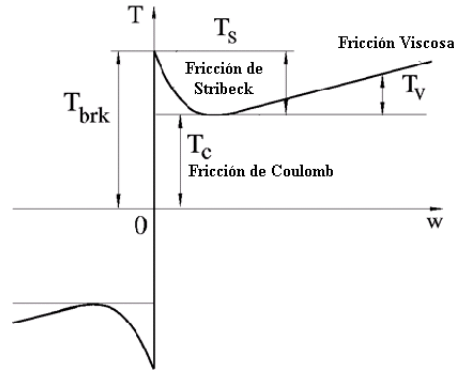


Figura 2.2: Los distintos comportamientos de la fricción en función de la velocidad

- La rotación del péndulo y el rotor presentan excentricidad. Éste es un efecto que se incrementará con el desgaste del equipo y que eventualmente puede influir de manera importante en los procesos energéticos del sistema. Nuevamente, por simplicidad se desprecia su efecto para propósitos del modelado.

Bajo estas suposiciones, específicamente Suposición 2.1, ahora es posible interpretar a este sistema híbrido como uno exclusivamente mecánico y como tal su modelo matemático se obtendrá a partir de la formulación de Euler-Lagrange. Esta metodología de modelado se basa en el concepto de *coordenadas generalizadas*², las cuales están asociadas directamente con los grados de libertad del sistema. Otra virtud del modelado Lagrangiano es que se involucran funciones *escalares* de energía, en contraste con las fuerzas y aceleraciones *vectoriales* que se presentan comúnmente en otros métodos de modelado, e.g. el Newtoniano [1]. La gran ventaja que se adquiere al utilizar funciones escalares es que hacen posible el uso del principio de superposición al momento de determinar las ecuaciones de energía requeridas para la estructuración del modelo matemático.

El paso inicial para obtener un modelo matemático a través de las ecuaciones de Lagrange, con base en los marcos de referencia de la Figura 2.3, es definir el conjunto de coordenadas generalizadas

$$q = \{q_1 \dots q_n\} \quad (2.1)$$

que representen a la Rueda de Inercia de n grados de libertad. En sistemas mecánicos, estas variables siempre se refieren a parámetros de posición y pueden representar distancias, en el caso de dinámicas rectilíneas, o ángulos, en el caso rotacional. Debido a

²Variables que conforman un conjunto completo e independiente. Un conjunto de variables de sistema es completo si, por medio de interconexiones, permite determinar los estados de todo el sistema. Es independiente si se puede variar a un elemento sin afectar a los otros elementos

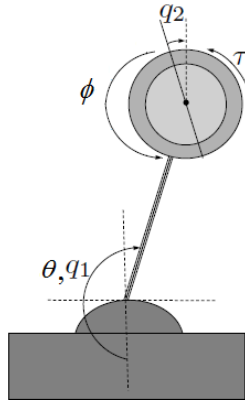


Figura 2.3: Diagrama de referencia para el modelado

que la rueda de inercia es un sistema exclusivamente rotacional se escogerán como coordenadas generalizadas a todos los ángulos absolutos existentes. Los ángulos absolutos son aquellos que se miden con respecto a una referencia fija, a diferencia de los ángulos relativos que toman como referencia a una posición variable. La razón por la que se prefieren ángulos absolutos es que permiten un cierto desacoplamiento del sistema; el valor de cada ángulo se puede obtener independientemente del valor de los otros ángulos involucrados. De esta manera se pueden diseñar los controladores pertinentes de una manera más sencilla y eficaz. Un análisis de la Figura 2.3 arroja dos ángulos absolutos que se pueden utilizar como coordenadas generalizadas, q_1 y q_2 . Como se puede observar, tanto q_1 como q_2 se miden con respecto a la vertical, tomando la dirección directa y opuesta de la atracción gravitacional (posición vertical inferior y vertical superior respectivamente) como referencia. Por lo tanto se requiere analizar si es factible adquirir estos ángulos a través del equipo experimental.

Para poder medir ambos ángulos, θ y ϕ , el equipo *MKT* cuenta con los dos decodificadores incrementales ópticos de posición que se muestran en la Figura 2.1. Un decodificador, Figura 2.1(b), se coloca en el eje fijo de rotación del péndulo y determina la variable θ , un parámetro absoluto que define el ángulo de posición del péndulo medido fijamente con respecto a una vertical inferior ubicada sobre el centro de la base. Dado que el ángulo θ es el mismo que la coordenada generalizada q_1 deseada, se concluye que esta coordenada se puede obtener directamente de las mediciones del primer decodificador. El segundo decodificador, Figura 2.1(c), se ubica sobre el motor que está fijo al otro extremo del péndulo. Su eje de rotación está conectado a la rueda giratoria y por lo tanto mide el ángulo relativo, ϕ , entre el péndulo y la rueda. La medición de este decodificador es relativa puesto que depende directamente de otra variable, específicamente hablando, de la posición angular del péndulo θ . Tomando en cuenta una vez más que se requieren variables absolutas, es necesario convertir esta medición relativa del segundo decodificador para establecer una variable fija y absoluta. Se puede observar

en la Figura 2.3 que lógicamente hay una relación directa entre la coordenada generalizada buscada q_2 y la medición del segundo decodificador, ϕ , pero también se involucra el ángulo θ . Esto no es de sorprender ya que la posición medida del rotor cambia al momento en que se registra un cambio en la posición del péndulo porque este último es su referencia. Consecuentemente, un análisis geométrico de los ángulos dados y los ángulos requeridos lleva a:

$$\begin{aligned} q_1 &= \theta \\ q_2 &= \theta + \phi \end{aligned} \tag{2.2}$$

La Rueda de Inercia es un sistema con únicamente dos grados de libertad, uno en el péndulo y otro en el rotor. Por lo tanto, el conjunto de variables completo e independiente (2.2) representa el conjunto buscado de coordenadas generalizadas del sistema. Con este resultado, se prosigue a determinar la energía cinética y potencial del sistema en función de sus posiciones y velocidades angulares, q_1, q_2, \dot{q}_1 y \dot{q}_2 . Generalmente la energía cinética es una función positiva definida que utiliza como parámetros a las coordenadas generalizadas y sus respectivas derivadas mientras que la energía potencial sólo involucra a las coordenadas generalizadas, excluyendo en la mayoría de los casos a sus derivadas [1]. Cada una de estas energías se puede calcular individualmente en un sistema multi-elemento haciendo uso del principio de superposición, por lo que no importa cuál se determine primero. Entonces, empezando por la energía cinética E_k de un sistema puramente rotacional, ésta se define como

$$E_k \triangleq T = \frac{1}{2} J \omega^2 \tag{2.3}$$

donde J representa el momento de inercia de un cuerpo rotacional y su respectiva velocidad angular. Ahora, la definición del momento de inercia *escalar*, donde el eje de rotación es fijo como es el caso del péndulo y del rotor de la rueda de inercia, indica que

$$J_s = \int l^2 dm \tag{2.4}$$

siendo m la magnitud de una masa puntual y l la distancia perpendicular entre ésta y el eje de rotación. La integral de (2.4) está en función del diferencial dm , lo cual implica que el momento de inercia de un cuerpo está determinado por la distribución de su masa a lo largo del volumen que ocupa en el espacio. Por ejemplo, un cilindro hueco y un disco con la misma altura, la misma masa y el mismo radio no tendrán el mismo momento de inercia debido a la distinta concentración de masa en cada uno de ellos. Existen varios ejemplos de esto, pero lo importante es señalar que la definición (2.4) conlleva desafíos al tratar de aplicarla a cuerpos con geometrías complejas o con densidades de masa variables. Afortunadamente se pueden sortear estas dificultades

Descripción	Notación	Unidades
longitud del péndulo	ℓ_r	m
distancia al centro de masa del péndulo	ℓ_p	m
distancia al centro de masa del sistema	ℓ	m
masa del péndulo	m_p	kg
masa del rotor	m_r	kg
masa combinada del péndulo y el rotor	m	kg
momento de inercia del péndulo	J_p	kg·m ²
momento de inercia del rotor	J_r	kg·m ²

Tabla 2.1: Nomenclatura para los parámetros de la Rueda de Inercia

si se considera un cuerpo con densidad de masa homogénea o simplemente una masa puntual; en esta caso se simplifica (2.4) y se define el momento de inercia escalar como

$$J_s = ml^2 \quad (2.5)$$

A partir de Suposición 2.2 y Suposición 2.3 es posible aplicar (2.5) para determinar el momento inercial de la Rueda de Inercia. Para ello se introduce la nomenclatura de la Tabla 2.1 y se aclara que los parámetros J_p y J_r , junto con todos los demás definidos, son valores *constantes* que ya han sido determinados previamente de manera experimental [1]. No obstante, para facilitar la comprensión y la fluidez del desarrollo posterior, estos parámetros se seguirán representando de acuerdo a la Tabla 2.1 y sus valores numéricos se sustituirán en el momento adecuado.

Retomando el concepto de planteado en (2.3), se prosigue a definir la energía cinética del péndulo y del rotor como

$$\begin{aligned} T_{péndulo} &= \frac{1}{2} J_p \dot{q}_1^2 \\ T_{rotor} &= \frac{1}{2} J_r \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Estas dos ecuaciones describen las energías cinéticas del péndulo y del rotor de manera aislada y como tal no proporcionan información de cómo interactúan el péndulo y el rotor entre sí. Para definir la energía total de la rueda de inercia se necesita relacionar al péndulo y al rotor a través de una expresión que *acople* energéticamente al sistema. Esta relación se puede encontrar al considerar el par del sistema *interconectado* de la Rueda de Inercia. Debido a que el momento de inercia es aditivo,

$$J_+ = \sum_{i=1}^N m_i l_i^2$$

se puede calcular J_+ para la Rueda de Inercia tomando al eje de rotación del péndulo como pivote si se considera al sistema, bajo Suposición 2.2, como una composición de $N = 2$ masa puntuales. Entonces,

$$J_{+p} = m_p \ell_p^2 + m_r \ell_r^2 \quad (2.7)$$

Adicionalmente, se debe aplicar el teorema de ejes paralelos ya que el rotor también tiene una dinámica rotacional sobre un plano paralelo al péndulo. Se traslada el pivote hacia el eje de rotación del rotor y se elabora sobre (2.7) para finalmente obtener

$$\begin{aligned} J_1 &\triangleq m_p \ell_p^2 + m_r \ell_r^2 + J_p \\ J_2 &\triangleq J_r \end{aligned} \quad (2.8)$$

El péndulo no afecta la dinámica del rotor puesto que el eje de rotación de este último es perpendicular al plano de movimiento del péndulo y el punto de interacción entre los dos está ubicado precisamente sobre el eje de rotación del rotor. Por la tanto, reescribiendo (2.6) a partir de (2.8),

$$\begin{aligned} T_{péndulo} &= \frac{1}{2} J \dot{q}_1^2 \\ T_{rotor} &= \frac{1}{2} J_r \dot{q}_2^2 \\ T_{total} = T_{péndulo} + T_{rotor} &= \frac{1}{2} J \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como se puede apreciar, (2.9) expresa la energía cinética del sistema *completo* en función de únicamente las derivadas de las coordenadas generalizadas (2.2). Esto señala claramente que la energía cinética en un sistema no depende de la posición de los elementos sino de la velocidad de ellos, lo cual elimina la necesidad de establecer puntos de referencia de posición absolutos. Si sólo se contara con sensores de velocidad se podría determinar aún la energía cinética sin necesidad de otras mediciones. A través de (2.9) también se puede apreciar que la información contenida en la energía cinética no tiene memoria y sólo define a un único instante en el tiempo. Este punto es claro ya que la velocidad es la diferencia en distancias entre un evento y otro, por lo tanto es independiente de todo otro suceso en el espacio-tiempo. Si se analiza el péndulo en dos distintas posiciones cualesquiera, se puede tener el caso de que la energía cinética sea igual en ambos casos siempre y cuando las velocidades correspondientes del péndulo y del rotor sean las mismas los dos instantes. Una analogía sencilla sería el caso de un automóvil moviéndose sobre una pista recta; se puede determinar su velocidad instantánea, y por lo tanto su energía cinética, en cualquier momento sin necesidad de saber de dónde partió. Por igual, el automóvil puede alcanzar esa misma velocidad en otro punto en la pista independientemente de las velocidades a las que se haya movido previamente.

Aunque los dos casos analizados tengan dinámicas distintas (rotacional y rectilínea) su comparación es válida porque están relacionados por una ley universal, la energía cinética.

Se requiere ahora definir a la energía potencial, V , del sistema. Partiendo de la Suposición 2.5, tanto el péndulo como el rotor aportan energía potencial al sistema de manera *individual* debido a sus masas pero nuevamente surge la necesidad de definir V para el sistema interconectado. Tomando en cuenta nuevamente el acoplamiento mecánico entre el péndulo y el rotor junto con la geometría particular de la Rueda de Inercia, las dos masas m_p y m_r se pueden representar como un solo elemento con un centro de masa único y estático porque los centros de masa desacoplados también son estáticos. Es decir, se puede pintar un punto en cada uno de los tres centros de masa y éstos se mantendrán fijos debido a la geometría y simetría del sistema acoplado (el eje de rotación del rotor no se mueve respecto al péndulo, el péndulo y la rueda son componentes perfectamente simétricos). Aludiendo a la nomenclatura de la Tabla 2.1, este nuevo centro de gravedad está definido por una masa m ubicada a una distancia ℓ del pivote en la base.

El planteamiento anterior da la pauta a que la energía potencial de la rueda de inercia se defina a través de

$$V = mgh \tag{2.10}$$

para una masa ideal m atraída hacia un punto de referencia fijo, ubicado a una altura h , con una fuerza gravitacional g . Dado que m y g son constantes para el sistema rotacional en consideración, la única variable para esta energía es h , la cual oscilará dentro de un rango de $[0, 2\ell]$ debido a las dimensiones físicas del sistema. La variación en la altura h , que es un parámetro de posición, dependerá de una sola variable, en este caso la posición del péndulo. Ante una variación en su posición angular el péndulo se mueve con el nuevo centro de masa y por lo tanto se modifica la energía potencial. La posición de la rueda en este proceso es un factor totalmente despreciable porque, debido al acoplamiento y a que su eje de rotación es paralelo al plano de movimiento del péndulo, su centro de masa es siempre fijo en relación al péndulo. De esta manera se puede afirmar que un cambio en la posición angular del rotor no afecta la posición del centro de masa del acoplamiento péndulo-masa y por lo tanto tampoco afecta la energía potencial. Tomando en cuenta que el desplazamiento angular del péndulo se mide desde la posición vertical inferior como lo indica la Figura 2.3, se tiene que establecer una energía potencial mínima y nula en este punto porque representa una referencia de posición absoluta y además es un punto crítico con respecto a la dirección de la fuerza gravitacional. Así también, la vertical superior representa otro punto crítico de energía potencial ubicado a una distancia 2ℓ de su contraparte inferior.

Una vez establecidos estos dos puntos críticos sólo resta describir cómo cambia la distancia entre ellos en función de la posición angular del péndulo q_1 . Esta variación se debe medir en el sentido vertical de la fuerza gravitacional porque ésta es la que produce

la energía potencial en el sistema. Típicamente se utilizan funciones senoidales para describir desplazamientos verticales cuando el punto de referencia de posición está ubicado sobre la horizontal del sistema. Sin embargo, en este caso la referencia está desplazada 90° , una ortogonalidad, por lo que se requiere utilizar las funciones cosenoidales, la manifestación ortogonal del seno, para describir el desplazamiento vertical requerido. La función coseno tiene un rango de $[-1,1]$ para valores de 180° y 0° respectivamente. Si se busca definir un valor mínimo para esta función en 0° y un valor máximo en 180° entonces se requiere hacer la siguiente transformación

$$\cos(q_1) \rightarrow (1 - \cos(q_1))$$

con la cual se describe el desplazamiento vertical *normalizado* del péndulo,

$$h_{normalizada} = (1 - \cos(q_1)) \quad (2.11)$$

Si la magnitud de la distancia que existe entre la base y el centro de masa péndulo-rotor, ℓ , fuese unitaria, bastaría con reemplazar la h de (2.10) con la $h_{normalizada}$ de (2.11), pero éste no es el caso; la variación en la altura, y por lo tanto en energía potencial para este sistema, no sólo va a depender de (2.10) sino también de la magnitud de ℓ :

$$h = \ell(1 - \cos(q_1)) \quad (2.12)$$

Tomando esto en cuenta, el último paso requerido es asociar (2.10) y (2.12) para finalmente obtener

$$V = mg\ell(1 - \cos(q_1)) \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) cumple con lo establecido anteriormente al determinar la energía potencial en función de las coordenadas generalizadas y/o sus derivadas. Como se había previsto, la energía cinética (2.9) depende de las variables de velocidad (\dot{q}_1, \dot{q}_2) mientras que la energía potencial (2.13) depende de los parámetros de posición (q_1). Al analizar las dos funciones de energía resalta el hecho de que no se involucra a la coordenada generalizada q_2 en lo absoluto. Esto indica que la posición del rotor (q_2) es irrelevante, por lo menos energéticamente hablando, en el funcionamiento del sistema. Debido a la geometría de la rueda de inercia, el centro de gravedad del rotor es fijo en relación al péndulo. Esto implica que la posición del rotor, q_2 , no afecta la ubicación del centro gravitacional del acoplamiento péndulo-rotor y por lo tanto tampoco aporta a la energía potencial. No obstante, a pesar de que la posición del rotor es trivial, su velocidad tiene una fuerte aportación a la energía cinética y consecuente también a la dinámica del sistema completo. La posibilidad de poder apreciar este tipo de peculiaridades a través de un análisis del funcionamiento energético del sistema acoplado es una gran ventaja que se adquiere a través del modelado por ecuaciones de Lagrange.

Una vez obtenidas (2.9) y (2.13), el siguiente paso es definir al Lagrangiano del sistema como la diferencia entre estas dos energías.

