



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN
MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS**

**MEDICIÓN DEL RIESGO OPERATIVO A
TRAVÉS DE VALORES EXTREMOS:
UNA APLICACIÓN AL SECTOR
FINANCIERO**

T E S I S A

**QUE PARA OBTENER EL DIPLOMA DE
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA
APLICADA PRESENTA:**

MARÍA ELENA RIVERA MANCÍA

2009



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**MEDICIÓN DEL RIESGO
OPERATIVO A TRAVÉS DE
VALORES EXTREMOS: UNA
APLICACIÓN AL SECTOR
FINANCIERO.**

Rivera Mancía María Elena

Junio de 2009.

*Atravesaste la luz en forma de eternidad,
pero no dudo que al mirar hacia mi interior...
podré hallarte.*

A ti, la mujer que más he amado en esta vida:

Mamá.

Agradecimientos

A mis padres y a mis hermanos por alentarme para concluir esta tesina, con su amor, su ejemplo y su confianza en mí.

A Carlos Erwin y a Salvador Zamora por su apoyo para la realización de este trabajo.

A mis sinodales: Dr. Ignacio Méndez, M. en E. Leticia Gracia, M. en E. Patricia Romero, Dr. Carlos Díaz y Dra. Silvia Ruíz, por su tiempo y dedicación para la revisión de mi trabajo.

A Toño por haberme ayudado indirectamente a obtener los datos para realizar este trabajo.

A mis amigos y a toda la gente que cree en mí.

A la UNAM.

Índice general

1. Introducción.	5
2. Riesgo operativo.	7
2.1. Concepción del riesgo operativo.	7
2.1.1. Definición y clasificación del riesgo operativo.	8
2.1.2. Por qué estudiar el riesgo operativo.	9
2.1.3. Aspectos generales para la medición del riesgo operativo.	9
3. Teoría de valores extremos.	11
3.1. Aspectos básicos.	11
3.2. Variables aleatorias estables.	12
3.3. Distribución valor extremo generalizada.	13
3.4. El teorema de Fisher-Tippett	14
3.5. La distribución Pareto generalizada.	16
3.6. El teorema de Pickands-Balkema	17
3.7. Modelo de picos sobre el umbral (POT).	18
4. Ajuste de datos.	21
4.1. Selección del umbral.	21
4.1.1. Threshold Choice Plot: tcplot	21
4.1.2. Mean Residual Life Plot: mrlplot	22
4.1.3. Dispersion Index Plot: diplot	24
4.2. El ajuste de la GPD.	27

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	4
4.3. Diagnóstico del ajuste	27
4.3.1. Gráfico de probabilidad	28
4.3.2. Gráfico cuantil-cuantil.	28
4.3.3. Gráfico de densidad.	29
4.3.4. Gráfico del nivel de retorno.	29
5. Una aplicación al sector financiero.	31
5.1. Análisis exploratorio	31
5.2. Selección del umbral	33
5.3. El ajuste de la distribución GPD	34
5.4. El modelo POT y los requerimientos de capital	35
5.4.1. Severidad esperada	36
5.4.2. Provisión extra de capital	36
5.4.3. Cantidad total de capital contra riesgos operativos en un periodo de tiempo	37
6. Técnicas sugeridas en el estudio del riesgo operativo	44
7. Conclusiones	45
A. Convergencia de variables aleatorias.	46
B. Estimadores de Hill.	48
C. Teorema de Fisher-Tippett	50
D. Teorema de Pickands-Balkema	52

Capítulo 1

Introducción.

En los últimos años, se han suscitado diversos “escándalos” en el sector financiero a nivel mundial como consecuencia de la falta de control de riesgos operativos, los cuales han provocado severos daños y, en muchos casos, han llevado a las entidades financieras a la quiebra.

Ante esta situación, el Acuerdo de Capital Basilea II de 2004 determinó los requerimientos de capital que deben adoptar las entidades financieras (en su mayoría bancos) para hacer frente a pérdidas operacionales. Dicho acuerdo estableció el 2007 como el año en que las entidades financieras debían tener implementado el cálculo de sus requerimientos de capital por riesgos operativos. Sin embargo, existen instituciones que aún no cuentan con un método bien definido y confiable para el cálculo de tales requerimientos.

El presente trabajo pretende resaltar la importancia que tiene el estudio del riesgo operativo, así como utilizar herramientas que faciliten su estudio y arrojen resultados cuantitativos que permitan hacer frente a la materialización de riesgos operativos. Para ello, ha sido necesario acudir a la teoría clásica utilizada en el estudio de riesgos, específicamente la teoría de valores extremos.

El trabajo se encuentra organizado en siete capítulos. En el capítulo dos, es posible conocer los aspectos generales del riesgo operativo, tales como su

definición y clasificación. De igual modo, puede apreciarse a grandes rasgos la regulación que recientemente se ha implementado en la materia, como consecuencia de fuertes quebrantos históricos derivados de una inadecuada administración de riesgos.

El capítulo tres presenta las bases de la Teoría de Valores Extremos (EVT por sus siglas en inglés), tales como la definición de variables aleatorias estables y dos de los teoremas más importantes dentro de esta teoría: el de Fisher-Tippet y el de Pickands-Balkema. Asimismo, se presenta el modelo de Picos Sobre el Umbral (POT por sus siglas en inglés), el cual será utilizado a lo largo del análisis y constituye una de las opciones más flexibles y confiables para el tratamiento de datos reales.

El capítulo cuatro presenta las principales técnicas para el ajuste de datos, basados en la selección de un “umbral” que, como se verá en el trabajo, constituye un paso crucial en la realización del análisis.

Posteriormente, el capítulo cinco incluye una aplicación de la teoría a un tipo particular de riesgo operativo, contándose con registros de éste entre los años 2003 y 2007, durante los cuales la manifestación de este riesgo puso en peligro la continuidad operativa de algunas entidades financieras. Asimismo, se muestran los requerimientos mínimos de capital para hacer frente a este tipo de riesgo.

Finalmente, se presentan las conclusiones y se incluyen apéndices en los que es posible estudiar con mayor detalle algunos de los aspectos teóricos utilizados en el documento.

Capítulo 2

Riesgo operativo.

2.1. Concepción del riesgo operativo.

El riesgo operativo es inherente a un sinnúmero de actividades, sin embargo, ha sido poco tomado en cuenta en gran número de instituciones y empresas. Tuvieron que ocurrir eventos catastróficos para que este tipo de riesgos comenzaran a estudiarse con mayor detenimiento, pero no fue sino hasta inicios de este siglo que el Comité de Basilea¹, a través del Nuevo Acuerdo de Capital (Basilea II), determinó la obligación de estudiar “formalmente” el riesgo operativo. Dicho comité ha clarificado las complejas cuestiones sobre el manejo de riesgos adoptando “tres pilares²”:

1. Requerimientos mínimos de capital.
2. Comité de supervisión.

¹El Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria, mejor conocido como Comité de Basilea, es un foro integrado por los gobernadores de los bancos centrales y reguladores bancarios de los países integrantes del Grupo de los Diez (G10). Sus conclusiones y recomendaciones se han convertido en la norma de supervisión y regulación bancaria en el resto del mundo.

²Es posible encontrar mayor información sobre los tres pilares en el sitio: <http://www.basel-ii-risk.com/Basel-Three-Pillars/index.htm>

3. Disciplina de mercado. Referente a la transparencia y consistencia de los procedimientos para el manejo de riesgos.

Es importante resaltar que aunque el riesgo operativo ha existido desde siempre, han aparecido puntos relativamente nuevos en torno a él:

1. El intento de definirlo con la mayor precisión posible y situarlo en relación a los otros tipos de riesgos.
2. El desarrollo de metodologías para identificarlo.
3. El intento de medirlo.
4. La exigencia regulatoria de capital para hacer frente a sus efectos adversos.
5. Los cambios del entorno de los negocios, de la competencia, de las tecnologías y de las actividades delictivas que originan nuevas modalidades de riesgo operativo.

2.1.1. Definición y clasificación del riesgo operativo.

Al hablar de riesgos, es común referirnos al riesgo de crédito o al riesgo de mercado, sin embargo cuando nombramos al riesgo operativo no sabemos a ciencia cierta a qué nos estamos refiriendo. Algunos simplemente han optado por decir que el riesgo operativo es aquel no tipificable como riesgo de crédito, de mercado o de seguro; no obstante, ésta no parece ser una buena definición.

Ante esta situación, el Comité de Basilea decidió unificar la definición de riesgo operativo como sigue:

Definición 2.1. Se define el *riesgo operativo* como el riesgo de pérdidas derivadas de fallas en los sistemas, en la actuación del personal, por eventos externos o por procesos internos no adecuados.

El Acuerdo de Basilea II establece en su definición una taxonomía de riesgos operativos integrada por cuatro categorías básicas (sin el establecimiento de subcategorías):

- Procesos internos.
- Personal.
- Sistemas.
- Factores externos.

2.1.2. Por qué estudiar el riesgo operativo.

En los párrafos anteriores se presentó a grandes rasgos el concepto y origen del riesgo operativo, sin embargo, aún no ha quedado claro el porqué debe ser estudiado con detenimiento. Para ello, empezaremos por recordar algunos quebrantos históricos originados por riesgos operativos, los cuales se encuentran descritos en el cuadro 2.1.

Ante tales sucesos, el Comité de Basilea determinó la obligación de los bancos de medir los riesgos operativos y tener una provisión de capital para hacerles frente.

Sin embargo, no todos los quebrantos por riesgos operativos se encuentran registrados, de tal manera que la inexistencia de bases de datos internas sobre eventos de pérdidas operacionales, constituye uno de los mayores problemas para el estudio del riesgo operativo.

2.1.3. Aspectos generales para la medición del riesgo operativo.

Medir el riesgo operativo no es trivial, pues además de la carencia de bases de datos con registros históricos, este tipo de riesgos llevan consigo una fuerte carga de factores subjetivos. No obstante, en el estudio de riesgos operativos es importante clasificar los eventos para su posterior medición:

- Eventos raros con severidad fuerte.
- Eventos frecuentes con severidad pequeña.

Año	Institución	Pérdidas estimadas (millones)	Evento
1995	Barings Bank	USD \$1,300	En la sucursal de Singapur, un <i>trader</i> acumuló pérdidas no reportadas durante dos años.
1995	Dalwa Bank	USD \$1,100	Durante once años, un <i>trader</i> de bonos acumuló pérdidas no reportadas.
1996	Morgan Grenfell	£ 400	Durante dos años, un administrador de fondos invirtió en acciones de una empresa “chatarra”.
1997	Natwest Bank	£ 91	Valuación incorrecta de opciones.
2002	All First	USD \$691	Durante tres años, se ocultaron pérdidas en la negociación de divisas.
2008	Société Générale	€4,900	Un <i>broker</i> ocultó pérdidas por operaciones no autorizadas en el mercado de futuros.

Cuadro 2.1: *Quebrantos históricos derivados de riesgos operativos.*

- Eventos raros con severidad pequeña.
- Eventos frecuentes con severidad fuerte.

