UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

Facultad de Estudios Superiores Acatlan

TESIS
Matemáticas Aplicadas y Computación

Presenta
ANA LUISA BLANCAS ABAD

"SOLUCIÓN ALGEBRAICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES USANDO OPERADORES"

Asesor
Fis. Manuel Valadez Rodríguez

Octubre 2009

AGRADEZCO

Estoy aquí, frente a ustedes, para decirle y agradecerle a DIOS, por la vida y porque ha sido el soporte en espíritu, cuerpo y alma para alcanzar mi más grande sueño...

He, concluido un proyecto importante en mi vida, y no hay nada más satisfactorio que ver mi objetivo realizado. Siempre que se logra un proyecto, nos hacemos una pregunta:

¿Valió la pena? En mi caso, tengo la plena seguridad de que sí valió la pena, durante mi estancia en la Universidad he logrado desarrollar mi potencial y se que, soy capaz de afrontar por sí sola los retos más grandes y así alcanzar mis proyectos personales.

Quiero y debo agradecer a una persona que ha luchado junto conmigo, es una mujer triunfadora en todos los aspectos, una mujer de la cual me siento orgullosa, a la que le debo mi vida entera, que día con día me a apoyado incondicionalmente, y a la que amo y quiero con todo mi corazón, ella es mi MADRE, la Sra. Isabel Abad Montes de Oca.

Otra persona importante es mi hermana la Sra. Margarita Blancas Abad, la cual fue una segunda madre para mí, a quien yo quiero y respeto mucho, le doy gracias porque ella contribuyo en mi formación como persona y profesionista, ella fue clave importante para tener este logro, quiero mencionar que gracias a sus consejos y a los de mi madre, durante toda mi vida soy lo que soy, GRACIAS MAR.

Durante mi preparación, me encontré con personas muy relevantes y significativas, una de esas personas es el Prof. Manuel Valadez Rodríguez, a quien yo respeto y admiró y le agradezco por todo el apoyo que me brindo en la realización de este trabajo y sobre todo por todo el apoyo moral, en toda la extensión, por su gran calidad humana, por su capacidad académica de corazón profesor, GRACIAS.

Se que hoy en día, muchos jóvenes están ávidos y deseosos de poder estudiar una carrera profesional, y no tienen una familia o un apoyo para poder lograrlo...por eso, quiero decirle a mi gran tesoro que es mi madre y mi hermana, ¡gracias!

Con todo mi corazón, que este día tan importante mamá, hermana, familiares y amigos, gracias por acompañarme, gracias por todo lo que me han dado

¡Gracias!

INDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales aparecen en modelos matemáticos que tratan de describir situaciones de la vida real. Así, muchas leyes naturales pueden ser traducidas al lenguaje matemático mediante ecuaciones que envuelven derivadas, como en física, donde la velocidad y la aceleración aparecen como derivadas; en biología, la derivada se utiliza como una razón de crecimiento de poblaciones; en química, como rapidez de reacciones, entre otros más.

Esto nos lleva a la definición de ***ecuación diferencial*** la cual es una expresión que relaciona, de manera no trivial, una función desconocida con una o más derivadas de ésta, con respecto a una o más variables independientes.

Siendo así en esté trabajo se presentan los elementos básicos relacionados con las Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Constantes, durante el desarrollo subsecuente se requerirá de ciertos conceptos concernientes a la Teoría de Polinomios, principalmente aquellos que tienen que ver con la Factorización única.

Así mismo se expone un panorama general de los Operadores Lineales y se analiza el comportamiento de estos espacios vectoriales de dimensión finita y de dimensión infinita.

Usando los recursos que se expusieron en todo lo anterior, se desarrolla un método algebraico general para resolver Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Constantes Homogéneas y algunos tipos de Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Constantes No Homogéneas en términos puramente algebraicos.

OBJETIVO

Mediante procedimientos algebraicos, determinar la solución general de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Capítulo 1

ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES.

1.1 **Ecuaciones Diferenciales en General.**

Empezaremos esta sección con algunos conceptos importantes que corresponden a los fundamentos de la teoría de ecuaciones diferenciales; es decir, los elementos que se presentan aquí se refieren a los conocimientos que posee todo lector que haya llevado un curso introductorio en la materia. Como se observará conforme su avance en el trabajo, los conceptos de *ecuaciones diferenciales: tipos de ecuaciones y solución de éstas* nos ayudarán a ver de una forma más clara y general las ventajas que ofrecen dichas herramientas en la solución de cierto tipo de problemas.

Definición. Una ***ecuación diferencial*** es una expresión que relaciona, de manera no trivial, una función desconocida con una o más derivadas de ésta, con respecto a una o más variables independientes. Si la función desconocida depende de una sola variable la ecuación diferencial se llama ***ordinaria***, si depende de más de una variable, se llama ***ecuación diferencial parcial.*** Así, una ecuación diferencial ordinaria es una relación de la forma $F(x, y, \ldots, y^{n}) = 0$ la cual supondremos que siempre puede ser llevada a una expresión como $y^{(n)} = f(x, y, \ldots\ldots y^{(n-1)})$.

Son ejemplos de ecuaciones diferenciales los siguientes:

$$(\theta^2 + 1)\cos r dr + 2\theta sen r d\theta = 0$$

$$(x^2 e^x + 2xe^x y + e^x y^2)dx + (2x\ e^x + 2xe^x y - 2e^x)dy = 0$$

$$senxdx + (y^2 + 2y)dy = 0$$

$$xsenydx + (x^2 + 1)\cos ydy = 0$$

$$y'' + xy' + y = senx$$

$$(x^2 + 3)y'' + sen(x)y' + 6y = x\cos(x)$$

$$x\ y''^{2} + y' = \cos(xy)$$

Se le llama ***orden*** de la ecuación diferencial $F(x, y, \ldots, y^n) = 0$ al orden de la mayor de las derivadas que aparecen en dicha ecuación; en este caso n. Se dice que la ecuación diferencial es ***lineal*** si F depende linealmente de las variables $y, y', \ldots, y^{(n)}$ en caso contrario la ecuación diferencial se llama ***no lineal*** y, finalmente, se dice que la ecuación es ***homogénea*** si no aparece sumada una función que dependa únicamente de x.

Haciendo referencia a los ejemplos anteriores tenemos lo siguiente:

La ecuación diferencial

$$(x^2 + 3y)y'' + sen(x)y' + 6y = xcos(x),$$

es de segundo orden, lineal y no homogénea, mientras que la igualdad

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + 5y = 0,$$

representa una ecuación diferencial de tercer orden, lineal y homogénea. Por otra parte

$$x(y'')^2 + y' = cos(xy),$$

es una ecuación de segundo orden, no lineal y no homogénea.

Las potencias de la función y sus derivadas nada tienen que ver con el orden de una ecuación, por ejemplo,

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)^{1/3} + y = e^x,$$

es una ecuación diferencial de tercer orden, además de ser una ecuación no lineal y no homogénea.

Algunos casos sencillos de aplicaciones de ecuaciones diferenciales son los siguientes:

La expresión

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2p}{\sqrt{n}} y^{3/2}(1-y)^{3/2}$$ [1]

es una ecuación diferencial que aparece en sicología y representa un modelo de aprendizaje. La variable y está relacionada con el nivel de habilidad del individuo como una función del tiempo t. Las constantes p y n dependen del individuo considerado y de la naturaleza de la tarea que se esté aprendiendo.

Un caso más lo representa la ecuación

---

[1] *Zill, Dennis G*. **Ecuaciones diferenciales con aplicaciones**. 3ra. Edición 1994. Grupo Ed. Iberoamérica.

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t),$$ [2]

que surge en el estudio de circuitos eléctricos que consisten de un inductor L, un resistor R y un capacitor C, al cual se aplica una fuerza electromotriz $E(t)$.

En el caso de ecuaciones diferenciales parciales, se puede citar la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

que se conoce como la ecuación de calor unidimensional y se aplica en problemas concernientes con flujos de energía calorífica unidimensionales.

Como un último ejemplo citamos la sencilla ecuación

$$y'=cy,$$

que se aplica en problemas de crecimiento de población, y de decaimiento radiactivo.

1.2 Ecuaciones con Coeficientes Constantes.

En la sección anterior vimos algunos tipos particulares de ecuaciones diferenciales. Nos enfocaremos en ésta a la discusión de una clase muy importante de ecuaciones diferenciales cuya teoría es rica y de gran alcance. Trataremos específicamente con las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Empezamos con la discusión de algunos aspectos teóricos referentes a las ecuaciones lineales de segundo orden en general, y veremos cómo esta teoría admite un tratamiento simple basado en unos pocos principios elementales.

La ecuación diferencial lineal de segundo orden más general, es de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=R(x)$$

o, más brevemente,

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x), \qquad (1)$$

donde se sobrentiende que $P(x), Q(x)$ y $R(x)$ son funciones de x solamente (quizá constantes). En muchos casos no se pierde generalidad si se toma el coeficiente de y'' como 1. Las ecuaciones de esta clase son de vital importancia sobre todo en la física.

[2] *Zill, Dennis G*. **Ecuaciones diferenciales con aplicaciones**. 3ra. Edición 1994. Grupo Ed. Iberoamérica.

Hay que decir que la mayoría de las ideas y procedimientos que discutiremos son generalizables a las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, sin cambios sustanciales en los principios básicos, aunque con una notable complicación en los detalles. Al restringir nuestra atención a las de segundo orden conseguiremos cierta sencillez sin distorsionar las nociones implicadas, y todavía tendremos la suficiente generalidad como para tratar todas las ecuaciones lineales de interés en matemáticas y física. Dado que por lo general no es posible intuir una solución explícita de (1) por simple inspección, lo primero que hemos de hacer es asegurarnos de que esa ecuación tiene realmente alguna solución. A continuación se menciona un teorema de existencia y unicidad que nos será de gran ayuda para poder entender esto de una manera más clara.

Si a y b son números reales tales que $a < b$, el símbolo $[a, b]$ denota el intervalo que consta de todos los números reales x que satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq b$. Este intervalo se llama cerrado. El intervalo abierto, resultante de excluir esos dos puntos extremos, se denota por (a, b) y se define mediante las desigualdades $a < x < b$.

Teorema 1. Sean $P(x), Q(x)$ y $R(x)$ funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$. Si x_0 es cualquier punto interior de $[a, b]$ y si $y_0, y_0^{\prime}$ son números arbitrarios, la ecuación (1) tiene una y sólo una solución y(x) sobre el intervalo completo tal que $y(x_0) = y_0$ e $y^{\prime}(x_0) = y_0^{\prime}$.

Así pues, bajo estas hipótesis, en cualquier punto x_0 de [a, b] podemos prescribir los valores de *y(x)* y *y´(x)*, y existirá una solución que tome esos valores en el punto dado; o sea, (1) tiene una única solución en que pasa por un punto especificado (x_0, y_0) con pendiente prefijada $y_0^{\prime}$. En nuestra discusión general a lo largo del resto de este capítulo daremos por supuesto, sin decirlo ya explícitamente, que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.

Empecemos tratando de resolver el problema de valores iníciales

$$y'' + y = 0,\ y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$

Suponemos conocidas dos soluciones $y_1 = sen\ x,\ y_2 = \cos\ x,$ de la ecuación diferencial dada, y que $y = c_1\, sen\, x + c_2\, cos\ x$ es también una solución de dicha ecuación, para constantes cuales quiera c_1 y c_2. De las condiciones iníciales tenemos que

$$y(0) = c_1\, sen\ (0) + c_2\ cos\ (0) = c_2 = 1 \text{ y } y'(0) = c_1 \cos\ (0) - c_2\, \text{sen}\ (0) = c_1 = 0,$$

de manera que la solución del problema de valores iníciales es *y = sen x,* y según el teorema 1, está es la única función que resuelve la ecuación diferencial dada y satisface las condiciones iníciales $y(0) = 1$ y $y_0^{\prime}(0) = 0$.

