



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Ajustes a curvas de rotación galácticas en  
gravedad  $f(R)$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

EDUARDO GARCÍA AMADOR



TUTOR:  
DR. JORGE LUIS CERVANTES COTA

2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

García  
Amador  
Eduardo  
26 35 52 09  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
30112466-3

### 2. Datos del Tutor

Dr.  
Jorge Luis  
Cervantes  
Cota

### 3. Datos del sinodal 1

Dr.  
Darío  
Núñez  
Zúñiga

### 4. Datos del sinodal 2

Dr.  
Jerónimo Alonso  
Cortez  
Quezada

### 5. Datos del sinodal 3

Dr.  
Francisco Javier  
Sánchez  
Salcedo

### 6. Datos del sinodal 4

Dr.  
Marcelo  
Salgado  
Rodríguez

### 7. Datos del trabajo escrito

*Ajustes a curvas de rotación galácticas en gravedad  $f(R)$*   
86 pags.  
2010

*Para mis dos madres: Margarita y Rosa.*

# Agradecimientos

---

En primer lugar quiero dar un agradecimiento especial al Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares por el apoyo tanto institucional como económico que me brindó como becario durante el periodo de Junio a Diciembre de 2009. A los miembros del jurado que evaluaron este trabajo: Dr. Darío Núñez Zúñiga, Dr. Jerónimo Cortez Quezada, Dr. Francisco Javier Sánchez Salcedo y Dr. Marcelo Salgado Rodríguez por sus comentarios y observaciones así como al Dr. Mario Alberto Rodríguez Meza por sus asesorías sobre el uso del software Wolfram Mathematica 7 y otras discusiones.

*Eduardo García A.*

# Contenido

---

<b>Introducción</b>	<b>IV</b>
<b>1. Modelo Estándar de Cosmología</b>	<b>1</b>
1.1. Relatividad General . . . . .	1
1.2. Principio Cosmológico y Ecuaciones de FRW . . . . .	4
1.3. Breve historia del universo . . . . .	5
1.4. Parámetros cosmológicos . . . . .	6
1.5. Distancia lumínica . . . . .	7
1.6. Respaldo observacional del modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	10
1.6.1. Supernovas Tipo Ia . . . . .	10
1.6.2. Edad del universo . . . . .	13
1.6.3. Radiación Cómica de Fondo . . . . .	15
1.6.4. Catálogos de galaxias . . . . .	19
1.6.5. Simulaciones de N-cuerpos . . . . .	21
1.7. Resumen de mediciones . . . . .	21
<b>2. Modificaciones a RG. Gravedad <math>f(R)</math></b>	<b>23</b>
2.1. Introducción histórica . . . . .	23
2.2. Ecuaciones de campo en gravedad $f(R)$ . . . . .	24
2.3. Ecuaciones de FRW en gravedad $f(R)$ . . . . .	27
2.4. Dos modelos $f(R)$ . . . . .	27
2.4.1. $f(R) = R - \frac{\mu^4}{R}$ . . . . .	27
2.4.2. $f(R) = f_0 R^n$ . . . . .	29
2.5. Límite Newtoniano . . . . .	30
2.5.1. Límite Newtoniano en RG . . . . .	30
2.5.2. Límite newtoniano en gravedad $f(R)$ . . . . .	31
<b>3. Galaxias espirales y materia oscura</b>	<b>36</b>
3.1. Materia oscura en galaxias. Contexto histórico . . . . .	36
3.2. Naturaleza de la materia oscura . . . . .	37
3.3. Características de galaxias espirales . . . . .	38
3.4. Curvas de rotación . . . . .	39

---

3.4.1. Medición de las velocidades de rotación . . . . .	42
3.5. Teoría newtoniana de galaxias espirales . . . . .	43
3.5.1. Discos delgados . . . . .	43
3.5.2. Halos esféricos . . . . .	46
3.5.3. Características de los halos de Burkert y NFW . . . . .	47
3.6. Ajustes de curvas de rotación. Perfiles de Burkert y NFW . . . . .	48
3.6.1. Análisis de curvas . . . . .	49
<b>4. Curvas de rotación en gravedad <math>f(R)</math></b>	<b>60</b>
4.1. Potencial de disco delgado . . . . .	60
4.2. Ajustes de curvas de rotación . . . . .	61
4.3. Análisis de resultados . . . . .	62
4.4. Comparación con halos de materia oscura . . . . .	63
<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>
<b>A. Notas sobre RG y <math>f(R)</math></b>	<b>70</b>
A.1. Convención de signos . . . . .	70
A.2. Complementos de RG . . . . .	70
A.3. Cálculo de las ecuaciones de FRW en RG . . . . .	71
A.4. Cálculo de las ecuaciones de FRW en gravedad $f(R)$ . . . . .	72
<b>B. Datos y errores experimentales</b>	<b>74</b>
B.1. Ajustes de datos experimentales . . . . .	74
B.2. Cálculo de errores . . . . .	76
<b>Bibliografía</b>	<b>78</b>

# Introducción

---

Es sabido que en las galaxias se encuentra materia oscura, pero en especial en las galaxias de bajo brillo superficial (LSB, por sus siglas en inglés) donde ésta es la componente dominante. De no ser por la materia oscura no sería posible explicar de manera satisfactoria las curvas de rotación que se observan. Aunque existen varios perfiles de halos de materia oscura que resuelven el problema de las curvas de rotación, se ha tratado de abordar el problema desde otro punto de vista, uno en el que se suprime por completo a la materia oscura presente en las galaxias y se sustituye por una nueva teoría de gravitación.

Dentro de las teorías de gravitación modificada están las conocidas como gravedad  $f(R)$  que surgen como resultado de modificar el lagrangiano de Relatividad General. Está probado que algunos modelos de gravedad  $f(R)$  funcionan muy bien a nivel cosmológico como sustituto de energía oscura, en particular el modelo  $R^n$ . Esto ha llevado a la comunidad científica a tratar de probar este modelo a escalas más pequeñas como la del sistema solar con resultados poco satisfactorios, pero también a escala galáctica en donde parece haber cierto éxito ya que parece resolver el problema de las curvas de rotación sin necesidad de materia oscura.

En este trabajo abordamos la problemática de las curvas de rotación desde ambos puntos de vista: materia oscura y gravedad  $f(R)$ . La estructura es la siguiente:

En el capítulo 1 se presenta, en la primera parte, la teoría de Relatividad General y el modelo estándar de cosmología  $\Lambda$ CDM. En seguida se expone el respaldo observacional de dicho modelo, los diferentes proyectos que aportan datos observacionales a la teoría como las observaciones de Supernovas tipo Ia, el telescopio espacial Hubble y los más recientes resultados de WMAP.

El capítulo 2 trata de las modificaciones a Relatividad General, en específico las teorías  $f(R)$ , mejor conocidas como gravedad  $f(R)$ . Se obtienen las ecuaciones de campo y cosmológicas y también se exponen brevemente dos modelos  $f(R)$ , uno de los cuales es  $f(R) = f_0 R^n$  para el cual se tomará el límite newtoniano que es necesario para poder derivar el potencial gravitacional modificado a escala galáctica. Se encuentra el potencial modificado para una fuente puntual y la correspondiente curva de rotación y hace una breve discusión sobre los parámetros de este nuevo modelo.

En el capítulo 3 se expone lo referente a galaxias espirales y materia oscura: contexto histórico de observaciones, curvas de rotación, teoría newtoniana de discos delgados y dos modelos de halos

oscuros: Burkert y NFW. En la parte final se hace un ajuste a las curvas de rotación, haciendo uso del software Wolfram Mathematica 7, de una muestra de dieciséis galaxias, de las cuales siete son galaxias LSB, tomando los modelos de Burkert y NFW. Los resultados obtenidos se comparan entre si de manera muy general y se hace una breve discusión sobre los resultados obtenidos en [51] con el modelo de halo pseudo-isotérmico.

En el capítulo 4 se presenta la teoría de curvas de rotación desde el enfoque del modelo  $R^n$ . Se hace la generalización del potencial encontrado en el capítulo 2 para un disco axisimétrico y a partir del cual se encuentra la correspondiente velocidad de rotación. Dicha velocidad corresponde al término correctivo o desviación respecto de la parte newtoniana mostrada en el capítulo 3. Finalmente se hace el ajuste del mismo conjunto de galaxias con dicha modificación y se comparan los resultados con los obtenidos en el capítulo 3 de manera muy general así como los encontrados en [40] y [50].

Finalmente se describen las conclusiones del trabajo y se anexan dos apéndices con detalles del cálculo de las ecuaciones cosmológicas en Relatividad General y  $f(R)$ , además de notas generales sobre el ajuste de datos y cálculo de incertidumbres.

---

# Capítulo 1

## Modelo Estándar de Cosmología

---

En los últimos 20 años las observaciones de alta precisión del universo han sido muy importantes en el avance de la cosmología. Satélites como COBE y WMAP, las misiones en Tierra BOOMERANG y MAXIMA, las observaciones de Supernovas Ia, los catálogos de galaxias 2dF y SDSS, entre otros, han podido confirmar las predicciones del Modelo Estándar de Cosmología. Este modelo también conocido como el modelo  $\Lambda$ CDM, suplementado por un escenario de inflación provocado por campos escalares, es el que mejor se ajusta con las observaciones como veremos a lo largo del capítulo. Para una revisión técnica ver [1] y [2].

### 1.1. Relatividad General

La teoría de la Relatividad General (RG) es la teoría de gravitación sobre la cual se desarrolla la cosmología moderna. Creada en 1915 por Albert Einstein como la generalización de su teoría de la Relatividad Especial (RE), la Relatividad General proporciona la herramienta matemática con la cual se obtienen las ecuaciones cosmológicas que rigen la dinámica del universo. RG contiene a la gravitación newtoniana como límite: el límite de campo débil.

Para obtener las ecuaciones cosmológicas necesitamos de las ecuaciones de campo de Einstein las cuales se pueden obtener a partir de un principio variacional. Este es el principio de mínima acción:

$$\delta(S_g + S_m) = 0 , \quad (1.1)$$

donde  $S_g$  y  $S_m$  son las acciones del campo gravitacional y materia [3, 4]. Si se toma únicamente la variación de la acción del campo gravitacional se obtienen las ecuaciones de Einstein en el vacío como se muestra enseguida.

La acción de gravitación tiene la forma

$$S_g = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x R \sqrt{-g} , \quad (1.2)$$

con  $\kappa = 8\pi G$ ,  $R$  el escalar de Ricci –ver apéndice A.1– y  $g$  el determinante del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ ;

$R\sqrt{-g}$  es la densidad lagrangiana del campo gravitacional y  $S_g$  es conocida como como la acción de Einstein-Hilbert.

De la teoría clásica de campos sabemos que la acción viene dada por la integral de una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)$  que depende de un conjunto de campos independientes  $\Phi^i(x^\mu)$  y de sus derivadas. Los campos a su vez dependen de las coordenadas  $x^\mu$  del espacio-tiempo. En RG se tiene que  $\mathcal{L} = R\sqrt{-g}$  y la variable dinámica análoga a  $\Phi$  es  $g^{\mu\nu}$ . Aplicando el principio de mínima acción tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \delta S_g &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[ \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} , \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde hemos tomado  $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$  [3]. En la última integral tomamos en cuenta que [3]

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha (\delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}) .$$

Recordemos que las  $\Gamma$ 's no son tensores pero sus variaciones  $\delta \Gamma$ 's sí [3, 5]. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \int d^4x g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} &= \int d^4x \left[ \nabla_\alpha (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}) \right] \sqrt{-g} \\ &= \int d^4x \nabla_\alpha C^\alpha \sqrt{-g} , \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $C^\alpha = g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma^\nu_{\nu\mu}$  [4, 5] y donde se ha introducido la *condición de metricidad*  $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$ . La ec. (1.4) contiene una divergencia total así que podemos aplicar el teorema de la divergencia. Como resultado la integral se vuelve nula pues es en la frontera del hipervolumen –variedad– sobre la que se está integrando que se cumple  $\delta g^{\mu\nu} = 0$ ; así entonces la ec. (1.3) queda como

$$0 = \delta S_g = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} . \quad (1.5)$$

Finalmente obtenemos las ecuaciones de campo en ausencia de materia

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 . \quad (1.6)$$

A  $G_{\mu\nu}$  se le conoce como *tensor de Einstein*.

Para derivar las ecuaciones de campo en presencia de materia ahora tomamos la variación de la acción de materia

$$S_m = \int d^4x L_m \sqrt{-g} , \quad (1.7)$$

donde  $L_m$  es el lagrangiano de materia con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \delta S_m &= \int d^4x \left[ \frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \delta g^{\mu\nu, \alpha} \right] \\ &= \int d^4x \left[ \frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \right) \delta g^{\mu\nu} \right] \\ &\quad + \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \delta g^{\mu\nu} \right) \end{aligned}$$

La última integral contiene de nuevo una divergencia total y se anula, entonces

$$0 = \delta S_m = \int d^4x \left[ \frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \right) \right] \delta g^{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

y es en este punto donde se define el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  de materia [3]:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g} T_{\mu\nu} = \frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} \right), \quad (1.9)$$

con lo que la ec. (1.8) se convierte en

$$0 = \delta S_m = -\frac{1}{2} \int d^4x T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Así, de la ec. (1.1) obtenemos las ecuaciones de campo en presencia de materia:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

ó

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

Esta ecuación tensorial compuesta por 10 ecuaciones diferenciales parciales acopladas de segundo orden nos dice que la curvatura del *espacio-tiempo* representada por el lado izquierdo se debe a la presencia de masa y energía dada por el lado derecho, o dicho de otra manera, que la fuente del campo gravitacional se encuentra dada por el tensor de energía-momento. Es importante mencionar también que ésta es una ecuación invariante ante transformaciones generales de coordenadas.

Cuando se introduce la constante cosmológica  $\Lambda$ , la acción (1.2) se modifica sustituyendo  $R$  por  $R - 2\Lambda$  y entonces las ecuaciones de campo que se obtiene son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \right). \quad (1.13)$$

En un principio la constante cosmológica fue introducida por Einstein para forzar una solución estática de sus ecuaciones de campo. La constante actuaba así como una fuerza repulsiva a escala

cosmológica de magnitud muy pequeña que contrarrestaba a la gravedad, pero dado el descubrimiento de la expansión fue desechada. Recientemente se ha retomado porque los resultados que con ella se obtienen se adecúan a las observaciones de expansión acelerada del universo. En la forma que aparece en la ec. (1.13) la constante cosmológica actúa como un fluido ideal al que se le asocia un tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\rho_\Lambda g_{\mu\nu}$  cuya densidad de energía es  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$  y cuya presión es  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$  [3]. Con esto vemos que  $\Lambda$  actúa con presión negativa.

## 1.2. Principio Cosmológico y Ecuaciones de FRW

La cosmología moderna está basada en un principio muy sencillo y simple: el *principio cosmológico* que dice

*A grandes escalas ( $> 10^2$  Mpc) el universo es homogéneo e isótropo,*

refiriéndose *homogéneo* a la distribución uniforme de materia e *isótropo* a que posee la mismas propiedades en cualquier dirección angular que se le observe. Desde luego, a escala local como la de la Vía Láctea, el principio cosmológico no es válido ya que las estrellas no están distribuidas de manera uniforme en todo el cielo cuando lo observamos sino que se acumulan en la región llamada plano galáctico que corresponde a la vista de canto del disco galáctico. Sin embargo a escalas muy grandes la aplicación de este principio es una muy buena aproximación.

Este principio simplifica mucho las cosas porque introduce una simetría en el tensor métrico de la ec. (1.13), conocido en este caso como la métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW) dando como resultado el elemento de línea

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.14)$$

donde  $t$  es el tiempo cosmológico,  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  son las coordenadas esféricas del espacio tridimensional,  $a(t)$  es el *factor de escala* del universo y es una función que depende de  $t$ , y  $k$  es la curvatura del espacio cuyo valor puede ser -1 para un universo abierto, 0 en un universo plano ó +1 para un universo cerrado. Del elemento de línea (1.14) se puede ver que la métrica de FRW está dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Suponemos además que el universo está constituido por un fluido perfecto –sin viscosidad ni interacción entre sus partículas–. En este caso el tensor de energía-momento toma la forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

donde  $\rho$  y  $p$  son la densidad de energía y presión del fluido respectivamente y  $u_\mu = \delta^0_\mu$  es la cuadrivelocidad del fluido<sup>1</sup> en coordenadas comóviles, es decir, en coordenadas que se mueven junto con la expansión. El tiempo  $t$  de la ec. (1.14) es justo el tiempo que mide un observador que se mueve junto con el fluido y corresponde al tiempo propio.

La derivación de las ecuaciones de FRW se da en el apéndice A.3. Estas ecuaciones rigen la dinámica del universo y forman un sistema de tres ecuaciones diferenciales con tres incógnitas  $(a, \rho, p)$ . A continuación se muestran en términos de uno de los parámetros fundamentales de la cosmología: el *parámetro de Hubble* definido por  $H = \dot{a}/a$ .

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (1.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + 3p - \frac{\Lambda}{4\pi G} \right), \quad (1.18)$$

$$\dot{\rho} = -3H(p + \rho). \quad (1.19)$$

Las ecuaciones (1.17) y (1.18) nos llevan a la ec. (1.19), es decir, sólo dos ecuaciones son linealmente independientes. El sistema de ecuaciones FRW no puede ser resuelto ya que hace falta una ecuación. La ecuación faltante que cierra el sistema es la *ecuación de estado cosmológica*. Si suponemos un fluido barotrópico ésta es

$$p = \omega \rho, \quad (1.20)$$

donde  $\omega$  es una constante que toma cierto valor según el fluido que se encuentre en el universo. Esta constante es distinta en las diferentes épocas del universo como veremos en la sección 1.3. La tabla 1.1 muestra todos los posibles constituyentes del universo así como sus respectivas  $\omega$ 's.

De la ec. (1.17) se ve de una manera mucho más clara que la densidad de energía correspondiente a la constante cosmológica es  $\Lambda/8\pi G$ . De la misma ecuación también se puede ver que el universo posee por lo menos dos componentes: una cuya densidad es  $\rho$  y que puede ser cualquiera de las mostradas en la tabla 1.1 con  $\omega \neq 1$  y la otra  $\Lambda$ . Pero si posee más de dos componentes entonces  $\rho = \sum_i \rho_i$ , donde  $i$  denota a los diferentes fluidos con  $\omega \neq 1$  que conformarían el universo.

### 1.3. Breve historia del universo

Para comprender la evolución del universo presentamos la descripción siguiente que da un panorama muy general de las condiciones que existían en cada una de las etapas de evolución de universo. En sus primeros instantes, justo después de la gran explosión, el universo experimentó una enorme expansión denominada *inflación*. El agente causante de ésta es una constante cosmológica  $\Lambda$ , que se cree fue originada por la *energía de vacío* de los campos cuánticos presentes en el inicio del universo.

---

<sup>1</sup> $\delta^0_\mu =$  delta de Kronecker.

Fluido	$\omega$
Radiación y/o Partículas Ultra-Relativistas	$\frac{1}{3}$
Polvo	0
Energía del vacío	-1
Materia rígida	1

Tabla 1.1: Fluidos y sus respectivas constantes  $\omega$ .

La ecuación de estado en esta etapa corresponde a  $\omega = -1$ . Posterior a la inflación viene un proceso conocido como *recalentamiento* en donde la energía de vacío decayó en partículas. El universo ahora consistía de un fluido de *radiación y/o partículas ultra-relativistas* formado por fotones, neutrinos, quarks y otras partículas masivas cuya energía cinética era muy grande. Durante esta etapa la ecuación de estado es  $\omega = 1/3$ . Después de un enfriamiento, algunas partículas decayeron y otras persistieron como los protones, neutrones y electrones cuyas densidades sobrepasaron las asociadas con la radiación –fotones y neutrinos–. Este nuevo contenido energético del universo ejerce presión nula sólo bajo ciertas condiciones, por lo que se asume que  $\omega = 0$ . Hasta hace pocos años se creía que ésta era la etapa en la que el universo se encontraba, pero se ha descubierto que no es así. Existe una expansión acelerada provocada por algún tipo de energía exótica, tal vez una nueva constante cosmológica similar a la de la etapa de inflación con  $\omega \approx -1$ , o una nueva esencia en cuyo caso se toma  $\Lambda = 0$  y  $\omega < -1/3$  de acuerdo con la ec. (1.18). Lo que en realidad es la *energía oscura*, como se le denomina de forma genérica a este agente, no se sabe con certeza pero lo que sí se sabe es que constituye la mayor parte del contenido energético actual del universo con  $\sim 73\%$ , como lo demuestran las observaciones según veremos en secciones más adelante.

Por otro lado, el modelo  $\omega = 1$  actualmente es ya muy poco usado. Se utiliza para describir materia muy densa sometida a muy altas presiones.

## 1.4. Parámetros cosmológicos

Dentro de la cosmología existen diversos parámetros fundamentales cuyos valores describen en conjunto el escenario del universo en cualquier época. Uno de ellos es el parámetro de Hubble mencionado en la sección 1.2. A continuación definimos otros y la manera en que se relacionan entre sí.

El *parámetro de densidad de materia*  $\Omega_m = \frac{\rho}{\rho_c}$ , con  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$  la densidad crítica del universo, da cuenta de la materia presente en el universo. Otros parámetros son el *parámetro de curvatura*  $\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}$  y el parámetro de densidad correspondiente a la constante cosmológica  $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$ .

La suma de esos parámetros, excepto el de curvatura, se denomina *parámetro de densidad total* o simplemente *parámetro de densidad*  $\Omega$ . En términos de estos parámetros la ec. (1.17) se puede reescribir como

$$\Omega + \Omega_k = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 . \quad (1.21)$$

Otro parámetro es el *parámetro de desaceleración*  $q = \frac{-\ddot{a}}{aH^2} = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$  que indica si el universo se encuentra en expansión acelerada o desacelerada dependiendo del signo de  $\ddot{a}$ . Así la ec. (1.18) se transforma en:

$$q = \sum_i \frac{1}{2} (1 + 3\omega_i) \Omega_i , \quad (1.22)$$

donde  $i$  representa cada uno de los componentes del universo antes mencionados.

De acuerdo con las observaciones, hoy contribuyen de manera significativa al contenido energético del universo únicamente bariones, materia oscura fría (CDM, por sus siglas en inglés) y energía oscura; a las dos primeras las denotaremos con los subíndices  $b$  y  $CDM$  respectivamente. De acuerdo con lo que se mencionó en el párrafo final de la sección 1.2 tenemos

$$\rho_m = \rho_b + \rho_{CDM} , \quad (1.23)$$

con lo que el parámetro de densidad total es

$$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{CDM} , \quad (1.24)$$

y como veremos más adelante, las observaciones actuales indican que

$$\Omega_b + \Omega_{CDM} + \Omega_\Lambda \cong 1 , \quad (1.25)$$

es decir, vivimos en un universo prácticamente plano  $\Omega_k \simeq 0$  –ver ec. (1.21)– y de tres componentes principales. Entonces, el parámetro de desaceleración es

$$q = \frac{1}{2} \Omega_m - \Omega_\Lambda , \quad (1.26)$$

y dadas las condiciones actuales:  $\Omega_m \sim 0.27$ ,  $\Omega_\Lambda \sim 0.73$ ,  $\Omega_k \sim 0$ , tenemos que  $q_0 < 0$  lo cual indica la aceleración positiva en la expansión del universo.

A continuación se describen otros conceptos teóricos que fortalecen aún más al modelo estándar de cosmología y de los que se obtienen resultados concretos a partir de los datos observacionales.

## 1.5. Distancia lumínica

Por corrimiento al rojo estamos acostumbrados a la idea de que se trata de un fenómeno en el cual existe un desplazamiento de las líneas espectrales de la luz de las galaxias por *Efecto Doppler*. Éste es sólo una de las varias formas en las que se puede dar el corrimiento al rojo. El corrimiento al rojo

se da por diversos mecanismos: *Doppler (relativista y no-relativista)*, *Cosmológico* y *Gravitacional*. El corrimiento al rojo cosmológico consiste en una elongación de las ondas luminosas debida a la expansión del universo, es decir, hay un “alargamiento” en la longitud de onda  $\lambda$  de la luz de los objetos luminosos en el universo debido a su expansión. En el mecanismo cosmológico los objetos se encuentran pegados al espacio-tiempo y lo que ocurre es que la expansión del universo los separa dando lugar al movimiento que se observa y al aumento de la longitud de onda de la luz emitida originalmente. Este mecanismo no debe confundirse con el corrimiento Doppler donde los objetos se encuentran en movimiento relativo con cierta velocidad  $v$  y donde lo que se mide es un desplazamiento de las líneas del espectro de los objetos hacia el color rojo. Cabe mencionar que los corrimientos que se miden siempre incluyen una componente cosmológica y una Doppler. Si los objetos son cercanos, sus movimientos relativos son los que se toman en cuenta y la componente Doppler domina mientras que si son lejanos, esos movimientos relativos son despreciables y lo que se toma en cuenta es la componente cosmológica.

A partir del mecanismo cosmológico se puede obtener una expresión cuantitativa del corrimiento al rojo:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a} \equiv 1 + z, \quad (1.27)$$

en donde  $z$  es el corrimiento al rojo cosmológico y los subíndices 0 indican los valores hoy en día de las cantidades; las cantidades sin subíndice son los valores de dichas cantidades en el pasado, en el momento en que se emitió la luz.

Como el universo se encuentra en expansión,  $a_0 > a \Rightarrow \lambda_0 > \lambda \Rightarrow \nu_0 < \nu \Rightarrow E_0 < E$ , donde  $\nu_i$  es la frecuencia clásica de la onda luminosa y  $E_i$  es su energía <sup>2</sup> y de esta manera  $z > 0$ . Vemos que el factor  $z$  es en realidad el porcentaje de cambio entre la longitud de onda recibida y emitida, o entre el factor de escala actual y en un tiempo  $t$  arbitrario. El corrimiento  $z$  es de gran utilidad para la determinación de distancias en el universo. Podemos decir que  $z \sim 0$  corresponde a los objetos próximos –o que han experimentado menos expansión–, mientras que  $z$ 's más grandes corresponden a objetos más lejanos –de más expansión–.

Existen dos distancias en un universo en expansión: la *distancia comóvil* que permanece constante durante la evolución y la *distancia física* que escala proporcionalmente al factor de escala. Como veremos a continuación una manera de medir distancias es por medio de la luminosidad  $L$  (energía emitida por unidad de tiempo) de un objeto estelar. Esta es llamada *distancia lumínica* y se denota por  $d_L$ .

Supongamos un objeto de luminosidad absoluta  $L_S$  en un espacio de Minkowski. El flujo  $f$  (energía por unidad de tiempo por unidad de área) medido en la Tierra debido a este objeto, digamos una supernova, está dado por

$$f = \frac{L_S}{4\pi d^2}, \quad (1.28)$$

donde  $d = r_S$  es la distancia entre la fuente y nosotros, la cual no cambia con el tiempo. Generali-

---

<sup>2</sup>Recordemos que desde el punto vista cuántico  $\nu$  se relaciona con la energía por medio de la fórmula de Planck  $E_i = h\nu_i$

zando este concepto a un universo plano y en expansión se tiene que

$$f = \frac{L_S}{4\pi d_L^2}, \quad (1.29)$$

de la que podemos obtener una primera expresión para la distancia lumínica

$$d_L^2 = \frac{L_S}{4\pi f}. \quad (1.30)$$

Del elemento de línea (1.14) considerando un universo plano, la coordenada  $r = r_S$  desde la cual se emite un rayo luminoso que es observado en la Tierra ( $r = 0$ ) es

$$\begin{aligned} r_S &= \int_0^{r_S} dr' = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \\ &= \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H_0 h(z')}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

tomando en cuenta que  $\dot{z} = -(1+z)H$  y  $h(z) = H(z)/H_0$  un factor adimensional .

Ahora, en un universo en expansión se tiene que a  $t = t_0$

$$f = \frac{L_0}{4\pi (r_S a_0 (1+z))^2}. \quad (1.32)$$

Si comparamos las ecs. (1.29) y (1.32) vemos que

$$d_L = a_0 r_S (1+z), \quad (1.33)$$

con lo que la distancia lumínica en términos de  $z$  es

$$\begin{aligned} d_L(z) &= \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')} \\ &= (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

El factor de Hubble se puede expresar como una función de  $z$  tomando en cuenta que la densidad para un universo plano es

$$\rho = \rho_0 (a/a_0)^{-3(1+\omega)} = \rho_0 (1+z)^{3(1+\omega)} \quad (1.35)$$

y si el universo posee varias componentes entonces

$$\rho = \sum_i \rho_{i_0} (1+z)^{3(1+\omega_i)} \quad (1.36)$$

y con esto

$$H^2(z) = H_0^2 \sum_i \Omega_{i_0} (1+z)^{3(1+\omega_i)}, \quad (1.37)$$

donde  $\Omega_{i_0} = 8\pi G\rho_{i_0}/3H_0^2 = \rho_{i_0}/\rho_{c_0}$  es el valor del parámetro de densidad de cada una de las componentes hoy en día. Así, la distancia lumínica es

$$d_L(z) = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{[\sum_i \Omega_{i_0}(1+z')^{3(1+\omega_i)}]^{1/2}}. \quad (1.38)$$

Para  $z \ll 1$  lo que se obtiene a partir de la ec. (1.38) es la ya bien conocida *ley de Hubble*

$$d_L = H_0^{-1}z \quad (1.39)$$

donde  $z = \frac{v}{c}$  para objetos cercanos como los que midió Hubble en 1929.

## 1.6. Respaldo observacional del modelo $\Lambda$ CDM

En esta sección consideramos el modelo  $\Lambda$ CDM, el cual obedece la ec. (1.25) y veremos cómo éste es el modelo que más se adecúa a las observaciones.

### 1.6.1. Supernovas Tipo Ia

Las supernovas Ia (SN Ia) dan información de los parámetros cosmológicos  $H_0$ ,  $\Omega$  y  $\Omega_\Lambda$ . También nos proporcionan una evidencia directa de la aceleración que en este momento está experimentando el universo y de su contenido, pues estos parámetros se encuentran relacionados con la distancia lumínica de las supernovas.