Los eventos que más nos interesarán para la medición del riesgo operativo son aquellos caracterizados por su alta frecuencia pero baja severidad, o bien, aquellos con baja frecuencia pero alta severidad. Este tipo de eventos pueden ser tratados utilizando la teoría de valores extremos, cuyos detalles se presentan en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Teoría de valores extremos.

3.1. Aspectos básicos.

La teoría de valores extremos (EVT por sus siglas en inglés) tiene como ventaja principal el ser un método cuantitativo que toma en cuenta la frecuencia y severidad de las pérdidas.

Existen dos tipos de modelos principales para valores extremos. El grupo más antiguo lo constituyen los modelos de bloques máximos, los cuales son utilizados para las observaciones más grandes, obtenidas a través de muestras grandes de observaciones idénticamente distribuidas. Un grupo más moderno de modelos son los de picos sobre el umbral (POT por sus siglas en inglés), utilizados para todas las observaciones grandes que exceden un umbral determinado.

Dentro de los modelos POT, es posible distinguir dos tipos de análisis: modelos semiparamétricos construidos alrededor del estimador de Hill¹ y sus derivados; y modelos paramétricos completos, basados en la distribución Pareto generalizada (GPD por sus siglas en inglés). Ambos se encuentran justificados teórica y empíricamente cuando se utilizan correctamente, sin embargo los modelos basados en la GPD son comúnmente utilizados por

¹Ver apéndice B.

su simplicidad, pues es posible obtener fórmulas paramétricas simples para medir riesgos extremos, debido a que es relativamente fácil estimar el error estadístico utilizando técnicas de máxima verosimilitud.

Por otra parte, los modelos POT generalmente son considerados los más útiles para aplicaciones prácticas, por lo que este trabajo se concentrará en este tipo de modelos, no sin antes presentar un panorama general sobre la teoría de valores extremos.

3.2. Variables aleatorias estables.

Uno de los problemas fundamentales del manejo de riesgos es identificar la forma funcional de la distribución de utilidad o de pérdida y, aunque es posible obtenerlas a través de métodos de simulación, esto generalmente trae consigo una implementación sumamente compleja y la necesidad de invertir una buena cantidad de tiempo.

Recordemos que cada pérdida (utilidad) aleatoria X tiene asociada una función de distribución, con cuatro parámetros básicos: el de localización μ , el de escala σ , el índice de cola α y la curtosis β . Ahora bien, hablaremos de un tipo especial de variables aleatorias, para lo cual tenemos la siguiente:

Definición 3.1. Se dice que una variable aleatoria X tiene una *distribución α -estable* si para algún $n \geq 2$ existe un número positivo c_n y un número real d_n tal que:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n \quad (3.1)$$

donde X_1, X_2, \dots, X_n son copias independientes de X y $c_n = n^{1/\alpha}$ para algún número α , $0 \leq \alpha \leq 2$, llamado el *índice de estabilidad*.

Las funciones de distribución de variables aleatorias estables generalmente no se encuentran expresadas explícitamente, con algunas excepciones. Sin embargo, pueden ser descritas a través de su función característica, dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_X(t; \alpha, \beta, \mu, \sigma) &:= E[\exp(itX) \mid \alpha, \beta, \mu, \sigma] \\ &= \begin{cases} \exp(i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sen}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2}))) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp(i\mu t - \sigma |t| (1 + i\beta \operatorname{sen}(t) \frac{2}{\pi} \log |t|)) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

para $-\infty < t < \infty$, $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$, μ real y donde $E[\bullet]$ denota la esperanza.

Para saber si una variable aleatoria tiene una distribución estable, podemos hacer uso del siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Una variable aleatoria X tiene una distribución estable si y sólo si tiene un dominio de atracción, i.e., si existe una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas Y_1, Y_2, \dots, Y_n y sucesiones de números positivos $\{d_n\}$ y números reales $\{a_n\}$ tal que:*

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{d_n} + a_n \stackrel{d}{\Rightarrow} X \quad (3.3)$$

Donde $\stackrel{d}{\Rightarrow}$ denota la convergencia² en distribución cuando $n \rightarrow \infty$.

En general, $d_n := n^{1/\alpha} h(n)$, donde $h(x)$, $x > 0$ es una *función de variación regular* en infinito, es decir, para $u > 0$ suficientemente grande:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(ux)}{h(x)} = 1 \quad (3.4)$$

Cuando X es una variable aleatoria Gaussiana, i.e., $\alpha = 2$ y Y_1, Y_2, \dots, Y_n son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con varianza finita, entonces (3.3) es el enunciado del teorema central del límite.

3.3. Distribución valor extremo generalizada.

Como bien sabemos, la distribución normal juega un papel preponderante como distribución límite en el teorema central del límite. De manera análoga,

²Ver apéndice A.

existe una familia de distribuciones muy importantes para estudiar el comportamiento límite de los extremos muestrales, conocida como la *familia de distribuciones valor extremo*. Esta familia puede representarse bajo una sola parametrización, conocida como la *distribución valor extremo generalizada* (GEV por sus siglas en inglés).

Definición 3.2. La *función valor extremo generalizada* se define como:

$$H_{\xi;\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \exp \left[- \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right] & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp \left[-\exp \left(1 - \frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right] & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad 1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} > 0 \quad (3.5)$$

Tres distribuciones bien conocidas son casos especiales de H :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tipo I (Gumbel) :} \\ \text{Tipo II (Frechet) :} \\ \text{Tipo III (Weibull) :} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} H(x) = \exp(-e^{-x}) \quad x \in \mathbb{R} \\ H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \end{cases} \\ H(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}) & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{array} \quad (3.6)$$

3.4. El teorema de Fisher-Tippett

El teorema de Fisher-Tippett constituye el resultado fundamental en la teoría de valores extremos y puede considerarse que dentro de ella, juega el mismo papel que el teorema central del límite para estudiar las sumas de variables aleatorias. El teorema describe el comportamiento límite del máximo muestral normalizado apropiadamente. Las posibles distribuciones para el máximo de n variables aleatorias i.i.d. son identificadas como la clase de *distribuciones máx-estables*.

Supóngase que X_t , $t = 1, 2, \dots, n$ es una sucesión de variables aleatorias

independientes idénticamente distribuidas, con función de distribución:

$$F(x) = Pr [X \leq x]$$

cuya media será denotada por μ (parámetro de localización) y su varianza por σ^2 (parámetro de escala). F podría representar, por ejemplo, una distribución de severidad de la pérdida.

Al tratar las pérdidas como un número positivo, estamos interesados en la cola derecha de la distribución de pérdidas. Denotemos el máximo muestral de X_t , como $M_n = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $n \geq 2$ y sea \mathbb{R} la recta de números reales. La teoría de valores extremos se enfoca en los máximos y mínimos de las distribuciones.

Ahora nos encontramos listos para enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.2 (Fisher-Tippett). Sean $\{X_n\}$ variables aleatorias i.i.d. de una distribución desconocida F y supóngase que pueden hallarse constantes $c_n > 0$ y $d_n \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H \quad (3.7)$$

para alguna función no degenerada³ H .

Si las condiciones anteriores se cumplen, decimos que F se encuentra en el máximo dominio de atracción de H , lo que se escribe como $F \in MDA(H)$.

Fisher y Tippett demostraron que $F \in MDA(H) \Rightarrow H$ es del tipo $H_{\xi; \mu, \sigma}$, para alguna ξ . Una demostración de este teorema puede encontrarse en el apéndice C.

El teorema nos dice que si el máximo normalizado adecuadamente converge en distribución, entonces la distribución límite debe ser una distribución valor extremo para algún valor de los parámetros ξ, μ y σ .

³Una función real analítica $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$) definida en un dominio $\Upsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamada *no degenerada* si $c_1 f_1 + \dots + c_m f_m \neq 0$ para algún vector de constantes $(c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

Decimos que f es *degenerada* si no es no degenerada.

Obviamente f es no degenerada si y sólo si el rango $f(\Upsilon)$ de f no se encuentra en un subespacio lineal $(m-1)$ -dimensional de \mathbb{R}^m .

Obsérvese que para la obtención de este resultado no se requiere un conocimiento detallado de la distribución de las $\{X_n\}$.

Asimismo, cabe señalar que en (3.7), en el caso de las distribuciones α -*máx-estables*, el parámetro ξ satisface $1/2 \leq \xi = 1/\alpha < \infty$ y determina la existencia de los momentos. Para el caso Gaussiano, $\alpha = 1/\xi = 2$, mientras que para $\xi > 1$ la distribución no tiene momentos finitos.

El teorema de Fisher-Tippet sugiere el ajuste de la distribución GEV a los datos basándose en el máximo muestral cuando tales datos pueden ser recolectados.

3.5. La distribución Pareto generalizada.

Algunos resultados en teoría de valores extremos describen el comportamiento de observaciones grandes cuando exceden umbrales altos, y son precisamente esos resultados los que permiten modelar pérdidas grandes. Al preguntarse si una observación dada es extrema, surge la duda sobre qué tan extrema puede ser. Para responder a esta pregunta, es necesario conocer la distribución Pareto generalizada (GPD), usualmente expresada a través de una función de distribución que depende de dos parámetros.

$$G_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) & \xi = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\text{donde } y \in \begin{cases} [0, \infty) & \xi \geq 0 \\ \left[0, -\frac{1}{\xi}\right] & \xi < 0 \end{cases}$$

Cuando $\xi > 0$, tenemos una versión reparametrizada de la distribución Pareto usual con parámetro $\alpha = 1/\xi$; si $\xi < 0$, tenemos una distribución Pareto tipo II; si $\xi = 0$ se trata de una versión reparametrizada de la distribución exponencial.

3.6. El teorema de Pickands-Balkema

Junto con el teorema de Fisher-Tippett, este teorema constituye uno de los más importantes en la teoría de valores extremos. Antes de enunciarlo, es necesario conocer las siguientes definiciones:

Definición 3.3. Dada una sucesión de variables aleatorias i.i.d. $\{X_n\}$, provenientes de una distribución F , definimos la *función de exceso* como $Y := X - u$ sobre el *umbral* u .

Definición 3.4. Se define un *excedente* del nivel u si en el evento $X = x$, tenemos $x > u$.

Definición 3.5. Sea x_0 (posiblemente infinito) el punto final del lado derecho de la distribución F , digamos $x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} \leq \infty$, definimos la *función de distribución de exceso sobre el umbral* u por:

$$F_u(y) := P(X - u \leq y \mid X > u) = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (3.9)$$

para $0 < y < x_0 - u$.

Teorema 3.3 (Pickands-Balkema)⁴. Si se cumplen las condiciones MDA, la distribución Pareto generalizada (3.8) es la distribución límite para la distribución de exceso cuando el umbral tiende al punto final de la derecha. Esto es, podemos encontrar una función medible positiva $\beta(u)$ tal que:

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{0 \leq y < x_0 - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0 \quad (3.10)$$

si y sólo si $F \in MDA(H_\xi)$.

El teorema nos dice que, para umbrales altos u , la función de distribución de exceso puede ser aproximada por $G_{\xi, \beta(u)}(y)$ para algunos valores de ξ y β . De manera equivalente, para $y - u \geq 0$, la función de distribución del

⁴Es posible encontrar una demostración de este teorema en el apéndice D.

excedente $F_u(y - u)$ puede aproximarse por $G_{\xi,\beta}(y - u) = G_{\xi,u,\beta}(y)$.