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}J_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{q}_2^2 + mg\ell(\cos(q_1) - 1) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Evidentemente, el Lagrangiano también es una función de las coordenadas generalizadas y sus derivadas. Esto no debe extrañar ya que finalmente *el Lagrangiano es una función de energía*. Sin embargo, el Lagrangiano por sí solo no responde a la necesidad de encontrar un modelo matemático adecuado para el sistema en cuestión. Para lograr esta meta es necesario establecer unas ecuaciones de movimiento que relacionen la energía definida con las fuerzas que interactúan con el péndulo y el rotor. Estas ecuaciones de movimiento se expresan en términos del Lagrangiano de la siguiente manera,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \tau_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

Las ecuaciones definidas por (2.15) reciben el nombre de ecuaciones de Lagrange y son equivalentes a las ecuaciones que se derivarían utilizando la Segunda Ley de Newton. La formulación de (2.15) establece un sistema de n ecuaciones diferenciales que relacionan al Lagrangiano con las fuerzas τ_k , denominadas *pares generalizados*. La variable τ_k representa el par generalizado en la dirección q_k . Considerando las dos coordenadas generalizadas (2.2), para $k = 1, 2$ se tendrán dos pares generalizados, τ_1 y τ_2 , en la dirección de q_1 y q_2 respectivamente. El par τ_2 corresponde a aquél generado por el sistema electromecánico (motor de corriente directa) que actúa sobre el rotor, haciéndolo girar, y el par generalizado τ_1 es el par que actúa sobre el péndulo. Dado que en el sistema de la rueda de inercia sólo existen dos fuentes de energía, el motor de directa y la fuerza gravitacional, esto implica que el par τ_1 es producto de una de estas dos fuentes. El motor representa una fuerza rotacional, y por lo tanto es la única fuente de energía que puede generar el par τ_1 . Debido al acoplamiento mecánico que existe entre el péndulo y el rotor, la magnitud de τ_1 será idéntica a la de τ_2 , pero está se manifestará en un sentido opuesto. Es decir, el par del péndulo se relaciona con el par de entrada del rotor por medio de la identidad

$$\tau_1 = -\tau_2 \quad (2.16)$$

Por lo tanto, a partir de (2.15) y (2.16), las ecuaciones de Lagrange para la rueda de inercia quedan expresadas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= -\tau_2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \tau_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Como se puede observar en (2.17), antes de poder desarrollar un modelo matemático se requiere determinar las derivadas parciales del Lagrangiano (2.14):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = J_1 \dot{q}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial q_1} = -mg\ell \text{sen}(q_1) \qquad (2.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = J_2 \dot{q}_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \qquad (2.19)$$

Cabe señalar que la obtención de estas derivadas parciales permite apreciar de una manera más aislada y clara la aportación que tienen las coordenadas generalizadas y sus derivadas a la energía del sistema. Por ejemplo, el hecho de que $\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$ muestra que la energía del sistema no depende del ángulo del rotor, q_2 , tal y como se había analizado previamente. Entonces, al sustituir (2.18)-(2.19) en (2.17) finalmente se obtiene el modelo de la Rueda de Inercia *sin fricción*,

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{q}_1 + mg\ell \text{sen}(q_1) &= -\tau_2 \\ J_2 \ddot{q}_2 &= \tau_2 \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Sin embargo, los modelos usados frecuentemente en la literatura, e.g. [4], [2], contemplan adicionalmente la fuerza de fricción en el rotor. Estos modelos más elaborados se expresan en [2] por medio de la forma matricial

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \text{sen}(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau \qquad (2.21)$$

la cual es equivalente a

$$J_1 \ddot{q}_1 + J_2 \ddot{q}_2 + h \text{sen}(q_1) = 0 \qquad (2.22)$$

$$J_2 \ddot{q}_1 + J_2 \ddot{q}_2 = \tau \qquad (2.23)$$

y representa el modelo de la Rueda de Inercia *con fricción en el rotor*. Resulta importante contar con ambos modelos ya que (2.21) es una representación más precisa y conviene usarla en el diseño de un controlador para un mejor desempeño mientras que la simplicidad de (2.20) facilita las tareas de ciertos análisis.

Por último, si se define el vector de estados

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [q_1 \ \dot{q}_1 \ q_2 \ \dot{q}_2]^T$$

entonces tanto (2.20) como (2.21) se pueden representar a través de la forma no-lineal general

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \tau$$

respectivamente como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -J_1^{-1}h\text{sen}(x_1) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -J_1^{-1} \\ 0 \\ J_2^{-1} \end{bmatrix} \tau \quad (2.24)$$

$$\dot{x}_\mu = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(J_1 - J_2)^{-1}h\text{sen}(x_1) \\ x_4 \\ (J_2 - J_2^2 J_1^{-1})^{-1} J_2 J_1^{-1} h\text{sen}(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(J_1 - J_2)^{-1} \\ 0 \\ (J_2 - J_2^2 J_1^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \tau \quad (2.25)$$

Se debe mencionar que tanto (2.24) como (2.25) describen la dinámica de una rueda de inercia *general*. Los parámetros J_1 , J_2 y h pueden variar de prototipo a prototipo dependiendo de diversas propiedades físicas, como el peso y el diámetro del rotor, la longitud del péndulo, etc. Para el caso específico de la Rueda de Inercia de Quanser[®] que se muestra en la Figura 2.1(a) el proveedor proporciona los siguientes valores, obtenidos experimentalmente [1], para estos parámetros:

$$\begin{aligned} J_1 &= 4.5721\text{e} - 3 \\ J_2 &= 2.495\text{e} - 5 \\ h &= 0.35481 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos parámetros en (2.24) y (2.25) se obtienen la dos representaciones matemáticas del equipo que se controlará, considerando la fricción de la rueda en la primera y despreciando ésta en la segunda,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -77.6033\text{sen}(x_1) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -218.7179 \\ 0 \\ 40078.554 \end{bmatrix} \tau \quad (2.26)$$

$$\dot{x}_\mu = \begin{bmatrix} x_2 \\ -78.0291\text{sen}(x_1) \\ x_4 \\ 78.0291\text{sen}(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -219.9180 \\ 0 \\ 40298.4720 \end{bmatrix} \tau \quad (2.27)$$

2.2. Puntos de Equilibrio

Comúnmente se pueden encontrar los términos “punto de equilibrio estable” y “punto de equilibrio inestable” en la literatura asociada a la Rueda de Inercia [2], [4]. Resulta

importante abordar este concepto ya que se buscará generar las oscilaciones periódicas alrededor de estos dos puntos. Primero, se parte de la definición de punto de equilibrio [6] la cual dicta que un punto $x = x^*$ en el espacio de estados es un punto de equilibrio si siempre que un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(t, x)$$

empieza en x^* éste se mantendrá sobre x^* para todo tiempo futuro. La interpretación inmediata de esto es que el sistema no se mueve si está sobre un punto de equilibrio, es decir, $\dot{x}(t, x) \equiv 0$ para todo tiempo futuro dada la condición inicial del sistema, $x_o = x^*$. Por lo tanto, se pueden encontrar *todos* los puntos de equilibrio, Θ , de un sistema a partir de la solución de la ecuación

$$f(x) = 0$$

Aplicando esta identidad en el modelo simplificado (2.26), ya que sólo se busca definir una cualidad y no se requiere tanta precisión, da como resultado

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -77.6033\text{sen}(x_1) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Al resolver el sistema de cuatro ecuaciones (2.28) se obtiene que cualquier punto de equilibrio Θ debe satisfacer las relaciones

$$\begin{aligned} \text{sen}(x_1) &= 0 \\ x_2, x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

y por lo tanto existe un número infinito de puntos de equilibrio para este sistema,

$$\Theta_\infty \triangleq \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi i \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde $i \in \mathbb{Z}$. Para reducir el conjunto de puntos de equilibrio y facilitar el análisis posterior se considera lo siguiente,

Suposición 2.6:

La dinámica del péndulo se puede restringir dentro de un rango $q_1 \in [0, 2\pi]$, o bien la dinámica de la Rueda de Inercia es invariante ante cualquier periodicidad de q_1 .

La multiplicidad de (2.30) tiene una representación física clara en la Rueda de Inercia y ésta es el número de vueltas completas que da el péndulo en una dirección. Bajo Suposición 2.6, se asume que esto no modifica el comportamiento del sistema y por lo tanto se pueden definir *dos distintos puntos de equilibrio* para este sistema,

$$\Theta_1 \triangleq \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Theta_2 \triangleq \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

uno para cada solución $x_1 \in [0, 2\pi]$ de (2.29), que corresponden respectivamente a la posición vertical inferior y vertical superior de péndulo. Se puede observar nuevamente que la posición del rotor es una variable irrelevante en la dinámica de la Rueda de Inercia, en este caso porque ninguno de los dos puntos de equilibrio dependen de ella; no importa el desplazamiento angular del rotor $x_3 = q_2$, siempre y cuando su velocidad angular, $x_4 = \dot{q}_2$, sea cero.

Una vez que se encuentran los puntos de equilibrio del sistema (2.26), el siguiente paso es determinar la estabilidad, o bien inestabilidad, de cada uno. Conceptualmente, la estabilidad de un punto de equilibrio no se asocia con el punto en sí, si no con una cierta vecindad alrededor de él. Un punto de equilibrio será estable si cualquier trayectoria que inicié arbitrariamente cerca de él se mantendrá también relativamente cerca de él, de lo contrario el punto de equilibrio es inestable. Sin embargo, más allá del detalle conceptual, se requieren herramientas analíticas para poder determinar de manera concreta la naturaleza de cualquier punto de equilibrio. Para este propósito se puede invocar el teorema del Método Indirecto de Lyapunov, el cual establece que, dado el conjunto de valores propios

$$\lambda_i \triangleq \det [sI - A_\Theta] = 0 \tag{2.31}$$

un punto de equilibrio *de un sistema no-lineal*:

- es localmente estable si $\text{Re} \{\lambda_i\} < 0 \forall i$.
- es localmente inestable si $\text{Re} \{\lambda_i\} > 0$ para alguna i .
- puede ser localmente estable o localmente inestable si $\text{Re} \{\lambda_i\} \leq 0 \forall i$ y además $\text{Re} \{\lambda_i\} = 0$ para alguna i . En esta situación el método no puede concluir estabilidad o inestabilidad; se requiere un análisis adicional.

En el caso lineal, el origen de la matriz A_Θ es bien conocido; ésta es simplemente la matriz *lineal* de estados. Sin embargo, dada la estructura no-lineal de (2.26) no se puede hacer uso del Método Indirecto de Lyapunov inmediatamente. No obstante, existen

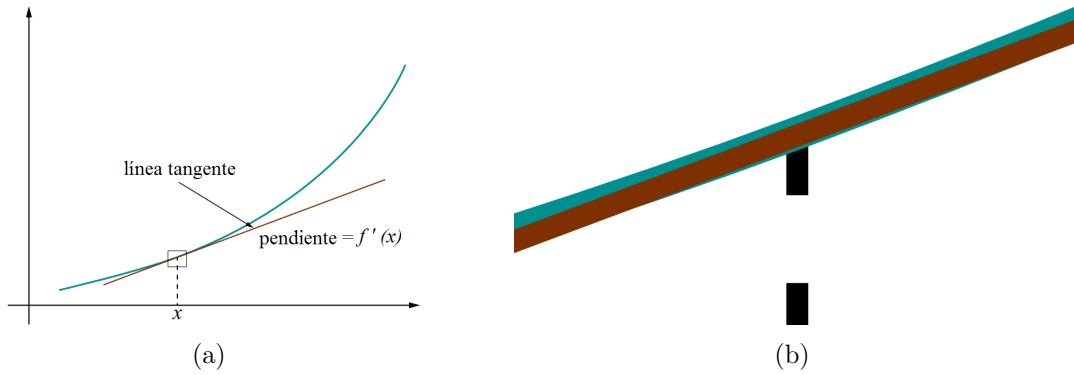


Figura 2.4: Naturaleza localmente lineal de una función no-lineal

diversas técnicas que permiten *aproximar* un cierto sistema no-lineal a través de una representación lineal. Una vez que se obtiene alguna de estas descripciones alternativas es posible entonces determinar un conjunto de valores propios por medio de (2.31).

Una técnica de linealización muy recurrida se basa en el análisis de una no-linealidad dentro de una región reducida, Figura 2.4(a), y se conoce como *linealización local*. Resulta ser que alrededor de un cierto punto, en este caso los puntos de equilibrio, cualquier sistema no-lineal tiene un comportamiento *localmente lineal* como se muestra en la Figura 2.4. Es obvio que este comportamiento se sostiene lejos del punto analizado, pero la propuesta de la linealización local es recorrer el punto de análisis a lo largo de la función para linealizarla completamente. Consecuentemente, se tendrá una linealización particular para cada punto en el dominio de la función no-lineal, las cuales se pueden determinar a partir del Jacobiano

$$\mathbf{A}_\Theta = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \quad (2.32)$$

Debido a que para la rueda de inercia sólo se requiere conocer las propiedades de estabilidad de sus dos punto de equilibrio, se debe evaluar (2.32) para cada uno de ellos. Calculando el Jacobiano,

$$\mathbf{A}_\Theta = \frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -77.6033 \cos(x_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se genera una matriz de linealización general en función del estado x_1 , la posición. Analizando primero el punto de equilibrio Θ_1 se cumple que

$$\cos(x_1) = \cos(0) = 1$$

y por lo tanto el Jacobiano correspondiente es

$$A|_{\Theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -77.6033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Se requiere ahora encontrar los valores propios (2.31) para (2.33), los cuales son la solución del polinomio característico

$$s^4 + 77.6033s^2 = 0$$

La solución de esta ecuación de cuarto orden arroja que

$$\lambda(\Theta_1) = \{0, 0, 8.8093i, -8.8093i\}$$

Como se puede observar, ningún valor de $\lambda(\Theta_1)$ tiene parte real; todos los polos del sistema linealizado alrededor de Θ_1 se ubican sobre el eje imaginario. Estos resultados indican que el punto de equilibrio Θ_1 es un centro y por lo tanto no es posible concluir sobre su estabilidad utilizando el criterio del Método Indirecto de Lyapunov. Tampoco se puede aplicar el Método Directo de Lyapunov, el cual dicta que una matriz es Hurwitz si y sólo si existe una solución única $P > 0$ que satisfaga la ecuación de Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q$$

para una matriz $Q > 0$. Basta con proponer una matriz Q identidad para obtener la ecuación de Lyapunov correspondiente

$$P \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -77.6033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -77.6033 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} P = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la cual no tienen solución; es decir, no se puede concluir la estabilidad del sistema *linealizado* alrededor del punto de equilibrio inferior. Sin embargo, se sabe intuitivamente que si se suelta el péndulo libremente desde cualquier punto que no esté ubicado sobre la vertical, eventualmente se detendrá justamente sobre la vertical inferior. Es decir, se sabe *a priori* que el punto de equilibrio Θ_1 es estable a pesar de que tanto el Método Indirecto y el Método Directo de Lyapunov no puedan concluir nada al respecto. Que la linealización local dictará que Θ_1 es un centro cuando en realidad es un foco estable es consecuencia de la Suposición 2.4, ya que al desprestigiar cualquier fuerza de fricción en la dinámica del sistema se excluyó la única fuente disipativa de energía. Al considerar el efecto de fricción en el péndulo se obtendría una linealización *estable* alrededor de Θ_1 ,

pero esto a cambio de una mayor complejidad en el modelo y, por ende, en el análisis posterior. Sí es posible trabajar con esta simplificación del modelo matemático, siempre y cuando se ejerza precaución previa a juicio sobre resultados, como en el caso de este punto de equilibrio.

Una vez analizado Θ_1 , se lleva a cabo el mismo análisis para Θ_2 a partir de

$$A|_{\Theta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 77.6033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

En este caso el polinomio característico es

$$s^4 - 77.6050s^2 = 0$$

y los valores propios para el sistema linealizado alrededor de Θ_2 son entonces

$$\lambda(\Theta_2) = \{0, 0, 8.8093, -8.8093\}$$

A diferencia de Θ_1 , la conclusión sobre la estabilidad de Θ_2 es inmediata; debido a que

$$\text{Re}\{\lambda_i\} > 0$$

para el valor propio $\lambda_3 = 8.8093$, el punto de equilibrio Θ_2 es *inestable* de acuerdo al Método Indirecto de Lyapunov. Nuevamente se le puede dar una interpretación física a este resultado y en este caso sí hay congruencia con lo que se sabe intuitivamente; el péndulo no se puede sostener libremente en el punto de equilibrio vertical superior. Aún suponiendo condiciones ideales, es decir el caso donde se tenga el modelo *exacto* y no se presenten perturbaciones en el sistema, es intuitivamente claro que si la rueda de inercia no inicia sobre la vertical superior entonces nunca regresará a este punto libremente y consecuentemente éste es inestable. Por lo tanto, de aquí en adelante se referirá a los puntos vertical inferior y vertical superior como puntos de equilibrio estable e inestable respectivamente.

Capítulo 3

Controlador de Estructuras Variables

3.1. Esquema General

El término “Sistema de Estructura Variable” (SEV) apareció por primera vez al final de los años 50’s. En esta época, el Dr. S. Emel’yanov publicó una propuesta novedosa de control donde las ganancias de retroalimentación podían tomar distintos valores constantes, dependiendo del estado del sistema. A través de una lógica de conmutación el sistema podía asumir el comportamiento de distintas estructuras lineales (de ahí el concepto de “estructuras variables”) y de esta manera adquiriría propiedades que no eran inherentes en cualquiera de las estructuras entre las cuales conmutaba, por ejemplo, estabilidad. A partir de este desarrollo teórico, el interés en esta área a generado nuevos resultados. Actualmente se puede encontrar, por ejemplo, una extensa literatura sobre el diseño de observadores basados en esta filosofía. Así también, se ha mostrado que es posible utilizar controladores discontinuos para generar oscilaciones periódicas [2]. Bajo esta motivación se abordará primero esta familia de controladores para cumplir con el objetivo general de inducir oscilaciones en la Rueda de Inercia.

Los controladores de estructura variable pueden provocar oscilaciones en un sistema a partir del contenido armónico de un relevador, el cual se puede describir por la función discontinua

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} -1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ 1 & \text{si } s > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Al introducir esta función en una ley de control, tomando en cuenta ciertos aspectos que se detallarán a continuación, se pueden provocar auto-oscilaciones de amplitud y frecuencia teóricamente arbitrarias. Cabe señalar la naturaleza no-lineal de (3.1). El

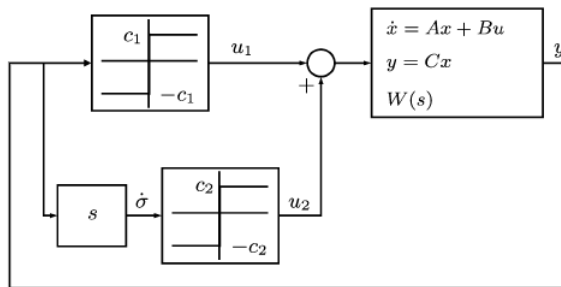


Figura 3.1: Esquema de control con dos relevadores para generar oscilaciones periódicas

fenómeno discontinuo es imposible de aproximar linealmente, lo cual motiva a reflexionar sobre las restricciones que impone trabajar únicamente con matemáticas lineales. Distintos dispositivos físicos, como transistores, y fenómenos cotidianos, como el proceso de caminar, tienen comportamientos que exigen el uso de control no-lineal y específicamente, de un control discontinuo.