Una supernova ocurre cuando una estrella se colapsa debido a su presión gravitacional, y después estalla debido a la acción de fuerzas nucleares. Esta explosión produce varias formas de radiación electromagnética que se pueden detectar a largas distancias. Un tipo de supernovas son las Ia, que son pobres en hidrógeno y tienen un pico en sus curvas de luz. Se cree que el origen de este tipo de supernovas son los sistemas binarios de estrellas que consisten de una gigante roja y una enana blanca. La gigante roja es más grande, pero tiene menos masa que la enana blanca. La enana comienza a adquirir la masa de la gigante, y la presión gravitacional interna de la enana se balancea con la presión de la *degeneración del electrón*. Esta presión de degeneración del electrón es debida al *principio de exclusión de Pauli* que prohíbe que dos electrones ocupen el mismo estado cuántico. El equilibrio entre la presión gravitacional y la presión de degeneración del electrón continúa mientras que la masa de la enana blanca aumenta. Cuando se alcanza el *límite de Chandrasekhar*, que es cuando la enana blanca adquiere una masa de 1.44 veces la masa de nuestro Sol, la presión gravitacional excede la presión de degeneración, y la fusión de los núcleos del carbón comienza dentro de la enana blanca. Esto produce una explosión repentina de energía que se observa como la supernova y que destruye eventualmente la enana blanca. Ya que se sabe exactamente en qué punto se alcanza este límite, podemos saber la intensidad de la radiación electromagnética que se emite. Esto, aunado al hecho de que normalmente no hay nebulosas planetarias alrededor de estos objetos,

nos provee una manera única de medir distancias. De esta forma sabemos que tan intensas son las supernovas tipo Ia, y todas parecen tener la misma intensidad, asumiendo que sucede lo mismo en diferentes regiones del universo. Con esto las SN Ia representan un estándar de luminosidad de tal manera que cuanto más lejanas las supernovas, menos intensa es la luz que recibimos de ellas.

Desde hace aproximadamente una década se han estado analizando datos de estas supernovas para determinar de manera más exacta la constante de Hubble. Esto lo han realizado principalmente dos grupos de investigación: “Supernova Cosmology Project” (SCP) [7] y “High-Z Supernova Search Team” (HZT) [8]. El resultado es una constante de Hubble con un valor superior a lo que se pensaba hace más de diez años para distancias cercanas ( $z < 0.1$ ),  $H_0 \approx 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [9]. Además, la longitud de onda de la luz que llega de lugares más lejanos ( $z > 0.1$ ) llega más elongada, consistente con un modelo de expansión acelerada del universo. De aquí vino la evidencia experimental más sólida para la energía oscura. Para obtener un valor de  $H_0$  se ajusta la mejor curva para datos como los mostrados en la figura 1.1. El mejor valor actual obtenido por este método es [10]:

$$H_0 = 74.2 \pm 3.6 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (1.40)$$

Ambos grupos de investigación de supernovas también descubrieron que para valores grandes de  $z$ , las galaxias que albergan a las supernovas se alejan mucho más rápido de lo que predice la ley de Hubble como se observa en la figura 1.1. Entonces hay una aceleración del universo que podría ser provocada por la presencia de una constante cosmológica con valor de  $\Lambda = 10^{-120} m_{\text{pl}}^2$ , donde  $m_{\text{pl}} \equiv G^{-1/2} = 10^{19} \text{ GeV}$  es la masa de Planck. Otra posibilidad es una nueva esencia cósmica llamada *quintaesencia*, típicamente consistente de campos escalares, es decir, una nueva y quinta esencia presente en el cosmos, diferente a las cuatro conocidas: fotones, bariones, neutrinos y materia oscura; también se plantea la posibilidad de una modificación a RG y esta opción es la que discutiremos en el capítulo 2 de este trabajo.

Para mostrar la presencia de la energía oscura en el universo supongamos distintos escenarios cada uno de los cuales posee las diferentes proporciones de energía y materia mostradas en la tabla 1.2 y veamos como se ajustan a los datos observacionales.

En astronomía se definen cantidades asociadas a los objetos luminosos llamadas magnitud aparente  $m$  y magnitud absoluta  $M$  cuya relación con  $d_L$  es

$$\mu(z) = m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25, \quad (1.41)$$

la cual se puede obtener tomando el logaritmo de la ec. (1.30) y notando que  $m$  se relaciona con el logaritmo de  $f$  mientras que  $M$  se relaciona con el logaritmo de  $L_S$ . Como mencionamos en párrafos anteriores las SN Ia pueden ser consideradas como una unidad estándar de luminosidad. Si conocemos  $m$  y  $d_L$  mediante la medición experimental de  $z$ , es posible determinar  $M$  y comprobar que en efecto se puede “estandarizar” la luminosidad de todas las SN Ia. Veamos un ejemplo concreto. Tomemos dos SN Ia: 1992P con  $z = 0.026$  y  $m = 16.08$  y 1997ap con  $z = 0.83$  y  $m = 24.32$  [7]. Para ambas asumimos que  $H_0^{-1} = 2998h^{-1} \text{ Mpc}$  y  $h = 0.72$ . Para 1992P se

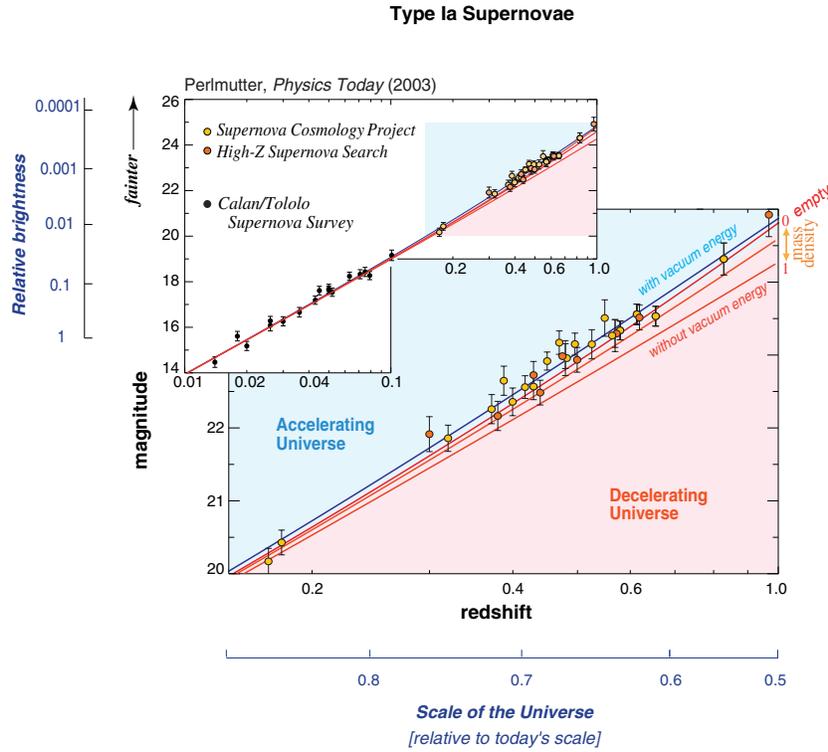


Figura 1.1: Se muestran datos del grupo SCP (amarillo), HZT (rojo) y Calan/Tololo Supernova Survey (negro). La pendiente de las curvas determinan la constante de Hubble, donde se muestra la necesidad de una constante o función cosmológica. Tomado de [11].

encuentra que  $M_{1992P} = -19.09$  a partir de la ec. (1.41) donde  $d_{L1992P} = 108.26$  Mpc, la cual se calcula a su vez por medio de la ley de Hubble (1.39). Para la supernova 1997ap se pueden seguir dos caminos. Primero tomemos en cuenta la hipótesis de candela estándar y con el valor de  $M$  calculado con 1992P calculemos su distancia lumínica a partir de la ec. (1.41); el resultado es  $d_{L1997ap} = 4830.11$  Mpc ó  $H_0 d_{L1997ap} = 1.16$ . La segunda opción es tomar en cuenta los escenarios de la tabla 1.2 y calcular la distancia lumínica mediante la ec. (1.38) y  $M$  con la ec. (1.41). Los resultados que también se muestran en la tabla 1.2 son claros: para obtener resultados teóricos que se ajusten a las observaciones es necesario un término de energía oscura dominante en el universo:  $\Omega_\Lambda \gtrsim 0.7$ ,  $\Omega_m \lesssim 0.3$ . Es cierto que el valor de  $M$  calculado por este último método no coincide con el calculado por el primer método, después de todo la idea de “candela estándar” es una hipótesis que está sometida a prueba. De hecho ésta es una prueba que demuestra que la hipótesis puede ser cierta. Además el resultado que se obtiene con el escenario c) es el que más se acerca al resultado del primer método. Desde luego que estos dos ejemplos no son suficientes para afirmar que el universo se encuentra en expansión; ésta no es la única evidencia de la existencia de la energía oscura en el

universo.

Escenario	$\Omega_{\Lambda_0}$	$\Omega_{m_0}$	$H_0 d_{L_{1997ap}}$	$d_{L_{1997ap}}$ (Mpc)	$M$
a)	0	1	0.95	3974.22	-18.68
b)	0.3	0.7	1.04	4336.00	-18.87
c)	0.7	0.3	1.23	5104.62	-19.22
d)	1	0	1.52	6324.53	-19.69

Tabla 1.2:  $d_L$  de SN 1997ap suponiendo un universo de dos componentes: materia y energía oscura ( $\Lambda$ ). Las observaciones son consistentes con una energía oscura dominante en el universo.

Los parámetros  $\Omega_i$ 's y  $H_0$  se pueden determinar calculando los mejores ajustes de datos observacionales con la ec. (1.38). Para esto necesitamos conocer  $d_L$  y  $z$ . El dato observacional es  $\mu(z)$  y usando la ec. (1.41) obtenemos  $d_L$  para un conjunto de parámetros ( $H_0, \Omega_{m_0}, \Omega_{\Lambda_0}$ ). En 1998 Perlmutter *et al.* de SCP [7] descubrieron 42 SN Ia con corrimientos en el rango  $z = 0.18 - 0.83$  mientras que Riess *et al.* de HST [8] descubrieron 14 SN Ia con corrimientos en el rango  $z = 0.16 - 0.62$  además de 34 SN Ia cercanas. Asumiendo un universo plano de dos componentes, Perlmutter *et al.* encontraron que  $\Omega_{m_0} = 0.28_{-0.08}^{+0.09}$ . En 2004 Riess *et al.* [12] encontraron un mejor valor para la densidad de materia:  $\Omega_{m_0} = 0.29_{-0.03}^{+0.05}$  con la medición de 16 SN Ia de alto corrimiento ( $z > 1.25$ ) haciendo uso del Telescopio Espacial Hubble. En la figura 1.2 se muestra una gráfica logarítmica de  $H_0 d_L$  contra  $z$  en donde se comparan los datos observacionales para  $d_L$  y las curvas teóricas que se obtienen de la ec. (1.38) para tres casos distintos. El caso que mejor ajusta con los datos es aquel con  $\Omega_{m_0} = 0.31 \pm 0.08$  [13] y que es consistente con el resultado de Riess *et al.* Todos estos resultados indican que la densidad energética del universo se compone  $\sim 70\%$  de energía oscura lo cual viene a confirmar lo dicho en la sección 1.3. El caso  $\Omega_{m_0} = 1$  no ajusta con los datos.

### 1.6.2. Edad del universo

Otra evidencia de la existencia de la energía oscura surge de la comparación de la edad  $t_s$  de los objetos más viejos en el universo con  $t_0$  la edad del universo. Uno espera encontrar que  $t_0 > t_s$  para los distintos modelos cosmológicos, pero para modelos que sólo consideran materia esto no sucede, en contraste con los modelos que incluyen una constante cosmológica. De nuevo se hace evidente la inclusión de una  $\Lambda$  para obtener resultados que concuerden con las observaciones. Veamos como sucede esto.

Dentro de los objetos más viejos en el universo se encuentran algunos cúmulos globulares de la Vía Láctea con una edad  $t_1 = 13.5 \pm 2 \times 10^9$  años, determinada por Jimenez *et al.* [14], y el cúmulo globular M4 con  $t_2 = 12.7 \pm 0.7 \times 10^9$  años determinada por Hansen *et al.* [15] y Richer *et al.* [16]. Con estos datos se puede decir que la cota inferior para edad del universo es  $t_0 \simeq 13.5 \times 10^9$  años. Cuando

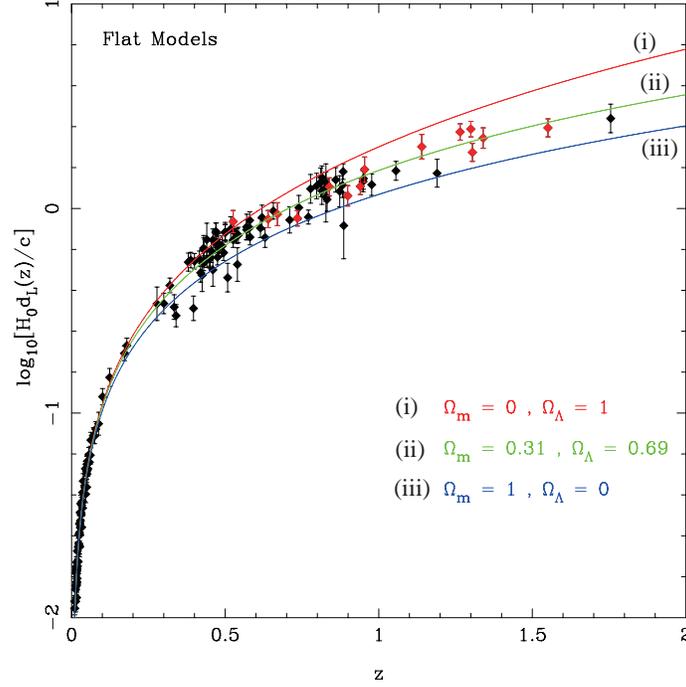


Figura 1.2: Gráfica logarítmica de  $H_0 d_L$  vs  $z$ . Los puntos negros corresponden a datos de Riess *et al.* Los puntos rojos corresponden a datos recientes del Telescopio Espacial Hubble. Las tres curvas corresponden a: (i)  $\Omega_{m_0} = 0$ ,  $\Omega_{\Lambda_0} = 1$  (rojo), (ii)  $\Omega_{m_0} = 0.31$ ,  $\Omega_{\Lambda_0} = 0.69$  y (iii)  $\Omega_{m_0} = 1$ ,  $\Omega_{\Lambda_0} = 0$ . Tomado de [13].

se toma en cuenta el modelo  $\Lambda$ CDM, las mediciones de WMAP después de 3 años de observaciones indican que  $t_0 = 13.73^{+0.13}_{-0.17} \times 10^9$  años,  $t_0 = 13.73 \pm 0.12 \times 10^9$  años según datos de cinco años, pero más recientemente con datos de siete años de mediciones se obtuvo  $t_0 = 13.75 \pm 0.13 \times 10^9$  años [17].

Teóricamente la edad del universo está dada por

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H}, \quad (1.42)$$

donde  $dt = \frac{dt}{dz} dz$ . Por lo tanto, la edad del universo en el modelo  $\Lambda$ CDM está dada por

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z) [\Omega_{m_0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda_0}]^{1/2}}, \quad (1.43)$$

y cuya solución es

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} (\Omega_{\Lambda_0})^{-1/2} \ln \left( \frac{1 + (\Omega_{\Lambda_0})^{1/2}}{(\Omega_{m_0})^{1/2}} \right). \quad (1.44)$$

De acuerdo con las observaciones del telescopio Espacial Hubble, el factor  $H$  se encuentra restringido a

$$H_0^{-1} = 9.776 h^{-1} \times 10^9 \text{ años}, \quad 0.64 < h < 0.80. \quad (1.45)$$

Las soluciones asintóticas son  $t_0 \rightarrow \infty$  conforme  $\Omega_{m_0} \rightarrow 0$ ;  $t_0 \rightarrow \frac{2}{3}H_0^{-1}$  conforme  $\Omega_{m_0} \rightarrow 1$ , por lo que  $\frac{2}{3}H_0^{-1} < t_0 < \infty$ . Si tomamos  $\Omega_{m_0} = 0.3$ ,  $\Omega_{\Lambda_0} = 0.7$  y  $h = 0.72$  obtenemos  $t_0 = 13.1 \times 10^9$  años, que es consistente con las observaciones.

### 1.6.3. Radiación Cómica de Fondo

Las observaciones del astrónomo Edwin Hubble en los años 20's demostraron que el universo se encuentra en expansión y no estático como algunos, entre ellos Albert Einstein, pensaban. Dado este nuevo escenario del universo, George Gamow propuso una teoría en la cual el universo se creó a partir de un estado de características únicas: temperatura y densidad elevadísimas, por no decir infinitas, conocida como del Big Bang.

Según la teoría del Big Bang, la luz y materia se encontraban concentradas en estados energéticos muy altos comportándose ambas como un fluido de radiación que obedece la ley de Stefan-Boltzman. Si esta teoría debía ser cierta, la gran explosión que dió origen al universo debió haber dejado un rastro detectable hasta nuestros días: la Radiación Cómica de Fondo (RFC) cuya temperatura, según los teóricos, sería de  $\sim 3$  K al momento de observarla.

La RFC fue descubierta por accidente en 1964 por Arnold Penzias y Robert Wilson cuando trabajaban para los laboratorios Bell con una antena ultrasensible con la que buscaban detectar las emisiones de radio de la Vía Láctea. En sus observaciones ellos siempre detectaban un ruido sin importar la dirección en que apuntaran su antena. Ese ruido parecía provenir de fuera de galaxia lo cual sugería que se trataba de un fenómeno a escala cosmológica y no local. Al principio, Penzias y Wilson creían que se trataba de palomas que habían anidado en la antena porque no encontraban otra explicación más lógica para lo que estaban observando, pero para su "mala" suerte luego de quitar a las palomas la situación persistió. Lo que no sabían era que en realidad estaban observando la RFC y que otros científicos como R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll y D. T. Wilkinson buscaban sin éxito desde antes que Penzias y Wilson hicieran el descubrimiento. El grupo de Dicke ya contaba con una teoría para el fenómeno que habían construido siguiendo las ideas de Gamow, lo único que les faltaba era la comprobación experimental. La RFC tiene hoy una temperatura de 2.725 K [18] con un pico de intensidad en la región de microondas correspondiente a una longitud de onda de  $\lambda = 2$  mm por lo que a veces se le llama RFC de Microondas (RCFM).

Con el descubrimiento de la RCFM la teoría del Big Bang terminó por ser aceptada dentro de la comunidad científica y se abrió un nuevo camino que trataba de mejorar la instrumentación para medir la RCFM con mayor precisión y saber si tal radiación se encontraba en equilibrio y si el universo era perfectamente isotrópico. Revisamos a continuación los descubrimientos más recientes de la RCFM.

## COBE

Hacia finales de los 80's la tecnología ya había avanzado mucho respecto a la de los 60's y ya se había diseñado y construido un satélite capaz de medir las anisotropías de la RCFM llamado COBE (COsmic Background Explorer) que tenía una ventaja sobre los observatorios e instrumentos en Tierra: evitar la interferencia de la atmósfera terrestre. Lanzado en 1989, fue el primer instrumento de medición de alta precisión dedicado al estudio de la RCFM y después de dos años de observaciones, en 1992 de dieron a conocer los primeros resultados [19].

Las observaciones realizadas por el Espectrofotómetro Absoluto del Infrarrojo Lejano (FIRAS, por sus siglas en inglés) de COBE revelaron que la radiación en el universo poseía un espectro de cuerpo negro, con lo que el plasma primordial se encontraba en equilibrio como se ve figura 1.3. De hecho el universo temprano es el mejor cuerpo negro que existe en la naturaleza. Pero además de eso, COBE encontró pequeñas anisotropías relativas de temperatura del orden de  $10^{-5}$  en distintas direcciones angulares, las cuales tiempo más tarde serían las responsables de la formación de estrellas y galaxias, ya que si el universo fuera perfectamente isotrópico simplemente la existencia de las macro estructuras no sería posible. El escaneo se realizó con el Radiómetro Diferencial de Microondas (DMR, por sus siglas en inglés) y se muestra en la figura 1.4. La teoría inflacionaria propone que esas anisotropías se debieron a fluctuaciones de campos cuánticos fundamentales de la naturaleza.

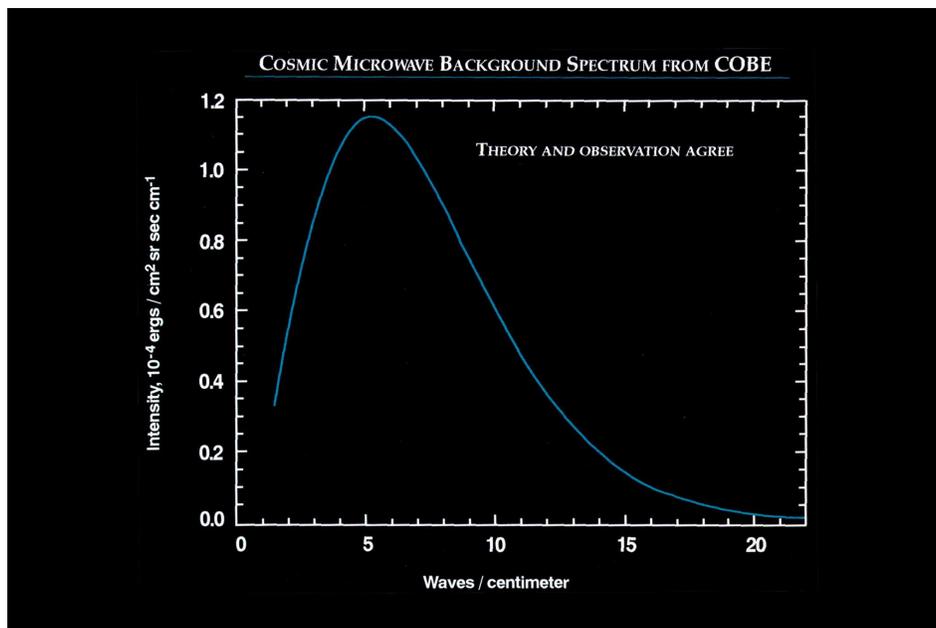


Figura 1.3: Espectro de cuerpo negro del universo medido por COBE. Tomado de [20].

A favor de las observaciones están los modelos cosmológicos que predicen que la RCFM no es exactamente isotrópica y que en el pasado debieron existir pequeñas fluctuaciones en la densidad

del plasma de protones, electrones y fotones. Esto sucedió desde los primeros minutos del universo hasta la Superficie de Última Dispersión (SUD), la cual ocurrió aproximadamente a los 380 mil años. A partir de ese momento los fotones se desacoplaron de dicho plasma y la luz de esa interacción fue dispersada por última vez. Dicha luz es la que observamos hoy como RCFM. Las fluctuaciones poseen un patrón invariante de Harison-Zeldovich y después de su evolución, al entrar al horizonte, se genera un patrón oscilatorio que se detecta como oscilaciones acústicas pero sólo a ángulos de observación pequeños  $\theta \leq 1^\circ$ . Sin embargo, éstas no fueron medidas por COBE.

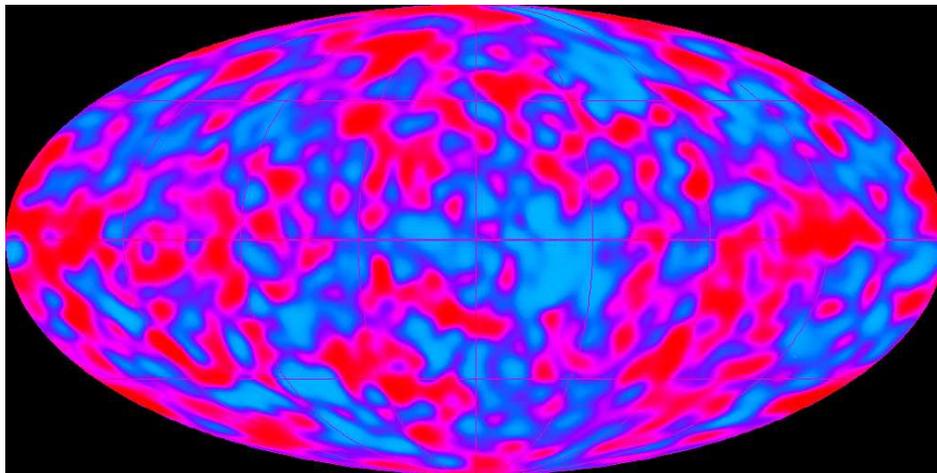


Figura 1.4: Mapa de la RFC hecho por COBE tras dos años de observaciones. Las regiones azules muestran una menor temperatura respecto a las rojas. Tomado de [21].

## BOOMERANG y MAXIMA

A pesar del enorme éxito de COBE, sus observaciones estaban restringidas a ángulos  $\theta > 7^\circ$  en el cielo, que representan escalas grandes para poder medir las perturbaciones que dieron origen a las galaxias, cúmulos de galaxias, etc. Las oscilaciones acústicas mencionadas en la sección anterior amplificarían, en última instancia, una cresta o valle de las ondas de la RCFM creando un “pico acústico” que sólo sería detectado con instrumentos más finos. Experimentos posteriores mejoraron las mediciones de COBE ya que los nuevos instrumentos tenían mayor resolución angular y podían medir a escalas  $\theta \leq 1^\circ$  en las cuales eran detectables las oscilaciones antes mencionadas.

Los experimentos que siguieron a COBE tenían como objetivo principal medir los picos acústicos del espectro angular de la RCFM. Entre los más importantes estuvieron BOOMERANG (Ballon Observations Of Millimetric Extragalactic RAdiatioN and Geophysics) y MAXIMA (Millimeter Anisotropy eXperiment IMaging Array). A diferencia de COBE, éstos se encontraban dentro de la atmósfera terrestre y los instrumentos de medición eran transportados en globos en regiones donde la atmósfera es fría y seca como el Polo Sur, con la finalidad de evitar al máximo las interferencias con ésta. La principal desventaja de estos nuevos proyectos era que el vuelo de los globos no

duraban mucho tiempo además de que la región del cielo analizada era muy reducida. Aún así, los datos recabados por BOOMERANG y los dos vuelos de MAXIMA fueron comparados entre sí para eliminar ruido y obtener mejores resultados. En el año 2000 se dió a conocer su principal resultado: la localización del primer pico acústico [22, 23]. La principal implicación teórica de estos resultados es que el universo es esencialmente plano ( $k \sim 0$ ), que corresponde al máximo de la oscilación localizado en  $\ell \sim 200$  en la figura 1.5.

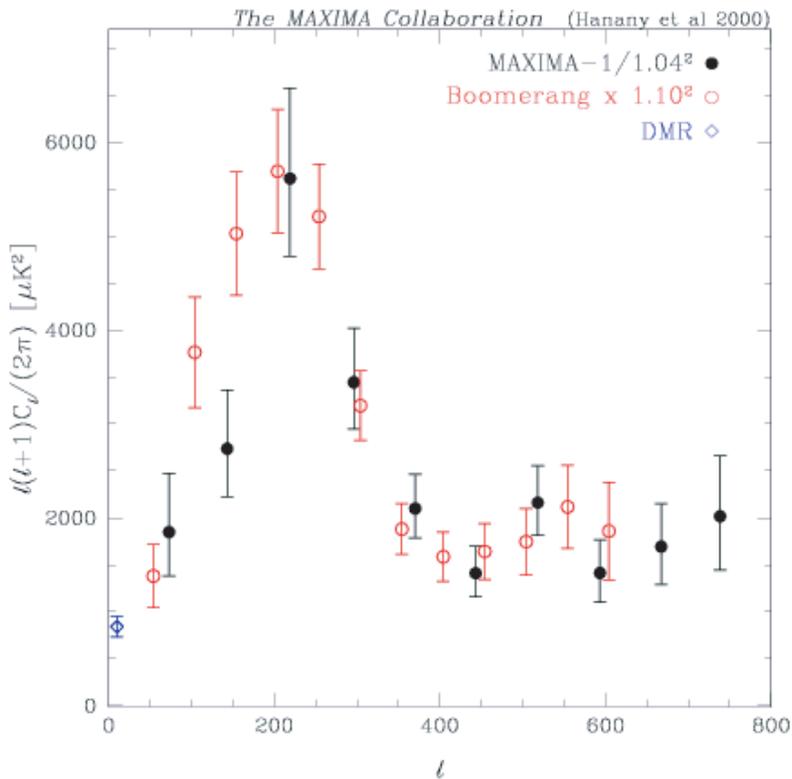


Figura 1.5: Espectro de potencias de BOOMERANG (puntos rojos) y MAXIMA-1 (puntos negra) en una comparación. Ambos muestran que el pico acústico principal se encuentra en  $\ell \sim 200$ . Tomada de [24].

