



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERIA

“Análisis y simulación del sistema de  
movimiento de un goniómetro láser”

T E S I S

Que para obtener el título de :

**Ingeniero Eléctrico Electrónico**

P R E S E N T A :

**Dither Juan López Sosa**



DIRECTOR DE TESIS:  
M. en I. Gerardo Ruiz Botello

México, D.F.

Junio de 2009



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **AGRADECIMIENTOS**

Gracias a Dios. Por permitirme llegar hasta este momento tan importante y lograr otra meta más en mi vida.

Gracias a mis padres Amparo y Juan. Por el cariño y comprensión que siempre me han dado, por la formación y el apoyo incondicional que me dieron a lo largo de la carrera.

Gracias a mi hermano Jairo. Por tu ayuda, comentarios y opiniones. Tú apoyo y el de toda la familia ha sido un soporte importante para alcanzar mis metas.

Gracias al M. en I. Gerardo Ruiz Botello. Por su asesoría y dirección en este trabajo. Por darme la oportunidad de trabajar en este proyecto, sus consejos, paciencia y opiniones fueron fundamentales para su realización.

Gracias al CCADET. Por el soporte institucional y facilidades otorgadas para la realización de este trabajo.

Gracias a la empresa TOTAL. Por el apoyo económico dado para la realización de este trabajo.

Gracias a la Facultad de Ingeniería y a cada uno de los maestros que participaron en mi desarrollo profesional durante mi carrera, sin su ayuda y conocimientos no estaría en donde me encuentro ahora.

---



---

**ÍNDICE**

Página

<b>Introducción</b> .....	1
---------------------------	---

**Capítulo 1: Modelado matemático de sistemas físicos**

1.1 Sistemas dinámicos.....	3
1.2 Clasificación y propiedades de los sistemas.....	3
1.3 Formas de representación de los sistemas.....	5
1.4 Sistemas continuos de primer orden.....	6
1.5 Sistemas continuos de segundo orden.....	7
1.6 Sistemas continuos de orden superior.....	9
1.7 Estabilidad en sistemas continuos.....	9
1.8 Representación de sistemas discretos.....	9
1.9 Sistemas discretos de primer orden.....	10
1.10 Sistemas discretos de segundo orden.....	11
1.11 Estabilidad en sistemas discretos.....	12
1.12 Relación entre los planos <i>S</i> y <i>Z</i> .....	12
1.13 Respuesta en frecuencia.....	13

**Capítulo 2: Sistemas mecánicos rotacionales**

2.1 Definición y clasificación de los sistemas mecánicos.....	15
2.2 Variables de los sistemas mecánicos rotacionales.....	15
2.3 Elementos de los sistemas mecánicos rotacionales.....	17
2.4 Momento angular.....	20
2.5 Método de D'Alembert.....	23
2.6 Velocidades y aceleraciones relativas.....	23
2.7 Sistemas de referencia rotacionales.....	23

**Capítulo 3: Motores de CD y codificadores angulares**

3.1 Tipos de motores utilizados para control de posición.....	26
3.2 Componentes de un motor de CD.....	27
3.3 Principio de funcionamiento de un motor de CD.....	29
3.4 Tipos de motores de CD.....	30
3.5 Sensores de posición angular.....	33
3.6 Codificadores angulares.....	33

**Capítulo 4: Sistema de movimiento de un goniómetro láser**

4.1 Componentes del sistema de movimiento.....	35
4.2 Representación de la cabeza de medición.....	35
4.3 Modelado del sistema de movimiento.....	37
4.4 Modelo mecánico simplificado con tren de engranes.....	39
4.5 Modelo simplificado del sistema electromecánico.....	40

---



---

**Capítulo 5: Análisis de un goniómetro láser comercial**

5.1 Especificaciones de la cabeza de medición MS-1S250 de Canon.....	43
5.2 Cálculo de parámetros de la parte mecánica.....	44
5.3 Obtención de las funciones de transferencia de los sistemas mecánicos.....	46
5.4 Obtención de las funciones de transferencia de los sistemas electromecánicos.....	47

**Capítulo 6: Sistemas de control**

6.1 Sistema de control con retroalimentación.....	49
6.2 Sistemas de control digitales.....	50
6.3 Controladores PID.....	53
6.4 Frecuencia de muestreo en sistemas de control digital.....	54
6.5 Diseño discreto de sistemas de control digital.....	55
6.6 Características de desempeño de un sistema de control.....	56
6.7 Diseño de controladores digitales utilizando el lugar geométrico de las raíces.....	58

**Capítulo 7: Sistema de control para un goniómetro láser**

7.1 Requerimientos de desempeño.....	60
7.2 Desempeño del sistema con retroalimentación.....	60
7.3 Elección de la frecuencia de muestreo.....	63
7.4 Equivalente discreto de $H(s)$ .....	64
7.5 Diseño de un controlador digital PID.....	64
7.6 Desempeño de los sistemas de control digitales.....	64

<b>Conclusiones</b> .....	74
---------------------------	----

**Apéndices**

A Hojas de especificaciones.....	77
B Programas y simulaciones en MATLAB.....	80
C Efectos de la torsión. ....	84

<b>Bibliografía</b> .....	86
---------------------------	----

## INTRODUCCIÓN

El goniómetro láser, más conocido como láser tracker, es un dispositivo de medición de superficies (principalmente de grandes objetos) que utiliza un ultrapreciso rayo láser para medir objetos desde unos cuantos milímetros hasta varias decenas de metros de longitud, rápida y fácilmente, con una gran exactitud. Es un instrumento de medición portátil y computarizado que crea una imagen 3-D de diversos objetos mediante la determinación de coordenadas de puntos en la superficie del objeto en tiempo real. Es muy utilizado en la industria automotriz, aeroespacial y en general en las industrias donde se requiere de gran precisión en la medición de superficies.

Su principio de funcionamiento se basa en un rayo láser que se compone de dos rayos de luz de diferentes frecuencias, el cual se refleja por detrás del objetivo (espejos reflectores especialmente diseñados para este propósito), y por medio de un interferómetro el dispositivo es capaz de calcular la distancia que existe entre el objetivo de medición y un punto de referencia. El usuario guía el objetivo a través de la superficie del objeto y dos codificadores angulares miden los ángulos horizontal y vertical del rayo láser. Esto da la posición del objetivo en coordenadas esféricas, las cuales son convertidas a cartesianas mediante un programa de cómputo, permitiendo que la computadora portátil del sistema dibuje y grabe de forma simultánea todas las medidas 3-D con una gran precisión y resolución de tan sólo algunos micrómetros, además de tener un movimiento predictivo del movimiento del objetivo, lo que le permite seguirlo por toda la superficie. También puede realizar mediciones de forma automática al girar el láser hacia varios objetivos posicionados en el objeto a medir.

El sistema de un goniómetro láser se puede dividir en 2 componentes principales: la cabeza de medición y el sistema de control. La fuente de poder independiente y otros accesorios completan la lista.

La cabeza de medición adquiere la información de ángulos y distancias del objetivo. Empleando un láser, un interferómetro y los reflectores se conoce la distancia al objetivo. Como un teodolito, el movimiento de la cabeza consiste en rotación respecto de 2 ejes ortogonales entre sí, en los cuales se encuentran codificadores angulares para la medición de estos ángulos. Ambos ejes son movidos por servomotores (motores de CD con un sistema de engranes). Estos 2 movimientos están restringidos a rangos menores a 360° y combinados ofrecen la posibilidad de enfocar el láser a una gran cantidad de puntos en el espacio dentro de una zona determinada.

El sistema de control es el encargado del manejo de los datos obtenidos y del control del movimiento de la cabeza de medición por medio de una computadora, la cual cuenta con un programa que contiene todas las funciones requeridas para la operación de la cabeza de medición y el usuario puede ver en tiempo real las coordenadas del objetivo.

El objetivo de este trabajo es caracterizar, mediante modelos matemáticos lineales, el comportamiento dinámico de la cabeza de medición de un goniómetro láser y diseñar un sistema de control digital que proporcione un desempeño apropiado del mismo.

La importancia de la obtención de un modelo matemático sencillo que represente de una manera adecuada la dinámica de la cabeza de medición, consiste en que mediante dicho modelo matemático se puede conocer toda la información importante del sistema y por consiguiente, diseñar de manera más fácil y precisa sistemas de control que mejoren substancialmente la respuesta del sistema.

El presente trabajo consta de 7 capítulos: En el capítulo 1 se presenta una introducción de los conceptos de dinámica de sistemas físicos, sus principales propiedades, así como sus tipos de representaciones más utilizadas. El capítulo 2 expone los fundamentos acerca de los sistemas mecánicos rotacionales, como lo son sus variables, los componentes más comunes, así como un método de análisis para este tipo de sistemas. El capítulo 3 contiene los principios de funcionamiento de los motores de corriente continua y de los codificadores angulares. En el capítulo 4 se analiza la dinámica del sistema electromecánico de la cabeza de medición de un goniómetro láser y se obtienen las ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento. En el capítulo 5 se analiza el comportamiento de la cabeza de medición de un goniómetro láser comercial, el cual es el modelo MS-1S250 de la marca CANON. El capítulo 6 presenta los conceptos básicos de sistemas de control con retroalimentación, tanto analógicos como digitales. También se analiza el funcionamiento de controladores PID y algunas de las técnicas más utilizadas de diseño de los mismos. Finalmente, en el capítulo 7 se diseñan 2 sistemas de control en lazo cerrado, con controladores PID digitales (uno para cada servomotor) que permitan un desempeño igual o mejor al del modelo MS-1S250 de la marca CANON, así como la realización de simulaciones de este sistema por medio del programa de computadora MATLAB para diferentes condiciones de operación.

## Capítulo 1: Modelado matemático de sistemas físicos

En este capítulo se presenta el marco teórico para sistemas dinámicos continuos y discretos, se establecen sus principales propiedades, así como una de las formas de representación más utilizadas, como lo es la función de transferencia, además de las herramientas matemáticas necesarias como la transformada de Laplace y la transformada Z.

### 1.1 *Sistemas dinámicos*

Un sistema está formado por un conjunto de elementos que interaccionan entre sí. Un sistema dinámico es un sistema complejo que presenta un cambio o evolución de su estado en el tiempo; el comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se puede elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema.

Muchos sistemas dinámicos, ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, hidráulicos, etc., pueden ser caracterizados por ecuaciones diferenciales. Se puede obtener la respuesta de un sistema dinámico a una entrada (o función excitadora), si se resuelven esas ecuaciones diferenciales. Para obtener las ecuaciones se utilizan las leyes físicas que gobiernan un sistema particular. La descripción matemática de las características dinámicas de un sistema se denomina modelo matemático. El primer paso en el análisis de un sistema dinámico es elaborar su modelo.

### 1.2 *Clasificación y propiedades de los sistemas*

A continuación se presentan algunas de las clasificaciones más importantes de los sistemas de acuerdo a su naturaleza.

**Sistemas dinámicos-estáticos.** Un sistema que presenta un cambio o evolución de su estado en el tiempo se le denomina sistema dinámico, de lo contrario se le llama sistema estático.

**Sistemas continuos-discretos.** Un sistema en el cual las señales de entrada y de salida son continuas y se pueden representar mediante ecuaciones diferenciales se le denomina sistema continuo, y un sistema discreto es aquel en donde las señales de entrada y de salida son discretas y puede representarse mediante ecuaciones en diferencias.

**Sistemas de Parámetros Concentrados - Distribuidos.** Los sistemas en los que no es necesario considerar la distribución espacial de sus parámetros, sino que se pueden considerar concentrados en un punto, son modelos con parámetros concentrados, y éstos pueden describirse mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. Aquellos sistemas en los que es necesario considerar la distribución espacial de sus parámetros y los cuales deben describirse mediante ecuaciones diferenciales parciales son modelos con parámetros distribuidos.



**Sistemas determinísticos-estocásticos.** Los sistemas en los cuales las partes que lo componen interactúan de una forma perfectamente previsible y sin dejar lugar a dudas, se les denomina sistemas determinísticos. Se denomina estocástico a aquel sistema que funciona, sobre todo, por el azar, y por tanto no se puede suministrar una previsión detallada, sino en función de probabilidades.

**Sistema causal-no causal.** Los sistemas en que las salidas dependen de entradas presentes y pasadas pero no de entradas futuras, se les denomina sistemas causales, de lo contrario se les denomina no causales. Todos los sistemas en “tiempo real” deben ser causales, ya que no pueden tener salidas futuras disponibles para ellos.

A continuación se definen algunas de las propiedades más importantes de los sistemas como lo son: linealidad, varianza en el tiempo y estabilidad.

**Linealidad:** Los sistemas lineales son aquellos en los que las ecuaciones del modelo son lineales. Una ecuación diferencial o en diferencias es lineal si los coeficientes son constantes o funciones únicamente de la variable independientemente. Un sistema lineal es un sistema que obedece las propiedades de escalado (homogeneidad) y de superposición.

Linealidad en sistemas continuos

$$\begin{aligned} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

Linealidad en sistemas discretos

$$\begin{aligned} x_1[n] \rightarrow y_1[n] \\ x_2[n] \rightarrow y_2[n] \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$$

Un sistema no-lineal es cualquier sistema que no obedece al menos una de estas propiedades.

**Varianza en el tiempo:** Un sistema invariante en el tiempo es aquel que no depende de cuando ocurre la excitación ya que la salida no cambia con el retraso de la entrada.

$$\begin{aligned} x(t) \rightarrow y(t) &\Rightarrow x(t-a) \rightarrow y(t-a) && \text{Sistemas Continuos} \\ x[n] \rightarrow y[n] &\Rightarrow x[n-a] \rightarrow y[n-a] && \text{Sistemas Discretos} \end{aligned}$$

Cuando esta propiedad no aplica para un sistema, entonces se dice que el sistema es variante en el tiempo o que varía en el tiempo.

**Estabilidad:** Un sistema estable es uno que para una entrada que no diverge genera una salida que tampoco diverge. Una definición particularmente útil de divergencia es relacionar si la señal está acotada o no. Entonces, se refiere al sistema como entrada acotada-salida acotada (BIBO) (Bounded input-bounded output) es aquel que establece que toda posible entrada acotada produce una salida acotada. Si estas condiciones no son satisfechas, es decir, las salidas del sistema con entrada acotada crecen sin límite (divergen), entonces el sistema es inestable.

### 1.3 Formas de representación de los sistemas

Las formas en que se puede representar la dinámica de un sistema son: matemáticas y gráficas.

*Representaciones matemáticas:* En este tipo de representaciones se utilizan las ecuaciones diferenciales o en diferencias, las funciones de transferencia y las ecuaciones de estado.

*Representaciones gráficas:* En este tipo de representaciones se tienen los diagramas de bloques y a los diagramas de respuesta en frecuencia.

#### 1.3.1 Funciones de transferencia de sistemas continuos

“La función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo está definida como la relación de la transformada de Laplace de la salida a la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero” [1]. Sea el sistema lineal invariante en el tiempo definido por la siguiente ecuación diferencial:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad \dots \dots (1.1)$$

Donde  $y$  es la salida del sistema y  $x$  es la entrada. Para que el sistema sea físicamente realizable entonces  $n \geq m$ . Se obtiene la función de transferencia de este sistema tomando la transformada de Laplace de ambos miembros de la ecuación bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero, o sea:

$$FT = G(S) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad \dots \dots \dots (1.2)$$

La función de transferencia es una expresión que relaciona la salida y la entrada de un sistema lineal invariante en el tiempo y es una propiedad del sistema en sí, independientemente de la función de entrada excitadora, también se puede considerar como la respuesta de un sistema inicialmente inerte a un impulso como señal de entrada.

Usando este concepto se puede representar la dinámica de un sistema por ecuaciones algebraicas en  $s$ . La potencia más alta de  $s$  del denominador de la función de transferencia es igual al orden del término de la derivada más alta de la salida. Si la potencia más alta de  $s$  es igual a  $n$  se dice que se trata de un sistema de  $n$ ésimo orden.

$$H(s) = L\{h(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt \quad \dots \dots \dots (1.3)$$

La salida o respuesta en frecuencia del sistema se halla entonces de la forma:

$$y(s) = H(s)U(s) \quad \dots \dots \dots (1.4)$$

La respuesta en función del tiempo se halla con la transformada de Laplace inversa de  $Y(s)$ :

$$y(t) = L^{-1}[y(s)] \dots\dots\dots (1.5)$$

**1.4 Sistemas continuos de primer orden**

Los sistemas de primer orden tienen por función de transferencia general a la ecuación:

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{s\tau + 1} \dots\dots\dots (1.6)$$

**1.4.1 Respuesta a escalón unitario**

Para un escalón unitario se tiene:

$$x(s) = \frac{1}{s} \dots\dots\dots (1.7)$$

Reemplazando  $x(s)$  en la ecuación. (1.6), se tiene:

$$y(s) = \frac{1}{s\tau + 1} \cdot \frac{1}{s} \dots\dots\dots (1.8)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación. (1.8), se obtiene:

$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau} \dots\dots\dots (1.9)$$

La ecuación (1.9), en donde  $t \geq 0$ , establece que inicialmente la salida  $y(t)$  es cero y finalmente se convierte en la unidad. Una característica importante de una curva exponencial de respuesta  $y(t)$  es que cuánto más pequeña sea la constante de tiempo  $\tau$ , más rápida es la respuesta del sistema. Cuando  $t = \tau$  el valor de  $y(t)$  es de 0.632. En dos constantes de tiempo, la respuesta alcanza 0.865. Así para  $t \geq 4\tau$ , la respuesta se encuentra dentro del 2 % del valor final. Este comportamiento se muestra en la figura 1.1.

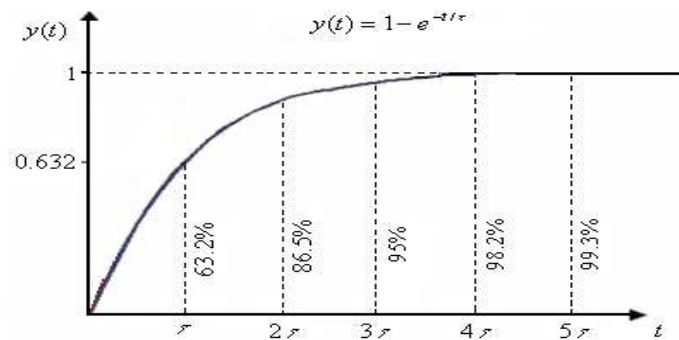


Figura 1.1 Curva exponencial de  $y(t)$ .

### 1.5 Sistemas continuos de segundo orden

Los sistemas de segundo orden tienen por función de transferencia general a la ecuación:

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2} \dots\dots\dots (1.10)$$

$w_n =$  Frecuencia natural no amortiguada       $\delta =$  Factor de amortiguamiento

#### 1.5.1 Respuesta a entrada escalón

Los sistemas de segundo orden presentan diferentes respuestas a una entrada escalón, dependiendo del factor de amortiguamiento ( $\delta$ ), se tiene:

*Caso subamortiguado*  $0 < \delta < 1$

Los polos de la función de transferencia son complejos conjugados de la forma:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm jw_d = -w_n \delta \pm jw_n \sqrt{1 - \delta^2} \quad w_d = \text{Frecuencia natural amortiguada}$$

$$\sigma = \text{Amortiguamiento real}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + w_n \delta}{(s + w_n \delta)^2 + w_d^2} - \frac{w_n \delta}{(s + w_n \delta)^2 + w_d^2}$$

$$y(t) = 1 - e^{-w_n \delta t} \left( \cos w_d t + \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \text{sen} w_d t \right) \dots\dots\dots (1.11)$$

*Caso críticamente amortiguado*  $\delta = 1$

$$Y(s) = \frac{w_n^2}{(s + w_n)^2 s}$$

$$y(t) = 1 - e^{-w_n t} (1 + w_n t) \dots\dots\dots (1.12)$$

*Caso sobreamortiguado*  $\delta > 1$

$$Y(s) = \frac{w_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)s} \quad p_{1,2} = -w_n (\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1})$$

$$y(t) = 1 + \frac{w_n}{2\sqrt{\delta^2 - 1}} \left( \frac{e^{p_2 t}}{p_2} - \frac{e^{p_1 t}}{p_1} \right) \dots\dots\dots (1.13)$$

En la figura 1.2 se muestra la respuesta  $y(t)$  para diferentes valores del factor de amortiguamiento  $\delta$ .

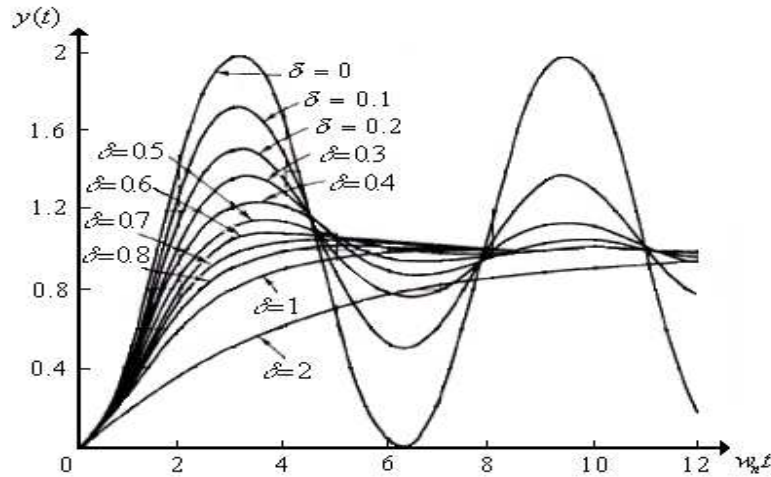
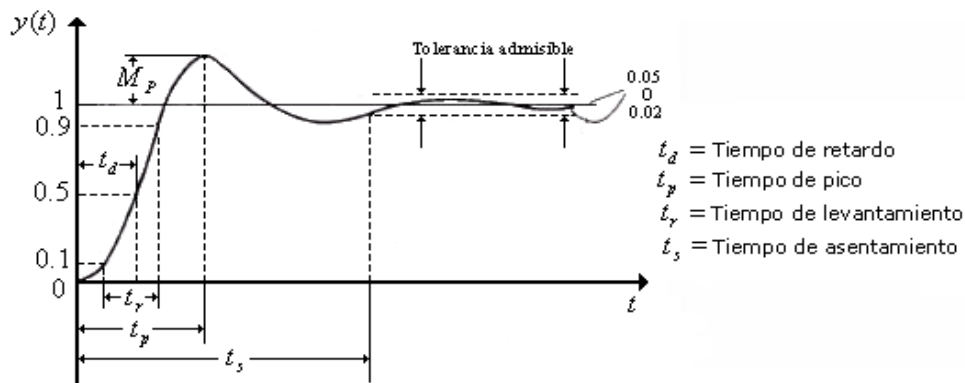


Figura 1.2 Gráfica de  $y(t)$  para diferentes valores de  $\delta$ .

### 1.5.2 Parámetros de la respuesta transitoria

“La respuesta de un sistema dinámico se puede considerar como la suma de una respuesta transitoria y una respuesta permanente” [1]. La respuesta transitoria es la forma en la que responde un sistema al pasar de un estado inicial a uno final y la respuesta permanente o en estado estable es la forma como responde un sistema cuando el tiempo tiende a infinito.



- $t_d$  = Tiempo en que la respuesta alcanza por primera vez la mitad del valor final
- $t_p$  = Tiempo para que la respuesta pase del 10% al 90% de su valor final
- $t_r$  = Tiempo para que la respuesta alcance el primer pico del sobrepaso
- $t_s$  = Tiempo para que la respuesta alcance un intervalo de error sobre el valor final

Figura 1.3 Parámetros de la respuesta transitoria.

### 1.6 Sistemas continuos de orden superior

“Los sistemas continuos de orden superior se pueden considerar como la superposición de sistemas de primero (raíces reales) y segundo orden (raíces complejas)” [1].

### 1.7 Estabilidad en sistemas continuos

“La estabilidad en sistemas continuos se obtiene garantizando que los polos de la función de transferencia (raíces de  $D(s)$ ) no tengan parte real positiva” [10].

$$G_{LC}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \forall p, D(p) = 0, \operatorname{Re}(p) \leq 0$$

Para el caso en que uno o varios polos de la función de transferencia sean cero el sistema no se considera estable, si no que se le llama oscilatorio.

### 1.8 Representación de sistemas discretos

Un sistema lineal, discreto, causal e invariante en el tiempo, se puede representar mediante una ecuación en diferencias de la siguiente forma:

$$\sum_{p=0}^N y[n-p]\alpha_p = \sum_{q=0}^M x[n-q]\beta_q \quad \dots\dots\dots (1.14)$$

Al dividir ambos términos de esta ecuación por  $\alpha_0$ , si no es cero, se tiene:

$$y[n] = \sum_{q=0}^M x[n-q]\beta_q - \sum_{p=0}^N y[n-p]\alpha_p \quad \dots\dots\dots (1.15)$$

Esta forma de la ecuación es más explícita para comprobar que la salida actual  $y[n]$  se define en función de las salidas anteriores  $y[n-p]$ , la entrada actual  $x[n]$  y las entradas anteriores  $x[n-q]$ .

#### 1.8.1 Función de transferencia de sistemas discretos

La función de transferencia de un sistema discreto se calcula haciendo la transformada Z de la ecuación (1.15):

$$Y(z) \sum_{p=0}^N z^{-p} \alpha_p = X(z) \sum_{q=0}^M z^{-q} \beta_q \quad \dots\dots\dots (1.16)$$

Se define a la transformada Z de una secuencia  $x[n]$  como:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \dots\dots\dots (1.17)$$

Donde  $n$  es un entero y  $z$  es, en general, un número complejo de la forma  $z = Ae^{j\omega}$ , donde  $A$  es el módulo de  $z$  y  $\omega$  es la frecuencia en [rad/s]. Dividiendo en la ecuación (1.16):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{q=0}^M z^{-q} \beta_q}{\sum_{p=0}^N z^{-p} \alpha_p} = \frac{\beta_0 + z^{-1} \beta_1 + \dots + z^{-M} \beta_M}{\alpha_0 + z^{-1} \alpha_1 + \dots + z^{-N} \alpha_N} \dots\dots\dots (1.18)$$

Donde la respuesta  $y[n]$  se puede obtener por medio de la transformada Z inversa ( $Z^{-1}$ ) de la forma:

$$y(z) = H(z)x(z)$$

$$y[n] = Z^{-1}[H(z)x(z)] \dots\dots\dots (1.19)$$

### 1.9 Sistemas discretos de primer orden

Los sistemas discretos de primer orden tienen por función de transferencia general a:

$$F(z) = \frac{1}{z+a} \dots\dots\dots (1.20)$$

Al estimular el sistema con un escalón unitario  $u(k)$ , con condiciones iniciales nulas, la respuesta  $y(k)$  puede calcularse como sigue:

$$Y(z) = F(z)U(z) = \frac{1}{(z+a)} \frac{z}{(z-1)} = \frac{z/(1+a)}{(z-1)} - \frac{z/(1+a)}{(z+a)}$$

$$y[k] = Z^{-1}\{Y(z)\} = \frac{1}{(1+a)}(1 - (-a)^k)u[k] \dots\dots\dots (1.21)$$

La expresión muestra que la respuesta del sistema dependerá del valor de  $a$ . Al cambiar el valor de  $a$  también cambia el valor del único polo de la función de transferencia (1.21), que es  $-a$ . Para cualquier valor real positivo de  $a$ , el polo es un real negativo  $-a$  y viceversa. Cuando el polo es negativo, la respuesta del sistema es de signo alternante; por el contrario, si el polo es positivo la respuesta siempre será del mismo signo. Por otra parte, si el valor absoluto de  $a$  es mayor que 1, el valor absoluto de la respuesta tiende a infinito.