La Figura 3.1 ilustra el esquema general de control que se implementará; éste consta de dos relevadores conectados en paralelo, los cuales dependen de la salida del sistema al que alimentan. El objetivo aquí es sintonizar las ganancias, c_1 y c_2 , de los relevadores para lograr las oscilaciones deseadas. Sin embargo, debido a que el análisis de este tipo de controladores se basa en la teoría de Función Descriptiva, no es posible trabajar con el modelo no-lineal (2.27) previamente obtenido para la Rueda de Inercia ya que, tal y como se muestra en la Figura 3.1, se requiere una planta lineal. Por lo tanto, el primer paso para poder implementar esta estrategia de control es obtener una linealización adecuada para el modelo (2.27).

3.2. Linealización por Retroalimentación

Como se mencionó previamente, la linealización del modelo de la Rueda de Inercia se puede llevar a cabo a través diversas metodologías. Para escoger un método de linealización adecuado es necesario considerar que la mayoría de las linealizaciones generan una *aproximación* de la verdadera dinámica del sistema que sólo es válida sobre una restringida región de operación. Cuando se linealizó el modelo de la rueda de inercia para determinar la estabilidad de los dos puntos de equilibrio el hecho de que se estaba utilizando una aproximación *local* era irrelevante; sólo se buscaba analizar la dinámica del sistema alrededor de esos dos puntos, no se requería conocer cómo se comportaba el sistema lejos de ellos, y por lo tanto en ese caso particular la linealización se justifica. Sin embargo, ahora se requiere generar oscilaciones de amplitud arbitraria en la totalidad del espacio de estados (por lo menos teóricamente), lo que descarta el uso de herramientas locales. Esto impone una fuerte restricción sobre la linealización

requerida: su validez debe ser *global*. Es aquí entonces donde se debe emplear el concepto de linealización por retroalimentación ya que éste representa una posible solución al problema de linealización global.

Primero, considérese el siguiente sistema no-lineal SISO de grado relativo ρ ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones lo suficientemente suaves, es decir, con todas sus derivadas requeridas continuas, sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Este sistema se define como *linealizable por retroalimentación de estados* [6], o linealizable entrada-estado, si existe un difeomorfismo $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $D_z = T(D)$ contenga el origen y el cambio de variables

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \\ \hline h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1}h(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \hline \xi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

transforme el sistema (3.2) a la forma

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (3.4a)$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}_C \xi + \mathbf{B}_C \gamma(x) [u - \alpha(x)] \quad (3.4b)$$

$$y = \mathbf{C}_C \xi \quad (3.4c)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^\rho$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-\rho}$, el par $(\mathbf{A}_C, \mathbf{B}_C)$ es controlable, $(\mathbf{A}_C, \mathbf{B}_C, \mathbf{C}_C)$ es la representación en forma canónica de una cadena de ρ integradores dadas las identidades

$$\begin{aligned} f_0(\eta, \xi) &= \frac{\partial \eta}{\partial x} f(x)|_{x=T^{-1}(z)} \\ \gamma(x) &= L_g L_f^{\rho-1} h(x) \\ \alpha(x) &= -\frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \end{aligned}$$

para toda $x \in D$. La nueva estructura, (3.4), se conoce como forma normal y descompone al sistema en una parte externa ξ y una parte interna η . La idea posterior es eliminar las no-linealidades $\alpha(x)$ y $\gamma(x)$ de (3.4b) por medio de una retroalimentación que establece el control

$$u = \alpha(x) + \gamma^{-1}(x)v$$

y de esta forma (3.4b) se obliga a asumir la dinámica lineal

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}_C \xi + \mathbf{B}_C v$$

La ventaja adquirida es que ahora se pueden utilizar herramientas de la teoría de control de sistemas lineales para lograr que (3.4b) se comporte de la manera deseada, manipulando la ubicación de los polos de este nuevo sistema a través del control v . El punto importante es que las no-linealidades del sistema no se están aproximando, sino que se están cancelando por medio del control u . Mas aun, como el difeomorfismo (3.3) se define para toda $x \in D$, la linealización de (3.2) se sostiene en la totalidad del dominio D .

Por otro lado, un análisis de (3.4) permite ver que cuando $\xi = 0$ su estabilidad se puede ver comprometida por la dinámica interna (o dinámica cero)

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0) \tag{3.5}$$

aún a pesar de un exitoso control de (3.4b). La razón de esta problemática reside en que, *una vez que se linealiza el sistema*, (3.4b) ya no depende de x y la dinámica (3.4a), que se relacionaba con ξ a través de x , deja de estar acoplada a (3.4b) y por ende también al control v . Consecuentemente, (3.5) no es controlable a través de v . Para sistemas de fase mínima ($\rho = n$), la dimensión de la dinámica cero es nula y en este caso basta con un diseño apropiado de (3.4b) para controlar la dinámica completa del sistema. Sin embargo, para sistemas de fase no-mínima ($\rho < n$) es un requisito a priori que la dinámica cero sea estable, de lo contrario se tendrán problemas inevitables de inestabilidad.

Bajo las consideraciones anteriores, se prosigue a linealizar por retroalimentación de estados la dinámica no-lineal de la rueda de inercia. El punto de partida es buscar un difeomorfismo que transforme (2.21), o equivalentemente (2.22)-(2.23), a la forma (3.4b)-(3.4c), de tal manera que se elimine la dinámica cero. Dicho de otra manera, se busca un mapeo que lleve (2.21) a una estructura de fase mínima. Sin embargo, se puede probar que dicha transformación no existe para la Rueda de Inercia [Apéndice A], lo que es equivalente a decir que el sistema (2.21) es de fase no-mínima. Considerando el hecho de que es imposible eliminar la dinámica cero de la Rueda de Inercia, el nuevo objetivo entonces es minimizar la dimensión de esta dinámica indeseada para disminuir las probabilidades de inestabilidad en (3.4a).

Recientemente se han logrado aportaciones teóricas que permiten encontrar una dinámica cero de dimensión lo más pequeña posible para ciertos tipos de sistemas mecánicos. En el caso particular de sistemas mecánicos simples¹ con un grado de subactuación en su variable cíclica y que no conservan su momento de inercia respecto a ésta, [7] presenta la formulación de un conjunto de salidas para generar un *sistema de fase mínima*

¹Un sistema se define como *simple* si su energía cinética es cuadrática en las velocidades y su energía potencial depende únicamente de las coordenadas generalizadas.

con una *dinámica cero exponencialmente estable de dimensión unitaria*. Estos resultados se pueden aplicar directamente a la Rueda de Inercia ya que pertenece a esta clase de mecanismos: tiene un grado de subactuación ($N = 2$ grados de libertad con $N - 1 = 1$ actuadores independientes de la variable cíclica q_1), es simple (debido a (2.9), (2.13)) y no conserva su momento angular respecto a q_1 (la dinámica se desenvuelve sobre un plano vertical y por lo tanto interviene la gravedad). Al aplicar los resultados de [7] se puede resolver el problema de reducir la dimensión de la dinámica cero de la Rueda de Inercia, ya que ésta será igual a uno, lo cual representa un resultado fundamental para el diseño de este controlador.

Como primer paso para implementar el algoritmo de [7] se requiere reescribir (2.22)-(2.23) en la forma matricial

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B\tau$$

donde $B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \end{bmatrix}^T$. Tomado $F(q, \dot{q}) \triangleq C(q, \dot{q})\dot{q} + G$, la dinámica de la rueda de inercia queda descrita por

$$\begin{aligned} D_{1,1}\ddot{q}_1 + D_{1,2}\ddot{q}_2 + F_1 &= 0 \\ D_{2,1}\ddot{q}_1 + D_{2,2}\ddot{q}_2 + F_2 &= \tau \end{aligned} \iff \begin{aligned} J_1\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2 + h\text{sen}(q_1) &= 0 \\ J_2\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2 &= \tau \end{aligned}$$

de donde se desprende que

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ D_{2,1} & D_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\text{sen}(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A partir de esta transformación se puede definir entonces

$$\begin{aligned} \bar{D} &= D_{2,2} - \frac{D_{2,1}D_{1,2}}{D_{1,1}} = J_2 - J_1^{-1}J_2^2 \\ \bar{F} &= F_2 - \frac{D_{2,1}F_1}{D_{1,1}} = -J_1^{-1}J_2h\text{sen}(q_1) \\ R &= -\frac{F_1}{D_{1,1}} = -J_1^{-1}h\text{sen}(q_1) \end{aligned}$$

con el propósito de establecer la ley de retroalimentación

$$\begin{aligned} \tau &= \bar{D}v + \bar{F} \\ &= J_2(1 - J_1^{-1}J_2)v - J_1^{-1}J_2h\text{sen}(q_1) \end{aligned} \tag{3.6}$$

que permite llevar el sistema (2.22)-(2.23) a su *forma normal*. Esta estructura particular se obtiene primero despejando \ddot{q}_1 de (2.22),

$$\ddot{q}_1 = -J_1^{-1}h\text{sen}(q_1) - J_1^{-1}J_2\ddot{q}_2 \quad (3.7)$$

y luego sustituyendo (3.6), (3.7) en (2.23) para obtener

$$\begin{aligned} J_2 \left(-J_1^{-1}J_2\ddot{q}_2 - J_1^{-1}h\text{sen}(q_1) \right) + J_2\ddot{q}_2 &= J_2 \left(1 - J_1^{-1}J_2 \right) v - J_1^{-1}J_2h\text{sen}(q_1) \\ J_2\ddot{q}_2 \left(-J_1^{-1}J_2 + 1 \right) &= J_2v \left(-J_1^{-1}J_2 + 1 \right) \\ v &= \ddot{q}_2 \end{aligned}$$

El sistema resultante de esta primera transformación,

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -J_1^{-1}h\text{sen}(q_1) - J_1^{-1}J_2\ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 &= v \end{aligned}$$

es la forma normal de (2.22)-(2.23). Sin embargo esta forma no permite un diseño claro de un controlador; se requiere llegar a una estructura conformada por una cadena de integradores, de tal manera que (3.4) se satisfaga. Para esto se necesita definir la variable

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=0}^N D_{0,i}\dot{q}_i \\ &= J_1\dot{q}_1 + J_2\dot{q}_2 \end{aligned}$$

la cual representa el momento generalizado conjugado respecto a q_1 . Derivando a σ respecto al tiempo

$$\dot{\sigma} = J_1\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2$$

e igualando con (2.22) se obtiene

$$\dot{\sigma} = -h\text{sen}(q_1) \quad (3.8)$$

Ahora es posible, a partir de (3.8), integrar (3.7) respecto al tiempo para obtener *la forma normal modificada*,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -h\text{sen}(q_1) \\ \dot{q}_1 &= J_1^{-1}\sigma - J_1^{-1}J_2\dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 &= v \end{aligned} \quad (3.9)$$

Una vez que se obtiene la forma normal modificada se debe buscar una función

$$p_1 : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$$

donde \mathcal{O} es un conjunto abierto, de tal manera que se pueda definir un difeomorfismo para mapear de (q_1, q_2) hacia (p_1, q_2) . Para el punto de equilibrio $(q_1^*, q_2^*) = (\pi, 0)$ se puede definir

$$\begin{aligned} p_1 &= q_1 - q_1^* + \int_{q_2^*}^{q_2} \frac{D_{1,2}}{D_{1,1}} d\delta \\ &= q_1 - \pi + \int_0^{q_2} J_1^{-1} J_2 d\delta \\ &= q_1 - \pi + J_1^{-1} J_2 q_2 \end{aligned}$$

y a su derivada como

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{\sigma}{D_{1,1}(q_2)} \\ &= J_1^{-1} \sigma \end{aligned}$$

con el objetivo de construir la salida

$$\begin{aligned} y = \zeta &= K p_1 + \sigma \\ &= K (q_1 - \pi + J_1^{-1} J_2 q_2) + J_1 \dot{q}_1 + J_2 \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

la cual se puede demostrar produce un sistema exponencialmente de fase mínima para una constante $K \in \mathbb{R}$. Para esto, se calculan las derivadas de la salida propuesta (3.10),

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= K \dot{p}_1 + \dot{\sigma} \\ &= K J_1^{-1} \sigma - h \text{sen}(q_1) \\ \ddot{\zeta} &= K J_1^{-1} \dot{\sigma} - \frac{d}{dt} (h \text{sen}(q_1)) \\ &= -K J_1^{-1} h \text{sen}(q_1) - h \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ &= -K J_1^{-1} h \text{sen}(q_1) - h \cos(q_1) (J_1^{-1} \sigma - J_1^{-1} J_2 \dot{q}_2) \\ \ddot{\zeta} &= -K J_1^{-1} h \frac{d}{dt} (\text{sen}(q_1)) - h \frac{d}{dt} (\cos(q_1)) (\dot{q}_1) - h \cos(q_1) (J_1^{-1} \dot{\sigma} - J_1^{-1} J_2 \ddot{q}_2) \\ &= -K J_1^{-1} h \cos(q_1) \dot{q}_1 + h \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 (\dot{q}_1) - h \cos(q_1) (J_1^{-1} \dot{\sigma} - J_1^{-1} J_2 \ddot{q}_2) \\ &= f_1(q_1, \dot{q}_1) + f_2(q_1) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} f_2(q_1) &= J_1^{-1} J_2 h \cos(q_1) \\ f_1(q_1, \dot{q}_1) &= J_1^{-1} h \cos(q_1) (h \text{sen}(q_1) - K \dot{q}_1) + h \text{sen}(q_1) \dot{q}_1^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se puede observar que la señal de control v aparece hasta la tercera derivada (3.11) de la salida ζ , (3.10); esto quiere decir que el grado relativo del sistema es $\rho = 3$, y entonces se puede calcular la dimensión de la dinámica cero del sistema como

$$\begin{aligned}\dim(\dot{\eta}) &= \dim(f_\mu(x, \tau)) - \rho \\ &= 4 - 3 = 1\end{aligned}$$

demostrando así que la salida (3.10) produce una dinámica cero unidimensional.

Finalmente, sólo resta definir un control v que linealice el sistema (3.9). Si se cumple que la función $f_2(q_1)$ definida por (3.12) no es singular alrededor del punto de equilibrio $q_1^* = \pi$ entonces se puede proponer el control

$$v = f_2^{-1}(q_1) \left[u - a_0\zeta - a_1\dot{\zeta} - a_2\ddot{\zeta} - f_1(q_1, \dot{q}_1) \right]$$

donde a_0, a_1, a_2 son constantes positivas, talque el modelo de la rueda de inercia quede linealizado por retroalimentación en términos de los estados

$$x_{lr} = \left[\zeta \quad \dot{\zeta} \quad \ddot{\zeta} \quad p_1 \right]^T$$

con la forma lineal clásica:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{lr} &= \mathbf{A}x_{lr} + \mathbf{B}u \\ y_{lr} &= \mathbf{C}x_{lr}\end{aligned}$$

que para el caso de la rueda de inercia sostiene $\bar{x} \in \mathbb{R}^4$. Por lo tanto, el sistema linealizado por retroalimentación de estados queda como

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} \\ \dot{\zeta} \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & 0 \\ J_1^{-1} & 0 & 0 & -KJ_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} \\ \zeta \\ p_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_{lr}\end{aligned}\tag{3.13}$$

Logrado el objetivo de linealización se puede ahora utilizar un controlador discontinuo para diseñar una solución periódica para la salida $y(t)$ que permita flexibilidad en los parámetros, tanto de amplitud como de frecuencia, de dicha salida.

3.3. El Controlador de Dos Relevadores

3.3.1. Función Descriptiva

El controlador *two-relay*, o de dos relevadores, se define como

$$u = -c_1 \operatorname{sgn}(y) - c_2 \operatorname{sgn}(\dot{y})\tag{3.14}$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Se puede observar que este control depende directamente de la salida $y(t)$ y de su respectiva derivada $\dot{y}(t)$, así como de los dos escalares c_1, c_2 . Debido a que la salida $y(t)$ y su derivada $\dot{y}(t)$ quedaron definidas a partir de la linealización exacta parcial, quedan entonces como parámetros libres de diseño las constantes c_1, c_2 . El propósito ahora es encontrar los valores de estos dos escalares de tal manera que la función escalar de salida $y(t)$ genere trayectorias periódicas con frecuencia Ω y amplitud \mathcal{A} deseadas, es decir su busca lograr que

$$y(t) = \mathcal{A} \text{sen}(\Omega t + \Phi) \quad (3.15)$$

considerando un posible desfaseamiento $\Phi \in \mathbb{R}$. Para cumplir este objetivo se emplearán resultados que se desprenden de la metodología de Función Descriptiva (DF por sus siglas en inglés). Esta herramienta matemática permite hacer un análisis en frecuencia de ciertos sistemas no-lineales a través del cual es posible determinar la existencia de ciclos límites. El concepto fundamental del cual se parte es que, a diferencia de sistemas lineales, una entrada senoidal de frecuencia ω y amplitud A no necesariamente produce una salida con frecuencia ω . Sin embargo, se puede intuir que la frecuencia de la salida del sistema no lineal debería de tener una relación con la frecuencia ω de la entrada y es precisamente esta dependencia la que expresa la Función Descriptiva:

$$\begin{aligned} N(A, \omega) &= \frac{p \exp(j(\omega t + \phi))}{A \exp(j\omega t)} = \frac{p}{A} e^{j\phi} \\ &= \frac{1}{A} (b_1 + ja_1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

con $p = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, donde $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ son los coeficientes de Fourier de la *primera* componente armónica de la respuesta en frecuencia de la no-linealidad bajo consideración ante una entrada senoidal de amplitud A y frecuencia ω . Es cierto que la expansión *exacta* de cualquier señal periódica, con periodo $T = 2\pi$, es una suma *infinita* de armónicos,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \text{sen}(n\omega x)] \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen}(n\omega t) dt, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Sin embargo, se puede *aproximar* la serie de Fourier (3.17) de un relevador considerando únicamente la armónica fundamental ($n = 1$) y la componente de directa a_0 a partir de la siguiente suposición,

Suposición 3.1:

La dinámica de la planta lineal (3.13) filtra satisfactoriamente todas las frecuencias mayores a la frecuencia fundamental, ω .