## WMAP

La búsqueda de mejores observaciones continuó y en 2001 fue lanzado un nuevo satélite: WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) cuya resolución es de 13 minutos de arco. Los datos proporcionados por WMAP tienen 45 veces la sensibilidad y 33 veces la resolución angular de aquellos proporcionados por COBE. La figura 1.6 muestra el mapa del cielo hecho por WMAP en su quinto año de mediciones. Recientemente se han publicado resultados tras siete años de mediciones [17]. Los principales parámetros son:  $\Omega_b = 0.0449 \pm 0.0028$ ,  $\Omega_{mo} = 0.222 \pm 0.026$  y  $\Omega_\Lambda = 0.734 \pm 0.029$ . Sin embargo los datos más recientes de WMAP en combinación con los datos de las oscilaciones

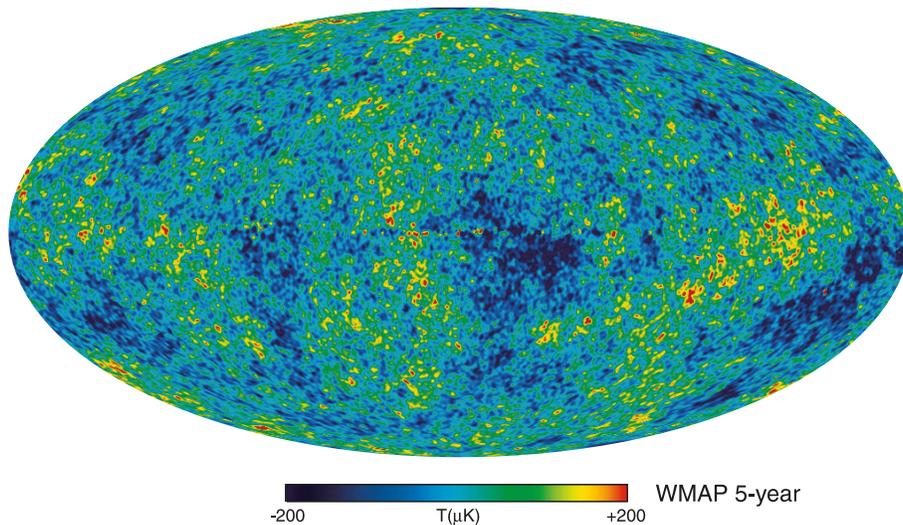


Figura 1.6: Mapa térmico del cielo hecho por WMAP en un periodo de cinco años de observaciones. De nuevo las regiones azules representan las zonas de menor temperatura y las regiones rojas aquellas de mayor temperatura. Se observa una mayor resolución respecto a la de la figura 1.4. Tomado de [25].

acústicas (Baryon Acoustic Oscillations, BAO) y datos de supernovas se obtienen los resultados mejorados:  $\Omega_b = 0.0456 \pm 0.0016$ ,  $\Omega_{mo} = 0.227 \pm 0.014$  y  $\Omega_\Lambda = 0.728^{+0.015}_{-0.016}$ .

WMAP también midió los picos acústicos y creó su propio espectro de potencias y de polarización similar al de BOOMERANG y MAXIMA (figura 1.5) pero con una mayor resolución, como se puede apreciar en la figura 1.7. Podemos decir que la figura 1.7 es una versión mejorada de la figura 1.5 así como la figura 1.6 es la versión mejorada de la figura 1.4.

#### 1.6.4. Catálogos de galaxias

El catálogo de corrimientos al rojo de galaxias “2-degree Field” (2dF) fue un proyecto que utilizó un telescopio de cuatro metros con un campo visual de dos grados. Este proyecto concluyó en junio del 2003 y examinó 245,591 objetos, incluyendo quasars y galaxias obteniendo información de cada objeto como su espectro y corrimiento entre otros datos relevantes. Con el 2dF los científicos midieron de nuevo la constante de Hubble y también obtuvieron las funciones de luminosidad para las galaxias con diversos tipos espectrales.

El mismo equipo trabajó en la continuación del proyecto 2dF que proporcionó mucha información sobre la distribución de materia en el universo. Esta vez llamado catálogo 6dF ya que se utilizó un telescopio con ángulo del campo visual de seis grados en el cielo, el cual midió más de ocho veces el área que cubría el 2dF, correspondientes al hemisferio sur. Este catálogo produjo 110,256 corrimientos al rojo nuevos [26] y con este catálogo ha sido posible predecir diferentes aspectos la formación de estructura del universo. Por ejemplo, se puede estudiar la distribución espacial de objetos como función de los tipos de espectros o distorsiones en el espacio del corrimiento al rojo.

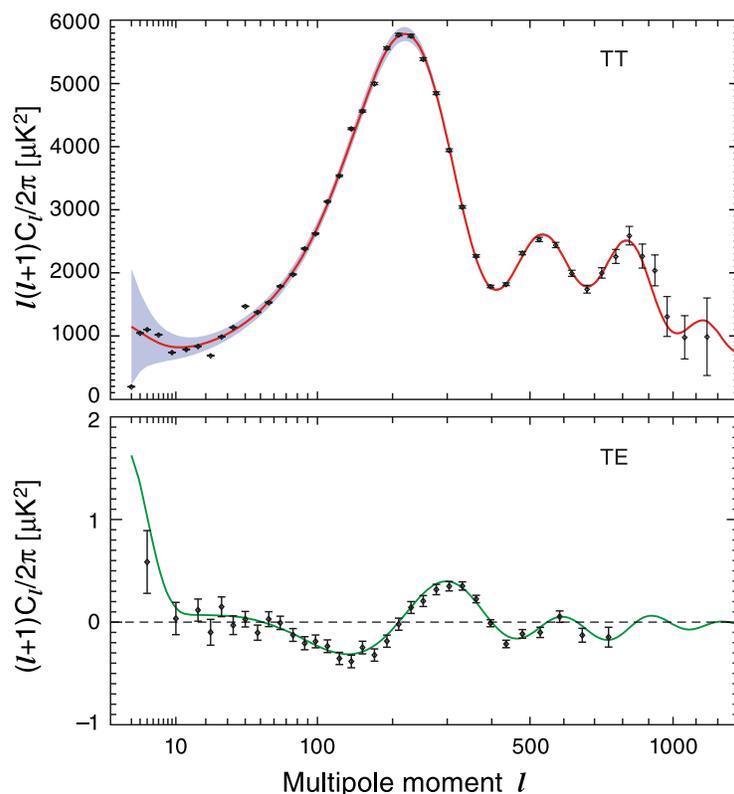


Figura 1.7: Espectro de temperatura creado por WMAP tras siete años de observación. La mejora en la resolución es evidente, comparado con la figura 1.5, pues se muestran hasta tres picos secundarios aparte del principal. Las líneas sólidas muestran el mejor ajuste para el modelo  $\Lambda$ CDM y la región sombreada marca la incertidumbre que surge a partir de la variación cósmica. Tomado de [17].

Una de las cantidades importantes es el espectro de potencias como función de la longitud de onda de los objetos de estudio como galaxias y cúmulos y finalmente con todo esto la determinación de los parámetros cosmológicos mencionados antes. Los parámetros obtenidos de los datos finales de 2dF y mediciones de la RCFM arrojan los siguientes resultados [27]:  $\Omega_m = 0.237 \pm 0.020$  para el parámetro de densidad,  $\Omega_b = 0.041 \pm 0.002$  para la densidad bariónica, una constante de Hubble de  $H_0 = 74 \pm 2 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , un índice espectral escalar de  $n_s = 0.954 \pm 0.023$  y una ecuación de estado igual a  $\omega = -0.85^{+0.18}_{-0.17}$ . Ver más detalles en [28].

Otro proyecto de esta clase es el catálogo “Sloan Digital Sky Survey” (SDSS). Éste es también un proyecto muy ambicioso que midió más de un cuarto del cielo. Con él se determinaron las distancias y brillos de más de un millón galaxias y quasars. Diversos análisis detallados de los datos se han publicado en los últimos años como [29] en los que analizan tridimensionalmente más de 200 mil galaxias. Los datos arrojan los siguientes parámetros cosmológicos:  $\Omega_m = 0.213 \pm 0.023$ ,  $\Omega_b/\Omega_m = 0.17$  y el parámetro de Hubble  $h = 0.72$  –ver [30]–. Más recientemente los datos finales de SDSS arrojan los siguientes resultados:  $\Omega_m = 0.286 \pm 0.018$  y  $H_0 = 68.2 \pm 2.2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [31].

### 1.6.5. Simulaciones de N-cuerpos

Otro tipo de “experimentos” que también son importantes y consistentes con los parámetros mencionados antes son las simulaciones cosmológicas numéricas de formación de estructura en el universo, en las cuales principalmente se usa el método de N-cuerpos. Éstas son conocidas como *simulaciones de N-cuerpos* y resuelven cuerpo a cuerpo la gravitación newtoniana en un universo en expansión. Desde principios de los años 80’s y hasta la fecha las simulaciones arrojaban resultados inconsistentes con los mapas de galaxias de la época si no se consideraba una constante cosmológica y una componente grande de materia oscura. Más aún, otros resultados importantes aparecieron a mediados de los 90’s con los artículos seminales [32], donde se muestra la predicción del tipo de distribución esperada por estos experimentos, el ya famoso perfil NFW, válido para halos de materia oscura a diversas escalas astronómicas. Una simulación muy detallada se realizó hace pocos años en la cual se emplearon más de diez mil millones de partículas para simular una extensión de 2000 millones de años luz al cubo, abarcando alrededor de 20 millones de galaxias en formación [33].

## 1.7. Resumen de mediciones

Hemos presentado el modelo  $\Lambda$ CDM de cosmología así como las observaciones que lo respaldan. Estas demuestran que:

- Vivimos en un universo plano y en expansión acelerada provocada por una energía oscura, que representa  $\sim 73\%$  del contenido energético.
- La materia bariónica que conforma todo lo que observamos es escasa con apenas  $\sim 4.5\%$ .
- La mayoría de la materia en el universo es invisible y sólo se detecta de manera indirecta. Constituye  $\sim 23\%$  del contenido energético del cosmos.

A manera de resumen presentamos la siguiente tabla que contiene a los parámetros más importantes del modelo estándar de cosmología. Aunque hemos dado diversos valores para los principales parámetros del modelo, la tabla 1.3 muestra los resultados de los datos combinados de los siete años de observaciones de WMAP, los datos más recientes de supernovas y de oscilaciones acústicas en la distribución de galaxias (BAO) para los principales parámetros del modelo  $\Lambda$ CDM.

Es importante en este punto mencionar que  $\Omega_\gamma < 0.01$  y  $\Omega_\nu < 0.01$ . Su contribución al modelo estándar es despreciable por lo que normalmente no se mencionan, lo cual no quiere decir que no estén presentes en el universo.

Parámetro	Símbolo	Valor dado por WMAP+SN Ia+BAO
Edad del universo	$t_0$	$13.75 \pm 0.11$ Giga años
Constante de Hubble	$H_0$	$70.4_{-1.4}^{+1.3}$ km s <sup>-1</sup> Mpc <sup>-1</sup>
Densidad de bariones	$\Omega_b$	$0.0456 \pm 0.0016$
Densidad de materia oscura	$\Omega_{mo}$	$0.227 \pm 0.014$
Densidad de energía oscura	$\Omega_\Lambda$	$0.728_{-0.016}^{+0.015}$
Índice espectral escalar	$n_s$	$0.963 \pm 0.012$
Edad en SUD	$t_{\text{SUD}}$	$377730_{-3200}^{+3205}$ años
Densidad total	$\Omega_b + \Omega_{mo} + \Omega_\Lambda$	$1.0023_{-0.0054}^{+0.0056}$
Ecuación de estado	$\omega$	$-0.980 \pm 0.053$

Tabla 1.3: Resumen de los principales parámetros cosmológicos, asumiendo válida la teoría de RG. Datos tomados de [17].

---

# Capítulo 2

## Modificaciones a RG. Gravedad $f(R)$

---

Como se mencionó en la primera parte del capítulo 1 RG es la base matemática sobre al cual se formula la cosmología moderna. Sin embargo han surgido teorías alternativas que intentan explicar enigmas como los referentes a la energía y materia oscuras sin hacer alusión a medios exóticos que no se pueden observar de manera directa.

En este capítulo presentamos la teoría conocida como gravedad  $f(R)$  la cual es una generalización de RG y veremos muy brevemente cómo se aplican dos modelos  $f(R)$  para sustituir a la energía oscura, pero también abordamos de manera más extensa su aplicación a las curvas de rotación como sustituto de materia oscura.

### 2.1. Introducción histórica

Las modificaciones y limitaciones de RG no se hicieron esperar mucho tiempo después de que esta fue dada a conocer. Fue en 1919 y 1922 que Weyl y Eddington –este último fue el mismo que comprobó de forma experimental la desviación de los rayos de luz de una estrella durante el eclipse de 1919– que consideraron modificaciones a RG proponiendo invariantes de orden superior en la acción de Einstein-Hilbert. Esto no era algo que llamara la atención de los físicos de la época porque parecía no tener ningún sentido tanto en lo experimental como en lo teórico. Fue hasta 1962 que esas modificaciones empezaron a cobrar sentido. Utiyama y De Witt demostraron que para la renormalización a un lazo se requiere que la acción de Einstein-Hilbert sea cambiada por términos de curvatura de orden superior. Posteriormente Stelle demostró que las acciones de orden superior son renormalizables. Esto motivó a los científicos a comenzar a estudiar las teorías de gravedad de orden superior, que es como se les llama a las modificaciones de la acción de RG con el fin de incluir invariantes de curvatura de orden superior con respecto al escalar de Ricci. A pesar de la relevancia de estas teorías, su aplicación estaba limitada a campos gravitacionales muy intensos, como sucede en las cercanías de las singularidades de agujeros negros y en la escala de Planck.

La aplicación de tales teorías a bajas energías y escalas cosmológicas se dió hace poco tiempo. Como se mostró en el capítulo anterior existe una gran cantidad de observaciones que indican un

universo en expansión acelerada dominado en primer plano por energía oscura que ejerce una presión negativa, todo sustentado por el modelo  $\Lambda$ CDM. No obstante el modelo tiene algunas “fallas”. El primer candidato viable para energía oscura fue la constante cosmológica  $\Lambda$  pues su presencia en las ecuaciones cosmológicas hace que la teoría ajuste con las observaciones –sec. 1.6–. Sin embargo existe un problema. Teóricamente se espera que  $\Lambda_{teo} = m_{pl}^2$ , pero las observaciones dan un valor de  $\Lambda_{obs} = 10^{-120} m_{pl}^2$  –sec. 1.6.1–, ¡120 órdenes de magnitud más pequeña que la dictada por la teoría! A esta enorme discrepancia se le conoce como *problema de la constante cosmológica*. Otro problema es el relacionado con que hoy los órdenes de magnitud de las densidades de energía oscura y materia son comparables, es decir, del mismo orden de magnitud; no hay otra explicación mas que esto ocurra por coincidencia y por eso se le conoce como el *problema de coincidencia*<sup>1</sup>.

Dados estos problemas se da la búsqueda de otros candidatos para energía oscura. La teoría de la quintaesencia es una de ellas, pero se puede ir más allá y decir que la falta de una explicación clara para energía oscura se debe a una falla de RG a escalas cosmológicas o muy pequeñas y no a la existencia de campos escalares de quintaesencia o fluidos exóticos.

## 2.2. Ecuaciones de campo en gravedad $f(R)$

En gravedad  $f(R)$  –antes llamadas teorías  $f(R)$ – se propone el siguiente cambio en la acción de la gravedad (1.2)

$$S_{g_{mod}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) , \quad (2.1)$$

es decir,  $R$  se sustituye por una función general  $f(R)$ .

En este trabajo desarrollaremos el *formalismo métrico*<sup>2</sup> para obtener las ecuaciones de campo en donde la métrica del espacio-tiempo es la única variable independiente y con respecto a la cual se toman las variaciones. No obstante existen otros dos formalismos. Uno de ellos es el *formalismo de Palatini* en el cual, aparte de la métrica, la conexión es la otra variable independiente pero asumiendo que la acción de materia no depende de la conexión. El otro es un formalismo más general que incluye al formalismo métrico y al de Palatini. En este formalismo la acción de materia sí depende de la conexión –ver [34] para un mayor detalle de estos formalismos– .

Desarrollemos el formalismo métrico para  $f(R)$ . Aplicando el principio de mínima acción a la

---

<sup>1</sup>En [33] se presenta otra ideología respecto de estos problemas. Ahí simplemente no existen y aparecen como consecuencias naturales de RG.

<sup>2</sup>Este es el mismo formalismo usado en RG.

nueva acción del campo gravitacional tenemos

$$\begin{aligned}
 0 = \delta S_{g_{mod}} &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[ \delta\sqrt{-g} f(R) + \sqrt{-g} \delta f(R) \right] \\
 &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[ \delta\sqrt{-g} f(R) + \sqrt{-g} f'(R) (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \right] \\
 &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[ f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \\
 &\quad + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} , \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

donde la prima denota derivada con respecto a  $R$ . Para calcular la última integral tomamos en cuenta que  $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha C^\alpha$  de acuerdo con la ec. (1.4) de la sección 1.1 y en la cual se sustituye la siguiente igualdad [35]:

$$\delta\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\nabla_\lambda(\delta g_{\rho\nu}) + \nabla_\nu(\delta g_{\rho\lambda}) - \nabla_\rho(\delta g_{\nu\lambda})) ,$$

obteniéndose

$$\begin{aligned}
 0 = \delta S_{g_{mod}} &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} \right. \\
 &\quad \left. - f'(R) (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma) \right] \delta g^{\mu\nu} . \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

Aunque las variaciones ya están en términos de  $\delta g^{\mu\nu}$ , el último paréntesis implica derivadas de esas variaciones. No es posible convertirlo en una divergencia total como en la sección 1.1. Sin embargo podemos integrar por partes. Comencemos con el segundo término del paréntesis el cual se convierte en

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) \nabla_\sigma A^\sigma = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [f'(R) A^\sigma] - \int d^4x \sqrt{-g} A^\sigma \nabla_\sigma f'(R) , \tag{2.4}$$

donde  $A^\sigma = \nabla^\sigma g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ . Podemos hacer la primera integral nula, es decir, hacer las derivadas de las variaciones de la métrica iguales a cero en la frontera y aplicar el teorema de la divergencia. Aquí es posible hacer eso dado que tenemos más grados de libertad al contar con derivadas de cuarto de orden [34]. Así, la segunda integral es la única que contribuye, la cual también integramos por partes:

$$\begin{aligned}
 - \int d^4x \sqrt{-g} A^\sigma \nabla_\sigma f'(R) &= - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma B^\sigma + \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma f'(R) \\
 &= \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma f'(R) , \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

ya que la primera integral contiene una divergencia total donde  $B^\sigma = g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\sigma f'(R)$ . Siguiendo de manera exactamente análoga este procedimiento para el otro término en el paréntesis se llega a

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) . \quad (2.6)$$

Entonces la ec. (2.3) finalmente queda como

$$0 = \delta S_{g_{mod}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[ f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma - \nabla_\mu \nabla_\nu) f'(R) \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} , \quad (2.7)$$

y ahora las derivadas covariantes se aplican a  $f'(R)$  quedando todo en términos de la variaciones  $\delta g^{\mu\nu}$ , que son arbitrarios por lo que el integrando se anula. Así, las ecuaciones de campo en el vacío para gravedad  $f(R)$  son

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f'(R) = 0 , \quad (2.8)$$

y donde  $\square \equiv \nabla^\sigma \nabla_\sigma = g^{\sigma\rho} \nabla_\rho \nabla_\sigma$  es el operador D'Alambertiano. Las ecuaciones de campo en presencia de materia se obtienen añadiendo a la variación (2.7) la variación (1.10). Entonces, el resultado final es

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f'(R) = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (2.9)$$

Los términos dentro del paréntesis son justo los términos de cuarto orden ya que incluyen dos derivadas extras a las dos que ya tiene  $R$ .

La traza de la ec. (2.9) dada por

$$f'(R) R - 2f(R) + 3\square f'(R) = \kappa T , \quad (2.10)$$

es de utilidad en el estudio de algunos aspectos de la teoría como la estabilidad y límite de campo débil.

Es posible escribir la ec. (2.9) en forma similar a la ec. (1.13) sumando  $-\frac{1}{2} R g_{\mu\nu} f'(R)$  en ambos miembros:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f'(R)} \left[ \kappa T_{\mu\nu} + \frac{f(R) - R f'(R)}{2} g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f'(R) \right] \quad (2.11)$$

ó

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{f'(R)} \left( T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(ef)} \right) , \quad (2.12)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{(ef)} = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{f(R) - R f'(R)}{2} g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f'(R) \right] \quad (2.13)$$

es un tensor adicional de energía-momento efectivo compuesto de términos de curvatura. Se dice entonces que este tensor corresponde a un fluido de curvatura efectiva de presión efectiva negativa conocido como *quintaesencia de curvatura*.

Observemos que si  $f(R) = R$  obtenemos como resultado RG.

### 2.3. Ecuaciones de FRW en gravedad $f(R)$

Para derivar las ecuaciones cosmológicas en esta teoría alternativa a RG empleamos el mismo procedimiento de RG –sección A.4–. Las ecuaciones cosmológicas para gravedad  $f(R)$  en un espacio-tiempo plano son

$$H^2 = \frac{\kappa}{3f'(R)} \left[ \rho + \rho^{(ef)} \right] \quad (2.14)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6f'(R)} \left[ \rho + \rho^{(ef)} + 3(p + p^{(ef)}) \right] \quad (2.15)$$

donde

$$\rho^{(ef)} = \frac{Rf'(R) - f(R)}{2\kappa} - \frac{3H\dot{R}f''(R)}{\kappa} \quad (2.16)$$

$$p^{(ef)} = \frac{f(R) - Rf'(R)}{2\kappa} + \frac{\ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) + 2H\dot{R}f''(R)}{\kappa}, \quad (2.17)$$

con lo que la ecuación de estado en gravedad  $f(R)$  es

$$\omega^{(ef)} = \frac{p^{(ef)}}{\rho^{(ef)}} = \frac{f(R) - Rf'(R) + 2 \left( \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) + 2H\dot{R}f''(R) \right)}{Rf'(R) - f(R) - 6H\dot{R}f''(R)}. \quad (2.18)$$

La tercera ecuación FRW en gravedad  $f(R)$  es la ecuación de conservación (1.19).

### 2.4. Dos modelos $f(R)$

Existe una variedad de funciones  $f(R)$  cada una de las cuales da un modelo distinto. Dentro de los más importantes por su resultados están los modelos CDTT (Carroll-Duvvuri-Trodden-Turner) y  $R^n$ . Vemos cada uno de ellos a grandes rasgos.

#### 2.4.1. $f(R) = R - \frac{\mu^4}{R}$

Existe un modelo cuyos resultados son de importancia cuando se tratan curvaturas extremadamente pequeñas como la del universo actual. Este modelo está dado por [36]:

$$f(R) = R - \frac{\mu^4}{R}, \quad (2.19)$$

donde  $\mu$  es una constante con unidades de masa y fue uno de los primeros en ser considerados. Las ecuaciones de Friedmann para este modelo son [35]:

$$3H^2 - \frac{\mu^4}{12(\dot{H} + 2H^2)^3} \left( 2H\ddot{H} + 15H^2\dot{H} + 2\dot{H} + 6H^4 \right) = \kappa\rho, \quad (2.20)$$

$$\dot{H} + \frac{3}{2}H^2 - \frac{\mu^4}{72(\dot{H} + 2H^2)^2} \left[ 4\dot{H} + 9H^2 - R^2\partial_0\partial_0 \left( \frac{1}{R^2} \right) - 2R^2H\partial_0 \left( \frac{1}{R^2} \right) \right] = -\frac{\kappa}{2}p. \quad (2.21)$$

Resolver estas ecuaciones de manera analítica es muy complicado por lo cual es conveniente hacer una transformación conforme del marco de referencia actual, el cual llamamos *marco de materia*, al *marco de Einstein* donde el lagrangiano del campo gravitacional toma la forma de Einstein-Hilbert y los grados de libertad adicionales  $\dot{H}$  y  $\ddot{H}$  se representan mediante un campo escalar ficticio  $\phi$ . Tanto el análisis como los resultados de dicha transformación se pueden ver en [36]. No obstante, un análisis cualitativo de las ecuaciones (2.20) y (2.21) en [35] muestra que justo en la etapa de transición de radiación a materia ( $t = t_q$ ) se da una expansión acelerada, además para  $t \gg t_q$  un factor de escala  $a(t) \propto t^\alpha$  tiene como única solución viable  $\alpha = 2$  que equivale un fluido con ecuación de estado  $\omega = -\frac{2}{3}$  la cual, no obstante, no concuerda con las observaciones.

Se puede generalizar el modelo CDTT y sumar términos de la forma  $\sqrt{-g}R^n$  a la densidad lagrangiana de la acción (1.2). Si se toma  $n > 1$  se obtienen soluciones que describen el comportamiento de de Sitter que corresponden a tiempos muy tempranos [37]. Para  $n < 0$  como ocurre en el modelo CDTT ya que  $n = -1$ , las correcciones se vuelven importantes a tiempos más tardíos y llevan a soluciones de vacío auto-aceleradas. Esto quiere decir que dichas soluciones obedecen una ecuación de estado  $\omega = -1$ . También llevan a una ley de potencias en el factor de escala  $a(t) \propto t^p$  con  $p > 1$  y  $\omega < -\frac{2}{3}$ . Veamos esto.

Para una potencia negativa de  $R$  podemos escribir

$$f(R) = R - \mu^{2(-n+1)}R^n \quad n < -1, \quad (2.22)$$

o de igual manera

$$f(R) = R - \frac{\mu^{2(n+1)}}{R^n} \quad n > 1, \quad (2.23)$$

el cual es conocido como el modelo CDTT generalizado. Si  $a(t) \propto t^\alpha$ , para  $t \gg t_q$  se tiene que  $\alpha = \frac{(2n+1)(n+1)}{n+2}$ , que es lo mismo que tener un fluido con ecuación de estado  $\omega = -1 + \frac{2(n+2)}{3(2n+1)(n+1)}$  con cota superior igual a  $-2/3$ . En este modelo es posible ajustar la  $n$  adecuada de acuerdo a las observaciones, cosa que no sucede con el modelo CDTT simple ya que ahí  $n = -1$ ,  $\alpha = 2$  y  $\omega = -2/3$ .

### 2.4.2. $f(R) = f_0 R^n$

En [35] se propone la ley de potencias del escalar de Ricci

$$f(R) = b^{-2(n-1)} R^n, \quad (2.24)$$

donde  $b$  es una constante de masa y  $n$  es un número real diferente de 0 y 1. También es conocido simplemente como el modelo  $R^n$ .

Siguiendo un análisis similar al del modelo CDTT, la primera ecuación de Friedmann en el vacío es [35]

$$n(n-1)\ddot{H}H + (1-n)\dot{H}^2 + (4n^2 - 7n + 4)\dot{H}H^2 + 2(2-n)H^4 = 0, \quad (2.25)$$

de la cual se obtienen las soluciones  $\alpha = \frac{1}{2}$  y  $\alpha = \frac{2n^2 - 3n + 1}{2 - n}$ . La raíz  $\alpha = 1/2$  corresponde a valores  $n > 2$ . Si  $n \neq 0, 2$ , el modelo  $f(R) \propto R^n$  es válido. Para  $n = 2$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$  lo cual es una singularidad y para  $n = 0$ ,  $f(R) = cte$ . Para  $1/2 < n < 1$  y  $n > 2$  se tiene un universo en contracción puesto que  $\alpha < 0$  y el factor de escala  $a$  decrece. Si  $\alpha > 1$  se tiene un universo acelerado y esto se cumple para  $1.36 < n < 2$  y  $n < -0.36$ . Ahora, las observaciones imponen una restricción para el exponente:  $\alpha > 6.66$ , la cual se cumple para  $1.73 < n < 2$  y  $n < -3.56$  [35] –ver figura 2.1–. En [38] se reporta se reporta que  $n \simeq 1.37$  cuando se hace el mismo análisis en vacío, sin embargo cuando se toma en cuenta materia bariónica se obtiene  $n = 3.5$  resultado que es consistente con las observaciones de supernovas.

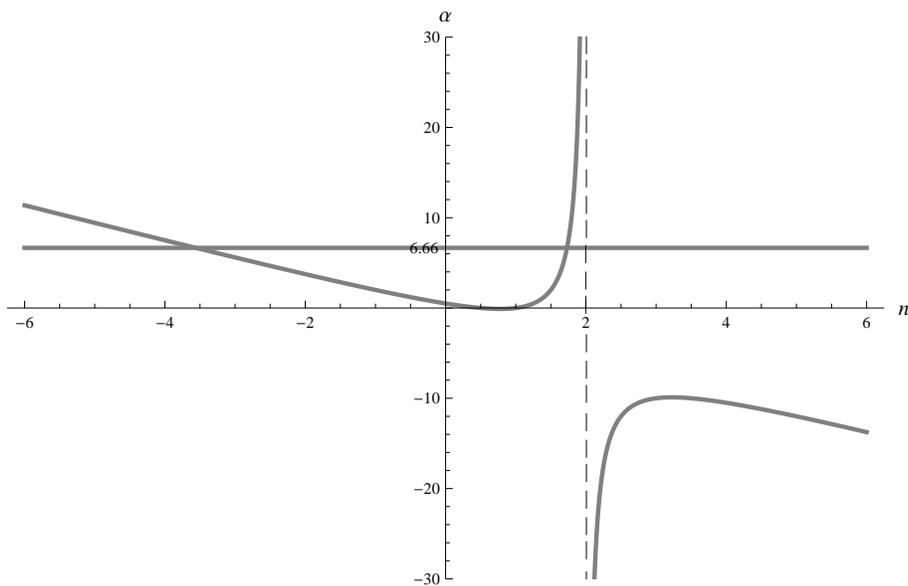


Figura 2.1: Se muestra el comportamiento de  $\alpha$  como función de  $n$  para la segunda raíz de la ec. (2.25). Las regiones por encima de la restricción observacional  $\alpha > 6.66$  dada por la línea horizontal representan los valores de  $n$  válidos para el modelo  $R^n$ .

## 2.5. Límite Newtoniano

Como toda teoría general, RG y gravedad  $f(R)$  contienen a la gravedad newtoniana. A continuación analizaremos como se obtienen estos límites.

### 2.5.1. Límite Newtoniano en RG

En RG definimos el límite newtoniano cuando:

- Las partículas se mueven lento respecto a la velocidad de la luz, es decir,

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} , \quad (2.26)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio.

- El campo gravitacional es débil y se considera como una perturbación del espacio plano:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} ; \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 , \quad (2.27)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es el tensor métrico del espacio de Minkowski y  $h_{\mu\nu}$  la perturbación.