En contraste con ello, el problema de hallar una solución de (1) que satisfaga condiciones de la forma $y(x_0) = y_0$, e $y(x_1) = y_1$ donde x_0, x_1 son puntos distintos del intervalo, no queda cubierto por el teorema 1. Problemas de ese tipo se llaman problemas de contorno. El término R(x) en la ecuación (1) está aislado de los otros y escrito a la derecha porque no contiene a la variable dependiente, ni derivadas de ésta. Si *R(x)* es idénticamente cero, la ecuación (1) se reduce a la ecuación homogénea

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \qquad (2)$$

Si y_g es la solución general de la ecuación reducida (2) y si y_p es una solución particular de la ecuación completa (l), entonces $y_g + y_p$ es la solución general de (1).

De acuerdo con lo anterior, debe tenerse en cuenta que la ecuación homogénea (2) tiene siempre al menos una solución: la trivial $y(x) = 0$. El hecho fundamental sobre la estructura de las soluciones de (2) viene enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 2. Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación (2), entonces

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad (3)$$

es también solución de ésta, para todo par de constantes c_1 y c_2.

La prueba es inmediata ya que

$$c_1y_1 + c_2y_2\ '' + P(x)\ c_1y_1 + c_2y_2\ ' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) =$$

$$(c_1y_1'' + c_2y_2'') + P(x)(c_1y_1' + c_2y_2')Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) =$$

$$c_1\left(y_1'' + Py_1' + Qy_1\right) + c_2\left(y_2'' + Py_2' + Qy_2\right) = 0, \qquad (4)$$

donde los factores que acompañan a c_1 y c_2 son cero porque, por hipótesis, y_1, y y_2, son soluciones de (2). Por analogía con el álgebra vectorial elemental, la solución (3) se dice que es una combinación lineal de las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$. Si usamos esta terminología, el teorema 2 se puede reformular así: cualquier combinación lineal de dos soluciones de la ecuación homogénea (2) es también solución de ésta. Supongamos que por un medio u otro nos la hemos arreglado para conocer dos soluciones de (2). Entonces, este teorema nos da otra solución que contiene dos constantes arbitrarias, y que puede ser, por tanto, la solución general de (2). Existe una dificultad: si y_1 o y_2, son múltiplos una de la otra, digamos $y_1 = ky_2$, entonces

$$c_1y_1 + c_2y_2 = c_1ky_2 + c_2y_2 = (c_1k + c_2)y_2 = cy_2,$$

y sólo hay una constante presente. Sobre esta base tenemos suficiente motivo para esperar que si ninguna de las soluciones y_1 y y_2 es múltiplo de la otra, entonces

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

será la solución general de (2). Si las funciones y_1 y y_2 son tales que no existe una constante c que satisfaga la igualdad $y_2 = cy_1$, se dice que y_1 y y_2 son linealmente independientes, de no ser así, se dice que y_1 y y_2 son linealmente dependientes.

En ocasiones, la forma especial de una ecuación lineal nos permite hallar soluciones particulares sencillas a simple vista o experimentando con potencias, exponenciales o funciones trigonométricas, por ejemplo, en la ecuación

$$y'' + y' = 0,$$

se observa a simple vista que $y_1 = 1$ y $y_2 = e^{-x}$ son soluciones. Es obvio que no son múltiplo una de otra, así que (dando por hecho el resultado enunciado y todavía no demostrado) concluimos que

$$y = c_1 + c_2e^{-x},$$

es la solución general, de la ecuación propuesta.

Otro caso que admite cierto análisis en cuanto a la forma de sus posibles soluciones es el de la ecuación

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Puesto que al derivar una potencia de *x* su exponente disminuye en una unidad, la forma de esta ecuación diferencial sugiere buscar posibles soluciones del tipo $y = x^n$. Sustituyendo esto en la ecuación y dividiendo por el factor común x^n llegamos a la ecuación cuadrática $n(n-1) + 2n - 2 = 0$, o sea, $n^2 + n - 2 = 0$. Sus raíces son $n = 1, -2$, luego $y_1 = x,\ y_2 = -x^{-2}$ son soluciones de la ecuación dada y

$$y = c_1x + c_2x^{-2},$$

es su solución general sobre cualquier intervalo que no contenga al origen. Interesa hacer notar que una buena parte de la teoría de las ecuaciones lineales reposa en las propiedades fundamentales recogidas en los teoremas 1 y 2.

Ya tenemos la posibilidad de discutir con relativa profundidad la ecuación homogénea (2) en el caso especial en que P y Q sean constantes reales, digamos p y q en cuyo caso dicha ecuación queda como

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (5)$$

Nuestro punto de partida es la propiedad de la función exponencial e^{mx} de que sus derivadas son todos múltiplos de la propia función, lo que nos induce a considerar:

$$y = e^{mx}, \qquad (6)$$

como una posible solución de (5) si la constante *m* se escoge adecuadamente. Como y $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$, sustituyendo en (5) vemos que

$$(m^2 + pm + q)e^{mx} = 0 \qquad (7)$$

y, puesto que e^{mx} nunca se anula, (7) se cumple si y sólo si *m* satisface la ***ecuación auxiliar***

$$m^2 + pm + q = 0. \qquad (8)$$

Las dos raíces m_1 y m_2 de esta ecuación, o sea, los valores de *m* para los que (6) es solución de (5)**,** vienen dadas por la fórmula cuadrática:

$$m_1, m_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \ . \qquad (9)$$

Para profundizar más, hemos de separar varias situaciones diferentes subyacentes en (9).

Raíces reales distintas. Es claro que las raíces m_1 y m_2**,** son reales y distintas si y sólo si $p^2 - 4q > 0$. En este caso obtenemos las soluciones

$$e^{m_1 x} \quad \text{y} \quad e^{m_2 x}.$$

Como el cociente

$$\frac{e^{m_1 x}}{e^{m_2 x}} = e^{(m_1 - m_2)x},$$

no es constante, esas soluciones son linealmente independientes y por tanto

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}, \qquad (10)$$

es la solución general de (6).

Supóngase ahora que $p^2 - 4q < 0$. Puesto que en la ecuación (5) las constantes p y q son reales, si *m* es una raíz de la ecuación auxiliar (8), $\overline{m}$ es también una raíz de ésta, de manera que, usando la formula de Euler,

$$e^{i\theta} = cos\, \theta + i\ sen\, \theta, \qquad (11)$$

las dos soluciones son

$$e^{m_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\ sen\ bx) \qquad (12)$$

y

$$e^{m_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\ sen\ bx), \qquad (13)$$

donde $m_1 = a - ib$ y $m_2 = a - ib = \overline{m}_1$.

Ya que estamos interesados sólo en soluciones que sean funciones con valores reales, podemos sumar (12) y (13) y dividir por *2*, o restar y dividir por *2i*, obteniendo así:

$$e^{ax}\, cos\, bx \text{ y } e^{ax}\, sen\, bx. \qquad (14)$$

Estas soluciones son linealmente independientes, de modo que la solución general de (6) queda como

$$y = (c_1 \cos bx + c_2 sen\, bx)e^{ax} \qquad (15)$$

Cabe analizar esto desde otro punto de vista. Una función compleja $w(x) = u(x) + iv(x)$ satisface (5), donde p y q son números reales, si y sólo si $u(x)$ y $v(x)$ satisfacen (5) por separado. De este modo, una solución compleja siempre contiene dos soluciones reales, y (12) proporciona las dos soluciones (14) de un golpe.

Raíces reales iguales. Es evidente que las raíces m_1 y m_2, son reales e iguales si y sólo si $p^2 - 4q = 0$, en cuyo caso sólo obtenemos una solución $y_1 = e^{mx}$ con $m = -\frac{p}{2}$, para la ecuación (5).

No es fácil dar con otra función y_2 tal que y_1 y y_2 resulten linealmente independientes. Por ejemplo (más adelante quedará justificado esto), aceptemos como segunda solución la función $y_2 = xe^{mx}$. Se puede verificar fácilmente que la pareja y_1, y_2, son soluciones independientes de (5) y, por lo tanto,

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}, \qquad (16)$$

es la solución general de dicha ecuación.

En resumen, tenemos tres formas diferentes, dadas por (10), (15) y (16), para la solución general de la ecuación homogénea (5) con coeficientes constantes, según sean las raíces m_1 y m_2, de la ecuación auxiliar (8). Es claro que la naturaleza cualitativa de esta solución general queda completamente caracterizada por los signos y magnitudes de los coeficientes p y q, y que puede variar drásticamente si se modifican esos valores numéricos. Esto es muy importante para los físicos que analizan sistemas mecánicos o circuitos eléctricos descritos por ecuaciones diferenciales de la forma (5). Por ejemplo, si $p^2 - 4q < 0$, la gráfica de la solución es una onda cuya amplitud crece o decrece exponencialmente según que p sea negativo o positivo. Esta afirmación, y otras del mismo calibre, son consecuencias inmediatas de la discusión precedente y reciben un tratamiento exhaustivo en los libros que presentan las aplicaciones físicas de las ecuaciones diferenciales. Las ideas de esta sección se deben fundamentalmente a Euler.

Capítulo 2

POLINOMIOS.

2.1 El Algoritmo Euclidiano.

Está sección la empezaremos con unas definiciones importantes que ayudarán a la comprensión de lo que se trata de explicar posteriormente.

Definición. Sea F un campo. Un *polinomio* sobre F se define como una función $f: F \to F$ de la forma

$$f\ \ t\ = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son elementos de F y son llamados los *coeficientes del polinomio.* Si n es el máximo entero para el cual $a_n \neq 0,$ se dice que f *tiene grado* n y se escribe $grdf = n.$

En esté caso, al coeficiente a_n se le conoce como *coeficiente inicial* y a a_0 se le da el nombre de *término constante* o *término independiente.* Si el *coeficiente inicial* de f es igual a 1, decimos que f es un *polinomio mónico*. Y finalmente, se empleará el símbolo $F[t]$ para denotar el conjunto de todos los polinomios sobre el campo F **.**

Definición. Sea F un campo y sean f y g elementos de $F[t]$. Si c es un escalar, se definen las operaciones de *suma de f y g* , denotada por $f + g$ *producto de f y g* , escrito como fg y *producto de c por f*, representado por cf, mediante las expresiones

$$(f+g)(t) = f(t) + (g)t$$
$$(fg)(t) = f(t)g(t)$$
$$(cf)(t) = cf(t).$$

Por lo tanto, queda claro que $f + g, fg$ y cf vuelven a ser elementos del conjunto $F[t]$ de hecho, $F[t]$ junto con la primera y tercera operaciones citadas, tiene estructura de espacio vectorial sobre el campo F. Entonces, $F[t]$ no es de dimensión finita.

Observación: si $P_{[n]}$ es un subconjunto de $F[t]$, entonces $P_{[n]} = \{P(x) \middle| grado\ f(x) = n\}$ entonces la dimensión es finita.

Cuando se propone un elemento genérico de $F[t]$; digamos f, y se representa éste en la forma

$$f\quad t\quad = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

es usual considerar $a_j = 0$, cuando j es un entero distinto de $0, 1, \dots, n$. Este convenio permite un manejo más simple cuando se tiene que operar con sumas o productos de polinomios.

Después de tener en claro estas definiciones podemos entrar al objetivo de esta sección.

Teorema 1. Sean f y g elementos de $F[t]$ y supóngase que $grd\, f \geq 0$. Entonces, existen elementos únicos q y r en $F[t]$ tales que

$$f = qg + r$$

y $grd\, f < grd\ g$.