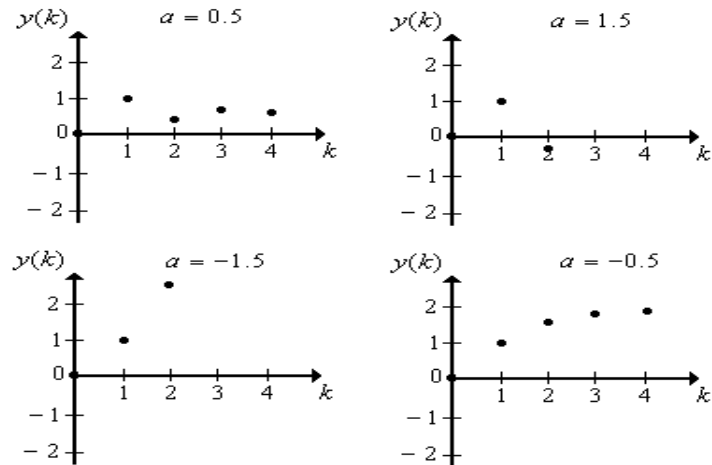


Figura 1.4 Respuesta a un escalón de un sistema discreto de primer orden.

### 1.10 Sistemas discretos de segundo orden

Los sistemas discretos de segundo orden tienen por función de transferencia general a:

$$H(Z) = \frac{1 - 2b \cos a + b^2}{z^2 - 2bz \cos a + b^2} \dots\dots\dots (1.22)$$

Los polos de la función de transferencia serán:  $P_{1,2} = b \cos a \pm b \sqrt{\cos^2 a - 1}$

El término del radical será menor o igual que cero; en caso de que sea menor, los dos polos serán los complejos conjugados de la forma:  $P_{1,2} = b \cos a \pm jbsena$ .

Al estimular el sistema (1.22) con un escalón unitario  $u(k)$ , con condiciones iniciales nulas, la respuesta  $y(k)$  puede calcularse como sigue:

$$Y(z) = F(z)U(z) = \left( \frac{1 - 2b \cos a + b^2}{z^2 - 2bz \cos a + b^2} \right) \left( \frac{z}{z-1} \right) \dots\dots\dots (1.23)$$

Al expandir en fracciones parciales y aplicar la transformada Z inversa, se tiene:

$$y[k] = Z^{-1}\{Y(z)\} = (1 - Cb^k \text{sen}(ak + \phi))u[k] \dots\dots\dots (1.24)$$

Donde:  $C = \frac{\sqrt{1 + b^2 - 2b \cos a}}{bsena} = \frac{1}{sen\phi}$        $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{bsena}{1 - b \cos a}\right)$



La figura 1.5 muestra la gráfica de  $y(k)$  para unos valores específicos de  $a$  y  $b$ . Aunque  $y(k)$  sólo tiene sentido en los valores enteros de  $k$ , se ha trazado también en punteado la curva que se obtendría para valores reales de  $k$ .

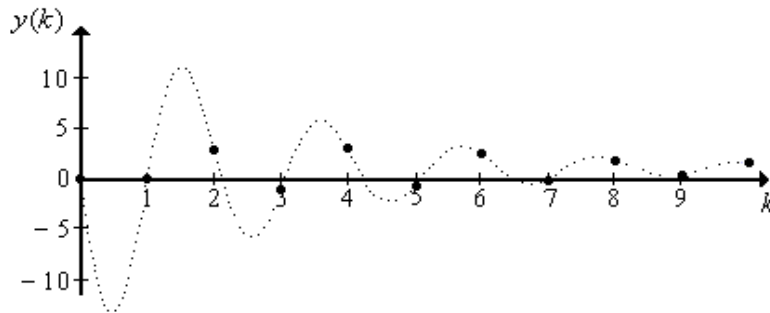


Figura 1.5 Gráfica de la respuesta  $y[k]$  de un sistema discreto de 2do. Orden para  $a=3$  y  $b=0.7$ .

### 1.11 Estabilidad en sistemas discretos

Al evaluar (1.24) se observa que para valores de  $b$  mayores que 1, el término exponencial crece indefinidamente, y por tanto la respuesta se hará infinita. El término  $b$  coincide con la magnitud de los polos de (1.23), por lo tanto, “la región de estabilidad en un sistema discreto, aquella en la que deben ubicarse los polos para que el sistema sea estable, resulta ser el círculo unitario centrado en el origen” [12], tal como se ve en la figura 1.6.

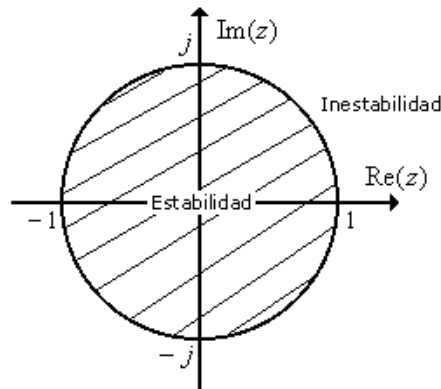


Figura 1.6 Región de estabilidad para sistemas discretos.

### 1.12 Relación entre los planos S y Z

La transformada Z es la herramienta que se utiliza para trasladar de manera sencilla los polos de una función de transferencia del plano S al plano Z. Dado que:

$$z = e^{Ts} = e^{Ts} e^{j2\pi m} \dots\dots\dots (1.25)$$

Con  $n$  entero y  $T$  como el periodo de muestreo, se pueden obtener los puntos equivalentes en el plano  $Z$ . La zona de estabilidad en plano  $S$ , la cual es el semiplano izquierdo, se mapea dentro de un círculo unitario con centro en el origen, como el mostrado en la figura 1.6, lo que establece la zona de estabilidad en el plano  $Z$ .

### 1.12.1 Lugares de amortiguamiento y frecuencia constante

El amortiguamiento ( $\sigma$ ) es la parte real de un polo de la función de transferencia y representa la rapidez con que aumenta o disminuye la respuesta en el tiempo del sistema, mientras que la frecuencia natural amortiguada ( $\omega_d$ ) es la parte compleja de los polos de la función de transferencia y es la frecuencia a la que oscila la respuesta del sistema. Para amortiguamiento y frecuencia constante la ecuación (1.25) queda como:

$$\begin{aligned} z &= e^{T\sigma} && \text{Amortiguamiento constante} \\ z &= e^{j\omega T} && \text{Frecuencia constante} \end{aligned}$$

En la figura 1.7 se muestran las zonas de amortiguamiento y frecuencia constante en el plano  $Z$  obtenidas por medio de las últimas 2 ecuaciones.

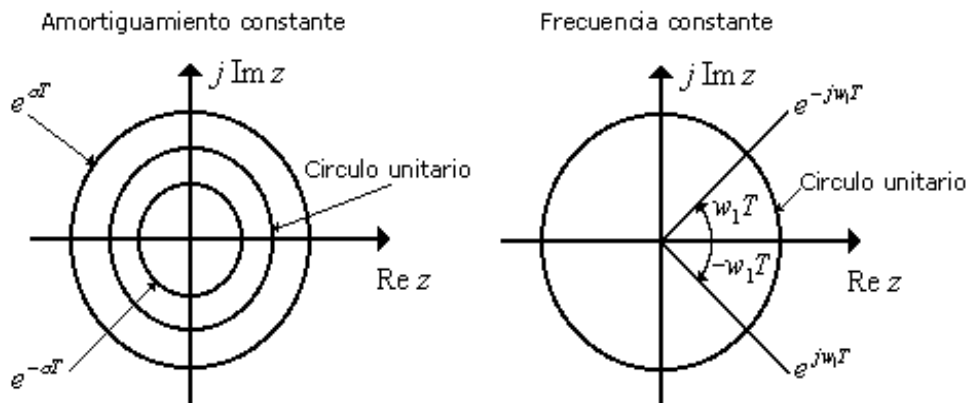


Figura 1.7 Lugar de amortiguamiento y frecuencia constante en el plano  $Z$ .

### 1.13 Respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo se define como la respuesta que genera dicho sistema para una entrada senoidal con frecuencias que pueden ir desde 0 hasta  $\infty$  [rad/s]. “Todos los sistemas que son excitados por una señal senoidal generan como respuesta permanente otra señal senoidal que sólo puede variar en magnitud y en fase de la señal de entrada” [8]. La respuesta en frecuencia se obtiene evaluando en la función de transferencia del sistema la frecuencia angular, que se tiene como variable independiente.

Considerando  $H(s)$  como la función de transferencia de un sistema continuo, lineal e invariante en el tiempo, la respuesta en frecuencia se obtiene como:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} \dots\dots\dots (1.26)$$

$$|H(j\omega)| = \text{Magnitud} \qquad e^{j\phi(\omega)} = \text{Fase}$$

Considerando  $H(z)$  como la función de transferencia de un sistema discreto, lineal, invariante en el tiempo y con un periodo de muestreo  $T_s$ , la respuesta en frecuencia se obtiene como:

$$H(e^{j\omega T_s}) = |H(e^{j\omega T_s})|e^{j\phi(\omega)} \dots\dots\dots (1.27)$$

$$|H(e^{j\omega T_s})| = \text{Magnitud} \qquad e^{j\phi(\omega)} = \text{Fase}$$

### 1.13.1 Diagramas de Bode

“Un Diagrama de Bode es una representación gráfica que sirve para caracterizar la respuesta en frecuencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo” [10]. Normalmente consta de dos gráficas separadas, una que corresponde con la magnitud de dicha función y otra que corresponde con la fase.

El diagrama de magnitud dibuja el módulo de la función de transferencia (ganancia) en decibelios en función de la frecuencia angular en escala logarítmica. El diagrama de fase representa la fase de la función de transferencia en función de la frecuencia angular en escala logarítmica. Permite evaluar el desplazamiento en fase de una señal a la salida del sistema respecto a la entrada para una frecuencia determinada.

$$\text{Logaritmo del módulo de la FT} = 20\log_{10}|H(j\omega)| \text{ [db]} \dots\dots\dots (1.28)$$

“Para sistemas discretos sólo es necesario evaluar para frecuencias entre  $0 \leq \omega \leq \pi/T_s$ , debido a que para frecuencias mayores que a  $\pi/T_s$  se tendrán efectos de traslape (aliasing), como lo establece el teorema del muestreo” [8].

## Capítulo 2: Sistemas mecánicos rotacionales

En este capítulo se presenta el marco teórico de los sistemas mecánicos rotacionales, se describen sus principales componentes, variables y los principios físicos que intervienen en la dinámica de este tipo de sistemas, además de uno de los métodos de análisis más utilizados, como lo es el método de D'Alembert.

### 2.1 Definición y clasificación de los sistemas mecánicos

Los sistemas mecánicos son aquellos dispositivos que se pueden considerar convertidores de movimiento, en tanto transforman el movimiento de una y otra forma. Las leyes fundamentales que rigen el movimiento en los sistemas mecánicos son las leyes de Newton, fundamentalmente la segunda ley. Para poder describir el movimiento rotacional y de traslación en la mecánica se representan mediante tres ejes  $(x,y,z)$ .

Dependiendo del tipo de movimiento que tengan los sistemas mecánicos se pueden clasificar en: sistemas mecánicos de traslación, sistemas mecánicos de rotación y sistemas mecánicos mixtos.

Otra característica importante de los sistemas mecánicos son los grados de libertad, los cuales se definen como el número de coordenadas geoméricamente independientes requeridas para especificar el movimiento.

#### 2.1.1 Sistemas mecánicos rotacionales

Los sistemas mecánicos de rotación son aquellos en que todos sus movimientos son de rotación alrededor de ciertos ejes. Estos abarcan cualquier sistema cuyo elemento motriz es un motor ó una máquina rotatoria.

Los métodos utilizados para el análisis de los sistemas mecánicos rotacionales son: el método de D'Alembert, que sigue los principios de la segunda ley de Newton y el método de Lagrange, el cual está basado en el balance de la energía del sistema.

### 2.2 Variables de los sistemas mecánicos rotacionales

Las variables involucradas en los sistemas mecánicos de rotación son el par o torque, el desplazamiento angular, velocidad angular y la aceleración angular.

#### 2.2.1 Desplazamiento angular

El desplazamiento angular  $\theta$  es la longitud del arco de circunferencia por unidad de radio. La longitud del arco y el radio de la circunferencia son magnitudes de longitud, por lo que el desplazamiento angular es una magnitud adimensional, llamada radián. Un radián es un arco de circunferencia de longitud igual al radio de la circunferencia y la circunferencia completa tiene  $2\pi$  radianes.

$$\theta = \frac{\text{arco}}{\text{radio}} \dots\dots\dots (2.1)$$

**2.2.2 Velocidad angular**

La velocidad angular  $w$  es una medida de la velocidad de rotación. Se mide en radianes por segundo [ $rad/s$ ] y se define como la razón de cambio del desplazamiento angular  $\theta$  respecto del tiempo. El vector que se le asocia tiene como módulo el valor escalar de la velocidad angular y la dirección del eje de rotación.

$$w = \frac{d\theta}{dt} \dots\dots\dots (2.2)$$

De forma vectorial, considerando un sistema de referencia cartesiano  $x,y,z$ , se tiene:

$$w = (w)_x + (w)_y + (w)_z \dots\dots\dots (2.3)$$

**2.2.3 Aceleración angular**

La aceleración angular  $\alpha$  es la tasa de cambio de la velocidad angular  $w$  en el tiempo; es por tanto paralelo al vector velocidad angular. Se mide en unidades de radianes por segundo al cuadrado [ $rad / s^2$ ].

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \dots\dots\dots (2.4)$$

De forma vectorial, considerando un sistema de referencia cartesiano  $x,y,z$ , se tiene:

$$\alpha = (\dot{w})_x + (\dot{w})_y + (\dot{w})_z \dots\dots\dots (2.5)$$

**2.2.4 Par o torque**

El par, torque o momento de una fuerza es la propiedad de una fuerza para hacer girar un cuerpo. Cuando se aplica una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, el cuerpo tiende a realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje.

“Se define el torque  $T$ , de una fuerza  $F$ , que actúa sobre algún punto del cuerpo rígido en una posición  $r$ , respecto de cualquier origen  $O$ , por el que puede pasar un eje sobre el cual se produce la rotación del cuerpo rígido, al producto vectorial entre la posición  $r$  y la fuerza aplicada  $F$ ” [3].

$$T = r \times F \dots\dots\dots (2.6)$$

### 2.3 Elementos de los sistemas mecánicos rotacionales

Existen una gran cantidad de elementos que pueden componer un sistema mecánico rotacional, los cuales pueden cumplir diferentes funciones. Entre los más importantes tenemos: resortes de torsión, rodamientos, elementos de masa, sistemas de engranes, etc.

#### 2.3.1 Resorte de torsión

“Se denomina torsión a la deformación de un cuerpo producida al someterse a un par de fuerzas, las cuales actúan en direcciones opuestas y en planos paralelos, de forma que cada sección del cuerpo experimenta una rotación respecto a otra sección próxima” [2].

El resorte de torsión es un elemento que tiene la capacidad para almacenar energía potencial al estar sometido a fuerzas de torsión. Además, su fuerza (momento) generada varía con la torsión de una forma que se puede considerar lineal dentro de cierto intervalo de torsión del cuerpo. Dentro de este intervalo de comportamiento lineal  $(-\theta_r, \theta_r)$  se tiene:

$$M_k = k\theta \dots\dots\dots (2.7)$$

- Donde:  $M_k$  = Momento generado por la torsión  
 $k$  = Constante de torsión del resorte  
 $\theta$  = Torsión a la que es sometido el resorte

Si se considera un cuerpo de forma cilíndrica con una de sus caras fijada rígidamente a una superficie. Sobre la otra cara, tal como se muestra en la figura 2.1, se aplica un par de fuerzas. El efecto del momento de dichas fuerzas es provocar un desplazamiento angular (torsión) de una generatriz del cilindro.

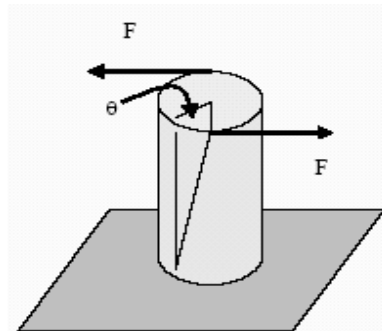


Figura 2.1 Resorte de torsión.

Siempre que el momento de la fuerza sea pequeño el ángulo lo será también. Por tanto, el momento generado dentro del intervalo  $(-\theta_r, \theta_r)$  estará dado por:

$$M_k = \left( \frac{\pi r^4}{2l} G \right) \theta \dots\dots\dots (2.8)$$

La constante de torsión  $k$  de la barra cilíndrica depende de sus dimensiones y del material del que está hecho:

$$k = \frac{\pi \cdot r^4}{2 \cdot l} G \dots\dots\dots (2.9)$$

Donde:  $r$  = Radio del cilindro  
 $G$  = Módulo de rigidez del material del cilindro  
 $l$  = Largo del cilindro

### 2.3.2 Rodamientos

Un rodamiento es un elemento mecánico que reduce la fricción entre un eje y las piezas conectadas a éste, sirviéndole de apoyo y facilitando su desplazamiento. De acuerdo al tipo de contacto que exista entre las piezas, el rodamiento puede ser deslizante ó lineal y rotativo. El elemento rotativo que puede emplearse en la fabricación pueden ser: bolas, rodillos o agujas. Los rodamientos de movimiento rotativo, según el sentido del esfuerzo que soporta, los hay axiales, radiales y axiales-radiales.

“Se define como fuerza de fricción entre dos superficies en contacto a la fuerza que se opone al movimiento de una superficie sobre la otra (fuerza de fricción dinámica) o a la fuerza que se opone al inicio del movimiento (fuerza de fricción estática)” [2].

La fricción rotacional dinámica puede ser de 2 tipos: seca ó viscosa. La fricción viscosa es en la cual entre las 2 superficies se encuentra un medio lubricante, el cual tiene el propósito de disminuir el momento generado por la fricción. Por el contrario, si no existe ningún lubricante entre las superficies se le denomina fricción seca.

El momento generado por la fricción rotacional se opone al movimiento de rotación de una de las superficies y depende de las características de las superficies en contacto, así como de la distribución de la presión en el área de contacto y de la velocidad angular de la superficie que está en movimiento. El comportamiento del momento generado por la fricción rotacional se puede considerar lineal dentro de un intervalo de velocidades angulares de la superficie en movimiento ( $-w_r, w_r$ ) y está dado por:

$$M_b = bw \dots\dots\dots (2.10)$$

Donde:  $M_b$  = Momento generado por la fricción  
 $b$  = Coeficiente de fricción rotacional viscosa o seca  
 $w_r$  = Velocidad angular de la superficie en movimiento

2.3.3 Tren de engranes

“Se denomina tren de engranes al mecanismo utilizado para transmitir potencia mecánica entre las distintas partes de una máquina” [4]. Los engranajes están formados al menos por dos ruedas dentadas. Un engranaje sirve para transmitir movimiento circular mediante contacto de ruedas dentadas. Una de las aplicaciones más importantes de los engranajes es la transmisión del movimiento desde el eje de una fuente de energía, como puede ser un motor eléctrico, hasta otro eje situado a cierta distancia y que ha de realizar un trabajo.

Existen muchos diferentes tipos de engranes, entre los más sencillos de analizar están los trenes ordinarios simples, en los que los ejes de todos los engranajes están fijos y cada eje tiene un solo engranaje montado sobre él. La figura 2.2 muestra un tren ordinario con 2 engranajes exteriores y otro con uno interior y otro exterior.

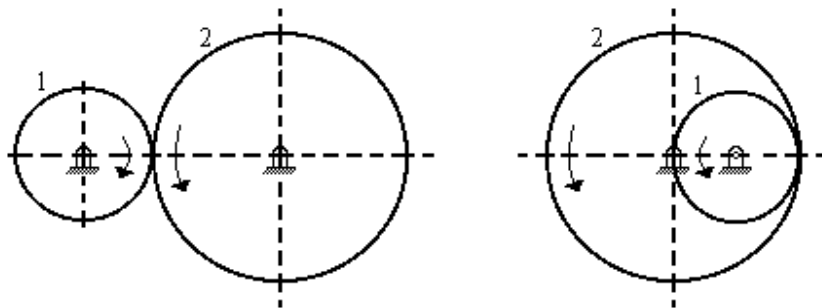


Figura 2.2 Trenes ordinarios de 2 engranes.

Considerando un tren con una cantidad  $n$  de engranes, suponiendo que no existen deslizamientos ni pérdidas de potencia por fricción entre los flancos de los dientes de las ruedas en contacto y despreciando las fuerzas inerciales por parte de los engranes, se tiene:

$$N = (-1)^{n-1} \frac{Z_1}{Z_2} \dots\dots\dots (2.11)$$

- Donde  $N$  = Relación de transmisión
- $Z_1$  = Numero de dientes del engrane inicial
- $Z_2$  = Numero de dientes del engrane final
- $n$  = Numero de engranes

$$\theta_1 = N\theta_2 \dots\dots\dots (2.12)$$

$$T_1 = \frac{T_2}{N} \dots\dots\dots (2.13)$$

- Donde  $\theta_1$  = Desplazamiento angular del engrane inicial
- $\theta_2$  = Desplazamiento angular del engrane final
- $w_1$  = Velocidad angular del engrane inicial



- $w_2$  = Velocidad angular del engrane final
- $T_1$  = Par actuante en el engrane inicial
- $T_2$  = Par actuante en el engrane final

Si  $N < 1$  entonces  $w_2 < w_1$  se está ante un tren reductor de velocidad, en donde se aumenta el momento torsor ( $T_2 > T_1$ ), por lo que el engrane final tiene un mayor número de dientes que el engrane inicial ( $Z_2 > Z_1$ ) y por tanto un mayor diámetro.

Si  $N = 1$  entonces  $w_1 = w_2$  se está ante un tren equirotacional, en donde no existe ninguna variación de los demás parámetros  $T_1 = T_2$ ,  $Z_1 = Z_2$ .

Si  $N > 1$  entonces  $w_2 > w_1$  se está ante un tren multiplicador de velocidad, en donde se disminuye el momento torsor ( $T_2 < T_1$ ), por lo que el engrane inicial tiene un mayor número de dientes que el engrane final ( $Z_1 > Z_2$ ) y por tanto un mayor diámetro.

### 2.3.4 Masa

“Masa es la capacidad que tiene un elemento para almacenar energía cinética” [4]. Se entiende por sólido rígido un cuerpo constituido de masa y cuyo conjunto de elementos que lo componen se mueven en el espacio de tal manera que no se alteran las distancias entre ellos, sea cual sea la fuerza actuante.

El centro de masa de un cuerpo es el punto donde se supone concentrada toda la masa del cuerpo y en un cuerpo rígido es el punto geométrico que dinámicamente se comporta como si estuviese sometido a la resultante de las fuerzas externas al cuerpo. Para un objeto de densidad uniforme el centro de masa es igual al centro geométrico del cuerpo.

### 2.4 Momento angular

Se denota como momento angular  $H$  de un cuerpo rígido, respecto de un punto específico  $P$  del cuerpo (centro de masa). Entonces, “se define al momento angular como la suma de todos los momentos lineales de los infinitesimales elementos de masa que lo constituyen” [2].

$$\bar{H} = \int_{Vol} r \times (v dm) \dots\dots\dots (2.14)$$

- Donde
- $dm$  = diferencial de masa
  - $H$  = Momento angular del cuerpo rígido
  - $r$  = Vector de posición de  $dm$  con respecto a  $P$
  - $v$  = Velocidad lineal instantánea de  $dm$  respecto de  $P$

Las partículas de un sólido rígido en rotación alrededor de un eje fijo describen circunferencias centradas en el eje de rotación con una velocidad que es proporcional al radio de la circunferencia que describen:

$$v = w \times r \dots\dots\dots (2.15)$$

Donde  $w =$  Velocidad angular del cuerpo rígido

Definiendo un conjunto ortogonal de ejes  $x, y, z$ , los cuales se originan en  $P$  y con vectores unitarios  $1_x, 1_y, 1_z$  respectivamente, escribiendo los componentes de  $w, r, v$  y  $H$ , a lo largo de dichos ejes, se tiene:

$$w = 1_x w_x + 1_y w_y + 1_z w_z \dots\dots\dots (2.16)$$

$$r = 1_x x + 1_y y + 1_z z \dots\dots\dots (2.17)$$

Substituyendo (2.16) y (2.17) en (2.15), se tiene:

$$v = 1_x (z w_y - y w_z) + 1_y (x w_z - z w_x) + 1_z (y w_x - x w_y) \dots\dots\dots (2.18)$$

Substituyendo (2.17) y (2.18) en (2.14), se tiene:

$$H = 1_x (J_x w_x - J_{xy} w_y - J_{xz} w_z) + 1_y (-J_{xy} w_x + J_y w_y - J_{yz} w_z) + 1_z (-J_{xz} w_x - J_{yz} w_y + J_z w_z) \dots\dots\dots (2.19)$$

Donde:  $J_{x,y,z} =$  Momento de inercia respecto del eje  $x, y$  o  $z$ .  
 $J_{xy,xz,yz} =$  Productos de inercia respecto de los 2 ejes del subíndice.

“Para un punto  $P$ , dado como origen de un conjunto de ejes coordenados  $(x, y, z)$ , existe un conjunto de direcciones de ejes coordenados, para los cuales todos los productos de inercia de un cuerpo son cero” [2]. Este conjunto de ejes son llamados ejes principales. Por lo tanto, para ejes principales se tiene:

$$H = 1_x (J_x w_x) + 1_y (J_y w_y) + 1_z (J_z w_z) \dots\dots\dots (2.20)$$

### 2.4.1 Momentos de inercia

“El momento de inercia representa la inercia de un cuerpo al rotar, es el valor escalar del momento angular longitudinal de un sólido rígido, es una magnitud que refleja la distribución de masa de un cuerpo o un sistema de partículas, respecto de un eje, en un movimiento de rotación” [4]. El momento de inercia no depende de las fuerzas que intervienen, sino de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro. Para un cuerpo de masa continua lo anterior se generaliza como:

$$J = \int_{Vol} r^2 dm \dots\dots\dots (2.21)$$

Donde  $r$  = Vector de posición de un elemento infinitesimal de masa del cuerpo  
 $dm$  = Diferencial de masa  
 $Vol$  = Indica que hay que integrar sobre todo el volumen del cuerpo

### 2.4.2 Productos de inercia

Básicamente, el producto de inercia (POI), es una medida del desequilibrio dinámico. El POI se expresa en las mismas unidades que el momento de inercia, pero tiene una mayor relación con el centro de masa que el momento de inercia. El producto de inercia respecto de 2 ejes cualquiera  $(x,y)$ , en un sistema de referencia de ejes ortogonales, se define como:

$$POI = \int_{Vol} (xy)dm \dots\dots\dots (2.22)$$

Donde  $(x, y)$  son tomados del vector de posición  $r$  de un elemento infinitesimal de masa del cuerpo, definido en (2.17) y  $dm$  es un elemento diferencial de masa.

“El producto de inercia de un cuerpo homogéneo, respecto de cualquier par de ejes perpendiculares, es igual a cero si el plano determinado por cualquiera de los ejes y el tercer eje coordenado, es un plano de simetría del cuerpo” [13].

### 2.4.3 Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

Si se ubica un elemento de masa  $m_i$ , cuyas coordenadas respecto a los ejes  $x, y, z$  son  $x_i, y_i, d_i$  respectivamente. Considerando a un eje  $z'$ , paralelo al eje  $z$  y separados por una distancia  $d'_i$ , mediante operaciones adecuadas la inercia respecto del eje  $z'$  será:

$$I_{z'} = d_{CM}^2 \sum m_i + 2d_{CM} \sum m_i x_i + I_{zCM}$$

El último término es el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masa. Como  $\sum m_i$  es igual a la masa total  $m$  y  $\sum m_i x_i = 0$ , porque el eje  $z$  pasa por el centro de masa. Por lo tanto, la ecuación queda:

$$I_{z'} = I_{zCM} + md_{CM}^2 \dots\dots\dots (2.23)$$

Por lo que el teorema de los ejes paralelos dice: “el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje paralelo a otro que pasa por su centro de masa, es igual a éste más un término que corresponde al producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre los ejes considerados” [3].