- El campo gravitacional es estático:

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0 . \quad (2.28)$$

Identificamos

$$h_{00} = -2\Phi(r) , \quad (2.29)$$

con  $\Phi = -Gm/r$  el potencial gravitacional newtoniano. Esto quiere decir que

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi) . \quad (2.30)$$

Ahora, de la componente 0 – 0 de la ec. (1.11) obtenemos

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} = 4\pi G\rho , \quad (2.31)$$

y comparando con (2.29) vemos que esta es la ecuación de Poisson de la gravedad newtoniana

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho . \quad (2.32)$$

Así entonces vemos que la gravedad newtoniana se obtiene como el límite de campo débil de RG. El elemento de línea en este límite se puede escribir, tomando coordenadas esféricas, como

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (2.33)$$

### 2.5.2. Límite newtoniano en gravedad $f(R)$

En gravedad  $f(R)$  el límite Newtoniano depende de la forma explícita de la función tratada<sup>3</sup>; diferentes  $f$ 's dan distintos límites newtonianos. También depende del tipo de curvatura del espacio-tiempo. Por ejemplo, para  $R = \text{cte}$  y  $T_{\mu\nu} = 0$  la ec. (2.10) se reduce a

$$f'(R)R - 2f(R) = 0 . \quad (2.34)$$

Una solución a esta ecuación es  $R = 0$  que a su vez implica que la ec. (2.9) se reduzca a  $R_{\mu\nu} = 0$  que corresponde al espacio de Minkowski en RG. Por otro lado, si  $R = C$  con  $C$  una constante positiva la ec. (2.9) se reduce a  $R_{\mu\nu} = \frac{C}{4} g_{\mu\nu}$  que corresponde a un espacio conocido como espacio *de Sitter*, mientras que si  $C < 0$  la solución corresponde al espacio *Anti-de Sitter* [34]. Los elementos de línea de estos espacios para el caso estático son [35]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 , \quad (2.35)$$

para el espacio de Sitter y

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 , \quad (2.36)$$

para el espacio Anti-de Sitter. En ambos casos  $\alpha = \frac{1}{K}$ , con  $K = \frac{R}{12}$  la curvatura seccional.

Por ejemplo, el modelo  $R - \frac{\mu^4}{R}$  tiene límite newtoniano cuando el espacio-tiempo es el de Sitter o Anti-de Sitter, pero si se toma el espacio de Minkowski no tiene límite newtoniano ya que se tiene una singularidad. El modelo  $R^n$  podría tener, en principio, límite newtoniano en los tres espacios ya que  $R \neq 0$ , sin embargo, como veremos en el siguiente párrafo esto no ha sido probado de manera formal aún<sup>4</sup>. Veamos que se hace cuando se toma el espacio de Minkowski.

Tomemos el modelo  $f(R) = f_0 R^n$  con  $n \neq 1$  y  $f_0$  una constante con las unidades adecuadas<sup>5</sup>. Consideremos el campo gravitacional de una fuente puntual de masa en el espacio de Minkowski. En el límite de campo débil y bajas velocidades, el elemento de línea estático se puede escribir como [40]:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 , \quad (2.37)$$

con  $A(r)$  y  $B(r)$  funciones desconocidas, llamadas potenciales, que cumplen con

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = (1 + 2\Phi(r)) , \quad (2.38)$$

que es una métrica de Schwarzschild. En RG el teorema de Birkhoff establece que la métrica de Schwarzschild es la única solución con simetría esférica y asintóticamente plana de las ecuaciones de

<sup>3</sup>Recientemente se han encontrado soluciones generales en [39] para una gama amplia de teorías  $f(R)$ .

<sup>4</sup>En [34] se expone un análisis del límite newtoniano para modelos  $f(R)$  en general en el espacio de de Sitter.

<sup>5</sup>En la sección 2.4.2  $f_0 = b^{-2(n-1)}$

campo en el vacío (1.6). En gravedad  $f(R)$  este teorema aún no ha sido probado de forma general además de que es muy complicado. No obstante, existen algunos modelos  $f(R)$  para los cuales ha sido probado como  $R + R^2$  donde  $R^2 = R^\alpha{}_\beta{}^{\mu\nu} R_\alpha{}_\beta{}^{\mu\nu}$  con torsión, e incluso para teorías de gravedad como las teorías Einstein-Yang-Mills. En esta tesis tomamos como válido el teorema de Birkhoff para el modelo  $R^n$  al igual que en [40], con lo cual las ecs. (2.37) y (2.38) son válidas.

Para encontrar esos potenciales primero combinamos la componente 0 – 0 de la ec. (2.12) con la traza (2.10), ambas en el vacío con lo que se obtiene [40]:

$$f'(R) \left( 3 \frac{R_{00}}{g_{00}} - R \right) + \frac{1}{2} f(R) - 3 \frac{f'(R)_{;00}}{g_{00}} = 0 , \quad (2.39)$$

que se reduce, tomando  $f = f_0 R^n$ , a

$$R_{00}(r) = \frac{2n-1}{6n} A(r)R(r) - \frac{n-1}{2B(r)} \frac{dA(r)}{dr} \frac{d}{dr}(\ln R(r)) , \quad (2.40)$$

mientras que la traza queda como

$$\square R^{n-1}(r) = \frac{2-n}{3n} R^n(r) . \quad (2.41)$$

En general, expresando  $R_{00}$  y  $R$  en términos de la métrica (2.37) las ecs. (2.40) y (2.41) se convierten en un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales acopladas para los potenciales  $A(r)$  y  $B(r)$ . Pero la ec. (2.38) hace que las ecuaciones de campo en el vacío se conviertan en un sistema de dos ecuaciones diferenciales cuya única incógnita es el potencial  $\Phi(r)$ . Así, resolviendo la ec. (2.41) para  $\Phi$  se puede usar la ec. (2.40) como una restricción para las soluciones físicas viables o a la inversa. La solución general se expone en [41] y [40] cuya forma general es

$$\Phi(r) = -\frac{1}{2r} \left[ \zeta_1 + \zeta_2 \left( \frac{r}{\zeta_2} \right)^{\beta(n)} \right] . \quad (2.42)$$

Ajustando las constantes de manera adecuada se obtiene

$$\Phi(r) = -\frac{Gm}{r} \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_c} \right)^\beta \right] , \quad (2.43)$$

donde los parámetros  $\beta$  y  $r_c$  controlan la forma del término de corrección y la escala donde las desviaciones al potencial newtoniano se vuelven importantes, respectivamente. Observamos que el potencial modificado es la suma del potencial newtoniano más el término de corrección. Esta es la fórmula que usaremos en lo que resta de este capítulo y en el capítulo 4.

Vemos que si  $r \ll r_c$  –con  $\beta > 0$ – la corrección es muy pequeña obteniéndose así un potencial prácticamente newtoniano a escalas pequeñas mientras que si  $r \gg r_c$  el término correctivo se vuelve de consideración, y por consiguiente la desviación respecto del potencial newtoniano es grande. Si

$\beta > 0$ , el término  $(r/r_c)^\beta$  se vuelve una función creciente de  $r$ . Cuando se ajustan las curvas de rotación en este modelo  $f(R)$  –capítulo 4– es precisamente este término el que provoca un incremento en las curvas, el cual hace posible el ajuste sin recurrir a materia oscura.

La restricción  $\beta > 0$  se aplica también si se quiere  $\Phi \sim 1/r$  a escalas como las del sistema solar, lo cual implica que para el término correctivo que escala como  $r^{\beta-1}$  se imponga la restricción  $\beta - 1 > -1$ . También se impone la condición de que  $\Phi$  sea un potencial asintóticamente plano:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = 0 , \quad (2.44)$$

lo cual es posible si  $\beta < 1$ . Por lo tanto el potencial que es físicamente aceptable es aquel que cumple con

$$0 < \beta < 1 . \quad (2.45)$$

Las observaciones a escala del sistema solar son de importancia para esta nueva teoría. Se ha medido que las desviaciones del potencial newtoniano son del orden de  $10^{-5}$  [42], es decir, a dicha escala se tiene que

$$\Phi = -\frac{Gm}{r} (1 \pm 10^{-5}) . \quad (2.46)$$

Tomando esta cota en cuenta y además que el modelo  $R^n$  tiene que ser válido a estas escalas en donde el potencial es prácticamente newtoniano uno puede encontrar una restricción adicional para el parámetro  $\beta$ , que es

$$0.625 < \beta < 1 , \quad (2.47)$$

tomando en cuenta que la escala del sistema solar es del orden de  $10^{-7}$  kpc y la escala galáctica del orden de 10 kpc.

Para probar que el potencial dado por la ec. (2.43) es una solución viable en el límite newtoniano de esta teoría de gravedad modificada se sustituye en las ecs. (2.40) y (2.41) lo que da como resultado la condición [40]:

$$(n-1)(\beta-3) [-\beta(1+\beta)V_1\eta^{\beta-3}]^{n-1} \left[ 1 + \frac{\beta V_1 P_0(n, \beta)}{P_1(n, \beta)\eta} \right] P_1(n, \beta)\eta = 0 , \quad (2.48)$$

donde

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{Gm}{r_c} , \\ \eta &= \frac{r}{r_c} , \\ P_0(n, \beta) &= 3(\beta-3)^2 n^3 - (5\beta^2 - 31\beta + 48)n^2 \\ &\quad - (3\beta^2 - 16\beta + 17)n - (\beta^2 - 4\beta - 5) \text{ y} \\ P_1(n, \beta) &= 3(\beta-3)^2(1-\beta)n^3 + (\beta-3)^2(5\beta-7)n^2 \\ &\quad - (3\beta^3 - 17\beta^2 + 34\beta - 36)n + (\beta^3 - 3\beta^2 - 4\beta) . \end{aligned}$$

Vemos que  $n = 1$ ,  $\beta = 3$  y  $\beta = -1$  son soluciones de la ec. (2.48), sin embargo, no son viables por los argumentos dados en párrafos anteriores. Entonces sólo queda resolver la ecuación

$$P_1(n, \beta)\eta + \beta V_1 P_0(n, \beta) = 0, \quad (2.49)$$

pero en el límite que estamos considerando  $V_1 \ll 1$  por lo que podemos despreciarlo y resolver solamente

$$P_1(n, \beta)\eta = 0, \quad (2.50)$$

que es una ecuación de  $\beta$  con la incógnita  $n$  y cuya única solución viable es [40]:

$$\beta = \frac{12n^2 - 7n - 1 - \sqrt{36n^4 + 12n^3 - 83n^2 + 50n + 1}}{6n^2 - 4n + 2}, \quad (2.51)$$

en la que si se toma  $n = 1$ ,  $\beta = 0$  que corresponde a RG pero dada la restricción (2.47),  $n > 1.814$ . En capítulo 4 encontraremos  $\beta$  de acuerdo al mejor ajuste de las curvas de rotación y usaremos la solución (2.51) para encontrar los valores correspondientes de  $n$ .

Dado que  $\beta$  se relaciona con  $n$  y este último es el mismo para cualquier sistema gravitacional,  $\beta$  tiene que ser igual para todas la galaxias. Esto mismo debe suceder para  $r_c$ , sin embargo en [40] se argumenta que el valor de este parámetro depende de cada galaxia por lo que su valor debe ser calculado caso por caso. Esto no es muy claro –incluso puede decirse que incorrecto– ya que tratándose de una constante que viene de la teoría su valor debe ser universal como sucede con  $\beta$ .

En [41] se hace una exposición detallada sobre la resolución de la ec. (2.37) suponiendo válida la ec. (2.38). De ese análisis se ve que  $r_c$  corresponde a una de las dos constantes de integración. Esa constante indeterminada, en principio debe cumplir con el requisito de que su valor sea mucho más grande que la escala del sistema solar para obtener un potencial newtoniano a dicha escala. La otra constante de integración corresponde a  $2Gm$  que da justo el potencial newtoniano para  $r \ll r_c$ . En ese mismo trabajo se calcula  $r_c$  para la vía láctea que resulta ser de  $\simeq 15$  kpc. Ese debería ser su valor, el cual tendría que ser corroborado al aplicar el modelo a cualquier otra galaxia. En el capítulo 4 veremos si esto ocurre en realidad, mientras analicemos la velocidad de rotación dada por la fuente puntual.

La ecuación para la velocidad de rotación está dada por la ec. (3.7) de la secc. 3.5 y para la fuente puntual se tiene

$$v_c^2(r) = \frac{Gm}{r} \left[ 1 + (1 - \beta) \left( \frac{r}{r_c} \right)^\beta \right], \quad (2.52)$$

que al igual que el potencial modificado –ec. (2.43)– es la suma del término newtoniano más el correctivo. Cuando  $0 < \beta < 1$  el término correctivo es mayor que el newtoniano lo cual hace posible que la velocidad crezca sin recurrir a un halo de materia oscura. Es por esta razón que el modelo  $R^n$  se toma como candidato para ajustar curvas de rotación en el marco de una teoría de gravedad modificada.

La curva de rotación dada por la ec. (2.52), al igual que la curva de rotación newtoniana, tiene un comportamiento asintótico, es decir, tiende a cero cuando  $r$  tiende a infinito. A pesar de que se

afirma que las curvas de rotación son “planas” hay argumentos a favor de que estas efectivamente decaen [43], así que podemos usar la ec. (2.52) ya que la curva de rotación es “plana” dentro del intervalo dado por los puntos observados. Veremos en el capítulo 4 si el término correctivo de la velocidad para un disco delgado es capaz de simular tal efecto<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Un potencial que produce curvas de rotación completamente planas es  $\Phi(r) \propto \ln(r)$ .

---

# Capítulo 3

## Galaxias espirales y materia oscura

---

Como se vió en el capítulo 1 la materia oscura representa aproximadamente el 23 % del contenido energético del universo. Ésta se encuentra distribuida por todo el universo y su efecto se hace patente a partir de escalas galácticas, en cúmulos de ellas y escalas mayores. Su observación es indirecta, debida únicamente a los efectos gravitacionales que esta causa y aunque su importancia dentro de la astronomía y cosmología es reciente, su existencia data de la década de los 30's como veremos en el capítulo.

### 3.1. Materia oscura en galaxias. Contexto histórico

Hasta antes de 1913 no se sabía que las galaxias espirales poseían movimientos de rotación [44]. De hecho los astrónomos de la época no sabían que estaban observando otras galaxias; ellos las catalogaban como nebulosas porque a la vista aparecían como objetos difusos. Fue precisamente en 1913 que V. M. Slipher pudo detectar líneas de absorción inclinadas en el espectro de absorción de la nebulosa M31 y en el espectro de la nebulosa del Sombrero, indicador de un movimiento de rotación de las galaxias. En ese mismo año hizo el mismo descubrimiento al observar M81. Esto llevó a muchos astrónomos a investigar el nuevo fenómeno en los años posteriores. Así se pudieron medir las velocidades de rotación para distintos puntos de la galaxia M81. H. D. Babcock encontró que para el último punto medido de M31 la velocidad era de aproximadamente  $400 \text{ km s}^{-1}$ , que era grande para la región en consideración además de que se mantenía casi constante en cierto intervalo de distancia. El modelo que Babcock creó para M31 mostraba una distribución de masa tal que la razón masa-luminosidad se incrementaba conforme lo hacía el radio  $r$  de la galaxia, es decir, había más masa en las partes externas de la que se detectaba. Para esto Babcock pensó entonces dos cosas: que la absorción jugaba un papel muy importante en las partes exteriores de la galaxia o que había que tomar en cuenta una dinámica nueva pensando en que efectivamente la masa no crecía con  $r$ . En 1939 Jan Oort observó que NGC 3115 presentaba el mismo problema de M31: la masa y la luz observadas parecían no tener relación alguna y en 1954 M. Schwarzschild volvió a confirmar lo mismo. Para la década de los 60's ya se tenían las curvas de rotación de algunas docenas de galaxias espirales y en los 70's se encontraban curvas planas

de manera muy común. En 1974 Ostriker y Einasto propusieron que la materia oscura –la masa faltante– se encontraba en galaxias aisladas en forma de enormes halos en los que se encuentra la mayor parte de la masa galáctica y cuya extensión podía alcanzar varios radios galácticos.

En lo que respecta a cúmulos de galaxias, en 1933 Fritz Zwicky descubre la primera evidencia de materia oscura en cúmulos de galaxias. Para ese año ya se contaba con la ley Hubble –aunque incorrecta– y con las curvas de rotación de varias galaxias espirales con las que se pudieron estimar sus razones masa-luminosidad. El trabajo que Zwicky realizó se basaba en las velocidades radiales de siete galaxias del cúmulo de Coma con las cuales pudo calcular la masa total del cúmulo usando el teorema del virial. Así calculó la razón masa-luminosidad del cúmulo y la comparó con la razón masa-luminosidad de galaxias espirales típicas cercanas. Lo que encontró fue que la razón masa-luminosidad del cúmulo era mayor a la de las galaxias cercanas por un factor de por lo menos 400 de acuerdo con las mediciones que él había hecho. Así concluyó que el cúmulo poseía, en su gran mayoría, masa no visible e indetectable excepto por sus efectos gravitacionales. A pesar de que sus mediciones fueron bastante malas según mediciones actuales, hoy esa conclusión sigue siendo válida.

A partir de los años 80's los telescopios más grandes y la mejora en los detectores en las bandas óptica, de radio y milimétrica, así como la combinación de alta resolución espacial y espectral han permitido una gran sofisticación en el análisis de las velocidades de rotación.

## 3.2. Naturaleza de la materia oscura

Los primeros candidatos a materia oscura fueron los neutrinos cuya masa en reposo es todavía desconocida pero con una cota superior de 1 eV. Una de las razones para tomar en cuenta a los neutrinos es que se trata de partículas que no contribuyen a la masa luminosa. Puesto que son partículas relativistas se les considera como materia oscura caliente –HDM, por sus siglas en inglés–. Otra razón fuerte para tomarlos en cuenta es que son partículas que existen en la naturaleza aunque muy difícil de detectar.

Otros posibles candidatos no-leptónicos, distintos a los neutrinos, es una amplia clase de partículas que constituyen la materia oscura fría –CDM–. Estas partículas son predichas sólo de manera teórica por extensiones del *Modelo Estándar de Partículas Elementales*, como las teorías de Supersimetría. Su observación en los grandes aceleradores aún no ha sido posible. Una característica de estas partículas es que solamente interactúan débilmente, es decir, mediante interacción débil además de gravitacionalmente, al igual que los neutrinos, con la diferencia de que de estos sí se tiene la certeza y evidencia experimental de su existencia aunque su detección es complicada. También se trata de partículas masivas y, que de existir, se encuentran atrapadas dentro del potencial gravitacional de las galaxias ya que sus velocidades son no-relativistas y de ahí el adjetivo de “frías”. A todos estos posibles candidatos masivos de CDM se les denomina WIMPs –Weakly Interacting Massive Particles–. Las teorías de Supersimetría predicen al menos un candidato: el *neutralino* que es una combinación lineal de las supercompañeras del bosón Z llamada *zino*, del fotón que es

el *photino* y del bosón de Higgs llamada *higgsino*. Los WIMPs deben encontrarse en el halo de la Vía Láctea y también dentro del Sol, donde pierden energía por colisiones elásticas con protones para ser finalmente atrapados por estos. De esta manera el transporte de energía dentro del Sol se vería modificado así como su dinámica. Sin embargo tal efecto aún no ha sido observado.

Partículas distintas a los WIMPs también son candidatos a materia oscura. Se trata de partículas muy ligeras que presentan interacciones superdébiles. Algunos ejemplos de estas partículas son el *gravitino* que es la partícula supersimétrica del campo gravitacional y el *axión*; un bosón sin masa relacionado con la ruptura en el número bariónico de simetría.

Por último están los MACHOs –MAssive Compact Halo Objects– que consisten de objetos de materia bariónica como enanas blancas, enanas cafés, planetas orbitando en torno a otras estrellas y agujeros negros entre otros. No obstante los MACHOs son descartados debido a que constituyen sólo una pequeña fracción de la materia oscura total en el universo.

### 3.3. Características de galaxias espirales

En 1936 Hubble hizo público un trabajo sobre la clasificación de las galaxias: *The realm of the nebulae*. En este trabajo Hubble clasifica a las galaxias –o nebulosas para su época– en cuatro tipos principales: elípticas, lenticulares, espirales e irregulares. A este esquema de clasificación se le conoce como el *sistema de clasificación de Hubble*.

Una galaxia espiral puede ser considerada como un disco en rotación de cierto grosor  $z_d$  el cual se compone de estrellas, gas y polvo con un bulbo central de forma suave principalmente esférico o elíptico, compuesto de estrellas rodeado todo por un halo esférico de materia oscura. El disco posee brazos en forma de espiral –y de ahí el nombre– que son regiones de formación estelar y que se caracterizan por emitir luz principalmente azul. Las galaxias espirales se pueden caracterizar por los siguientes parámetros:  $R_d$ ,  $M_d$  y  $z_d$  que son el radio de escala del disco, masa del disco y grosor, respectivamente. Por ejemplo, se considera que un disco es delgado si  $z_d \simeq 300$  pc y grueso si  $z_d \simeq 1$  kpc. En discos delgados las estrellas son más jóvenes y de distinta composición química que en discos gruesos; además en los primeros la densidad superficial es mayor que en los últimos porque la relación de estrellas en el plano medio de un disco delgado es 50:1 respecto al del disco grueso. Se cree que los discos gruesos se crearon a partir de la colisión de un disco delgado joven con una galaxia más pequeña.

En la clasificación de Hubble, las galaxias espirales se dividen en cuatro subclases: Sa, Sb, Sc y Sd. Las letras denotan una secuencia –ver figura 3.1– a lo largo de la cual la luminosidad del bulbo central es cada vez más pequeña, los brazos espirales son cada vez más abiertos y la masa del gas se incrementa así como el número de estrellas jóvenes por lo que los brazos se vuelven más gruesos y masivos [45]. Nuestra galaxia es una clase intermedia Sbc, es decir, una clase entre Sb y Sc. En promedio las galaxias Sc y Sd son menos luminosas que las Sa y Sb.

Las galaxias lenticulares se caracterizan por tener un disco en rotación además de un bulbo

central en forma de elipse. A diferencia de las galaxias espirales, las galaxias lenticulares, o S0 como se les denota, no poseen estructura espiral y se les considera una clase de transición entre las galaxias elípticas y las espirales. Más de la mitad de las galaxias espirales y lenticulares presentan una barra en su parte central por lo que son llamadas espirales barradas o lenticulares barradas. Su notación es S0B, SBa, SBb, SBc y SBd y también siguen la misma secuencia que sus congéneres no barrados. Después de las galaxias Sd o SBd en la secuencia de espirales, los brazos se vuelven más desordenados y su apariencia espiral es menos definida. Estas pertenecen a la clase de galaxias irregulares. Se les denota por Sm, SBm –si tienen barra– e Im. Un ejemplo de estas galaxias, y que de hecho es el prototipo, es la Gran Nube de Magallanes que es un satélite de la Vía Láctea. Por esta razón las galaxias Sm y SBm también son conocidas como espirales de Magallanes. Conforme la luminosidad de la galaxia disminuye también lo hace la velocidad de rotación del disco.

La clasificación de Hubble se puede ver como la secuencia

$$E \rightarrow S0 \rightarrow Sa \rightarrow Sb \rightarrow Sc \rightarrow Sd \rightarrow Sm \rightarrow Im$$

en donde a las galaxias situadas al principio de la secuencia se les denomina tempranas mientras que aquellas al final son tardías. Esta idea es un remanente de la creencia antigua de que la secuencia de Hubble representaba la evolución de las galaxias pero hoy se sabe que no es así.

El brillo superficial de una galaxia se define como la luminosidad por unidad de área y las unidades habituales son  $L_{\odot}\text{pc}^{-2}$ , donde  $L_{\odot}$  denota luminosidad del Sol. Para una galaxia espiral el brillo superficial obedece la ley exponencial [46]

$$I(r) = I_0 e^{-r/R_d}, \quad (3.1)$$

con  $I_0$  el brillo superficial central de disco y  $R_d$  el radio de escala del disco. La luminosidad típica de las galaxias espirales es de  $I_0 \sim 100 L_{\odot} \text{pc}^{-2}$ .

### 3.4. Curvas de rotación

De una manera muy simple podemos definir una curva de rotación galáctica como una gráfica de velocidad de rotación versus distancia al centro. Las velocidades se miden en  $\text{km s}^{-1}$  y las distancias en kpc o segundos de arco. Una definición más formal [44] dice que es una traza de velocidades sobre un diagrama de posición- velocidad (PV) a lo largo del eje mayor de la galaxia, corregido por el ángulo  $i$  entre la línea de visión y el disco galáctico. Las curvas de rotación son herramientas para muchos propósitos entre los que destacan [44]: el estudio de la cinemática de las galaxias, inferir el papel que las interacciones han jugado a lo largo su de historia, observar la evolución de las galaxias comparando curvas de rotación de galaxias cercanas y lejanas, entre otras.

Lo que se observa cuando se estudia una galaxia espiral es que se trata de un sistema gravitacionalmente estable. El comportamiento predicho por la mecánica newtoniana para las curvas de rotación de galaxias típicas es creciente desde el centro hasta cierto radio en donde presenta un

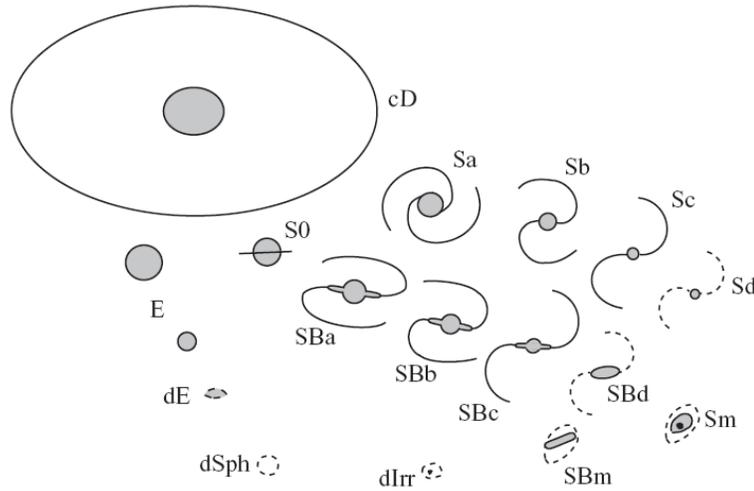


Figura 3.1: Esquema de Hubble en una forma modificada. Se muestran las cuatro clases principales: elípticas (E), lenticulares (S0), espirales (S,SB) e irregulares (Sm) así como las subclases de cada una de estas. Tomado de [47].

máximo y a partir del cual decrece según la ley de Kepler  $1/\sqrt{r}$ . Sin embargo las observaciones indican un comportamiento distinto al predicho por la teoría. Los astrónomos miden curvas de rotación que crecen más de lo predicho, que no “bajan” sino que permanecen aproximadamente planas, es decir, con velocidad aproximadamente constante como se ve en la figura 3.2. Dicho comportamiento se debe a una masa mayor que la detectada. Esa masa corresponde a la *materia oscura*.

Las estrellas dentro de una galaxia galaxia espiral se encuentran hasta 10 kpc aproximadamente –borde visible– mientras que el gas interestelar se encuentra hasta aproximadamente 25 kpc y es este componente el que se utiliza para calcular las velocidades a tales distancias, en específico, la línea de emisión HI que corresponde a la línea de Hidrógeno neutro con una longitud de onda de 21 cm.

Si se calcula la velocidad de rotación de los puntos cercanos al borde visible, suponiendo que la masa en esos puntos corresponde sólo a estrellas y gas, se encuentra que es típicamente menor por un factor de tres que la medida para esos mismos puntos [48]. Por esta razón se adoptó la idea de que las galaxias espirales se encuentran rodeadas por enormes halos esféricos de materia oscura que se pueden extender hasta traslaparse con los halos de su vecinas como se mencionó anteriormente. Así se propusieron nuevas funciones de densidad que incluyen materia oscura como los perfiles Navarro-Frenk-White (NFW) y Burkert, cuyas curvas se ajustan a los datos. Por otro lado, la presencia de los halos de materia oscura es fundamental; estos dan la estabilidad gravitacional observada, ya que de no ser así, cualquier perturbación por pequeña que fuera destruiría la galaxia. También es importante mencionar que se necesita de CDM para explicar la formación de estructuras en el universo.