Demostración. Supóngase que $grd\ f = m$ y $grd\ g = n$, y sean

$$f(t) \sum_{j=0}^{m} a_j t^j, \quad g(t) = \sum_{j=0}^{n} b_k t^k,$$

Si $m < n$, se toma $q = 0$ y $r = f$ y el teorema está probado. Supóngase que $m \geq n$ y sea f_1 el polinomio definido por

$$f_1(t) = f(t) - a_m b_n^{-1} t^{m-n} g(t) = \sum_{j=0}^{m_1} a_j^{(1)} t^j.$$

Entonces el polinomio f queda como

$$f(t) = a_m b_n^{-1} t^{m-n} g(t) + f_1(t).$$

Si, $m_1 < n$, se toma $q(t) = a_m b_n^{-1} t^{m-n}$ y $r(t) = f_1(t)$, y se llega a la expresión $f = qg + r$, con $grd\, r < grd\ g$ .Si $m_1 \geq n$, se define un nuevo polinomio f_2 mediante la expresión

$$f_2(t) = f_1(t) - a_{m_1}^{(1)} b_n^{-1} t^{m_1 - n} g(t) = \sum_{j=0}^{m_2} a_j^{(2)} t^j$$

quedando entonces

$$f_1(t) = a_{m_1}^{(1)} b_n^{-1} t^{m_1 - n} g(t) + f_2(t),$$

y por tanto,

$$f(t) = b_n^{-1}\left(a_m t^{m-n} + a_{m_1}^{(1)} t^{m_1 - n}\right) g(t) + f_2(t).$$

De nuevo, si $m_2 < n$, se toman $q(t) = b_n^{-1}\left(a_m t^{m-n} + a_{m_1}^{(1)} t^{m_1-n}\right)$ y $r(t) = f_1(t)$ llegándose a la expresión deseada $f = qg + r$, con $grd\, r < grd\, g$. Si $m_2 \geq n$ se procede de la misma forma definiendo un polinomio f_3 y se continúa de esta manera hasta llegar a un f_j tal que $grd\, f_j < n$. Es claro que a lo más en $m - n + 1$ pasos se llega al resultado deseado. ■

Corolario. Sea f un polinomio no nulo de $F[t]$ y sea a un elemento de F tal que $f(a) = 0$. Entonces, existe un polinomio q de $F[t]$ tal que $f(t) = (t - a)q(t)$.

Demostración. Por el teorema sabemos que existen dos elementos q y r en $F[t]$ tales que $f(t) = (t - a)q(t) + r(t)$, donde $grd\, r < 1$, y de aquí que r debe ser un polinomio constante. Ahora, puesto que $f(a) = 0$ y $f(a) = (a - a)q(a) + r(a)$, se deduce que $r = 0$.■

Corolario. Sea f un polinomio de grado n en $F[t]$**.** Entonces**,** f tiene a lo más n en raíces en F**.**

Demostración. Supóngase que $a_1, \ldots, a_m$ son raíces de f en F y que $m > n$. Por el corolario anterior podemos escribir

$$f\ \ t\ \ =\ \ t - a_1\ \ \ t - a_2\ \ \ldots\ \ t - a_m\ \ g\ \ t\ \ ,$$

para algún elemento g de $F[t]$. Pero entonces $grd\, f \geq m$, lo cual es una contradicción. Luego, debemos tener $m \leq n$. ■

2.2 Divisibilidad. Máximo Común Divisor.

Definición. Sea F un campo. Un *ideal de* $F[t]$ es un subconjunto no vacío J de $F[t]$ con las siguientes propiedades:

(a) Si f y g están en J, entonces $f + g$ está en J.
(b) Si f pertenece a J y si g es cualquier elemento de $F[t]$ entonces gf está en J.

A tal conjunto J se le denomina también *ideal de polinomios* o simplemente *ideal*.

Definición. Si F es un campo y J es un ideal de $F[t]$, a un conjunto de polinomios $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de $F[t]$ se le denomina conjunto de generadores de J, si todo elemento g de J

se puede escribir en la forma $g = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n$, para ciertos polinomios $h_1, \dots, h_n$ de $F[t]$. Se dice que los f_k generan el ideal J.

De la definición se deduce que cada f_k es un elemento de J ya que

$$f_k = 0f_1 + 0f_2 + \cdots + 1f_k + \cdots + 0f_n.$$

Definición. Al ideal de polinomios $F[t]$ se le conoce como *ideal unitario.*

Teorema 2. Sea F un campo y sea J un ideal de $F[t]$ entonces existe un polinomio g que es un generador de J.

Demostración. Si J es el ideal nulo se elige $g = 0$ y el teorema está probado. Supóngase que $J \neq \{0\}$ y sea g un elemento de J que no es el polinomio nulo y que es de grado mínimo. Si f es cualquier elemento de J, por el teorema 1 tenemos que existen polinomios únicos q y r tales que $f = qg + r$ y $grd\, r < grd\, g$. Ahora $r = f - qg$ de manera que, de la definición de ideal tenemos que r pertenece a J y dado g que es de grado mínimo, debemos tener $r = 0$, quedando entonces $f = qg$. Luego, g es un generador de J.■

Corolario. Sea J un ideal no nulo de $F[t]$ y sea g_1 un generador de J. Si g_2 es otro generador de J, entonces, $grd\ g_2 = grd\ g_1$; es decir $g_2 = cg_1$, para algún elemento c de F.

Demostración. Puesto que g_1 es un generador de J y g_2 pertenece a J tenemos que existe un elemento q de $F[t]$ tal que $g_2 = qg_1$, y de aquí que $g_2 = grd\, q + grd\, g_1$, quedando entonces que $grd\, g_1 \leq grd\, g_2$ Invirtiendo los papeles de g_1 y g_2 de se llega que $grd\ g_2 \leq grd\ g_1$; o bien, que $g_2 = cg_1$, para alguna constante c. ■

Corolario. Sea J un ideal no nulo de $F[t]$ entonces, existe un generador g de J que es un polinomio mónico.

Demostración. Sea g_1 un generador de J y supóngase que $grd\ g_1 = n$. Si g_1 está dado por

$$g_1(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Por hipótesis tenemos que $a_n \neq 0$, de manera que podemos definir un polinomio g mediante la expresión $g = a_n^{-1} g_1$. Obviamente g es un generador de J y es un polinomio mónico.■

Definición. Sean f y g polinomios no nulos de $F[t]$. Se dice que g divide a f o que f *es* divisible por g, y se escribe g / f, si existe un polinomio q tal que $f = qg$. Si $f_1, \dots f_n$ son elementos no nulos de $F[t]$ un polinomio g se llama *máximo común divisor* de $f_1, \dots f_n$ si g divide a cada f_j y si h es otro polinomio que divide a cada f_j, entonces, h divide a g.

Teorema 3. Sea F un campo y sean $f_1,\ldots f_n$ elementos no nulos $F[t]$. Sea g un generador del ideal J generado por $f_1,\ldots f_n$, entonces, g es un *máximo común divisor* de $f_1,\ldots f_n$.

Demostración. Se ha señalado que cada f_i pertenece a J, por tanto, existen n elementos $q_1,\ldots q_n$ en $F\ t$ tales que para cada $j = 1,\ldots n.$, $f_j = q_j g$. De aquí que g divide a cada f_i Por otra parte, puesto que g pertenece al ideal generado por los f_i, tenemos que

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i f_i, \qquad (1)$$

para algunos polinomios $g_1, \ldots, g_n$ de $F[t]$. Si h es otro polinomio que divide a cada f_i entonces, existen elementos $q_1',\ldots,q_n'$ de $F\ t$ tales que, para $i = 1,\ldots,n.$ $f_i = q_i' h$, quedando de (1) que

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i f_i = \sum_{i=1}^{n} g_i(q_i' h) = \sum_{i=1}^{n} (g_i q_i')h = h\sum_{i=1}^{n} g_i q_i'.$$

Luego, h divide a g y queda probado el teorema.■

De lo anterior se hace evidente que el máximo común divisor de un conjunto de polinomios está determinado hasta un factor constante no nulo. Si se selecciona un máximo común divisor mónico, entonces, queda determinado de manera única.

2.3 Factorización Única.

Definición. Sea F un campo y sea p un elemento de $F[t]$. Se dice que p es irreducible sobre F si $grd\ p \geq 1$ y si dada una factorización $p = fg$ con f y g en $F[t]$ entonces $grd\ f = 0$ o $grd\ g = 0$.

Lema. Sea F un campo y sea p un elemento de $F[t]$, irreducible sobre F. Sean f y g polinomios de $F[t]$ y supóngase que p divide al producto fg. Entonces, p divide a f o p divide a g.

Demostración. De una manera clara, el lema anterior establece que p divide al menos a uno de los polinomios f y g. Si suponemos que p no divide a f, entonces, el máximo común divisor de f y p es el polinomio constante 1. Y como observamos en el teorema 3, dicho polinomio es el generador del ideal generado por f y p, por lo tanto, existen elementos h_1 y h_2 en $F[t]$ tales que

$$1 = h_1 f + h_2 p.$$

Multiplicando esta igualad por g y tomando en cuenta que $fg = qp$ para algún q en $F[t]$ nos da como resultado

$$g = h_1 fg + h_2 pg = (h_1 q + h_2 g)p,$$

y de aquí que p divide a g. De una forma clara y razonable podemos observar que el método empleado aquí es aplicable tanto a f como a g. Luego, p divide al menos a uno de los polinomios f y g, y, por lo tanto, el lema queda probado.■

Teorema 4. Sea F un campo y sea f un elemento de $F[t]$ con $grd\, f \geq 1$. *Entonces, existen polinomios irreducibles* $p_1, p_2, ..., p_m$ *en* $F[t]$ *tales que*

$$f = p_1 p_2 ... p_{m.}$$

Los polinomios p_j están determinados de manera única, a excepción de reordenamientos y de factores constantes no nulos.

Demostración. Sea f un elemento de $F[t]$ con $grd\, f \geq 1$. Si f es irreducible sobre F**,** el problema esta resuelto. Si no lo es, entonces, existen polinomios g y h en $F[t]$ tales que $f = gh$ y $grd\, g < grd\, f$ y $grd\, h < grd\, f$. Si g y h son irreducibles dicho problema queda resuelto, pero si éste no es el caso, se procede con g y h como se hizo con f. Es claro que el proceso no puede continuar de manera indefinida. Por lo tanto se obtiene una factorización para f en polinomios irreducibles $p_1, p_2, ..., p_m$.

Se demuestra ahora la unicidad. Supóngase que $q_1, q_2, ..., q_s$ son también polinomios irreducibles sobre F tales que $f = q_1 q_2 ... q_s$. Se tiene entonces que

$$p_1 p_2 ... p_m = q_1 q_2 ... q_s. \qquad (2)$$

Recordando lo que dice el lema anterior, p_1 divide a algún q_i $i = 1, ..., s$. Supóngase que los q_j se han ordenado de manera tal que p_1 divide a q_1, p_2 divide a q_2, etc. Entonces existe un factor constante c_1 tal que $p_1 = c_1 q_1$. Y cancelando el polinomio q_1 en (2) nos queda como resultado

$$c_1 p_2 p_3 ... p_m = q_2 q_3 ... q_s.$$

Si se continúa de esta forma y tomando en cuenta que tanto los p_i como los q_j son irreducibles, se llega que $m=s$ y esto demuestra que salvo factores constantes y salvo reordenamientos los p_i son únicos. ■

Corolario. Sea F un campo y sea f un elemento de $F\ t$ con $grd\, f \geq 1$. Entonces, f tiene una factorización $f = cp_1 p_2 ... p_m$ donde los p_i son polinomios mónicos irreducibles sobre F determinados de manera única, a excepción de permutaciones.

Corolario. Sea f un elemento de $C\ t$ de grado mayor o igual que 1. Entonces, f tiene una factorización de la forma $f = cp_1 p_2 ... p_m$ donde para $k=1,...,m$ $p_k\ t\ = t - a_k$, siendo los a_j y c números complejos. Nuevamente, los factores p_k están determinados de manera única salvo permutaciones.