### 2.5 Método de D'Alembert

Este método contempla el análisis de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos que componen el sistema y por medio de un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo del sistema se representan todos los momentos que actúan en él, incluyendo a las fuerzas inerciales que son consideradas como cualquier otra fuerza que actúa sobre el cuerpo, por lo que relaciones de equilibrio pueden ser formuladas como si este fuera un cuerpo estático. Para cuerpos rígidos con movimientos de rotación se cumple la segunda Ley de Newton de la siguiente forma:

$$\sum M_c = \dot{H}_c \dots\dots\dots (2.24)$$

Donde  $M_c$  = Par o torque respecto del centro de masa  
 $H_c$  = Total del momento angular del cuerpo

### 2.6 Velocidades y aceleraciones relativas

La velocidad y la aceleración angular de un cuerpo rígido se pueden expresar de una forma vectorial como en las ecuaciones (2.2) y (2.3), por tanto obedecen las leyes de adición de vectores. Las velocidades y aceleraciones angulares relativas a otros cuerpos en movimiento se pueden expresar como:

$$w_c = w_{c/b} + w_b \dots\dots\dots (2.25)$$

Donde:  $w_c$  = Velocidad angular absoluta del cuerpo c  
 $w_b$  = Velocidad angular absoluta del cuerpo b  
 $w_{c/b}$  = Velocidad angular del cuerpo c relativa al cuerpo b

$$\alpha_c = \alpha_{c/b} + \alpha_b \dots\dots\dots (2.26)$$

Donde:  $\alpha_c$  = Aceleración angular absoluta del cuerpo c  
 $\alpha_b$  = Aceleración angular absoluta del cuerpo b  
 $\alpha_{c/b}$  = Aceleración angular del cuerpo c relativa al cuerpo b

### 2.7 Sistemas de referencia rotacionales

Se consideran  $1_x, 1_y, 1_z$  vectores unitarios a lo largo de los ejes de un sistema de referencia rotatorio  $\alpha$ , el cual tiene una velocidad angular  $w_\alpha$ . Considerando el vector A, el cual está cambiando (en magnitud y dirección) y cuyos componentes son:

$$A = A_x 1_x + A_y 1_y + A_z 1_z$$

Después de un infinitesimal lapso de tiempo  $dt$ , el vector se ha movido de  $a$  a  $b$ . Si  $\dot{A}$  es la razón de cambio absoluta de  $A$ , entonces el vector  $ab$  tiene el valor de  $\dot{A} dt$ , como se muestra en la figura 2.3.

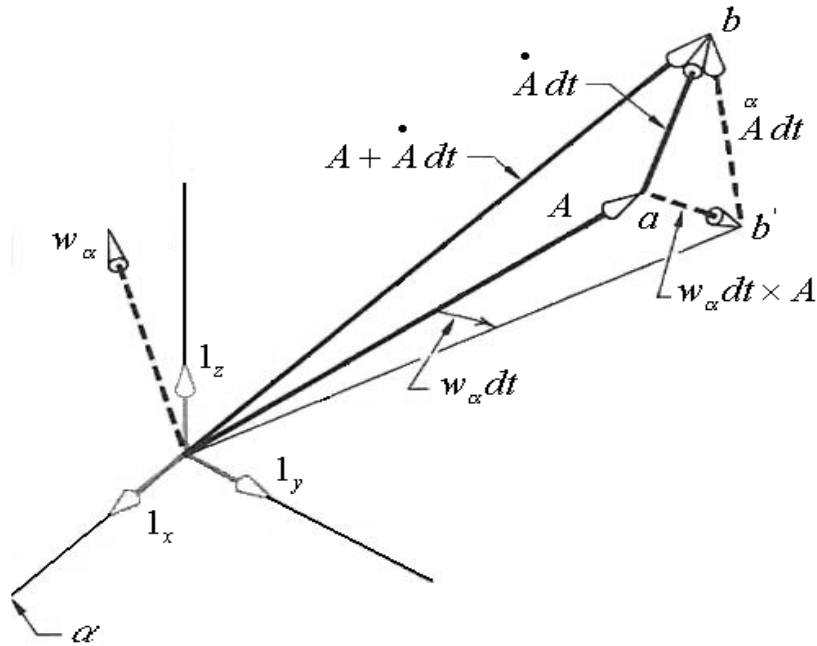


Figura 2.3 Razón de cambio del vector  $A$ .

En el sistema de referencia rotatorio  $\alpha$ , el vector  $A$  estaba inicialmente en el punto  $a$ , y durante el intervalo de tiempo  $dt$  se movió a  $b$ . Entonces, en el sistema de referencia  $\alpha$  el vector parece haberse movido de  $b$  a  $b'$  y la aparente razón de cambio de  $A$ , la cual se denota como  $\overset{\alpha}{A}$ , ésta dada por:

$$\overset{\alpha}{A} = \frac{bb'}{dt} \quad \text{Donde } bb' = \text{Vector de } b \text{ a } b'$$

La diferencia entre el cambio absoluto  $\dot{A} dt$  y el cambio aparente  $\overset{\alpha}{A} dt$  es el vector  $ab'$ , el cual está dado por:

$$ab' = (w_\alpha dt) \times A$$

Donde se puede considerar al vector  $A$  como el momento angular  $H$ . Entonces, la razón de cambio de  $H$  será:

$$\dot{M} = \dot{H} = \overset{\alpha}{\dot{H}} + w_{\alpha} \times H \dots\dots\dots (2.27)$$

$$\overset{\alpha}{\dot{H}} = \dot{H}_x 1_x + \dot{H}_y 1_y + \dot{H}_z 1_z \dots\dots\dots (2.28)$$

Donde  $\dot{H}$  = Razón de cambio de  $H$  visto desde un sistema de referencia no rotatorio  
 $\overset{\alpha}{\dot{H}}$  = Razón de cambio de  $H$  visto desde una referencia  $\alpha$   
 $H$  = Momento angular del cuerpo rígido.

En otras palabras: “La razón de cambio absoluta  $\dot{H}$ , del vector  $H$ , es igual a la aparente razón de cambio  $\overset{\alpha}{\dot{H}}$ , visto desde el sistema de referencia  $\alpha$  (el cual se mueve a una velocidad  $w_{\alpha}$ ) más un término de corrección que es  $w_{\alpha} \times H$  “[2].

## Capítulo 3: Motores de CD y codificadores angulares

En este capítulo se analizan los principios de funcionamiento de los motores de corriente directa (CD), los cuales son uno de los motores más utilizados para el control de posición, así como sus componentes y sus diferentes tipos existentes. Además, se describe el funcionamiento de los codificadores angulares, los cuales son sensores de posición con una gran versatilidad y precisión.

### *3.1 Tipos de motores utilizados para control de posición*

Para el control de posición de algún objeto se utilizan básicamente dos tipos de motores:

- Motores paso a paso.
- Motores de corriente directa (CD).

#### *3.1.1 Motores de corriente continua (CD)*

El motor de CD es un dispositivo que transforma la energía eléctrica de corriente continua en energía mecánica, empleada en hacer girar el eje. Por tanto, un motor tiene dos subsistemas: uno eléctrico, donde la energía eléctrica se transforma en fuerza contraelectromotriz, y otro mecánico, donde el par mecánico se materializa en forma de velocidad de giro del eje.

Los motores de CD suelen ser utilizados para controlar el giro de diversas partes de máquinas y pueden incluir un tren de engranes reductor que proporciona un buen par de fuerza y una gran estabilidad en la velocidad de giro. Son motores de baja inercia en los instantes de arranque y parada. Suelen admitir un amplio rango de alimentación y tienen un peso y tamaño reducidos.

Este tipo de motores proporcionan un par proporcional al voltaje de entrada, lo que significa que tienen una regulación precisa. Sin embargo, no disponen de recursos para saber el ángulo girado y tienen que trabajar en lazo cerrado con sensores para controlar el ángulo girado.

#### *3.1.2 Motores paso a paso*

Los motores paso a paso (P - P) son motores que funcionan con corriente continua, giran ángulos muy exactos y su control es de tipo digital.

Estos motores son controlados con señales digitales en los extremos del motor para que gire un ángulo determinado. El motor de P - P trabaja en lazo abierto ya que el giro del eje es conocido por el propio control. Una desventaja de este tipo de motores es que su eje no recorre todas las posiciones y en consecuencia no se cubre toda el área de trabajo.

### 3.2 Componentes de un motor de CD

El motor de corriente directa está compuesto de 2 piezas fundamentales:

- Rotor
- Estator

#### 3.2.1 Rotor

El rotor constituye la parte móvil del motor y proporciona el torque para mover a la carga. El rotor de un motor de CD está formado básicamente por:

*Eje:* Formado por una barra de acero fresada. Imparte la rotación al núcleo, devanado y al colector.

*Núcleo:* Se localiza sobre el eje. Fabricado con capas laminadas de acero, su función es proporcionar un trayecto magnético entre los polos para que el flujo magnético del devanado circule.

*Devanado o inducido:* Consta de bobinas aisladas entre sí y entre el núcleo. Estas bobinas están alojadas en las ranuras y están conectadas eléctricamente con el colector, el cual, debido a su movimiento rotatorio, proporciona un camino de conducción conmutado.

*Colector o conmutador:* Está constituido de láminas de material conductor (delgas), separadas entre sí y del centro del eje por un material aislante. El colector se encuentra sobre uno de los extremos del eje del rotor, de modo que gira con éste y está en contacto con las escobillas. La función del colector es recoger la tensión producida por el devanado inducido, transmitiéndola al circuito por medio de las escobillas.

#### 3.2.2 Estator

El estator constituye la parte fija de la máquina y su función es suministrar el flujo magnético que será usado por el bobinado del rotor para realizar su movimiento giratorio. El campo magnético puede ser generado por un electroimán o por un imán permanente. Los componentes básicos del estator de un motor de CD de imán permanente son:

*Imán permanente:* Compuesto de material ferromagnético, se encuentra fijado al armazón o carcasa del estator. Su función es proporcionar un campo magnético uniforme al devanado del rotor o armadura, de modo que interactúe con el campo formado por el bobinado y se origine el movimiento del rotor como resultado de la interacción de estos campos.

*Inductor o Arrollamiento de excitación (electroimán):* Está formado por un número par de polos. Las bobinas que los arrollan son las encargadas de producir el campo inductor al circular por ellas la corriente de excitación.



**Armazón:** Denominado también yugo, tiene dos funciones primordiales: servir como soporte y proporcionar una trayectoria de retorno al flujo magnético del rotor para completar el circuito magnético.

**Escobillas:** Las escobillas están fabricadas de carbón y se encuentran albergadas por los portaescobillas. Su función es transmitir la tensión y corriente de la fuente de alimentación hacia el colector. La función del portaescobillas es mantener a las escobillas en su posición de contacto firme con los segmentos del colector. En la figura 3.1 se muestra un motor de DC con estator de imán permanente.

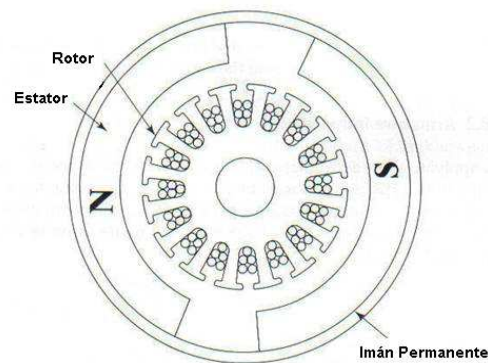


Figura 3.1 Motor con imán permanente.

**Componentes del estator de electroimán:** Está constituido de manera similar al estator de imán permanente, sólo que ahora el imán permanente es reemplazado por un electroimán también llamado inductor ó arrollamiento de excitación, el cual está formado por un número par de polos. Las bobinas que los arrollan son las encargadas de producir el campo inductor al circular por ellas la corriente de excitación. En la figura 3.2 se muestra las partes de un motor con estator de inducción.

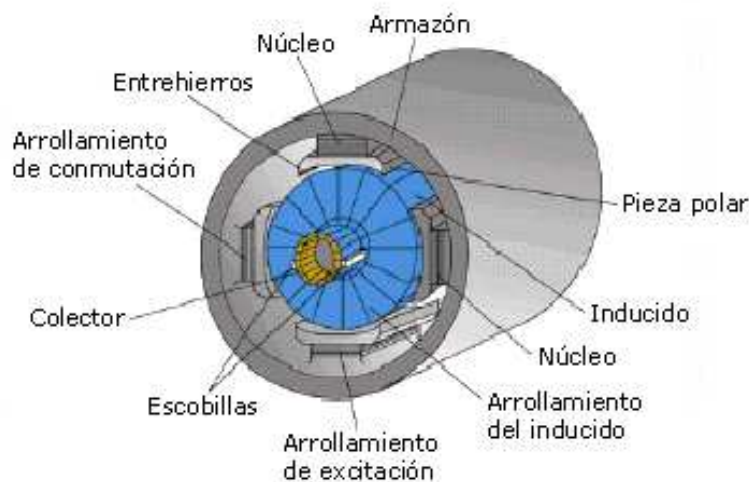


Figura 3.2 Motor con estator de inducción.

### 3.3 Principio de funcionamiento de un motor de CD

Accionar un motor DC es muy simple y sólo es necesario aplicar la tensión de alimentación entre sus bornes. Para invertir el sentido de giro basta con invertir la alimentación y el motor comenzará a girar en sentido opuesto.

Un motor de DC basa su funcionamiento en la fuerza producida en un conductor a causa de la presencia de un campo magnético  $B$ , sobre una intensidad de corriente eléctrica  $i_a$ . “Según la segunda ley de Lorentz, un conductor por el que pasa una corriente eléctrica que causa un campo magnético a su alrededor, tiende a ser expulsado si se le quiere introducir en otro campo magnético” [5]. Entonces, el par generado  $T$  por un motor está dado por:

$$T = N.L.B.i_a \dots\dots\dots (3.1)$$

Donde:  $N$  = Número de vueltas del alambre del rotor  
 $L$  = Longitud del conductor [m]  
 $i_a$  = Intensidad de corriente que recorre el conductor [A]  
 $B$  = Intensidad de campo magnético que pasa a través del rotor [Teslas]

El sentido de giro de un motor de corriente continua depende del sentido relativo de las corrientes circulantes por los devanados inductor e inducido y se pueden definir con la regla de la mano derecha. Agrupando todas estas constantes en una sola, se tiene:

$$T = K_t.i_a \dots\dots\dots (3.2)$$

Donde  $T$  = Par generado por el motor [Nm]       $K_t$  = Constante de par [Nm/A]  
 $i_a$  = Intensidad de corriente que recorre el conductor [A]

Cuando una bobina comienza a girar se genera un voltaje en los conductores siguiendo la ley de Faraday, la cual dice que “la fuerza electromotriz de inducción (o inducida) en un circuito cerrado, es igual a la variación del flujo de inducción  $\Phi$  del campo magnético que lo atraviesa por unidad de tiempo” [5], lo que se expresa por la fórmula:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} \dots\dots\dots (3.3)$$

El signo menos indica que el sentido de la fuerza electromotriz (F.E.M.) inducida es tal que se opone a dicha variación (Ley de Lenz). Siendo  $\Delta\phi/\Delta t$  la variación del flujo magnético por unidad de tiempo para una sola espira en la bobina.

Considerando un motor de aplicación práctica, el cual cuenta con un conmutador que se encarga de la rectificación de la FEM generada y está constituido por una o varias bobinas conectadas en serie, por lo que los voltajes generados son aditivos. El resultado es un

voltaje constante con apenas unas pequeñas variaciones. Por lo tanto, para un motor de CD real la expresión de la FEM generada está dada por:

$$E = \frac{\Phi Z P}{2\pi a} \omega \dots\dots\dots (3.4)$$

- Donde:  $\Phi$  = Flujo total por polo [Wb]  
 $Z$  = Conductores totales en la armadura  
 $P$  = Número total de polos  
 $a$  = Número de trayectorias paralelas en el devanado de la armadura  
 $\omega$  = Velocidad angular del rotor [rad/s]

Agrupando todas esas constantes en una sola, se tiene:

$$E = K_v \omega \dots\dots\dots (3.5)$$

- Donde:  $E$  = FEM inducida en devanado del rotor  
 $K_v$  = Constante de velocidad (back EMF)  
 $\omega$  = Velocidad angular del rotor

### 3.4 Tipos de motores de CD

Los motores de CD se pueden clasificar de acuerdo a la forma que generan el campo magnético en el estator, como de imán permanente o de inductor (electroimán).

#### 3.4.1 Motores de imán permanente

El campo magnético es generado por un imán permanente. La mayoría de los pequeños motores son de magneto permanente, los cuales, en comparación con los de campo bobinado, presentan ventajas como: menor costo, mayor eficiencia y menor incidencia de fallas. Su circuito equivalente esta dado por la figura 3.3:

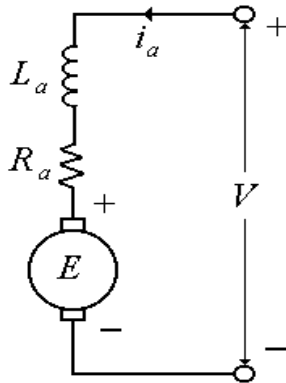


Figura 3.3 Circuito equivalente motor de imán Permanente.

Donde  $L_a$  y  $R_a$  son la inductancia y la resistencia de la armadura respectivamente. El voltaje  $V$  es el voltaje de entrada del motor. La FEM inducida  $E$  está dada por la ecuación (3.5) y el par generado por el motor por la ecuación (3.2).

Hay que tener en cuenta en las relaciones básicas de los motores de imanes permanentes que la velocidad del motor es inversamente proporcional al par y que a menor velocidad se genera una menor FEM ( $E$ ), con consecuente incremento de la corriente  $I$ . Las curvas de velocidad  $N$  y de corriente  $I$ , respecto del par  $T$ , son lineales, mientras que la potencia de salida  $P$  tiene un comportamiento como se muestran en la figura 3.4.

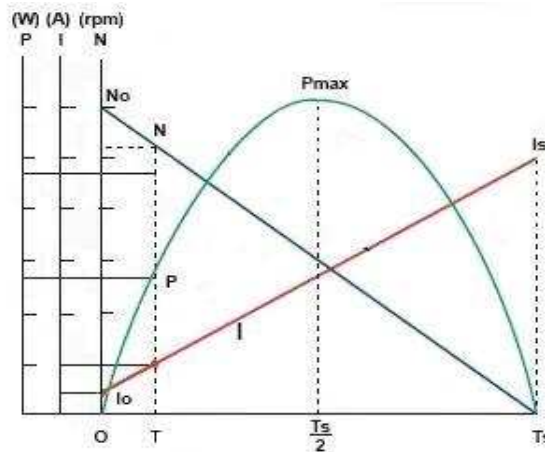


Figura 3.4 Curvas de desempeño de un motor de imán permanente.

El subíndice (*o*) indica que el motor no tiene carga, el subíndice (*max*) significa que es el valor máximo y el subíndice (*s*) indica que el motor está trabado debido a la carga excesiva y es cuando desarrolla su mayor torque.

La potencia de salida se define como:

$$P_s = \frac{T \cdot N}{97500} \dots\dots\dots (3.6)$$

- Donde:  $P_s$  = Potencia de salida [W]  
 $T$  = Torque [gr.cm]  
 $N$  = Velocidad angular [rpm]

### 3.4.2 Motores de campo bobinado

El campo magnético es generado por un electroimán también llamado inductor. De acuerdo con la manera en que están conectados los motores con inductor se clasifican en: excitación separada, excitación en derivación (shunt), excitación en serie y excitación compuesta.

*Motores de excitación separada:* El campo magnético se obtiene con una bobina que recibe alimentación separada de la armadura. Existe una relación entre el voltaje  $V_f$  aplicado a la bobina de excitación y el campo magnético obtenido. Debido a que ahora se puede cambiar la intensidad del campo magnético, se puede obtener cualquier torque independiente de la velocidad. Su circuito equivalente se muestra en la figura 3.5.

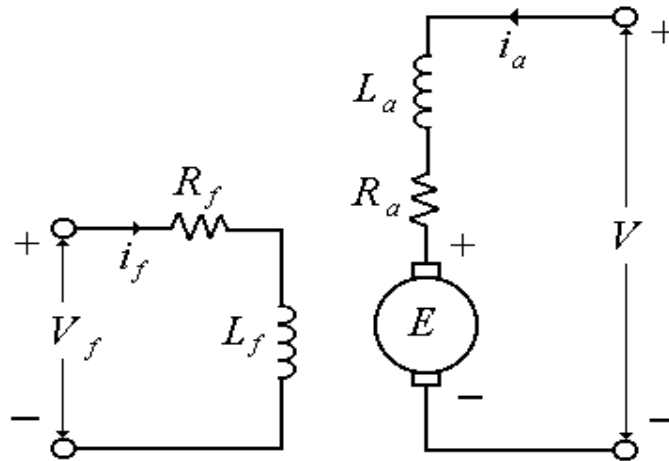


Figura 3.5 Circuito equivalente de motor de excitación separada.

Donde  $L_a$  y  $R_a$  son la inductancia y la resistencia de la armadura respectivamente,  $L_f$  y  $R_f$  son la inductancia y la resistencia de la bobina generadora del campo del estator respectivamente y en el cual, la intensidad del campo magnético generado está dado por:

$$B = K_f \cdot i_f \dots\dots\dots (3.7)$$

Donde:  $B$  = Intensidad de campo magnético [Wb]

$K_f$  = Constante de campo

$i_f$  = Corriente que circula por la bobina de campo [A]

Considerando la excitación de la bobina de campo  $V_f$  como un voltaje constante, se obtiene una intensidad de campo  $B$  constante, por lo que el torque generado está dado también por la expresión (3.2) y la FEM inducida  $E$  está dada por la expresión (3.5). Sus curvas de desempeño para una intensidad de campo constante son iguales a las de la figura 3.4, con la particularidad de que estas curvas se modifican si se cambia el voltaje de excitación de la bobina de campo  $V_f$ .

Por sus características de desempeño los motores de campo bobinado con conexión de excitación separada son una buena opción para aplicaciones de control de posición, a diferencia de las conexiones en serie, derivación y compuesta en las cuales el control de posición es muy complicado, por lo que son utilizadas para otros propósitos.

### 3.5 Sensores de posición angular

Para un sistema automático de control de posición realice su tarea de forma eficiente, rápida e inteligente, es preciso que tenga conocimiento en tiempo real de la posición del elemento que se desea controlar. Para tal propósito se utilizan los sensores de posición angular. Estos sensores son transductores los cuales nos entregan un voltaje de salida (analógico o digital) que nos indica la posición del elemento de medición.

Actualmente no existe un método infalible y universal para calcular la posición, sino que, por el contrario, existen una serie de métodos basados en diversas técnicas que intentan resolver el problema, entre los cuales tenemos: potenciómetros, codificadores angulares, transformadores diferenciales de variación lineal (LVDT), resolvers, etc.

### 3.6 Codificadores angulares

“Un codificador angular es un sensor electro-opto-mecánico que unido a un eje, proporciona información de la posición angular” [14]. Su fin, es actuar como un dispositivo de realimentación en sistemas de control. Por su versatilidad y precisión son uno de los sensores de posición más utilizados, son empleados en multitud de aplicaciones como automatización, control de procesos industriales, instrumentos de medida y control, etc. Los codificadores angulares entregan una señal de salida del tipo digital y pueden ser incrementales o absolutos.

#### 3.6.1 Codificadores angulares incrementales

Los codificadores angulares incrementales constan básicamente de un disco transparente, el cual tiene una serie de marcas opacas colocadas radialmente y equidistantes entre sí; de un elemento emisor de luz (como un diodo LED), y de un elemento fotosensible que actúa como receptor. El eje cuya posición angular se va a medir va acoplado al disco.

El funcionamiento es el siguiente: cuando el sistema comienza a funcionar el emisor de luz empieza a emitir, a medida que el eje vaya girando, se producirán una serie de pulsos de luz en el receptor, correspondientes a la luz que atraviesa los huecos entre las marcas. Llevando una cuenta de esos pulsos es posible conocer la posición del eje.

Sobre este esquema básico es habitual encontrar algunas mejoras. Por ejemplo, se suele introducir otra franja de marcas por debajo, desplazada de la anterior, para poder controlar el sentido del giro, además suele ser necesario el empleo de una marca de referencia que ayudará a saber si se ha completado una vuelta. En la figura 3.6 se muestra un esquema básico de un codificador angular incremental.

Realmente los codificadores angulares incrementales miden la velocidad de giro, pero se puede extrapolar la posición angular. Como es lógico, la resolución de este tipo de sensores depende del número de marcas que se pueden poner físicamente en el disco.

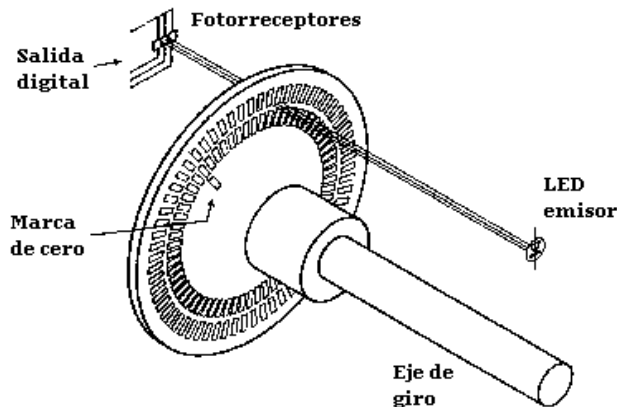


Figura 3.6 Codificador angular incremental.

### 3.6.2 Codificadores angulares absolutos

La función de este tipo de dispositivos es similar a la de los anteriores, medir la posición angular. Sin embargo en este caso lo que se va a medir no es el incremento de esa posición, sino la posición exacta. La disposición es parecida a la de los codificadores incrementales. También se dispone de una fuente de luz, de un disco graduado y de un fotorreceptor. La diferencia estriba en la graduación o codificación del disco. En este caso el disco se divide en un número fijo de sectores (potencia de 2) y se codifica cada uno con un código cíclico (normalmente un código de Gray), este código queda representado en el disco por zonas transparentes y opacas dispuestas radialmente, como se puede apreciar en la figura 3.7.

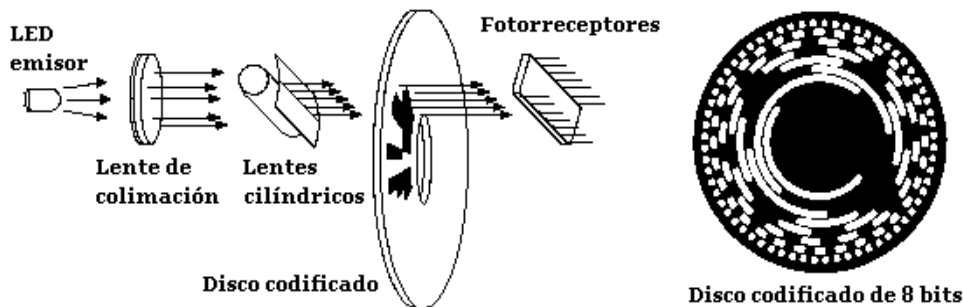


Figura 3.7 Codificador angular absoluto.

No es necesaria ninguna mejora para detectar el sentido del giro, ya que la codificación de los distintos sectores angulares es absoluta. La resolución de estos sensores es fija y viene dada por el número de anillos que posea el disco, o lo que es lo mismo, el número de bits del código utilizado. Normalmente se usan códigos de 8 a 19 bits.

Tanto los codificadores absolutos como los incrementales pueden presentar problemas debido a la gran precisión que es necesaria en el proceso de fabricación. Además son dispositivos especialmente sensibles a golpes y vibraciones.

## Capítulo 4: Sistema de movimiento de un goniómetro láser

En este capítulo se describe el esquema general del sistema de movimiento de un goniómetro láser, así como los diversos componentes que lo integran. Además, mediante los conceptos vistos en los capítulos 2 y 3, se obtiene y analiza un modelo matemático lineal que describe la dinámica de este sistema electromecánico.