Las distintas clases de galaxias espirales poseen distintas curvas de rotación. Los tipos Sa a Sc tienen curvas de rotación similares por lo que el potencial gravitacional tanto del disco como del

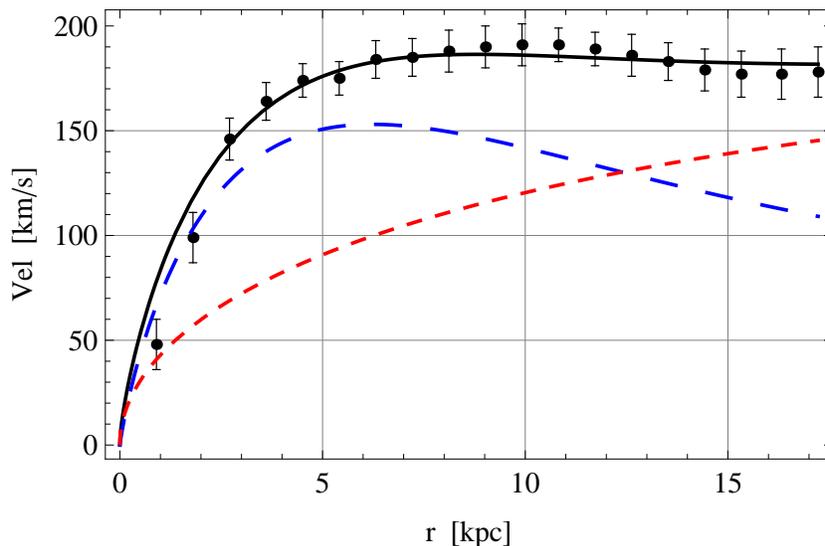


Figura 3.2: Curva de rotación de una galaxia espiral. Las velocidades de rotación de las componentes corresponden al disco (línea de trazos azules) y halo de materia oscura (línea de trazos rojos). La velocidad total corresponde a la curva negra dada por la ec. (3.7).

halo no depende de manera importante de la distribución de la masa luminosa. Las galaxias con menor luminosidad muestran curvas de rotación crecientes en los puntos externos mientras que las galaxias más luminosas tienen curvas de rotación ligeramente decrecientes en esos mismos puntos. Las partes de la curva de rotación cercanas al centro dependen de la masa total y del tipo de galaxia. En estas regiones la velocidad es proporcional a  $r$  lo cual corresponde a una rotación de cuerpo sólido. Los tipos Sa y Sb más masivos presentan un crecimiento más pronunciado y velocidades centrales mayores a pocos cientos de parsecs del centro comparados con los tipos Sc menos masivos y galaxias enanas. Para las galaxias Sa la velocidad máxima de rotación es mayor que en las Sb y Sc que tienen luminosidades equivalentes:  $300 \text{ km s}^{-1}$ ,  $220 \text{ km s}^{-1}$  y  $175 \text{ km s}^{-1}$  respectivamente. Las galaxias Sb se caracterizan por una velocidad inicial distinta de cero muy cerca del centro debida al núcleo masivo de la galaxia, un crecimiento en un radio de  $\sim 100 \text{ pc}$  con un máximo en  $r \sim 100 - 300 \text{ pc}$  para decaer a un mínimo en  $r \sim 1 - 2 \text{ kpc}$  y luego presentar un crecimiento gradual hasta un máximo secundario a  $r \sim 6 \text{ kpc}$  y por último un comportamiento casi plano. Las galaxias Sc de bajo brillo superficial presentan comportamientos monótonamente crecientes hasta el borde visible al igual que las galaxias enanas. El estudio de galaxias barradas tiene una complicación pues el gas se encuentra distribuido de manera menos uniforme. Sus velocidades de rotación pueden tener saltos de  $\pm 30 - 40 \text{ km s}^{-1}$  e incluso más de  $100 \text{ km s}^{-1}$  en los bordes de la barra situados a  $r \sim 2 - 5 \text{ kpc}$  mientras que las galaxias sin barra sólo presentan fluctuaciones de  $\pm 10 - 20 \text{ km s}^{-1}$  debidas principalmente a los brazos espirales. A las galaxias enanas y de baja masa se les agrupan normalmente con las galaxias de bajo brillo superficial ó LSB –Low Surface Brightness– que se cree están dominadas por materia oscura. Esto no es del todo correcto ya que existen galaxias de bajo brillo superficial que son grandes y masivas así como algunas que son

enanas y de brillo superficial alto. Sin embargo para aquellas de mayor luminosidad sus curvas de rotación son similares en forma a las de las espirales de mayor brillo. Para las de menor brillo sus curvas de rotación son más variadas en forma.

### 3.4.1. Medición de las velocidades de rotación

Para obtener la velocidad de rotación de una galaxia se hacen distintas mediciones, usando diferentes técnicas e instrumentos como espectrografos de Fabry-Perot o de campo integral, en la región óptica de la luz de las estrellas y en las regiones óptica, de microondas y radio para el gas. Las líneas de emisión HI, H $\alpha$ , y CO son las usadas principalmente en dichas mediciones. En párrafos anteriores mencionamos el papel de la línea HI. La línea CO también es de utilidad para calcular velocidades de rotación en las regiones interiores del disco así como en las zonas centrales. Otros trazadores de campos de velocidad en galaxias son las nebulosas planetarias y se usan para galaxias complejas y de tipos tempranos, sobre todo en las regiones lejanas al centro galáctico donde la luz es escasa. También se usan para galaxias en cúmulos.

Las mediciones que se hacen tiene que ser corregidas por diversos factores como el movimiento del observador y la proyección ya que el el observador sólo ve la componente de velocidad a lo largo de la línea de visión. Los datos que se obtienen directamente de las mediciones antes mencionadas no son directamente las velocidades de rotación; esos son “datos crudos” que se tienen que procesar para poder encontrar las velocidades de rotación aplicando modelos matemáticos. El método de la intensidad luminosa pesado por la velocidad radial es un método ampliamente usado. Aquí primero se calcula la velocidad

$$V_{int} = \frac{\int I(v) v dv}{\int I(v) dv} , \quad (3.2)$$

donde  $I(v)$  es la de intensidad luminosa, a un radio determinado, como función de la velocidad radial  $v$ . La velocidad de rotación está dada por

$$V_{rot} = \frac{V_{int} - V_{sis}}{\text{sen } i} , \quad (3.3)$$

con  $V_{sis}$  la velocidad sistémica de la galaxia e  $i$  el ángulo entre la línea de visión y el disco galáctico.

El método de la velocidad terminal es otro de los empleados para determinar velocidades de rotación. Se define por

$$V_{rot} = \frac{V_t - V_{sis}}{\text{sen } i} - \sqrt{\sigma_{obs}^2 + \sigma_{ISM}^2} , \quad (3.4)$$

donde  $V_t$  es la velocidad terminal y  $\sigma_{obs}$  y  $\sigma_{ISM}$  son la resolución en velocidad de las observaciones y la dispersión de velocidad del gas interestelar respectivamente. La velocidad terminal se define como la velocidad a la cual la intensidad  $I$  es igual a

$$I_t = (\eta^2 I_{max}^2 + I_{lc}^2)^{1/2} , \quad (3.5)$$

sobre un diagrama PV y donde  $I_{max}$  es la intensidad máxima e  $I_{lc}$  es la intensidad correspondiente a la curva de nivel más baja y  $\eta$  un factor entre 0.2 y 0.5. Otros métodos se presentan en [44].

### 3.5. Teoría newtoniana de galaxias espirales

El potencial gravitacional de una galaxia espiral se divide en la suma de los potenciales de sus componentes:

$$\Phi_{TOT} = \Phi_b + \Phi_d + \Phi_H, \quad (3.6)$$

donde los subíndices denotan el bulbo, disco y halo respectivamente. Aquí consideraremos sólo las contribuciones del disco y halo. El potencial del disco y del halo son más difíciles de calcular que el de la masa puntual ya que se trata de sistemas extendidos. Calculemos la velocidad de rotación para un partícula de prueba dentro del potencial dado por la ec. (3.6).

Para una partícula de masa  $m_p$  que se encuentra en el potencial de un galaxia la segunda ley de movimiento indica que

$$\begin{aligned} F_d + F_H &= m_p a_{centripeta} \\ -m_p \frac{d\Phi_d}{dr} - m_p \frac{d\Phi_H}{dr} &= m_p \frac{v_c^2}{r} \\ -\left(\frac{d\Phi_d}{dr} + \frac{d\Phi_H}{dr}\right) &= \frac{v_c^2}{r} \end{aligned}$$

Tomando el valor absoluto dado que el lado derecho es positivo tenemos:

$$\begin{aligned} \left|\frac{d\Phi_d}{dr} + \frac{d\Phi_H}{dr}\right| &= \frac{v_c^2}{r} \\ \frac{v_{cd}^2}{r} + \frac{v_{cH}^2}{r} &= \frac{v_c^2}{r} \\ v_{cd}^2 + v_{cH}^2 &= v_c^2, \end{aligned}$$

por lo tanto la velocidad de rotación a un radio  $r$  de la fuente, suponiendo un movimiento circular, está dada por

$$\begin{aligned} v_{cTOT}(r) &= \sqrt{r \left| \frac{d\Phi_{TOT}}{dr} \right|} \\ &= \sqrt{v_{cd}^2 + v_{cH}^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

La gráfica de esta función da la curva de rotación de la galaxia.

#### 3.5.1. Discos delgados

Para encontrar el potencial del disco supondremos que se trata de un sistema axisimétrico e infinitamente delgado. Con esto el potencial del disco se puede escribir en coordenadas cilíndricas

como  $\Phi = \Phi(r, z)$ . Un método para encontrar la expresión del potencial es resolver la ecuación de Laplace sujeta a condiciones de frontera. Este es el método de Toomre [49]. En coordenadas cilíndricas la ecuación de Laplace es

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (3.8)$$

y aplicando el método de separación de variables  $\Phi(r, z) = J(r)Z(z)$  obtenemos

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dJ}{dr} \right) + k^2 J(r) = 0, \quad (3.10)$$

con  $k^2$  una constante. La solución a la ec. (3.9) es

$$Z(z) = S e^{\pm kz}, \quad (3.11)$$

donde  $S$  es una constante de integración. Para resolver la ec. (3.10) hacemos el cambio de variable  $u = kr$  quedando

$$\frac{1}{u} \frac{d}{du} \left( u \frac{dJ(u)}{du} \right) + J(u) = 0. \quad (3.12)$$

Ahora, la solución a esta ecuación que nos interesa es aquella que es finita cuando  $r \rightarrow 0$ . Dicha solución es la función de Bessel de primera especie de orden cero  $J_0(u) = J_0(kr)$ . Así la solución a la ec. (3.8) es

$$\Phi_{\pm}(r, z) = e^{\pm kz} J_0(kr), \quad (3.13)$$

que podemos reescribir como

$$\Phi_k(r, z) = e^{-k|z|} J_0(kr), \quad (3.14)$$

donde  $k$  es un real positivo. Vemos que para  $z < 0$  la solución corresponde a la solución  $\Phi_+$  de la ec. (3.13) mientras que si  $z > 0$  se obtiene la solución  $\Phi_-$  de la misma ecuación. Además la solución  $\Phi_k$  cumple con las condiciones de frontera

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi = 0, \quad (3.15)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = 0. \quad (3.16)$$

Sin embargo en  $z = 0$  se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = k J_0(r), \quad (3.17)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -k J_0(r), \quad (3.18)$$

es decir, hay una discontinuidad en el gradiente de  $\Phi_k$  a lo largo del eje  $z$  por lo que no es válida. Por el teorema de la divergencia tenemos que la integral de superficie de  $\nabla\Phi$  es igual a  $4\pi G\Sigma_k(r)$  con  $\Sigma_k(r)$  la densidad superficial de masa que encierra la superficie y entonces

$$\Sigma_k(r) = -\frac{k}{2\pi G} J_0(kr) , \quad (3.19)$$

con lo que las ecuaciones (3.17) y (3.18) se convierten en

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -2\pi G\Sigma_k , \quad (3.20)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2\pi G\Sigma_k . \quad (3.21)$$

Pero estas cantidades dependen de la constante  $k$ . Una densidad superficial arbitraria se encuentra sumando sobre todas las  $k$ 's pesadas por una función  $S(k)$ , es decir,

$$\Sigma(r) = \int_0^\infty S(k)\Sigma_k(r) dk = -\frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty S(k)J_0(kr)k dk , \quad (3.22)$$

y donde

$$S(k) = -2\pi G \int_0^\infty \Sigma(r)J_0(kr) r dr . \quad (3.23)$$

Aquí la ec. (3.22) corresponde a la transformada de Hankel de  $-2\pi G\Sigma$  –ver [45] para mayor detalle– mientras que la ec. (3.23) es la transformada inversa. Sus propiedades son similares a las transformadas de Fourier. El potencial que corresponde a la  $\Sigma(r)$  arbitraria es

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= \int_0^\infty S(k)\Phi_k(r, z) dk \\ &= -2\pi G \int_0^\infty dk e^{-k|z|} J_0(kr) \int_0^\infty \Sigma(r')J_0(kr') r' dr' , \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde hemos sustituido las expresiones de  $\Phi_k$  y  $S(k)$ .

Para un disco exponencial o disco de Freeman [46] tenemos que

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 e^{-r/R_d} , \quad (3.25)$$

con  $\Sigma_0$  la densidad superficial central del disco y  $R_d$  el radio de escala del disco. En este caso la función  $S(k)$  cumple con

$$S(k) = -\frac{2\pi G\Sigma_0 R_d^2}{(1 + k^2 R_d^2)^{3/2}} , \quad (3.26)$$

por lo que el potencial es

$$\Phi(r, z) = -2\pi G\Sigma_0 R_d^2 \int_0^\infty \frac{J_0(kr) e^{-k|z|}}{(1 + k^2 R_d^2)^{3/2}} , \quad (3.27)$$

y dado que estamos trabajando con discos infinitamente delgados, al evaluar en  $z = 0$  se obtiene [45]:

$$\Phi(r, z = 0) = -\pi G \Sigma_0 r [I_0(y)K_1(y) - I_1(y)K_0(y)] , \quad (3.28)$$

donde  $y = r/2R_d$ .  $I_n$  e  $K_n$ , donde  $n$  puede ser 0 o 1, son las funciones modificadas de Bessel de primera y segunda especie respectivamente. La velocidad de rotación de este disco es

$$v_{cd}^2(r) = 4\pi G \Sigma_0 R_d y^2 [I_0(y)K_0(y) - I_1(y)K_1(y)] , \quad (3.29)$$

o en términos de la masa del disco  $M_d = 2\pi R_d^2 \Sigma_0$ :

$$v_{cd}^2(r) = \frac{2GM_d}{R_d} y^2 [I_0(y)K_0(y) - I_1(y)K_1(y)] . \quad (3.30)$$

### 3.5.2. Halos esféricos

En lo que respecta al halo, los diferentes perfiles de densidad se encontraron a partir de simulaciones computacionales. A primer orden estos halos presentan una simetría esférica. Un perfil general es

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right)^\alpha \left(1 + \frac{r}{a}\right)^{\beta-\alpha}} , \quad (3.31)$$

con  $\rho_0$  y  $a_0$  la densidad y distancia de escala típicas del halo respectivamente. Los diversos modelos surgen según los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . Cuando  $\beta = 4$  los modelos que se obtienen tienen propiedades analíticas muy simples y se conocen como los modelos de Dehnen. La tabla 3.1 muestra los diversos modelos que se derivan este perfil general.

Modelo	$\alpha$	$\beta$	$\rho(r)$
Hernquist	1	4	$\frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right)^3}$
Jaffe	2	4	$\frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2}$

Tabla 3.1: Perfiles de halo de materia oscura. Obtenido de [45].

Sin embargo existe otro perfil de densidad distinto a los de Dehen. Cuando  $\alpha = 1$  y  $\beta = 3$  se tiene el perfil de Navarro-Frenk-White –NFW de aquí en adelante–, es decir,

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2} . \quad (3.32)$$

Además, otro perfil distinto a los derivados de la ec. (3.31) es el perfil de Burkert dado por

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 a^3}{(r + a)(r^2 + a^2)} . \quad (3.33)$$

El potencial gravitacional del halo se encuentra dado por

$$\Phi_H(r) = -G \int_r^\infty \frac{M(r')}{r'^2} dr' , \quad (3.34)$$

con

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

la masa del halo para un radio arbitrario  $r$ . Entonces para el perfil de NFW tenemos

$$\Phi_{H_{NFW}}(r) = -4\pi G \rho_0 a^2 \frac{\ln(1 + r/a)}{r/a} , \quad (3.35)$$

y para el perfil de Burkert

$$\Phi_{H_B}(r) = \frac{2\pi G \rho_0 a^3}{r} \left\{ \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left[ \tan^{-1} \left(\frac{r}{a}\right) - \ln \left(1 + \frac{r}{a}\right) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} - 1\right) \ln \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) \right\} . \quad (3.36)$$

La curva de rotación está dada por

$$v_{c_{NFW}}^2 = 4\pi G \rho_0 a^3 \frac{(r+a) \ln \left(\frac{r+a}{a}\right) - r}{r(r+a)} \quad (3.37)$$

para el perfil de NFW y

$$v_{c_B}^2 = \frac{2\pi G \rho_0 a^3}{r} \left[ \ln \left(1 + \frac{r}{a}\right) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) - \tan^{-1} \left(\frac{r}{a}\right) \right] \quad (3.38)$$

para el perfil de Burkert.

Para una galaxia conformada por disco exponencial y halo oscuro la ec. (3.7) da la velocidad de rotación total.

### 3.5.3. Características de los halos de Burkert y NFW

A continuación describiremos algunas características de los perfiles de Burkert y NFW y como se comparan entre ellos. La figura 3.3 muestra una comparación de la variación de la densidad de masa del halo como función de  $r$  entre los dos perfiles así como la comparación de la contribución que tiene el halo a la velocidad de rotación también como función de la distancia  $r$  al centro galáctico. Las curvas ahí mostradas corresponden a tres radios característicos  $a$  distintos con el mismo valor de  $\rho_0$ .

Para el perfil de Burkert todas la curvas convergen al mismo punto cuando  $r \rightarrow 0$ . El valor al cual converge la densidad  $\rho$  es  $\rho_0$ . Esta característica distingue a este perfil como un perfil tipo “shallow”. En este caso  $a$  se puede ver como un indicador de dónde comienza la concavidad de la

curva de densidad. Lo mismo sucede para la gráfica de velocidad. En las cercanías del centro de la galaxia la velocidad se comporta de manera lineal como se puede ver en el acercamiento mostrado en la figura 3.4. En ambas gráficas mientras mayor es el parámetro  $a_0$  la curva es más alta.

El halo de NFW a diferencia del halo de Burkert, posee una singularidad en  $r = 0$ . Esta característica le da el adjetivo de un perfil tipo “cuspy”. La curva de velocidad para un halo de NFW presenta siempre un crecimiento mucho más rápido y una concavidad más marcada que la correspondiente al perfil de Burkert. En la figura 3.4 vemos que cerca del centro la velocidad crece mucho más rápido que en el caso de Burkert. Como veremos más adelante es esa misma concavidad del perfil de NFW la que provoca que el ajuste no sea adecuado para algunas galaxias.

### 3.6. Ajustes de curvas de rotación. Perfiles de Burkert y NFW

Para el análisis de curvas de rotación de esta sección y de la sección 4.2 usamos una muestra de dieciséis galaxias, las cuales listamos a continuación:

- DDO 47, ESO 116-G12, NGC 7339, M 31, ESO 287-G13, UGC 6399, UGC 6917, UGC 128, NGC 4217, NGC 4100, NGC 4157 se estudian en [50] en el marco de gravedad  $f(R)$ . UGC 128 también se analiza en [51] con los halos de de NFW y pseudo-isotérmico. Los datos de todas estas galaxias fueron proporcionados por C. Frigeiro Martins y P. Salucci.
- UGC 4325 y NGC 4395 se analizan en [40] con gravedad  $f(R)$  y en [51] se un análisis con los halos de NFW y pseudo-isotérmico. Los datos todas esta galaxias fueron proporcionados por Rachel Kuzio de Naray et. al.
- DDO 64, F568-3 y UGC 5750 sólo se estudian en [51] con halos de materia oscura. Datos proporcionados por Rachel Kuzio de Naray et. al.
- Todos los puntos observacionales tienen error solamente en velocidad.

A continuación presentamos los ajustes de las curvas de rotación de las galaxias de la muestra descrita anteriormente usando el método de  $\chi^2$  –apéndice B–. Hacemos la suposición de la galaxia se compone de un disco exponencial y de un halo ya sea de Burkert o NFW. El gas no se incluye en este anaálisis. La función de velocidad está dada por la ec. (3.7.) En ambos perfiles los parámetros libres son:  $a$ ,  $\rho_0$  y  $M_d$  cuyas unidades son kpc,  $M_\odot/\text{kpc}^3$  y  $M_\odot$  respectivamente. Los resultados se muestran en las tablas 3.2 para Burkert y 3.3 para NFW además de las respectivas gráficas en las figuras 3.5 y 3.6 para Burkert y figuras 3.7 y 3.8 para NFW. Los parámetros se restringen a  $0 < a < 150$ ,  $10^5 < \rho_0 < 10^8$  y  $10^7 < M_d < 10^{12}$  en el cálculo. Los errores reportados en los parámetros se calculan a  $1\sigma$ , sin embargo para ciertas galaxias hay parámetros para los cuales no fue posible calcular el error.

### 3.6.1. Análisis de curvas

ESO 116-G12: Esta es una galaxia dominada casi por completo por el halo oscuro. El perfil de Burkert es el que mejor ajusta a los datos ( $\chi_{red}^2 = 0.79$ ).

ESO 287-G13: Esta es una galaxia con un disco masivo que domina la curva de rotación hasta aproximadamente 12 kpc del centro en ambos ajustes. El mejor ajuste corresponde al perfil de Burkert con un disco de mayor masa y halo con  $\rho_0$  mayor aunque de menor radio  $a$  comprado con NFW.

M 31: Galaxia con el disco más masivo de toda la muestra para ambos perfiles de materia oscura. El ajuste de ambas curvas de rotación no toca a los datos observacionales más allá de 30 kpc. Esto indica que los perfiles de materia oscura no son lo suficientemente buenos para esta galaxia dominada por el disco galáctico. Sin embargo, ahora es el perfil de NFW el que da un mejor ajuste.

NGC 7339: Presenta también un disco masivo cuya contribución es importante hasta aproximadamente 3 kpc del centro galáctico en el perfil de Burkert que es el mejor para esta galaxia ( $\chi_{red}^2 = 1.18$ ). También presenta un disco de mayor masa y un halo oscuro con menor  $a$  pero mayor  $\rho_0$  que el correspondiente del perfil de NFW.

NGC 4217: Una galaxia cuya curva de rotación es tan suave que permite un buen ajuste en ambos perfiles de materia oscura. El ajuste de los diferentes perfiles de materia contrasta. Para el perfil de Burkert el halo da domina toda la curva de rotación debido a que tiene una mayor  $\rho_0$  comparada con el perfil de NFW dónde el disco tiene una mayor masa y domina en la primera parte de la curva. El mejor resultado lo da de nuevo el perfil de Burkert ( $\chi_{red}^2 = 0.28$ )

UGC 6917: Otra galaxia con curva de rotación suave. El mejor ajuste se tiene de nuevo con perfil de Burkert que tiene una  $\chi_{red}^2 = 0.26$ , que difiere de la  $\chi_{red}^2$  de NFW por 2 centésimas. Esta galaxia también tiene un halo con mayor de mayor densidad  $\rho_0$  y menor radio  $a$  que su contraparte de NFW.

UGC 6399: Galaxia mejor ajustada con el perfil de Burkert ( $\chi_{red}^2 = 0.02$ ) y donde toda la curva de rotación está dada prácticamente por el halo. En el ajuste de NFW la concavidad del halo mencionada en la subsección anterior junto con el disco más masivo respecto al que se obtiene con Burkert provoca que la curva se desvíe de la parte central de los primeros dos puntos observacionales.

NCC 4100: El mejor resultado se logra otra vez con el perfil de Burkert ( $\chi_{red}^2 = 1.00$ ) que da un disco de menos masivo comparado con el de NFW, pero un halo con mayor densidad  $\rho_0$  pero radio  $a_0$  más pequeño.

NGC 4157: Las curvas de rotación de esta galaxia son muy semejantes aunque el mejor ajuste de da con Burkert ( $\chi_{red}^2 = 0.44$ ). Esta galaxia también presenta las características en los parámetros que NGC 7339.

UGC 4325: Esta es una galaxia LSB que no se pudo ajustar de manera satisfactoria con ninguno

de los perfiles siendo el mejor de ellos, por mucho, el de Burkert ( $\chi_{red}^2 = 3.27$ ). En ambos casos se obtiene el mismo valor para la masa del disco que corresponde a la cota inferior impuesta en el cálculo del parámetro. Así, la curva de rotación está dada prácticamente por el halo como se observa en la correspondiente gráfica.

UGC 128: Otra galaxia LSB. Al igual que UGC 6399, el perfil de Burkert da un ajuste muy bueno ( $\chi_{red}^2 = 0.01$ ) para esta galaxia. Aunque el disco domina al principio, el halo se vuelve importante aproximadamente a 4 kpc del centro. También presenta las características de NGC 7339 en los parámetros.

DDO 47: El perfil de Burkert es el mejor para esta galaxia LSB. Con una menor  $\chi_{red}^2$  para este perfil (1.00) que para el NFW (6.75) y con un halo y disco de mayor densidad  $\rho_0$  y masa, respectivamente. El radio de halo característico  $a_0$  más pequeño obtenido con Burkert hace posible el ajuste de los puntos cercanos al centro.

DDO 64: Esta galaxia LSB presenta la misma problemática de UGC 4325: no es posible un ajuste adecuado con ninguno de los perfiles de materia oscura. El mejor resultado se obtiene con el perfil de Burkert ( $\chi_{red}^2 = 5.71$ ).

F568-3: Para esta galaxia LSB el mejor ajuste lo da el perfil de Burkert ( $\chi_{red}^2 = 1.34$ ) para el cual se obtiene la masa mínima en el disco.

NGC 4395: Única galaxia LSB ajustada de mejor forma por el perfil de NFW ( $\chi_{red}^2 = 1.97$ ). La parte central y final de la curva de rotación se ajustan mejor al perfil de NFW como se ve en la gráfica correspondiente.

UGC 5750: Galaxia LSB cuya curva de rotación se ajusta mejor, de nuevo, con el perfil de Burkert ( $\chi_{red}^2 = 0.84$ ). La curva viene dada prácticamente por el halo; la masa del disco es pequeña y de hecho toma el valor de la cota inferior impuesta en el cálculo.

### Comparación con otros trabajos

En [51] se muestra un estudio entre el ajuste de las curvas de rotación de algunas de las galaxias LSB analizadas aquí: UGC 4325, DDO 64, UGC 128, F568-3, NGC 4395 y UGC 5750 con el halo de NFW y un halo pseudo-isotérmico. En ese trabajo se calculan parámetros distintos a los de nuestro trabajo. Para el halo pseudo-isotérmico se calculan el radio del núcleo del halo  $R_c$  y la densidad central de halo  $\rho_0$  que no debe confundirse con el parámetro con el calculado aquí. Para el halo de NFW ellos calculan la concentración  $c = r_{200}/a$ , donde  $r_{200}$  se define como el radio para el cual la densidad media del halo es mayor o igual a 200 veces la densidad crítica del universo  $\rho_c$ , y el parámetro  $v_{200}$  que es la velocidad en  $r = r_{200}$ . En el cálculo de parámetros de ambos modelos se usaron cuatro casos distintos en cada halo: disco nulo, disco mínimo, popsynth y disco máximo, donde progresivamente se aumenta la influencia del disco a través del parámetro  $\Upsilon_\star = M_\star/L_\star$  –razón masa-luminosidad estelar–, y donde toman  $v_{total}^2 = \Upsilon_\star v_{c_\star}^2 + v_{c_{gas}}^2 + v_{c_H}^2$ <sup>1</sup>. Para disco nulo se

<sup>1</sup>Comparando esta ecuación para la velocidad con la ec. (3.7) se observa que nosotros hemos tomado  $\Upsilon_\star = 1$  y  $v_{c_{gas}}^2 = 0$ . El subíndice  $\star$  es sinónimo de disco galáctico.

toma  $\Upsilon_* = 0$ , para disco mínimo  $\Upsilon_* \lesssim 0.8$ , en popsynth  $0.9 \lesssim \Upsilon_* \lesssim 1.4$  y en disco máximo  $\Upsilon_* \gtrsim 2$ . En seguida daremos una comparación entre los resultados obtenidos con el perfil de NFW en esta tesis y [51].

Haciendo la transformación de los parámetros calculados en [51] con los cuatro casos diferentes, a los calculados aquí tenemos lo siguiente.

**Disco Máximo** De las seis galaxias, excepto NGC 4395 y UGC 128, las cuales no se analizan para este caso, todas tienen  $\rho_0 = 2.43 \times 10^4 \text{ kpc}^3$  ya que la concentración es  $c = 1$ . UGC 4325 tiene  $a = 561.53$ , para DDO 64  $a = 289.70$ ,  $a = 629.00$  para F568-3 y UGC 5750 tiene  $a = 200.00$ . Como vemos los valores de  $a$  para el caso de disco máximo son mucho mayores que los reportados en la tabla 3.3 para esas galaxias mientras que la densidad  $\rho_0$  es mas pequeña.

**Popsynth** UGC 4325, DDO 64, F568-3 y UGC 5750 tienen de nuevo  $\rho_0 = 2.43 \times 10^4$ . Para estas mismas se tiene que  $a = 1779.86$ ,  $a = 801.63$ ,  $a = 658.77$  y  $a = 279.78$  en ese orden. Para NGC 4395 tenemos que  $a = 9.68$  y  $\rho_0 = 5.47 \times 10^6$ . De todas las galaxias esta última tiene valores muy similares a los reportados en la tabla 3.3. Esto dice que nuestro análisis es muy similar al popsynth de [51]. La gran diferencia en los resultados de las demás galaxias no se puede explicar de una manera precisa a pesar de que  $\Upsilon_* \sim 1.2$  que incluso es más pequeña que la de NGC 4395 que es  $\Upsilon_* = 1.4$ . La galaxia UGC 128 tampoco se analiza en este caso.

**Disco Mínimo** Al igual que en el caso anterior UGC 4325, DDO 64, F568-3 y UGC 5750 tienen  $\rho_0 = 2.43 \times 10^4$ . Los valores del parámetro  $a$  son 1988.2, 746.07, 922.67 y 331.37, respectivamente. De nuevo existe una enorme discrepancia entre estos y los valores reportados en la tabla 3.3. La galaxia UGC 128 está también ausente en este análisis y la galaxia NGC 4395 vuelve a dar resultados compatibles con los nuestros:  $a = 10.87$  y  $\rho_0 = 4.45 \times 10^6$ , sólo que ahora  $\Upsilon = 0.7$ .

**Disco Nulo** Único caso en el que las seis galaxias son incluidas y con resultados diferentes en cada una de ellas. UGC 4325 tiene  $a = 71.60$  y  $\rho_0 = 1.29 \times 10^6$ , para DDO 64 tenemos  $a = 13.37$  y  $\rho_0 = 2.58 \times 10^6$ , F568-3 tiene un radio de halo  $a = 26.62$  y una densidad  $\rho_0 = 1.95 \times 10^6$ , UGC 5750 presenta  $a = 1269.91$  y  $\rho_0 = 8142.61$ , UGC 128 aparece y los parámetros que se obtienen son  $\rho_0 = 2.38 \times 10^6$  y  $a = 24.75$ , y por último NGC 4395 con  $\rho_0 = 3.23 \times 10^6$  en la densidad y  $a = 15.13$  en el radio característico del halo. Existen discrepancias fuertes excepto para NGC 4395. Aunque los valores que se obtienen para los parámetros en este caso siguen siendo del orden de magnitud ya no caen dentro del error de los nuestro como sucedía en los casos de Disco Mínimo y Popsynth.