Demostración. Tomando en cuenta que en $C\ t$ todo polinomio irreducible es de grado 1, este corolario resulta ser una extensión del anterior. ■

Definición. Sea F un campo y sea f un elemento de $F\ t$ de grado mayor o igual que 1. Supóngase que en la factorización de f aparecen k polinomios mónicos irreducibles distintos $p_1, p_2, ..., p_k$. Entonces, f se puede expresar como

$$f = cp_1^{i_1} p_2^{i_2} ... p_k^{i_k}, \qquad (3)$$

donde $i_1, i_2, ..., i_k$ son enteros positivos que están determinados de forma única por $p_1, p_2, ..., p_k$. Se dice que la expresión (3) es una *factorización normalizada para* f.

Por ejemplo, todo polinomio mónico f en $C\ t$ tiene una factorización normalizada de la forma

$$f(t) = (t - a_1)^{i_1} (t - a_2)^{i_2}, \dots, (t - a_k)^{i_k}.$$

Capítulo 3

OPERADORES LINEALES.

3.1 Representación Matricial de Operadores.

Definición. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el campo F. Una transformación lineal de V en W es una función T de V en W tal que:

$$T(c\alpha + \beta) = c(T\alpha) + T\beta,$$

para todos los vectores α y β de V y para todo escalar c de F.

Tratando de aclarar un poco esta definición se cita a continuación un ejemplo.

Si V es cualquier espacio vectorial, la transformación identidad definida por $\mathrm{I}\alpha = \alpha$, es una transformación lineal de V en V. La transformación cero 0, definido por $0\alpha = \alpha$, es una transformación lineal en general de V en W.

Es importante observar que si T es una transformación lineal de V en W, entonces $T(0) = 0$, lo que se ve por la misma definición, pues

$$\begin{gathered} T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0) \\ 0 = T(0) \end{gathered}$$

Otra característica general de una transformación lineal T es la siguiente T "preserva" las combinaciones lineales; esto es si $\alpha_1, \ . \ . \ , \ \alpha_n$ son vectores de V y $c_1, \ldots, c_n$, son escalares, entonces

$$T\left(c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n\right) = c_1(T\alpha_1) + \ldots + c_n(T\alpha_n)$$

Igualdad que se obtiene directamente de la definición.

Teorema 1. Sea V un *espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo* F y sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ordenada de V *(sucesión de vectores linealmente independientes que generan V).* Sea W un espacio vectorial sobre el mismo campo F y sean $\beta_1, \ldots, \beta_n$ vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única transformación lineal de T de V en W tal que

$$T\alpha_j = \beta_j \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Este es un teorema de fundamento. Si V y W son espacios vectoriales (no nulos), hay una multitud de funciones de V en W. El teorema destaca el hecho de que las funciones que son lineales son muy especiales, la transformación T se define como sigue: si $\alpha = x_1\alpha_1 +, \ldots + x_n\alpha_{n,}$ es un vector V se propone

$$T\alpha = x_1\beta_1 +, \ldots, +x_n\beta_n.$$

Es necesario mencionar que si T es una transformación lineal de V en W, entonces la imagen de T no es sólo un subconjunto de W, sino un subespacio de W. Sea R_{T} la imagen de T; esto es, el conjunto de todos los vectores β de T tales que $\beta = \mathrm{T}\alpha$ para algún α en V. Sean β_1 y β_2 elementos de R_{T} y sea c un escalar. Entonces, existen vectores α_1 y α_2 de V tales que $T\alpha_1 = \beta_1$ y $T\alpha_2 = \beta_2$. Como T es lineal

$$\begin{aligned} T(c\alpha_1 + \alpha_2) &= cT\alpha_1 + T\alpha_2 \\ &= c\beta_1 + \beta_{2,} \end{aligned}$$

lo que dice que $c\,\beta_1 + \beta_2$ pertenece también a R_{T}, y por tanto R_{T} es un subespacio de W**.**

Definición. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el campo F y sea T una transformación lineal de V en W. El espacio nulo de T es el conjunto de todos los vectores α de V tales que $\mathrm{T}\alpha = 0$.

Si V es de dimensión finita, el rango de T es la dimensión de la imagen de T y la nulidad de T es la dimensión del espacio nulo de T. Si $T : V \to W$ es lineal, y V y W son de dimensión finita, entonces

$$rango(T) + nulidad\,(T) = \dim\ V.$$

Este enunciado corresponde a uno de los resultados más importantes del álgebra lineal.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo F y sea W un espacio vectorial de dimensión m sobre F. Sea $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ordenada de $\mathfrak{B}$, y $\mathfrak{B}' = \{\beta_1, \ldots \beta_m\}$ una base ordenada de W. Si T es cualquier transformación lineal de V en W, entonces T está determinada por su efecto sobre los vectores α_j de la base $\mathfrak{B}$. Cada uno de los n vectores $T\alpha_j$ se expresa de manera única como combinación lineal

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$$

de los β_i. Los escalares $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$ son las coordenadas de $T\alpha_j$ en la base ordenada $\mathfrak{B}'$. Por consiguiente, la transformación T está determinada por los mn escalares a_{ij}. La matriz A de $m \times n$, definida por $A(i,j) = a_{ij}$ se llama matriz de T respecto al par de bases ordenadas $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$.

Ahora bien surge una tarea inmediata, la cual es comprender claramente como la matriz A determina la transformación lineal T.

Si $\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$ es un vector de V, entonces

$$T\alpha = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j(T\alpha_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\beta_i.$$

Si X es la matriz de coordenadas de α en la base ordenada $\mathfrak{B}$, entonces el cálculo anterior muestra que AX es la matriz de las coordenadas del vector $T\alpha$ en la base ordenada $\mathfrak{B}'$ ya que el escalar

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{j,}$$

es el elemento de la *i-ésima* fila de la matriz columna AX. Obsérvese también que si A es cualquier matriz de $m \times n$ sobre el campo F, entonces

$$T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\beta_{i,}$$

define una transformación lineal T de V en W, la matriz de la cual es A, respecto a las bases $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$.

Teorema 2. Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo F y W un espacio vectorial de dimensión m sobre F. Sean $\mathfrak{B}$ una base ordenada de V y $\mathfrak{B}'$ una base ordenada de W. Para cada transformación lineal T de V en W, existe una matriz A de $m \times n$, cuyos elementos pertenecen a F, tal que

$$[T\alpha]_{\mathfrak{B}'} = A[\alpha]_{\mathfrak{B}},$$

para todo vector α en V. Además, $T \rightarrow A$ es una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todas las transformaciones lineales de A en W y el conjunto de todas las matrices de $m \times n$ sobre el campo F.

La matriz A, que está asociada con T en el teorema 2, se llama la matriz de T respecto a las bases ordenadas $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$. Obsérvese que la ecuación $T\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$ dice que A es la matriz cuyas columnas $A_1, \dots, A_n$ son dadas por

$$A_j = [T\alpha_j]_{\mathfrak{B}'} \qquad\qquad j = 1, \dots, n.$$

Si U es otra transformación lineal de V en W y $\mathfrak{B}$ es la matriz de U respecto a las bases ordenadas $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$, entonces $cA + B$ es la matriz de $cT + U$ respecto a $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$.

Definición: Sea T un isomorfismo si $T: V \rightarrow W$

a) Si T es inyectiva es decir si $a, b \in V$ tales que $a \neq b \Rightarrow T(a) \neq T(b)$,

b) Si T es supra es decir si $g \in W \Rightarrow \exists\, x \in V$ tales que $T(x) = y$.

Esto es claro porque

$$\begin{aligned} cA_j + B_j &= c[T\alpha_j]_{\mathfrak{B}'} + [U\alpha_j]_{\mathfrak{B}'} \\ &= [(cT)\alpha_j + U\alpha_j]_{\mathfrak{B}'} \\ &= [(cT + U)\alpha_j]_{\mathfrak{B}'}. \end{aligned}$$

Teorema 3. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo F y sea W un espacio de dimensión m sobre F. Para cada par de bases ordenadas $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ de V y W, respectivamente, la función que asigna a una transformación lineal T con su matriz respecto a $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ es un isomorfismo entre el espacio L (V, W) y el espacio de todas las matrices de $m \times n$ sobre el cuerpo F.

Demostración. Se observó antes que tal función es lineal y, como se estableció en el teorema 2, esta función es inyectiva y aplica sobre el conjunto de las matrices de $m \times n$.

Estamos particularmente interesados en la representación por matrices de las transformaciones lineales de un espacio en sí mismo, es decir, de los operadores lineales sobre un espacio V. En tal caso lo acostumbrado es usar una sola base ordenada, esto es, hacer $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$, y se dirá simplemente que A es la matriz *de* T *a la base ordenada* $\mathfrak{B}$. Como este concepto será muy importante en lo que sigue, repasaremos su definición. Si T es un operador lineal sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, y si $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es una base ordenada V, la matriz de T respecto a $\mathfrak{B}$ es la matriz A de $n \times n$, cuyos elementos a_{ij} están definidos por las ecuaciones.

$$T\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i \qquad\qquad j = 1, \dots, n.$$

Se debe recordar siempre que esta matriz que representa a T depende de la base ordenada $\mathfrak{B}$, y que existe una matriz que representa a T en cada base ordenada de T. (En transformaciones de un espacio en otro, la matriz depende de dos bases ordenadas, una de V y otra de W.) Para no olvidar esta dependencia se usará la notación $[T]_{\mathfrak{B}}$ para la matriz del operador lineal T en la base ordenada $\mathfrak{B}$. La manera como esta matriz y la base ordenada describen T, es que para cada α de V.

$$[T\alpha]_{\mathfrak{B}} = [T]_{\mathfrak{B}}[\alpha]_{\mathfrak{B}}. \blacksquare$$

Hemos visto lo que les sucede a las matrices representantes cuando las transformaciones se suman. Cabe ahora preguntar que sucede cuando se componen transformaciones.

Para ello se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4. Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo F; sea T una transformación lineal de V en W y U una transformación lineal de W en Z. Si $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$,$\mathfrak{B}''$ son bases ordenadas de los espacios V, W y Z, respectivamente, y si A es la matriz de T respecto al par $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ y B es la matriz de U respecto al par $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, entonces la matriz de la composición UT respecto al par $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}''$es producto $C = BA$.

Demostración: Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre el campo F de dimensiones n, m y p, respectivamente. Sea T una transformación lineal de V en W y U una transformación lineal de W en Z. Supóngase que se tienen las bases ordenadas

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \qquad \mathfrak{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \qquad \mathfrak{B}'' = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

para los respectivos espacios V,W y Z. Sea A la matriz de T respecto al par $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ y sea B la matriz de U respecto al par $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$. Es fácil ver ahora que la matriz C de la transformación UT respecto al par $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}''$ es el producto de B y A; y luego, por la definición y unicidad de la matriz representante, se debe tener que $C = BA$. Se puede ver esto haciendo el cálculo

$$\begin{aligned}(UT)(\alpha_j) &= U[T\alpha_j] \\ &= U\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\beta_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{kj}(U\beta_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\sum_{i=1}^{p} b_{ik}\gamma_i \\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}\right)\gamma_i.\end{aligned}$$

Si se define la matriz $C = (c_{ij})$ elemento a elemento como

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj},$$

el siguiente enunciado se ha probado.■

Es importante hacer notar que si T y U son operadores lineales sobre un espacio V y que si se trabaja con una sola base ordenada $\mathfrak{B}$, entonces el teorema 4 toma la forma simple $[UT]_{\mathfrak{B}} = [U]_{\mathfrak{B}}[T]_{\mathfrak{B}}$.