Adicionalmente, considerando la función de un relevador general con un escalamiento arbitrario $M \in \mathbb{R}$,

$$M \operatorname{sgn}(\cdot) \quad (3.18)$$

se cumple que

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \operatorname{sgn}(t) dt = 0 \quad (3.19)$$

Por lo tanto, a partir de Suposición 3.1 y (3.19), se sostiene que (3.16) es una *aproximación* válida de la respuesta en frecuencia de un relevador.

En el caso específico del controlador de dos relevadores (3.14), se ha calculado la función descriptiva como [2]:

$$N(A, \omega) = \frac{\omega}{\pi A} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt + j \frac{\omega}{\pi A} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \operatorname{cos}(\omega t) dt$$

Esta formulación ciertamente resulta tediosa, pero se pueden utilizar propiedades del sistema para simplificar el cálculo involucrado. Específicamente, se puede aprovechar la estructura lineal de (3.13) para calcular la función descriptiva de la señal de control no-lineal, que tiene dos términos, haciendo uso del principio de superposición; es decir, se calculará la función descriptiva de cada relevador por separado y posteriormente se sumarán sus efectos individuales para calcular la función descriptiva del controlador (3.14). Considerando la simetría impar de la función (3.18) el coeficiente

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \operatorname{sgn}(t) \operatorname{cos}(\omega t) d(\omega t) = 0 \quad (3.20)$$

para los dos términos del control, ya que ambos son no-linealidades impares. Entonces en el caso de ambos relevadores la salida sólo involucra un coeficiente de Fourier, específicamente:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \operatorname{sgn}(t) \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} M \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi} M \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por lo tanto, sustituyendo (3.20), (3.21) en (3.16) se obtiene la Función Descriptiva de un relevador,

$$\begin{aligned} N_{\text{relay}}(A, M) &= \frac{1}{A} \left(\frac{4}{\pi} M + 0j \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{M}{A} \end{aligned}$$

De este último resultado se desprende una conclusión importante: *la Función Descriptiva de un relevador no depende de la frecuencia de la señal de excitación*. La única forma de modificar la respuesta en frecuencia de un relevador es manipulando la amplitud A de la señal de excitación y/o el factor de escalamiento M de dicho relevador.

Ahora ya es posible analizar los dos relevadores que comprenden este controlador. En el caso del primer relevador,

$$-c_1 \text{sgn}(y) \tag{3.22}$$

su señal de excitación es la señal $y(t)$, la cual tiene una amplitud A_1 y una frecuencia ω_1 asociadas. Por otro lado, el objetivo de control es lograr que esta señal $y(t)$, la salida de la planta lineal (3.13), se comporte de manera oscilatoria conforme a (3.15). Esto lleva a la siguiente relación,

$$A_1 = \mathcal{A}$$

Además, como el factor de escalamiento M_1 del primer relevador es

$$M_1 = c_1$$

entonces la Función Descriptiva del primer relevador (3.22) es

$$N_1 = \frac{4}{\pi} \frac{M_1}{A_1} = \frac{4}{\pi} \frac{c_1}{\mathcal{A}}$$

Semejantemente, para el segundo relevador

$$-c_2 \text{sgn}(\dot{y}) \tag{3.23}$$

su factor de escalamiento es

$$M_2 = c_2$$

y su señal de excitación es la derivada de la salida periódica deseada (3.15),

$$\frac{dy}{dt} = \Omega \mathcal{A} \cos(\Omega t + \Phi)$$

de donde se desprende que

$$A_2 = \Omega \mathcal{A}$$

y por lo tanto la Función Descriptiva asociada al segundo relevador (3.23) es

$$N_2 = \frac{4 M_2}{\pi \Omega \mathcal{A}} = \frac{4 c_2}{\pi A_2}$$

Adicionalmente se tiene que considerar que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(s) \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\} &= s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) \end{aligned}$$

donde $y(0)$ es la condición inicial de $y(t)$ evaluada en $t = 0$ y $\mathcal{L}\{\cdot\}$ es la transformada de Laplace que mapea una relación en el dominio del tiempo hacia el dominio de la frecuencia compleja s . Para simplificar el análisis posterior se hace la siguiente consideración,

Suposición 3.2:

La condición inicial de la salida siempre es nula; esto es, $y(0) = 0$.

De esta manera se llega finalmente a la Función Descriptiva del controlador de dos relevadores,

$$\begin{aligned} N_u(\mathcal{A}) &= N_1 + sN_2 \\ &= \frac{4c_1}{\pi \mathcal{A}} + s \frac{4c_2}{\pi \Omega \mathcal{A}} \end{aligned}$$

la cual, debido al hecho que $s = j\omega$ en el análisis de frecuencia de oscilaciones, se reduce a

$$N_u(\mathcal{A}) = \frac{4}{\pi \mathcal{A}} (c_1 + jc_2) \tag{3.24}$$

3.3.2. Ajuste de los Parámetros del Controlador

Una vez definida la Función Descriptiva (3.24) del controlador de dos relevadores (3.14) se prosigue a determinar los valores de los parámetros c_1, c_2 que garanticen la existencia de un ciclo límite para la salida $y(t)$ de tal manera que (3.15) se cumpla. Para esto se utilizará el Método de Balance Armónico, el cual dicta la existencia de un ciclo límite si se cumple la ecuación de balance armónico,

$$W(j\Omega) = \frac{-1}{N_u(\mathcal{A})} \tag{3.25}$$

donde $W(s)$ es la gráfica de Nyquist que se desprende de la función de transferencia del sistema linealizado (3.13),

$$W(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.26)$$

Esta ecuación se cumple en el punto donde la función $-N^{-1}(\mathcal{A})$ interseca la traza de Nyquist (3.26) evaluada en la frecuencia Ω . Se puede encontrar un valor aproximado de los parámetros c_1 y c_2 tomando en cuenta que la función $-N^{-1}(\mathcal{A})$ representa una línea recta cuya pendiente *depende proporcionalmente* de la taza c_2/c_1 ya que si ésta se fija entonces (3.25) se determina unívocamente. En resumen, el procedimiento para ajustar c_1 y c_2 es el siguiente:

- a) Identificar el cuadrante en la traza de Nyquist donde se ubica la frecuencia deseada, i.e., Ω puede pertenecer a cualquiera de estos conjuntos:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{\Omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\Omega)\} > 0, \text{Im}\{W(j\Omega)\} \geq 0\} \\ Q_2 &= \{\Omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\Omega)\} \leq 0, \text{Im}\{W(j\Omega)\} \geq 0\} \\ Q_3 &= \{\Omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\Omega)\} \leq 0, \text{Im}\{W(j\Omega)\} < 0\} \\ Q_4 &= \{\Omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\Omega)\} > 0, \text{Im}\{W(j\Omega)\} < 0\} \end{aligned}$$

- b) Se fija la taza

$$\xi = \frac{c_2}{c_1} = -\frac{\text{Im}\{W(j\Omega)\}}{\text{Re}\{W(j\Omega)\}}$$

- c) Se utiliza el concepto de fasores para representar al control (3.14) como la suma de dos vectores gitorios. Se sustituye (3.24) en (3.25) para obtener

$$\begin{aligned} W(j\Omega) &= -\frac{\pi\mathcal{A}}{4(c_1 + jc_2)} \\ |W(j\Omega)| &= \mathcal{A}\frac{\pi}{4|c_1 + jc_2|} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Finalmente se despeja \mathcal{A} de (3.27) y se obtiene que la amplitud \mathcal{A} y la frecuencia Ω de las oscilaciones deseadas se relacionan con los parámetros c_1 y c_2 a través de

$$\mathcal{A} = \frac{4}{\pi} \left| W(j\Omega) \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \right|$$

Por lo tanto, se pueden calcular los valores de c_1, c_2 como:

$$\begin{aligned} c_1 &= \begin{cases} \frac{\pi}{4} \frac{\mathcal{A}}{|W(j\Omega)|} (\sqrt{1 + \xi^2})^{-1} & \text{si } \Omega \in Q_2 \cup Q_3 \\ -\frac{\pi}{4} \frac{\mathcal{A}}{|W(j\Omega)|} (\sqrt{1 + \xi^2})^{-1} & \text{en cualquier otra región} \end{cases} \\ c_2 &= \xi \cdot c_1 \end{aligned}$$

Capítulo 4

Controlador por Restricciones Holonómicas

4.1. Preliminares: Restricciones Holonómicas

Una restricción holonómica, \mathcal{H} , para un conjunto (2.1) de coordenadas generalizadas es aquella que se puede expresar como [8]

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n) = \text{const} \quad (4.1)$$

dado que de esta forma las variaciones infinitesimales del sistema satisfacen

$$\Delta q_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} + \Delta q_2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} + \dots + \Delta q_n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} = 0 \quad (4.2)$$

Cuando la ecuación (4.2) se cumple ésta es una ecuación diferencial integrable (holonómica) y como tal representa el diferencial completo de (4.1). De lo contrario, la restricción se dice que es no-holonómica.

La presencia de una restricción holonómica en un sistema físico *acopla* a dos o más de sus variables. Esto permite describir la dinámica general de todas las variables del sistema a partir de las variaciones infinitesimales en dichas variables, lo cual simplifica considerablemente el análisis matemático tal y como se puede apreciar en el ejemplo de una restricción no-holonómica en un trineo, Figura 4.1. La acción de la fricción sobre el trineo prácticamente imposibilita un movimiento lateral para desplazamientos infinitesimales por lo que se genera una restricción sobre el desplazamiento vertical, d_y , y el desplazamiento horizontal, d_x , definida por

$$\Delta d_y = \Delta d_x \tan \theta \quad (4.3)$$

En este caso el desplazamiento del sistema tiene dos grados de libertad. Sin embargo, para movimientos a gran escala se deben considerar tres grados de libertad ya que se

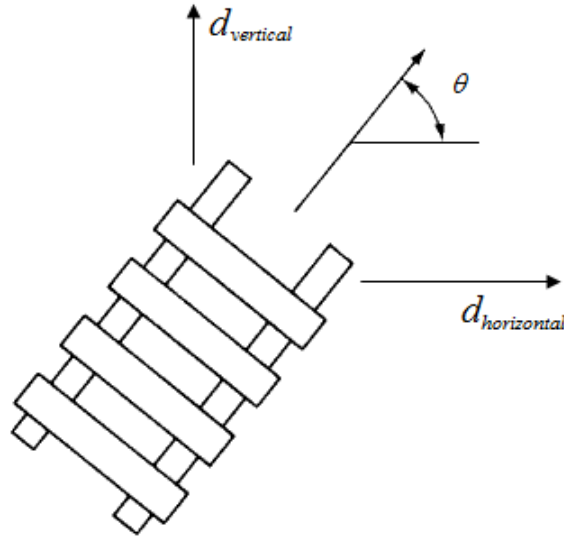


Figura 4.1: Las variables del sistema de un trineo exhiben una restricción no-holonómica

requiere tanto a θ como a d_x y d_y para determinar exactamente la posición y orientación del trineo. Es claro entonces que la restricción (4.3) no se sostiene para todas las dinámicas del trineo y por lo tanto se considera como una restricción no-holonómica. Si se lograra hacer la restricción (4.3) invariante, i.e. holonómica, la dinámica del trineo, y consecuentemente su control, se simplificaría, por lo menos matemáticamente. A pesar de que la restricción holonómica de desplazamiento no surge de manera natural, es posible provocarla por medio de la acción del control y en este caso se denominaría como una *restricción holonómica virtual*.

Resulta ser que se pueden resolver diversos problemas de control a través de esta idea de imponer restricciones holonómicas virtuales en las variables del sistema; la generación de oscilaciones periódicas es un ejemplo particular. Recientemente se ha logrado provocar oscilaciones periódicas en sistemas mecánicos subactuados bajo esta metodología, específicamente el péndulo de Furuta [9] y la Rueda de Inercia [4]. A continuación se presentan los pasos diseñados en [4] que permiten lograr el objetivo de generar oscilaciones de una amplitud pre-especificada y un periodo arbitrariamente independiente en la Rueda de Inercia.

4.2. Planeación de Trayectorias

La meta principal del controlador por restricciones holonómicas [4] es diseñar una ley de control que cumple con el mismo objetivo planteado: lograr que el péndulo oscile con una amplitud \mathcal{A} y una frecuencia $\Omega = T^{-1}$ independientemente determinadas. Para este controlador, la amplitud de oscilación se definirá como la desviación máxima, en

una dirección especificada, desde un punto de equilibrio. Las oscilaciones *deseadas* del péndulo deben satisfacer las especificaciones:

$$\begin{aligned} q_{1*}(t+T) &= q_{1*}(t) \quad \forall t \\ \inf_{t \in [0, T]} \{q_{1*}(t) - \bar{q}_1\} &< 0 \\ \sup_{t \in [0, T]} \{q_{1*}(t) - \bar{q}_1\} &= \mathcal{A} \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $\bar{q}_1 \in [0, \pi]$ es uno de los dos puntos de equilibrio del sistema no forzado.

Por otro lado, el reto de generar este comportamiento periódico se puede transformar en un problema de planeación y seguimiento de trayectoria; es decir, a diferencia del controlador de dos relevadores, en este caso se buscará que el péndulo siga una trayectoria oscilatoria *prescrita* orbitalmente estable. Adicionalmente, es posible encontrar un cambio de coordenadas bajo el cual una evolución cíclica de la posición del péndulo, en las coordenadas originales, corresponda a la *regulación* hacia cero de algunas de las coordenadas transformadas. Dicho cambio de coordenadas se definirá bajo el concepto de restricciones holonómicas para introducir e imponer una relación directa entre las dos coordenadas generalizadas, la posición del péndulo (q_1) y la posición del rotor (q_2). De esta forma se puede restringir la dinámica del péndulo en función del ángulo de la rueda, o también al contrario, se puede restringir el ángulo de la rueda en función del ángulo del péndulo. Ya que la variable de interés es el ángulo del péndulo, tiene sentido expresar la posición del rotor en función de la posición del péndulo a través de

$$q_2 = \mathcal{H}(q_1) \tag{4.5}$$

donde la restricción holonómica $\mathcal{H} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable por lo menos dos veces. A partir de esta restricción holonómica es posible describir la dinámica completa del sistema en términos de la posición del péndulo únicamente. Si se asume que existe una ley de control que hace la restricción (4.5) invariante, entonces la dinámica de la Rueda de Inercia, proyectada bajo (4.5), se puede representar como

$$\alpha(q_{1*}) \ddot{q}_{1*} + \beta(q_{1*}) \dot{q}_{1*}^2 + \gamma(q_{1*}) = 0 \tag{4.6}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha(q_1) &= J_1 + J_2 \mathcal{H}'(q_1) \\ \beta(q_1) &= 2J_2 \mathcal{H}''(q_1) \\ \gamma(q_1) &= h \text{sen}(q_1) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Como se puede apreciar, (4.6) es integrable siempre y cuando $\alpha(q_{1*}) \neq 0$. Es importante notar que esta nueva dinámica es de *segundo orden*, en contraste con la dinámica original (2.21) de *cuarto orden*. La reducción de orden para la dinámica proyectada (4.6) se

debe a que la restricción (4.12) elimina un grado de libertad del sistema, al imponer una dependencia directa de q_2 sobre q_1 , y por lo tanto dos variables de estado (q_2, \dot{q}_2) se eliminan en la nueva dinámica. Después de transformar el sistema (2.21) a la forma holonómicamente restringida (4.6)-(4.7), el enfoque gira ahora hacia la manera de forzar a que esta última dinámica reducida contenga una trayectoria periódica estable que satisfaga las especificaciones (4.4).

Ya que no es posible generar oscilaciones alrededor de cualquier punto arbitrario, el primer paso en el diseño de una trayectoria periódica para (4.6) es investigar dónde es posible encontrar un ciclo límite. Se sabe que cualquier órbita periódica de un sistema debe encerrar a por lo menos uno de sus puntos de equilibrio [6]. En el caso particular de (4.6), el conjunto de sus puntos de equilibrio se determina, independientemente de la restricción holonómica (4.12), a través de la solución de la ecuación

$$\gamma(q_1) = h \operatorname{sen}(q_1) = 0$$

Resolviendo, se obtiene un conjunto infinito de puntos de equilibrio

$$q_{1eq} = q_{1i} = \pi i, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (4.8)$$

Cabe señalar que, aunque los puntos de equilibrio (4.8) del sistema reducido (4.6) son los mismos que los puntos de equilibrio (2.30) del sistema linealizado, en [10] se muestra que cualquier elemento de (4.8) es un centro del sistema no-lineal proyectado (4.6), y por lo tanto existen trayectorias periódicas a su alrededor, si

$$\frac{\gamma'(q_{1i})}{\alpha(q_{1i})} = \frac{(-1)^i h}{J_1 + J_2 \mathcal{H}'(\pi i)} > 0 \quad (4.9)$$

Esta relación impone un criterio que la restricción holonómica (4.12) debe cumplir, aún cuando ésta no se haya definido. Específicamente, (4.9) relaciona la derivada \mathcal{H}' , evaluada en un punto de equilibrio, con los parámetros físicos de la Rueda de Inercia y la ubicación de los centros (4.8).