En la comparación hecha en [51] entre los resultados de los halos de NFW y pseudo-isotérmico concluyen que éste último ajusta mejor a las curvas de rotación, conclusión que es equivalente a la que se obtiene de la sección anterior al comparar los resultados entre NFW y Burkert.

Entonces, como conclusión general de de este capítulo podemos decir los halos pseudo-isotérmico y de Burkert –ambos tipo “shallow”– ajustan mejor que el halo de NFW –tipo “cuspy”–. Esto es una muestra de que a nivel galáctico existen modelos de materia oscura que ajustan la curvas de rotación de manera más satisfactoria que el modelo de NFW. Sin embargo, a escala cosmológica el modelo de NFW, que tiene otra forma a la vista en este capítulo, explica de manera satisfactoria la formación de estructuras en el universo.

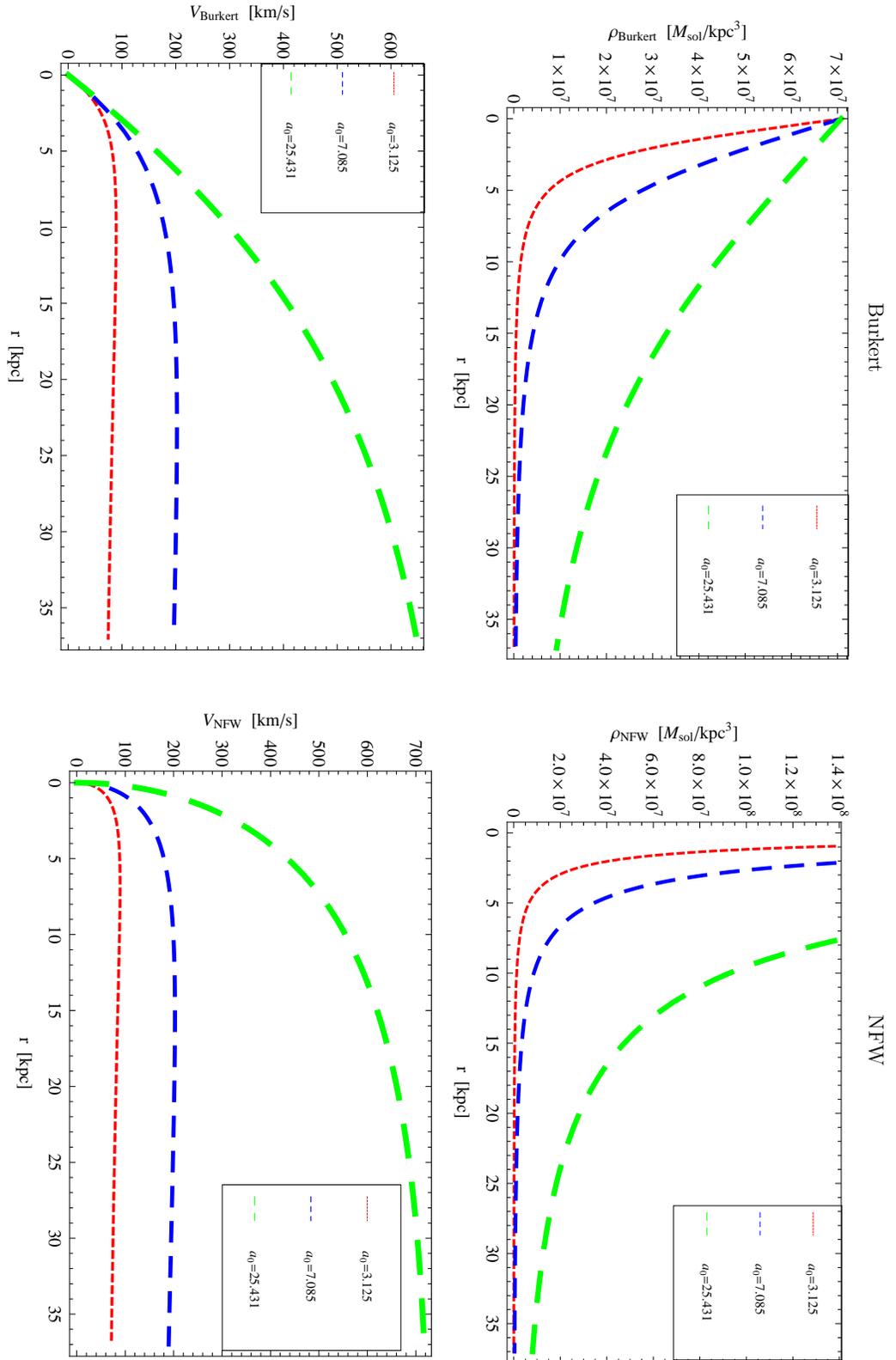


Figura 3.3: Comparación entre los perfiles de densidad y velocidad para los halos de Burkert (arriba) y NFW (abajo) como función de la distancia al centro galáctico  $r$ . La línea de trazos verdes corresponde a  $a_0 = 25.43$  kpc, la línea de trazos azules corresponde al valor  $a_0 = 7.085$  kpc y la línea de trazos rojos corresponde a  $a_0 = 3.125$  kpc.

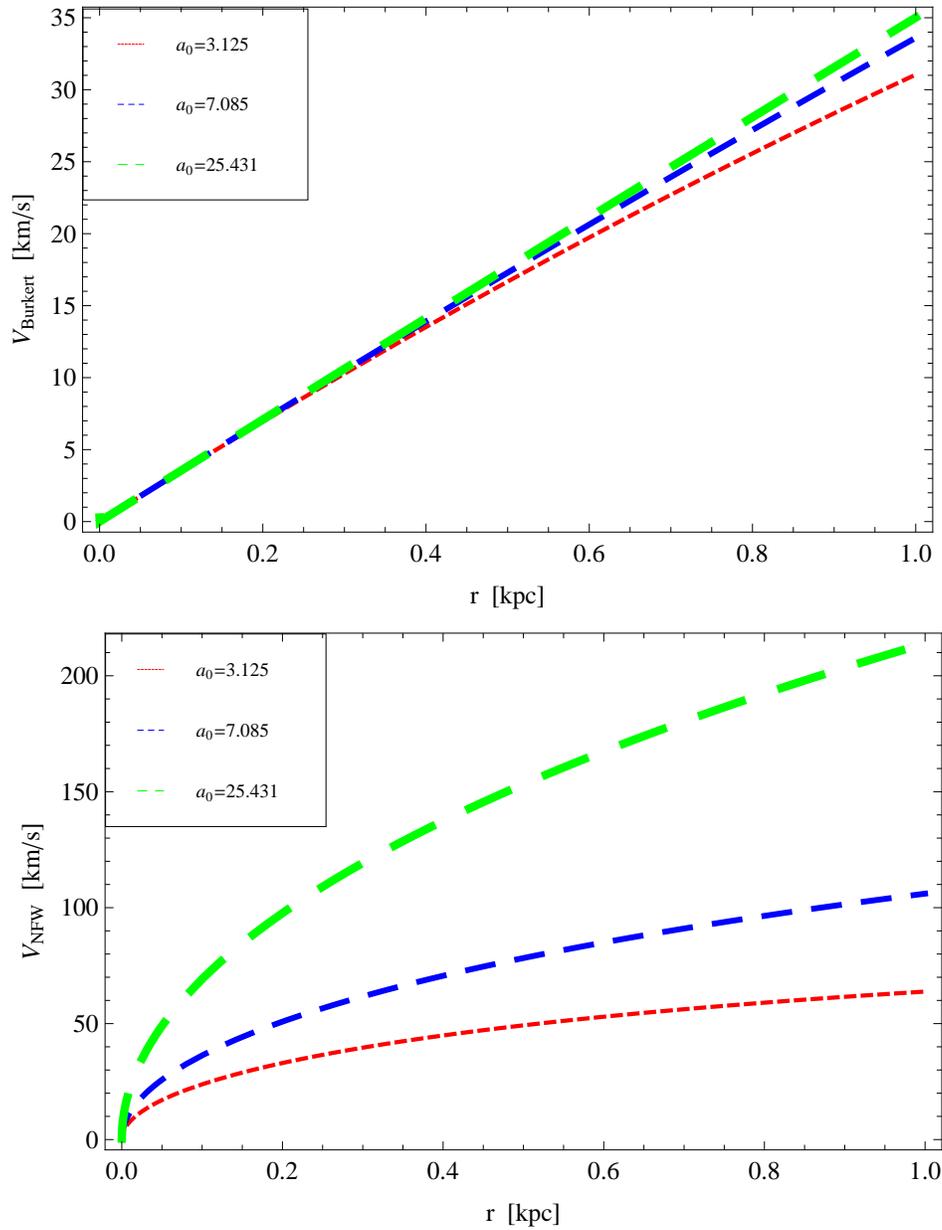


Figura 3.4: Comportamiento de la velocidad para el halo de Burkert y NFW cerca del centro. Las líneas de trazos verdes, trazos azules y trazos rojos corresponden a  $a_0 = 25.43$  kpc,  $a_0 = 7.085$  kpc y  $a_0 = 3.125$  kpc respectivamente. La velocidad para el halo de NFW crece de manera más rápida que la del halo de Burkert.

## 3.6. Ajustes de curvas de rotación. Perfiles de Burkert y NFW

Galaxia	Tipo	$R_d$ [kpc]	$a$ [kpc]	$\rho_0$ [ $M_\odot/\text{kpc}^3$ ]	$M_d$ [ $M_\odot$ ]	$\chi^2_{red}$
ESO 116-G12	SBcd	1.7	$4.71^{+0.19}_{-0.18}$	$4.69^{+0.29}_{-0.28} \times 10^7$	$2.04^{+0.63}_{-0.61} \times 10^9$	0.79
ESO 287-G13	Sbc	3.3	$25.43^{+2.34}_{-2.08}$	$6.11^{+0.46}_{-0.50} \times 10^6$	$4.42^{+0.28}_{-0.27} \times 10^{10}$	1.56
M 31	Sb	4.5	$4.17 \pm +0.19$	$7.39 \pm 0.60 \times 10^7$	$1.38 \pm 0.03 \times 10^{11}$	1.93
NGC 7339	SABb	1.5	$5.28^{+0.72}_{-0.61}$	$6.66^{+0.73}_{-0.71} \times 10^7$	$1.38 \pm 0.08 \times 10^{10}$	1.18
NGC 4217	Sb	2.9	$3.12 \pm 0.19$	$2.81^{+0.33}_{-0.31} \times 10^8$	$8.08^{+6.97}_{-6.61} \times 10^9$	0.28
UGC 6917	SBD	2.9	25.98	$4.18^{+1.15}_{-1.09} \times 10^6$	$1.31^{+0.15}_{-0.14} \times 10^{10}$	0.26
UGC 6399	Sm	2.4	$3.41^{+0.28}_{-0.27}$	$5.95^{+0.74}_{-0.70} \times 10^7$	$1.00 \times 10^7$	0.02
NGC 4100	Sbc	2.5	$3.82 \pm 0.22$	$1.59 \pm 0.18 \times 10^8$	$1.81^{+0.65}_{-0.62} \times 10^{10}$	1.00
NGC 4157	Sb	2.6	$9.32^{+0.90}_{-0.87}$	$2.61^{+0.43}_{-0.40} \times 10^7$	$4.21^{+0.94}_{-0.88} \times 10^{10}$	0.44
UGC 4325 *	SAm	1.6	$7.63^{+6.33}_{-2.37}$	$9.66^{+1.08}_{-1.02} \times 10^7$	$1.00 \times 10^7$	3.27
UGC 128 *	Sd	6.4	$17.88^{+3.16}_{-2.88}$	$4.05^{+1.06}_{-0.97} \times 10^6$	$2.54^{+1.05}_{-0.93} \times 10^{10}$	0.01
DDO 47 *	IB	0.5	$7.08^{+1.33}_{-0.99}$	$2.24^{+0.21}_{-0.20} \times 10^7$	$5.83^{+5.77}_{-4.72} \times 10^7$	1.00
DDO 64 *	IB	1.2	150.00	$1.00^{+1.52}_{-0.38} \times 10^7$	$7.53^{+2.34}_{-2.10} \times 10^8$	5.71
F568-3 *	Sd	4.0	$6.08^{+0.93}_{-0.81}$	$3.12^{+0.51}_{-0.47} \times 10^7$	$1.00 \times 10^7$	1.34
NGC 4395 *	SAm	2.3	$1.60 \pm 0.16$	$2.00^{+0.37}_{-0.33} \times 10^8$	$2.00 \times 10^8$	3.69
UGC 5750 *	SBD	5.6	$9.13^{+3.60}_{-2.33}$	$8.22^{+1.81}_{-1.63} \times 10^6$	$1.00 \times 10^7$	0.84

Tabla 3.2: Mejores valores de los parámetros ajustados al perfil de Burkert para las galaxias usadas en el análisis. \* = galaxia LSB.

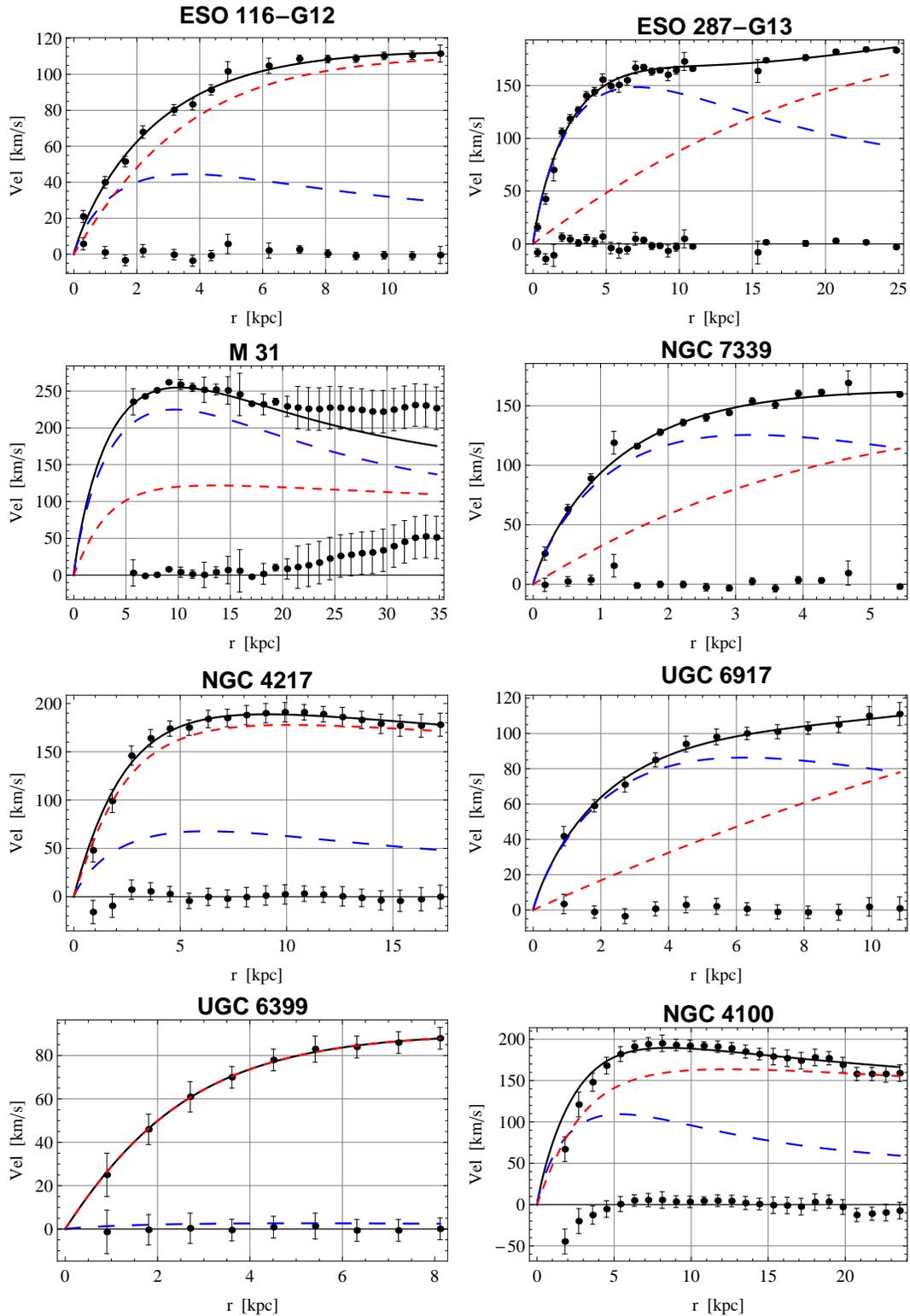


Figura 3.5: Mejor ajuste a las curvas de rotación de las galaxias dadas en la tabla 3.2 para el perfil de Burkert. La curva de trazos azules representa la contribución a la velocidad del disco, la curva de trazos rojos es la contribución del halo oscuro. La línea negra es la curva total dada por la ec. (3.7). Los puntos sobre el eje horizontal representan los *residuos*, es decir,  $V_{obs} - V_B$ .

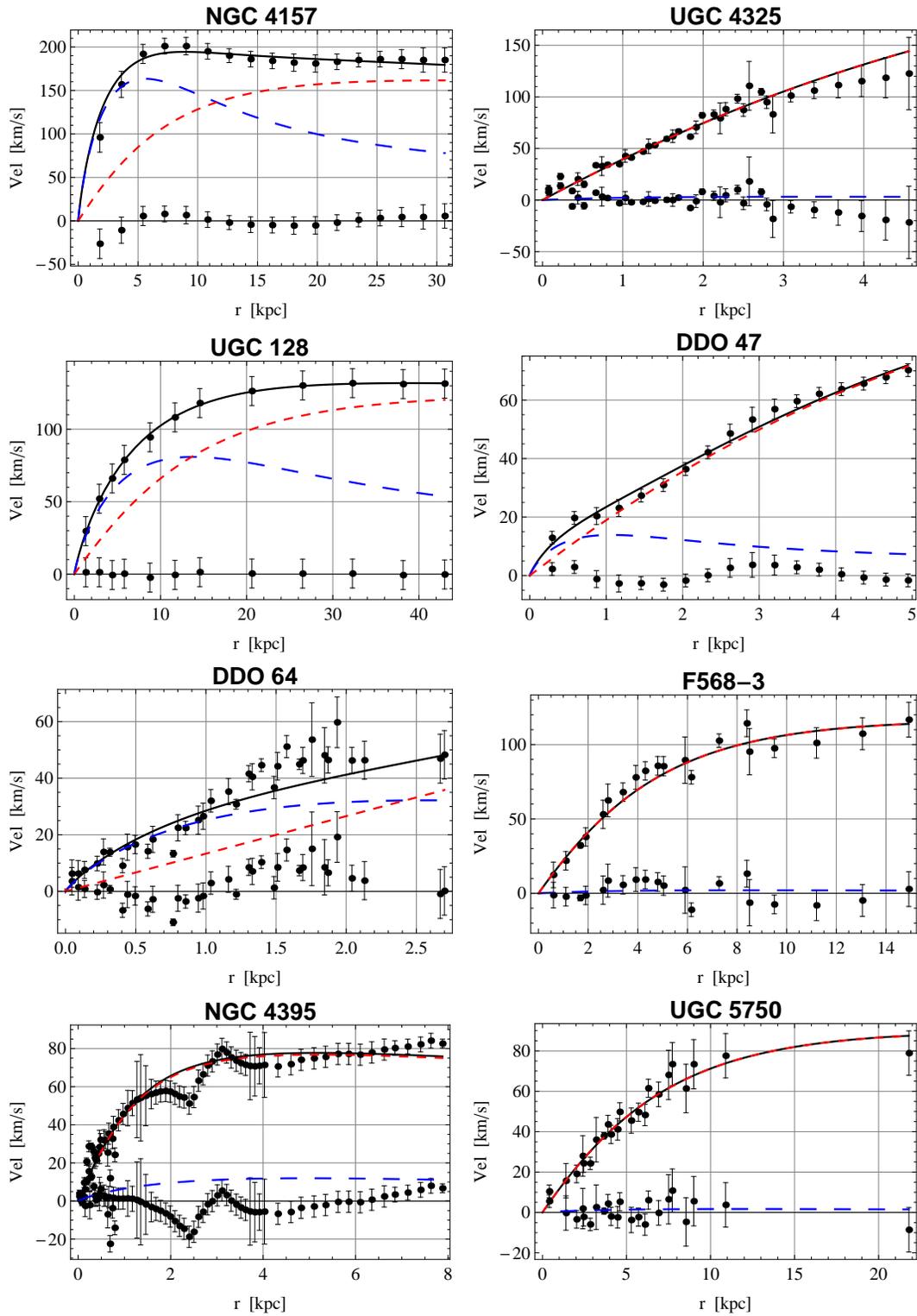


Figura 3.6: Continuación.

Galaxia	Tipo	$R_d$ [kpc]	$a$ [kpc]	$\rho_0$ [ $M_\odot/\text{kpc}^3$ ]	$M_d$ [ $M_\odot$ ]	$\chi^2_{red}$
ESO 116-G12	SBcd	1.7	$16.02^{+0.58}_{-0.57}$	$5.73 \pm 0.30 \times 10^6$	$1.00 \times 10^7$	2.84
ESO 287-G13	Sbc	3.3	$150.00^{+8.30}_{-8.10}$	$3.43^{+0.22}_{-0.21} \times 10^5$	$3.42 \pm 0.27 \times 10^{10}$	2.15
M 31	Sb	4.5	$150.00^{+37.60}_{-36.80}$	$1.03^{+0.29}_{-0.28} \times 10^5$	$1.67 \pm 0.03 \times 10^{11}$	1.72
NGC 7339	SABb	1.5	$51.94^{+3.67}_{-3.59}$	$2.49 \pm 0.19 \times 10^6$	$1.10 \pm 0.08 \times 10^{10}$	1.48
NGC 4217	Sb	2.9	$45.10^{+8.43}_{-8.10}$	$1.57^{+0.38}_{-0.36} \times 10^6$	$4.12^{+0.70}_{-0.66} \times 10^{10}$	0.70
UGC 6917	SBd	2.9	$150.00^{+22.20}_{-21.30}$	$2.03^{+0.32}_{-0.31} \times 10^5$	$8.76^{+1.46}_{-1.39} \times 10^9$	0.28
UGC 6399	Sm	2.4	$150.00^{+26.10}_{-24.50}$	$2.02^{+0.37}_{-0.35} \times 10^5$	$3.16^{+1.19}_{-1.11} \times 10^9$	0.41
NGC 4100	Sbc	2.5	$9.31 \pm 0.65$	$2.37^{+0.31}_{-0.30} \times 10^7$	$2.56^{+0.65}_{-0.62} \times 10^{10}$	2.06
NGC 4157	Sb	2.6	$22.43^{+2.04}_{-2.01}$	$5.10^{+0.78}_{-0.73} \times 10^6$	$3.68^{+0.94}_{-0.88} \times 10^{10}$	0.51
UGC 4325 *	SAm	1.6	$150.00^{+17.30}_{-15.40}$	$5.51^{+0.63}_{-0.59} \times 10^5$	$1.00 \times 10^7$	14.12
UGC 128 *	Sd	6.4	$77.11^{+12.71}_{-11.91}$	$3.43^{+0.78}_{-0.71} \times 10^5$	$1.71^{+1.06}_{-0.95} \times 10^{10}$	0.28
DDO 47 *	IB	0.5	$150.00^{+13.60}_{-12.40}$	$2.27^{+0.21}_{-0.20} \times 10^5$	$1.00 \times 10^7$	6.75
DDO 64 *	IB	1.2	$150.00^{+33.60}_{-29.80}$	$2.03^{+0.46}_{-0.41} \times 10^5$	$1.00 \times 10^7$	7.02
F568-3 *	Sd	4.0	$150.00^{+25.70}_{-22.70}$	$2.63^{+0.47}_{-0.43} \times 10^5$	$1.05 \times 10^9$	4.55
NGC 4395 *	SAm	2.3	$10.77^{+1.86}_{-1.77}$	$4.80^{+1.18}_{-1.09} \times 10^6$	$2.54^{+1.57}_{-1.43} \times 10^9$	1.97
UGC 5750 *	SBd	5.6	$130.31^{+33.19}_{-29.81}$	$1.00^{+0.26}_{-0.24} \times 10^5$	$1.96 \times 10^9$	1.90

Tabla 3.3: Parámetros del perfil de NFW. \* = galaxia LSB.

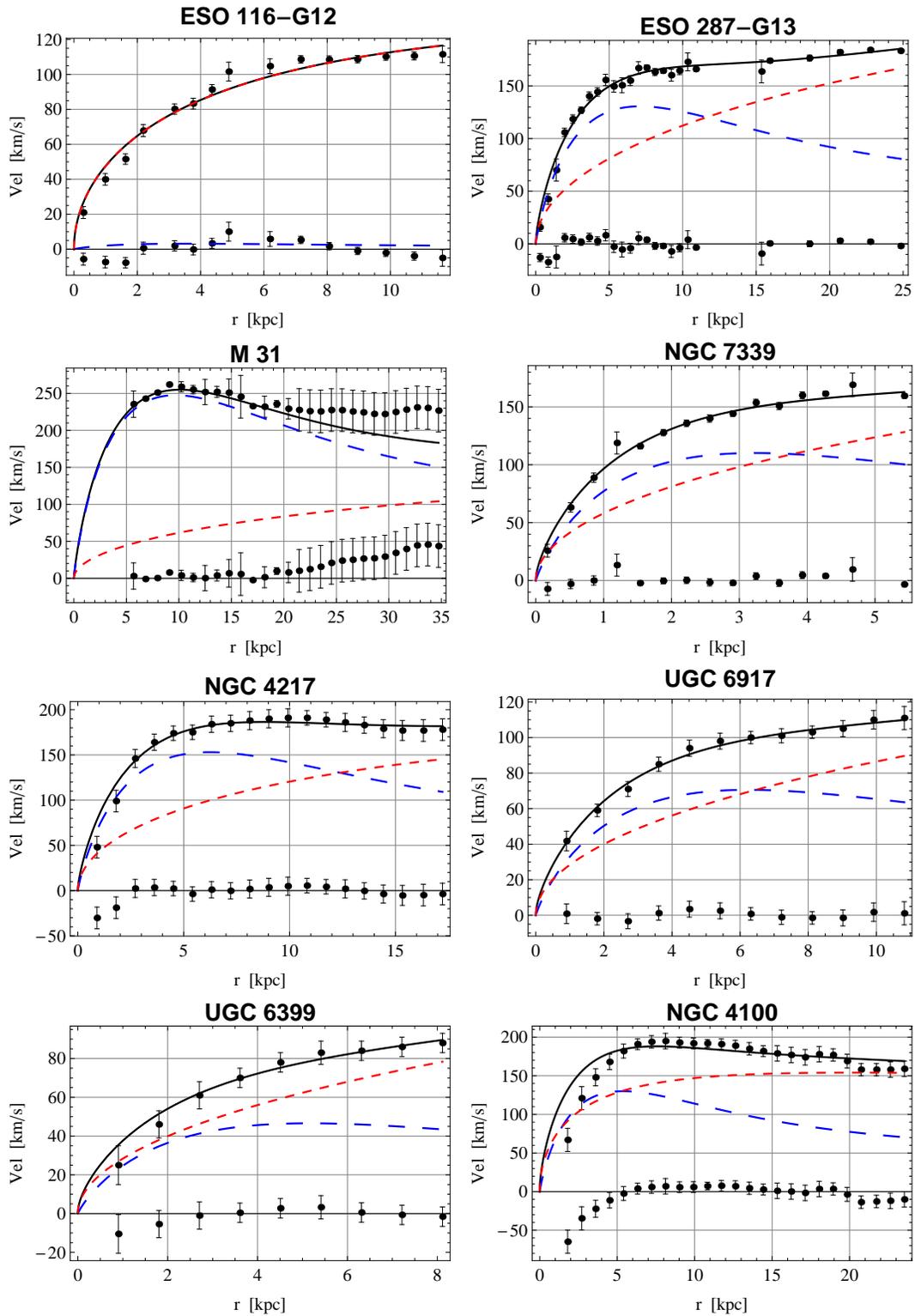


Figura 3.7: Curvas de rotación correspondientes al perfil de NFW. De nuevo la línea de trazos azules representa la contribución del disco y la línea de trazos rojos la contribución del halo oscuro; la línea negra es la curva de rotación total. También se muestran los *residuos*  $V_{obs} - V_B$ .