Así, en este caso, la correspondencia que $\mathfrak{B}$ determina entre los operadores y las matrices no es solo un isomorfismo del espacio vectorial, sino que también preserva los productos. Una consecuencia inmediata de lo cual es que el operador lineal T es inversible si, y solo si, $[T]_{\mathfrak{B}}$ es una matriz inversible. En efecto, el operador identidad está representado por la matriz identidad en cualquier base ordenada, y así

$$UT = TU = I.$$

Esto es equivalente a

$$[U]_{\mathfrak{B}}[T]_{\mathfrak{B}} = [T]_{\mathfrak{B}}[U]_{\mathfrak{B}} = I$$

Además, cuando T es inversible

$$[T^{-1}]_{\mathfrak{B}} = [T]^{-1}{}_{\mathfrak{B}}.$$

3.2 Polinomios de Operadores.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre el campo F y sea T un *operador no nulo sobre* V. Si I es el *operador identidad sobre* V, se define $T^0 = I$ y para todo $n = 1,2,3,\dots$ y todo operador T sobre V, se propone

$$T^n = T^{n-1}T.$$

En la igualdad anterior se está hablando de una manera formal de una composición de aplicaciones. Si T es una matriz o si se trabaja con la matriz asociada con el operador, entonces dicha igualdad se refiere al producto ordinario de matrices. Haciendo referencia un poco tenemos: si T es el operador sobre R^2 definido por $T(x_1,x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2)$, entonces, T^2 queda como $T^2(x_1,x_2) = T\left[T(x_1,x_2)\right] = (5x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre el campo F y sea T un operador sobre V**.** Si f es un polinomio de $F[t]$ dado como

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

se define el polinomio f aplicado al operador T, mediante la expresión

$$f(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k.$$

Dado que el conjunto de todos los operadores sobre un espacio vectorial, junto con las operaciones de suma ordinaria de funciones y producto de escalares por funciones es él mismo un espacio vectorial, como se puede observar de la definición, queda claro que $f(T)$ es nuevamente un operador sobre V.

Teorema 5. Sea V un espacio vectorial sobre el campo F y sean T un operador sobre V y f y g elementos $F[t]$. Entonces,

$$(f+g)(T) = f(T) + g(T)$$
$$(fg)(T) = f(T)g(T)$$

y si c es un elemento de F, entonces $(cf)(T) = cf(T)$.

Demostración. Supóngase que f y g tienen grados m y n, respectivamente, y que están dados por

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j \qquad g(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k,$$

entonces la suma $f + g$ queda como

$$(f+g)(t)=\sum_{k=0}^{máx\{m,n\}}(a_k+b_k)t^k$$

y, por o tanto,

$$\begin{aligned}(f+g)(T) &= \sum_{k=0}^{máx\{m,n\}}(a_k+b_k)T^k \\ &= \sum_{k=0}^{máx\{m,n\}}(a_kT^k+b_kT^k) \\ &= \sum_{k=0}^{máx\{m,n\}}a_kT^k+\sum_{k=0}^{máx\{m,n\}}b_kT^k \\ &= \sum_{j=0}^{m}a_jT^j+\sum_{k=0}^{n}b_kT^k \\ &= f(T)+g(T).\end{aligned}$$

La prueba de las otras dos igualdades es análoga. ■

Teorema 6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F y sea T un operador sobre V. Entonces, existe un polinomio no nulo f en $F\left[t\right]$, tal que $f(T)=0$.

Demostración. Supóngase que $\dim V=n$, entonces, el espacio vectorial de los operadores sobre V tiene dimensión n^2, por lo tanto, si m es un entero mayor o igual que n^2, el conjunto de los operadores

$$I,T,\ldots,T^m,$$

es linealmente dependiente. Así, existen escalares $a_0,a_1,\ldots,a_m$, no todos iguales a cero, tales que

$$a_0I+a_1T+\ldots+a_mT^m=0,$$

se define un polinomio f como

$$f(t)=\sum_{k=0}^{m}a_kt^k.$$

Por lo que vemos que, f es no nulo y $f(T)=0$. ■

Lema. Sea V un espacio vectorial sobre el campo F y sean T y U operadores sobre V. Si U es no singular, entonces

$$\left(U^{-1}TU\right)^n = U^{-1}T^nU,$$

para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$

La prueba se hace por inducción. Para $n = 1$ la igualdad se cumple trivialmente. Supóngase que se verifica para $n = k$; esto es, que

$$\left(U^{-1}TU\right)^k = U^{-1}T^kU.$$

Entonces, para $n = k+1$ resulta

$$\begin{aligned}\left(U^{-1}TU\right)^{k+1} &= \left(U^{-1}TU\right)^k\left(U^{-1}TU\right)\\ &= \left(U^{-1}T^kU\right)\left(U^{-1}TU\right)\\ &= U^{-1}\left(T^kT\right)U\\ &= U^{-1}T^{k+1}U.\end{aligned}$$

Así, la igualdad propuesta se cumple para todo entero positivo n.

3.3 Vectores y Valores Propios de un Operador.

Definición Sea V un espacio vectorial sobre el campo F y sea T un operador sobre V**.** Un valor propio de T es un escalar c de F tal que existe un vector no nulo α de V**,** con $T\alpha = c\alpha$ Si c es un valor propio de T, entonces, cualquier α de V tal que $T\alpha = c\alpha$ se llama vector propio de T asociado con el valor propio c.

Se utiliza también la terminología valor característico y vector característico o eigenvalor y eigenvector, respectivamente, para designar a c y a α.

Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre el campo F y sea T un operador sobre V. Si c es un valor propio de T, entonces, el conjunto V_c de todos los vectores a de V tales que $T\alpha = c\alpha$ es un subespacio de V.

Demostración. Por definición V_c es no vacío; además, si α y β pertenecen a V_c y si b es un elemento de F, resulta

$$T(b\alpha + \beta) = b(T\alpha) + T\beta = c(b\alpha + \beta) = b(c\alpha) + c\beta,$$

y de aquí que $b\alpha+\beta$ pertenece a V_c. ■

Definición. Al subespacio V_c citado aquí, se le conoce como espacio propio de T, correspondiente al valor propio c.

Teorema 7. Sean V un espacio vectorial sobre el campo F y T un operador sobre V. Supongamos que $c_1, \dots, c_n$ son valores propios de T distintos entre sí y que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son vectores no nulos de V tales que $T\alpha_j = c_j\alpha_j$; Entonces, el conjunto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es linealmente independiente.

Demostración. La prueba se hace por inducción sobre n. Para $n=1$ el resultado es trivial. Supóngase que los vectores $\alpha_1, \dots \alpha_{n-1}$ son linealmente independientes y sea

$$x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = 0, \qquad (1)$$

Multiplicando por c_n está expresión, encontramos

$$x_1c_n\alpha_1 + \dots + x_nc_n\alpha_n = 0,$$

Por otra parte, aplicando el operador T a ambos lados de (1) se obtiene

$$x_1c_1\alpha_1 + \dots + x_nc_n\alpha_n = 0,$$

de manera que, al restar esta ecuación de la anterior nos queda

$$x_1(c_n - c_1)\alpha_1 + \dots + x_{n-1}(c_n - c_{n-1})\alpha_{n-1} = 0.$$

Debido que los c_j son distintos entre sí y, por hipótesis, los vectores $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ son linealmente independientes, debemos tener $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$ quedando de (1) que $x_n\alpha_n = 0$ y de aquí que también $x_n = 0$. Luego, los vectores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son linealmente independientes. ■

Teorema 8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F y sea T un operador sobre V. Si c es un escalar, entonces c es valor propio de T si, y sólo si el operador $T - cI$ es no inversible.

Demostración. Supóngase primero que c es un valor propio de T. Entonces, existe un vector no nulo α de V tal que $T\alpha = c\alpha$ y de aquí que $(T - cI)\alpha = 0$.

Así el espacio nulo del operador $T - cI$ es distinto de $\{0\}$ y por tanto, es no inversible. Recíprocamente, si $T - cI$ es no inversible podemos encontrar un elemento no nulo de V tal que $(T - cI)\alpha = 0$. Esto nos lleva a la igualdad $T\alpha = c\alpha$ y de aquí que c es valor propio de T.■

Teorema 9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre los números complejos con $\dim \geq 1$ y sea T un operador sobre V. Entonces, existe un vector propio no nulo de T.

Demostración. Por el teorema 7 sabemos que existe un polinomio mónico no nulo f en $C[t]$ tal que $f(T) = 0$, de manera que si $grd\ f = n$, podemos escribir

$$f(T) = (T - c_1 I)(T - c_2 I)\ldots(T - c_n I) = 0.$$

Ahora no todos los operadores $T - c_j I$ son inversibles, ya que si ese fuera el caso también lo sería cualquier producto de ellos. Así, para algún entero k; $1 \leq k \leq n$, $T - c_k I$ es no inversible y por el teorema anterior, c_k es un valor propio de T.■

Definición. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F y sea T un operador sobre V. Se dice que una base $\mathfrak{B}$ de V diagonaliza T, si la matriz de T respecto a $\mathfrak{B}$ es una matriz diagonal. Si tal base existe, se dice que el operador T es diagonalizable.

Teorema 10. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F y sea T un operador sobre V. Supóngase que existe un base $\mathfrak{B}$ de V que consta de vectores propios de T. Entonces, T es diagonalizable.

Demostración. Sea $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ordenada de V tal que, para $j = 1, \ldots, n$. $T\alpha_j = c_j\alpha_j$. Por lo tanto tenemos que la matriz de T respecto a dicha base es una matriz diagonal y, por lo tanto, T es diagonalizable.■

Corolario. Sea V un espacio vectorial sobre el campo F con $\dim V = n$ y sea T un operador sobre V. Supóngase que T tiene n valores propios distintos entre sí en F. Entonces, T es diagonalizable.

Demostración Supóngase que $c_1, \ldots, c_n$ son n valores propios de T distintos entre sí y que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son vectores no nulos de V tales que, para $j = 1, \ldots, n, T\alpha_j = c_j\alpha_j$. Por el teorema

8, dichos vectores son linealmente independientes quedando entonces que $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es una base de V. Entonces, T se puede diagonalizar.■

Corolario. Sea A una matriz de $n \times n$ con elementos en el campo F y supóngase que A tiene n valores propios distintos entre sí en F. Entonces, existe una matriz inversible B de $n \times n$ con elementos en F tal que $B^{-1}AB$ es una matriz diagonal.

Demostración. Sean $c_1, \dots, c_n$ los valores propios de A en F y sean $X_1, \dots, X_n$, n vectores no nulos de F^{nx1} tales que $AX_j = c_jX_j$; $j = 1, \dots, n$. Entonces la matriz C del operador A respecto a la base ordenada $\mathfrak{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ de F^{nx1} es una matriz diagonal. Ahora, puesto que C es semejante a A sobre F tenemos que existe una matriz inversible B de $n \times n$ con elementos en F tal que

$$C = B^{-1}AB.$$

con esto damos por terminada la prueba.■

Proposición. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F y sea T un operador sobre V. Sean c un valor propio de T en F y α un vector no nulo de V tal que $Tc = c\alpha$. Si f es un polinomio de $F[t]$, entonces $f(T)\alpha = f(c)\alpha$.

Demostración. Se prueba primero por inducción que para todo entero positivo m se verifica la igualdad $T^m\alpha = c^m\alpha$. Para $m = 1$ la igualdad es trivial. Supóngase que se cumple para $m = k$; esto es, que $T^k\alpha = c^k\alpha$ para $m = k+1$ se tiene

$$T^{k+1}\alpha = T\left(T^k\alpha\right) = T\left(c^k\alpha\right) = c^k\left(T\alpha\right) = c^k\left(c\alpha\right) = c^{k+1}\alpha.$$

Luego, la igualdad es valida para todo entero positivo m. Ahora, supóngase que f es el polinomio dado por

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k.$$

Se tiene entonces

$$f(T)\alpha = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k T^k\right)\alpha$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (T^k\alpha)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (c^k \alpha)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k c^k \right) \alpha$$

$$= f(c)\alpha. \blacksquare$$

Definición. Sea A una matriz de $n \times n$ con elementos en el campo F. Se define el *polinomio característico* P_A de la matriz A mediante la igualdad

$$P_A(t) = det(tI - A).$$

Queda claro que si A es una matriz de $n \times n$, entonces, P_A es un polinomio mónico de grado n.

Teorema 11. Sean A y B matrices de $n \times n$ con elementos en el campo F y supóngase que B es inversible. Entonces, el polinomio característico de A es igual al polinomio característico de la matriz $B^{-1}AB$.