Este resultado es relevante debido a que podemos intentar ajustar la distribución Pareto generalizada a los datos que excedan umbrales altos.

3.7. Modelo de picos sobre el umbral (POT).

En el modelo POT, se establece un umbral y posteriormente se estima la distribución de exceso sobre el umbral. Existen dos aproximaciones para estimar esta distribución: los modelos semiparamétricos, basados en el estimador de Hill, y los modelos paramétricos completos, basados en la distribución Pareto generalizada. La aproximación basada en el estimador de Hill tiene aplicaciones limitadas debido a que es necesario el supuesto de colas pesadas de la distribución F , mientras que la GPD es aplicable a cualquier tipo de distribución, de colas pesadas o no.

La ocurrencia de pérdidas extremas en el tiempo puede ser vista como un proceso puntual N_u del exceso, el cual converge en probabilidad a una distribución Poisson. La distribución Pareto generalizada proporciona un modelo para el excedente sobre un umbral u adecuado, mientras que la aproximación Poisson límite permite hacer inferencia sobre la intensidad de su ocurrencia. El modelo asintótico resultante es el modelo de picos sobre el umbral (POT), que puede ser obtenido utilizando el teorema de Pickands-Balkema para ajustar una distribución Pareto generalizada al excedente sobre umbrales específicos.

Para u ajustado, los parámetros del modelo POT son los parámetros ξ y β_u de la GPD y la tasa excedente λ_u del Poisson. Los parámetros de localización y escala se encuentran en términos de los parámetros anteriores y pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}\mu &= u + \beta\xi^{-1}(\lambda^\xi - 1) \\ \sigma &= \beta\lambda^\xi\end{aligned}\tag{3.11}$$

Asimismo, los parámetros de localización y escala alternativos, determinan el parámetro de escala y la tasa excedente respectivamente como:

$$\begin{aligned}\beta_u &= \sigma + \xi(u - \mu) \\ \lambda_u &:= \left(1 + \xi \frac{u - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\end{aligned}\tag{3.12}$$

De este modo, es posible observar cómo el modelo POT considera los dos aspectos más importantes del riesgo operativo: la severidad y la frecuencia de la pérdida.

Una vez hechas todas las consideraciones anteriores, es posible entrar en materia de riesgo operativo. En este problema u puede ser considerado como el *umbral de pérdida inesperado*.

Ahora bien, con base en todos los resultados teóricos vistos y en la representación del exceso como un proceso puntual dado por el modelo POT, es posible cuantificar el riesgo operativo. Para ello no deben dejarse de lado las siguientes consideraciones:

- La distribución Pareto generalizada permite modelar la severidad de la pérdida. La esperanza de la distribución exceso de pérdida, i.e., la severidad esperada es una medida coherente de riesgo⁵ y está dada por:

$$E(X - u | X > u) = \frac{\beta_u + \xi u}{1 - \xi} \quad \text{con } \beta := \sigma + \xi(u - \mu)\tag{3.13}$$

- El número de excesos N_u sobre el umbral u y sus correspondientes excedentes son modelados por un proceso Poisson puntual, con intensidad

⁵Una medida de riesgo $R(\bullet)$ se dice que es *coherente* si:

- $R(\bullet)$ es monótona, i.e. $X \leq Y \Rightarrow R(X) \leq R(Y)$.
- $R(\bullet)$ es homogénea positivamente, i.e. para algún $\lambda \geq 0$ $R(\lambda X) = \lambda R(X)$.
- $R(\bullet)$ es invariante bajo traslaciones, i.e. para algún κ , $R(X + \kappa) = R(X) + \kappa$.
- $R(\bullet)$ es subaditiva, i.e. $R(X + Y) \leq R(X) + R(Y)$.

dada por:

$$\lambda_u := \left(1 + \xi \frac{u - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \quad (3.14)$$

- La provisión extra de capital para riesgo operativo sobre el umbral de pérdida inesperada u es estimada como la esperanza de la distribución exceso de pérdida, escalada por la intensidad λ_u del proceso Poisson.

$$\lambda_u E(X - u | X > u) = \lambda_u \frac{\beta_u + \xi u}{1 - \xi} \quad (3.15)$$

donde μ, σ, β y λ son los parámetros del modelo POT y el tiempo es medido en las mismas unidades que la frecuencia de la colección de datos (años, meses, días, entre otros).

- La cantidad total de capital contra los riesgos operativos extremos para el periodo de tiempo T será calculada por:

$$u_T + \lambda_u T E(X - u | X > u) = u_T + \lambda_u T \frac{\beta_u + \xi u}{1 - \xi} \quad (3.16)$$

donde u_T puede considerarse en primera instancia igual a u , bajo el supuesto de máx-estabilidad.

Estos resultados serán considerados posteriormente, lo que permitirá calcular los requerimientos mínimos de capital y dar cumplimiento al primer pilar del acuerdo de Basilea.

Capítulo 4

Ajuste de datos.

4.1. Selección del umbral.

El umbral para la distribución Pareto generalizada es un parámetro particular que, en la mayoría de los casos, no es estimado como los demás. En general, todos los métodos utilizan el teorema de Pickands-Balkema (D.1) para definir un umbral apropiado. En esta sección, se presentarán algunos de los métodos más utilizados para la selección del umbral, teniendo en cuenta que el principal objetivo de la selección del umbral es seleccionar suficientes eventos que permitan reducir la varianza, pero sin inducir sesgos.

En la práctica, el valor del umbral elegido debe ser tan bajo como sea posible, procurando que la estimación del modelo sea razonable.

4.1.1. Threshold Choice Plot: tcplot

A través de este gráfico, se analiza la estabilidad de la estimación del modelo con base en el ajuste de distintos modelos, utilizando umbrales en un rango determinado.

Sea $X \sim GP(\mu_0, \sigma_0, \xi_0)$. Sea μ_1 algún otro umbral tal que $\mu_1 > \mu_0$. La variable aleatoria $X | X > \mu_1$ es también GPD con parámetros actualizados

$\sigma_1 = \sigma_0 + \xi_0 (\mu_1 - \mu_0)$ y $\xi_1 = \xi_0$. Sea

$$\sigma_* = \sigma_1 - \xi_1 \mu_1 \quad (4.1)$$

Con esta nueva parametrización, σ_* es independiente de μ_1 . De este modo, los estimados de σ_* y ξ_1 son constantes para todo $\mu_1 > \mu_0$ si μ_0 es un umbral adecuado para la aproximación asintótica.

Las gráficas de elección del umbral representan los puntos definidos por:

$$\{(\mu_1, \sigma_*) : \mu_1 \leq x_{max}\} \quad y \quad \{(\mu_1, \sigma_1) : \mu_1 \leq x_{max}\} \quad (4.2)$$

donde x_{max} es el máximo de observaciones x .

Al graficar estos puntos, podemos seleccionar el valor de u más bajo tal que los estimados se mantengan más o menos constantes.

De acuerdo con la figura 4.1, podríamos optar por valores para el umbral en $u = 6000,000$ o en $u = 7000,000$, por lo que elegimos el más bajo, como se establece en la práctica.

4.1.2. Mean Residual Life Plot: mrlplot

Esta gráfica está basada en la media teórica de la distribución Pareto generalizada. Sea X una variable aleatoria distribuida GPD (μ, σ, ξ) , teóricamente tenemos:

$$E[X] = \mu + \frac{\sigma}{1 - \xi}, \quad \text{para } \xi < 1 \quad (4.3)$$

Cuando $\xi \geq 1$ la media teórica es infinita.

En la práctica, si X representa el exceso sobre un umbral μ_0 y si la aproximación por una GPD es suficientemente buena, tenemos:

$$E[X - \mu_0 | X > \mu_0] = \frac{\sigma_{\mu_0}}{1 - \xi} \quad (4.4)$$

Para todo nuevo umbral μ_1 tal que $\mu_1 > \mu_0$, los excesos por encima

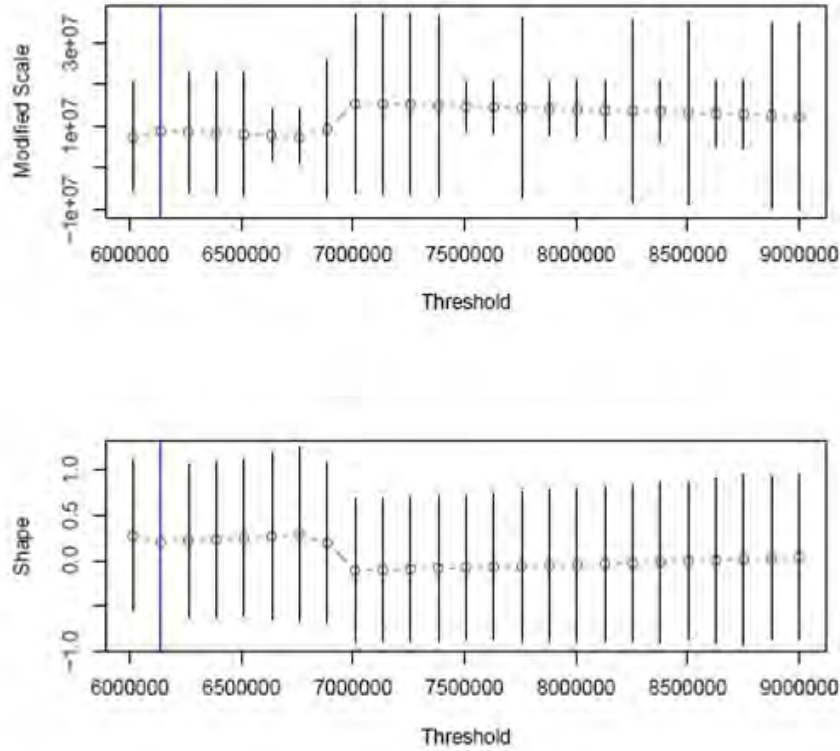


Figura 4.1: Elección del umbral con el gráfico *tcplot*

del nuevo umbral también son aproximados por una GPD con parámetros actualizados.

$$E[X - \mu_1 | X > \mu_1] = \frac{\sigma_{\mu_1}}{1 - \xi} = \frac{\sigma_{\mu_0} + \xi\mu_1}{1 - \xi} \quad (4.5)$$

La cantidad $E[X - \mu_1 | X > \mu_1]$ es lineal en μ_1 . O bien, $E[X - \mu_1 | X > \mu_1]$ es simplemente la media de los excesos por encima del umbral μ_1 , el cual puede ser estimado fácilmente usando la media empírica.

De este modo, la gráfica *mrlplot* consiste en representar los puntos:

$$\left\{ \left(\mu, \frac{1}{n_\mu} \sum_{i=1}^{n_\mu} x_{i,n_\mu} - \mu \right) : \mu \leq x_{max} \right\} \quad (4.6)$$

donde n_μ es el número de observaciones x por encima del umbral μ , x_{i,n_μ} es la i -ésima observación por encima del umbral μ y x_{max} es el máximo de las observaciones x .