### 4.1 Componentes del sistema de movimiento

La parte móvil de un goniómetro láser es llamada comúnmente cabeza de medición. El movimiento de la cabeza de medición consiste en rotación respecto de 2 ejes ortogonales entre sí, en los cuales se encuentran codificadores angulares para la medición de estos ángulos. Ambos ejes son movidos por servomotores (motores de CD con un sistema de engranes). El láser tiene un movimiento de rotación vertical y la base, donde se encuentra el láser, tiene un movimiento de rotación horizontal. Estos 2 movimientos están restringidos a rangos menores a  $360^\circ$ . En la figura 4.1 se muestra el esquema básico de la cabeza de medición de un goniómetro láser.

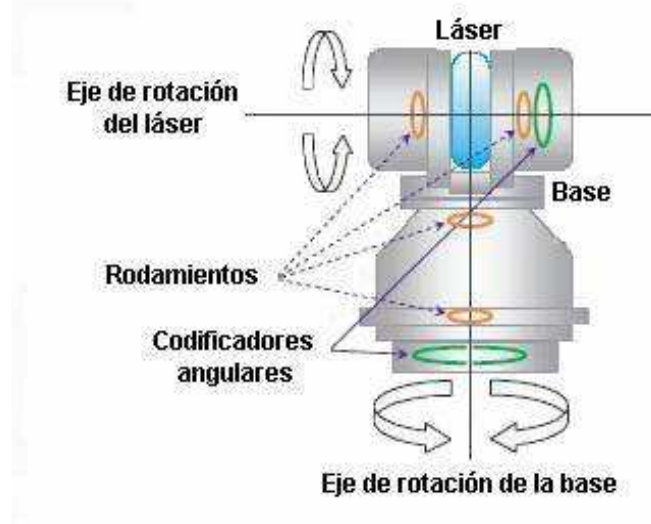


Figura 4.1 Cabeza de medición

### 4.2 Representación de la cabeza de medición

La cabeza de medición de un goniómetro láser es un sistema mecánico rotacional que puede representarse de manera simple por un modelo de parámetros concentrados, en el cual se consideran 4 masas ( $J$ ) y fricción dinámica en los rodamientos ( $b$ ).

Para realizar el análisis dinámico de este sistema mecánico rotacional se consideran 2 sistemas de referencia con origen en el centro de masa del láser. El sistema de referencia  $XYZ$  es un sistema de referencia fijo y el sistema de referencia  $x'y'z'$  es un sistema de referencia móvil que se mueve de manera conjunta con el láser. En la figura 4.2 se muestra el esquema simplificado de la cabeza de medición.



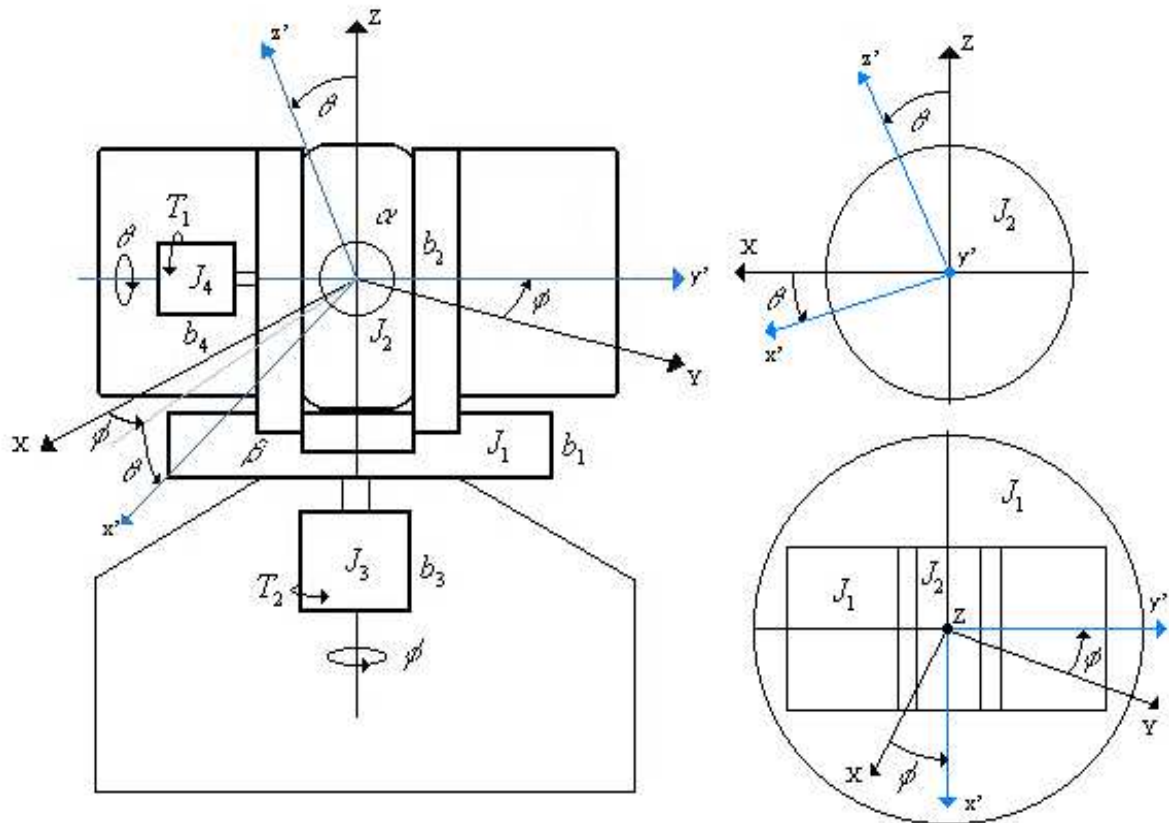


Figura 4.2: Representación de la cabeza de medición

Donde:

$J_1$  = Masa de la base

$J_2$  = Masa del láser

$J_3$  = Masa del rotor del motor de la base

$J_4$  = Masa del rotor del motor del láser

$b_1$  = Coeficiente de fricción en la base

$b_2$  = Coeficiente de fricción en el láser

$b_3$  = Coeficiente de fricción en el rotor del motor de la base

$b_4$  = Coeficiente de fricción en el rotor del motor del láser

$T_1$  = Torque en el rotor del motor del láser

$T_2$  = Torque en el rotor del motor de la base

$\theta$  = Posición angular del láser

$\phi$  = Posición angular de la base

### 4.3 Modelado del sistema de movimiento

Considerando el efecto de la torsión en las flechas de los 2 motores como despreciable y suponiendo que todas las masas en el sistema son cuerpos rígidos simétricos y balanceados, entonces se tiene que  $J_1$  y  $J_3$  se mueven de manera conjunta en el ángulo  $\theta$ , y  $J_2$  y  $J_4$  se mueven de manera conjunta en el ángulo  $\phi$ .

Sí  $i, j, k$  y  $i', j', k'$  son vectores unitarios en dirección de los ejes de los sistemas de referencia  $XYZ$  y  $x'y'z'$  respectivamente, de acuerdo con las ecuaciones (2.3) y (2.25) las velocidades angulares  $w$  para los 4 cuerpos que componen el sistema anterior son:

$$w_1 = w_3 = w^\beta = (\dot{\phi})k \dots\dots\dots (4.1)$$

$$w_2 = w_4 = w^{\alpha/\beta} + w^\beta = (-\dot{\phi} \text{sen} \theta)i' + (\dot{\theta})j' + (\dot{\phi} \cos \theta)k' \dots\dots\dots (4.2)$$

Considerando que cada sistema de referencia utilizado se compone de ejes principales para el cuerpo que le sirve de referencia, entonces de acuerdo con la ecuación (2.20), los momentos angulares  $H$  para los 4 cuerpos son:

$$H_1 = (J_{z1} \dot{\phi})k \dots\dots\dots (4.3)$$

$$H_2 = (J_{x2} (-\dot{\phi} \text{sen} \theta))i' + (J_{y2} \dot{\theta})j' + (J_{z2} \dot{\phi} \cos \theta)k' \dots\dots\dots (4.4)$$

$$H_3 = (J_{z3} \dot{\phi})k \dots\dots\dots (4.5)$$

$$H_4 = (J_{x4} (-\dot{\phi} \text{sen} \theta))i' + (J_{y4} \dot{\theta})j' + (J_{z4} \dot{\phi} \cos \theta)k' \dots\dots\dots (4.6)$$

Donde:  $J's$  = Momentos de inercia respecto de un eje de uno de los cuerpos

Para simplificar las ecuaciones se puede utilizar las siguientes relaciones:

$$J_B = J_1 + J_3 \qquad b_B = b_1 + b_3$$

$$J_L = J_2 + J_4 \qquad b_L = b_2 + b_4$$

De acuerdo con la ecuación (2.28), la razón de cambio de los momentos angulares para los cuerpos del láser ( $L$ ) y la base ( $B$ ), vistos desde referencias ( $\alpha$  y  $\beta$ ) son:

$$H_B^\beta = (J_{zB} \ddot{\phi})k \dots\dots\dots (4.7)$$

$$H_L^\alpha = (-\dot{\phi} \dot{\theta} J_{x'L} \cos \theta - J_{x'L} \ddot{\phi} \text{sen} \theta)i' + (J_{y'L} \ddot{\theta})j' + (J_{z'L} \ddot{\phi} \cos \theta - J_{z'L} \dot{\theta} \dot{\phi} \text{sen} \theta)k' \dots\dots\dots (4.8)$$

Los momentos  $M$  generados por los cuerpos, de acuerdo con la ecuación (2.27), son:

$$M_B = (J_{ZB} \ddot{\phi})k \dots\dots\dots (4.9)$$

$$M_L = (\dot{\phi} \dot{\theta} (J_{Z'L} - J_{Y'L}) \cos \theta - J_{X'L} (\dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + \ddot{\phi} \sin \theta)) i' + (\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta (J_{Z'L} - J_{X'L}) + J_{Y'L} \ddot{\theta}) j' + (-\dot{\phi} \dot{\theta} (J_{Y'L} - J_{X'L}) \sin \theta + J_{Z'L} (-\dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\phi} \cos \theta)) k' \dots\dots\dots (4.10)$$

Se denota con  $M_{bL}$  al momento generado por la fricción en los rodamientos del láser y con  $T_1$  al torque generado por el motor del láser. Entonces, de acuerdo con la ecuación (2.24), al realizar la suma de momentos respecto del eje  $y'$ , se tiene:

$$(M_L)_{y'} + M_{bL} = T_1 \dots\dots\dots (4.11)$$

El valor de  $M_{bL}$  está dado por la ecuación (2.10) y el de  $(M_L)_{y'}$  por la ecuación (4.10), al substituirlos en la ecuación (4.11), se tiene:

$$\dot{\phi}^2 (J_{Z'L} - J_{X'L}) \sin \theta \cos \theta + J_{Y'L} \ddot{\theta} + b_L \dot{\theta} = T_1 \dots\dots\dots (4.12)$$

Se denota con  $M_{bB}$  al momento generado por la fricción en los rodamientos de la base y con  $T_2$  al torque generado por el motor de la base. Entonces, de acuerdo con la ecuación (2.24), al realizar la suma de momentos respecto del eje  $Z$ , se tiene:

$$(M_B)_K + (M_L)_K + M_{bB} = T_2 \dots\dots\dots (4.13)$$

Para utilizar la ecuación anterior se debe considerar lo siguiente:

$$(M_L)_K = (M_L)_{K'} \cos \theta - (M_L)_{i'} \sin \theta$$

Los momentos de inercia  $(M_B)_K$  y  $(M_L)_K$  se encuentran dados por las ecuaciones (4.9) y (4.10) respectivamente, mientras que el momento generado por la fricción  $M_{bB}$  está dado por la ecuación (2.10). Al substituir estos términos en la ecuación (4.13), se tiene:

$$(J_{ZB} + J_{Z'L} \cos^2 \theta + J_{X'L} \sin^2 \theta) \ddot{\phi} + (2 \dot{\theta} (J_{X'L} - J_{Z'L}) \sin \theta \cos \theta + b_B) \dot{\phi} = T_2 \dots\dots (4.14)$$

Considerando que  $J_{X'L} = J_{Z'L}$ , las ecuaciones (4.14) y (4.12) quedan:

$$J_{Y'L} \ddot{\theta} + b_L \dot{\theta} = T_1 \dots\dots\dots (4.15)$$

$$(J_{ZB} + J_{Z'L}) \ddot{\phi} + b_B \dot{\phi} = T_2 \dots\dots\dots (4.16)$$

Estas últimas 2 ecuaciones corresponden al análisis por medio del método de D'Alembert de 2 sistemas independientes, compuestos de 1 cuerpo cada uno, con movimiento sólo alrededor de un eje y excitados por medio de los torques  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente. Por lo tanto, bajo estas condiciones se puede considerar un modelo simplificado de la parte mecánica de la cabeza de medición, como el que se muestra en la figura 4.3.

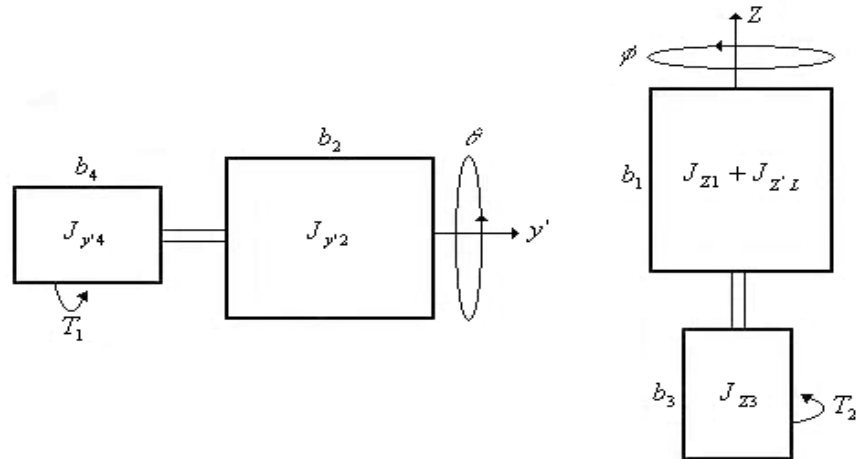


Figura 4.3: Modelo simplificado de la parte mecánica.

#### 4.4 Modelo mecánico simplificado con tren de engranes

Para incrementar el torque generado por los motores se agrega al sistema de movimiento un tren de engranes reductor de velocidad no inversor en la flecha de cada motor, con relaciones de transmisión  $N_1$  y  $N_2$ , para los sistemas del láser y la base respectivamente. Considerando que no existen deslizamientos, ni fricción entre los engranes y despreciando sus momentos de inercia, se tienen 2 sistemas independientes con un tren de engranes y con una nueva asignación de parámetros, como se muestra en la figura 4.4.

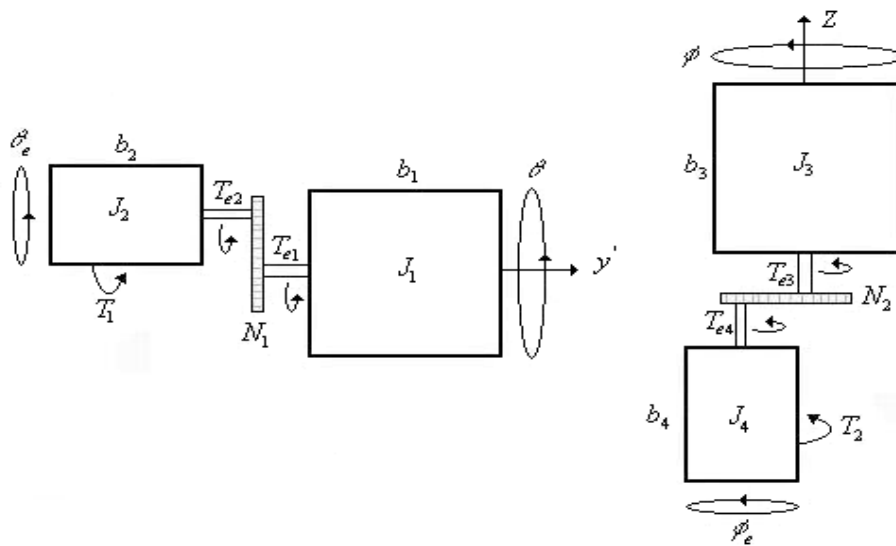


Figura 4.4 Modelo simplificado de la parte mecánica con tren de engranes.

Donde:  $J_1 = J_{y^2}$   $b_1 =$  Coeficiente de fricción en el láser  
 $J_2 = J_{y^4}$   $b_2 =$  Coeficiente de fricción en el rotor del motor del láser  
 $J_3 = J_{z1} + J_{z'L}$   $b_3 =$  Coeficiente de fricción en la base  
 $J_4 = J_{z3}$   $b_4 =$  Coeficiente de fricción en el rotor del motor de la base

Realizando la suma de momentos respecto del eje de rotación del cuerpo 1, se tiene:

$$J_1 \ddot{\theta} + b_1 \dot{\theta} = T_{e1} \dots\dots\dots (4.17)$$

Realizando la suma de momentos respecto del eje de rotación del cuerpo 2, se tiene:

$$J_2 \ddot{\theta}_e + b_2 \dot{\theta}_e + T_{e2} = T_1 \dots\dots\dots (4.18)$$

De las ecuaciones (2.11) y (2.12), obtenidas del análisis del modelo de un tren de engranes ideal, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$T_{e1} = N_1 T_{e2} \dots\dots\dots (4.19)$$

$$\theta_e = N_1 \theta \dots\dots\dots (4.20)$$

Por medio de sustituciones de las ecuaciones (4.18), (4.19) y (4.20), en (4.17) se obtiene:

$$\left( \frac{J_2 + N_1^2 J_1}{N_1} \right) \ddot{\theta} + \left( \frac{b_2 + N_1^2 b_1}{N_1} \right) \dot{\theta} = T_1 \dots\dots\dots (4.21)$$

Realizando un análisis similar al anterior para el segundo sistema de la figura 4.4 (sistema de la base), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left( \frac{J_4 + N_2^2 J_3}{N_2} \right) \ddot{\phi} + \left( \frac{b_4 + N_2^2 b_3}{N_2} \right) \dot{\phi} = T_2 \dots\dots\dots (4.22)$$

**4.5 Modelo simplificado del sistema electromecánico**

Considerando que el torque  $T_1$  y  $T_2$ , de las ecuaciones (4.21) y (4.22), son producidos por motores de CD con excitación separada o con un motor de imán permanente, se puede tomar su circuito equivalente mostrado en la figura 3.5 y agregarlo a los sistemas de la figura 4.4 para obtener los sistemas electromecánicos del láser y la base, como los que se muestran en la figura 4.5.

Los torques  $T_1$  y  $T_2$  están dados por la ecuación (3.2) y las FEM's inducidas  $E_1$  y  $E_2$  están dadas por la ecuación (3.5). Del circuito equivalente del motor del primer sistema de la figura 4.5, se obtiene:

$$V_1 k_{a1} = i_{a1} R_{a1} + L_{a1} \frac{di_{a1}}{dt} + E_1 \dots\dots\dots (4.23)$$

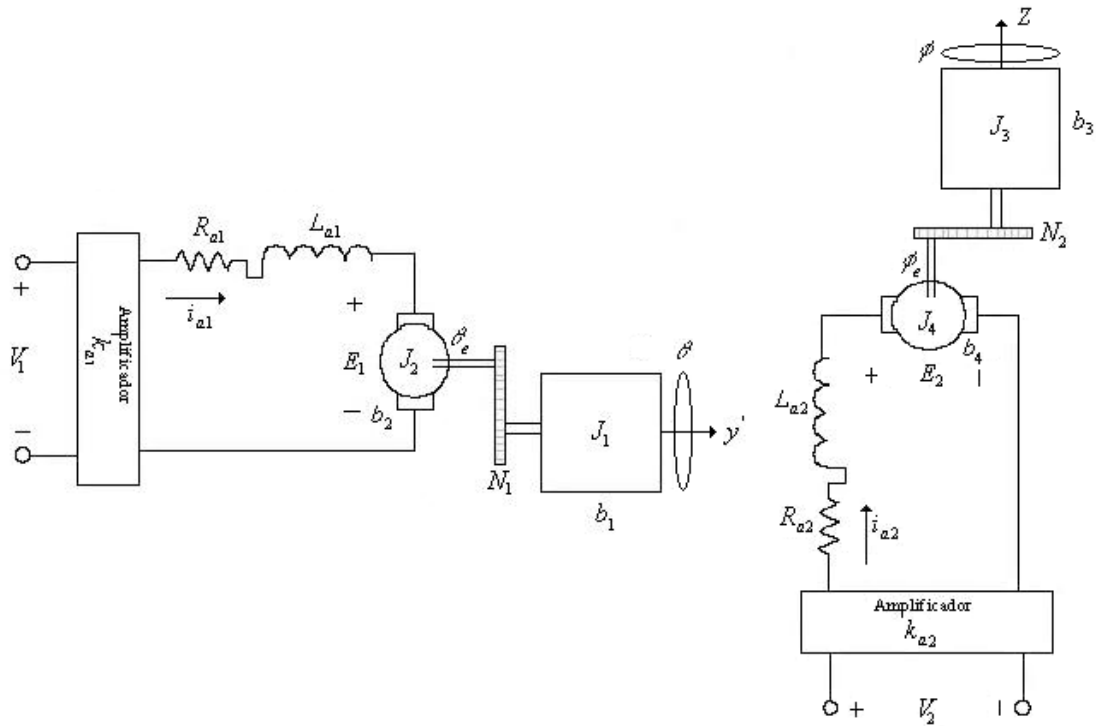


Figura 4.5 Modelo simplificado de la cabeza de medición.

Substituyendo las ecuaciones (4.23), (3.2) y (3.5) en la ecuación (4.21), se obtiene:

$$\frac{L_{a1}}{K_{t1} N_1} (J_2 + N_1^2 J_1) \ddot{\theta} + \frac{1}{K_{t1} N_1} (R_{a1} (J_2 + N_1^2 J_1) + L_{a1} (b_2 + N_1^2 b_1)) \dot{\theta} + \left( \frac{R_{a1}}{K_{t1} N_1} (b_2 + N_1^2 b_1) + \frac{K_{V1}}{N_1} \right) \theta = k_{a1} V_1 \dots\dots\dots (4.24)$$

Realizando un análisis similar al anterior para el segundo sistema de la figura 4.5, se obtiene la ecuación diferencial para el ángulo  $\phi$ , la cual está definida por:

$$\frac{L_{a2}}{K_{t2} N_2} (J_4 + N_2^2 J_3) \ddot{\phi} + \frac{1}{K_{t2} N_2} (R_{a2} (J_4 + N_2^2 J_3) + L_{a2} (b_4 + N_2^2 b_3)) \dot{\phi} + \left( \frac{R_{a2}}{K_{t2} N_2} (b_4 + N_2^2 b_3) + \frac{K_{V2}}{N_2} \right) \phi = k_{a2} V_2 \dots\dots\dots (4.25)$$

Estas 2 últimas ecuaciones proporcionan el valor de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  respecto del tiempo, debido a los voltajes de excitación de los motores  $V_1$  y  $V_2$ . Por lo tanto, este modelo matemático describe la dinámica del sistema de movimiento de un goniómetro láser, y el cual consta de 2 ecuaciones diferenciales de tercer orden, con coeficientes constantes e independientes entre sí, donde los voltajes en los motores proporcionan la excitación del sistema.

El grado de las ecuaciones diferenciales obtenidas está dado por los elementos que tienen la propiedad de almacenar energía y que componen el modelo electromecánico considerado en este trabajo, tales elementos son: la masa, la cual almacena energía mecánica, y las bobinas (inductores) de los motores, las cuales almacenan energía eléctrica.

## Capítulo 5: Análisis de un goniómetro láser comercial

En este capítulo se utilizan los modelos matemáticos obtenidos en el capítulo 4 para obtener el comportamiento de un goniómetro láser real. La cabeza de medición modelo MS-1S250 de Canon fue elegida para su análisis debido a sus características de portabilidad y desempeño. Los parámetros necesarios para el análisis son obtenidos y calculados a partir de las hojas de especificaciones de dicho modelo.

### 5.1 Especificaciones de la cabeza de medición MS-1S250 de Canon

La cabeza de medición MS-1S250 de Canon es un sistema para la medición de ángulos con alta precisión para goniómetro láser, como se describe en 4.1. En el apéndice A se muestran las hojas de especificaciones de este modelo y algunas de sus principales características del sistema son:

Rango de Movimiento	Láser: $\pm 22.5^\circ$	Base: $\pm 185^\circ$
Frecuencia de Muestreo ( $f_s$ )	Láser: 17857 [Hz]	Base: 17857 [Hz]
Tiempo de asentamiento ( $t_s$ )	Láser: 50 [ms]	Base: 50 [ms]
Sobrepaso ( $M_p$ )	Sistema: 5% máximo	
Resolución	Láser: 0.18 [arc-seg]	Base: 0.18 [arc-seg]
Fuente de Alimentación	Sistema: +5, +12 [V]	
Peso Total	Sistema: 7.3 [Kg]	

#### 5.1.1 Parámetros de los motores

Los motores de CD de la cabeza de medición MS-1S250, de acuerdo a las hojas de especificaciones mostradas en el apéndice A, tienen las siguientes características:

Para el láser:

$$J_2 = 2 \times 10^{-7} [\text{Kg.m}^2]$$

$$R_{a1} = 0.38 [\Omega]$$

$$L_{a1} = 0.13 [\text{mH}]$$

$$K_{t1} = 0.0118 \left[ \frac{\text{N.m}}{\text{A}} \right]$$

$$K_{v1} = 9.7 \left[ \frac{\text{mV}}{\text{rad/s}} \right]$$

Para la base:

$$J_4 = 35.4 \times 10^{-7} [\text{Kg.m}^2]$$

$$R_{a2} = 2.6 [\Omega]$$

$$L_{a2} = 0.9 [\text{mH}]$$

$$K_{t2} = 0.093 \left[ \frac{\text{N.m}}{\text{A}} \right]$$

$$K_{v2} = 50 \left[ \frac{\text{mV}}{\text{rad/s}} \right]$$

Debido a que los datos de las constantes de velocidad  $K_v$  (Back EMF) no están disponibles, estos datos se supusieron con los valores mostrados arriba.



### 5.1.2 Dimensiones externas

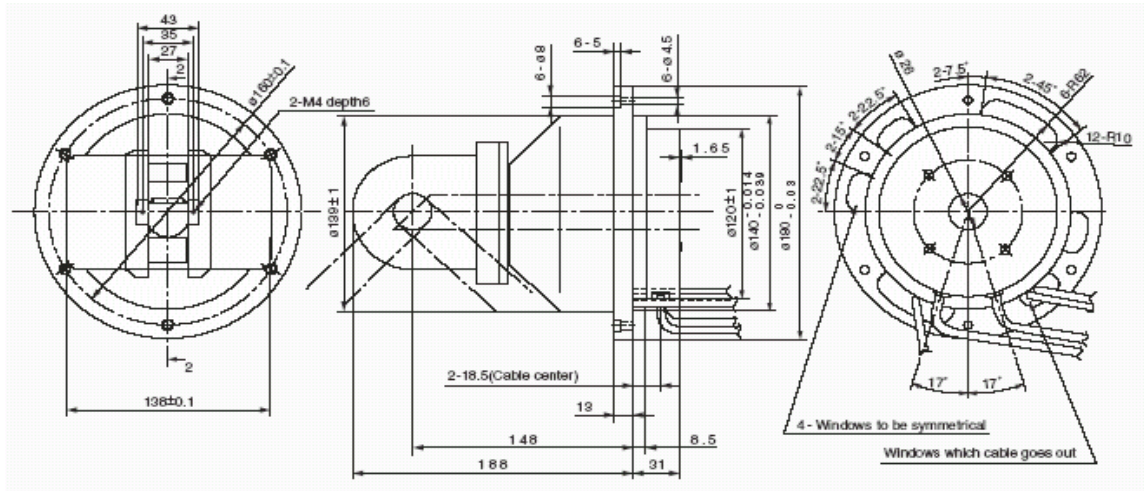


Figura 5.1 Dimensiones externas de la cabeza de medición MS-1S250

### 5.2 Cálculo de parámetros de la parte mecánica

Debido a que se utiliza un modelo lineal y de parámetros concentrados, como el que se analizó en el capítulo 4, en el sistema mecánico sólo se consideran como parámetros a la inercia de los cuerpos y la fricción existente en los rodamientos, ya que la torsión en las barras de los motores se puede despreciar para este sistema debido a los valores de las constantes de torsión en las flechas de los motores, como se mostrará en 5.2.3.