Una vez que se determinan los centros de los ciclos límites del sistema (4.6)-(4.7), verificando qué puntos de (4.8) cumplen con (4.9), se prosigue a buscar una expresión que permita relacionar la amplitud \mathcal{A} y la frecuencia Ω de las trayectorias de dicho ciclo límite. Para esto se parte de la ecuación del momento conservado de inercia en cada trayectoria completa del modelo proyectado (4.6)-(4.7), la cual se define [4] como

$$I(q_{1*}, \dot{q}_{1*}, x_0, y_0) = \frac{\dot{q}_{1*}^2}{2} - \frac{(\dot{q}_{1*}(0))^2}{2} e^{-\int_{x_0}^{q_{1*}} \frac{2\beta(\delta)}{\alpha(\delta)} d\delta} + \int_{x_0}^{q_{1*}} e^{-\int_s^{q_{1*}} \frac{2\beta(\delta)}{\alpha(\delta)} d\delta} \frac{\gamma(s)}{\alpha(s)} ds = 0 \quad (4.10)$$

donde $\chi_0 = q_{1*}(0)$ es constante. Este momento conservado permite relacionar la frecuencia Ω y la amplitud \mathcal{A} a través de [4]

$$\Omega^{-1} = \sqrt{2} \int_{\chi}^{\bar{q}_1 + \mathcal{A}} \frac{d\delta}{\sqrt{I(\chi, 0, \delta, 0)}} \quad (4.11)$$

donde el límite de integración χ satisface

$$I(\chi, 0, \bar{q}_1 + \mathcal{A}, 0) = \int_{\bar{q}_1 + \mathcal{A}}^{\chi} \exp\left(-\int_s^{\chi} \frac{2\beta(\delta)}{\alpha(\delta)} d\delta\right) \frac{\gamma(s)}{\alpha(s)} ds = 0$$

El problema que se presenta ahora es que resolver el integral elíptico (4.11) resulta complicado, no sólo por su naturaleza no-lineal, sino porque también depende de la restricción holonómica \mathcal{H} la cual en principio puede ser cualquier función dos veces diferenciable. Como la forma de los ciclos límite generados es irrelevante esto no impone restricciones adicionales sobre $\mathcal{H}(q_1)$; por lo tanto, se puede simplificar el cálculo de (4.11) al proponer la siguiente restricción holonómica *lineal*

$$q_2 = \mathcal{H}(q_1) \triangleq kq_1 + \mathcal{H}_0 \quad (4.12)$$

donde $\mathcal{H}_0 = -k\bar{q}_1$ y $\bar{q}_1 \in \{0, \pi\}$. Para esta ley de relación particular se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= k \\ \mathcal{H}'' &= 0 \end{aligned}$$

por lo que la dinámica proyectada (4.6)-(4.7) se convierte en la ecuación de la Rueda de Inercia libre (sin actuación)

$$(J_1 + kJ_2) \ddot{q}_1 + h \operatorname{sen}(q_1) = 0 \quad (4.13)$$

y la expresión del momento de inercia (4.10) se simplifica a

$$I(q_{1*}, \dot{q}_{1*}, \chi_0, \dot{q}_{1*}(0)) = \frac{E(q_{1*}, \dot{q}_{1*}) - E(\chi_0, \dot{q}_{1*}(0))}{(J_1 + kJ_2)}$$

donde

$$E(q_1, \dot{q}_1) = \frac{(J_1 + kJ_2)}{2} \dot{q}_1^2 + h(1 - \cos(q_1)) \quad (4.14)$$

es la energía total de (4.13). Evaluando,

$$\begin{aligned} I(\chi, 0, \delta, 0) &= \frac{(E(\chi, 0) - E(\delta, 0))}{(J_1 + kJ_2)} \\ &= \frac{h(1 - \cos(\chi)) - h(1 - \cos(\delta))}{J_1 + kJ_2} \\ &= \frac{h}{J_1 + kJ_2} (\cos(\delta) - \cos(\chi)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Al sustituir (4.15) en (4.18), considerando el intervalo $0 < \mathcal{A} < \pi$ y el límite de integración $\chi = \bar{q}_1 - \mathcal{A}$, se llega a la relación

$$\Omega^{-1} = C(\bar{q}_1, \mathcal{A}) \sqrt{\frac{2|J_1 + kJ_2|}{h}} \quad (4.16)$$

donde

$$C(\bar{q}_1, \mathcal{A}) \triangleq \int_{\bar{q}_1 - \mathcal{A}}^{\bar{q}_1 + \mathcal{A}} \frac{d\delta}{\sqrt{|\cos(\delta) - \cos(\bar{q}_1 - \mathcal{A})|}}$$

Además de relacionar \mathcal{A} con Ω , (4.16) involucra al factor k de la restricción holonómica (4.12), el cual es el término que permite determinar tanto a \mathcal{A} como a Ω independientemente el uno del otro. Es decir, *la libertad de escoger a \mathcal{A} y a Ω de manera arbitraria se deriva de la estructura de la restricción holonómica* (4.12). Es claro entonces que para cualquier par de amplitud y frecuencia admisibles basta con ajustar \mathcal{H} para lograr las oscilaciones deseadas alrededor de los centros (4.8). Sin embargo, para el punto de equilibrio $\bar{q}_1 = 0$ la condición de existencia de ciclos límites (4.9) bajo la restricción holonómica (4.12) es

$$\frac{h}{J_1 + J_2 k} > 0$$

y para el punto de equilibrio $\bar{q}_1 = \pi$ es

$$\frac{-h}{J_1 + J_2 k} > 0$$

Consecuentemente, si se busca generar oscilaciones alrededor del punto de equilibrio $\bar{q}_1 = 0$ entonces se debe escoger

$$k > -\frac{J_1}{J_2} = -184.2465$$

y para oscilaciones alrededor del punto de equilibrio $\bar{q}_1 = \pi$ se debe escoger

$$k < -\frac{J_1}{J_2} = -184.2465$$

El resultado final de la planeación de trayectorias es que para generar oscilaciones de amplitud \mathcal{A} y frecuencia Ω alrededor de $\bar{q}_1 = 0$ la restricción holonómica \mathcal{H} definida por (4.12) debe satisfacer

$$k = \left(\frac{\Omega^{-2} h}{2C^2(0, \mathcal{A})} - J_1 \right) J_2^{-1}$$

y para oscilaciones alrededor de $\bar{q}_1 = \pi$

$$k = \left(-\frac{\Omega^{-2} h}{2C^2(0, \mathcal{A})} - J_1 \right) J_2^{-1} \quad (4.17)$$

4.3. Diseño del Controlador

Las trayectorias periódicas calculadas para la dinámica reducida (4.13) son marginalmente estables o inestables. Consecuentemente, la presencia del momento de inercia (4.10) representa una cantidad de energía que puede llevar la estabilidad marginal de las trayectorias planeadas hacia la inestabilidad. Si bien el momento de inercia conservado es igual a cero después de una trayectoria completa, durante la evolución de esta trayectoria la magnitud del momento es no nula. Por lo tanto es necesario que el controlador diseñado no sólo lleve a las trayectorias del sistema hacia los ciclos límites sino que también induzca estabilidad orbital de las mismas. Esto implica que el controlador debe garantizar que la cantidad conservada (4.10) desvanezca cuando $t \rightarrow \infty$, es decir, se debe cumplir que

$$I(q_1(t), \dot{q}_1(t), \mathcal{A} + \bar{q}_1, 0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (4.18)$$

Para el caso particular de la dinámica libre (4.13), consecuencia de una proyección bajo la restricción holonómica (4.12), la condición (4.18) es equivalente a

$$E(q_1(t), \dot{q}_1(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E_0$$

donde $E_0 \triangleq E(\mathcal{A} + \bar{q}_1, 0) = h(1 - \cos(\mathcal{A} + \bar{q}_1))$. Esta condición es una tarea de regulación ya que el controlador a diseñar debe garantizar la convergencia del error

$$E - E_0 \rightarrow 0 \quad (4.19)$$

Para imponer la restricción holonómica (4.12) en la dinámica del sistema y al mismo tiempo cumplir con la condición (4.19) primero se establece un cambio de variables

$$(\mathcal{H}, \dot{\mathcal{H}}, q_1, \dot{q}_1) \mapsto (\mathcal{G}, \dot{\mathcal{G}}, q_1, \dot{q}_1)$$

donde la nueva restricción

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= (q_2(t) - \mathcal{H}_0) - k(q_1(t) - \pi) \\ \dot{\mathcal{G}} &= \dot{q}_2(t) - k\dot{q}_1(t) \\ \ddot{\mathcal{G}} &= \ddot{q}_2(t) - k\ddot{q}_1(t) \end{aligned}$$

representa la desviación de las trayectorias del sistema de la restricción holonómica (4.12). Bajo este cambio de variables el objetivo de control de imponer la restricción holonómica \mathcal{H} se convierte en un problema de regulación ya que se buscará que el controlador garantice la convergencia de la dinámica

$$\mathcal{G} \rightarrow 0 \quad (4.20)$$

Posteriormente se utiliza el mismo concepto previamente abordado de linealización parcial por retroalimentación para establecer la entrada linealizante

$$\tau = -\frac{J_2}{J_1 + kJ_2} \left((h + kh) \operatorname{sen}(q_1) + (J_2 - J_1)v \right) \quad (4.21)$$

que lleva a

$$\begin{aligned} (J_1 + kJ_2) \ddot{q}_1 + h \operatorname{sen}(q_1) &= -J_2 v \\ \ddot{\mathcal{G}} &= v \end{aligned}$$

el cual es un sistema equivalente a (2.21), como se puede comprobar sustituyendo $\ddot{\mathcal{G}}$:

$$\begin{aligned} (J_1 + kJ_2) \ddot{q}_1 + h \operatorname{sen}(q_1) &= -J_2 (\ddot{q}_2 - k\ddot{q}_1) \\ J_1 \ddot{q}_1 + J_2 \ddot{q}_2 + h \operatorname{sen}(q_1) &= 0 \end{aligned}$$

lo cual concuerda con (2.22).

La estructura de esta linealización particular hace posible derivar las trayectorias de (4.14) para obtener la relación

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(q_1, \dot{q}_1) &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{J_1 + kJ_2}{2} \dot{q}_1^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} (h(1 - \cos(q_1))) \\ &= (J_1 + kJ_2) \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + h \operatorname{sen}(q_1) \dot{q}_1 \\ &= \left[(J_1 + kJ_2) \ddot{q}_1 + h \operatorname{sen}(q_1) \right] \dot{q}_1 \\ &= -J_2 v \dot{q}_1 \end{aligned}$$

Ahora, para el caso cuando el sistema está cerca de la trayectoria objetivo definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &= 0, & \dot{\mathcal{G}}(t) &= 0 \\ q_1(t) &= q_{1*}(t), & \dot{q}_1(t) &= \dot{q}_{1*}(t) \end{aligned}$$

se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -J_2 \dot{q}_1 v + J_2 \dot{q}_{1*} v - J_2 \dot{q}_{1*} v \\ &= -J_2 \dot{q}_{1*}(t) v + \underbrace{(\dot{q}_{1*}(t) - \dot{q}_1(t))}_{\text{término pequeño}} J_2 v \end{aligned}$$

por lo que si se desprecian los efectos del término pequeño se obtiene el sistema de *tercer orden* dado por

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -J_2 \dot{q}_{1*}(t) v \\ \ddot{\mathcal{G}} &= v \end{aligned} \quad (4.22)$$

El sistema (4.22) es una *linealización transversal* para el sistema original en lazo abierto alrededor de la trayectoria objetivo. La idea posterior es diseñar un regulador LQR, a través del control auxiliar v , para esta linealización transversal lo cual cumpliría con los dos objetivos, (4.20) y (4.19), del controlador para la dinámica proyectada (4.13). Finalmente, el control lineal v se reincorpora en (4.21) para establecer así la señal de control τ del sistema no-lineal original (2.21). Entonces, para determinar la ley de control v estabilizante del sistema lineal (4.22) la dinámica de éste se reescribe en variables de estado como

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}(t)\delta v \quad (4.23)$$

donde $\delta \in \mathbb{R} \geq 0$ representa términos lineales de las desviaciones de 0 y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} -J_2\dot{q}_{1*}(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \delta \begin{bmatrix} E - E_0 \\ \mathcal{G} \\ \dot{\mathcal{G}} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Es claro que cualquier estrategia de control requiere primero asegurar que el par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) sea controlable, de lo contrario cualquier esfuerzo posterior será fútil. Debido a la naturaleza variante en el tiempo de $\mathbf{B}(t)$ no se puede determinar la controlabilidad de (4.23) sencillamente a través de la matriz de controlabilidad, se requieren herramientas matemáticas adicionales. Sin embargo, se puede probar que de hecho *el par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) es controlable* a lo largo del periodo de una trayectoria cíclica [4]. Este resultado implica que la dinámica proyectada no-lineal (4.13) también es controlable sobre el mismo periodo. A partir de los resultados de [11] se puede afirmar que existe una solución periódica $\mathbf{R}(t)$ de la ecuación matricial de Riccati

$$\dot{\mathbf{R}} + 2\delta\mathbf{R} + \mathbf{A}^T\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A} + \mathbf{G} = \mathbf{R}\mathbf{B}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{R} \quad (4.25)$$

para cualquier $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T \geq 0$.

Como conclusión, con el operador de proyección de tiempo

$$\psi = \Psi(q_1, \dot{q}_1)$$

tal que

$$\Psi(q_{1*}(t), \dot{q}_{1*}(t)) = t$$

la retroalimentación de la ley de control

$$v = - \begin{bmatrix} -J_2\dot{q}_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}(\psi) \begin{bmatrix} E - E_0 \\ \mathcal{G} \\ \dot{\mathcal{G}} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

asegura que la trayectoria deseada, $q_{1*}(t)$, es una solución orbitalmente estable del sistema en lazo cerrado (2.21), (4.14), (4.21), (4.26).

Capítulo 5

Estimación de la Velocidad

5.1. Diferenciadores

Antes de poder implementar el controlador de dos relevadores, (3.14), o el controlador por restricciones holonómicas, (4.26), es imprescindible obtener tanto a \dot{q}_1 como a \dot{q}_2 puesto que ambos controladores dependen de estas variables. La problemática que se presenta aquí es que la Rueda de Inercia del MKT no contiene sensores de velocidad y por lo tanto se debe encontrar una manera de obtener las velocidades requeridas con base en únicamente las mediciones que proveen los dos sensores de posición angular. Una manera de resolver esto es utilizar diferenciadores numéricos para estimar el cambio de posición respecto al tiempo del sistema, las lecturas de los sensores y el tiempo de muestreo respectivamente, e interpretar este resultado como la velocidad deseada. La ventaja de este método es que los diferenciadores no dependen de algún modelo matemático y son relativamente sencillos de programar. Estas bondades junto con la diversidad de diferenciadores disponibles hacen de la diferenciación numérica un recurso útil para obtener una estimación de la velocidad cuando sólo la posición es medible.

5.1.1. Diferenciador de Levant

Sea $f_s(t) : [0, \infty]$ una señal localmente acotada cuya derivada $\dot{f}_s(t)$ es una señal localmente Lipschitz. Entonces el diferenciador de Levant,

$$\begin{aligned}z'_o &= z_1 - \lambda_o |z_o - f_s(t)|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(z_o - f_s(t)) \\z'_1 &= -\lambda_1 \operatorname{sgn}(z_o - f_s(t))\end{aligned}$$

garantiza que $z_o - f_s(t) = 0$ para $\lambda_o, \lambda_1 > 0$. En este caso la señal z'_o es la salida del diferenciador de Levant. El esquema básico de este diferenciador se muestra en la Figura 5.1.

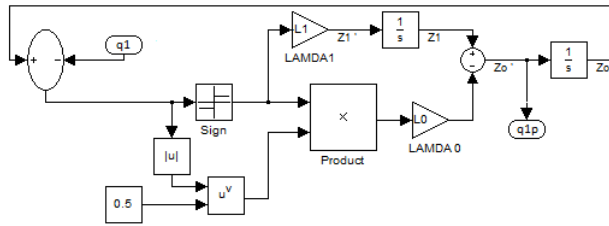


Figura 5.1: Diagrama de bloques del diferenciador de Levant

5.1.2. La Derivada Clásica por Diferenciales: Con y Sin Filtro

La manera más sencilla de diferenciar la señal $f_s(t)$ es a partir de una relación de diferencias,

$$\frac{\Delta f_s(t)}{\Delta t}$$

donde la diferencial del tiempo Δt corresponde al tiempo de muestro, ya sea éste el de un proceso físico de control o el empleado en una simulación. Sin embargo, la utilidad de este diferenciador es limitada cuando se presenta ruido de alta frecuencia, aún cuando éste no sea de gran amplitud, ya que los cambios bruscos en la señal alterarán el cálculo de la derivada de manera importante. Para reducir la sensibilidad al ruido de este diferenciador se puede introducir un filtro, como el que se muestra en la Figura 5.2(b), para generar un diferenciador del tipo

$$\frac{1}{s+a}$$

donde $a \in \mathbb{R}$, con lo cual se obtiene una mejor diferencial aún bajo condiciones de ruido.

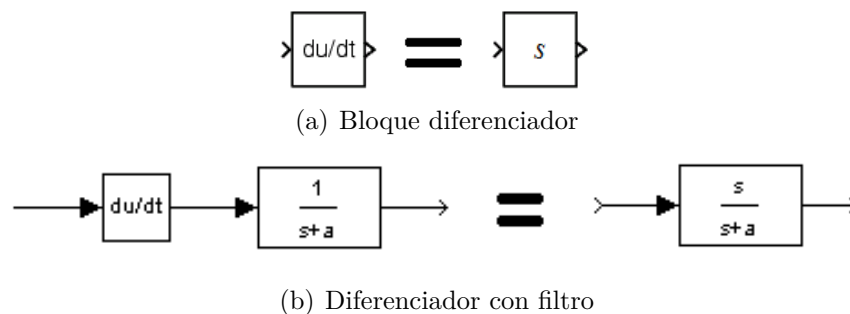


Figura 5.2: Diferenciadores clásicos, con y sin filtro

5.2. Observadores

Otra alternativa para reconstruir las velocidades del sistema es utilizar la información disponible del modelo matemático a través de un observador y así predecir de cierta manera el comportamiento de las velocidades requeridas. Todo observador se basa en todo el modelo de una planta, no sólo en las mediciones disponibles, y es por esta razón que son más precisos y menos sensibles al ruido que los diferenciadores. Obviamente el desempeño de un observador depende del modelo que se utilice para estimular su dinámica, pero aún así no se requiere un modelo tan preciso para generar una mejor estimación de ciertos estados no medibles.

5.2.1. Observador de Luenberger

El observador de Luenberger permite observar los estados no medibles de una planta *lineal* siempre y cuando se cumpla la condición de observabilidad, la cual establece que la matriz de observabilidad,

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

debe tener un rango $\rho = n$. Para el caso de la Rueda de Inercia la matriz de observabilidad se puede formar a partir de (2.34) y la matriz de salida

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para obtener la matriz

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 77.6033 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 77.6033 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que $\text{rank}(\mathcal{O}) = 4$ se puede deducir que la Rueda de Inercia es un sistema completamente observable a partir de sus únicos dos estados medibles, la posición del péndulo y la del rotor. Esto permite implementar el observador de Luenberger que se muestra en la Figura 5.3 para la Rueda de Inercia.