Demostración. Usando las propiedades de los determinantes y la definición de polinomio característico dada con anterioridad, tenemos

$$\begin{aligned} P_{B^{-1}AB}(t) &= \det(tI - B^{-1}AB) \\ &= \det\left[B^{-1}(tI - A)B \right] \\ &= \det B^{-1} \det(tI - A) \det B \\ &= \det(tI - A) \\ &= P_A(t); \end{aligned}$$

Esto es $P_{B^{-1}AB} = P_A$, lo cual se quería probar. $\blacksquare$

Una forma diferente de enunciar este teorema es diciendo que dos matrices semejantes sobre el campo F tienen el mismo polinomio característico.

Definición. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F y T un operador sobre V. Supóngase que $\mathfrak{B}$ es una base ordenada de V y que C es la matriz de T respecto a $\mathfrak{B}$. Se define el polinomio característico P_T del operador T como el polinomio característico de la matriz C; es decir, $P_T = P_C$.

Como podemos observar el teorema 11 garantiza que el polinomio característico de un operador T sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, está determinado de manera única, ya que si $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ son dos bases ordenadas de V y si las matrices de T relativas a estas bases son C y $C^{\prime}$, respectivamente, entonces, existe una matriz inversible B tal que $C^{\prime} = B^{-1}CB$.

Teorema 12. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F y T un operador sobre V. Entonces, un escalar c de F es un valor propio de T si, y sólo si, es una raíz de su polinomio característico.

Demostración. Sea $\mathfrak{B}$ cualquier base ordenada de V y sea A la matriz de T respecto a $\mathfrak{B}$. Si c *e*s un valor propio de T entonces, el operador $cI - T$ es no inversible y, consecuentemente, la matriz $cI - A$ es no inversible. Por tanto

$$P_T(c) = \det(cI - A) = 0.$$

y de aquí que c es una raíz de P_T. De igual manera supóngase que $P_T(c) = 0$, entonces, $\det(cI - A) = 0$ y el sistema $(cI - A)X = 0$ tiene una solución no trivial X. Sea α un elemento de V tal que $[\alpha]_{\mathfrak{B}} = X$. De la ecuación $(cI - A)X = 0$ se deduce que $(cI - T)\alpha = 0$ donde $[\alpha]_{\mathfrak{B}} = X$, y de aquí que $T\alpha = c\alpha$, quedando entonces que c es un valor propio de T. ∎

De esta manera podemos decir que para calcular los valores propios de un operador dado T, es suficiente determinar las raíces de su polinomio característico; esto es, podemos resolver para t la ecuación $P_T(t) = 0$, en lugar de resolver para c el sistema de ecuaciones $AX = cX$, donde A es la matriz de T relativa a alguna base ordenada del espacio vectorial.

3.4 Espacios de Dimensión Infinita.

Un espacio vectorial de dimensión infinita es uno que no puede ser generado por un número finito de vectores. Un primer ejemplo de tales espacios es el de los números reales, definido sobre el campo de los racionales.

En muchas áreas de la matemática avanzada los espacios de dimensión infinita aparecen con frecuencia y son de gran importancia tanto en desarrollos teóricos como en las aplicaciones. Por ejemplo, en el análisis matemático, los espacios de *Fourier* son útiles para expresar gran cantidad de funciones en términos de las llamadas series trigonométricas. Un espacio de *Fourier* es un espacio producto interno (el cual se tratara mas adelante) generado por el conjunto de funciones complejas de variable real

$$\mathfrak{B} = \{h_k / k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

donde

$$h_k(x) = exp(2k\Pi ix)$$

y donde el producto interno está dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

En el análisis funcional podemos hablar de los espacios de *Banach*[1] y de los espacios de *Hilbert*[2]. Estos corresponden a espacios vectoriales normados y son, de hecho, espacios vectoriales topológicos. En la actualidad, sus principales aplicaciones están en el campo de la física-matemática, sobre todo en lo que respecta a los métodos de solución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales parciales.

Una de las principales complicaciones en el estudio de los espacios de dimensión infinita es que, en general, no es posible encontrar bases de éstos; es decir, conjuntos de vectores linealmente independientes que generen el espacio. Son de esperarse las enormes complicaciones que surgen si primero se definen los objetos que constituyen un espacio de dimensión infinita y después se trata de encontrar bases para éstos. Como un ejemplo claro de lo dicho aquí, se puede pensar en el espacio de las funciones reales de variable real.

Existe sin embargo la alternativa, útil en muchos casos, de proponer primero el conjunto de generadores y, a partir de éstos, construir los elementos que forman los espacios o subespacios que a través de ellos se generan. Este es el caso de, por ejemplo, los espacios de *Fourier*. Nuestro trabajo va un poco en este sentido.

Se vera más adelante que una ecuación diferencial con coeficientes se puede escribir de la forma

$$p(D)y = 0, \qquad (2)$$

donde el operador $p(D)$ es un cierto polinomio P aplicado al operador derivada *D*. Se verá también que las soluciones de dicha ecuación son todas de la forma $y(x) = x^k e^{cx}$, donde k es un entero no negativo y c es una raíz del polinomio *p*, en general, un número complejo. A partir de esto se propondrá el conjunto (infinito)

$$\mathfrak{B} = \{y / y(x) = x^k e^{cx}, c \in \mathbb{C}, k = 0,1,2,..\} \qquad (3)$$

y se trabajará con el espacio vectorial V por $\mathfrak{B}$.

Al resolver la ecuación diferencial (2) se contará con la ventaja de que el espacio de soluciones de ésta es un subespacio de V de dimensión finita.

[1] Un espacio $(V, \|\cdot\|)$ es Banach si y sólo si V es un espacio vectorial dotado con una norma en la cual todas las sucesiones de Cauchy son convergentes y convergen a elementos en V, bajo la norma.

[2] Un espacio $(V, \|\cdot\|)$ es Hilbert si sólo si es de Banach pero la norma del espacio $\|$ proviene de un producto interior, es decir el producto interior genera la norma.

Haremos ver también que en el caso de la ecuación diferencial no homogénea

$$p(D)y = g(x), \qquad (4)$$

si la función g pertenece a V, existe un polinomio q que anula g y se puede escribir

$$(pq)(D)y = 0$$

para después resolver esta ecuación determinando los valores de ciertas constantes. La solución general $y = y(x)$ de la ecuación (4) consiste entonces de la suma de dos funciones: una de ellas y_c, llamada solución complementaria que es la solución de la ecuación homogénea dada en (2) y otra y_p, llamada solución particular. Las funciones que forman la solución completaría forman, nuevamente, una base del espacio nulo del operador $p(D)$ y la solución particular de (4) es un vector dado de V cuyas funciones componentes son múltiplos escalares de elementos del conjunto $\mathfrak{B}$.

Concluiremos entonces que las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, tienen soluciones que pertenecen a un espacio vectorial de dimensión infinita como el generado por el conjunto $\mathfrak{B}$ dado en (3) pero que, sin embargo, los sistemas fundamentales de soluciones de éstas, generan subespacios de dimensión finita de aquel.

Capítulo 4

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES.

4.1 Solución General de la Ecuación Homogénea.

Teorema 1. Sea V el espacio vectorial de las funciones complejas de una variable compleja, con derivadas de todos los órdenes y sean D e I los operadores derivada e identidad sobre V, respectivamente. Si n es entero positivo, entonces, para todo número complejo c y para todo elemento f de V se verifica la igualdad

$$(D-cI)^n f = e^{ct}D^n\left(e^{-ct}f\right) \tag{1}$$

donde se define $D^0 = I$.

Demostración. Se aplica la inducción. Para $n = 1$, la igualdad es trivial. Supóngase que el enunciado es válido para $n = k;$ esto es,

$$(D-cI)^k f = e^{ct}D^k\left(e^{-ct}f\right)$$

Para $n = k + 1$, resulta

$$\begin{aligned}(D-cI)^{k+1} f &= (D-cI)\left[(D-cI)^k f\right]\\ &= (D-cI)\left[e^{ct}D^k\left(e^{-ct}f\right)\right]\\ &= D\left[e^{ct}D^k\left(e^{-ct}f\right)\right] - cI\left[e^{ct}D^k\left(e^{-ct}f\right)\right]\\ &= ce^{ct}D^k\left(e^{-ct}f\right) + e^{ct}D^{k+1}\left(e^{-ct}f\right) - ce^{ct}D^k\left(e^{-ct}f\right)\\ &= e^{ct}D^{k+1}\left(e^{-ct}f\right).\end{aligned}$$

De aquí que el enunciado es válido para todo entero positivo n.■

Corolario. El sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial

$$(D-cI)^n y = 0 \tag{2}$$

lo forman las funciones $y_1, \dots, y_n$, dadas por

$$y_j(x) = x^{j-1}e^{cx}, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Demostración. Sea k un entero positivo tal que $1 \leq k \leq m$. Tomando en cuenta que las únicas funciones en el espacio de las funciones, donde existe sus $n-1$ derivada, la cual también es continua, cuya *n-ésima* derivada se anula son los polinomios de grado $n-1$ o menor, de (1) es inmediato que $(D-cI)^n y_k = 0$. La independencia de las funciones (3) se justifica más adelante. ■

Definición. Sean V un espacio vectorial complejo, T un operador sobre V y c un escalar. Se dice que un vector no nulo α de V es $(T-cI)$ - cíclico si existe un entero positivo n tal que, $(T-cI)^n \alpha = 0$. El mayor entero positivo con esta propiedad recibe el nombre de *periodo de* α relativo a $T-cI$. Si n es dicho periodo, entonces $(T-cI)^k \alpha \neq 0$ cuando $0 \leq k < n$.

Teorema 2. Sea V un espacio vectorial sobre el campo F y sea T un operador sobre V. Si un vector α de V *es* $(T-cI)$ cíclico con periodo n, entonces, los vectores

$$\alpha,\ (T-cI)\alpha, \dots,\ (T-cI)^{n-1}\alpha,$$

son linealmente independientes.

Definición. Sean V un espacio vectorial de dimensión m sobre el campo F y T un operador sobre V. Se dice que V es un espacio cíclico si existe un vector $(T-cI)$ - cíclico α_m de periodo m de V. Si tal es el caso, entonces, el conjunto

$$\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},$$

donde $\alpha_i = (T-cI)^{m-i}\alpha_m$, es una base de V. De hecho, considerando $\mathcal{B}$ como una base ordenada es lo que se conoce como *Base de Jordan para* T.

En referencia al corolario se observa que la función, y_n definida por

$$y_n(x) = x^{n-1} e^{cx},$$

es un vector $(D-cI)$ - cíclico con periodo n de manera que las funciones (3) son linealmente independientes y, por tanto, forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial (2). Visto de otra forma, dichas funciones forman una base del espacio nulo del operador $(D-cI)^n$.

Se trabaja con el espacio vectorial complejo

$$V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,/\, f \ tiene\ derivadas\ de\ todos\ los\ órdenes\} \qquad (4)$$

dicho espacio vectorial generado por el conjunto

$$\mathfrak{B} = \{f \in V/f(x) = x^k e^{cx}, c \in \mathbb{C}, k = 0,1,2, \ldots\} \qquad (5),$$

El objetivo en esta parte es usar los elementos del álgebra lineal planteados antes, para resolver la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, con coeficientes constantes; es decir, la ecuación

$$y^n + a_{n1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{\prime} + a_0 y = 0 \qquad (6)$$

donde los a_j son constantes reales.

