



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA TEORÍA DE
DISECCIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

MARÍA DE LOS ÁNGELES IZQUIERDO LARA



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. FRANCISCO DE JESÚS STRUCK
CHÁVEZ

MÉXICO, D. F. FEBRERO 2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

| Datos | |
|--|---|
| 1. Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Facultad de Ciencias Carrera Número de cuenta | 1. Datos del alumno Izquierdo Lara María de los Ángeles 722- 2 14 16 45 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 08955481-2 |
| 2. Datos del tutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno | 2. Datos del tutor Maestro en Ciencias Francisco de Jesús Struck Chávez |
| 3. Datos del sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno | 3. Datos del sinodal 1 Doctor en Ciencias Javier Páez Cárdenas |
| 4. Datos del sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno | 4. Datos del sinodal 2 Doctor en Ciencias Héctor Méndez Lango |
| 5. Datos del sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno | 5. Datos del sinodal 3 Maestro en Ciencias Saúl Díaz Alvarado |
| 6. Datos del sinodal 4 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno | 6. Datos del sinodal 4 Maestro en Ciencias Vinicio Gómez Gutiérrez |
| 7. Datos del trabajo escrito. Título Subtítulo Número de páginas Año | 7. Datos del trabajo escrito El teorema fundamental de Teoría de Disección 110 p 2009 |

El vínculo que une a tu auténtica familia no es de sangre sino de respeto y de goce mutuo.

Es raro que los miembros de una familia vivan bajo el mismo techo.

Richard Bach

*A mi mamá y mi abuelita por su influencia de mujeres
trabajadoras y en lucha constante.*

*A mis hijas por que tengo fe en que algún día verán
realizados sus propios sueños... y por que las amo.*

*A toda mi familia (la auténtica) por
tantas y tantas horas de felicidad.*

A todos ellos dedico mi trabajo.

Agradezco

A Dios por permitirme llegar a este momento y por todas las oportunidades para mejorar y crecer.

A mi madre por ser la primera persona que creyó en mi, por su esfuerzo, sus desvelos y el amor en sus ojos.

A mi hermana por que verla perseguir sus sueños me animó a ir en pos de los míos.

A todos mis maestros por compartir sus conocimientos, por su entusiasmo y dedicación. Particularmente a los profesores: Telésforo Estrada Ballesteros mi primera influencia en matemáticas; Francisco Struck Chávez mi maestro de geometría y asesor, por sus conocimientos, pero sobre todo por su paciencia; Javier Paez Cárdenas mi Papapaez por su paciencia y cariño; Héctor Méndez Lango mi maestro de cálculo, por su entusiasmo y dinamismo al enseñar y por aceptar ser sinodal, a Saúl Díaz y Vinicio Gutierrez por ser mis sinodales y amigos pero muy especialmente a Saúl por su apoyo y ayuda desinteresados pero sobre todo por estar... ¡por siempre estar!.

A Hector Cejudo mi amigo, por su ayuda desinteresada.

Finalmente a Pitágoras por su teorema y su filosofía, motor indiscutible de los últimos años de mi vida, a la Dra. Amelia Ruíz de Motto por compartir las enseñanzas pitagóricas y al Instituto Nicholas Roerich y su Directora Lic. Ma del Pilar Gallego Vargas por permitirme adentrarme en este conocimiento entre sus aulas.

¡Gracias!

Nunca
Te conceden un deseo
Sin concederte también la facultad
de convertirlo en realidad

Sin embargo
Es posible que te cueste
Trabajo.

Richard Bach

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Nociones Generales. | 10 |
| 1.1. Geometría Elemental. | 10 |
| 1.2. Transformaciones. | 36 |
| 1.3. Isometrías | 39 |
| 1.4. Grupos | 51 |
| 2. Teorema fundamental de la teoría de disección | 55 |
| 2.1. Introducción. | 55 |
| 2.2. Preliminares | 56 |
| 2.3. Teorema de Pitágoras | 64 |
| 2.4. Teorema fundamental de la teoría de disección (Bolyai-Gerwien). | 69 |
| 3. Variaciones para el teorema fundamental de disección | 78 |
| 3.1. Grupos de Isometrías. | 79 |
| 3.2. El teorema de Hadwiger-Glur. | 83 |
| 3.3. Invariantes aditivos y el grupo T | 90 |
| 3.4. El grupo S | 95 |

Introducción

Cuando hablamos de calcular áreas generalmente pensamos en figuras como triángulos, cuadrados, rectángulos, polígonos regulares y algunos no regulares como trapecios o paralelogramos, y recordamos algunas fórmulas que nos ayuden con el cálculo, cuando se trata de algún polígono irregular la forma común en que procedemos al calcular el área es triangular dicho polígono calcular las áreas de los triángulos obtenidos y sumarlas, procedemos así de manera totalmente natural; es más la mayoría de las fórmulas que conocemos pueden deducirse a través de la suma de las áreas de triángulos obtenidos al dividir un polígono, Pero, ¿cómo estamos seguros que se puede proceder así? ¿cómo sabemos que sumar áreas de polígonos obtenidos al disecar es lo mismo que obtener el área del polígono original? y más aún ¿cómo sabemos que podemos comparar esa área con la de un polígono que se puede construir a través de los polígonos obtenidos?. Este es el tema que tratamos en este trabajo, aquí enunciamos y demostramos el teorema fundamental de la teoría de disección el cual dice que dados dos polígonos de áreas iguales uno de ellos se puede cortar para con las piezas formar al otro, e inversamente si sabemos que las piezas de un polígono forman al otro entonces podemos afirmar que las áreas de los polígonos son iguales. Aun más probamos también que al disecarse un polígono para formar a otro, se pueden llevar las piezas utilizando solo dos movimientos en el plano, a saber traslaciones y rotaciones de 180° .