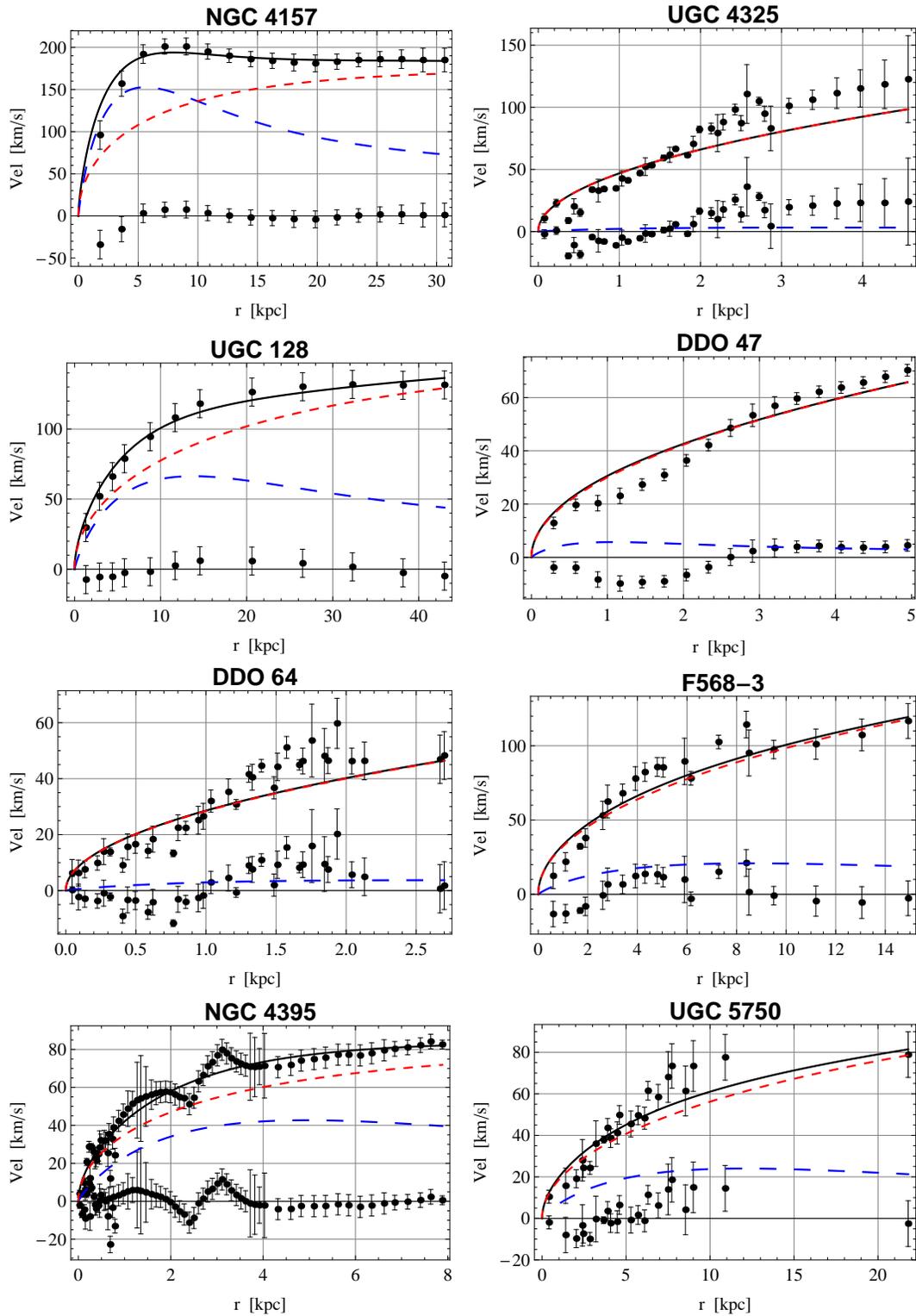


Figura 3.8: Continuación.

---

# Capítulo 4

## Curvas de rotación en gravedad $f(R)$

---

En este capítulo trataremos las curvas de rotación en el marco de gravedad  $f(R)$ . Sin necesidad de un halo de materia oscura investigaremos si es posible ajustar los datos considerando sólo el disco galáctico cuyo potencial se ve modificado por el modelo  $f(R)$ .

### 4.1. Potencial de disco delgado

El potencial de un sistema extendido es más complejo que el de una fuente puntual, como vimos en el capítulo 3. En gravedad  $f(R)$  éste se compone de dos términos al igual que el de la fuente puntual –ec. (2.43)–:

$$\Phi(r, z) = \Phi_N(r, z) + \Phi_{corr}(r, z) , \quad (4.1)$$

donde los subíndices  $N$  y  $corr$  indican el término newtoniano y correctivo, respectivamente.

Para un disco delgado con simetría axial se tiene que [40]:

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \Sigma(r') r' dr' \int_0^{2\pi} \psi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\phi' , \quad (4.2)$$

donde  $\psi$  es el potencial de la fuente puntual,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(r + r')^2 + z^2][1 - k^2 \cos^2(\phi'/2)]^{1/2}$  y  $k^2 \equiv 4rr' / [(r + r')^2 + z^2]$ . Sabemos que el potencial de la fuente puntual viene dado por la ec. (2.43), pero de una manera más general este se escribe como

$$\psi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \psi_N(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) + \psi_{corr}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\frac{Gm}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\alpha Gm}{r_c} \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{r_c} \right)^{\beta-1} , \quad (4.3)$$

y  $\alpha$  un parámetro que depende del modelo  $f(R)$  en cuestión. Para el modelo  $R^n$  se tiene  $\alpha = 1$ , aunque podría incluso tomar valores negativos.

Sustituyendo la ec. (4.3) en la ec. (4.2) se obtiene una suma de potenciales uno de los cuales es

el dado por la ec. (3.28) mientras que el otro es el potencial correctivo dado por [40]:

$$\begin{aligned}\Phi_{corr}(r, z) &= -G\Sigma_0 r_c \int_0^\infty \tilde{\Sigma}(\xi') [(\xi + \xi')^2 + \zeta^2]^{\frac{\beta-1}{2}} \xi' d\xi' \int_0^{2\pi} \left[1 - k^2 \cos^2\left(\frac{\phi'}{2}\right)\right]^{\frac{\beta-1}{2}} d\phi' \\ &= -2^{\beta-2} \pi G \Sigma_0 r_c \xi^{\frac{\beta-1}{2}} \int_0^\infty d\xi' \tilde{\Sigma}(\xi') \xi'^{\frac{\beta+1}{2}} {}_2F_1\left(\left\{\frac{1}{2}, \frac{1-\beta}{2}\right\}; 1; k^2\right) k^{1-\beta}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

La última expresión se obtiene después de integrar con respecto a  $\phi'$ , y donde  $\tilde{\Sigma} = \Sigma/\Sigma_0$ ,  $\xi = r/r_c$ ,  $\xi' = r'/r_c$ ,  $\zeta = z/r_c$  y  ${}_pF_q(\{a_1, \dots, a_p\}; \{b_1, \dots, b_q\}; x)$  la función hipergeométrica. La curva de rotación correspondiente es

$$v_c^2(r) = v_{c, N}^2(r) + v_{c, corr}^2(r). \quad (4.5)$$

Empleando un disco de Freeman –ec. (3.25)– con  $M_d = 2\pi R_d^2 \Sigma_0$  el potencial correctivo (4.4) se convierte en

$$\Phi_{corr}^F(r, z) = -2^{\beta-3} G M_d R_d^{-1} \eta_c \eta^{\frac{\beta-1}{2}} \int_0^\infty d\eta' e^{-\eta'} \eta'^{\frac{\beta+1}{2}} {}_2F_1\left(\left\{\frac{1}{2}, \frac{1-\beta}{2}\right\}; 1; k^2\right) k^{1-\beta}, \quad (4.6)$$

siendo  $\eta = r/R_d$ ,  $\eta' = r'/R_d$ ,  $\eta_c = r_c/R_d$  y  $k^2 = 4\eta\eta'/[(\eta + \eta')^2 + (z/R_d)^2]$ . La curva de rotación viene dada por la ec. (4.5) donde  $v_{c, N}^2$  corresponde a la ec. (3.30) mientras que

$$\begin{aligned}v_{c, corr}^2(\eta) &= \eta \left. \frac{\partial \Phi_{corr}^F(r, z)}{\partial \eta} \right|_{z/R_d=0} \\ &= 2^{\beta-6} (1-\beta) G M_d R_d^{-1} \eta_c^{-\beta} \eta^{\frac{\beta-1}{2}} \int_0^\infty \mathcal{F}(\eta, \eta', \beta) k^{3-\beta} \eta'^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-\eta'} d\eta',\end{aligned}\quad (4.7)$$

donde  $\mathcal{F}(\eta, \eta', \beta) = 2(\eta + \eta') {}_2F_1\left(\left\{\frac{1}{2}, \frac{1-\beta}{2}\right\}; 1; k^2\right) + [(k^2 + 2)\eta' + k^2\eta] {}_2F_1\left(\left\{\frac{3}{2}, \frac{3-\beta}{2}\right\}; 2; k^2\right)$ . Es importante señalar que la integral de la ec. (4.7) sólo se puede evaluar numéricamente.

## 4.2. Ajustes de curvas de rotación

Ahora presentamos los ajustes realizados a la muestra de la sección 3.6 siguiendo también el método de  $\chi^2$  para realizar los ajustes, pero con la suposición de que la galaxia sólo se conforma de un disco exponencial cuya curva de rotación está dada por la raíz cuadrada de la ec. (4.5). Ahora los parámetros libres son:  $\beta$  sin unidades,  $r_c$  y  $M_d$  que se miden en kpc y  $M_\odot$  respectivamente. La tabla 4.1 muestra los valores de los parámetros del mejor ajuste y las figuras 4.1 y 4.2 las gráficas correspondientes. Durante el cálculo los parámetros se restringen a  $0 < \beta < 1$ ,  $r_c > 0$  y  $10^7 < M_d < 10^{12}$ . Aunque la ec. (2.47) indica que  $\beta > 0.625$  nosotros escogimos que  $\beta$  variara según la ec. (2.45) para observar su comportamiento al igual que  $r_c$  cuya cota inferior debería ser de  $10^{-6}$  kpc si debe cumplir con que sea mucho mayor que la escala del sistema solar.

El ajuste se realizó de la siguiente manera. En cada galaxia se hizo una variación del parámetro  $\beta$  dentro del intervalo marcado por la teoría y dejando los parámetros  $r_c$  y  $M_d$  libres hasta encontrar el menor valor de la función  $\chi_{red}^2$ . Ese corresponde al mejor ajuste reportado. Los errores de los parámetros se calculan a  $1\sigma$ , sin embargo hay casos en los que no se pudo calcular dicho error.

### 4.3. Análisis de resultados

Como se mencionó en la sección 2.5.2 se debe tener una misma  $\beta$  para todas la galaxias. De la tabla 4.1 es claro que no todas las galaxias poseen el mismo valor central de  $\beta$ . Las galaxias ESO 116-G12, ESO 287-G13, M 31, NGC 7339, UGC 6917 y NGC 4157 y las galaxias LSB UGC 4325, UGC 128, DDO 47 y NGC 4395 comparten como valor central  $\beta = 0.990$ . DDO 64 posee  $\beta = 0.98$  y tomando el error reportado se alcanza la cota superior de 0.986, que sin embargo, no se traslapa con alguno de los intervalos dados por los errores de  $\beta = 0.990$  ya que el mínimo valor alcanzado es de 0.987. NGC 4217 y NGC 4100 comparten otro valor de  $\beta$  dentro del error de cada una, a saber  $\beta = 0.60 \pm 0.01$ . F568-3 y UGC 5750 comparten  $\beta = 0.89_{-0.05}^{+0.04}$ . Se observa que entre más cercano a 1 se encuentre el valor  $\beta$  el error es más pequeño. Por último, UGC 6399 tiene un valor distinto de  $\beta$ , que no queda dentro del intervalo del valor del parámetro de las demás galaxias. En la figura 4.3 se muestra un histograma que ilustra esta situación. Sin embargo el valor indicado por los resultados de observaciones cosmológicas de SN Ia es  $\beta = 0.817$ . Como cada  $\beta$  corresponde a una  $n$  diferente según la ec. (2.51) se puede obtener, como conclusión, que el modelo  $f(R) = R^n$  no es correcto a escala galáctica puesto que  $\beta$  no es universal. Respecto a  $r_c$  podemos decir algo análogo. Los valores son muy pequeños respecto a 15 kpc –valor que se obtiene para la vía láctea– ya que varían desde  $10^{-5}$  kpc hasta  $10^{-1}$  kpc. Así el parámetro  $r_c$  tampoco es universal como debiera esperarse.

El mejor ajuste para el 62.5% del total de galaxias analizadas se da cuando el parámetro  $\beta$  está en la cota superior  $\beta = 0.990$ , un valor más grande para  $\beta$  ya no es permitido por la teoría, no obstante da un mejor ajuste, es decir, una  $\chi_{red}^2$  menor. Para mostrar esto analizamos la galaxia DDO 47. Con una  $\chi_{red}^2$  de 36.20 esta galaxia presenta el peor ajuste dentro los límites impuestos por el modelo  $R^n$ . Sin embargo, cuando  $\beta = 2.51$  el ajuste mejora muchísimo:  $\chi_{red}^2 = 1.22$ ,  $r_c = 0.51$  kpc y  $M_d = 5.43 \times 10^7 M_\odot$ . La gráfica se presenta en la figura 4.4.

En en [50] realizan un primer cálculo del cual obtienen  $\beta = 0.7 \pm 0.25$ , para después realizar un segundo cálculo tomando  $\beta = 0.7$ . La incertidumbre que obtienen para  $\beta$  da un intervalo amplio para dicho parámetro ( $0.45 < \beta < 0.95$ ) pero que abarca a todas las galaxias estudiadas allí, no obstante, cuando se recalculan los parámetros con  $\beta = 0.7$ , aproximadamente un tercio de ellas presentan una  $\chi_{red}^2 > 1$ , es decir, el ajuste no es bueno. Por otro lado las galaxias UGC 4325 y NGC 4395 se analizan en [40] para las que se toma  $\beta = 0.817$ .

Como nota vemos que en [50]  $r_c$  varía desde  $10^{-3}$  kpc hasta  $10^{-1}$  kpc mientras que en este trabajo lo hace en el intervalo ( $10^{-5}$ ,  $10^{-1}$ ) kpc. La variación más amplia para  $r_c$  en esta tesis puede deberse al hecho de no tomar en cuenta al gas en los ajustes aunque eso no es del todo claro, no obstante se sigue cumpliendo la restricción  $r_c \gg 10^{-7}$  kpc –sección 2.5.2–.

Suponiendo que  $r_c$  se relaciona con la masa como se menciona en [40] y [41] se graficó  $M_d$  vs  $r_c$  en escala logarítmica para ver algún tipo de comportamiento, como una posible ley escalamiento. La figura 4.5 muestra un comportamiento poco definido en ese sentido, descartando así que haya alguna relación funcional entre ellos.

#### 4.4. Comparación con halos de materia oscura

Finalmente en la tabla 4.2 se muestra una comparación entre los diferentes valores de  $\chi_{red}^2$  de los tres modelos analizados. Las galaxias DDO 47, ESO 116-G12, ESO 287-G13, NGC 7339, UGC 6399, NGC 4325, NGC 4217, UGC 6917, F568-3 y UGC 128 que representa 62.5 % de la muestra total se ajustan mejor al modelo de halo oscuro de Burkert mientras que M 31 y NGC 4395 (12.5 % de la muestra) lo hacen con el perfil de NFW. Un 25 % conformado por NGC 4100 y NGC 4157 se ajusta mejor al modelo  $R^n$ , mientras que UGC 5750 se ajusta de igual manera (misma  $\chi^2$ ) al halo de Burkert y el modelo  $R^n$ . Con esto podemos decir el mejor modelo para la muestra estudiada es halo de Burkert aunque el modelo  $R^n$  también presenta resultados satisfactorios ( $\chi^2 < 1$ ), pero con diferentes valores de  $\beta$ . Los ajustes hechos con el halo de NFW son menos satisfactorios.

## 4.4. Comparación con halos de materia oscura

Galaxia	Tipo	$R_d$ [kpc]	$\beta$	$r_c$ [kpc]	$M_d$ [ $M_\odot$ ]	$\chi^2_{red}$
ESO 116-G12	SBCd	1.7	$0.990 \pm 0.001$	$4.15^{+0.28}_{-0.20} \times 10^{-4}$	$5.12^{+0.24}_{-0.31} \times 10^8$	1.66
ESO 287-G13	Sbc	3.3	$0.990 \pm 0.001$	$7.34^{+0.40}_{-0.37} \times 10^{-3}$	$2.00 \pm 0.08 \times 10^{10}$	8.01
M 31	Sb	4.5	$0.990^{+0.002}_{-0.003}$	$0.22^{+0.07}_{-0.04}$	$1.65 \pm 0.03 \times 10^{11}$	1.87
NGC 7339	SABb	1.5	$0.990 \pm 0.001$	$5.91^{+0.49}_{-0.43} \times 10^{-3}$	$1.07 \pm 0.04 \times 10^{10}$	1.37
NGC 4217	Sb	2.9	$0.600 \pm 0.042$	$0.02 \pm 0.01$	$1.83^{+0.19}_{-0.18} \times 10^{10}$	0.33
UGC 6917	SBD	2.9	$0.990 \pm 0.002$	$0.01 \pm 0.002$	$9.11^{+0.79}_{-0.75} \times 10^9$	0.38
UGC 6399	Sm	2.4	$0.690^{+0.013}_{-0.014}$	$1.07^{+0.23}_{-0.18} \times 10^{-5}$	$1.87^{+0.25}_{-0.24} \times 10^7$	0.03
NGC 4100	Sbc	2.5	$0.600 \pm 0.010$	$1.21^{+0.20}_{-0.16} \times 10^{-4}$	$9.76^{+0.88}_{-0.84} \times 10^8$	0.61
NGC 4157	Sb	2.6	$0.990^{+0.001}_{-0.002}$	$8.91^{+1.35}_{-1.08} \times 10^{-3}$	$2.57^{+0.26}_{-0.25} \times 10^{10}$	0.33
UGC 4325 *	SAm	1.6	$0.990^{+0.001}_{-0.002}$	$8.35^{+1.30}_{-1.04} \times 10^{-4}$	$1.00^{+0.11}_{-0.12} \times 10^9$	7.42
UGC 128 *	Sd	6.4	$0.990^{+0.002}_{-0.003}$	$9.29^{+2.49}_{-1.74} \times 10^{-3}$	$1.46^{+0.26}_{-0.24} \times 10^{10}$	0.05
DDO 47 *	IB	0.5	$0.990 \pm 0.001$	$3.53^{+0.37}_{-0.32} \times 10^{-5}$	$1.00 \pm 0.95 \times 10^7$	36.20
DDO 64 *	IB	1.2	$0.980 \pm 0.006$	$5.68^{+1.71}_{-1.12} \times 10^{-4}$	$1.16 \pm 0.24 \times 10^8$	4.36
F568-3 *	Sd	4.0	$0.880^{+0.052}_{-0.109}$	$3.19^{+0.73}_{-0.54} \times 10^{-3}$	$1.01^{+0.17}_{-0.16} \times 10^9$	1.44
NGC 4395 *	SAm	2.3	$0.990^{+0.010}_{-0.013}$	0.05	$7.61^{+1.37}_{-1.25} \times 10^9$	3.05
UGC 5750 *	SBD	5.6	$0.890^{+0.075}_{-0.048}$	$3.08^{+0.90}_{-0.63} \times 10^{-5}$	$1.00^{+0.23}_{-0.20} \times 10^7$	0.84

Tabla 4.1: Parámetros del mejor ajuste para el modelo de gravedad  $f(R) = f_0 R^n$ . \* = galaxia LSB.

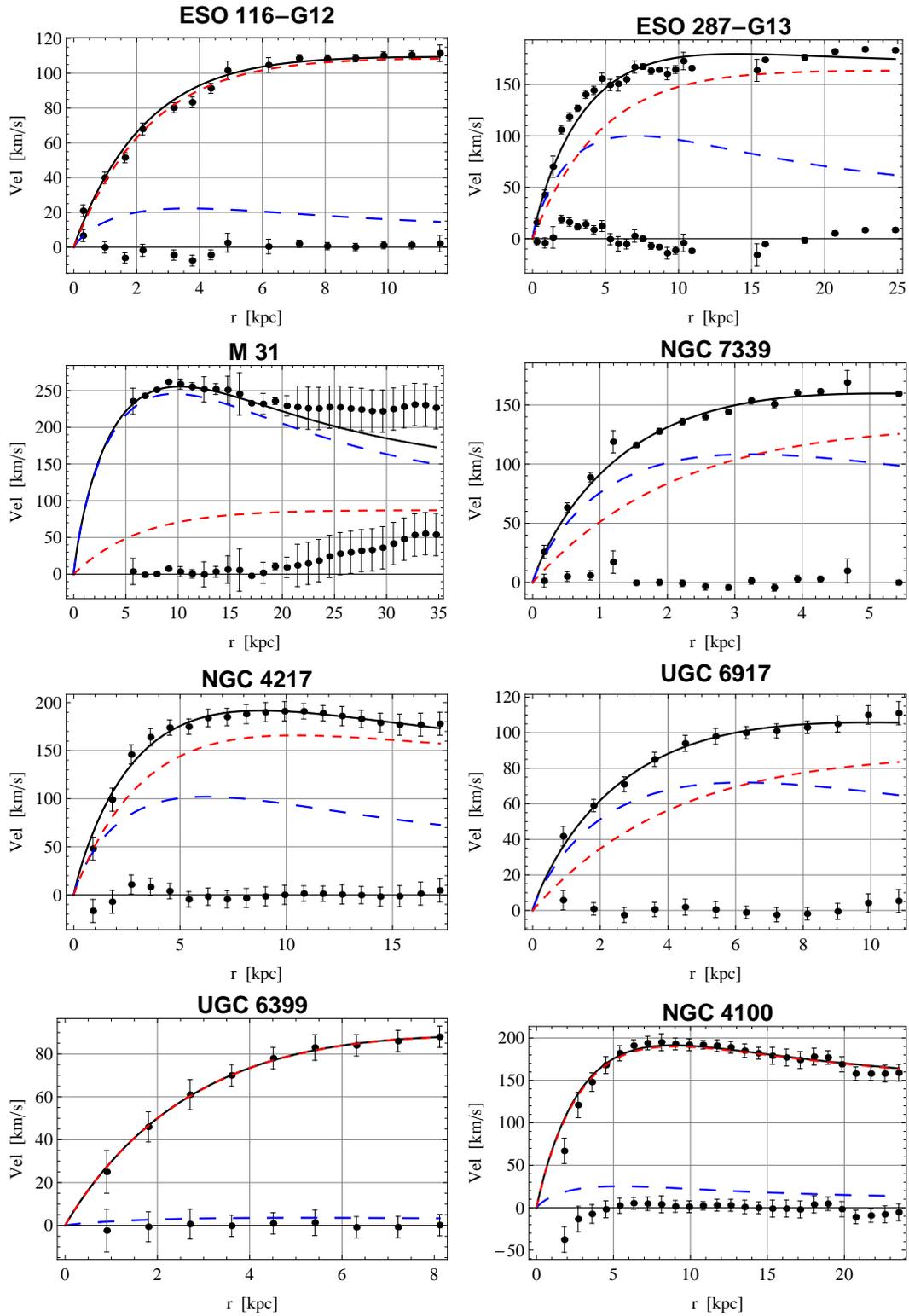


Figura 4.1: Curvas de rotación mejor ajustadas de las galaxias correspondientes a la tabla 4.1 para el modelo  $R^n$ . La línea de trazos azules representa la contribución newtoniana de la velocidad y la línea de trazos rojos es la corrección del término newtoniano de la velocidad dada por el modelo  $R^n$ ; la línea negra es la curva total dada por la ec. (4.5).

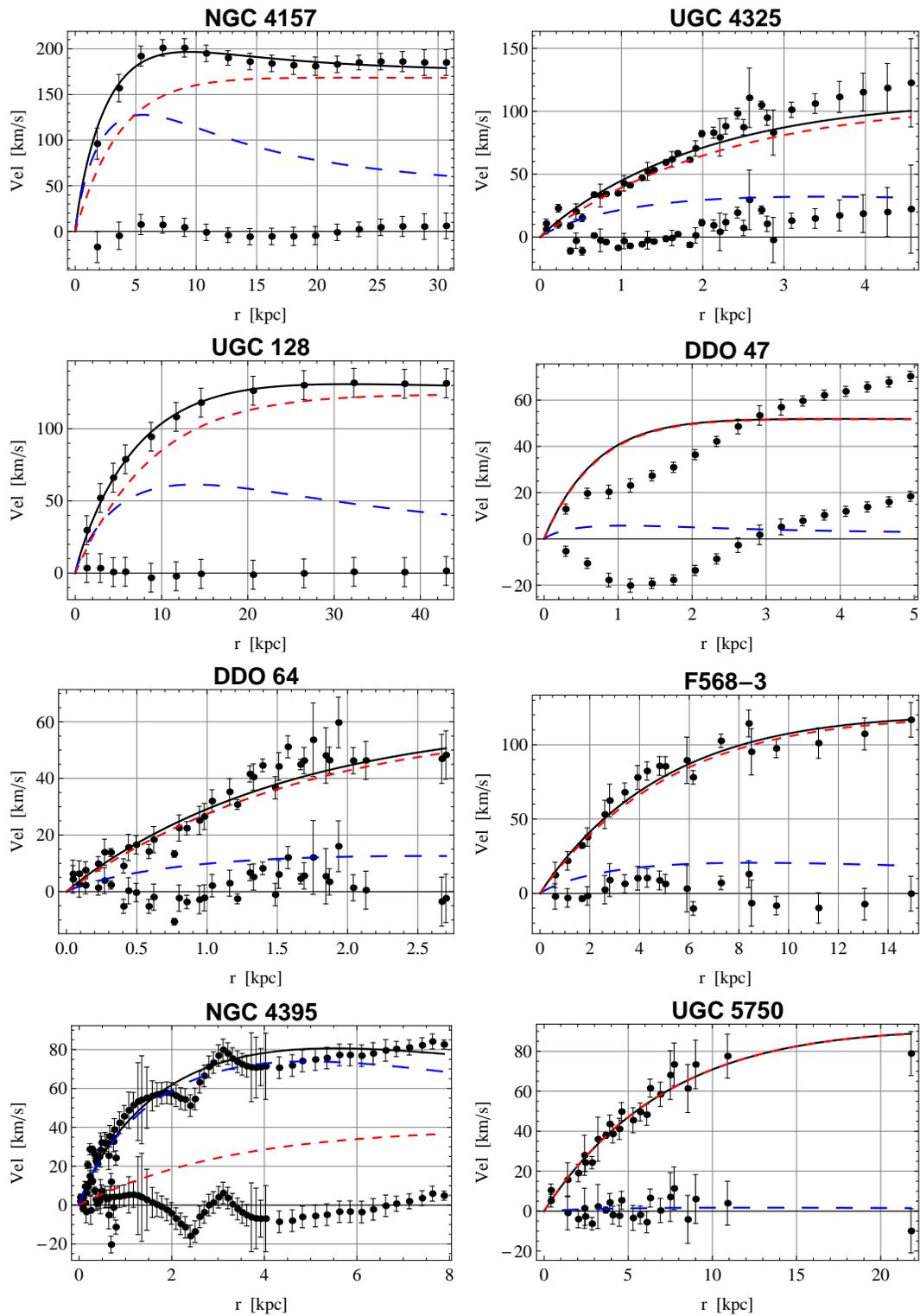


Figura 4.2: Continuación.

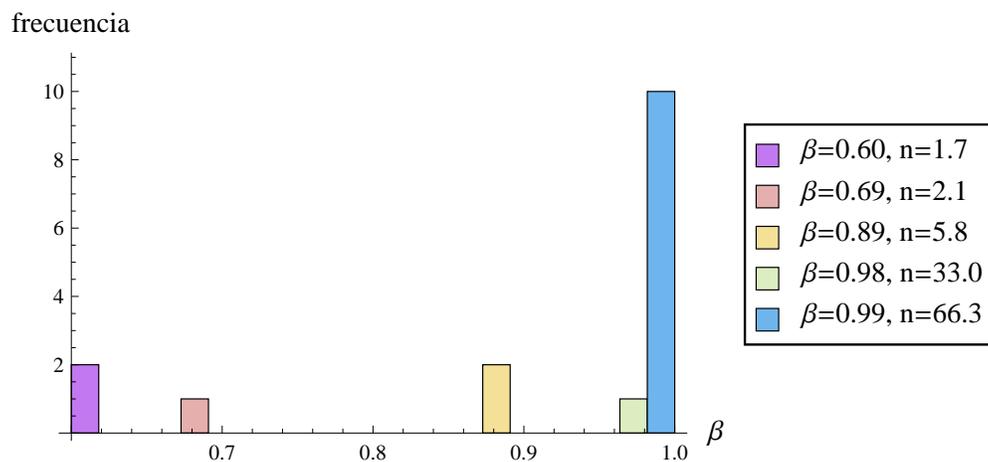


Figura 4.3: Histograma que muestra los distintos valores del parámetro  $\beta$  obtenidos en los ajustes de las galaxias estudiadas para el modelo  $R^n$ . En total se tienen cinco valores diferentes de  $\beta$  y sus correspondiente  $n$ , contrario a lo que marca la teoría.

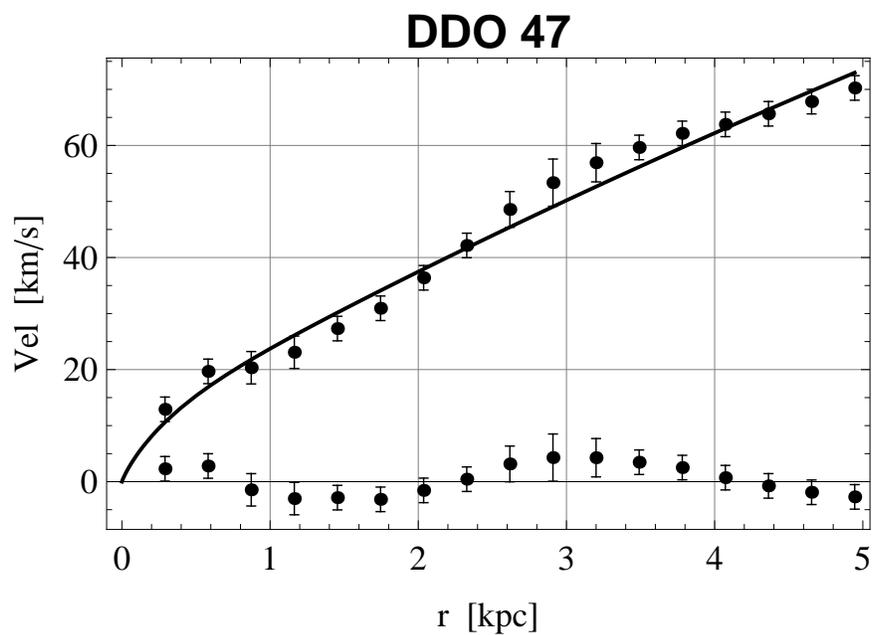


Figura 4.4: Ajuste de la galaxia DDO 47 con  $\chi^2 = 1.22$  y donde  $\beta = 2.51$ . A pesar de que este es un mejor ajuste que el obtenido ( $\chi^2 = 36.20$ ), no es válido ya que el valor de  $\beta$  está fuera del rango permitido por el modelo  $R^n$ .