Es posible añadir intervalos de confianza a esta gráfica, puesto que puede suponerse que la media empírica se distribuye normalmente (Teorema Central del Límite). Sin embargo, la normalidad no se mantiene más que para umbrales altos.

Más aún, por construcción, la gráfica converge al punto $(x_{max}, 0)$.

La gráfica proporciona una buena aproximación a la función de excesos medios, sin embargo, su interpretación en la práctica no es simple, pues a menudo la linealidad es vaga para una elección pequeña de u y, para u grande, la escasez de datos disponibles para los cálculos produce una gran variabilidad de la gráfica hacia el extremo derecho. No obstante, no debemos perder de vista que en los niveles para los cuales la distribución Pareto generalizada es una aproximación válida, la función de excesos medios de u es una función lineal de u . De este modo, se elige el umbral más bajo en donde la gráfica es casi lineal, tomando en cuenta las bandas del 95% de confianza. Esto podemos ejemplificarlo a través de la figura 4.2, en la cual el umbral es seleccionado en el punto más bajo a partir de que la función presenta aspecto lineal.

4.1.3. Dispersion Index Plot: diplot

El gráfico del índice de dispersión es particularmente útil cuando se trabaja con series de tiempo. La teoría de valores extremos establece que los excesos sobre un umbral pueden aproximarse por una GPD. Sin embargo, también establece que la ocurrencias de esos excesos deben ser representadas por un proceso Poisson.

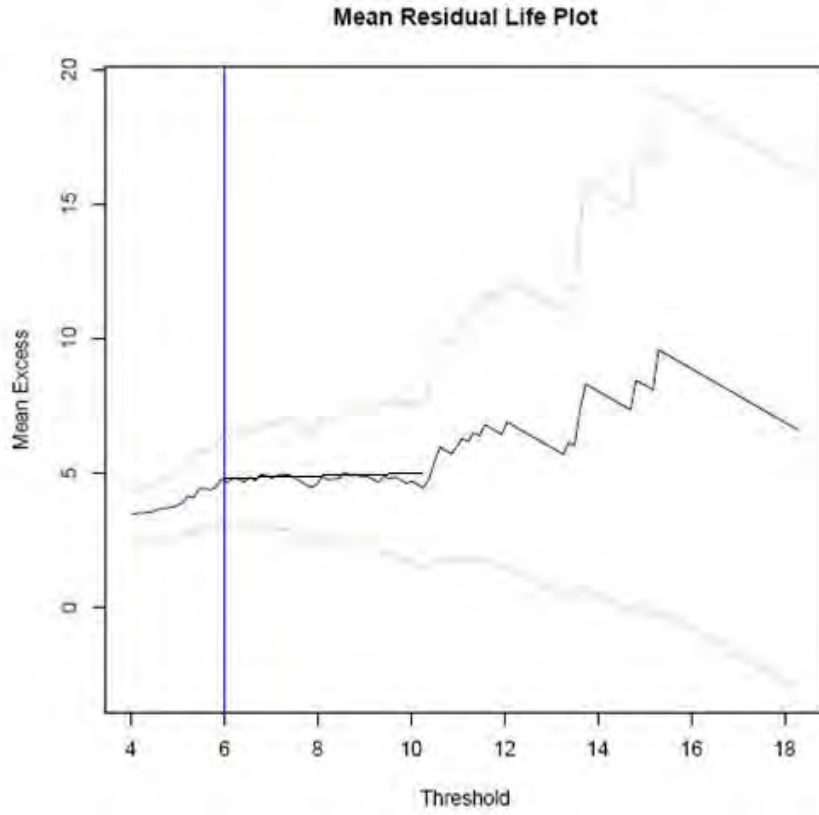


Figura 4.2: Elección del umbral utilizando el gráfico *mrlplot*

Sea X una variable aleatoria distribuida como una Poisson con parámetro λ . Esto es:

$$P[X = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (4.7)$$

De este modo, tenemos que $E[X] = Var[X]$.

El índice de dispersión se define como:

$$DI = \frac{var}{med} \quad (4.8)$$

donde *var* se refiere a la varianza y *med* a la media (generalmente el

número medio de eventos en un año).

De este modo, si el número de eventos tuviera una distribución Poisson, la razón de la varianza y la media debería ser igual a 1, por lo que al graficar, el umbral adecuado debería seleccionarse cuando el índice toma el valor 1, hecho que puede apreciarse en la figura 4.3.

Además, puede calcularse un intervalo de confianza utilizando la distribución χ^2 :

$$I_\alpha = \left[\frac{\chi_{(1-\alpha)/2, M-1}^2}{M-1}, \frac{\chi_{1-(1-\alpha)/2, M-1}^2}{M-1} \right] \quad (4.9)$$

donde M es el número total de periodos fijos.

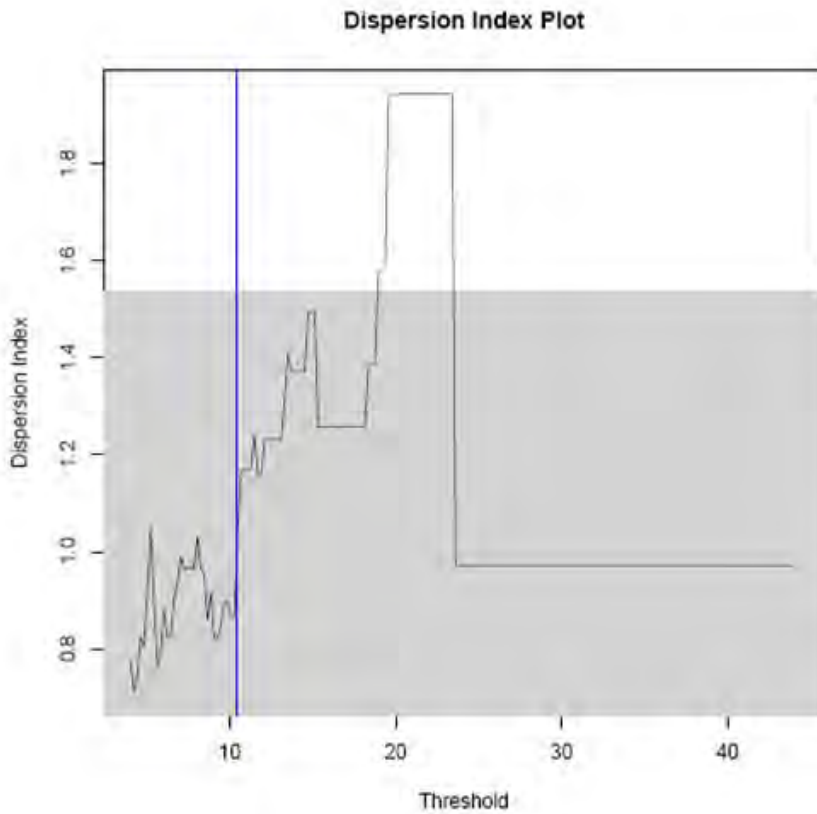


Figura 4.3: Elección del umbral con el índice de dispersión

4.2. El ajuste de la GPD.

Actualmente, existen cerca de 17 estimadores disponibles para ajustar una distribución Pareto generalizada. Entre los más importantes se encuentran el método de momentos, máxima verosimilitud, momentos ponderados de probabilidad sesgados e insesgados, mediana, pickands, máxima verosimilitud penalizada y estimadores mgf. Todos ellos, se encuentran implementados en R^1 , bajo los estimadores *moments*, *mle*, *pwmb*, *pwmu*, *med*, *pickands*, *mple* y *mgf*, respectivamente.

Para efectos de este trabajo, no se incursionará en mayores detalles. Sin embargo, es posible ampliar el conocimiento de estos estimadores en (Coles, 2001), (Hosking and Wallis, 1987), (Juarez and Schucany, 2004), (Peng and Welsh, 2001) and (Pickands, 1975).

4.3. Diagnóstico del ajuste

La manera más sencilla de evaluar la bondad del ajuste de la GPD es a través de distintos gráficos de diagnóstico, los más utilizados son los siguientes:

¹El programa R es una versión del programa S creado en los laboratorios ATT-Bell, sus orígenes se remontan a finales de la década de los 80's, cuando salió el programa S+ y las versiones comerciales de él, en especial S-Plus. Sin embargo, R es un paquete estadístico de dominio público, con una calidad muy superior a muchos paquetes estadísticos que cuestan "una pequeña fortuna".

Más que un programa de estadística R puede ser considerado un lenguaje de alto nivel. Fue escrito básicamente en Scheme con la implementación de algunas rutinas provenientes de Fortran. La filosofía de programación es muy similar a la del lenguaje C, pues es completamente estructurado.

Este paquete ha tenido la ventaja de contar con el apoyo de famosos estadísticos y científicos tales como Hastie, Tibshirani, Friedman, Ripley, Venables, entre otros. Muchos han contribuido con nuevas y novedosas rutinas para implementar nueva metodología estadística, lo que lo coloca como una importante herramienta para investigadores en estadística.

El programa se puede obtener, para diferentes plataformas, en la dirección de Internet: <http://cran.r-project.org/>

4.3.1. Gráfico de probabilidad

Consiste en graficar el valor ajustado de la función de distribución acumulativa contra el valor empírico de dicha distribución para cada uno de los datos. Si existe un buen ajuste, los puntos del gráfico deberían ubicarse en diagonal dentro de un cuadrado unitario. La justificación teórica de esta afirmación se basa en los siguiente:

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias continuas y sean x_1, x_2, \dots, x_n observaciones de una población común con distribución desconocida F . Supóngase que se ha obtenido una estimación de F a la que llamaremos \hat{F} . Al ser F función de distribución, $F(X_i)$ sigue una distribución uniforme en $(0, 1)$ para $i = 1, \dots, n$. Lo que es más, si $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ es la muestra ordenada, entonces la esperanza de esos cuantiles puede calcularse como:

$$E[F(X_i)] = \frac{i}{n+1} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.10)$$

Definición 4.1. Dada una muestra ordenada de observaciones independientes $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ de una población con función de distribución estimada \hat{F} , el gráfico:

$$\left\{ \left(\hat{F}(x_i), \frac{i}{n+1} \right) : i = 1, \dots, n \right\} \quad (4.11)$$

es llamada *gráfico de probabilidad (PP-plot)*.

4.3.2. Gráfico cuantil-cuantil.

Consiste en graficar el cuantil empírico contra el cuantil ajustado para cada dato. Al igual que en gráfico de probabilidad, si la estimación es razonable, el gráfico debería aproximarse a una diagonal. Este gráfico se define como sigue:

Definición 4.2. Dada una muestra ordenada de observaciones independientes $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ de una población con función de distribución

estimada \hat{F} , el gráfico:

$$\left\{ \left(\hat{F}^{-1} \left(\frac{i}{n+1} \right), x_i \right) : i = 1, \dots, n \right\} \quad (4.12)$$

es llamado *gráfico cuantil-cuantil (QQ-plot)*.

4.3.3. Gráfico de densidad.

La función de distribución de probabilidad es superpuesta en un histograma de los datos para verificar el ajuste. Se espera que los datos muestrales se ajusten a la densidad teórica de la distribución que esperamos obtener, en este caso la Pareto Generalizada.