Usando los coeficientes de la ecuación diferencial, definimos un polinomio de grado n mediante la igualdad

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, \qquad (a_n = 1). \qquad (7)$$

Expresando p en su factorización normalizada, encontramos

$$p(t) = (t - c_1)^{m_1}(t - c_2)^{m_2}, \ldots, (t - c_s)^{m_s} = \prod_{j=1}^{s} \left(t - c_j\right)^{m_j}, \qquad (8)$$

donde $c_1, \ldots, c_s$ son las raíces distintas de p, $m_1, \ldots, m_s$ las correspondientes multiplicidades y $m_1 + \cdots + m_s = n$. Ahora, aplicando el polinomio P al operador derivada D, la igualdad (8) queda como

$$p(D) = \prod_{j=1}^{s} \left(D - c_j\right)^{m_j} \ . \qquad (9)$$

De esta forma, la ecuación diferencial (6) puede expresarse mediante la igualdad

$$p(D)y = 0, \qquad (10)$$

o bien como

$$\left(\prod_{j=1}^{s} \left(D - c_j\right)^{m_j}\right) y = 0. \qquad (11)$$

Tomando en cuenta que los operadores $D - c_k I^{\;m_k}$ conmutan (en general la composición de funciones no es una operación conmutativa), la solución general de la ecuación diferencial (10) será el conjunto formado por todas las soluciones de las ecuaciones diferenciales particulares

$$(D - c_k I)^{m_k} y = 0, \qquad k = 1, \dots, s. \qquad (12)$$

Así, de las igualdades (2) y (3) tenemos que el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial (10) (que corresponde a la ecuación (8)) es el conjunto

$$S = \{y_{j_k} \,/\, j = 1, .. s \qquad k = 1, . m_s\} \qquad (13)$$

donde $y_{j_k} = x^{k-1}\exp(c_j x)$.

Teorema 3. Si los coeficientes a_k que aparecen en la ecuación diferencial (6) son todos reales y si $c_i = a + ib$ con $0 \le j \le s$ y $b \ne 0$ es una raíz del polinomio dado en (8), entonces, dicha ecuación tiene una solución de la forma

$$y(x) = e^{ax}(\beta_1 \cos\ bx + \beta_2 \text{ sen } bx),$$

donde β_1 y β_2 son constantes arbitrarias.

Demostración. Si sabemos que $c_j = a + ib$ es una raíz del polinomio (10), entonces, $\overline{c_J} = a - bi$ es también una raíz de éste. Supóngase que la multiplicidad de c_j es 1 (lo mismo ocurrirá, por supueto, con $\overline{c_J}$), entonces, de (12) nos quedan dos ecuaciones diferenciales

$$\big(D - c_j I\big) y = 0 \qquad \big(D - \bar{c}_j I\big) y = 0\,, \qquad (14)$$

cuyas soluciones, según (13) son: para la primera $y_1(x) = \alpha_1 e^{(a+ib)x}$ y para la segunda, $y_2(x) = \alpha_2 e^{(a-bi)x}$,donde α_1 y α_2 son constantes arbitrarias. Dado que $y = y_1 + y_2$ es solución de (6), tenemos que

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha_1 e^{ax} e^{ibx} + \alpha_2 e^{ax} e^{-ibx} \\ &= \alpha_1 e^{ax}(\cos\ bx + i\ sen\ bx) + \alpha_2 e^{ax}(\cos\ bx - i\ sen\ bx) \\ &= e^{ax}((\alpha_1 + \alpha_2)\cos\ bx + i(\alpha_1 - \alpha_2) sen\ bx) \\ &= e^{ax}(\beta_1 \cos\ bx + \beta_2\ sen\ bx) \end{aligned}$$

donde $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ y $\beta_2 = i(\alpha_1 - \alpha_2)$. Por tanto, siempre es posible resolver estas dos igualdades para α_1 y α_2 en términos de β_1 y β_2;de hecho $2\alpha_1 = \beta_1 - i\beta_2$ y $2\alpha_2 = \beta_1 + i\beta_2$. Así, si $c_j = a + ib$ y $\overline{c_j} = a - bi$ son raíces del polinomio (10), las soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (6) correspondientes a estas raíces, se puedan expresar como

$$e^{ax}\cos bx \quad \text{y} \quad e^{ax}\,\text{sen}\,bx \qquad (15) \ ■$$

Corolario. Si en el polinomio (8) la multiplicidad de la raíz c_j es m_j, y si $c_j = a + ib$ con $b \neq 0$, entonces, la ecuación diferencial (6) tiene $2m_i$ soluciones linealmente independientes de la forma

$$u_j(x) = x^{j-1}e^{ax}cos\ bx, \quad v_j(x)x^{j-1}e^{ax}sen\ bx, \quad j = 1, \dots, m_j. \quad (16)$$

Demostración. En este caso, en lugar de las ecuaciones (14) se tendrán que resolver las dos ecuaciones

$$\left(D - c_jI\right)^{m_j}y = 0, \qquad \left(D - \overline{c_j}I\right)^{m_j}y = 0.$$

Las soluciones de éstas, según (12) y (13) quedarán como

$$y_{1j}(x) = x^{j-1}e^{(a+ib)x}, \qquad y_{2j}(x) = x^{j-1}e^{(a-ib)x}; \qquad j = 1, \dots, m_i$$

Combinando y_{11} con y_{21}, y_{12} con y_{22}, etc., se llega a las funciones (16). ■

Ejemplo1. Considérese la ecuación diferencial lineal homogénea, de tercer orden, con coeficientes constantes

$$y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0 \qquad (17)$$

Esta ecuación es de la forma (6) de manera que podemos asociar con ella un polinomio p como el que se dio en (8), quedando en este caso

$$p(t) = t^3 + 2t^2 - 5t - 6 = (t + 1)(t + 3)(t - 2).$$

Se tiene, $p(t) = 0$ cuando $t = -1, -3, 2$ y, por tanto, según (13) el sistema fundamental de soluciones de (17) está formado por las funciones e^{-x}, e^{-3x} y e^{2x}, quedando de aquí que la solución general de dicha ecuación es

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + c_3e^{2x}.$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 2. Resolvemos ahora la ecuación diferencial homogénea

$$y''' - 3y' - 2y = 0 \qquad (18)$$

Esta ecuación es como la propuesta en la igualdad (6). El polinomio p asociado con la ecuación queda ahora como

$$p(t) = t^3 - 3t - 2 = (t+1)^2(t-2)$$

Lógicamente, p se anula cuando $t = -1, 2$ y la raíz $t = -1$ tiene multiplicidad 2. Se sigue de (13) que el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial (18) está formado por las funciones e^{-x}, xe^{-x} y e^{2x} y, por tanto, la solución general de dicha ecuación queda como

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3e^{-2x} = (c_1 + c_2x)e^{-x} + c_3e^{-2x},$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 3. Considérese la ecuación diferencial lineal homogénea de cuarto orden

$$y^{(4)} - 2y''' + y'' + 12y' + 8y = 0 \qquad (19)$$

El polinomio p asociado con esta ecuación es

$$p(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 + 12t + 8 = (t+1)^2(t-(2+2i))(t-(2-2i))$$

de manera que $p(t) = 0$ cuando $t = -1,\ 2+2i,\ 2-2i$ y la raíz $t = -1$ tiene multiplicidad 2. De esta forma, el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (19) lo forman, según (13), las funciones e^{-x}, xe^{-x}, $e^{(2+2i)x}$ y $e^{(2-2i)x}$. Usando las igualdades (15) del teorema 3, podemos remplazar las soluciones exponenciales de la ecuación por las dos soluciones, también linealmente independientes $e^{2x}\cos 2x$ y $e^{2x}\operatorname{sen} 2x$ quedando, en términos de éstas, la solución general de la ecuación diferencial (19) como

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-x} + e^{2x}(c_3\cos 2x + c_4\cos 2x).$$

Ejemplo 4. Presentamos un último ejemplo del caso homogéneo. Resolveremos la ecuación de cuarto orden

$$y^{(4)} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0 \qquad (20)$$

El polinomio p asociado con esta ecuación queda como

$$p(t) = t^4 - 4t^3 + 14t^2 - 20t + 25 = (t-(1+2i))^2(t-(1-2i))^2.$$

Este polinomio tiene dos raíces complejas: $1+2i$ y $1-2i$, ambas de multiplicidad 2, por tanto, el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial (20) estará formado, según (13), por las funciones

$$e^x \cos 2x, e^x sen\ 2x, xe^x \cos 2x, xe^x sen\ 2x$$

De esta forma, la solución general de (20) queda como

$$y(x) = e^x\big((c_1 + c_2x)\cos 2x + (c_3 + c_4x) sen\ 2x\big)$$

donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes arbitrarias.

En los cuatro ejemplos anteriores, y de hecho en la teoría que los precede, se trabajó siempre con ecuaciones diferenciales en las que el coeficiente de la derivada de más alto orden que aparece en éstas es igual a 1, hecho que condujo a que el polinomio asociado con ellas fuera, en todos los casos, un polinomio mónico. Evidentemente, esto no es una limitante para las aplicaciones de dicha teoría ya que si, en principio, la ecuación diferencial (6) aparece como

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} +, \ldots, + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

donde $a_n \neq 0$ y $a_n \neq 1$, siempre es posible expresar ésta en la forma

$$y^{(n)} + b_{n-1}y^{(n-1)} +, \ldots, + b_1 y' + b_0 y = 0,$$

donde $b_j = a_j / a_n$, para $j = 0, 1, \ldots, n$.

4.2 Solución de Algunos Tipos de Ecuaciones con Coeficientes Constantes No Homogéneas.

Considérese la ecuación diferencial

$$p(D)y = g(x). \qquad (21)$$

Donde g es un elemento no nulo del espacio vectorial V generado por el conjunto

$$\mathfrak{B} = \{x^k e^{cx} / c \in \mathbb{C} \ y \ k = 0,1,2, \dots\} \qquad (22)$$

Si p es un polinomio de grado n, entonces la ecuación (21) es una ecuación diferencial de orden n con coeficientes constantes no homogénea y, por la forma en que se eligió g ,ésta es una combinación lineal de funciones u de la forma

$$u(x) = ax^m e^{cx}, \qquad (23)$$

donde a, m y c son constantes dadas.

Supóngase, de entrada, que g no es solución de la ecuación diferencial homogénea

$$p(D)y = 0, \qquad (24)$$

que es la ecuación homogénea asociada con la ecuación diferencial (21) y que $g = u$, donde u es la función dada en (24). Puesto que W es $p(D) - invariante$, para todo polinomio p, la función u debe ser solución de alguna ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes. Sea q un polinomio de grado mínimo tal que

$$q(D)g(x) = 0 \qquad (25)$$

Entonces, según el corolario del teorema 1, q es de la forma $q(t) = (t - c)^{m+1}$ con lo que la ecuación anterior queda como

$$(D - cI)^{m+1} g(x) = 0 \qquad (26)$$

Ahora, de las ecuaciones (1) y (24) tenemos que

$$q(D)p(D)y = (pq)(D)y = q(D)g(x) = 0 \qquad (27)$$

de manera que obtenemos una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$(pq)(D)y = 0 \qquad (28)$$

Se hace notar que cualquier solución de la ecuación diferencial homogénea (24) es también una solución de esta última, además, dado que el operador $(pq)(D)$contiene el factor $(D-cI)^{m+1}$, las funciones $e^{cx}, xe^{cx}, \dots, x^m e^{cx}$ son también soluciones de (28). Llamamos y_N a la función

$$y_N(x) = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)e^{cx}, \qquad (29)$$

donde las A_j son ciertas constantes que se pueden calcular resolviendo la ecuación (algebraica)

$$p(D)y_N = g(x) \qquad (30)$$

El lado izquierdo de esta igualdad no es idénticamente cero debido a que se propuso que g no fuera solución de la ecuación homogénea (24) y, por tanto, c es una raíz, con multiplicidad $m+1$ del polinomio q, pero no es raíz de p.