#### 5.2.1 Cálculo de los momentos de inercia

Tomando como referencia a la figura 4.2, la cabeza de medición MS-1S250 mostrada en la figura 5.1 se puede dividir en diferentes cuerpos para facilitar el cálculo de los momentos de inercia de la siguiente forma:

Para  $J_{Y^2}$  (Láser):

1 cilindro de radio  $r_1=3$  [cm], de largo  $L_1=2.7$ [cm] y con una masa  $m_1=0.8$  [kg].

Para  $J_{Y^4}$  (Rotor del motor del láser):

1 cilindro de radio  $r_2=0.5$  [cm], de largo  $L_2=3$  [cm], con una masa  $m_2=0.02$  [kg] y separado del eje Z una distancia  $d_2=2$  [cm].

Para  $J_{Z1}$  (Base):

1 placa circular de radio  $r_3=5$  [cm] y de masa  $m_3=0.6$  [kg].

2 cilindros iguales de radio  $r_4=3.5$  [cm], de masa  $m_4=1.2$  [kg], de largo  $L_4=11.1$  [cm] y separados una distancia  $d_4=3.6$  [cm] del eje Z.

Para  $J_{Z^2}$  (Láser):

Mismo cuerpo que para  $J_{Y^2}$ .

Para  $J_{Z^4}$  (Rotor del motor del láser):

Mismo cuerpo que para  $J_{Y^4}$ .

Para  $J_{Z3}$  (Rotor del motor de la base):

1 cilindro de radio  $r_5 = 2$  [cm] y con una masa  $m_5 = 0.1$  [Kg].

Aplicando la ecuación (2.21) a los cuerpos ya mencionados, se tiene:

$$J_1 = J_{Y^2} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \dots\dots\dots (5.1)$$

$$J_3 = J_{Z1} + J_{Z2} + J_{Z^4} \dots\dots\dots (5.2)$$

$$J_{Z1} = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 + 2 \left[ \frac{1}{4} m_4 r_4^2 + \frac{1}{12} m_4 L_4^2 + m_4 d_4^2 \right] \dots\dots\dots (5.3)$$

$$J_{Z^2} = \frac{1}{4} m_1 r_1^2 + \frac{1}{12} m_1 L_1 \dots\dots\dots (5.4)$$

$$J_{Z^4} = \frac{1}{4} m_2 r_2^2 + \frac{1}{12} m_2 L_2 + m_2 d_1^2 \dots\dots\dots (5.5)$$

Substituyendo los valores en las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$J_1 = 3.6 \times 10^{-4} [\text{Kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$J_3 = 7.3 \times 10^{-3} [\text{Kg} \cdot \text{m}^2]$$

### 5.2.2 Obtención de las constantes de fricción

Los coeficientes de fricción dinámica en los rodamientos es un dato no disponible y es una constante que se debe medir directamente para cada sistema, por lo que estos valores se proponen como:

$$b_1 = 0.0029 \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad} / \text{s}} \right] \qquad b_2 = 1.3 \times 10^{-6} \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad} / \text{s}} \right]$$

$$b_3 = 0.009 \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad} / \text{s}} \right] \qquad b_4 = 4 \times 10^{-5} \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad} / \text{s}} \right]$$

### 5.2.3 Cálculo de las constantes de torsión

Se considera a  $k_1$  y  $k_2$  como las constantes de torsión en las flechas de los motores del láser y la base respectivamente. La flecha del motor del láser tiene un radio  $R_1 = 0.002 [m]$ , una longitud  $l_1 = 0.005 [m]$  y hecha de acero con  $G_1 = 7.84 \times 10^{10} [N/m^2]$ . La flecha del motor de la base tiene un radio  $R_2 = 0.0035 [m]$ , una longitud  $l_2 = 0.01 [m]$  y hecha de acero con  $G_2 = 7.84 \times 10^{10} [N/m^2]$ . Aplicando la ecuación (2.9), para el cálculo de las constantes de torsión, se tiene:

$$k_1 = \frac{\pi \cdot R_1^4}{2l_1} G_1 \dots\dots\dots (5.6)$$

$$k_2 = \frac{\pi \cdot R_2^4}{2l_2} G_2 \dots\dots\dots (5.7)$$

Substituyendo los valores en las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$k_1 = 394 \left[ \frac{N.m}{rad} \right]$$

$$k_2 = 1848 \left[ \frac{M.m}{rad} \right]$$

Se observa que los valores de las constantes de torsión ( $k$ ) son muy grandes comparados con los valores de las constantes de fricción ( $b$ ) y de los momentos de inercia ( $J$ ), esto es debido al material con que están contruidos y a las dimensiones del goniómetro láser. En el apéndice C se muestra como para este caso en particular los efectos de la torsión en las barras de los motores es despreciable para la respuesta del sistema y por tanto, se puede considerar como un cuerpo rígido.

### 5.3 Obtención de las funciones de transferencia de los sistemas mecánicos

Utilizando los modelos matemáticos para los sistemas mecánicos sin torsión, expresados por las ecuaciones (4.21) y (4.22), substituyendo los valores calculados para dicho sistema y considerando un tren de engranes para el motor del láser con valores de  $N_1 = 1/8$  y para el motor de la base de  $N_2 = 1/20$ , se tiene:

Para el láser:

$$1.135 \times 10^{-4} \ddot{\theta} + 2.664 \times 10^{-3} \dot{\theta} = T_1 \dots\dots\dots (5.8)$$

La función de transferencia se obtiene por medio de la ecuación (1.2) y queda:

$$H(s) = \frac{8810.5726}{s^2 + 23.4713s} \dots\dots\dots (5.9)$$

Para la base:

$$4.945 \times 10^{-3} \ddot{\phi} + 26.2 \times 10^{-3} \dot{\phi} = T_2 \dots\dots\dots (5.10)$$

La función de transferencia se obtiene por medio de la ecuación (1.2) y queda:

$$H(s) = \frac{202.2244}{s^2 + 5.2982s} \dots\dots\dots (5.11)$$

### 5.3.1 Análisis de estabilidad

De acuerdo con el criterio de estabilidad para sistemas continuos establecido en 1.6, la estabilidad depende de los polos de la función de transferencia, los cuales se muestran a continuación:

Para el láser:

Para la base:

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = -23.4713$$

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = -5.2982$$

Al observar los polos de las funciones de transferencia, tanto del láser como de la base, se concluye que ambos sistemas no son estables, ya que tienen un polo con un valor de cero. A este tipo de sistemas también se les llama oscilatorios.

### 5.4 Obtención de las funciones de transferencia de los sistemas electromecánicos

Para la obtención de las funciones de transferencia se utilizan los modelos matemáticos para los sistemas electromecánicos sin torsión, expresado por las ecuaciones (4.24) y (4.25), para los sistemas del láser y la base respectivamente. Considerando un tren de engranes y un amplificador para el motor del láser con  $N_1 = 1/8$  y  $k_{a1} = 5$ . Para el motor de la base con  $N_2 = 1/20$  y  $k_{a2} = 40$ . Substituyendo los valores, tanto mecánicos como eléctricos, se tienen:

Para el láser:

$$5.1338 \times 10^{-7} \ddot{\theta} + 1.5047 \times 10^{-3} \ddot{\theta} + 0.896 \dot{\theta} = k_{a1} V_1 \dots\dots\dots (5.12)$$

La función de transferencia se obtiene por medio de la ecuación (1.2) y queda:

$$H(s) = \frac{9739187.85}{s^3 + 2931.079s^2 + 174543.0835s} \dots\dots\dots (5.13)$$

Para la base:

$$4.2174 \times 10^{-6} \ddot{\phi} + 0.01219 \ddot{\phi} + 1.0349 \dot{\phi} = k_{a2} V_2 \dots\dots\dots (5.14)$$

La función de transferencia se obtiene por medio de la ecuación (1.2) y queda:

$$H(s) = \frac{9484472.996}{s^3 + 2891.7571s^2 + 245397.99s} \dots\dots\dots (5.15)$$

### 5.4.1 Análisis de estabilidad

De acuerdo con el criterio de estabilidad para sistemas continuos, establecido en 1.6, la estabilidad depende de los polos de la función de transferencia, los cuales se muestran a continuación:

Para el láser:

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 \\ P_2 &= -2870.268 \\ P_3 &= -60.81 \end{aligned}$$

Para la base:

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 \\ P_2 &= -2804.247 \\ P_3 &= -87.509 \end{aligned}$$

Al igual que para los sistemas mecánicos los polos con valor de cero se mantienen, por lo que los 2 sistemas electromecánicos no son estables. Para tal condición se hace necesario un esquema de control que modifique la ubicación de los polos de las funciones de transferencia de ambos sistemas, para que estas cumplan con los criterios de estabilidad y con los requerimientos de desempeño.

## Capítulo 6: Sistemas de control

En este capítulo se presenta el marco teórico de los sistemas de control con retroalimentación analógicos y digitales. Se analiza el funcionamiento de los controladores PID digitales, así como algunas técnicas de diseño. Se describen las principales características de los sistemas de control y sus componentes.

### 6.1 Sistema de control con retroalimentación

Los sistemas de control retroalimentados o también llamados control de lazo cerrado son aquellos en los cuales la señal de error actuante, que es la diferencia entre la señal de entrada y la de retroalimentación, entra al controlador para reducir el error y llevar la salida a un valor deseado.

En este tipo de sistemas, las señales de salida y de entrada están relacionadas mediante un bucle de realimentación, a través del cual la señal de salida influye sobre la de entrada. De esta forma, la señal de salida tiene efecto sobre la acción de control.

Estos sistemas de control se pueden representar mediante el siguiente esquema:

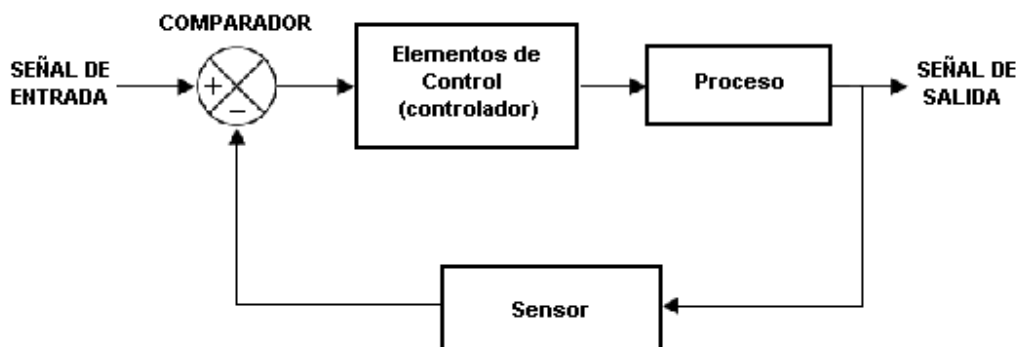


Figura 6.1 Esquema general de un sistema de control con retroalimentación.

En estos sistemas existe un elemento denominado sensor, que es capaz de detectar los cambios que se producen en la salida y llevar esa información al dispositivo de control, que podrá actuar de acuerdo con la información recibida para conseguir la señal de salida deseada.

Por tanto, los sistemas de control en lazo cerrado son capaces de controlar en cada momento lo que ocurre a la salida del sistema, y modificarlo si es necesario. De esta manera, el sistema es capaz de funcionar por sí solo de forma automática y cíclica.

## 6.2 Sistemas de control digitales

Los sistemas de control se consideran digitales cuando operan sobre señales discretas en alguna o en todas las etapas del sistema de control. Los controladores digitales son la manera más versátil de compensar un sistema de control de datos discretos. En general estos pueden implementarse con computadoras digitales, microprocesadores o procesadores digitales de señales (DSP). En comparación con los controladores de datos continuos, los digitales tienen mejores desempeños y su algoritmo de control puede modificarse con facilidad. Su esquema típico se muestra en la figura 6.2:

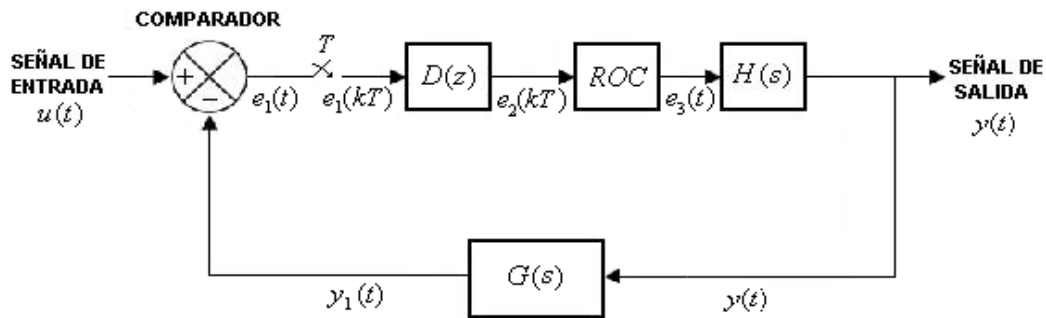


Figura 6.2 Esquema general de un sistema de control digital con retroalimentación.

En el diagrama de bloques de la figura 6.2, el controlador digital está representado por  $D(z)$ , el proceso que se desea controlar por  $H(s)$ , la función del sensor por  $G(s)$  y el bloque de ROC representa un retenedor de orden cero. La señal de entrada al sistema es  $u(t)$  y la de salida es  $y(t)$ . La señal  $e_1(t)$  es la señal de error, la cual entra a un muestreador ideal con un periodo de muestreo de  $T$ , y se convierte en  $e_1(kT)$ , con  $k=0,1,2,\dots$ . El controlador digital efectúa ciertas operaciones lineales sobre  $e_1(kT)$  y genera la secuencia de salida  $e_2(kT)$ , que al pasar por el ROC produce la señal continua  $e_3(t)$ , que finalmente es la señal de entrada al proceso a controlar.

### 6.2.1 Controladores digitales

Un controlador digital se puede representar por una función de transferencia  $D(z)$  representada en la ecuación (6.1) y que al desarrollarla en una serie de potencias en  $z^{-1}$ , los coeficientes de la serie son los valores de la secuencia de ponderación del controlador digital. El coeficiente del término  $z^{-k}$ ,  $k=0,1,2,\dots$ , corresponde al valor de la secuencia de ponderación en  $t=kT$ . Para que el controlador sea físicamente realizable, el desarrollo de  $D(z)$  en serie de potencias no debe tener potencia positiva alguna en  $z$ , por lo que la ecuación 6.1 se debe cumplir que  $n \geq m$ , donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos.

$$D(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \dots\dots\dots (6.1)$$

6.2.2 Muestreo de señales continuas

Los sistemas de control en tiempo discreto pueden operar en parte en tiempo discreto y en parte en tiempo continuo. “Muestreo es el proceso de conversión de señales continuas en señales discretas en el tiempo y el más usual es el muestreo periódico, en el cual los instantes de muestreo están igualmente espaciados cada  $T$  segundos” [9]. Un muestreador real es un mecanismo que entrega un tren de pulsos cuya amplitud corresponde a los valores de la señal analógica a muestrear en el instante que se produce el muestreo.

El muestreador ideal es el que se logra mediante impulsos y se puede pensar que el interruptor se cierra instantáneamente cada periodo de muestreo  $T$  y genera impulsos  $x(kT)\delta(t - kT)$ . El muestreador mediante impulsos se presenta por conveniencia matemática, éste es un muestreador ficticio que no existe en el mundo real.

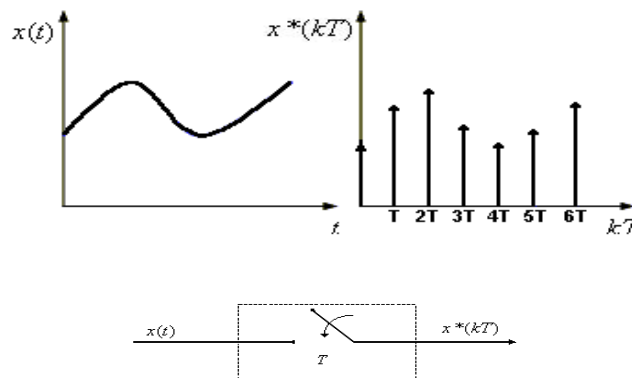


Figura 6.3 Muestreador ideal.

Si la señal de tiempo continuo  $x(t)$  se muestrea mediante impulsos en forma periódica, la señal muestreada se puede representar de manera matemática mediante:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t - kT) \dots\dots\dots (6.2)$$

Aplicando la transformada de Laplace, definida en la ecuación (1.3), a la señal muestreada mediante impulsos, se tiene:

$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \dots\dots\dots (6.3)$$

Definiendo a  $z = e^{sT}$ , la ecuación (6.3) queda de la siguiente manera:

$$x^*(s) = x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \dots\dots\dots (6.4)$$



De donde se define a la transformada zeta como en la ecuación (1.17). En los sistemas discretos se acostumbra utilizar la transformada Z en lugar de la transformada de Laplace por sencillez en las operaciones matemáticas.

### 6.2.3 Retención de datos

“La retención de datos es un proceso de generación de una señal en tiempo continuo  $x(t)$  a partir de una secuencia en tiempo discreto  $x(kT)$ ” [9]. El retenedor de datos más sencillo es el retenedor de orden cero.

En la Figura 6.4 se observa un retenedor de orden cero. La señal muestreada  $x^*(t)$  pasa a través del retenedor de orden cero. El circuito retenedor suaviza la señal muestreada para producir la señal  $x_{ROC}(t)$ , la cual es constante desde el último valor muestreado hasta que se puede disponer de la siguiente muestra.

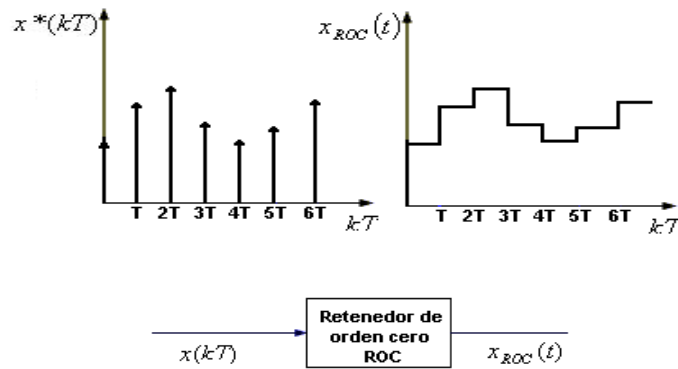


Figura 6.4 Retenedor de orden cero.

Si se considera que una señal  $x(kT)$ , con  $k=0,1,2,\dots,n$ , entra a un retenedor de orden cero, su respuesta  $y(t)$  de manera matemática será:

$$y(t) = \sum_{k=0}^n x(kT) [u_{-1}(t - kT) - u_{-1}(t - (k+1)T)] \dots\dots\dots (6.5)$$

Aplicando la transformada de Laplace a  $y(t)$ , se tiene:

$$y(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_{k=0}^n x(kT) e^{-kTs} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} x(s) \dots\dots\dots (6.6)$$

Por lo que la función de transferencia de un retenedor de orden cero es:

$$G_{ROC}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \dots\dots\dots (6.7)$$

### 6.3 Controladores PID

Los controladores PID (Proporcional Integral Derivativo) son uno de los controladores más utilizados en el diseño de sistemas de control de datos continuos. El controlador actúa sobre la señal de error  $e(t)$ , para ajustarla y obtener un mejor desempeño del proceso a controlar. Definiendo  $u(t)$  como la salida del controlador, la forma final del algoritmo del PID se describe matemáticamente en la ecuación (6.8), en donde el primer termino representa la acción proporcional, el segundo la acción integral y el tercero la acción derivativa.

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(t) dt + k_d \frac{de(t)}{dt} \dots\dots\dots (6.8)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (6.8) se obtiene su función de transferencia, como se muestra en la ecuación (6.9).

$$D(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \dots\dots\dots (6.9)$$

El control proporcional multiplica  $e(t)$  por una constante  $K_p$ , el control integral multiplica la integral con respecto del tiempo de  $e(t)$  por una constante  $K_i$  y el control derivativo genera una señal  $K_d$  veces la derivada con respecto al tiempo de  $e(t)$ . La función del control integral es la reducción del error de estado estacionario. El control derivativo proporciona una acción anticipativa que reduce el sobrepaso y las oscilaciones de la respuesta y la función del control proporcional es la disminución de los tiempos de subida.

El uso del PID para control no garantiza control óptimo del sistema o la estabilidad del mismo. Un controlador PID puede ser llamado también PI, PD, P o I en la ausencia de las acciones de control respectivas y lo cual depende de los requerimientos de la aplicación.

#### 6.3.1 Controladores PID digitales

Para los controladores PID digitales se aplica el mismo principio de los controladores PID para datos continuos, que se analizó en 6.3. En general, existen muchas vías para implantar de manera digital la integración y la derivación.

El método más común para aproximar la derivada de  $e(t)$ , en  $t = T$ , que origina una función de transferencia físicamente realizable, es el que se muestra en la ecuación (6.10), donde al tomar la transformada Z se obtiene la función de transferencia del controlador derivativo digital.

$$D_D(z) = Z\left(\frac{K_D(e(kT) - e[(k-1)T])}{T}\right) = K_D \frac{z-1}{Tz} \dots\dots\dots (6.10)$$

“Los métodos más usuales para la integración son la rectangular hacia atrás, hacia delante y mediante la transformada bilineal” [9]. En la tabla 6.1 se muestran las funciones de transferencia para estos métodos, tanto en la acción integral  $D_I(z)$ , como del controlador PID total  $D(z)$ .

	$D_I(z)$	$D(z)$
Integración rectangular hacia atrás	$K_I \frac{T}{z-1}$	$\frac{(K_p T + K_D)z^2 + (K_I T^2 - K_p T - 2K_D)z + K_D}{Tz(z-1)}$
Integración rectangular hacia delante	$K_I \frac{Tz}{z-1}$	$\frac{(K_p T + K_D + K_I T^2)z^2 - (K_p T + 2K_D)z + K_D}{Tz(z-1)}$
Integración con transformación bilineal	$K_I \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$	$\frac{(2K_p T + 2K_D + K_I T^2)z^2 + (K_I T^2 - 2K_p T - 4K_D)z + 2K_D}{2Tz(z-1)}$

Tabla 6.1 Error en régimen permanente para distintos tipos de sistemas

La figura (6.5) muestra el diagrama de bloques del controlador digital PID.

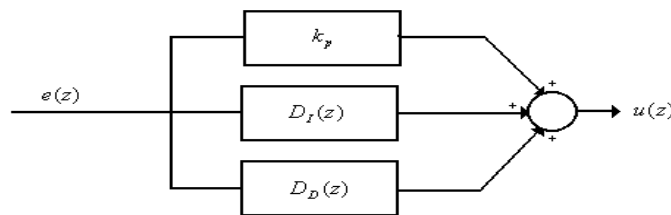


Figura. 6.5 Diagrama de bloques de un controlador PID.

#### 6.4 Frecuencia de muestreo en sistemas de control digital

Los 2 aspectos más importantes a considerar en la elección de la frecuencia de muestreo son: el costo y la eficacia de control. Bajar la frecuencia de muestreo significa un menor costo de los elementos que componen el sistema de control. Por eso es conveniente elegir la frecuencia de muestreo menor posible. Sin embargo, hay muchos factores que proporcionan una cota inferior a las frecuencias aceptables.

Un límite absoluto para muestrear está establecido por el teorema del muestreo. “Para reconstruir señales de frecuencia  $w_{BW}$ , hay que muestrear por lo menos a frecuencia  $w_s = 2w_{BW}$ , donde  $w_{BW}$  representa el ancho de banda del sistema en lazo cerrado” [9]. La limitación dada por el teorema del muestreo es para evitar los efectos de “aliasing”, pero de todas maneras, es un límite teórico y casi nunca satisface las especificaciones de calidad de respuesta. Se suelen usar periodos de muestreo mayores a 20 veces  $w_{BW}$ . Esto se hace para reducir el retraso entre las órdenes y las respuestas, alisar la salida del ROC y para tener un mejor rechazo al ruido, principalmente los de alta frecuencia.

6.5 Diseño discreto de sistemas de control digital

El diseño discreto en un sistema de control digital, como el mostrado en la figura 6.6, consiste en calcular la función de transferencia del controlador  $D(z)$  directamente, sin partir de una  $D(s)$ .

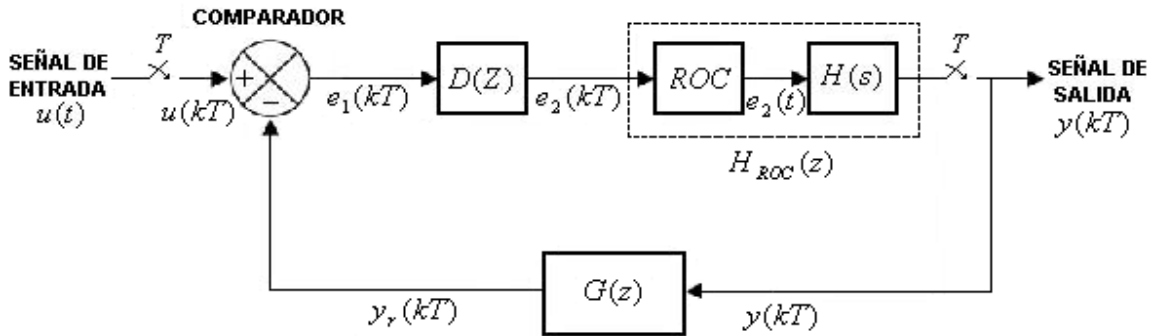


Figura 6.6 Diagrama de bloques de un sistema de control digital

Para un sistema de datos continuos descrito por la función de transferencia  $H(s)$  y precedida por un ROC, la función de transferencia discreta equivalente  $H_{ROC}(z)$  vendrá dada por:

$$H_{ROC}(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} \dots\dots\dots (6.11)$$

Esta ecuación se obtiene a partir de la función de transferencia del ROC, que se muestra en la ecuación (6.7) y que permite obtener una  $H_{ROC}(z)$  equivalente a la acción del proceso de retención de datos y del proceso a controlar.

Una vez que tenemos a todo el sistema de control en el dominio discreto, lo que se necesita es encontrar la función de transferencia entre  $u(kT)$  e  $y(kT)$ . Por consiguiente, se plantean las siguientes ecuaciones:

$$e_1(z) = u(z) - D(z)H_{ROC}(z)G(z)e_1(z) \dots\dots\dots (6.12)$$

$$y(z) = D(z)H_{ROC}(z)e_1(z) \dots\dots\dots (6.13)$$

Despejando  $e_1(z)$  de la ecuación (6.12) y substituyéndola en la ecuación (6.13), se obtiene la función de transferencia del sistema en lazo cerrado:

$$G_{LC}(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{D(z)H_{ROC}(z)}{1 + D(z)H_{ROC}(z)G(z)} \dots\dots\dots (6.14)$$

### 6.6 Características de desempeño de un sistema de control

Entre las características de desempeño más importantes de un sistema de control en lazo cerrado, como el mostrado en la figura 6.6, se tienen:

- 1.- Error en estado estable.
- 2.- Respuesta transitoria:
  - a) Estabilidad
  - b) Tiempo de subida ( $t_d$ )
  - c) Sobrepasso ( $M_p$ )
  - d) Tiempo de asentamiento ( $t_s$ )
- 3.- Rechazo al ruido.