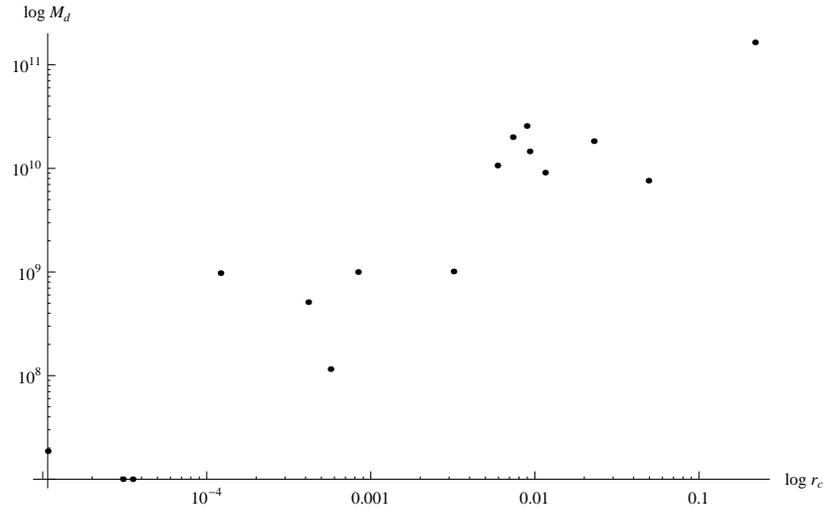


Figura 4.5: Gráfica logarítmica de  $M_d$  vs  $r_c$ . La dispersión de los puntos no indica alguna relación potencial entre ellos, por lo que se descarta esta hipótesis.

Galaxia	Tipo	Burkert	NFW	$f(R)$
		$\chi_{red}^2$	$\chi_{red}^2$	$\chi_{red}^2$
ESO 116-G12	SBcd	0.79	2.84	1.66
ESO 287-G13	Sbc	1.56	2.15	8.01
M 31	Sb	1.93	1.72	1.87
NGC 7339	SABb	1.18	1.48	1.37
NGC 4217	Sb	0.28	0.70	0.33
UGC 6917	SBd	0.26	0.28	0.38
UGC 6399	Sm	0.02	0.41	0.03
NGC 4100	Sbc	1.00	2.06	0.61
NGC 4157	Sb	0.44	0.51	0.33
UGC 4325 *	SAm	3.27	14.12	7.42
UGC 128 *	Sd	0.01	0.28	0.05
DDO 47 *	IB	1.00	6.75	36.20
DDO 64 *	IB	5.71	7.02	4.36
F568-3 *	Sd	1.34	4.55	1.44
NGC 4395 *	SAm	3.69	1.97	3.05
UGC 5750 *	SBd	0.84	1.90	0.84

Tabla 4.2: Comparación entre los ajustes hechos con perfil de Burkert, NFW y el modelo  $f(R) = f_0 R^n$ .

# Conclusiones

---

En esta tesis se consideró un modelo alternativo de materia oscura de la forma  $f(R) = f_0 R^n$ . El modelo  $R^n$  capaz de explicar la expansión acelerada del universo ( $n = 3.5$ ) [38] se ha puesto a prueba en este trabajo como un sustituto de materia oscura. Este modelo predice una modificación del potencial gravitacional newtoniano dado por la ec. (2.43), con  $\beta(n)$  dado por la ec. (2.51), cuyo valor debe ser universal al igual que el de  $r_c$ . En este modelo se plantea que no existe materia oscura y únicamente se tomaron en cuenta estrellas gravitando en un disco delgado y axisimétrico en donde actúa el potencial modificado. El resultado principal de este modelo es que no es viable a escala galáctica ya que los parámetros del modelo  $-\beta$  y  $r_c$  no son universales según lo muestran los ajustes hechos para la muestra, aunque sí se cumplen los requisitos impuestos por las pruebas gravitacionales a escala del sistema solar:  $\beta \gtrsim 0.625$  y  $r_c \gg 10^{-7}$  kpc.

En este nuevo modelo la mayoría de las galaxias analizadas muestran una tendencia hacia la cota superior de  $\beta$  ( $= 0.99$ ) lo que implica que  $n \simeq 66$  lo cual está fuera del intervalo de valores indicados en [40] y [50]. El valor favorecido por los ajustes de supernovas dado en [40] es  $\beta = 0.817$  que implica  $n = 3.5$  mientras que en [50] se toma  $\beta = 0.7 \pm 0.25$  lo que da un intervalo desde 0.45 hasta 0.95, lo cual no concuerda con el valor central de  $\beta$  para la mayoría de nuestros ajustes que es de  $0.99 \pm 0.001$ .

Si se consideran valores fuera del intervalo impuesto para  $\beta$  ( $0.625 < \beta < 1$ ), se obtienen mejores ajustes a las curvas de rotación, como lo muestra el caso de la galaxia DDO 47. Sin embargo, esto no es posible físicamente ya que se tendría un potencial gravitacional creciente de  $r$  que indicaría que entre más lejos se esté de la fuente, mayor es la fuerza de atracción gravitacional.

Nuestro estudio también arroja que los modelos de materia oscura tipo “core” describen de mejor manera las curvas de rotación que el modelo de NFW. El halo de Burkert resulta ser el mejor de nuestro análisis e incluso comparado con el modelo  $R^n$ . La evidencia observacional del modelo  $\Lambda$ CDM indica la existencia de materia oscura que al parecer es ineludible según nuestro análisis. Sin embargo, las partículas de materia oscura no se han detectado de manera convincente, por lo tanto sigue siendo válido probar modelos alternativos de materia oscura.

---

# Apéndice A

## Notas sobre RG y $f(R)$

---

### A.1. Convención de signos

En este trabajo seguimos la convención de signos LLSC –Landau-Lifshitz Spacelike Convention– tomada de [52].

Signo de la métrica

$$+ g_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +) . \quad (\text{A.1})$$

Signo de Riemann

$$+ R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu, \beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta, \nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\beta} . \quad (\text{A.2})$$

Signo de Einstein :

$$G_{\mu\nu} = + 8\pi G T_{\mu\nu} . \quad (\text{A.3})$$

Cociente de los signos de Riemann y Einstein

$$+ R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} . \quad (\text{A.4})$$

### A.2. Complementos de RG

SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha, \beta} + g_{\beta\nu, \alpha} - g_{\alpha\beta, \nu}) , \quad (\text{A.5})$$

relacionados con la variación de la métrica, ya que

$$\vec{e}_{\alpha, \beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \vec{e}_{\mu} , \quad (\text{A.6})$$

siendo  $\vec{e}_\mu$  los cuadvectores de la base con respecto a las coordenadas del espacio. Aquí tomamos  $(\ )_{,\alpha} = \partial/\partial x^\alpha$ . Los símbolos de Christoffel no son tensores ya que no se transforman como ellos.

#### TENSOR DE RICCI

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu, \alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha, \nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} , \quad (\text{A.7})$$

resulta de la contracción del tensor de Riemann. Otra manera de definir este tensor es

$$R_{\mu\nu} = [\ln(-\det(g))]_{,\mu, \nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu, \alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} [\ln(-\det(g))]_{,\nu} . \quad (\text{A.8})$$

Si el espacio es plano  $\Rightarrow R_{\mu\nu} = 0$ , si el espacio es curvo  $\Rightarrow R_{\mu\nu} \neq 0$ .

#### ESCALAR DE RICCI

$$R = R^\nu_{\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} [\Gamma^\alpha_{\mu\nu, \alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha, \nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}] , \quad (\text{A.9})$$

es la traza del tensor de Ricci. Algo importante es que tanto  $R_{\mu\nu}$  como  $R$  poseen segundas derivadas de la métrica respecto a las coordenadas y por lo tanto las ecuaciones que resultan de la ec. (1.13) son de segundo orden.

#### ELEMENTO DE LÍNEA

En coordenadas generalizadas el elemento de línea o semi-distancia se escribe como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.10})$$

siendo  $g_{\mu\nu}$  la métrica del espacio-tiempo. Los componentes de  $g_{\mu\nu}$ , llamados también potenciales, describen todas las simetrías del espacio-tiempo.

Se tomará la convención de índices griegos de 0 a 4 y de índices latinos de 1 a 3.

### A.3. Cálculo de las ecuaciones de FRW en RG

Para derivar las ecuaciones de FRW reescribamos la ec. (1.13) como

$$R^\mu_{\nu} - \frac{1}{2}R\delta^\mu_{\nu} = 8\pi G \left( T^\mu_{\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G} \delta^\mu_{\nu} \right) , \quad (\text{A.11})$$

con

$$R^0_0 = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (\text{A.12})$$

$$R^i_j = \left( \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \delta^i_j; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.13})$$

$$R = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right), \quad (\text{A.14})$$

$$T^\mu_{\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (\text{A.15})$$

Es claro de las ecuaciones anteriores que sólo obtenemos dos ecuaciones cosmológicas independientes.

De la componente 0–0 tenemos que

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left( \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) . \quad (\text{A.16})$$

que es la primera ecuación de FRW.

De igual manera, a partir de la componente  $i-i$  se tiene

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi G \left( p - \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) . \quad (\text{A.17})$$

sustituyendo la ec. (A.16) en (A.17) se obtiene la segunda ecuación de FRW:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + 3p - \frac{\Lambda}{4\pi G} \right) . \quad (\text{A.18})$$

Derivando la ec. (A.16) con respecto a  $t$  se obtiene

$$\frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \frac{4\pi G}{3} \dot{\rho} , \quad (\text{A.19})$$

y sustituyendo ec. (A.16) y ec. (A.18) en ec. (A.19) se llega finalmente a la tercera ecuación de FRW:

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0 . \quad (\text{A.20})$$

Esta es una ecuación de balance entre materia y energía que también se puede obtener directamente de la *ecuación de conservación*  $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ .

## A.4. Cálculo de las ecuaciones de FRW en gravedad $f(R)$

La ecuación análoga a (A.11) en gravedad  $f(R)$  es

$$G^\mu_\nu = \frac{\kappa}{f'(R)} \left[ T^\mu_\nu + \frac{f(R) - Rf'(R)}{2\kappa} \delta^\mu_\nu - \frac{(\delta^\mu_\nu \square - \nabla^\mu \nabla_\nu) f'(R)}{\kappa} \right] \quad (\text{A.21})$$

La componente 0–0 da como resultado

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\kappa}{3f'(R)} \left[ \rho - \frac{f(R) - Rf'(R)}{2\kappa} - \frac{(\nabla^0 \nabla_0 - \nabla^\sigma \nabla_\sigma) f'(R)}{\kappa} \right] - \frac{k}{a^2} \quad (\text{A.22})$$

Puesto que  $f'(R)$  es un escalar,

$$\nabla^\sigma f' = \partial^\sigma f' = A^\sigma \quad (\text{A.23})$$

es un vector, entonces [5]:

$$\begin{aligned} \nabla^\sigma \nabla_\sigma f' &= \nabla_\sigma A^\sigma \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\sigma (\sqrt{-g} A^\sigma), \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

y para un espacio-tiempo plano ( $k = 0$  y  $\sqrt{-g} = a^3$ ) la ec. (A.24) queda finalmente como

$$\begin{aligned} \nabla^\sigma \nabla_\sigma f' &= \frac{1}{a^3} \partial_0 [a^3 g^{00} \partial_0 f'] \\ &= -3H \partial_0 f' - \partial_0 \partial_0 f' \\ &= -[3H \dot{R} f'(R) + \ddot{R} f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R)], \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

dado que  $f' = f'(R(t))$  es una función que depende sólo de  $t$  –ver ec. (A.14)–. Además

$$\nabla^0 \nabla_0 f' = -\partial_0 \partial_0 f' = -[\ddot{R} f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R)]. \quad (\text{A.26})$$

Entonces la ec. (A.22) se transforma finalmente en la primera ecuación de FRW en gravedad  $f(R)$ :

$$H^2 = \frac{\kappa}{3f'(R)} \left[ \rho + \frac{Rf'(R) - f(R)}{2\kappa} - \frac{3H \dot{R} f''(R)}{\kappa} \right]. \quad (\text{A.27})$$

Tomando la componente  $i-i$  (sin traza)

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 = -\frac{\kappa}{f'(R)} \left[ p + \frac{f(R) - Rf'(R)}{2\kappa} + \frac{(\nabla^i \nabla_i - \nabla^\sigma \nabla_\sigma) f'(R)}{\kappa} \right], \quad (\text{A.28})$$

pero  $(\nabla^\sigma \nabla_\sigma - \nabla^0 \nabla_0) f'(R) = \nabla^j \nabla_j f'(R) = -3H \dot{R} f'(R)$  la cual no debe confundirse con  $\nabla^i \nabla_i f'(R)$  de la ecuación anterior ya que ahí la  $i$  no indica suma sino una sola componente que puede ser la 1–1, 2–2 ó 3–3. Además  $\nabla^i \nabla_i f'(R)_{\text{sin traza}} = \nabla^j \nabla_j \frac{f'(R)}{3}_{\text{traza}} = -H \dot{R} f'(R)$  y entonces  $(\nabla^i \nabla_i - \nabla^\sigma \nabla_\sigma) f'(R) = 2H \dot{R} f'(R) + \ddot{R} f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R)$ . Finalmente, sustituyendo la ec. (A.27) en la ec. (A.28) obtenemos la segunda ecuación de FRW en gravedad  $f(R)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{\kappa}{6f'(R)} \left[ \rho + \frac{Rf'(R) - f(R)}{2\kappa} - \frac{3H \dot{R} f''(R)}{\kappa} + 3 \frac{f(R) - Rf'(R)}{2\kappa} \right. \\ &\quad \left. + 3p + 3 \frac{\ddot{R} f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) + 2H \dot{R} f''(R)}{\kappa} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

que es la ecuación análoga a la ec. (A.18). La ec. (A.20) también se cumple en este formalismo.

---

# Apéndice B

## Datos y errores experimentales

---

### B.1. Ajustes de datos experimentales

Cuando realizamos algún experimento obtenemos: i) un conjunto  $\mathcal{D}_0$  de  $N$  datos que en general se conforma por  $n$ -ádas de números y donde la  $i$ -ésima  $n$ -áda contiene variables independientes  $\{x_i^s\}$ ;  $s = 1, \dots, k$ ,  $i = 1, \dots, N$ <sup>1</sup> y la correspondiente variable dependiente  $y_i$ , y ii) los errores asociados a esos datos. El fin de realizar un experimento es encontrar el mejor modelo teórico que describa al fenómeno observado, es decir, buscamos la función que depende de las variables independientes  $\{x^s\}$  y de un conjunto de parámetros  $\{a_j\}$ ;  $j = 1, \dots, M$  que mejor se ajuste a  $\mathcal{D}_0$ . Denotemos esa función por

$$f(\{x^s\} | \{a_j\}) . \tag{B.1}$$

Encontrar la mejor  $f$  equivale a encontrar los valores de los parámetros  $\{a_j\}$  que mejor ajusten a los datos. Pero algo es seguro al momento de ajustar un modelo teórico: éste nunca será exacto. Esto no quiere decir que el modelo que describe el fenómeno no sea el correcto, sino que siempre existe un grado de incertidumbre al momento de describir un fenómeno de la naturaleza y esto es debido a que los datos que se obtienen del experimento no son exactos, siempre existen errores asociados a ellos ya sea por los instrumentos o por el proceso de medición. No obstante podemos determinar el grado de precisión de nuestro modelo. Pero antes describamos de manera breve como se ajusta un modelo teórico a un conjunto de datos experimentales.

Al momento de realizar un ajuste escogemos o construimos una *función de mérito* que nos permita conocer la concordancia entre los datos y el modelo. Dependiendo del lenguaje estadístico que se maneje –frecuentista o Bayesiano– esta función tomará valores pequeños o grandes en un buen ajuste, respectivamente. Supongamos que los errores asociados a cada  $y_i$  siguen una distribución gaussiana y que se conoce la desviación estándar  $\sigma_i$  asociada a cada  $y_i$ . La función universalmente

---

<sup>1</sup>El superíndice  $s$  denota el número de variables independientes mientras que el subíndice  $i$  enumera los distintos valores que cada una de ellas toma en el experimento.

usada para este propósito es

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - f(x_i^1, \dots, x_i^k | a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right]^2, \quad (\text{B.2})$$

denominada *chi-cuadrada*. De aquí en adelante el conjunto  $\mathcal{D}_0$  está compuesto de parejas  $(x_i, y_i)$ , es decir, de una sola variable independiente, por lo que nuestra función de mérito es [53]

$$\chi^2(x_i, \{a_j\}) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - f(x_i | a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right]^2, \quad (\text{B.3})$$

donde hemos quitado el superíndice 1 para hacer más clara la notación.

Los parámetros que mejor ajustan al experimento realizado son aquellos que minimizan la función  $\chi^2$ . En otras palabras, hay que resolver el sistema de  $M$  ecuaciones, en general no-lineales

$$\sum_{i=0}^N \left[ \frac{y_i - f(x_i | a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i^2} \right] \left[ \frac{\partial f(x_i | a_1, \dots, a_M)}{\partial a_l} \right] = 0; \quad l = 1, \dots, M, \quad (\text{B.4})$$

respecto a los parámetros  $a_l$ . Denotemos al conjunto solución de parámetros como  $\mathcal{A}_0$ . Estos parámetros también tienen errores asociados los cuales podemos determinar de diversas formas. La forma de hacerlo en este trabajo se expone más adelante.

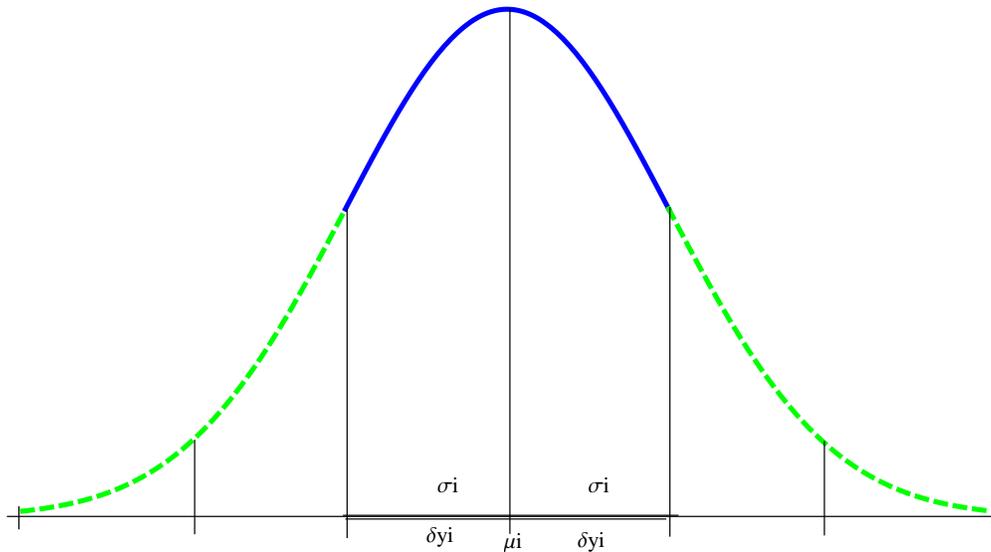


Figura B.1: Los errores asociados a las variables dependientes  $y_i$  siguen una distribución gaussiana. El error  $\delta y_i$  se toma como la desviación estándar  $\sigma_i$ .

Ahora, si se lleva a cabo un experimento y se reportan errores o incertidumbres asociadas lo que se hace casi siempre es reportar la desviación estándar de dicha medición. En nuestro caso el error de cada  $y_i$  en los datos es su desviación estándar como se muestra en la figura B.1.

La función  $\chi^2$  indica un buen ajuste si su valor es pequeño cuando se evalúa en el conjunto  $\mathcal{A}_0$ . Se espera que  $\chi^2 \sim \nu$  donde  $\nu = N - M$  se conoce como *grados de libertad*. Sin embargo, al momento de reportar un ajuste se usa otra función ligeramente distinta a la  $\chi^2$ . Esta función es

$$\chi_{red}^2 \equiv \frac{\chi^2}{\nu}, \quad (\text{B.5})$$

llamada *chi-cuadrada reducida* con lo que buen ajuste corresponde a  $\chi_{red}^2 \lesssim 1$ .

## B.2. Cálculo de errores

Para encontrar los errores asociados a cada uno de los parámetros calculados usaremos la regla  $\chi_{red}^2 + 1$  que consiste en graficar la función  $\chi_{red}^2$  como función de uno solo de los parámetros ajustados  $a_{i_0}$  del conjunto  $\mathcal{A}_0$  y la recta horizontal  $\chi_{red}^2(a_{i_0}) + 1$  como se ve en la figura B.2. Ya que la función  $\chi_{red}^2$  presenta un mínimo justo en  $a_{i_0}$ , la recta  $\chi_{red}^2(a_{i_0}) + 1$  corta a la función  $\chi_{red}^2$  en dos puntos distintos. La distancia entre el mínimo  $a_{i_0}$  y los puntos  $a_{-\sigma}$  y  $a_{+\sigma}$  de la figura B.2 representan los errores hacia la izquierda y derecha, respectivamente, del parámetro  $a_{i_0}$ . Los errores no necesariamente son iguales. Dentro del lenguaje estadístico se dice que este es un error a  $1\sigma$ .

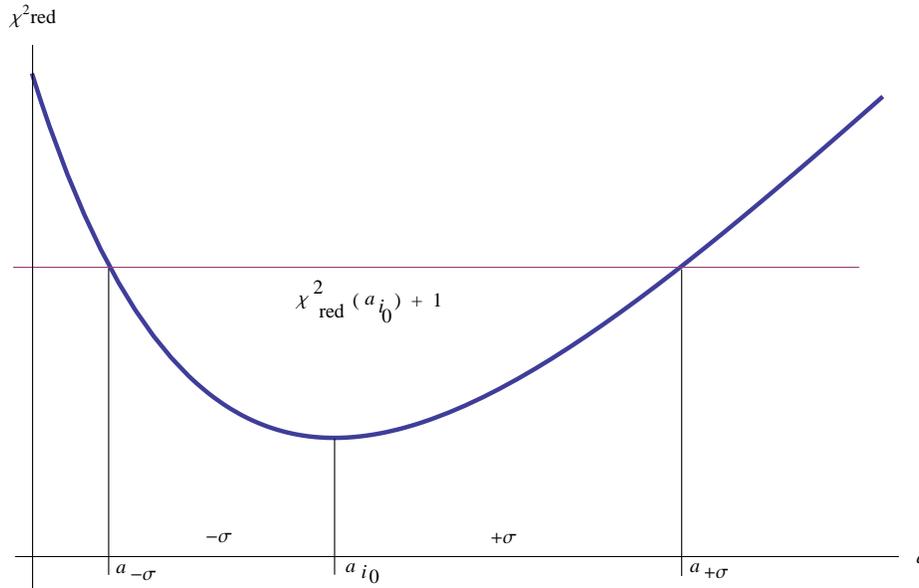


Figura B.2: La regla  $\chi_{red}^2(a_{i_0}) + 1$ . Cálculo de los errores de los parámetros ajustados a  $1\sigma$ . Los errores a la izquierda y a la derecha son, en general, distintos.

También se pueden calcular errores a  $2\sigma$  y  $3\sigma$ , e incluso para dos o más parámetros a la vez, para lo cual se define el nivel de confianza  $p$  que no es otra cosa que el porcentaje que se toma en el error. Se pueden usar diferentes niveles de confianza aunque los usados universalmente son 68.3%, 95.4% y 99.7%. La tabla B.1 muestra la dependencia de la cantidad  $\Delta\chi^2$  que se tiene que sumar a  $\chi_{red}^2(\{a_{m_0}\})$  para distintos niveles de confianza  $p$  y número de parámetros  $m$ .

$p \backslash m$	1	2	3	4	5	6
68.27 %	1.00	2.30	3.53	4.72	5.89	7.04
90 %	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.6
95.45 %	4.00	6.18	8.02	9.72	11.3	12.8
99 %	6.63	9.21	11.3	13.3	15.1	16.8
99.73 %	9.00	11.8	14.2	16.3	18.2	20.1
99.99 %	15.1	18.4	21.1	23.5	25.7	27.9

Tabla B.1:  $\Delta\chi^2$  como función del nivel de confianza  $p$  para diferente número de parámetros  $m$ . Tomada de [53].

# Bibliografía

---

- [1] Ver varios autores, en *An introduction to Standard Cosmology*, en *The Early Universe and Observational Cosmology*, LNP 646, Eds. N. Breton, J. L. Cervantes-Cota, y M. Salgado, Springer-Verlag, 2004.
- [2] J. L. Cervantes-Cota & S. De Lope Amigo. *Cosmología hoy: una revisión*. Revista Integración. Vol. 25. No. 2. 2007.
- [3] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley. 2004.
- [4] A. K. Raychaudhuri, S. Banerji, A. Banerjee. *General Relativity, Astrophysics, and Cosmology*. Springer-Verlag, 1992.
- [5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields. Course of Theoretical Physics. Volume 2*. Pergamos Press. 1987.
- [6] S. Perlmutter, *ApJ*, 517 (565), 1999.
- [7] A. G. Riess, et al. *Astrophys. J*, 116 (1009), 1998.
- [8] Filippenko A.V. *The Accelerating Universe and Dark Energy: Evidence from type Ia Supernovae* in *The Early Universe and Observational Cosmology*, LNP 646 Springer-Verlag, edited by N. Breton, J. L. Cervantes-Cota, M. Salgado. (191-221), 2004.
- [9] A. G. Riess, et al. 2009, *ApJ*, 699, 539-563.
- [10] S. Perlmutter, *Physics Today*, April 2003.
- [11] A. G. Riess et al. [Supernova Search Team Collaboration], *Astrophys. J.* 607, 665 (2004).
- [12] T. R. Choudhury and T. Padmanabhan, *Astron. Astrophys.* **429**, 807 (2005).
- [13] R. Jimenez, P. Thejll, U. Jorgensen, J. MacDonald and B. Pagel, *MNRAS*, 282, 926 (1996).
- [14] B. Hansen et al. *Astrophys. J.* 574, L155 (2002).

- 
- [15] H. Richer et al. *Astrophys. J.* 574, L151 (2002).
- [16] G. Hinshaw et al. 2010. *arXiv:1001.4744v1 [astro-ph.CO]*.
- [17] J. C. Mather , D. J. Fixsen, R. A. Shafer, C. Mosier and D. T. Wilkinson *ApJ*, 512 (511), 1999.
- [18] G. F. Smoot et al, *ApJ Lett.* 396 (L1), 1992.
- [19] Legacy Archive For Microwave Background Data Analysis (LAMBDA), NASA [http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/firas\\_image.cfm](http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/firas_image.cfm)
- [20] Legacy Archive For Microwave Background Data Analysis (LAMBDA), NASA [http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/dmr\\_image.cfm](http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/dmr_image.cfm)
- [21] P. de Bernardis et al, *Nature*, 404 (995), 2000.
- [22] S. Hanany et al. *ApJ*, 545 (L5) 2000.
- [23] MAXIMA-I webpage: <http://cosmology.berkeley.edu/group/cmb/>
- [24] WMAP website: <http://map.gsfc.nasa.gov/index.html>
- [25] D. H. Jones et. al, *MNRAS*, 355, 747, 2004.
- [26] J. A. Peacock et al, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 366 (189-207), 2006.
- [27] Catálogo 2dF : <http://msowww.anu.edu.au/2dFGRS/>
- [28] M. Tegmark et al, *Astrophys. J.* 606 (702-740), 2004.
- [29] Catálogo Sloan: <http://www.sdss.org/>
- [30] W. J. Percival et. al, *arXiv:0907.1660v3 [astro-ph.CO]*.
- [31] J. F. Navarro et. al, *ApJ*, 462, (563) 1996; *ApJ*, 490, (493) 1997.
- [32] V. Springel et. al, *Nature*, 435, (629), 2005.
- [33] E. Bianchi, C. Rovelli *arXiv:1002.3966v2 [astro-ph.CO]*.
- [34] T. P. Sotiriou and V. Faraoni. *Rev. Mod. Phys.* 81, 1287, 2009. *arXiv:0805.1762v3 [gr-qc]*.
- [35] A. Avilés Cervantes. Tesis: *Modificaciones al infrarrojo en Relatividad General*. UNAM. 2007.
- [36] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden, M.S. Turner. *Phys. Rev. D*70 (2004) 043528. *arXiv:astro-ph/0306438v2*.
- [37] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* 91, 99 (1980).

- 
- [38] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni and A. Troisi. *Int. J. Mod. Phys. D12*: 1969-1982, 2003. arXiv:astro-ph/0307018v1.
- [39] S. Capozziello, A. Stabile and A. Troisi. *Mod. Phys. Lett. A24*:659-665, 2009. arXiv:0901.0448v1 [gr-qc].
- [40] S. Capozziello, V. F. Cardone and A. Troisi. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 375*:1423-1440, 2007. arXiv:astro-ph/0603522v2.
- [41] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni and A. Troisi. *Phys. Lett. A 326*: 292-296, 2004. arXiv:gr-qc/0404114v1.
- [42] E. Fischbach, C. L. Talmadge. *The Search for Non-Newtonian Gravity*. Springer. 1999.
- [43] P. Salucci. *arXiv:1004.1190v1 [astro-ph.IM]*.
- [44] Y. Sofue and V. Rubin. *Rotation curves of Spiral Galaxies*. Annu. Rev. Astron. Astrophys. 2001. 39:137-74.
- [45] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press. Second Edition. 2008.
- [46] K. C. Freeman. *Astrophys. J.* 160, 811 (1970).
- [47] L. S. Sparke and J. S. Gallagher III. *Galaxies in the universe. An introduction*. Cambridge University Press. Second Edition. 2007.
- [48] M. Ross. *Introduction to cosmology*. John Wiley & Sons, Ltd. Third Edition. 2003.
- [49] A. Toomre, *ApJ.* 138, 395 (1963).
- [50] C. F. Martins and P. Salucci. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 381*: 1103-1108, 2007. arXiv:astro-ph/0703243v2.
- [51] R. Kuzio de Naray, S. S. McGaugh and W. J. G. de Bolk. *Astrophys. J.* 676:920, 2008.
- [52] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman; 2nd Printing edition. 1973.
- [53] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge Press. Third Edition. 2007.