Si el factor $t-c$ apareciera en la descomposición primaria del polinomio p, digamos con multiplicidad k, entonces, en la descomposición primaria del producto pq apareciera el factor $(t-c)^{m+k+1}$ y, lógicamente, en este caso g sería solución de la ecuación diferencial homogénea, (24) asociada con la ecuación no homogénea (21). En tal caso se propone para y_N la expresión

$$y_N(x) = \left(A_k x^k + A_{k+1}x^{k+1} + \cdots + A_{k+m}x^{k+m}\right)e^{cx}, \qquad (31)$$

Y, para, determinar los valores de los A_j se resuelve la ecuación algebraica (30), con esta nueva función y_N. Debe notarse que si en la y_N en (31) se incluyeran las funciones

$$y_j(x) = x^{j-1}e^{cx} \qquad j = 0,1,2,\dots,k$$

al calcular $p(D)y_N$ todas estas desaparecen ya que cada una de ellas es solución de la ecuación diferencial homogénea $p(D)y = 0$.

Si g es de la forma más general

$$g(x) = \sum_{j=o}^{s} \alpha_i\, x^{m_j} e^{cj}, \qquad (32)$$

donde las α_i las m_j y las c_k son constantes dadas y las c_k son distintas entre sí, el procedimiento anterior sigue siendo válido en su totalidad y la ecuación (21) se puede resolver calculando las soluciones particulares de s ecuaciones no homogéneas, ya que en tal caso en la descomposición primaria del polinomio q aparecerán los s factores

$$\left(t-c_j\right)^{m_j-1} \qquad j = 1,2,\dots,s.$$

y después juntando las soluciones.

Quizá lo ideal, en está parte, sería establecer la solución completa de la ecuación diferencial no homogénea $p(D)y = g(x)$, cuando g es una función como la dada en (32), pero el procedimiento se vuelve demasiado engorroso, prácticamente inmanejable, ya que, por ejemplo, para una y_N como la dada en (29), si $m > 3$,resultan

$$y_N(x) = e^{cx}\sum_{k=0}^{m} A_k x^k, \tag{33}$$

$$y'_N(x) = \left(cA_m x^m + \sum_{k=0}^{m-1}\big(cA_k + (k+1)A_{k+1}\big)x^k\right)e^{cx},$$

$$y''_N(x) = \left(c^2 A_m x^m + c(cA_{m-1} + 2A_m) + \sum_{k=0}^{m-2}\big(c^2 A_k + 2c(k+1)A_{k+1} + (k+1)(k+2)A_{k+2}\big)x^k\right)e^{cx}$$

$$\begin{aligned} y'''_N = \Bigg(& c^3 A_m x^m + c^2(cA_{m-1} + 3A_m)x^{m-1} \\ & + c\big(c^2 A_{m-2} + 3c(m-1)A_{m-1} + 3(m-1)mA_m\big)x^{m-2} \\ & + \sum_{k=0}^{m-3}\big(c^3 A_k + 3c^2(k+1)A_{k+1} + 3c(k+1)(k+2)(k+3)A_{k+3}\big)x^k\Bigg)e^{cx}, \end{aligned}$$

y así seguirán aumentando los términos en derivadas de mayor orden. Estas derivadas se deben sustituir en la ecuación (30) y resolverla, para encontrar los valores de los A_k.

Para el caso simple de una ecuación diferencial de segundo orden, digamos

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = ax^m e^{cx}, \tag{34}$$

donde a, a_0, a_1, m y c son constantes dadas, suponiendo que c no es raíz del polinomio $p(t) = t^2 + a_1 t + a_0$, la función y_N dada en (29) quedará como

$$y_N(x) = e^{cx}\sum_{j=o}^{m} A_i\, x^j\ , \tag{35}$$

de manera que, tomando en cuenta que e^{cx} no se anula en ningún valor de x, al calcular las primeras derivadas de y_N y sustituirlas en (34) se llega a la igualdad.

$$(c^2 + a_1 c + c_0)\, A_m x^m + \big(c(cA_{m-1} + 2A_m) + a_1(cA_{m-1} + A_m) + a_0 A_{m-1}\big)x^{m-1} + \cdots \tag{36}$$

Evidentemente, el coeficiente de x^m en el lado izquierdo debe ser igual a a y los coeficientes de las restantes potencias de x deben ser cero. Se sigue de aquí que, en este caso particular,

$$A_m = \frac{a}{c^2+a_1c+c_0} \qquad\qquad A_{m-1} = \frac{(2C+a_1)}{(c^2+a_1c+c_0)^2}, \ldots$$

4.3 Proyecciones Ortogonales.

Se desarrolla en esta sección un método para obtener soluciones aproximadas de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, no homogénea. Se pretende que dicho método se pueda aplicar en este tipo de ecuaciones cuando la parte no homogénea corresponda a funciones de características distintas a las consideradas en la sección anterior.

Definición. Sea W un subespacio de un espacio producto interno V y sea β un vector arbitrario de V. Se dice que un α de W es una mejor aproximación a β por vectores de W si

$$\|\beta - \alpha\| \leq \|\beta - \delta\| \qquad (37)$$

para todo δ de W. A tal vector α, cuando existe, se le llama también proyección ortogonal de β sobre W. Si todo vector de V tiene una proyección ortogonal sobre W, la aplicación que asigna a cada vector de V su proyección ortogonal sobre W se conoce como proyección ortogonal de V sobre W.

Hablando de manera un tanto informal podemos decir que el vector α de la definición es el vector de W que mas se parece a β. Esto se infiere del hecho de que si β pertenece al subespacio W, entonces, $\alpha = \beta$.

Teorema 4. Sea W un subespacio de un espacio producto interno V y sea β un vector de V.

(a) El vector de α de W es una mejor aproximación a β por vectores de W si, sólo si, $\beta - \alpha$ es ortogonal a todo vector de W.

(b) Si existe una mejor aproximación a β por vectores de W, ésta es única.

(c) Si W es de dimensión finita y si $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es una base ortonormal de W, entonces, el vector

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \langle \beta, \alpha_j \rangle \alpha_j \qquad (38)$$

es la mejor aproximación a β por vectores de W.

(d) Si W es de dimensión finita y si α es la mejor aproximación a β por vectores de W, entonces

$$\|\alpha\| \leq \|\beta\|$$

Una prueba de este teorema se puede encontrar en las páginas 32, 33 y 34 de la referencia (6).

Considérese la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea de orden n

$$p(D)y = g(x), \qquad (39)$$

donde p es un polinomio de n y g no pertenece a W; esto es, g no es una combinación lineal de funciones de la forma $x^k e^{cx}$, con c en $\mathbb{C}$ y $k = 0, 1, 2, ...$. Sea $F = \{y_1, \dots, y_n\}$ el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea

$$p(D)y = 0 \qquad (40)$$

y supóngase que buscamos soluciones de la ecuación (39) en un intervalo $I = \{x/a < x < b\}$, en el cual toma valores "pequeños" (cercanos a 0).

Sea h la proyección ortogonal de g sobre el subespacio S del conjunto fundamental de V quedando por F y propóngase la ecuación diferencial

$$p(D)y = h(x) \qquad (41)$$

Para valores de x en el intervalo I, $g(x) \approx h(x)$ de manera que podemos resolver esta nueva ecuación por los métodos estudiados en las secciones anteriores, para obtener soluciones aproximadas de la ecuación (39) en I.

El hecho de que las soluciones de la ecuación (41) son aproximaciones de (39) evidentemente para valores de x en I no representa una limitante sustancial ya que siempre se puede recurrir a traslaciones de la variable x o de las funciones involucradas en el procedimiento. Lo que si representa una limitante considerable para las aplicaciones es el aparato algebraico que se debe desplegar para plantear la ecuación (41), y después, obviamente, para tratar de resolverla. Estas complicaciones surgen aún en casos relativamente sencillos como el siguiente.

Tratamos de resolver la ecuación diferencial no homogénea

$$y'' - 3y' + 2y = g(x),$$

donde, como antes, g no pertenece a W. Para formular esta ecuación como en (39), tendríamos

$$p(D)y = g(x),$$

donde $p(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$. El espacio de soluciones S de la ecuación estaría generado por las funciones

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = e^{2x},$$

quedando así que, para este caso, $F = \{y_1, y_2\}$. Para obtener la proyección ortogonal h de g sobre S debemos encontrar primero una base ortonormal de este subespacio, lo cual podemos conseguir empleando el proceso de ortogonalización de *Gran – Schmidt*. Para ello definimos lo siguiente, vamos a tomar como espacio vectorial V al conjunto fundamental, el cual tiene estructura de espacio vectorial y definimos la norma.

Usaremos el siguiente producto interno para facilitar el calculo algebraico y la notación definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx$$

Se llega así al conjunto ortonormal $F^{'} = \{u_1, u_2\}$, donde

$$u_1(x) = c_1 e^x, \qquad u_2(x) = c_2 e^{2x} - c_3 e^x,$$

y las constantes c_1, c_2 y $c_3$están dadas por

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{senh(2)}},$$

$$c_2 = \frac{3\sqrt{2} senh(2)}{\sqrt{senh(2)\left(9\ senh\ (4) - 3\ senh^2(3)\right)}},$$

$$c_3 = -\frac{2\sqrt{2} senh(3)}{\sqrt{senh(2)\left(9\ senh(4) - 3\ senh^2(3)\right)}}$$

Según el teorema presentado al principio de esta sección, la proyección ortogonal h de g sobre S queda como

$$h = \langle g, u_1 \rangle u_1 + \langle g, u_2 \rangle u_2.$$

Resultan evidentes las complicaciones que pueden resultar para realizar este cálculo, esto se debe a la realización de cálculos algebraicos.

CONCLUSIONES

En el tratamiento elemental de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes se usan los llamados operadores diferenciales y cierto tipo de objetos denominados operadores diferenciales inversos. Unos y otros se manejan de manera poco rigurosa; de hecho, se habla de operadores inversos aún cuando los operadores originales no son inversibles. Independientemente de que la parte operativa de este enfoque funciona, si en algún momento se deseara extender o generalizar la teoría o se pretendieran justificar detalles relacionados con ésta, en muchas ocasiones el trabajo resultaría imposible. Por supuesto, para darle formalidad a la teoría en cuestión, se requiere disponer de ciertos conocimientos y, sobre todo, del manejo fluido de estos, en un área del Algebra Lineal que no es tan elemental.

En este trabajo, mediante planteamientos formales se consiguió llegar a soluciones de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, homogéneos y no homogéneos, en términos puramente algebraicos; es decir, se resolvieron ecuaciones diferenciales del tipo citado, resolviendo ecuaciones algebraicas. Con esto se cumple el objetivo general de la tesis. Empleando estos procedimientos es, evidentemente un trabajo más simple, ya que al final, las cosas se reducen a encontrar raíces de polinomios.

En la última sección del documento: Proyecciones ortogonales (cap. 4) se desarrolló un método para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones no homogéneas, cuando la parte no homogénea no consiste de funciones de la forma $x^k e^{cx}$. Obviamente hace falta desarrollar todavía muchas cosas en este sentido; por ejemplo, con lo expuesto allí no se puede determinar el grado de aproximación de la solución encontrada ni se pueden inferir cuestiones sobre las limitaciones reales del método. Aspectos como estos, son elementos que quedan abiertos para desarrollos posteriores.

BIBLIOGRAFIA

1. *Boyce, W. E., – DiPrima, R. C.*, **Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores a la Frontera,** 4ta. Edición 1998. Ed. Limusa.

2. *Zill, Dennis G*. **Ecuaciones diferenciales con aplicaciones**. 3ra. Edición 1994. Grupo Ed. Iberoamérica.

3. *Hoffman, K. – Kunze, R*., **Álgebra Lineal,** 2da. Edición 1971. Ed. Prentice Hall.

4. *Lang, S*., **Álgebra Lineal,** 2da. Edición 1982. Ed. Fondo Educativo Interamericano.

5. *Rainville, E.D., - Bedient, P. E.*, **Ecuaciones Diferenciales,** 5ta. Edición 1984. Ed. McGraw Hill.

6. *Simmons, G. F.*, **Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas,** 2da. Edición 1993. Ed. McGraw Hill.

7. *Valadez, R. M*., **Álgebra Lineal: Productos Internos y Teoremas de Estructura**, 1ra. Edición 1998. Ed.UNAM.