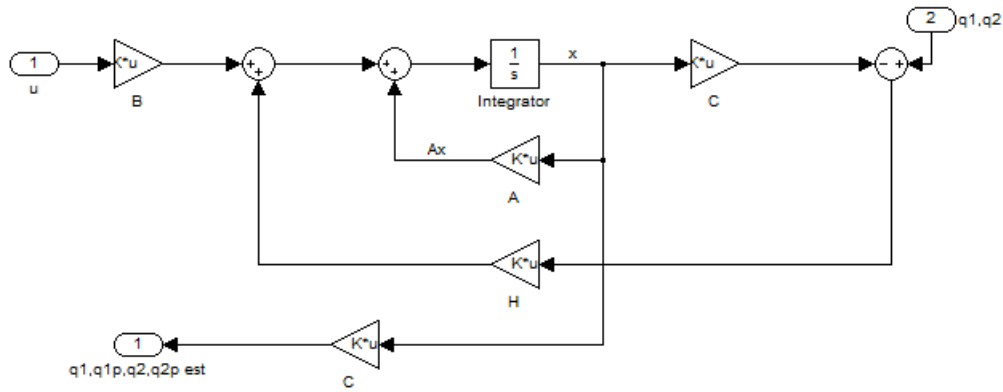


Figura 5.3: Observador de Luenberger para la Rueda de Inercia

5.2.2. Observador de Alta Ganancia

Una alternativa más precisa al observador lineal de Luenberger es el observador de alta ganancia, el cual se puede utilizar para observar tanto a sistemas lineales como no lineales. Este observador incorpora la dinámica no lineal de la planta para producir una estimación de los estados no medibles. La velocidad de convergencia del observador se puede manipular a partir de un sólo término de corrección, por lo cual la sintonización de este observador resulta accesible. El observador de alta ganancia diseñado para la Rueda de Inercia tiene la siguiente construcción matemática

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \frac{2q_1 - 2\hat{x}_1}{\epsilon} \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{h\text{sen}(q_1) + \tau}{J_2 - J_1} + \frac{q_1 - \hat{x}_1}{\epsilon^2} \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_4 + \frac{2q_2 - 2\hat{x}_3}{\epsilon} \\ \dot{\hat{x}}_4 &= \frac{h\text{sen}(q_1)}{J_1 - J_2} + \frac{\tau}{J_2 - J_2^2 J_1^{-1}} + \frac{q_2 - \hat{x}_3}{\epsilon^2}\end{aligned}$$

para un término de corrección $\epsilon \in \mathbb{R} > 0$. Finalmente, en la Figura 5.4 se muestra el diagrama de bloques que se utilizó para implementar el observador.

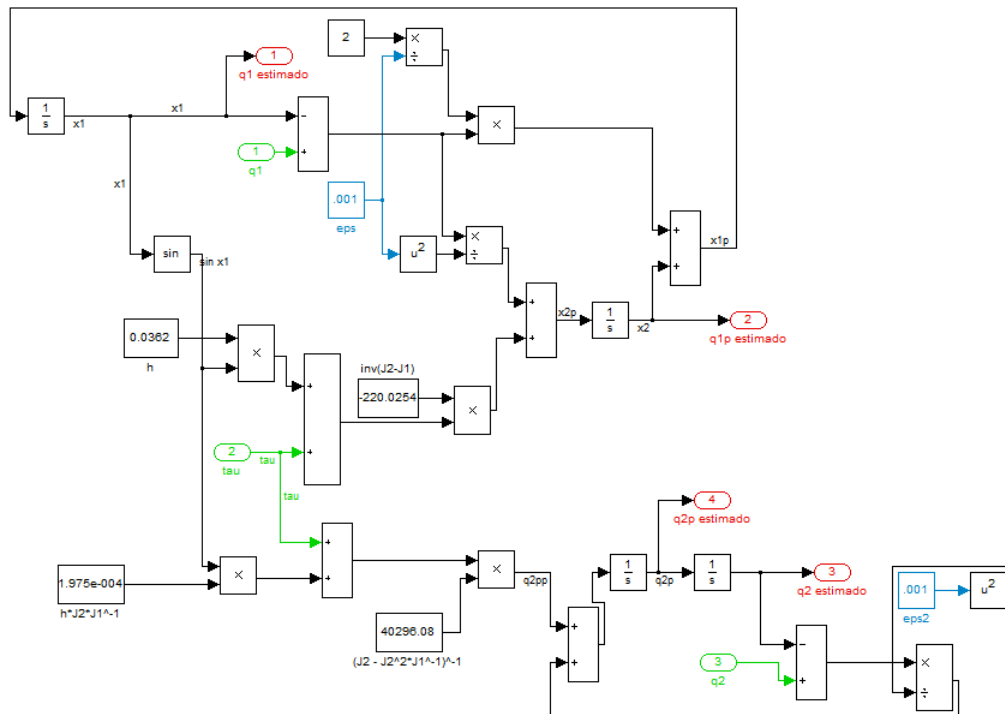


Figura 5.4: Observador de alta ganancia para la Rueda de Inercia

Capítulo 6

Simulaciones

6.1. Controlador de Dos Relevadores

Las constantes c_1 y c_2 del controlador (3.14) dependen del modelo linealizado de la planta. Al utilizar distintos métodos de linealización se tendrán cambios en los parámetros de este controlador controlador y consecuentemente también en la dinámica del sistema. Se analizarán los efectos de utilizar la linealización por el Jacobiano introducida en la sección 2.2 y la linealización por retroalimentación de la sección 3.2. En todas las simulaciones se obtienen las velocidades correspondientes utilizando el bloque diferenciador del Simulink de MATLAB.

6.1.1. Linealización por Medio del Jacobiano

Se desean generar oscilaciones en el péndulo alrededor de $q_1 = \pi$. Previamente se linealizó el modelo matemático alrededor de este punto de equilibrio utilizando el Jacobiano y se demostró que éste es inestable. Por lo tanto, es necesario estabilizar el sistema alrededor de $q_1 = \pi$ para poder aplicar la metodología del Capítulo 3. Considerando que

$$\tau = k_u u$$

donde $k_u = 0.00494$ es la constante de proporcionalidad de control dada por el fabricante [1], la entrada de control entonces será

$$u = u_{2relay} + u_{estabilizante}$$

siendo u_{2relay} el controlador por dos relevadores (3.14) y $u_{estabilizante}$ una retroalimentación de estados diseñada para ubicar los polos del sistema de manera deseada. Se propone

$$u_{estabilizante} = -Kx \quad (6.1)$$
$$K = \begin{bmatrix} -350.1746 & -39.7552 & -0.0702 & -0.0652 \end{bmatrix}$$

para obtener el sistema retroalimentado

$$\Sigma_J \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -300.99 & -42.982 & -0.076 & -0.07 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 69677.668 & 7919.283 & 13.99 & 12.982 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.0812 \\ 0 \\ 199.2014 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

el cual se puede comprobar es estable y con polos

$$\lambda_{\Sigma_J} = \{-15, -9, -2, -4\}$$

Las oscilaciones se diseñarán para la primera componente de la salida

$$y_1 = q_1$$

es decir, la posición del péndulo. Tomando como parámetros deseados

$$\mathcal{A}_d = 0.2 [\text{rad}], \quad \Omega_d = 4\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (6.3)$$

se pueden calcular las ganancias correspondientes [Apéndice B],

$$\begin{aligned} c_1 &= 17.7622 \\ c_2 &= 43.1853 \end{aligned} \quad (6.4)$$

a partir del diagrama de Nyquist que se muestra en la Figura 6.1.

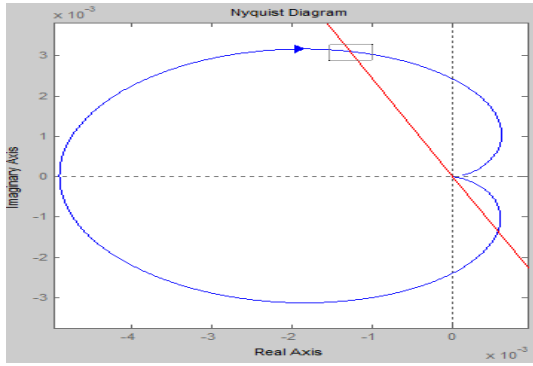
La evolución de la salida, cuando se retroalimentan el control estabilizante (6.1) junto con el controlador de dos relevadores con las ganancias (6.4) al modelo *no lineal* (2.27), se muestra en la Figura 6.2(a) para la condición inicial

$$x_0 = [3.0 \quad 1.0 \quad 0.0 \quad 0.0]'$$

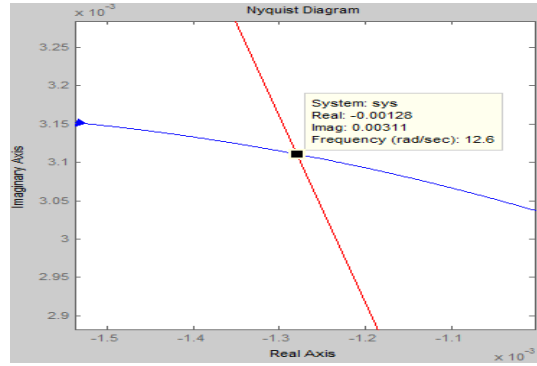
La oscilación resultante tiene como parámetros

$$\mathcal{A}_s = 0.2574 [\text{rad}], \quad \Omega_s = 3.3932\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (6.5)$$

los cuales validan la teoría planteada anteriormente a pesar de cierta discrepancia con los valores deseados. Si además se toma en cuenta la simetría de las oscilaciones generadas,

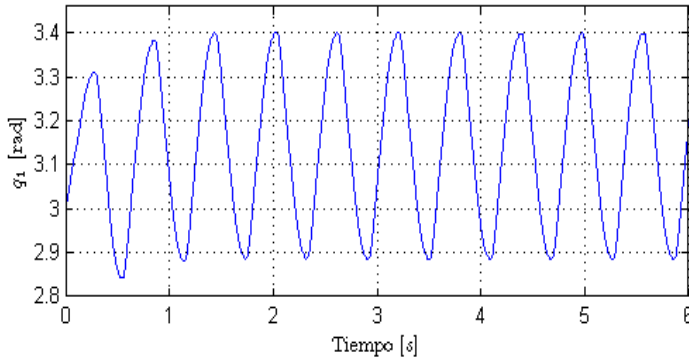


(a) Nyquist(azul) y Función Descriptiva(rojo)

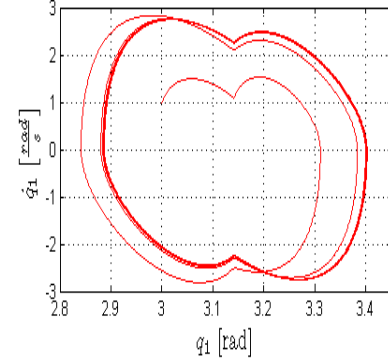


(b) Intersección: ecuación de balance armónico

Figura 6.1: Análisis en frecuencia de la oscilación deseada (6.3)



(a) Posición del péndulo en función del tiempo



(b) Ciclo límite del péndulo

Figura 6.2: Oscilación del péndulo con las ganancias (6.4)

como se aprecia en el ciclo límite de la Figura 6.2(b), se podría concluir prematuramente que basta con una linealización por medio del Jacobiano para obtener resultados aceptables; sin embargo, mientras más se incrementa \mathcal{A}_d más se aleja el sistema de la zona reducida de validez de esta linealización; la consecuencia es que no se puede garantizar un comportamiento adecuado para oscilaciones de alta amplitud. Por ejemplo, para una oscilación deseada

$$\mathcal{A}_d = 2 \text{ [rad]}, \quad \Omega_d = 4\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

la Figura 6.3 muestra un comportamiento irregular y poco simétrico comparado con el caso anterior de baja amplitud. Una razón de este mayor error en la señal deseada se debe a que la planta no se comporta como un filtro paso bajas para oscilaciones tan lentas como la de (6.3); la figura 6.4 muestra que la frecuencia de corte del sistema (6.2), Σ_J , es de alrededor de $10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ por lo que la primera armónica de la oscilación deseada,

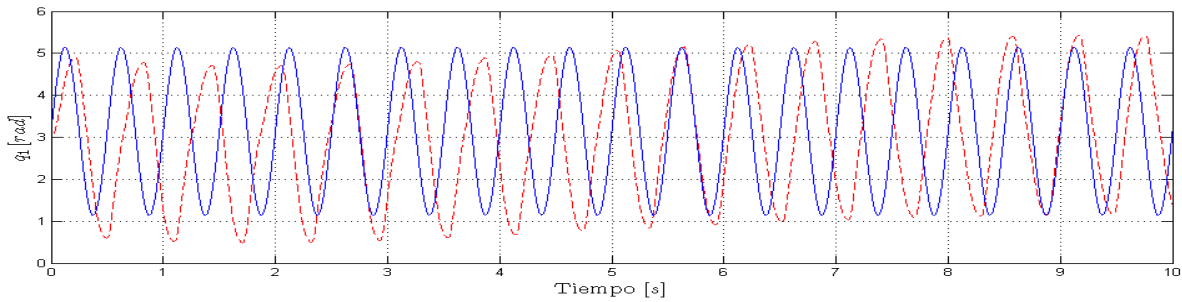


Figura 6.3: Oscilación deseada (azul) y simulada (roja punteada) si se incrementa \mathcal{A}_d

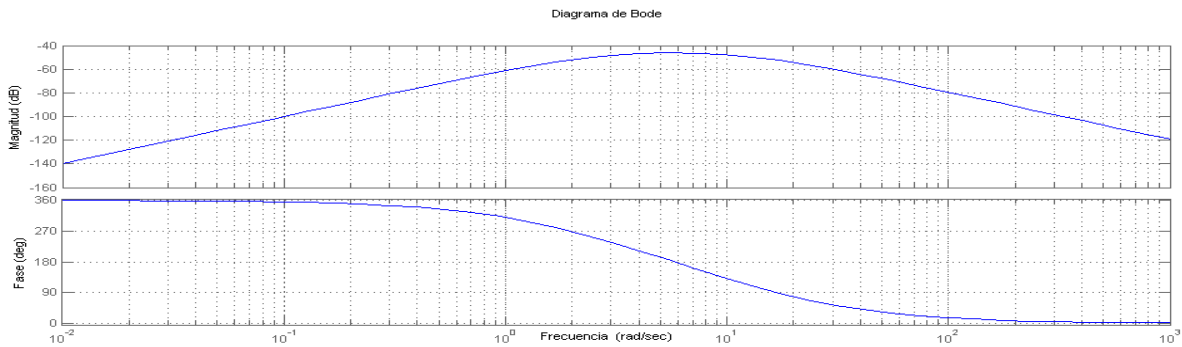


Figura 6.4: Diagrama de Bode para el sistema estabilizado y linealizado por el Jacobiano

de $25.13 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$, no es filtrada adecuadamente. Sin embargo, esto no fue el caso para la oscilación de baja amplitud con la misma frecuencia por lo que se debe considerar adicionalmente el hecho de que la linealización por medio del Jacobiano tiene un región limitada de validez lo cual influirá fuertemente en el tipo de oscilaciones que se pueden generar. Estos puntos se visualizan mejor en la Tabla 6.1, la cual muestra la comparación de otras oscilaciones deseadas con sus respectivas simulaciones. Cabe mencionar otro resultado interesante de este controlador: la señal que genera el controlador de dos relevadores (3.14) es periódica y, tal como se muestra en la Figura 6.5, de la misma frecuencia que la frecuencia deseada Ω_d .

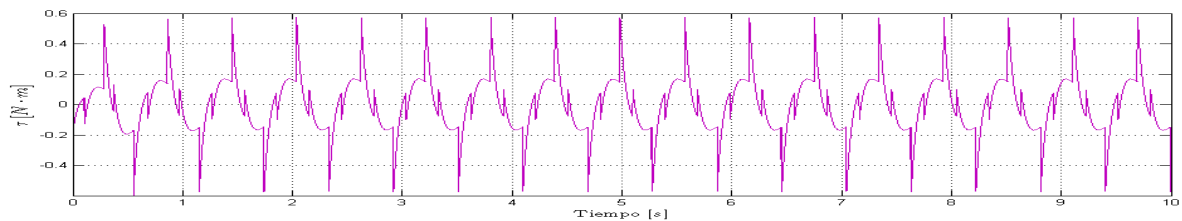


Figura 6.5: Par de control para generar la oscilación deseada (6.3)

$\mathcal{A}_d[\text{rad}]$	$\Omega_d \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$	c_1	c_2	$\mathcal{A}_s[\text{rad}]$	$\Omega_s \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$
0.2	4π	17.7622	43.1853	0.2574	3.3932π
0.2	8π	-50.3169	103.7481	0.2496	5.6921π
0.2	12π	-164.8970	160.4536	0.2084	10.1652π
2	4π	177.6221	431.8525	2.1461	3.3970π
2	8π	-503.1685	1037.48	2.1836	6.1381π
2	12π	-1648.97	1604.5364	1.993	10.5541π

Tabla 6.1: Parámetros del controlador de dos relevadores calculados para Σ_J

6.1.2. Linealización por Retroalimentación

La validez global de la linealización por retroalimentación obtenida para la Rueda de Inercia permite, teóricamente, generar oscilaciones de mayor amplitud a comparación de la linealización por el Jacobiano. Sin embargo, la salida linealizante en este caso es la función

$$\zeta = K \left(q_1 - \pi + J_1^{-1} J_2 q_2 \right) + J_1 \dot{q}_1 + J_2 \dot{q}_2$$

por lo que no es posible diseñar una oscilación directamente para el péndulo ya que ζ depende de todo el espacio de estados y no sólo de q_1 . No obstante, q_1 también tiene un comportamiento oscilatorio de la misma frecuencia a la que oscila ζ [2]. Es decir,

$$\Omega_{q_1} \rightarrow \Omega_\zeta$$

Consecuentemente, se puede diseñar una oscilación para q_1 indirectamente a través de ζ asignando a esta última la frecuencia deseada del péndulo,

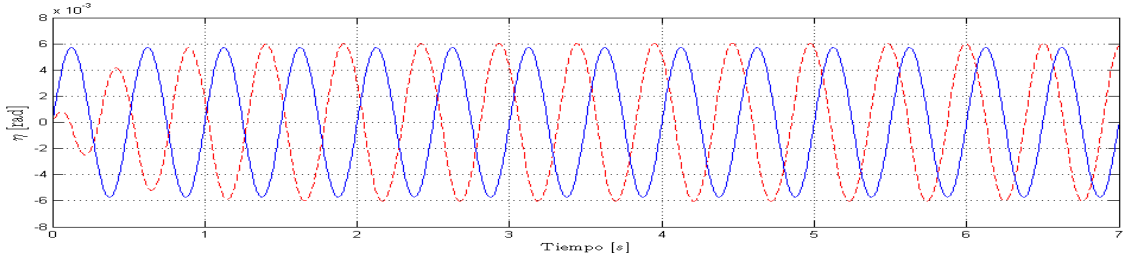
$$\Omega_{\zeta_d} \triangleq \Omega_{q_{1d}} \tag{6.6}$$