4.3.4. Gráfico del nivel de retorno.

Se grafica el nivel de retorno contra el periodo de retorno y cada dato define un punto muestral. Ambos se detallan a continuación:

Definición 4.3. Sea $\{X_i\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución continua F y un umbral dado u . Consideremos la sucesión $(I_{(X_i > u)})$ de variables aleatorias Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas, con probabilidad de éxito $p = 1 - F(u)$. Entonces

$$E[L(u)] = \frac{1}{p} \quad (4.13)$$

es llamado el *periodo de retorno* del evento $(X_i > u)$,

donde $L(u) = \min \{i \geq 1 : X_i > u\}$ es la realización del primer exceso del umbral u . $L(u)$ sigue una distribución geométrica con parámetro p .

En otras palabras, el periodo de retorno se refiere al tiempo de espera entre dos eventos extremos.

Definición 4.4. Sea $\{X_i\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución continua F . Si:

$$F(z_p) = 1 - p \quad (4.14)$$

Entonces z_p es llamado el *nivel de retorno* asociado con el periodo de retorno $\frac{1}{p}$.

Ahora bien, si combinamos la ecuación (3.7) con (4.14), podemos resolver el nivel de retorno z_p en términos de los parámetros en el modelo y p .

$$z_p = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left\{ 1 - [-\ln(1-p)]^{-\xi} \right\} \quad \xi \neq 0 \quad (4.15)$$

y

$$z_p = \mu - \sigma \ln[-\ln(1-p)] \quad \xi = 0 \quad (4.16)$$

Definamos $y_p = -\ln(1-p)$, entonces:

$$z_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - y_p^{-\xi}) & \xi \neq 0 \\ \mu - \sigma \ln y_p & \xi = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

El gráfico de z_p contra $-\ln y_p$ es lo que se conoce como *gráfico del nivel de retorno*.

En este caso, con un buen ajuste, los puntos muestrales deberían ajustarse a la curva del gráfico del nivel de retorno.

Capítulo 5

Una aplicación al sector financiero.

Los datos utilizados en el análisis corresponden a pérdidas generadas por un tipo muy particular de riesgo operativo en el sector financiero, que no será descrito para mantener la confidencialidad de los datos, los cuales fueron recolectados en el periodo comprendido entre los años 2003 y 2007, a través de diversas fuentes. Éste puede parecer un periodo de tiempo muy breve debido a que únicamente contamos con datos de cinco años, sin embargo, esta es la situación que comúnmente se presenta en el estudio de riesgos operativos, debido a la carencia de bases de datos.

En total, contamos con 107 observaciones, un número reducido, pero suficiente para algunos métodos de estimación.

Para la realización de todo el análisis, se utilizó el paquete estadístico R.

5.1. Análisis exploratorio

Dados los datos, empezaremos por observar su comportamiento a lo largo del periodo de estudio. En la figura 5.1 puede apreciarse cómo las pérdidas operacionales se encuentran espaciadas irregularmente en el tiempo y, de

inmediato, es posible observar los extremos. Tal es el caso de los eventos ocurridos en julio y diciembre de 2006, en donde las pérdidas se aproximaron a los 40 millones de pesos (mdp).

Por otro lado, cabe mencionar la relevancia que han tenido algunas de estas pérdidas, pues han puesto en peligro la operación de algunas instituciones.

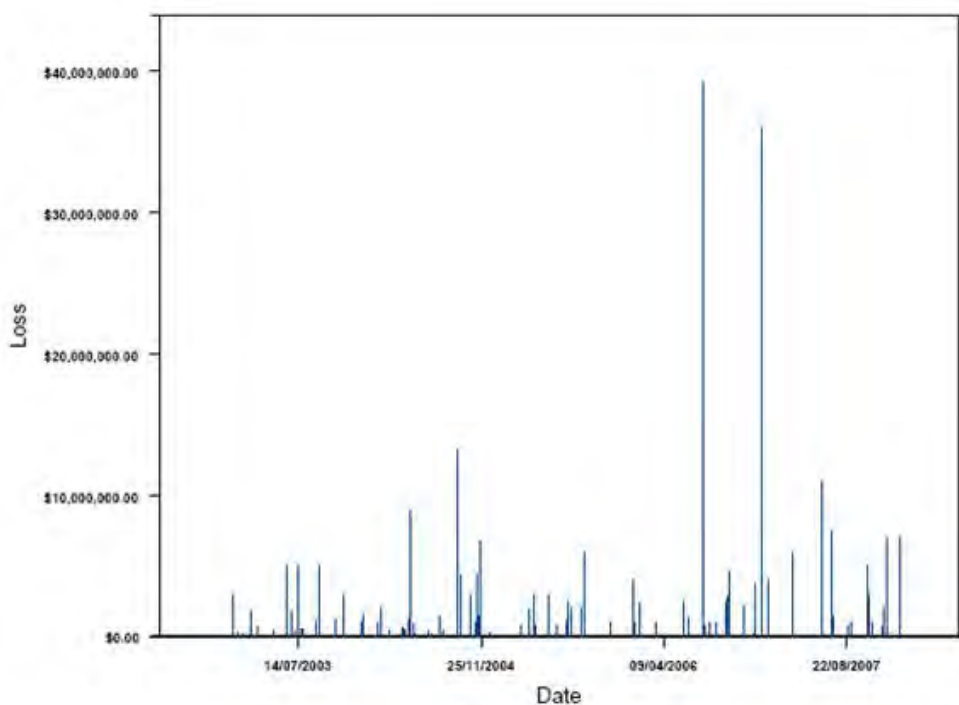


Figura 5.1: *Pérdidas en el sector financiero por un tipo de riesgo operativo.*

La gráfica muestra que la mayor parte de las pérdidas se encuentra por debajo de los 10 mdp. Obsérvenos los principales estadísticos descriptivos.

```
> summary (obs)
Min.   : 15000
1st Qu.: 475000
```

```
Median : 1000000
Mean   : 2680170
3rd Qu.: 3000000
Max.   : 39202109
```

Claramente, los eventos de julio y diciembre de 2006 constituyen eventos extremos, sumamente alejados de los valores de la media y la mediana. Este tipo de eventos son los que pueden inducir las colas pesadas de la distribución de pérdidas.

5.2. Selección del umbral

Para seleccionar el umbral, utilizaremos las tres opciones gráficas presentadas en el capítulo anterior. Para ello, haremos uso de las funciones *tcplot*, *mrlplot* y *dipplot* implementadas en el paquete POT de R.

Implementamos en R la función *mrlplot* y *dipplot*, para obtener la gráfica de vida residual media y el gráfico del índice de dispersión.

```
mrlplot(obs)
abline(v = 800000, col = "blue")
dipplot(eventos)
abline(v = 800000, col = "blue")
```

En la figura 5.2 se observan ambos gráficos.

A través de los gráficos, notamos que $u = 800,000$ parece ser un umbral adecuado para el modelo. En el primer caso, constituye el punto más bajo en el que la gráfica de vida media residual comienza a ser lineal, mientras que el segundo caso, en ese punto el índice es muy cercano a uno.

Para asegurarnos de la elección, utilizaremos también, la función *tcplot* de R, a fin de obtener el gráfico de elección del umbral.

```
tcplot(obs, which = 1)
```

```
abline(v = 800000, col = "blue")
tcplot(obs, which = 2)
abline(v = 800000, col = "blue")
```

Los gráficos pueden apreciarse en la figura 5.3.

Al igual que con los gráficos anteriores, es posible observar que $u = 800,000$ parece un umbral adecuado para los propósitos del análisis.

5.3. El ajuste de la distribución GPD

De la sección anterior, elegimos $u = \$800,000$ como el umbral a partir del cual realizaremos el ajuste de la distribución Pareto generalizada.

Para ello, utilizaremos todos los estimadores posibles implementados en R, y seleccionaremos aquél que arroje un mejor ajuste de los datos. El ajuste se realizó a través de la función *fitgpd* del paquete POT.

	scale	shape
moments	2.192e+06	3.623e-01
mle	3.437e+06	2.343e-01
pwmu	1.779e+06	4.824e-01
pwmb	1.824e+06	4.694e-01
pickands	2.009e+06	3.923e-01
med	2.008e+06	4.772e-01
mdpd	3.437e+06	2.029e-01
mple	3.437e+06	2.137e-01

En la figura 5.4 se muestran los gráficos de la distribución Pareto generalizada con los parámetros estimados a través de estos métodos.

Por lo que se refiere a los diagnósticos gráficos, se incluyen únicamente para los estimadores que presentaron un mejor ajuste.

Las figuras 5.5, 5.6 y 5.7 muestran cómo el modelo ajustado con los estimadores de *pickands*, *pwm* y *pwmu* parecen apropiados, pues los puntos muestrales presentan un buen ajuste a las curvas teóricas sin rebasar las bandas de confianza, de acuerdo a lo especificado en el capítulo anterior.

Obsérvese que con cualquiera de los estimadores elegidos, el evento que tiene el valor máximo, con una pérdida cercana a los 40 millones de pesos, tiene un periodo de retorno que supera los 5 años.

Serán los parámetros obtenidos a través de estos estimadores los que se utilizarán para calcular los requerimientos mínimos de capital en la siguiente sección.

5.4. El modelo POT y los requerimientos de capital

A través de los gráficos anteriores, hemos determinado que $u = \$800,000$ constituye un umbral apropiado para el modelo. Utilizando este umbral, de los 107 datos originales, 64 de ellos lo exceden.

Como el modelo POT lo indica, el número de excesos puede ser modelado como un proceso Poisson puntual con intensidad λ . De manera empírica determinaremos el parámetro λ para el número de excesos.

Al tratarse de un proceso Poisson homogéneo, el estimado para λ puede obtenerse simplemente promediando el número total anual de eventos por pérdidas operacionales que exceden el umbral u .

De este modo, $\lambda = 12.8$. Esto es, el número promedio de eventos por año cuyas pérdidas exceden los \$800,000 es 12.8.

Comenzaremos por estimar los parámetros de la ecuación (3.11), los cuales se encuentran en el cuadro 5.1.

Parámetro	pickands	pwmb	pwmu
μ	9,601,511	9,773,156	9,727,174
σ	5,461,833	6,035,999	6,085,469

Cuadro 5.1: *Estimación de parámetros*

De este modo, nos encontramos en posición de calcular los resultados más relevantes de riesgo operativo.

5.4.1. Severidad esperada

$$E(X - u | X > u) = \frac{\beta_u + \xi u}{1 - \xi} \quad (5.1)$$

Severidad	pickands	pwmb	pwmu
$E(X - u X > u)$	3,822,347	4,145,345	4,182,612

Cuadro 5.2: *Severidad de la pérdida*

Como se observa en los resultados, la severidad esperada más alta se obtiene con el estimador *pwmu* y asciende a \$4,182,612.