#### 6.6.1 Error en régimen permanente

“Se define el error del sistema como la diferencia entre el valor deseado a la salida y el valor real” [8]. Considerando un sistema como el de la figura 6.6, en el cual se considera  $G(z) = 1$ , la señal de error  $e_1(z)$  se puede calcular a partir de la ecuación (6.12) como:

$$e_1(z) = \frac{u(z)}{1 + D(z)H_{ROC}(z)} \dots\dots\dots (6.15)$$

Si el sistema es estable, el valor del error en régimen permanente se puede calcular a partir del teorema del valor final:

$$e_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{u(z)}{1 + D(z)H_{ROC}(z)} \dots\dots\dots (6.16)$$

Utilizando la ecuación (6.16), se tiene que el error en régimen permanente depende del número de polos del sistema en  $z = 1$ . Definimos el tipo de un sistema como el número de polos que tiene la función de transferencia en lazo abierto en  $z = 1$ . Dependiendo del tipo del sistema, el error en régimen permanente ante secuencias de entrada normalizadas será:

Sistema	Entrada escalón	Entrada rampa	Entrada parábola
<b>Tipo 0</b>	$\frac{1}{1 + K_p}$	$\infty$	$\infty$
<b>Tipo 1</b>	0	$\frac{T}{K_v}$	$\infty$
<b>Tipo 2</b>	0	0	$\frac{T^2}{K_a}$

Tabla 6.2 Error en régimen permanente para distintos tipos de sistemas

En la tabla 6.2 las constantes de error  $K_p$ ,  $K_v$  y  $K_a$  están definidas por:

$$K_{error} = \lim_{z \rightarrow 1} D(z)H_{ROC}(z) \dots\dots\dots (6.17)$$

**6.6.2 Respuesta transitoria**

*Estabilidad:* La estabilidad de un sistema puede ser afectada al agregar un sistema de control, ya que su función de transferencia de lazo cerrado se modifica, por lo que para garantizar la estabilidad de un sistema, como el mostrado en la figura 6.6, la función de transferencia del mismo debe cumplir con lo establecido en 1.11.

*Tiempo de subida ( $t_d$ ):* Es el tiempo en que la respuesta tarda en alcanzar su valor final por primera vez, como se muestra en la figura 1.3.

*Sobrepaso ( $M_p$ ):* Es el porcentaje del valor de la respuesta en estado transitorio que supera al valor de la respuesta en estado permanente, como se muestra en la figura 1.3.

*Tiempo de asentamiento ( $t_s$ ):* Tiempo en que tarda la respuesta en no superar un porcentaje de error sobre el valor final (comúnmente 2%), como se muestra en la figura 1.3.

**6.6.3 Rechazo al ruido**

Si se considera un sistema de datos discreto en lazo cerrado, con una fuente de ruido  $w(z)$ , como el que se muestra en la siguiente figura:

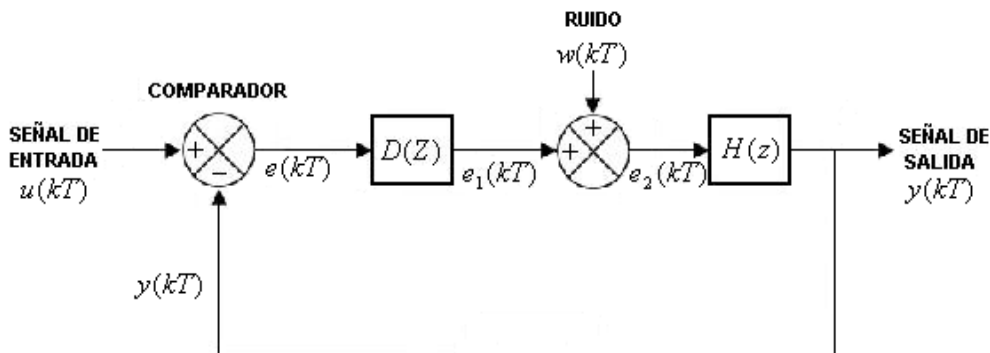


Figura 6.7 Sistema de control digital con una fuente de ruido

Donde la señal de error  $e(z)$  está dada por la siguiente ecuación:

$$e(z) = \frac{u(z) - w(z)H(z)}{1 + D(z)H(z)} \dots\dots\dots (6.18)$$

Se observa que la contribución del ruido  $e_r(z)$  a la señal de error  $e(z)$  es:

$$e_r(z) = \frac{H(z)}{1 + D(z)H(z)} w(z) = G_r(z)w(z) \dots\dots\dots (6.19)$$

Por lo que si se considera un ruido con frecuencia  $w$ , entre más pequeño sea el valor de  $e_r(z)$  significa que el ruido es rechazado de mejor manera por el sistema. Por lo tanto, “la respuesta en frecuencia de  $G_r(z)$  muestra las frecuencias en que los ruidos son rechazados por el sistema, para lo cual se necesita que  $|G_r(z)|$  sea mucho menor que 1” [8].

**6.7 Diseño de controladores digitales utilizando el lugar geométrico de las raíces**

“El lugar geométrico de las raíces es una gráfica donde se muestra la variación de las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado cuando un parámetro del sistema, generalmente la ganancia, varía desde cero hasta infinito” [11]. Si se considera un sistema realimentado como el de la figura 6.6, donde  $K_c$  es la ganancia del sistema en lazo abierto, su función de transferencia de lazo cerrado estará dada por:

$$G_{LC}(z) = \frac{K_c \cdot D(z)H_{ROC}(z)}{1 + K_c \cdot D(z)H_{ROC}(z)G(z)} \dots\dots\dots (6.20)$$

Donde su ecuación característica es:

$$1 + K_c \cdot D(z)H_{ROC}(z)G(z) = 0 \dots\dots\dots (6.21)$$

El diseño con el lugar geométrico de las raíces consiste en determinar los parámetros del sistema y el controlador, de modo que las raíces de la ecuación característica se encuentren en las posiciones deseadas. Para sistemas de orden mayor a tres, en general es muy difícil establecer la relación entre los parámetros del controlador y las raíces de la ecuación característica. El diseño de un sistema de datos discretos en el plano  $z$  mediante el diagrama del lugar geométrico de las raíces es esencialmente un método de prueba y error.

**6.7.1 Diseño por cancelación de polos y ceros**

Una práctica común en el diseño de sistemas de control, ya sea en el plano  $s$  o en el  $z$ , es el intento de cancelar los polos y ceros no deseables del proceso bajo control con polos y ceros del controlador, y añadir a la función de transferencia de lazo abierto polos y ceros nuevos en posiciones más ventajosas a fin de cumplir con las especificaciones de diseño. Se considera un controlador digital PID, con el cual se desea cancelar el efecto de alguno o ambos polos del controlador ( $P_1$  y  $P_2$ ), con función de transferencia del controlador  $D(z)$ .

$$D(z) = K_c \frac{(z - P_1)(z - P_2)}{z(z - 1)} \dots\dots\dots (6.22)$$

El esquema de compensación por cancelación de polos y ceros no siempre proporciona una solución satisfactoria, ya que si los polos no deseables están muy cerca del círculo unitario del plano  $z$ , la cancelación inexacta, algo que siempre sucede en la práctica, da como resultado problemas con la estabilidad del sistema.



## Capítulo 7: Sistema de control para un goniómetro láser

En este capítulo se diseña un sistema de control digital con un controlador PID, para solucionar los problemas de inestabilidad en el sistema electromecánico del goniómetro láser, como se mostró en los capítulos 4 y 5. También por medio de este sistema de control se logra cumplir con un desempeño similar al del modelo MS-1S250 de Canon.

### 7.1 Requerimientos de desempeño

De acuerdo con las características de desempeño de la cabeza de medición modelo MS-1S250 de Canon, se tiene que el sistema de control debe de cumplir con las siguientes condiciones:

Error en estado estable para entrada escalón: 0.

Sobrepaso: 5% máximo.

Tiempo de asentamiento: Paso de  $1.0^\circ$  en 50 [ms].

Velocidad de movimiento del espejo:  $0^\circ$  a  $90^\circ$  [I/s].

### 7.2 Desempeño del sistema con retroalimentación

Con un sistema de control con retroalimentación para los sistemas del láser y la base como el que se muestra en la figura (7.1), se intenta lograr la estabilidad de los sistemas y cumplir con los requerimientos de desempeño.

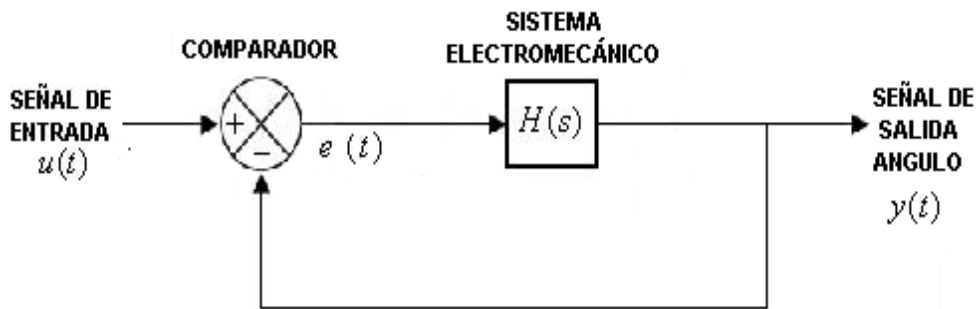


Fig. 7.1 Sistema de control en lazo cerrado sin controlador.

Con una excitación de un escalón  $u(t) = 1$ , para el sistema del láser descrito por la ecuación (5.13) y para el sistema de la base descrito por la ecuación (5.15), se obtienen las siguientes simulaciones por medio de MATLAB [18], y para las cuales sus principales características se muestran en la tabla 7.1. Más información acerca de estas simulaciones se presenta en el apéndice B.

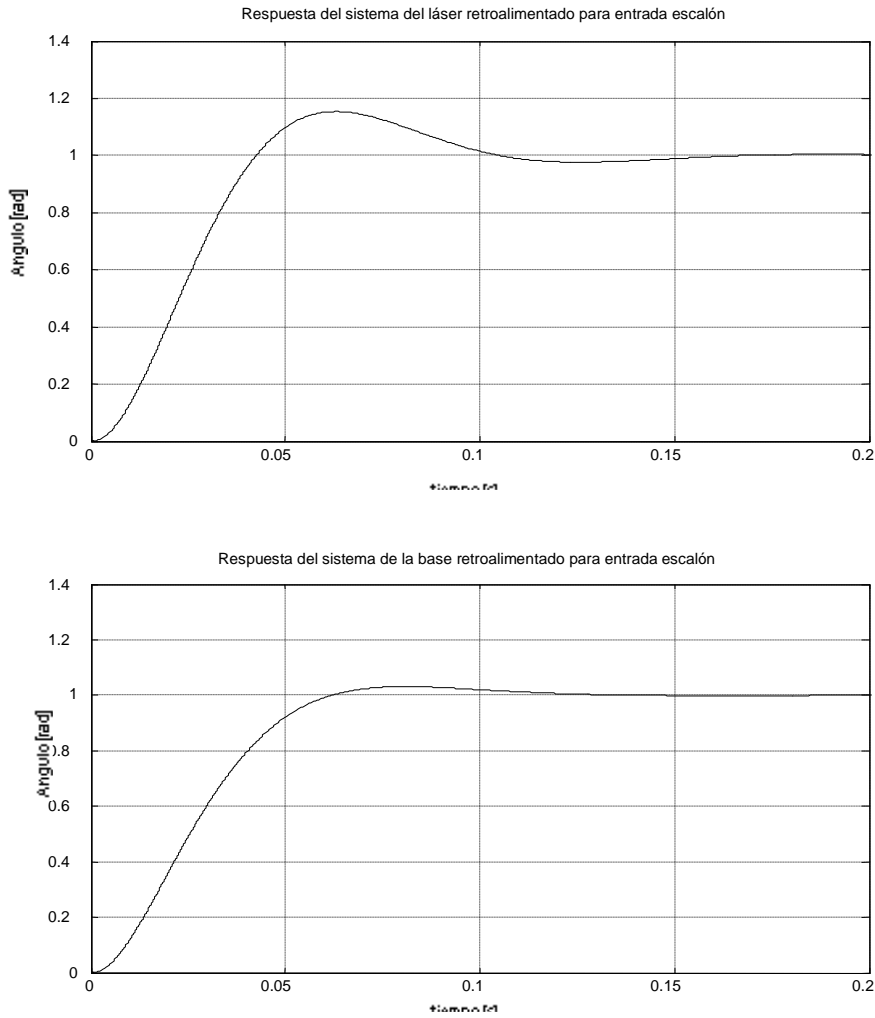


Figura 7.2 Simulaciones de los sistemas del láser y la base retroalimentados.

Obteniendo la función de transferencia de lazo cerrado para los 2 sistemas por medio de la ecuación (6.14), en donde  $D(z) = G(z) = 1$  y  $H_{ROC}(z) = H(s)$ , se tiene:

Para el láser:

$$H_{LC}(s) = \frac{9739187.8507}{s^3 + 2931.079s^2 + 174543.0835s + 9739187.8507} \dots\dots\dots (7.1)$$

Para la base:

$$H_{LC}(s) = \frac{9484472.9998}{s^3 + 2891.7571s^2 + 245397.99s + 9484472.9998} \dots\dots\dots (7.2)$$

De acuerdo con el criterio de estabilidad para sistemas continuos, establecido en 1.7, la estabilidad depende de los polos de la función de transferencia, los cuales son:

Para el láser:

$$P_1 = -2871.475$$

$$P_{2,3} = -29.801 \pm 50.035j$$

Para la base:

$$P_1 = -2805.491$$

$$P_{2,3} = -43.132 \pm 38.99j$$

Al observar los polos de las funciones de transferencia, tanto del láser como de la base, se concluye que ambos sistemas son estables. La estabilidad se obtuvo debido a que la retroalimentación negativa movió los polos de las funciones de transferencia.

Los diagramas de Bode de las ecuaciones (7.1) y (7.2) son obtenidos por medio de MATLAB [18], y se muestran en la figura 7.3. Definiendo al ancho de banda  $w_{BW}$  como la frecuencia donde el diagrama de bode en magnitud es de -3 [db], se obtienen los anchos de banda de los sistemas en lazo cerrado y se muestran en la tabla 7.1.

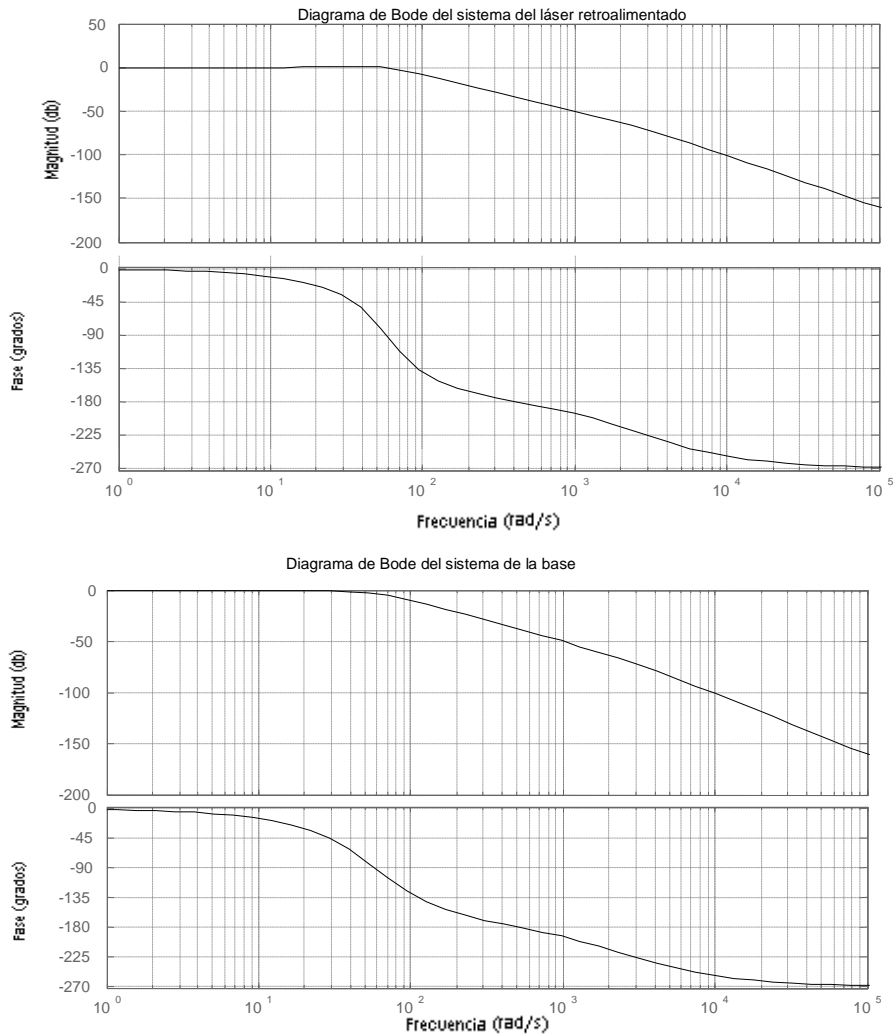


Figura 7.3 Diagramas de Bode de los sistemas del láser y la base retroalimentados.

	<i>Láser</i>	<i>Base</i>
<i>Sobrepaso (M<sub>p</sub>)</i>	15.4 %	3.1 %
<i>Tiempo de subida (t<sub>d</sub>)</i>	42.5 [ms]	61.8 [ms]
<i>Tiempo de asentamiento (t<sub>s</sub>)</i>	136.7 [ms]	100.3 [ms]
<i>Error en régimen permanente Para una entrada escalón</i>	0	0
<i>Ancho de banda (w<sub>BW</sub>)</i>	72.9 [rad/s]	54.5 [rad/s]

Tabla 7.1 Desempeño de los sistemas del láser y la base al retroalimentarse Para una entrada escalón.

### 7.3 Elección de la frecuencia de muestreo

Para lograr que los sistemas cumplan con los requerimientos de desempeño es necesario diseñar un sistema de control. Debido a que la retroalimentación de los sistemas no es suficiente para lograrlo, se propone un sistema de control digital, como el que se muestra en la figura 7.4, donde  $H(s)$  representa el sistema electromecánico y  $H_{ROC}(z)$  el equivalente discreto de  $H(s)$  y el ROC.

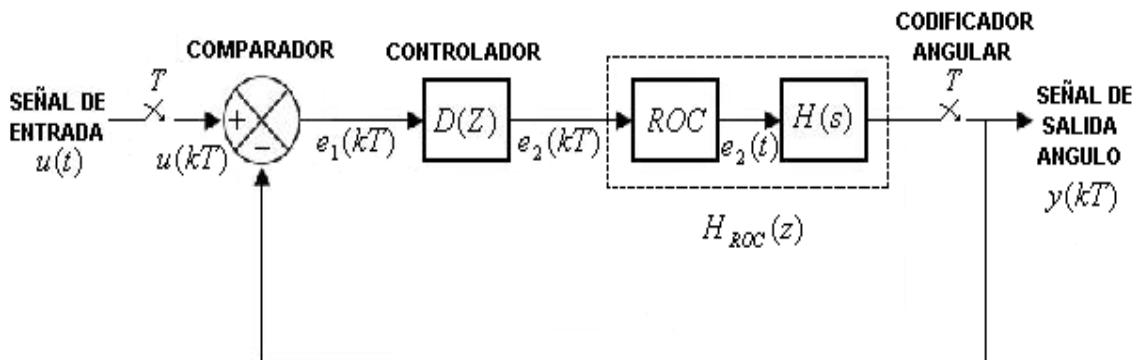


Figura 7.4 Sistema de control digital propuesto para los sistemas electromecánicos del láser y la base.

El primer paso para el diseño del sistema de control es la elección de la frecuencia de muestreo  $w_s$ . Como se explica en la sección 6.4, la frecuencia de muestreo debe ser preferentemente, 20 veces mayor al ancho de banda del sistema continuo en lazo cerrado como mínimo. Se propone una frecuencia de muestreo de  $f_s = 2[KHz]$  para ambos sistemas. En la tabla 7.1 se muestran los valores de los anchos de banda en lazo cerrado para ambos sistemas.

#### 7.4 Equivalente discreto de $H(s)$

Para obtener el equivalente discreto de las funciones de transferencia  $H(s)$ , se utiliza la ecuación (6.11) para una frecuencia de 2 [KHz]. Con lo cual se obtiene:

Para el láser:

$$H_{ROC}(z) = 1.4568 \times 10^{-4} \frac{(z^2 + 2.8861z + 0.4834)}{(z-1)(z-0.97)(z-0.238)} \dots\dots\dots (7.3)$$

Para la base:

$$H_{ROC}(z) = 1.4232 \times 10^{-4} \frac{(z^2 + 2.8943z + 0.488)}{(z-1)(z-0.9571)(z-0.2460)} \dots\dots\dots (7.4)$$

#### 7.5 Diseño de un controlador digital PID

Para el diseño de los controladores digitales PID a utilizar en el esquema de control de la figura 7.4, se propone un controlador que elimine el polo dominante de  $H_{ROC}(z)$  y modifique de manera conveniente la ubicación de los polos en lazo cerrado. Las funciones de transferencia de los controladores  $D(z)$  se proponen como:

Para el láser:

$$D(z) = K_c \frac{(z-0.97)(z-0.994)}{z(z-1)} \dots\dots\dots (7.5)$$

Para la base:

$$D(z) = K_c \frac{(z-0.9571)(z-0.994)}{z(z-1)} \dots\dots\dots (7.6)$$

Por medio del lugar geométrico de las raíces se obtiene que los valores de  $K_c$  que logran un mejor desempeño de los sistemas de control son:  $K_c = 260$  y  $K_c = 280$ , para los sistemas del láser y la base respectivamente.

#### 7.6 Desempeño de los sistemas de control digitales

Empleando un sistema de control digital como el de la figura 7.4, donde  $H_{ROC}(z)$  se expresa por las ecuaciones (7.3) y (7.4) y  $D(z)$  por las ecuaciones (7.5) y (7.6), para los sistemas del láser y la base respectivamente, se calculan las funciones de transferencia de lazo cerrado por medio de la ecuación (6.14):

Para el láser:

$$H_{LC}(z) = \frac{0.04079(z + 2.7076)(z + 0.1785)(z - 0.994)}{(z - 0.9938)(z + 0.04735)(z^2 - 1.2508z + 0.4165)} \dots\dots\dots (7.7)$$

Para la base:

$$H_{LC}(z) = \frac{0.037(z + 2.7145)(z + 0.1797)(z - 0.994)}{(z - 0.9938)(z + 0.04403)(z^2 - 1.2592z + 0.4102)} \dots\dots\dots (7.8)$$

### 7.6.1 *Análisis de estabilidad*

De acuerdo con el criterio de estabilidad para sistemas discretos establecido en 1.11, la estabilidad depende de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado (ecuaciones (7.7) y (7.8)), los cuales se muestran a continuación:

Para el láser:

$$P_1 = 0.9938$$

$$P_2 = -0.04735$$

$$P_{3,4} = 0.6254 \pm 0.1594j$$

Para la base:

$$P_1 = 0.9938$$

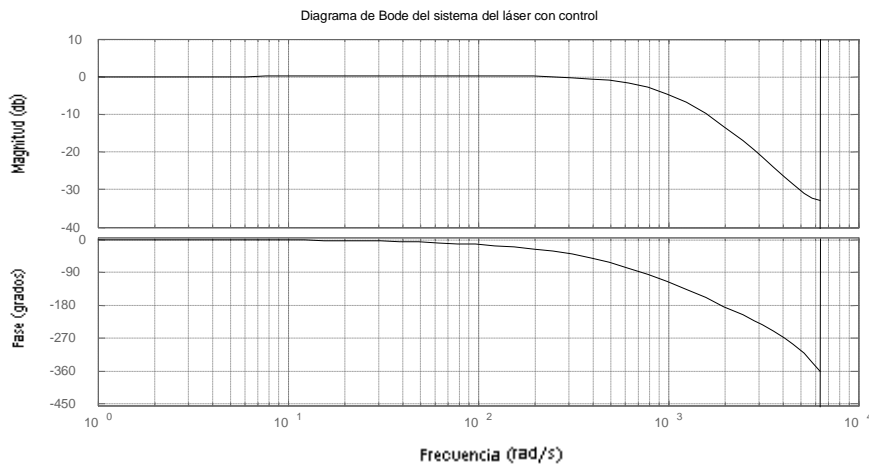
$$P_2 = -0.04403$$

$$P_{3,4} = 0.6296 \pm 0.1172j$$

Al observar los polos de ambos sistemas se concluye que ambos sistemas son estables, ya que la ubicación de todos sus polos se encuentran dentro del círculo unitario con centro en el origen.

### 7.6.2 *Respuesta en frecuencia*

La respuesta en frecuencia del sistema se puede observar por medio de los diagramas de Bode de los sistemas de control en lazo cerrado, representados por las ecuaciones (7.7) y (7.8), para el láser y la base respectivamente:



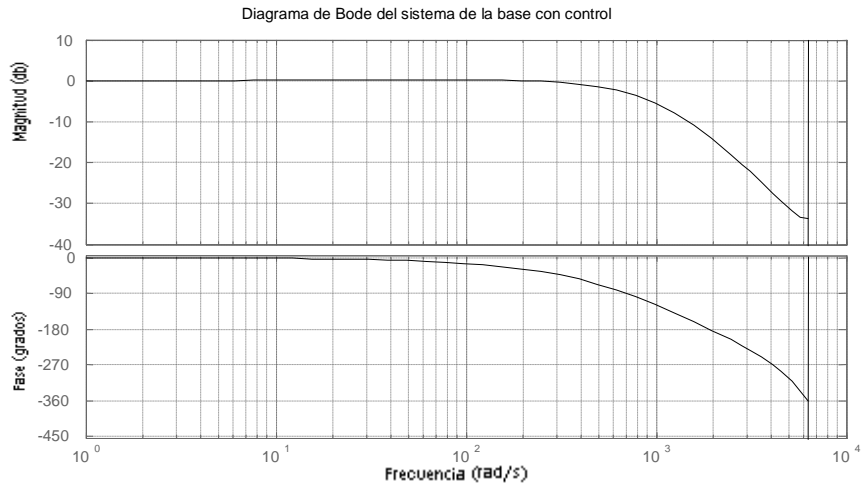


Figura 7.5 Diagramas de Bode para los sistemas de control del láser y la base.

De la figura 7.5 se observan los anchos de banda de los sistemas ( $BW$ ) y las frecuencias naturales de oscilación ( $w_n$ ):

Para el láser:

Para la base:

$$BW = 803.5[\text{rad} / \text{s}]$$

$$BW = 707.9[\text{rad} / \text{s}]$$

$$w_n = 50.1[\text{rad} / \text{s}]$$

$$w_n = 48.9[\text{rad} / \text{s}]$$

### 7.6.3 Error en régimen permanente y tiempos de respuesta

Al analizar la función de transferencia discreta de  $H_{ROC}(z)D(z)$  para ambos sistemas, se tiene que estas son, de acuerdo con lo establecido en 6.6.1, del tipo 2 por lo que no hay error en régimen permanente para entradas escalón y rampa.

Los tiempos de respuesta se pueden obtener de manera muy sencilla por medio de simulaciones. En la tabla 7.2 se muestran los tiempos de respuesta para ambos sistemas.

### 7.6.4 Análisis de ruido

Para el análisis del rechazo al ruido se necesita conocer la respuesta en frecuencia de  $G_r(z)$ , como se expuso en 6.6.3. En los sistemas del láser y la base  $G_r(z)$  está dada por:

Para el láser:

$$G_r(z) = \frac{0.0001456(z^4 + 1.886z^3 - 2.402z^2 - 0.483z)}{z^5 - 3.167z^4 + 3.684z^3 - 1.842z^2 + 0.305z + 0.01901} \dots\dots\dots (7.9)$$

Para la base:

$$G_r(z) = \frac{0.0001423(z^4 + 1.894z^3 - 2.406z^2 - 0.488z)}{z^5 - 3.166z^4 + 3.677z^3 - 1.83z^2 + 0.302z + 0.0178} \dots\dots\dots (7.10)$$

En la figura (7.5) se muestran los diagramas de Bode para  $G_r(z)$ .