Para ejemplificar lo anterior se utiliza el sistema

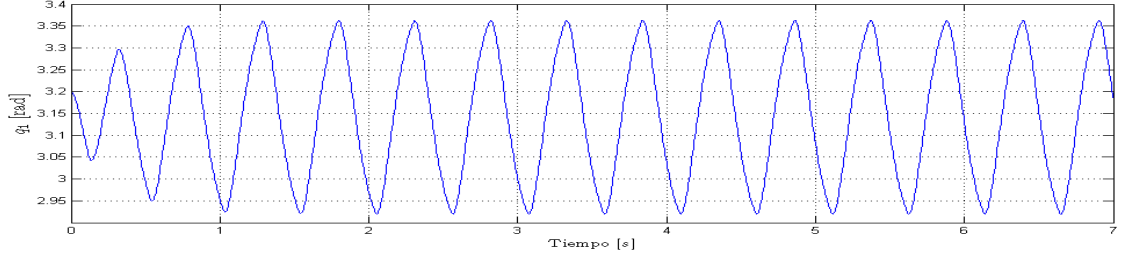
$$\Sigma_{FBL} \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} \\ \dddot{\zeta} \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -350 & -155 & -22 & 0 \\ 218.824 & 0 & 0 & -0.02188 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} \\ p_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} \\ \dddot{\zeta} \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

el cual se obtiene al introducir los parámetros $a_0 = 350$, $a_1 = 155$, $a_2 = 22$, $K = 0.0001$ en (3.13), y se analiza el comportamiento de este sistema para

$$\mathcal{A}_{q_{1d}} = 0.2 [\text{rad}], \quad \Omega_{\zeta_d} = 4\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \tag{6.7}$$



(a) Oscilación deseada de la salida ζ (azul) y simulada (roja punteada)



(b) Oscilación asociada del péndulo

Figura 6.6: Relación entre la oscilación de la salida ζ y la del péndulo

Se debe diseñar una oscilación correspondiente en ζ que logre este comportamiento deseado en q_1 ; a partir de (6.6) se obtiene

$$\Omega_{\zeta_d} = \Omega_{q_{1d}} = 4\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Por otro lado, la amplitud deseada de ζ se calcula a partir de [2]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\zeta_d} &= \frac{\mathcal{A}_{q_{1d}} h}{\Omega_d \sqrt{1 - \frac{K}{J^2 \Omega^2 + K^2}}} \\ &= 0.0057349 \end{aligned}$$

Una vez calculados los parámetros deseados de ζ se calculan [Apéndice B]

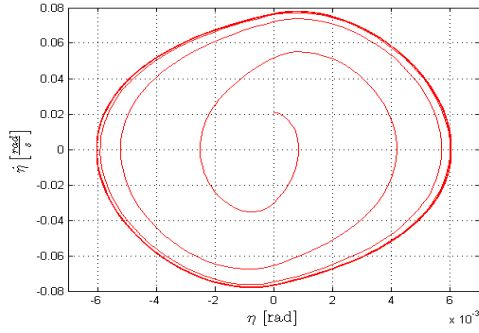
$$\begin{aligned} c_1 &= 14.0705 \\ c_2 &= 0.16438 \end{aligned}$$

y se introducen en el modelo con linealización por retroalimentación con condiciones iniciales

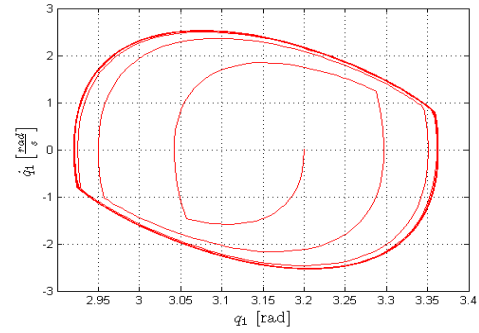
$$x_0 = [3.2 \quad 0.001 \quad 0.0 \quad 0.0]'$$

A partir de la trayectoria resultante de ζ que se presenta en la Figura 6.6(a) se obtiene

$$\mathcal{A}_{\zeta_s} = 0.00602 \text{ [rad]}, \quad \mathcal{A}_{q_{1s}} = 0.2211 \text{ [rad]} \quad (6.8)$$



(a) Ciclo límite de la salida ζ



(b) Ciclo límite irregular del péndulo

Figura 6.7: Diferencia geométrica entre los ciclos límites del sistema

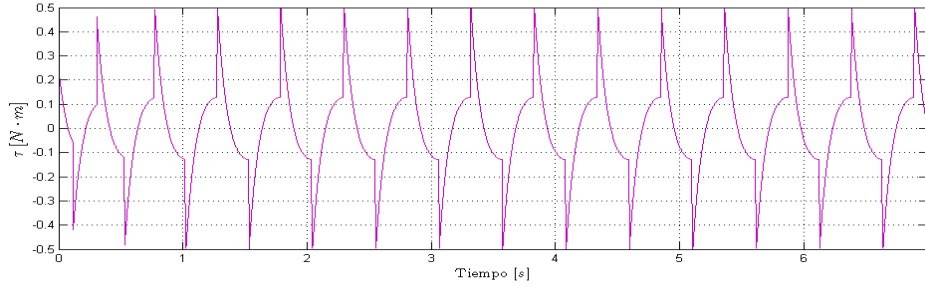


Figura 6.8: Señal periódica del controlador por dos relevadores

Adicionalmente se puede observar en la Figura 6.6(b) que los comportamientos del péndulo y de ζ de hecho sí obedecen la condición (6.6) puesto que

$$\Omega_{\zeta_s} = \Omega_{q_{1_s}} = 3.9216\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (6.9)$$

con lo cual se demuestra que *el diseño de oscilaciones es mucho más preciso para la linealización por retroalimentación que para la linealización por el Jacobiano.*

No obstante, existe una diferencia importante entre el comportamiento oscilatorio de ζ y el de q_1 ; el primero responde, por lo menos teóricamente, a una forma senoidal mientras que el segundo carece de esta propiedad a pesar de ser periódico. Esto se puede apreciar visualmente en los ciclos límites de ζ y q_1 que se muestran en la Figura 6.7(a) y 6.7(b) respectivamente; el primero es más suave y circular. Por lo tanto, si se desea que el comportamiento del péndulo sea simplemente periódico entonces este método de diseño funciona perfectamente de lo contrario se deben buscar alternativas de diseño.

Nuevamente, la señal de control que excita al sistema Σ_{FBL} es periódica y se puede observar, Figura 6.8, satisface la relación

$$\Omega_u \rightarrow \Omega_\zeta$$

Por último, en la Tabla 6.2 se presentan los datos de las simulaciones correspondientes de esta sección.

\mathcal{A}_{ζ_d} [rad]	$\mathcal{A}_{q_{1_d}}$ [rad]	Ω_d $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$	c_1	c_2	\mathcal{A}_{ζ_s} [rad]	$\mathcal{A}_{q_{1_s}}$ [rad]	Ω_s $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$
0.005735	0.2	4π	14.0705	0.1644	0.00602	0.2211	3.9216π
0.002834	0.2	8π	30.1541	26.665	0.002851	0.1969	7.9723π
0.001886	0.2	12π	45.786	70.6929	0.00198	0.1884	12.142π
0.057349	2	4π	140.7051	1.64384	0.058273	2.1942	3.9873π
0.028344	2	8π	301.5414	266.6529	0.028792	2.131	8.063π
0.03132	2	12π	457.8591	706.9287	0.0308	2.077	12.0604π

Tabla 6.2: Oscilaciones en el sistema linealizado por retroalimentación

6.2. Controlador por Restricciones Holonómicas

El primer paso para implementar el controlador por restricciones holonómicas virtuales es generar la solución *periódica* de la ecuación de Riccati (4.25). La periodicidad de esta ecuación, y por lo tanto de las trayectorias del sistema, depende de las condiciones iniciales que se le asignen a $\mathbf{R}(t)$; para una cierta oscilación deseada de q_1 existe un único conjunto de condiciones iniciales que garantizan las estabilidad orbital del sistema retroalimentado bajo la ley de control (4.26).

Supóngase que se desea obtener la siguiente oscilación del péndulo:

$$\mathcal{A}_d = 2 \text{ [rad]}, \quad \Omega_d = 4\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Introduciendo estos datos en (4.17) se obtiene [Apéndice B]

$$k = -234.2444$$

Este valor de k junto con la dinámica proyectada (4.13) permiten definir la trayectoria deseada $q_{1_*}(t)$ del péndulo

$$\ddot{q}_{1_*} = -\frac{h}{(J_1 + kJ_2)} \text{sen}(q_{1_*}) \quad (6.10)$$

Resolviendo el sistema se obtiene $\dot{q}_{1_*}(t)$ y utiliza como entrada para el sistema

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & \mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{G} & (\mathbf{A} + \delta\mathbf{I}_3)' \\ \mathbf{A} + \delta\mathbf{I}_3 & \mathbf{B}(t) * \mathbf{B}(t)' \end{bmatrix} Z \quad (6.11)$$

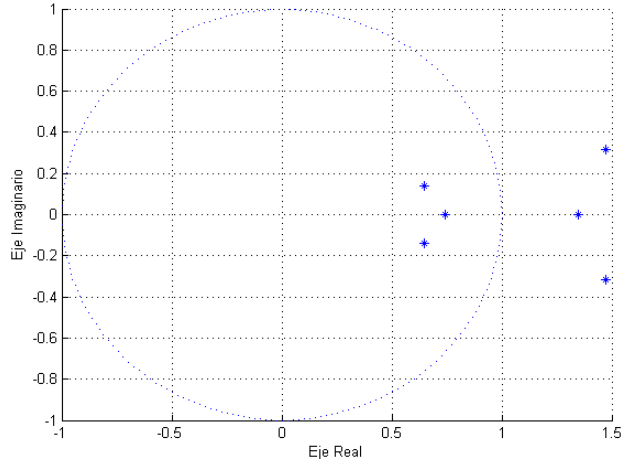


Figura 6.9: Distribución de los valores propios bajo el complemento de Schur

donde $\mathbf{I}_n, \mathbf{O}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son una matriz identidad y de ceros respectivamente, se propone

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

y el resto de los parámetros se definen en (4.24).

Se prosigue a encontrar $Z(t_f)$, donde $t_f = \Omega_d^{-1}$, considerando como condiciones iniciales

$$Z(0) = \mathbf{I}_6$$

En el caso del ejemplo,

$$Z(0.5) = \begin{bmatrix} 1.3499 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.3485 & 0.6809 & 0.0000 & -0.0211 & 0.1402 \\ -0.0000 & -0.0105 & 1.3835 & 0.0000 & -0.1149 & 0.5127 \\ 0.5075 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7408 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2537 & 0.0701 & 0.0000 & 0.7396 & 0.0105 \\ -0.0000 & -0.0574 & 0.1176 & 0.0000 & -0.3748 & 0.7683 \end{bmatrix}$$

Ahora se utiliza el complemento de Schur para ordenar los valores propios de $Z(0.5)$ dentro del círculo unitario, Figura 6.9, y así recuperar el subespacio estable invariante del kernel de $Z(0.5)$ para poder encontrar la condición inicial de (4.25),

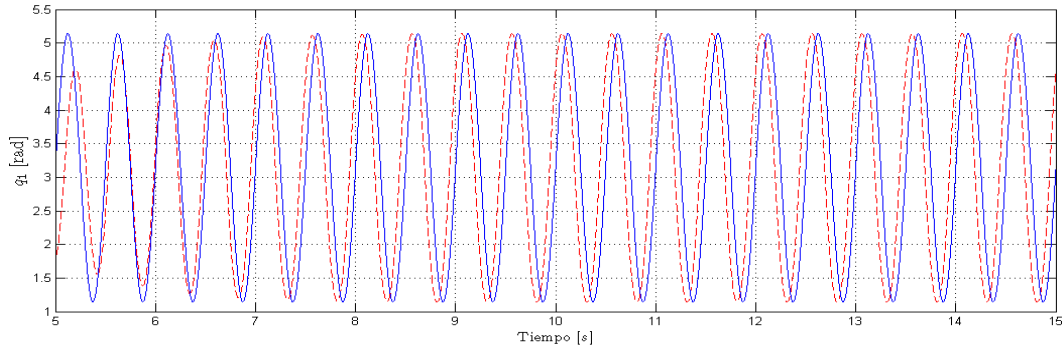


Figura 6.10: Oscilación deseada (azul) vs. oscilación diseñada (roja punteada)

$$Z_o = \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.3507 & -0.3285 \\ -0.0000 & 0.1720 & 0.5297 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.8769 & 0.0146 \\ 0.0000 & 0.2802 & -0.7819 \end{bmatrix}$$

Esta condición inicial única permite generar una solución periódica para $\mathbf{R}(t)$ la cual posibilita la implementación del controlador por restricciones holonómicas virtuales (4.26). En la Figura 6.10 se muestra el resultado de la implementación del controlador (4.26) para este ejemplo con condiciones iniciales

$$x_o = [\pi \ 0 \ 0.0 \ 0.0]'$$

Una característica importante de este controlador es que la salida que genera para q_1 tiene una forma senoidal, Figura 6.10, lo cual puede ser un requisito imprescindible de diseño como se mencionó anteriormente. También se muestra en la Figura 6.12 que, como era de esperar, la señal de control es nuevamente periódica y de la misma frecuencia que la de la oscilación deseada. Finalmente la Tabla 6.3 exhibe diversos datos de simulación para validar la efectividad de este controlador.

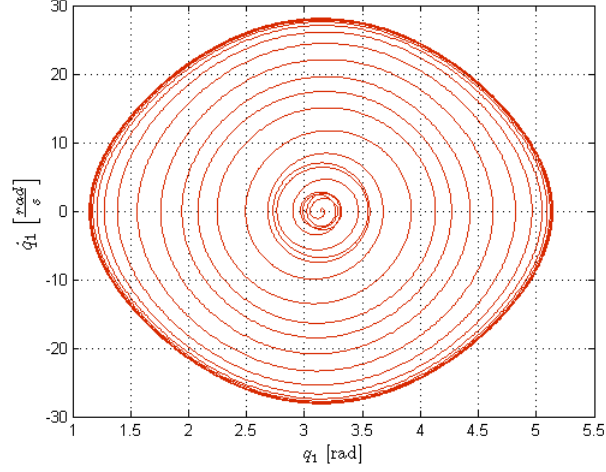


Figura 6.11: Ciclo límite circular generado con el control por restricciones holonómicas

\mathcal{A}_d [rad]	Ω_d $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$	k	\mathcal{A}_s [rad]	Ω_s $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$
0.2	4π	-272.8554	0.199997	4.00π
0.2	8π	-205.6517	0.199997	8.00π
0.2	12π	-193.2066	0.200003	12.0008π
2	4π	-234.2444	1.9999	4.0005π
2	8π	-195.999	1.999958	8.0089π
2	12π	-188.9165	1.99979	12.012π

Tabla 6.3: Parámetros del controlador por restricciones holonómicas virtuales

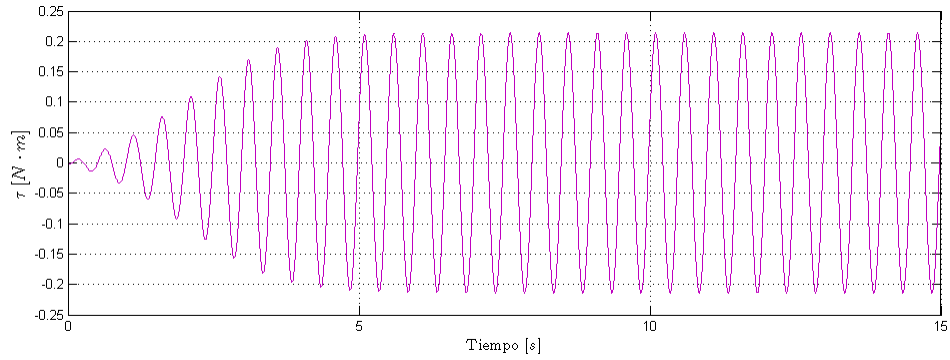


Figura 6.12: Señal de control periódica para el controlador por restricciones holonómicas para generar la oscilación deseada (6.3)

Capítulo 7

Pruebas Experimentales: Controlador de Dos Relevadores

Se llevó a cabo la implementación del controlador de dos relevadores utilizando una tarjeta de adquisición de datos dSPACE1103, cuya velocidad de muestreo es de un dato cada 10 [ns], en un entorno computacional basado en MATLAB. Se utilizó el método de integración de Euler para resolver numéricamente las ecuaciones pertinentes. El motor de corriente directa (Pittman[®] LO-COG 8X22, 24 [V]) se controló a través de una señal de corriente generada por la dSPACE1103 a partir un sistema de modulación de pulso con un ciclo de trabajo fijo a una frecuencia de 10 [kHz].

7.1. Linealización por Retroalimentación

La primera prueba experimental que se realizó en el MKT incorporó al sistema Σ_J como la planta lineal del esquema de control general (Figura 3.1). Se propuso generar dos oscilaciones distintas con este método: una de alta amplitud y baja frecuencia, la otra de alta frecuencia y baja amplitud. Los parámetros de estas oscilaciones deseadas junto con los resultados experimentales se presentan en la Tabla 7.1. La posición del péndulo y las señales de control de esta prueba se ilustran en la Figura 7.1 y 7.2 respectivamente.