5.4.2. Provisión extra de capital

$$\lambda_u E(X - u | X > u) = \lambda_u \frac{\beta_u + \xi u}{1 - \xi} \quad (5.2)$$

Provisión	pickands	pwmb	pwmu
$\lambda_u E(X - u X > u)$	49,926,036	53,060,415	53,537,434

Cuadro 5.3: *Provisión extra de capital*

De acuerdo con los resultados y a lo establecido en el acuerdo de Basilea, la provisión mínima de capital con que debería contar el sector financiero para

Cantidad de capital	pickands	pwmb	pwmu
$u_T + \lambda_u T E(X - u X > u)$	245,430,179	266,102,073	268,487,172

Cuadro 5.4: *Cantidad total de capital contra riesgos operativos en 5 años*

hacer frente a este riesgo operativo va de los \$49,926,036 hasta los \$53,537434 por año.

5.4.3. Cantidad total de capital contra riesgos operativos en un periodo de tiempo

$$u_T + \lambda_u T E(X - u | X > u) = u_T + \lambda_u T \frac{\beta_u + \xi u}{1 - \xi} \quad (5.3)$$

donde u_T puede considerarse en primera instancia igual a u , bajo el supuesto de máx-estabilidad.

La provisión ha sido calculada para un periodo de 5 años (cuadro 5.4), en el cual la cantidad total de capital mínima con que debería contar el sector financiero para enfrentar este riesgo operativo va de los \$245,430,179 hasta los \$268,487,172.

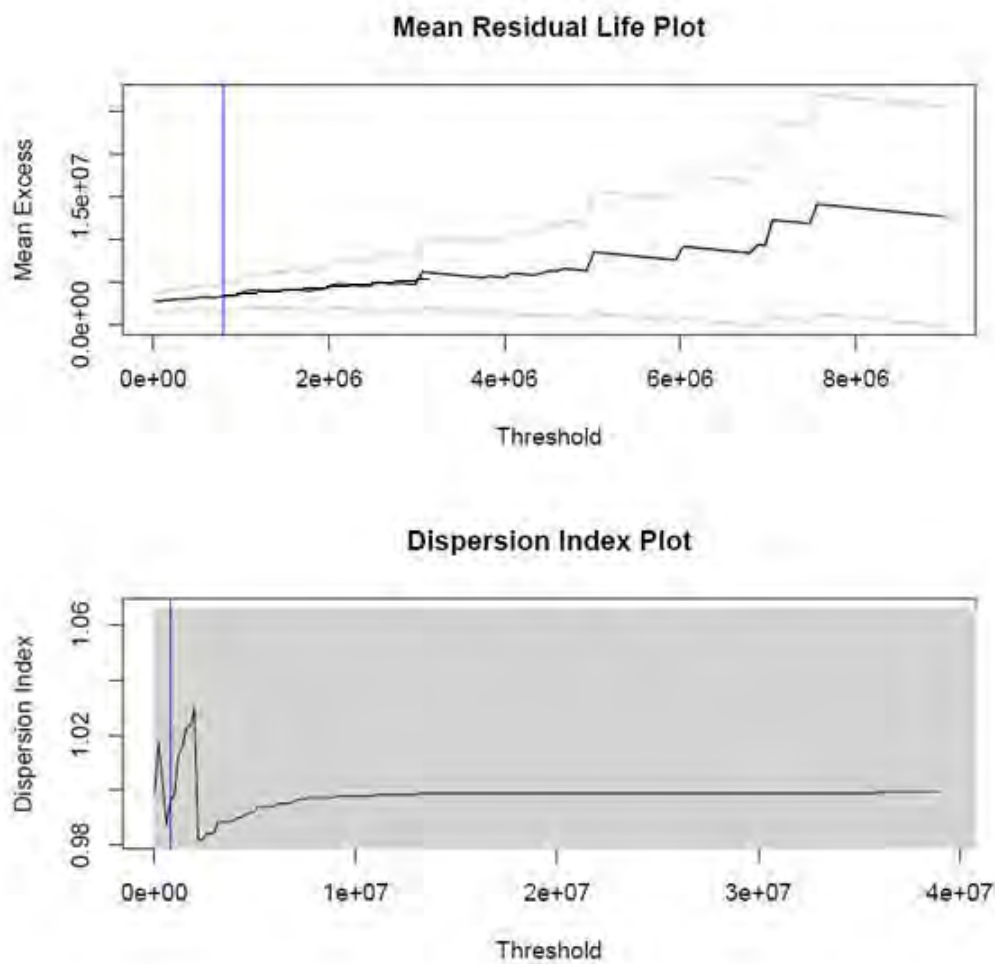


Figura 5.2: Gráficos *mrlplot* y *diplot* para la selección del umbral

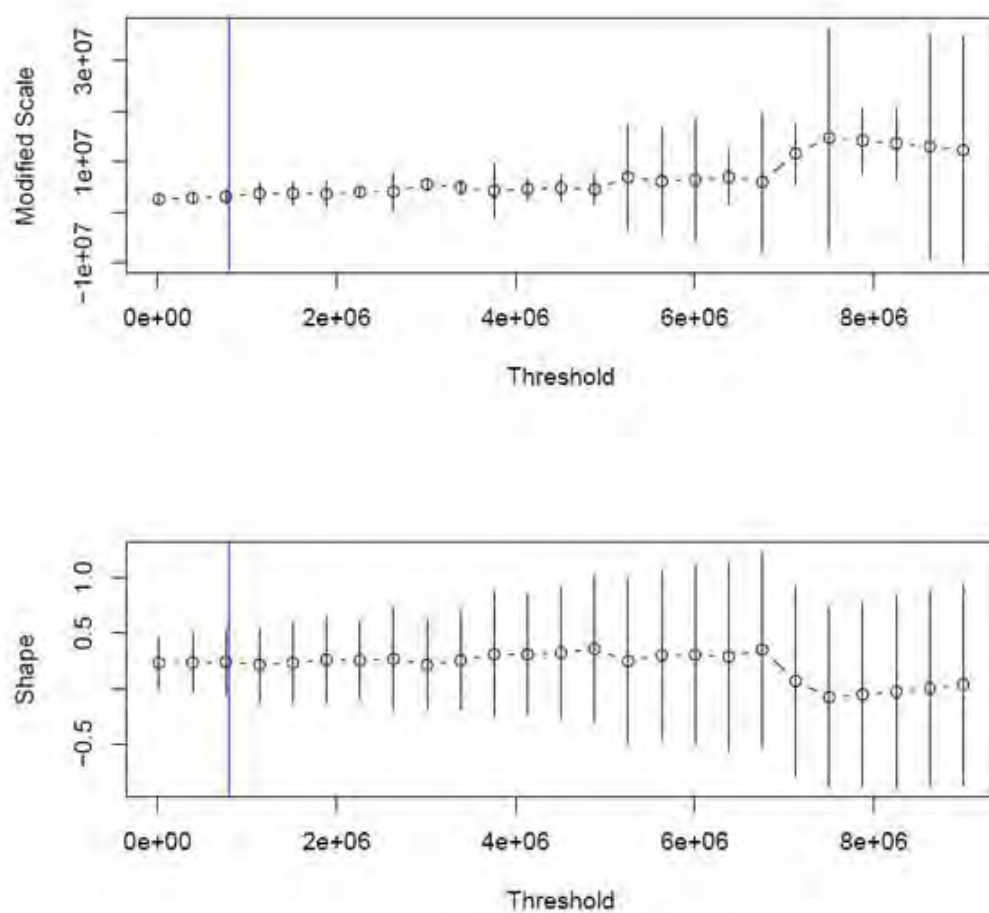
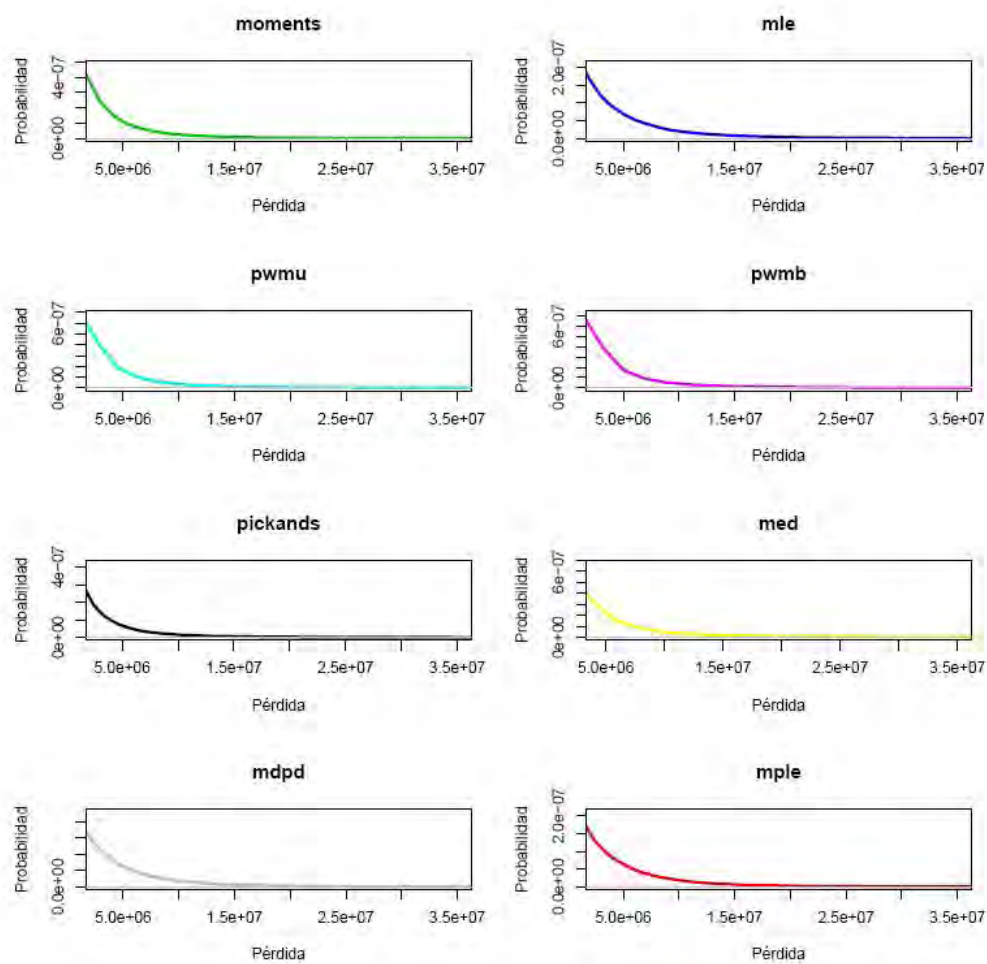