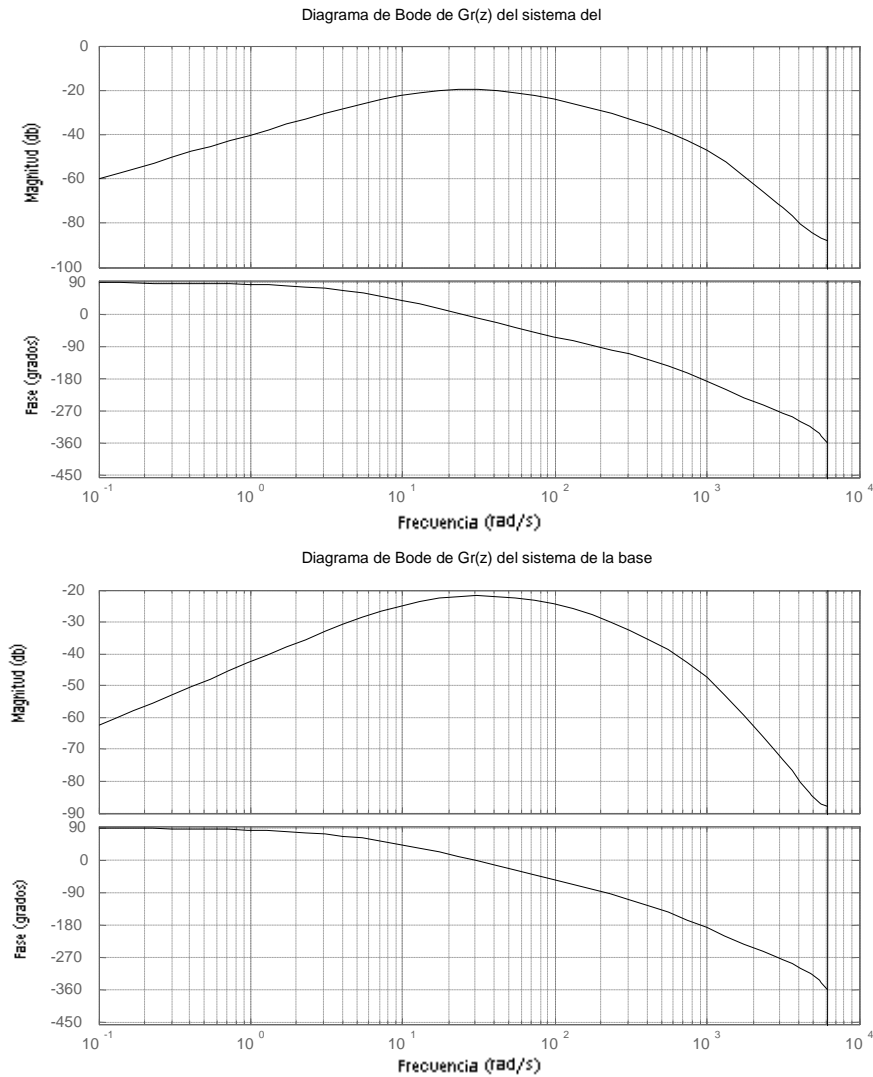


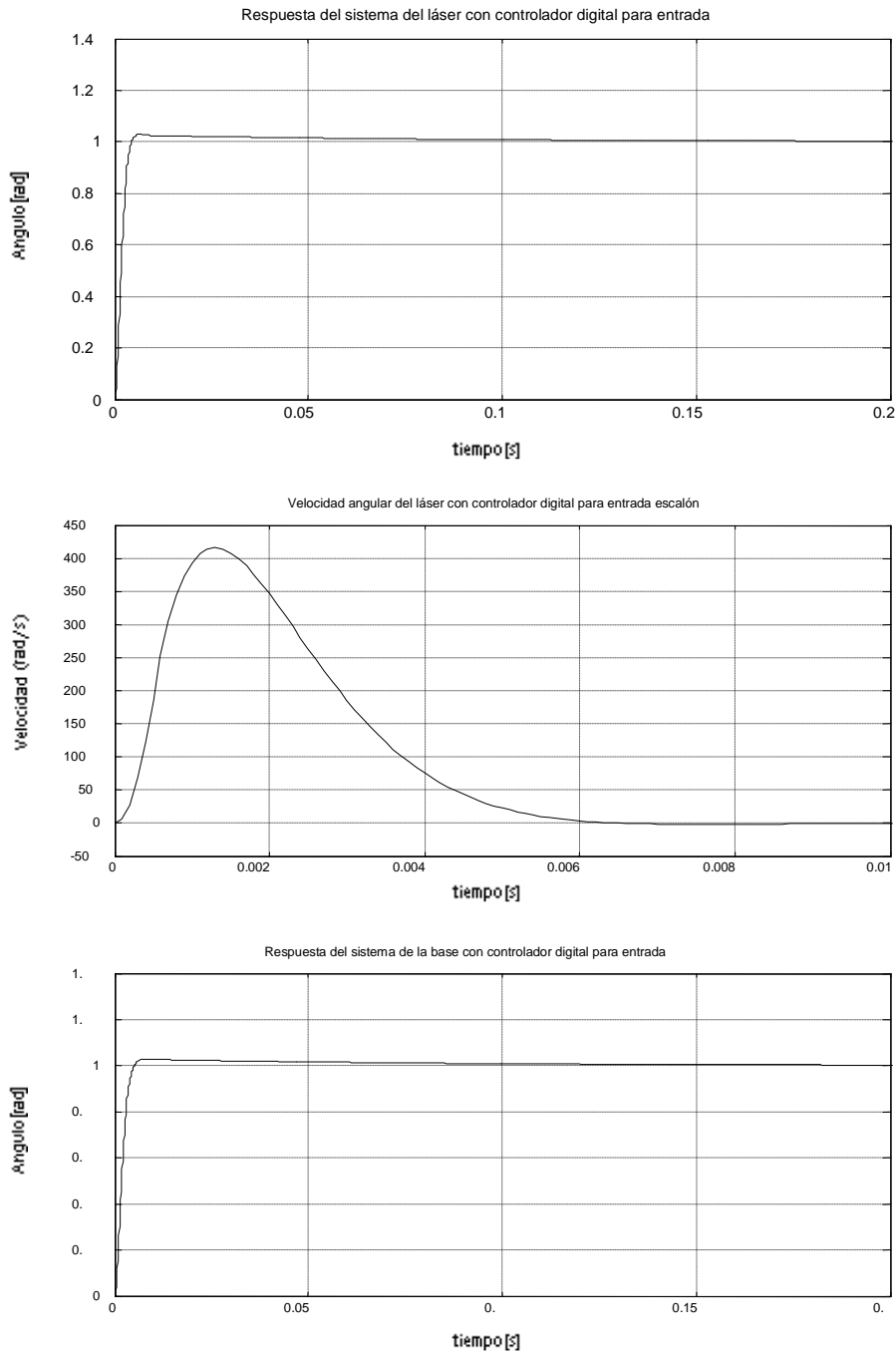
Figura 7.5 Diagramas de Bode de  $G_r(z)$  para los sistemas del láser y la base.

Para las frecuencias en que  $|G_r(z)|$  sea mucho menor que 0 [db], el sistema rechazará el ruido. Al observar los diagramas de magnitud de la figura 7.5, se observa que ambos sistemas rechazan cualquier frecuencia de ruido. Las frecuencias en las cuales se tiene una mayor susceptibilidad al ruido, en ambos sistemas, son entre 4-200 [rad/s], ya que es donde  $|G_r(z)|$  varía entre -20 y -30 [db].



### 7.6.5 Respuesta a una entrada escalón

Para una entrada escalón  $u(t) = 1$ , al sistema de control digital de la figura 7.4, se obtienen las simulaciones de la figura 7.6 por medio de *simulink*, del programa *MATLAB* [18]. Más información acerca de estas simulaciones se presenta en el apéndice B. En la tabla 7.2 se muestran las principales características de desempeño de los sistemas de control digital, además de los porcentajes de mejora respecto de los sistemas retroalimentados analógicos y cuyos datos se muestran en la tabla 7.1.



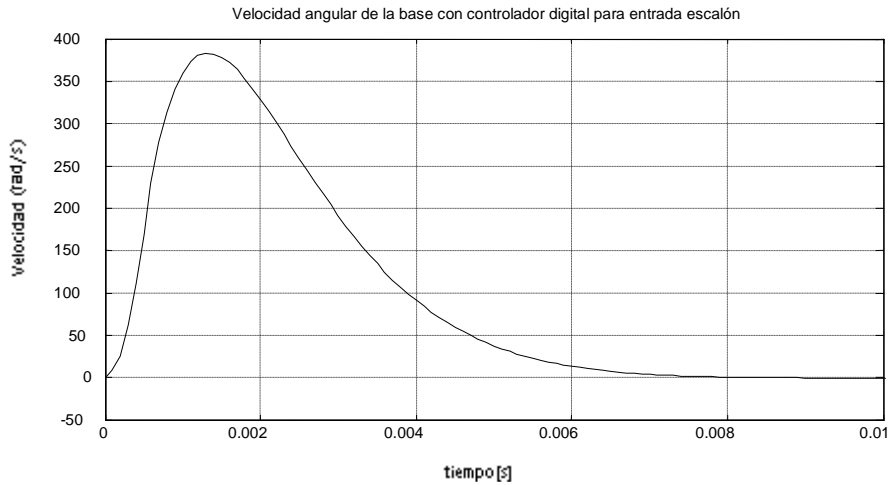


Figura 7.6 Simulaciones de los sistemas del láser y la base con controlador digital para una entrada escalón.

	<b>Láser</b>		<b>Base</b>	
	<i>PID digital</i>	<i>% de Mejora</i>	<i>PID digital</i>	<i>% de Mejora</i>
<i>Sobrepaso (<math>M_p</math>)</i>	2.95 %	-80.8	2.73 %	-11.9
<i>Tiempo de subida (<math>t_d</math>)</i>	4.43 [ms]	-89.5	5.1 [ms]	-91.7
<i>Tiempo de asentamiento (<math>t_s</math>)</i>	26 [ms]	-80.9	33.3 [ms]	-66.8
<i>Error en régimen permanente para entrada escalón y rampa</i>	0	0	0	0
<i>Ancho de banda (BW)</i>	803.5 [rad/s]	+1102.2	707.9 [rad/s]	+1177.8

Tabla 7.2 Desempeño de los sistemas del láser y la base con un controlador digital y los porcentajes de mejora respecto de los sistemas retroalimentados analógicos.

Con las funciones de transferencia de lazo cerrado y utilizando la ecuación (1.19), se puede obtener la respuesta analítica a la entrada escalón especificada, con  $T=0.0005[s]$  y  $k = 0,1,2,\dots$  son:

Para el láser:

$$y(kT) = \left[ \begin{aligned} &1 + 0.034(0.9939)^k - 0.0284(-0.0473)^k + \\ &(0.6454)^k [-0.9993 \cos(499kT) - 2.2778 \text{sen}(499kT)] \end{aligned} \right] u(kT) \dots\dots\dots (7.11)$$

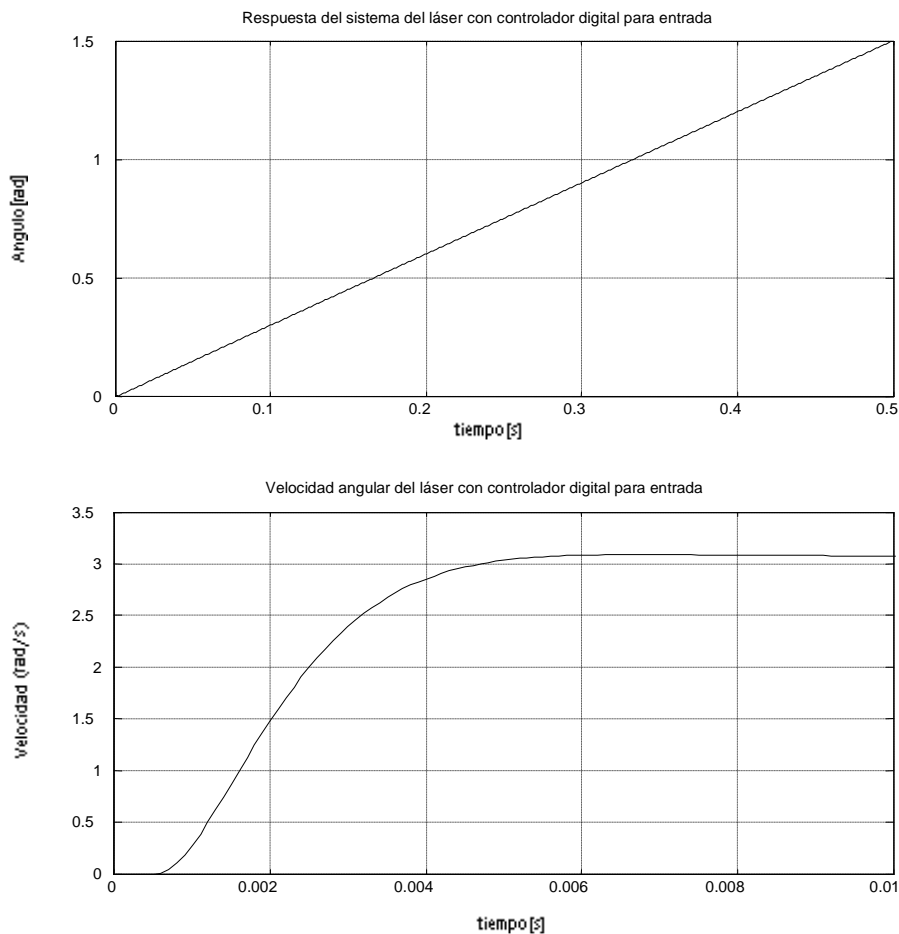
Para la base:

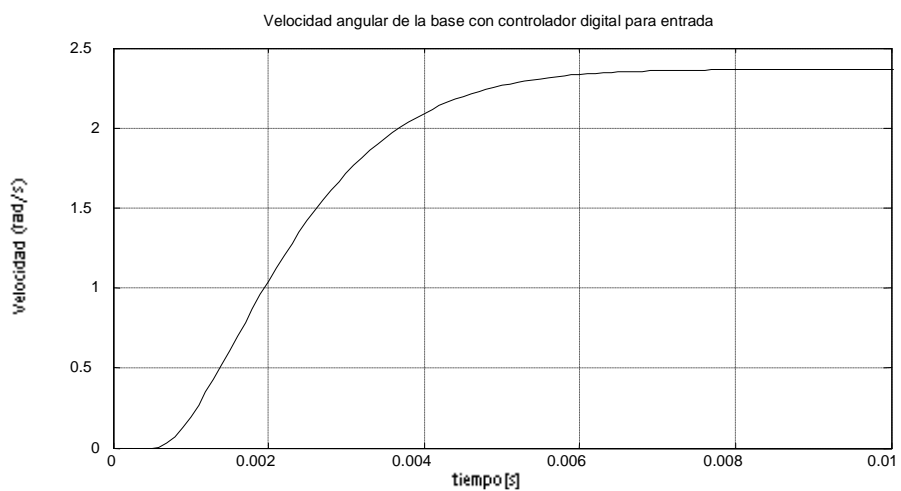
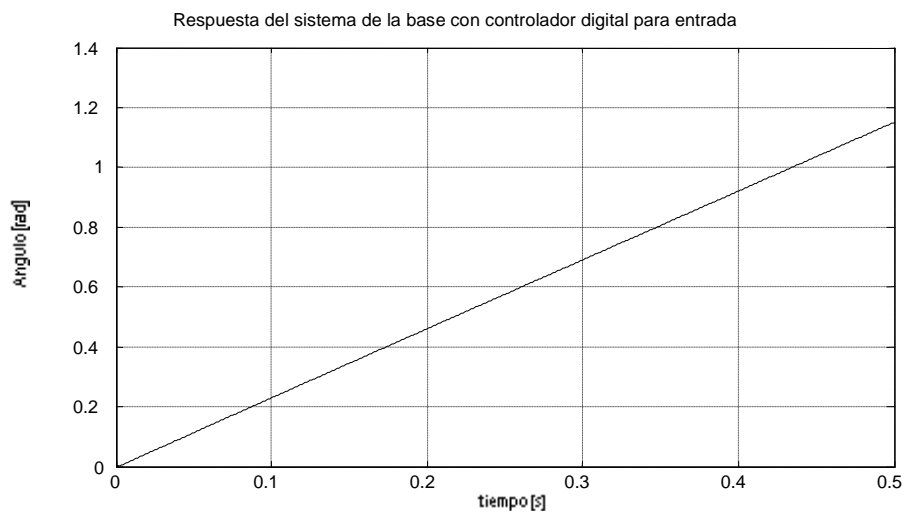
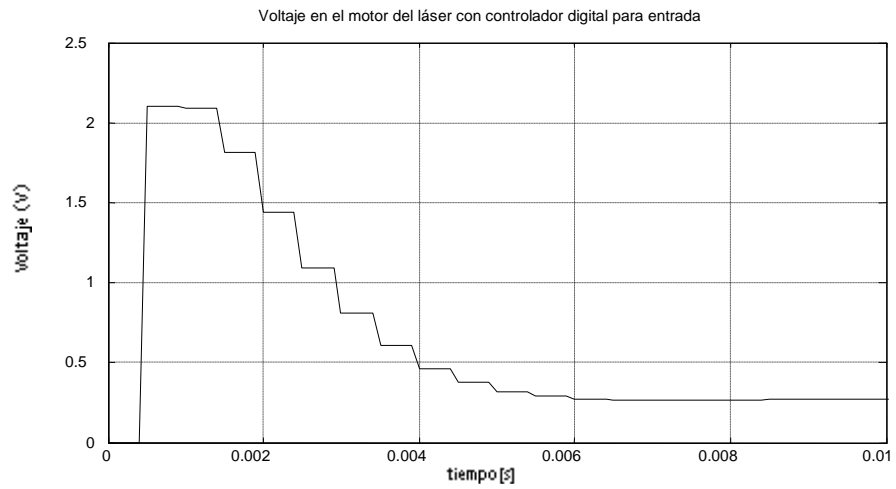
$$y(k) = \left[ \begin{array}{l} 1 + 0.0342(0.9938)^k - 0.0274(-0.044)^k + \\ (0.6405)^k [-1.0028 \cos(368kT) - 3.0958 \text{sen}(368kT)] \end{array} \right] u(kT) \dots\dots\dots (7.12)$$

Las ecuaciones (7.11) y (7.12) corresponden a las simulaciones de los sistemas del láser y la base para una entrada escalón, de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  respectivamente, mostradas en la figura (7.6).

### 7.6.6 Respuesta a una entrada típica de operación

De acuerdo con el funcionamiento del goniómetro láser descrito en (5.1), las entradas de ambos sistemas dependen del movimiento del espejo retrorreflector, el cual es movido por el usuario. Una entrada típica de operación a los sistemas es una rampa, la cual indica una velocidad constante de movimiento del espejo. Si para el sistema del láser se tiene como entrada  $u(t) = 3t$  y para el sistema de la base  $u(t) = 2.3t$ , por medio de *simulink*, del programa *MATLAB* [18], se obtienen las simulaciones de la figura 7.7. Más información acerca de estas simulaciones se muestra en el apéndice B.





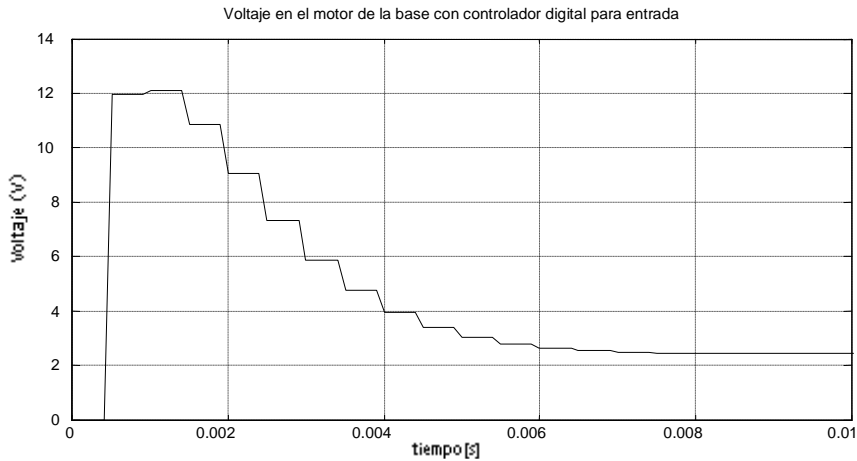


Figura 7.7 Simulaciones de los sistemas del láser y la base con controlador digital Para una entrada rampa.

En la figura 7.7 se puede observar el comportamiento de los 2 sistemas con una velocidad constante de movimiento del objetivo. En los motores los voltajes aplicados no deben superar sus voltajes nominales de operación, que en este caso son de 12 [V], por lo que al observar estas gráficas se concluye que la velocidad máxima de operación para este sistema es de 2.3 [rad/s].

Para obtener las respuestas de los sistemas de manera analítica se utiliza la función de transferencia de lazo cerrado del sistema digital, expresadas por las ecuaciones (7.7) y (7.8), para el láser y la base respectivamente.

Para el láser:

$$y(z) = \frac{0.04079(z + 2.7076)(z + 0.1785)(z - 0.994)}{(z - 0.9938)(z + 0.04735)(z^2 - 1.2508z + 0.4165)} \cdot \frac{3z}{(z - 1)^2} \dots\dots\dots (7.13)$$

Por medio de la ecuación (1.19), que utiliza la transformada z inversa, se puede obtener la respuesta analítica a la entrada rampa especificada:

$$y(k) = 3 \left( \begin{aligned} &1.0126 + 0.9936kT - 5.4892(0.9938)^k + 0.0272(0.04735)^k \\ &+ (0.6454)^k [4.4495 \cos(499kT) + 4.187 \text{sen}(499kT)] \end{aligned} \right) u(kT) \dots\dots\dots (7.14)$$

Para  $k = 0,1,2,\dots$

Para la base:

$$y(z) = \frac{0.037(z + 2.7145)(z + 0.1797)(z - 0.994)}{(z - 0.9938)(z + 0.04403)(z^2 - 1.2592z + 0.4101)} \cdot \frac{2.3z}{(z - 1)^2} \dots\dots\dots (7.15)$$

Por medio de la ecuación (1.19), que utiliza la transformada z inversa, se puede obtener la respuesta analítica a la entrada rampa especificada:

$$y(k) = 2.3 \left( \begin{array}{l} 0.6236 + 0.996kT - 5.5161(0.9938)^k + 0.0263(0.04403)^k \\ + (0.6405)^k [4.8657 \cos(368kT) + 6.8189 \text{sen}(368kT)] \end{array} \right) u(kT) \dots\dots (7.16)$$

Para  $k = 0,1,2,\dots$

Las ecuaciones (7.14) y (7.16) corresponden a las simulaciones para los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , los cuales representan la posición del láser y la base respectivamente, para entradas rampa y cuyas simulaciones se muestran en la figura 7.7.

## CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo cumplen con los objetivos previamente planteados, como es caracterizar, mediante modelos matemáticos lineales, la dinámica de la cabeza de medición de un goniómetro láser y el diseño de un sistema de control digital.

Existen diversos fabricantes de goniómetros láser en todo el mundo y cada uno tiene características propias de construcción y desempeño. Para propósitos de este trabajo se consideró un esquema general del sistema de movimiento, utilizado para este tipo de aparatos y el cual se describe en el capítulo 4. Las principales conclusiones obtenidas en el modelado del sistema de movimiento son:

- El esquema general utilizado para representar la dinámica del sistema de movimiento de un goniómetro láser, puede considerarse como una primera aproximación, ya que considera un sistema de parámetros concentrados, compuesto de cuerpos rígidos y sin considerar algunos efectos no lineales en los elementos del sistema.
- Para obtener modelos matemáticos lineales, los cuales son más sencillos y fáciles de analizar, se propone que los momentos de inercia, respecto de los ejes  $x'$  y  $y'$ , del cuerpo del láser sean iguales. Por consiguiente, se propone una forma cilíndrica para el cuerpo del láser, debido a que los momentos de inercia dependen únicamente de la geometría del cuerpo. Además, esta simplificación nos permite considerar a los sistemas del láser y la base de manera independiente.
- Para poder determinar la exactitud del modelo matemático propuesto es necesario la realización de pruebas a un prototipo, lo cual está fuera de los objetivos planteados para este trabajo.
- Al analizar las funciones de transferencia del sistema de movimiento, se concluye que es inestable, lo cual hace necesario implementar un sistema de control con retroalimentación para garantizar la estabilidad del sistema y un desempeño adecuado.

Contar con un modelo matemático, que represente de manera adecuada la dinámica del sistema, es muy importante para facilitar el diseño de un sistema de control que permita al sistema cumplir con los requerimientos de desempeño. Se optó por un sistema de control digital debido a que los sistemas digitales generalmente proporcionan mejores resultados que los analógicos. Las principales conclusiones obtenidas en el diseño del sistema de control son:

- Para el sensor de posición angular, necesario para la implementación de un sistema de control con retroalimentación, se propone un codificador angular de alta resolución, debido a que este tipo de sensores son los utilizados en los modelos comerciales.
- Debido a que el goniómetro láser es un aparato de medición de alta precisión, es necesario incluir un controlador digital para obtener un desempeño apropiado.

- El controlador que se propone en este trabajo, debido a que generó los mejores resultados, es un controlador digital PID, mediante la técnica de diseño por cancelación de polos y ceros. Al probar otros métodos de diseño para controladores PID se tuvieron problemas de inestabilidad.
- Se probaron otros diferentes tipos de controladores digitales, como son los controladores de adelanto de fase, de atraso de fase y de atraso adelante de fase, pero los resultados no fueron lo suficientemente buenos.
- La menor frecuencia de muestreo, que cumplía con los requisitos teóricos y prácticos para sistemas de control, que produjo resultados satisfactorios es de  $f_s = 2[KHz]$ . Además, esta frecuencia de muestreo es utilizada por otros modelos comerciales.

El análisis de resultados está basado en la cabeza de medición de un goniómetro láser comercial, el cual es el modelo MS-1S250 de la marca CANON. Se utilizaron todos los valores disponibles por medio de las hojas de especificaciones de este modelo, pero los valores de las constantes de fricción y de EMF de los motores no estuvieron disponibles, por lo que se tuvieron que suponer de acuerdo a datos disponibles de otros sistemas que fueran lo más parecidos posibles.

Los resultados que se obtuvieron con este sistema de control digital y los cuales se muestran en la tabla 7.2, son bastante buenos al compararlos con el desempeño del MS-1S250, como se muestra en la siguiente tabla:

	<i>Sistema de control digital</i>	<i>MS-1S250</i>
<i>Sobrepaso máximo( <math>M_p</math> )</i>	4.02 %	5 %
<i>Tiempo de asentamiento ( <math>t_s</math> )</i>	33.3 [ms]	50 [ms]
<i>Error en régimen permanente para entrada escalón y rampa</i>	0 %	0 %
Velocidad máxima de movimiento del espejo	2.3 [rad/s]	1.57 [rad/s]
Ancho de Banda ( $BW$ )	707.9 [rad/s]	ND

*Tabla comparativa del desempeño del sistema de control diseñado contra el modelo MS-1S250.*



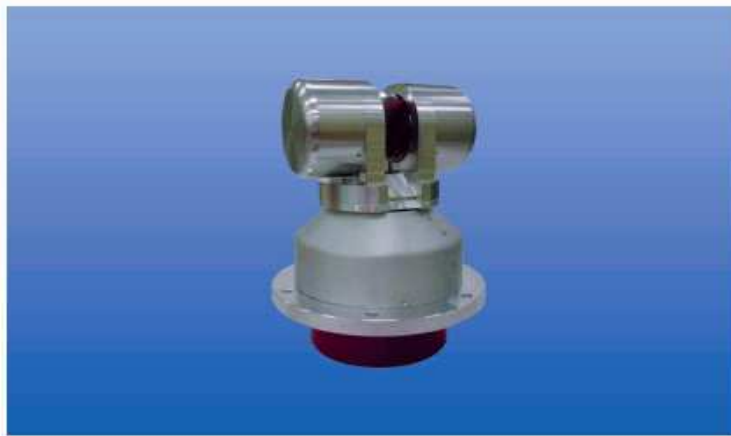
La coincidencia entre los datos de desempeño del goniómetro láser MS-1S250 y los obtenidos mediante el modelo matemático propuesto para describir la dinámica de un goniómetro láser con sistema de control digital, hace suponer que dicho modelo matemático es adecuado para este propósito, a reserva de comprobarse de forma experimental.