$\mathcal{A}_{q_{1d}}$ [rad]	$\Omega_{q_{1d}}$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$	c_1	c_2	$\mathcal{A}_{q_{1r}}$ [rad]	$\Omega_{q_{1r}}$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$
0.01	π	1.217984	-1.632856	0.0095	2.7π
0.025	5π	0.6522	7.399	0.028	0.8π

Tabla 7.1: Oscilaciones en el sistema Σ_J linealizado con el Jacobiano

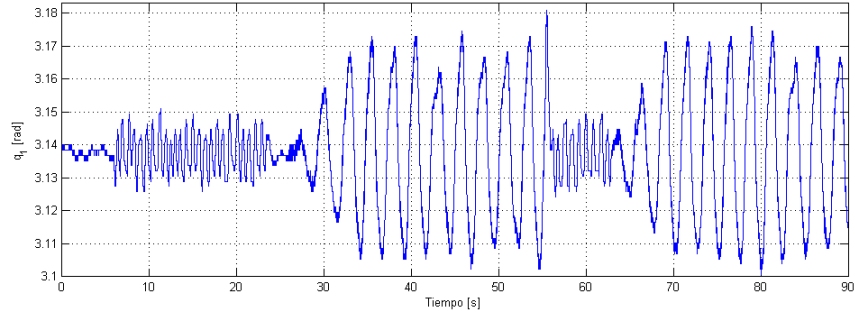


Figura 7.1: Oscilación del péndulo del MKT utilizando linealización por Jacobiano

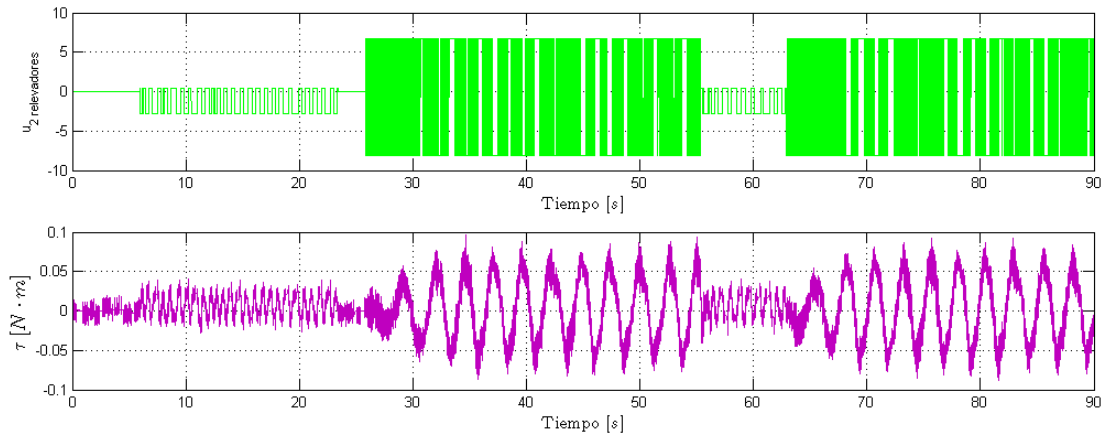


Figura 7.2: Señales de control utilizando el Jacobiano

$\mathcal{A}_{q_{1d}}$ [rad]	$\Omega_{q_{1d}}$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$	c_1	c_2	$\mathcal{A}_{q_{1r}}$ [rad]	$\Omega_{q_{1r}}$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$
0.0185	7π	2.4244	1.7023	0.0186	3.663π
0.0419	3π	2.04066	-0.793635	0.0556	1.768π

Tabla 7.2: Parámetros para el sistema Σ_{FBL} linealizado parcialmente

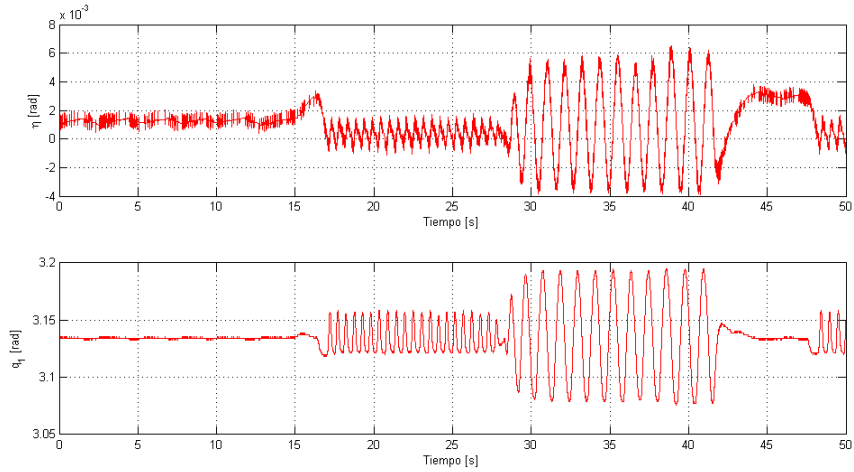


Figura 7.3: Oscilación del péndulo y de la salida ζ utilizando linealización parcial

Por otro lado, también se utilizó el sistema Σ_{FBL} en los experimentos con el mismo propósito de generar dos distintos tipos de oscilaciones. La comparación entre los datos teóricos y los experimentales se presentan en la Tabla 7.2. La evolución de tanto ζ como de la posición del péndulo se muestra en la Figura 7.3. Finalmente, la Figura 7.4 ilustra el comportamiento del control a lo largo del tiempo.

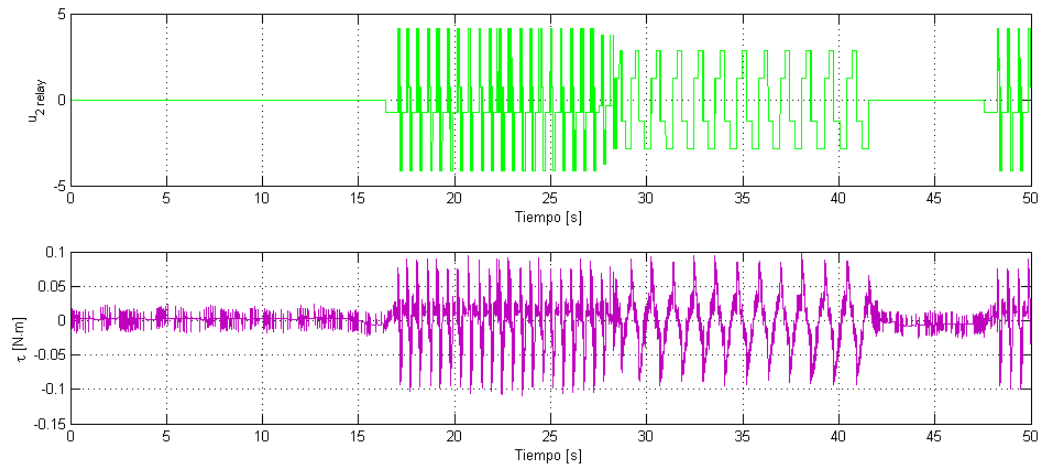


Figura 7.4: Señales de control utilizando el Jacobiano

Capítulo 8

Conclusiones

Se abordó el problema de generar oscilaciones periódicas en el péndulo de la Rueda de Inercia, un sistema mecánico subactuado. Se emplearon dos distintas técnicas de control para resolver este problema: un controlador de estructura variable, específicamente el controlador de dos relevadores, y un controlador basado en restricciones holonómicas virtuales. Se llevó a cabo comparación de los resultados teóricos de estos dos controladores y a partir de ésta se puede concluir lo siguiente.

- El controlador de dos relevadores:
 - es más eficiente en términos de gasto de control y esto se debe a que no requiere de un seguimiento de trayectorias para generar las oscilaciones.
 - su precisión depende fuertemente del tipo de linealización que se utilice, pero en general es aceptable.
 - resulta sencillo calcular y ajustar sus dos parámetros c_1, c_2 ; esto facilitó su implementación en la plataforma experimental, el MKT de Quanser[®].
 - a pesar de ser un controlador de estructura variable, no se presenta el fenómeno de *chattering* puesto que no se requiere de la convergencia a una superficie deslizante.
 - la convergencia a los ciclos límites diseñados es rápida.
- El controlador por restricciones holonómicas virtuales:
 - tiene una precisión excelente, el error en todos los casos analizados es prácticamente nulo.
 - la señal de control es suave.
 - acepta condiciones iniciales arbitrarias.
 - permite gran libertad a la hora de escoger la restricción holonómica.

También se implementó el controlador de dos relevadores bajo dos distintas circunstancias: linealizando el modelo matemático por medio del Jacobiano y por retroalimentación de estados. La comparación de los resultados experimentales y las simulaciones correspondientes arroja que la linealización parcial por retroalimentación de estados es claramente superior; ofrece una mejor precisión, permite generar oscilaciones de mayor amplitud y no exige un mayor gasto de control para generar las oscilaciones e inclusive en algunos casos el gasto es menor (Figura 6.5 y Figura 6.8)

En general, se observaron las ventajas de combinar la teoría establecida para sistemas lineales con las nuevas herramientas matemáticas para sistemas no lineales; es claro que éstos no son necesariamente dos caminos distintos sino que se pueden complementar para resolver un mayor espectro de problemas. También se llevaron a cabo análisis en frecuencia y en el dominio del tiempo, lo que reafirma el punto anterior de la necesidad de contar con la mayor cantidad posible de recursos matemáticos.

Finalmente cabe mencionar que la flexibilidad de las dos metodologías estudiadas permitió cumplir con el objetivo de este trabajo a pesar del problema de subactuación que se presenta en la Rueda de Inercia. De aquí que se propone como trabajo a futuro aplicar esta teoría en sistemas eléctricos; la generación de oscilaciones en este caso se podría utilizar en el proceso de conversión de corriente directa a corriente alterna con el fin de diseñar un nuevo tipo de inversor.

Apéndices

Apéndice A

Linealización Exacta: Condiciones Suficientes y Necesarias

Para establecer la existencia del difeomorfismo (3.3) que lleve el sistema (2.21) a la forma normal (3.4) se deben satisfacer las siguientes dos condiciones suficientes y necesarias [6, Teorema 13.2]

▪

$$\text{rank} \left([g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-1} g(x)] \right) = n \quad \forall x \in D_o. \quad (\text{A.1})$$

▪ La distribución

$$\Delta(x) = \text{span} \{g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-2} g(x)\} \quad (\text{A.2})$$

es involutiva sobre el espacio D_o .

Para verificar la condición (A.1), primero se desprende de (2.27) que $n = 4$ y

$$\begin{aligned} f(x) &= [x_2 \quad -78.0291 \text{sen}(x_1) \quad x_4 \quad 78.0291 \text{sen}(x_1)]^T, \\ g(x) &= [0 \quad -219.9180 \quad 0 \quad 40298.4720]^T \end{aligned}$$

Calculando los paréntesis de Lie requeridos,

$$\begin{aligned} ad_f g &= \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -78.0291 \cos(x_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 78.0291 \cos(x_1) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -219.9180 \\ 0 \\ 40298.4720 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 219.9180 \\ 0 \\ -40298.4720 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ad_f^2 g = [f, ad_f g] &= - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -78.0291 \cos(x_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 78.0291 \cos(x_1) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 219.9180 \\ 0 \\ -40298.4720 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 17160 \cos(x_1) \\ 0 \\ -17160 \cos(x_1) \end{bmatrix} \tag{A.4}
\end{aligned}$$

$$ad_f^3 g = \begin{bmatrix} 0 \\ -17160 \operatorname{sen}(x_1) x_2 \\ 0 \\ 17160 \operatorname{sen}(x_1) x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 17160 \cos(x_1) \\ 0 \\ -17160 \cos(x_1) \\ 0 \end{bmatrix} = 1760 \begin{bmatrix} -\cos(x_1) \\ -\operatorname{sen}(x_1) x_2 \\ \cos(x_1) \\ \operatorname{sen}(x_1) x_2 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

Agrupando $g(x)$, (A.3), (A.4) y (A.5) se obtiene que

$$\operatorname{rank} \left(1760 \begin{bmatrix} 0 & 0.0128 & 0 & -\cos(x_1) \\ -0.0128 & 0 & \cos(x_1) & -\operatorname{sen}(x_1) x_2 \\ 0 & -2.3484 & 0 & \cos(x_1) \\ 2.3484 & 0 & -\cos(x_1) & \operatorname{sen}(x_1) x_2 \end{bmatrix} \right) = 4$$

con lo que se cumple (A.1). Posteriormente se define la distribución

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \operatorname{span} \left\{ [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3] \right\} \\
&= \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0128 \\ 0 \\ 2.3484 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.0128 \\ 0 \\ -2.3484 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(x_1) \\ 0 \\ -\cos(x_1) \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

y se verifica si

$$\dim(\Delta(x)) = n - 1 = 3$$

Sin embargo, $\Delta(x)$ no es una distribución involutiva ya que

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank} [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, [\Delta_2, \Delta_3]] &= \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0.0128 & 0 & 0.0128 \operatorname{sen}(x_1) \\ -0.0128 & 0 & \cos(x_1) & 0 \\ 0 & -2.3484 & 0 & -0.0128 \operatorname{sen}(x_1) \\ 2.3484 & 0 & -\cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \\
&= 4 \neq 3
\end{aligned}$$

con lo que se concluye que (A.2) no se satisface. Por lo tanto, no existe un difeomorfismo que permita linealizar exactamente al sistema (2.27).

Apéndice B

Código Programable Auxiliar

CÓDIGO PARA CALCULAR LAS GANANCIAS c_1, c_2 DEL CONTROLADOR DE DOS RELEVADORES LINEALIZANDO CON EL JACOBIANO

%parámetros del artículo

J1=4.59695e-3;

J2=2.495e-5;

h=0.35481;

fs2=0;

fs1=0;

%punto de equilibrio

q1_eq=pi;

%matrices de estados

A=[0,1,0,0;h*cos(q1_eq)/(J2-J1),-fs1/(J1-J2),0,fs2/(J1-J2);0,0,0,1;

h*cos(q1_eq)/(J1-J2) fs1/(J1-J2) 0 -fs2/(J2-J2^2*J1^-1)];

B=[0;1/(J2-J1);0;1/(J2-J2^2*J1^-1)]*0.0049431;

C=[1 0 0 0];

sys=ss(A,B,C,0);

polos=[-15,-9,-2,-4];K=place(A,B,polos);

res = 0.001;

w=[0:res:100];

t=[-1:0.001:1];

sys=ss(A-B*K,B,C,0);

figure

[re,im]=nyquist(sys,w);

```

nyquist(sys,w)
v=[1.2*min(re) 1.2*max(re) 1.2*min(im) 1.2*max(im)];
axis(v);
frec = 4*pi;
A1 = 0.2;
ohm = floor(frec/res) + 1;
im1=im(ohm);
re1=re(ohm);
xi=-im1/re1;
mag1=abs(re1 + 1i*im1);
if (re1>0)
    c1=-(pi/4)*(A1/mag1)*((sqrt(1+xi^2))^-1)
else
    c1=(pi/4)*(A1/mag1)*((sqrt(1+xi^2))^-1)
end
c2=xi*c1
hold on
plot(t, -(c2/c1)*t,'red');
negNinv=(pi*A1/4)*((-c1+1i*c2)/(c1^2+c2^2))

```

CÓDIGO PARA CALCULAR LAS GANANCIAS c_1, c_2 DEL CONTROLADOR DE DOS RELEVADORES UTILIZANDO LA LINEALIZACIÓN POR RETROALIMENTACIÓN DE ESTADOS

%parámetros del fabricante

```

J1 = 4.569882400731e-3;
J2 = 2.495255578125e-5;
h = 0.036169947240676*9.81;

```

%constantes de linealización

```

K=1e-4;
a0=350;
a1=155;
a2=22;

A=[0 1 0 0;0 0 1 0;-a0 -a1 -a2 0;1/J1 0 0 -K/J1];
B=[0 0 1 0]';
C=[1 0 0 0];
res = input('Resolución para el barrido de frecuencia: ');
w=[0:res:100];

```

```

t=[-1:0.001:1];
sys=ss(A,B,C,0);
[num,den]=ss2tf(A,B,C,0);
figure
[re,im]=nyquist(sys,w);
plot(re(:),im(:));
nyquist(sys,w)
v=[-2 5 -3 3]*1e-3;
axis(v);
frec = input('Frecuencia[rad/s]: ');
Ar=input('Amplitud de q_1[rad]: ');
A1=((Ar*h)/frec)*(sqrt(1-K/(J1^2*frec^2+K^2)))^-1
ohm = floor(frec/res) + 1;
im1=im(ohm);
re1=re(ohm);
xi1=-im1/re1
mag1=abs(re1 + 1i*im1)
if (re1>0)
    c1_1=-(pi/4)*(A1/mag1)*((sqrt(1+xi1^2))^-1)
else
    c1_1=(pi/4)*(A1/mag1)*((sqrt(1+xi1^2))^-1)
end
c2_1=xi1*c1_1
hold on
plot(t, -(c2_1/c1_1)*t,'red');
negNinv=(pi*A1/4)*((-c1_1+1i*c2_1)/(c1_1^2+c2_1^2))

```

*CÓDIGO PARA CALCULAR LA GANANCIA k DEL CONTROLADOR POR RES-
TRICCIONES HOLONÓMICAS VIRTUALES*

```

J1=4.5721e-3; J2=2.495e-5; h=0.35481;
q1bar=pi;
A=0.2;
Omega = 2; %en Hertz

T=1/Omega;
F=@(x)(abs(cos(x)-cos(q1bar-A))).^(-0.5);
C = quadgk(F,q1bar-A,q1bar+A,'RelTol',3e-14);
k=-((T^2*h)/(2*C^2))-J1/J2

```

Bibliografía

- [1] K. J. Åström, D. J. Block, and M. W. Spong, “The reaction wheel pendulum,” 2001. Lecture Notes for the Reaction Wheel Pendulum (Part of the Mechatronics Control Kit).
- [2] L. T. Aguilar, I. Boiko, L. B. Freidovich, and L. Fridman, “Generating self-excited oscillations in an inertia wheel pendulum,” in *Proceedings of the 2009 American Control Conference*, (St. Louis, MO, USA), pp. 65–70, June 2009.
- [3] L. B. Freidovich, A. Shiriaev, F. Gomez-Estern, F. Gordillo, and J. Aracil, “Modification via averaging of partial-energy-shaping control for orbital stabilization: cart-pendulum example,” *International Journal of Control*, vol. 82, no. 9, pp. 1582–1590, 2009.
- [4] L. B. Freidovich, P. la Hera, U. Mettin, A. Robertsson, A. S. Shiriaev, and R. Johansson, “Stable periodic motions of inertia wheel pendulum via virtual holonomic constraints,” *Asian Journal of Control*, vol. 11, no. 5, pp. 548–556, 2008.
- [5] A. Levant, “Robust exact differentiation via sliding mode technique,” *Automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 379–384, 1998.
- [6] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, third ed., 2002, 1996.
- [7] C. C. J. W. Grizzle, Claude H. Moog, “Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 5, pp. 559–576, 2005.
- [8] P. E. Wellstead, *Introduction to Physical System Modelling*. Control Systems Principles, 2000.
- [9] L. B. Freidovich, A. S. Shiriaev, and I. R. Manchester, “Experimental implementation of stable oscillations of the Furuta pendulum around the upward equilibrium,” in *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (San Diego, CA, USA), pp. 171–176, 2007.

- [10] A. Shiriaev, J. Perram, A. Robertsson, and A. Sandberg, “Periodic motion planning for virtually constrained Euler-Lagrange systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 55, no. 11, pp. 900–907, 2006.
- [11] V. Yakubovich, “Linear-quadratic optimization problem and frequency theorem for periodic systems,” *Siberian Math Journal*, vol. 27, pp. 181–200, 1986.