Figura 5.3: Gráficos *tcplot*

Figura 5.4: *GPD con los distintos parámetros estimados.*

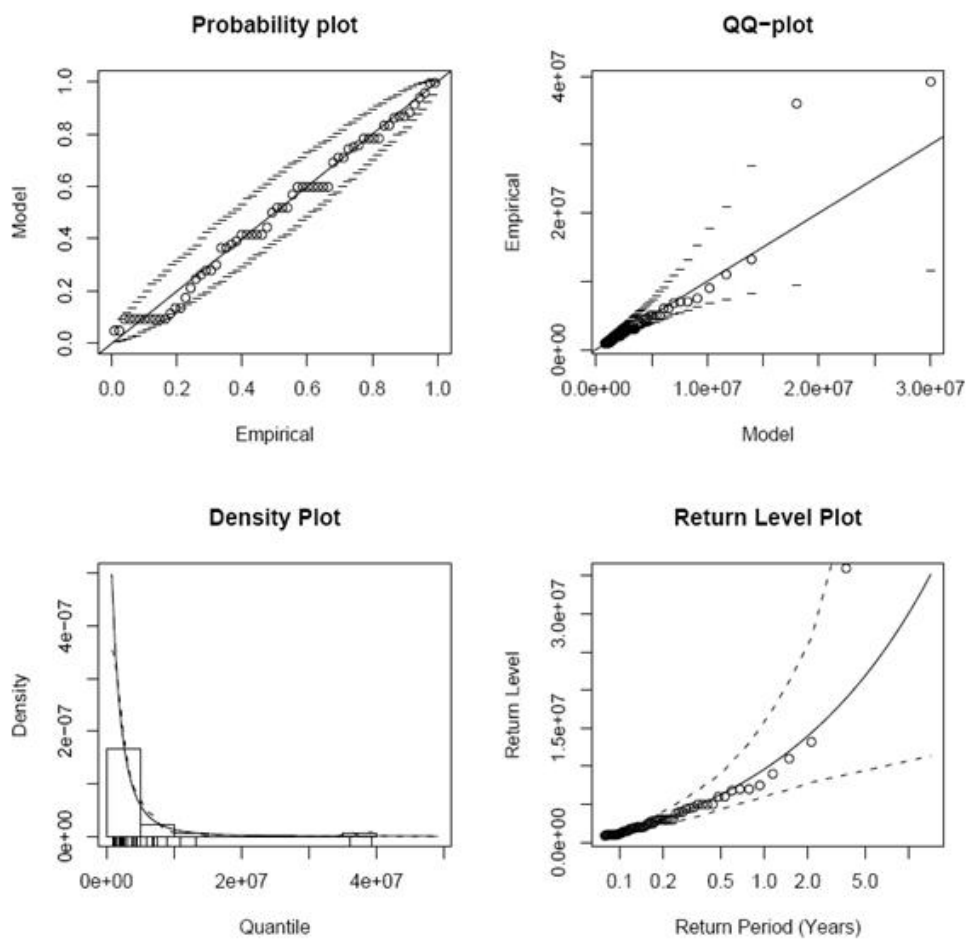


Figura 5.5: Diagnóstico del ajuste con el estimador pickands

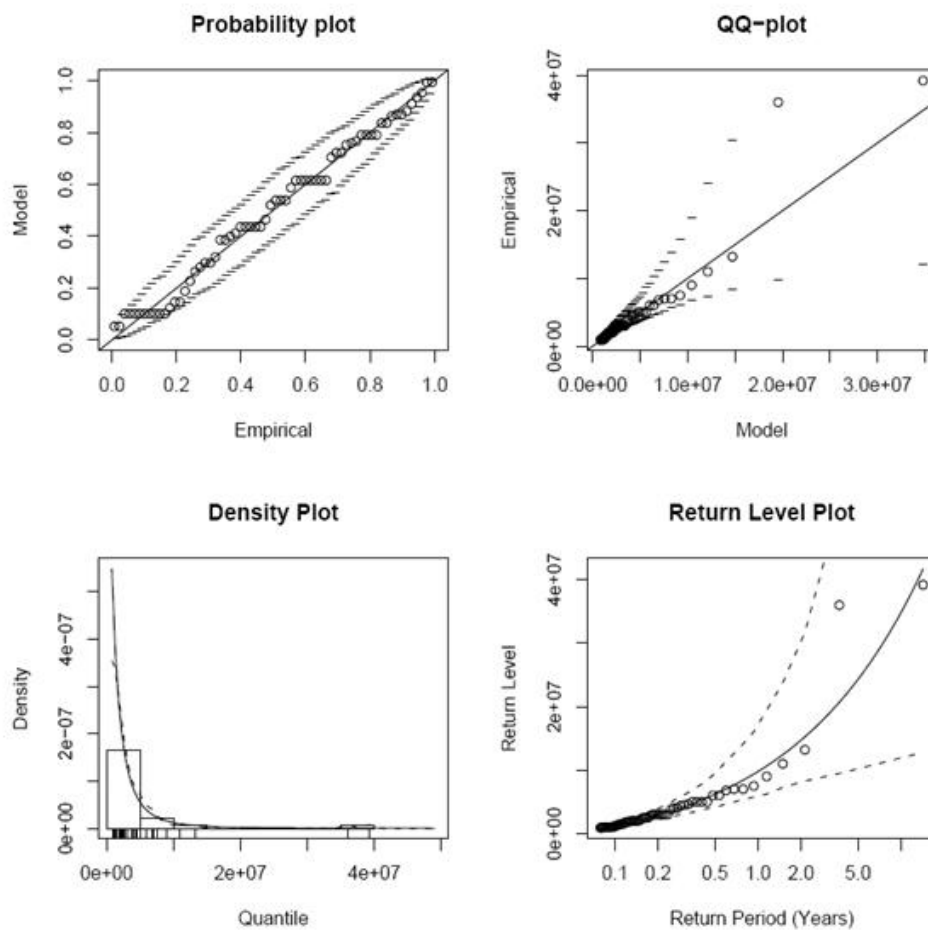


Figura 5.6: Diagnóstico del ajuste con el estimador *pmb*

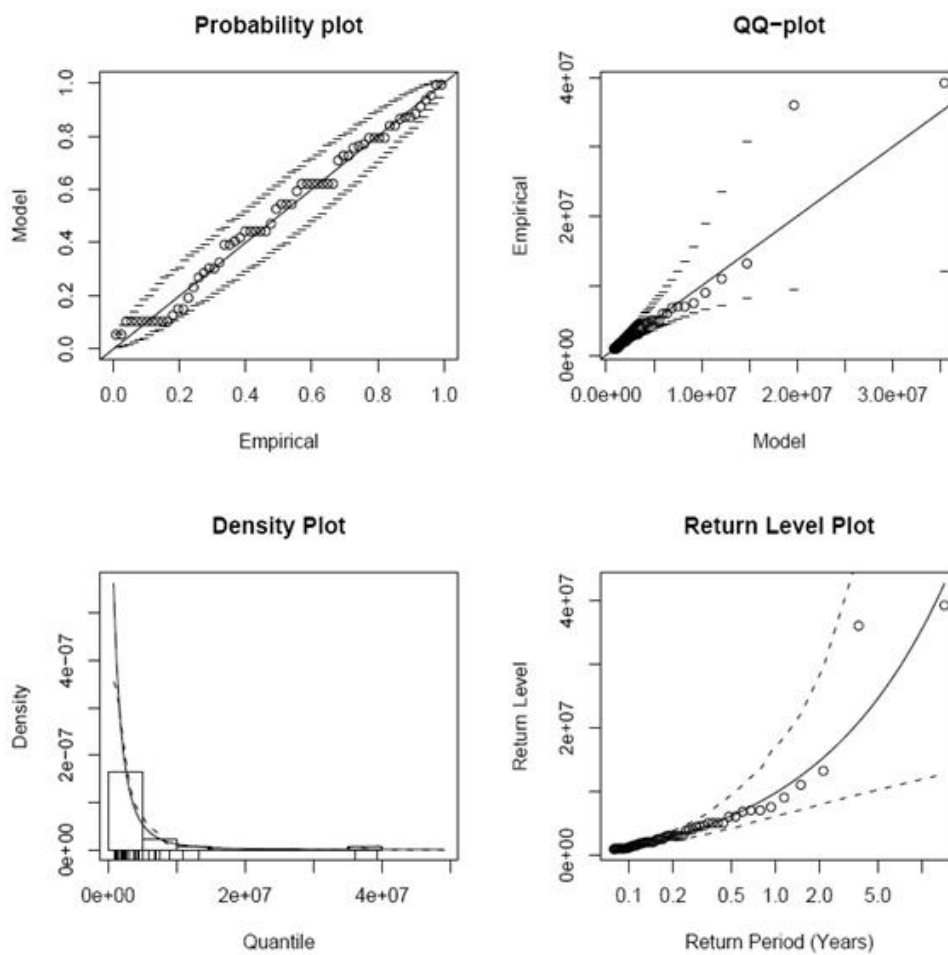


Figura 5.7: Diagnóstico del ajuste con el estimador *pmm*

Capítulo 6

Técnicas sugeridas en el estudio del riesgo operativo

En el presente trabajo se ha mostrado la importancia que tiene el estudio del riesgo operativo y se han proporcionado las herramientas necesarias para determinar los requerimientos mínimos de capital para hacer frente a este tipo de riesgo.

Sin embargo, se han dejado de lado algunas otras técnicas relativamente recientes para abordar el problema. Una de ellas es el uso de la teoría de cópulas que, aunque ya ha sido utilizada para el estudio de otros tipos de riesgo -principalmente financiero-, representa una herramienta útil para el estudio del riesgo operativo.

El uso de cópulas permite la modelación simultánea de riesgos operativos que ocurren en diferentes líneas de negocio (o son de un tipo distinto) y permiten el manejo de estructuras de dependencia. Por tanto, constituyen un recurso valioso en el estudio de riesgos, que no debe ser descartado y sí estudiado con mayor detalle.

Capítulo 7

Conclusiones

Sin duda, muchos de los quebrantos históricos acaecidos en los últimos años podrían haber sido evitados bajo el esquema de una provisión de capital, aunado a una mayor implementación de controles.

Las pérdidas en el sector financiero derivadas de riesgos operativos que se utilizaron en este trabajo, presentan un claro ejemplo de pérdidas operacionales que deberían ser registradas y analizadas para la identificación de extremos.

El método presentado constituye una herramienta muy útil y práctica, que puede ser implementada sin gran dificultad en el estudio de eventos extremos. No obstante, su mayor obstáculo se encuentra en la selección de un umbral adecuado, problema que puede resolverse utilizando cuidadosamente las técnicas desarrolladas para ello.

Cabe mencionar que aunque este trabajo se centró en el estudio de un riesgo operativo particular, no deben dejarse de lado otros requerimientos, tales como el estudio integral de los riesgos y su agregación.

Finalmente, es importante señalar que el estudio del riesgo operativo no sólo beneficia a las entidades mismas, les permite además cumplir con la regulación del Acuerdo de Basilea al que muchas de ellas ya se encuentran sujetas.

Apéndice A

Convergencia de variables aleatorias.

Se dice que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ converge a una variable aleatoria X si $\{X_n(\omega)\}$ converge a $X(\omega) < \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $\omega \in \Omega$.

Definición A.1. Se dice que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ converge a X en probabilidad, denotado por $X_n \xrightarrow{p} X$, si para cada $\epsilon > 0$, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$P[|X_n - X| \geq \epsilon] \rightarrow 0$$

equivalentemente, si para cada $\epsilon > 0$, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$P[|X_n - X| < \epsilon] \rightarrow 1$$

Definición A.2. Se dice que $\{X_n\}$ converge a X casi seguramente (o fuertemente), denotado por $X_n \xrightarrow{c.s.} X$, si $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ para todo ω , excepto para aquellos pertenecientes a un conjunto nulo N . Esto es $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ si y sólo si $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) < \infty$ para $\omega \in N^c$, donde $P[N] = 0$.