Hay que considerar que los resultados obtenidos por medio del sistema de control digital, se obtuvieron por medio de simulaciones con el programa computacional MATLAB [18], por lo que son resultados completamente teóricos y las características de desempeño del MS-1S250 fueron obtenidas de las hojas de especificaciones del instrumento [16], por lo que son datos reales de desempeño que proporciona el fabricante.

## Apéndice A: Hojas de especificaciones

A continuación se muestran las hojas de especificaciones técnicas de la cabeza de medición del goniómetro láser *MS-1S250* de *CANON* [16].

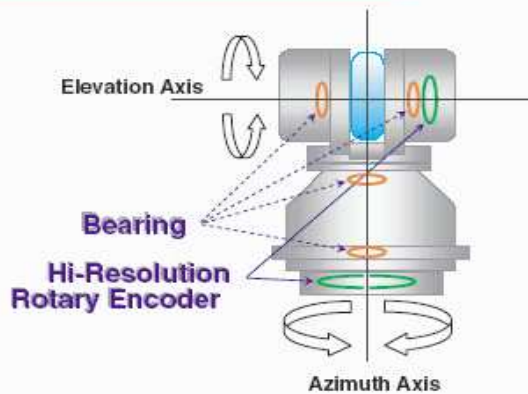
# Scanning Head for Laser Tracker



### FEATURES

- Adopts Canon's original high-precision Laser Rotary Encoder for angle sensing.
- High positioning accuracy and positioning repeatability together with faster settling time.
- Fast 2-shaft positioning with dedicated driver / board.

### APPLICATION EXAMPLES



- Laser Co-ordinate Measuring Machine (CMM)
- Laser Distance Measurement Machine
- Measurement machine for Geographics

## LASER SCANNER

# MS-1S250

### SPECIFICATIONS

#### SYSTEM SPECIFICATIONS

■ Field of view	±22.5 El by ±185 Az degrees
■ Range of motion	±200 Az, Continuous El degrees
■ Measurement rate	17857 Reports/sec
■ Settling time (Az & El)	
● 0.01 degree step	15 msec (into ±.18 arc-sec)
● 1.0 degree step	50 msec (into ±.18 arc-sec)
■ Overshoot	5% max
■ Command Velocity (Az & El)	0 to 90 (±10%) (mirror motion) deg/s *)Adjustable in 1mdeg/sec steps
■ Command Resolution (Az & El)	0.18 (Az & El) arc-sec
■ Positional Repeatability	0.16 arc-sec (1 sigma)
■ Jitter amplitude (Az & El)	±0.18 arc-sec max
■ Output aperture diameter	25 mm min
■ Mirror aperture	25 mm
■ Mirror alignment	
● Lateral	±0.127 mm max (5 mil max)
● Angular	±18 arc-sec max
■ Axes alignment	
● Separation of axes	±0.127 mm max (5 mil max)
● Squareness of axes	±18 arc-sec max
■ Supply voltage	+5, +12 volts
■ Weight	Total 7.3 kg (6.6+0.72)

#### DRIVER SPECIFICATIONS

■ Interface	Dsub 37
■ Amplifier type	Linear
■ Supply voltage	+5 Volts, +12 Volts
■ Power consumption	Max 500w

\* El : Elevation, Az : Azimuth

#### CONTROLLER SPECIFICATIONS

■ Interface	PCI
■ Position data interface	RS485
■ Software maintenance	Down load from host
■ Electronic Circuits Form	ISA bus board with PCI sub board.

#### SCANNER MOTOR/ENCODER FOR ELEVATION AXIS

■ Motor type	Moving magnet coreless brushless DC motor
■ Encoder type	Canon Laser rotary encoder KP-1Z
■ Signals	
● A, B-phase	81,000 sinusoidal wave/rev.
● Resolution	0.00391 arc-sec (4,096 division)
● Stability	±0.05 arc-sec
● Cumulative accuracy	10 arc-sec p-p/±22.5 degree
■ Scan angle	±22.5 degree

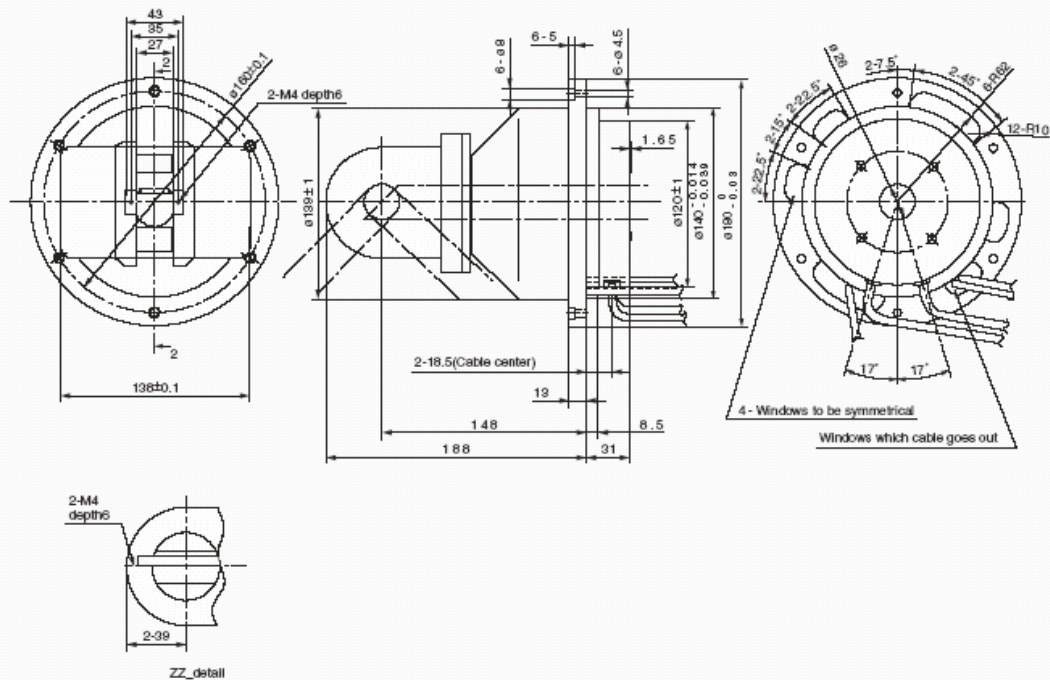
#### SCANNER MOTOR/ENCODER FOR AZIMUTH AXIS

■ Motor type	Moving magnet coreless brushless DC motor
■ Encoder type	Canon Laser rotary encoder
■ Signals	
● A, B-phase	180,000 sinusoidal wave/rev.
● Resolution	0.00176 arc-sec (4,096 division)
● Stability	±0.05 arc-sec
● Cumulative accuracy	10 arc-sec p-p/±180 degree
■ Scan angle	±185 degree

#### ENVIRONMENTAL CONDITIONS

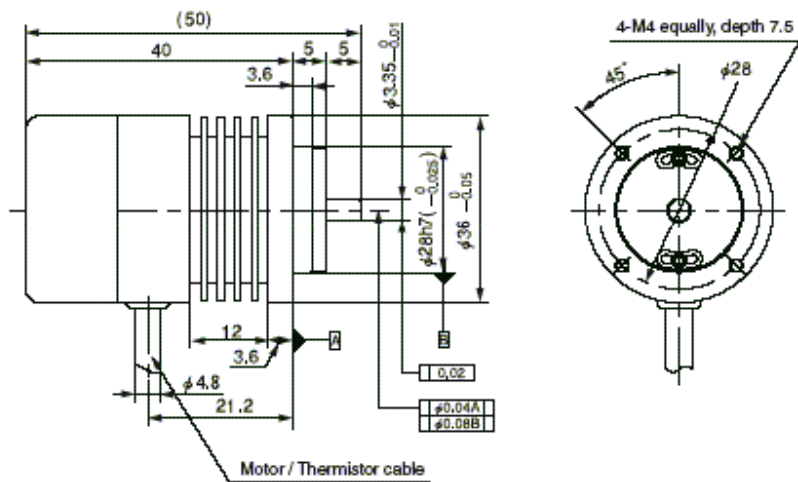
■ Operating temperature	5-40 deg-C
■ Operating Humidity	10-90 % RH. Non-condensing
■ Storage temperature	-10-60 deg-C
■ Storage Humidity	10-90 % RH. Non-condensing

### EXTERNAL DIMENSIONS

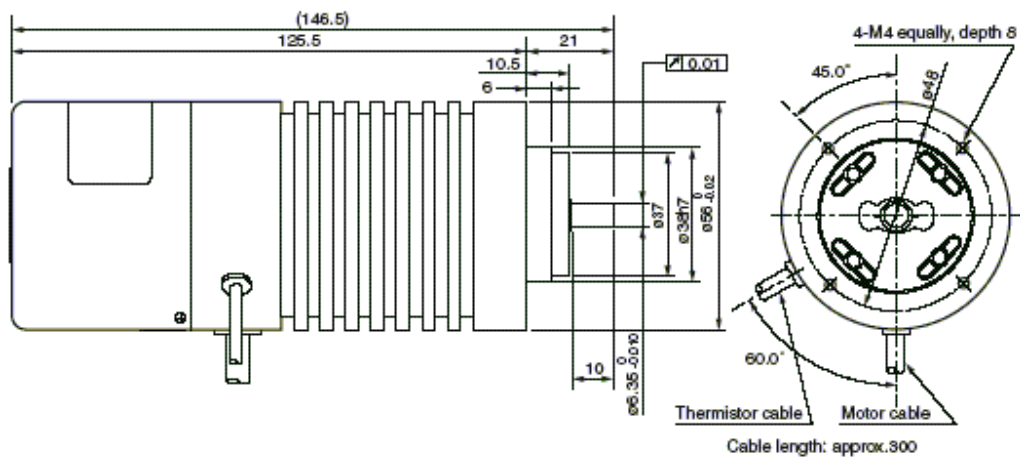


MOTOR SPECIFICATIONS	LE-60M28A	KP-1SM100
Type	Moving magnet coreless brushless DC motor	Moving magnet coreless brushless DC motor
Scan Angle	±22.5 degree	±185 degree
Rotor Inertia	2.0 gcm-sq	35.4 gcm-sq
Torque Constant	0.0118 Nm/A	0.093 Nm/A
Coil Resistance	0.38 ohm	2.6 ohm
Coil Inductance	0.13 mH	0.90 mH

**LE-60M28A**



**KP-1SM100**



## Apéndice B: Programas y simulaciones en MATLAB

En esta sección se muestran los programas y los esquemáticos utilizados para la obtención de las funciones de transferencia (continuas y discretas) del láser y la base del sistema *MS-1S250*, así como para la obtención de los parámetros para los controladores PID digitales propuestos en los sistemas de control de los mismos. Los programas están hechos en el editor del programa computacional MATLAB [18] y los esquemáticos están hechos en *simulink*, la cual es una herramienta del mismo programa.

La función de los programas es calcular los datos de entrada para los bloques de los esquemáticos en *simulink*, para realizar simulaciones de manera sencilla y así poder observar el comportamiento de los sistemas del láser y la base. A continuación se muestran los 2 programas utilizados, donde el primero realiza los cálculos para el sistema del láser y el segundo para el sistema de la base.

### Programa 1: Sistema del láser

```
% Constantes del sistema del láser
J1=0.00036;
J4=0.0000002;
b1=0.0029;
b4=0.0000013;
C1=0.0118;
C2=0.0097;
R=0.38;
L=0.00013;
N=1/8;

% Coeficientes de la ecuación diferencial del láser
A=(L/(C1*N))*(J4+(J1*N^2));
B=(1/(C1*N))*(R*(J4+(J1*N^2))+L*(b4+(b1*N^2)));
C=(R/(C1*N))*(b4+(b1*N^2))+(C2/N);
format long
Q=[A, B, C];

% Función de transferencia del láser H(s)=num(s)/den(s)
den=[Q/Q(1) 0];
num=[1/Q(1)];

% Equivalente discreto Hroc(z)=numZ(z)/denZ(z)
[numZ,denZ]=c2dm(num,den,0.0005,'zoh');
r=roots(denZ);

% Cálculo del controlador PID digital D(z)=cnum(z)/cden(z)
% Eliminando el polo dominante de H(z)
cnum=conv([1 -r(2)],[1 -0.994]);
cden=[1 -1 0];
```

```
% Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema
% del láser para la selección de la ganancia del controlador K1
numLC=conv(numZ,cnum);
denLC=conv(denZ,cden);
rlocus(numLC,denLC)
```

### **Programa 2: Sistema de la base**

```
% Constantes del sistema de la base
J1=0.0073;
J4=0.00000354;
b1=0.009;
b4=0.00004;
C1=0.093;
C2=0.05;
R=2.6;
L=0.0009;
N=1/20;

% Coeficientes de la ecuación diferencial de la base
A=(L/(C1*N))*(J4+(J1*N^2));
B=(1/(C1*N))*(R*(J4+(J1*N^2))+L*(b4+(b1*N^2)));
C=(R/(C1*N))*(b4+(b1*N^2))+(C2/N);
format long
Q=[A, B, C];

% Función de transferencia de la base  $H(s)=\text{num2}(s)/\text{den2}(s)$ 
den2=[Q/Q(1) 0];
num2=[1/Q(1)];

% Equivalente discreto  $H_{roc}(z)=\text{numZ2}(z)/\text{denZ2}(z)$ 
[numZ2,denZ2]=c2dm(num2,den2,0.0005,'zoh');
r2=roots(denZ2);

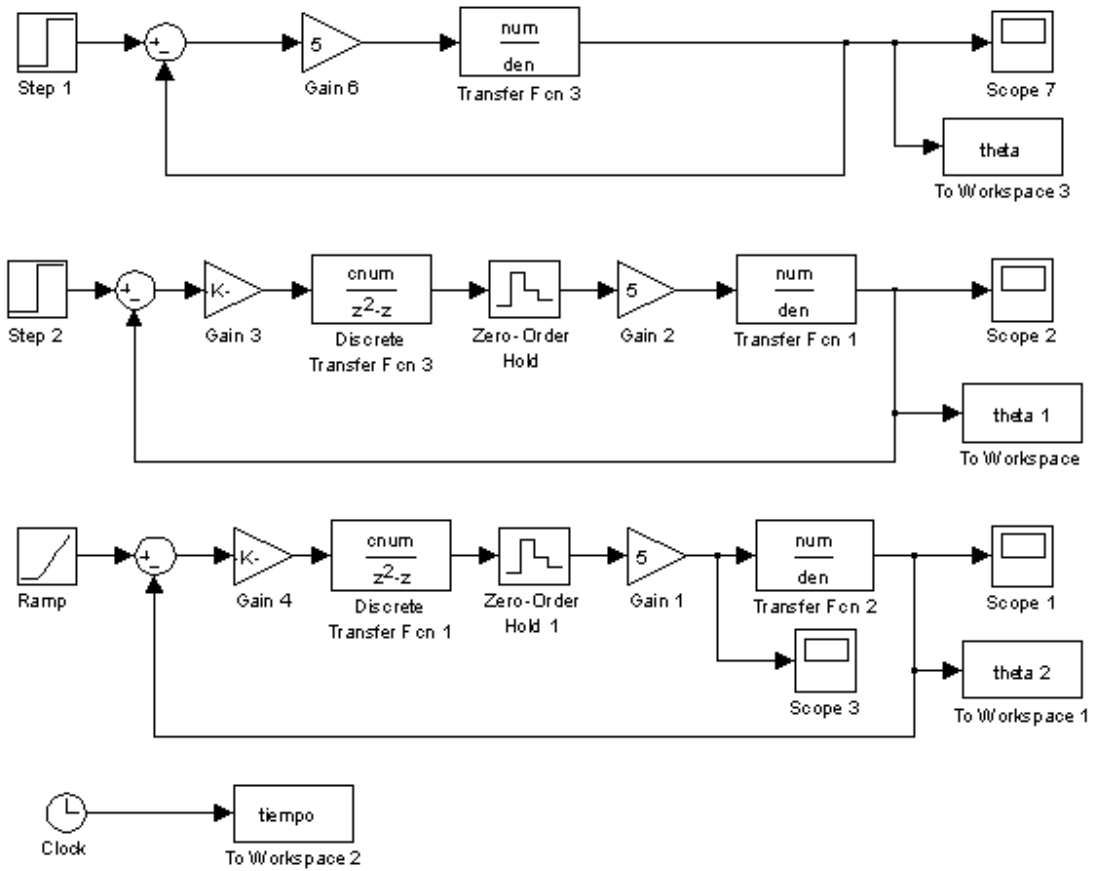
% Cálculo del controlador PID digital  $D(z)=\text{cnum}(z)/\text{cden}(z)$ 
% Eliminando al polo dominante de  $H(z)$ 
cnum2=conv([1 -r2(2)], [1 -0.994]);
cden2=[1 -1 0];

% Gráfica del lugar geométrico de las raíces del sistema
% de la base para la selección de la ganancia del controlador K2
numLC2=conv(numZ2,cnum2);
denLC2=conv(denZ2,cden2);
rlocus(numLC2,denLC2)
```

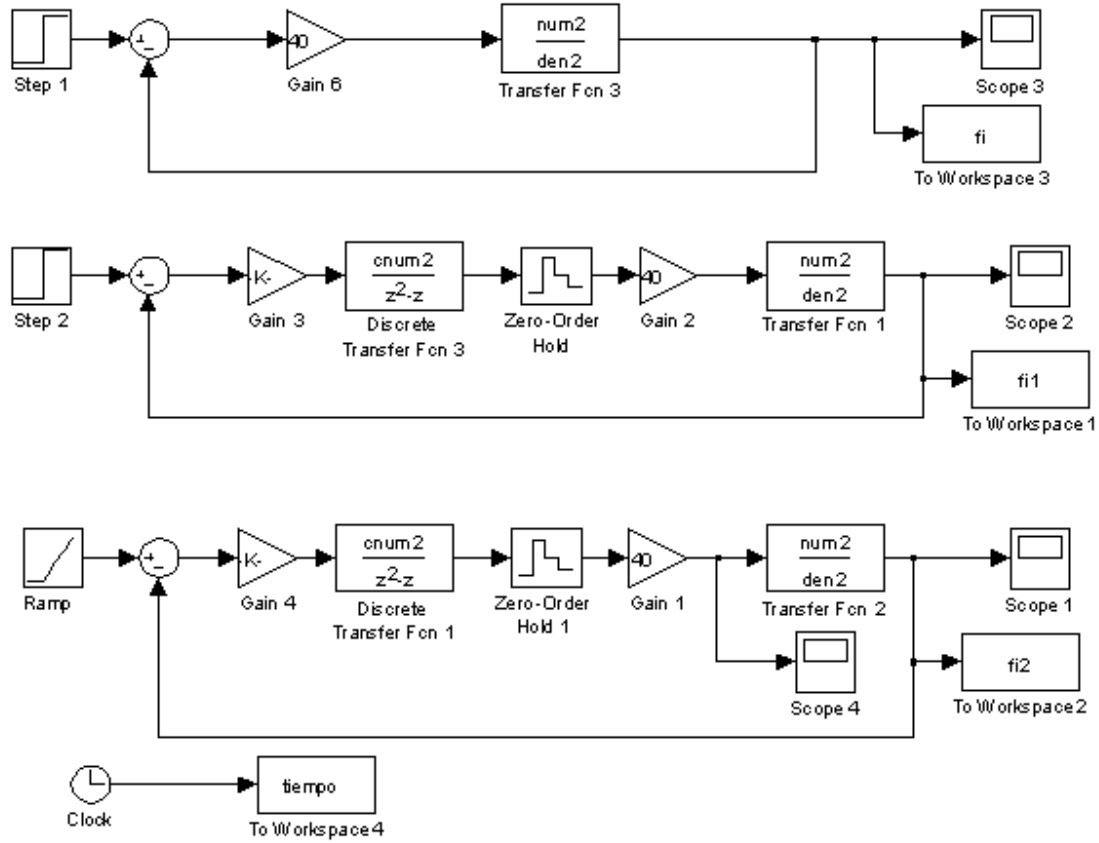
A continuación se presentan los 2 esquemáticos de *simulink* utilizados para efectuar las simulaciones. El esquemático 1 recibe los datos calculados en el programa 1 y por tanto, realiza simulaciones del sistema del láser, mientras que el esquemático 2 recibe los datos del programa 2 y realiza simulaciones del sistema de la base.

Para ambos esquemáticos la figura superior realiza la simulación, del sistema correspondiente, en un esquema de control con un controlador proporcional analógico. La figura central e inferior realizan simulaciones, de los sistemas correspondientes, en un esquema de control con un controlador PID digital, para entradas escalón y rampa respectivamente.

**Esquemático 1: Sistema del láser**



**Esquemático 2: Sistema de la base**





### Apéndice C: Efectos de la torsión

La torsión es la deformación de un cuerpo producida al someterse a un par de fuerzas, las cuales actúan en direcciones opuestas y en planos paralelos, por lo que cualquier cuerpo al someterse a estas condiciones experimentará torsión, la cual dependerá del par actuante y de la constante de torsión  $k$  del cuerpo.

En la figura 1 se muestra un sistema mecánico formado por 2 cuerpos rígidos ( $J_1$  y  $J_2$ ), que se encuentran unidos mediante un resorte de torsión ( $k$ ), en los cuales existe fricción rotacional ( $b_1$  y  $b_2$ ) y el sistema recibe la excitación mediante el torque  $T$ . Para analizar los efectos de la torsión en el sistema de la figura 1 se debe obtener el modelo matemático que representa su dinámica.

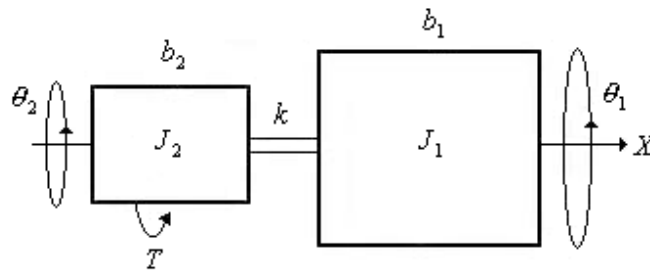


Figura 1 Sistema mecánico con torsión

Realizando la suma de momentos respecto del eje de rotación del cuerpo 1, se tiene:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + b_1 \dot{\theta}_1 - k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

Realizando la suma de momentos respecto del eje de rotación del cuerpo 2, se tiene:

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + b_2 \dot{\theta}_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = T \dots\dots\dots (2)$$

Sustituyendo la ecuación (1) en (2), se tiene:

$$\frac{J_2 J_1}{k} \ddot{\theta}_1 + \left( \frac{J_2 b_1 + J_1 b_2}{k} \right) \dot{\theta}_1 + \left( J_1 + J_2 + \frac{b_1 b_2}{k} \right) \theta_1 + (b_1 + b_2) \theta_1 = T \dots\dots\dots (3)$$

Al obtener el límite de la ecuación (3) cuando  $k$  tiende a infinito, se obtiene:

$$(J_1 + J_2) \ddot{\theta}_1 + (b_1 + b_2) \dot{\theta}_1 = T \dots\dots\dots (4)$$

Si ahora se considera que no existe torsión entre los cuerpos 1 y 2 en el sistema de la figura 1, entonces se puede considerar un solo cuerpo rígido donde  $\theta_1 = \theta_2$ . Al realizar la suma de momentos respecto de este cuerpo, se tiene:

$$(J_1 + J_2)\overset{**}{\theta}_1 + (b_1 + b_2)\overset{*}{\theta}_1 = T \dots\dots\dots (5)$$

Al comparar las ecuaciones (4) y (5) se observa que ambas son iguales, por lo tanto se concluye que en un sistema mecánico como el de la figura 1, cuando el valor de la constante de torsión  $k$  tiene un valor mucho mayor que el de los momentos de inercia ( $J_1$  y  $J_2$ ) y de la fricción existente en los cuerpos ( $b_1$  y  $b_2$ ), entonces los efectos de la torsión se pueden considerar despreciables.

## BIBLIOGRAFÍA

### **Libros:**

- [1] KATSUHIKO OGATA, “*Dinámica de Sistemas*”, Primera edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, México D. F. 1987.
- [2] ROBERT H. CANNON, “*Dynamics of Physical Systems*”, Edición estudiantil Internacional, McGraw-Hill, USA 1967.
- [3] F. P. BEER, E. R. JOHNSTON JR., W. E. CLAUSEN, G. H. STAAB, “*Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica*”, Séptima edición, McGraw-Hill Interamericana, México D. F. 2005.
- [4] A. BEDFORD, W. FOWLER, “*Mecánica para Ingeniería. Dinámica*”, Primera Edición en español, Addison-Wesley Iberoamericana, México D. F. 1995.
- [5] D. V. RICHARSON, A. J. CAISSE JR., “*Maquinas Eléctricas Rotativas y Transformadores*”, Cuarta edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, México 1997.
- [6] A. E. FITZGERALD, C. KINGSLEY JR., S. D. UMANS, “*Maquinas Eléctricas*”, Quinta edición, McGraw-Hill, México 1984.
- [7] G. E. HARPER, “*Curso de Máquinas de Corriente Continua*”, Primera edición, Limusa, México 1984.
- [8] G. F. FRANKLIN, J. D. POWELL, M. L. WORKMAN, “*Digital Control of Dynamics Systems*”, Segunda edición, Addison-Wesley, USA 1994.
- [9] BENJAMIN C. KUO, “*Sistemas de Control Digital*”, Primera edición en español, Continental, México 1997.
- [10] KATSUIKO OGATA, “*Modern Control Engineering*”, Cuarta edición, Prentice-Hall, USA 2002.
- [11] R. C. DORF, “*Sistemas Modernos de Control. Teoría y práctica*”, Segunda edición en español, Addison-Wesley Iberoamericana, USA 1989.

### **Bibliografía electrónica:**

- [12] O. G. DUARTE, “*Sistemas Discretos de Segundo Orden*”, Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Nacional de Colombia, <http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ingenieria/2001619/lecciones/orden/node5.html#SECTION00443000000000000000>, Consultada Junio 2008.

- [13] R. BOYNTON, K. WIENER, “*Cómo Calcular las Propiedades de la Masa (Guía Práctica del Ingeniero)*”, <http://www.elettrorava.es/espanol/docum/MOI-CG/secc-4.htm>, Consultada Julio 2008.
- [14] E. J. CARLETTI, “*Codificadores de Posición Angular*”, Robots, [http://robots-argentina.com.ar/SensoresAngulares\\_resolver.htm#incre](http://robots-argentina.com.ar/SensoresAngulares_resolver.htm#incre), Consultada Octubre de 2008.
- [15] J. C. JIMENÉZ, “*Sensores Internos de Robots*”, Asignatura de Robótica de la Universidad de Alicante, <http://www.dccia.ua.es/dccia/inf/asignaturas/ROB/optativos/Sensores/mas.html>, Consultada Octubre de 2008.
- [16] “*Scannig Head for Laser Tracker*”, Canon Global, Especificaciones del Sistema MS-1S250, [http://www.usa.canon.com/html/industrial\\_encoders/pdf/Laser%20Scanner.pdf](http://www.usa.canon.com/html/industrial_encoders/pdf/Laser%20Scanner.pdf), Consultada Noviembre 2008.

***Artículos:***

- [17] T. A. HEEREN, F. E. VELDPAUS, “*An Optical System to Measure The End Effector Position For On Line Control Purposes*”, The International Journal of Robotics Research, Vol. 11, No. 1, Febrero 1992.

***Programas de computadora:***

- [18] *MATLAB version 7.4 (R2007a)*, The MathWorks, Inc., USA 2007.