Definición A.3. Si $F_n(x)$ es la función de distribución de una variable aleatoria X_n y $F(x)$ la correspondiente a X , se dice que X converge en

distribución o en ley, denotado como $X_n \xrightarrow{d} X$, para cada $x \in C(F)$ el conjunto de puntos de continuidad de F .

Apéndice B

Estimadores de Hill.

Una metodología alterna para la selección del umbral se basa en el estimador de Hill, la cual es aplicable para distribuciones que pertenezcan al MDA de la distribución Fréchet (cuando $\xi > 0$).

Para una variable aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n , ordenamos los datos y conseguimos los estadísticos de orden $X_{(1),n}, X_{2,(n)}, \dots, X_{n,(n)}$, donde $X_{(1),n} \geq X_{2,(n)} \geq \dots \geq X_{n,(n)}$, entonces el estimador de máxima verosimilitud del índice de cola $\alpha = \frac{1}{\xi}$ condicionado a un umbral dado es:

$$\hat{\alpha}_{u,n} = \left(\frac{1}{u} \sum_{j=1}^u (\ln X_{j,(n)} - \ln X_{(u),n}) \right)^{-1}$$

donde u es el número de observaciones que son mayores al umbral, n es el tamaño de muestra y α es el índice de cola.

Finalmente, utilizando la propiedad de invarianza de los estimadores de máxima verosimilitud, se obtiene:

$$\hat{\xi}_{u,n} = (\hat{\alpha}_{u,n})^{-1}$$

Adicionalmente, es posible demostrar que si $u \rightarrow \infty, u/n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$ y X es una variable aleatoria que satisface $F \in MDA(H) \iff (1 - F(x)) =$

$x^{-\frac{1}{\xi}}h(x)$ donde $h(x)$ es de la forma (3.4), entonces:

$$\hat{\alpha}_{u,n} \xrightarrow{p} \alpha$$

Además,

$$\sqrt{u} (\hat{\alpha}_{u,n} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0, \alpha^2)$$

Una herramienta utilizada para seleccionar el umbral es el gráfico de Hill, en el cual se grafica el estimador de Hill para diferentes valores de u , asociados a distintos umbrales. El conjunto de valores apropiados para u se determina como el rango de valores de u para el cual el estimador de Hill es estable.

Por último, cabe mencionar que una de las mayores dificultades del estimador de Hill es la ambigüedad del valor del umbral.

Apéndice C

Teorema de Fisher-Tippett

Teorema (Fisher-Tippett). Sean $\{X_n\}$ variables aleatorias i.i.d. de una distribución desconocida F y supóngase que podemos encontrar constantes $c_n > 0$ y $d_n \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H \quad (\text{C.1})$$

para alguna función de distribución no degenerada H .

Si estas condiciones se cumplen, se dice que F se encuentra en el máximo dominio de atracción de H , lo que se escribe como $F \in MDA(H)$.

Fisher y Tippett demostraron que $F \in MDA(H) \Rightarrow H$ es del tipo $H_{\xi; \mu, \sigma}$, para alguna ξ .

Demostración:

Sea $t > 0$ y $[z]$ la parte entera de z . Del hecho de que $F^{[nt]}$ es la función de distribución de $M_{[nt]}$ y debido a los supuestos sobre la distribución asintótica de $M_{[nt]}$, se sigue que $F^{[nt]}(c_{[nt]}x + d_{[nt]}) \rightarrow H(x)$ para $nt \rightarrow \infty$, i.e., $n \rightarrow \infty$.

Asimismo, se tiene que $F^{[nt]}(c_n x + d_n) = \{F^n(c_n x + d_n)\}^{\frac{nt}{n}} \rightarrow H^t(x)$ para $n \rightarrow \infty$.

En otras palabras, esto significa que:

$$\frac{M_{[nt]} - d_{[nt]}}{c_{[nt]}} \xrightarrow{d} H, \quad \frac{M_{[nt]} - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H^t$$

para $n \rightarrow \infty$.

Esto es posible sólo cuando:

$$\frac{c_n}{c_{[nt]}} \rightarrow b(t) \geq 0, \quad \frac{d_n - d_{[nt]}}{c_{[nt]}} \rightarrow a(t)$$

y

$$H^t(x) = H(b(t)x + a(t)), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{C.2})$$

Esta relación es válida para valores arbitrarios de t . En particular la utilizaremos para valores s, t y $s \cdot t$ y obtenemos:

$$b(st) = b(s)b(t), \quad a(st) = b(t)a(s) + a(t) \quad (\text{C.3})$$

Las ecuaciones (C.2) y (C.3) para $H(x), b(t)$ y $a(t)$ tienen solución única cuando H es la distribución valor extremo generalizada. ■

Apéndice D

Teorema de Pickands-Balkema

Teorema (Pickands-Balkema). *Si se cumplen las condiciones MDA, la distribución Pareto generalizada (3.8) es la distribución límite para la distribución de exceso cuando el umbral tiende al punto final de la derecha. Esto es, podemos encontrar una función medible positiva $\beta(u)$ tal que:*

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{0 \leq y < x_0 - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0 \quad (\text{D.1})$$

si y sólo si $F \in MDA(H_\xi)$.

Demostración:

Sea la distribución valor extremo generalizada $H_{\xi; \mu, \sigma}(x)$

$$\ln [H_{\xi; \mu, \sigma}(x)] = - \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)_+^{-\frac{1}{\xi}}$$

Para valores altos de y , la aproximación de Taylor indica que:

$$\ln [F(x)] \approx - [1 - F(x)]$$

Aplicando esta expresión a la aproximación anterior:

$$- [1 - H_{\xi; \mu, \sigma}(x)] = - \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

$$H_{\xi; \mu, \sigma}(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

Si $G_{\xi,\beta}(y) \sim P(X - u \leq y \mid X > u)$ y $P(X - u \leq y \mid X > u) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}$

Entonces $G_{\xi,\beta}(y) \approx \frac{H_{\xi;\mu,\sigma}(x) - H_{\xi;\mu,\sigma}(u)}{1 - H_{\xi;\mu,\sigma}(u)} = \frac{-(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}} + (1 + \xi \frac{u-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}}{(1 + \xi \frac{u-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}}$

$$G_{\xi,\beta}(y) = 1 - \frac{(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}}{(1 + \xi \frac{u-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}} = 1 - \left[\frac{\sigma + \xi(x-\mu)}{\sigma + \xi(u-\mu)} \right]^{-\frac{1}{\xi}}$$

Siendo $x = y + u$ y $\beta = \sigma + \xi(u - \mu)$

$$G_{\xi,\beta}(y) = 1 - \left(\frac{\beta + \xi y}{\beta} \right)^{-\frac{1}{\xi}} = 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \blacksquare$$

Bibliografía

- [1] A. Carol (2000): “*Bayesian Methods for Measuring Operational Risk*”. SSRN Electronic Journal, United Kingdom.
- [2] A. McNeil (1999): “*Extreme Value Theory for Risk Managers*”. Manuscript, ETH-Zürich.
- [3] A. Meel, L.M. O’Neill and J.H. Levin (2007): “*Operational risk assessment of chemical industries by exploiting accident databases*”. Journal of Loss Prevention, Volume 20, No.2, pp. 113-127.
- [4] A. M. Mood, F. A. Graybill and D. C. Boes (1976): “*Introduction to the Theory of Statistics*”. McGraw-Hill, New York, 3rd. edition.
- [5] B. R. Bath (1981): “*Modern probability theory*”. Pearl Offset Press, New Delhi.
- [6] E. A. Medova (2000): “*Extreme values and the measurement of operational risk*”. Operational Risk, pp. 11-15.
- [7] E. A. Medova (2000): “*Measuring risk by extreme values*”. Risk, pp. 20-27.
- [8] E. A. Medova and M. N. Kyriacou (2002): “*Extremes in operational risk management*”. Risk Management: Value at Risk and Beyond. M A H Dempster, ed. Cambridge University Press, pp.247-274.

- [9] F. Parisi (2000): “*Extreme Value Theory and Standard & Poor’s Ratings*”. Standard & Poor’s Structured Finance Special Report.
- [10] J. III Pickands (1975): “*Statistical inference using extreme order statistics*”. *Annals of Statistics*, 3:119-131.
- [11] J.R.M. Hosking and J.R. Wallis (1987): “*Parameter and quantile estimation for the generalized pareto distribution*”. *Technometrics*.
- [12] J. Zhang (2007): “*Likelihood moment estimation for the generalized Pareto distribution*”. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, Blackwell Publishing.
- [13] L. Peng and A.H. Welsh (2001): “*Robust estimation of the generalized pareto distribution*”. *Extremes*, 4(1): 53-65.
- [14] M.A. Ribatet (2006): “*A User’s Guide to the POT Package (Version 1.0)*”, August. URL: <http://cran.r-project.org/>
- [15] M. Salomon (2004): “*Modelling The Probability of UK Housing Market Events (Crashes) using Extreme Value Theory*”. University of Warwick.
- [16] P. de Fontnouvelle, V. Rue, J. Jordan and E. Rosengren (2003): “*Using Loss Data to Quantify Operational Risk*”. Federal Reserve Bank of Boston.
- [17] P. Embrechts, C. Kluppelberg & T. Mikosch (1997): “*Modelling Extremal Events*”. Springer, Berlin.
- [18] P. Embrechts, R. Kaufmann and G. Samorodnitsky (2002): “*Ruin theory revisited: stochastic models for operational risk*”. ETH-Zürich and Cornell University Ithaca.
- [19] S. Ebnöthera, P. Vaninib, A. McNeil and Pierre Antolinez-Fehr (2001): “*Modelling Operational Risk*”. ETH-Zürich.

- [20] S.F. Juárez and W.R. Schucany (2004): “*Robust and efficient estimation for the generalized pareto distribution*”. Extremes. ISSN 13861999 (ISSN).
- [21] S. Manganelli and R. F. Engle (2001): “*Value at risk models in finance*”. Working papers series of the European Central Bank, Working paper no. 75
- [22] S. Plesko (2006): “*Operational Risk Quantification with Extreme Value Theory and Actuarial Methods*”. Master of Advanced Studies Thesis in Quantitative Finance and Risk Management, ETH-Zürich.
- [23] S. Coles (2001): “*An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values*”. Springer Series in Statistics. London.
- [24] T. W. Yee (2007): “*Family Functions for Extreme Value Data*”. Department of Statistics, University of Auckland, New Zealand.
- [25] V. Chavez Demoulin, P. Embrechts and J. Ner’slelová (2005): “*Quantitative Models for Operational Risk: Extremes, Dependence and Aggregation*”. ETH-Zürich.
- [26] V. Chavez-Demoulin and P. Embrechts (2004): “*Advanced Extremal Models for Operational Risk*”. ETH-Zürich.
- [27] X. K. Dimakos and Kjersti Aas (2003): “*Integrated Risk Modelling*”. Norwegian Computing Center, Oslo, Norway.