En la primera parte del trabajo veremos algunos conceptos y resultados básicos para la comprensión y el análisis del contenido posterior, conceptos como congruencia, semejanza,

isometría, grupo, por mencionar algunos, todos ellos importantes y tan básicos que espero haber acertado en la forma de escribirlos, para no entrar en conflicto con los conocimientos previos de aquellos que lean este trabajo.

La segunda parte se dedica de lleno a demostrar el teorema fundamental de la teoría de disección, haciendo uso entre otras cosas del teorema de Pitágoras. Se enuncian las definiciones de congruencia por adición (equidisecabilidad) y congruencia por sustracción (equicomplementabilidad) y se enuncia y demuestra el teorema de Pitágoras utilizando los dos conceptos, para finalmente demostrar el teorema fundamental de la teoría de disección que fué conjeturado por Farkas Bolyai en 1790 y demostrado por Paul Gerwien en 1833 y por Bolyai en 1835 en desconocimiento uno de la demostración del otro, por este motivo se conoce también a este teorema como el teorema de Bolyai-Gerwien.

Interesado en estos hechos Hadwiger se preguntó si era posible restringir esta demostración a movimientos en el plano y así enuncia y demuestra un teorema conocido como Teorema de Hadwiger-Glur que se enuncia y demuestra en la última parte de este trabajo, y que fué demostrado por Hugo Hadwiger y Paul Glur en 1951, además de haber demostrado también algunos resultados interesantes que permitieron llegar a concluir que el mínimo grupo de movimientos que admite esta demostración es el que contiene todas las traslaciones y las rotaciones de 180° .

Este es el material que se expone en este trabajo, con el debido respeto a quienes estudiaron e hicieron posibles los conocimientos mencionados y con el ánimo de que quienes lean esta tesis encuentren en ella tanto gusto y entusiasmo por el tema como lo encontré Yo.

Capítulo 1

Nociones Generales.

Este capítulo nos servirá para enunciar y analizar algunos conceptos y resultados básicos que nos serán útiles para el desarrollo del presente trabajo.

Iniciaremos con algunas definiciones y aspectos básicos e importantes de la geometría plana, para continuar con las definiciones de relación, transformación, isometría y grupo; presentando en cada tema los resultados necesarios y la notación con la que identificaremos cada uno a lo largo del texto.

1.1. Geometría Elemental.

Empezemos con algunas definiciones y notación.

Utilizaremos letras mayúsculas para identificar a los puntos y letras minúsculas para identificar a las rectas.

a) Dados dos puntos existe una sola recta que los contiene. Por tanto bastan dos puntos para determinar una recta.

b) Si en una recta consideramos dos puntos A y B distintos; llamaremos segmento a la parte de ella delimitada por esos puntos a los cuales llamamos extremos y lo denotaremos AB . (fig. 1.1) Asociaremos además a la idea de segmento, la idea de dirección; es decir

si la porción de recta es recorrida de A a B tendremos el segmento dirigido AB y si es recorrida de B a A será el segmento BA .



fig. 1.1 Segmento determinado por los puntos A y B .

Los segmentos AB y BA son iguales en magnitud pero opuestos en dirección, este hecho se indicará por la ecuación $AB = -BA$.

c) Dos segmentos de recta son iguales o congruentes cuando es factible colocarlos uno sobre el otro de tal suerte que coincidan en todos sus puntos incluyendo los extremos.

Así cuando dos segmentos son iguales escribiremos $AB = CD$

d) Diremos que tres puntos son colineales si están sobre la misma recta.

Si A , B y C son colineales tendremos que $AB + BC = AC$. (fig.1.2)

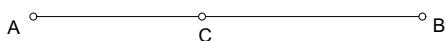


fig. 1.2 Los puntos A , B y C en un segmento

e) Diremos que dos rectas en el mismo plano son paralelas si no tienen ningún punto en común por más que se prolonguen. (fig.1.3)

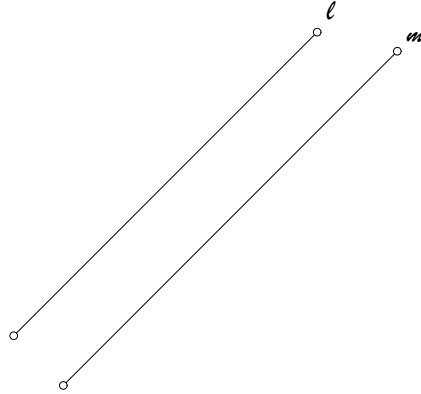


fig. 1.3 l y m dos líneas rectas que nunca se intersecan son llamadas paralelas.

f) *Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre si.*

g) *Se llama recta secante, de una o más rectas paralelas, a aquella que las interseca. (fig.1.4)*

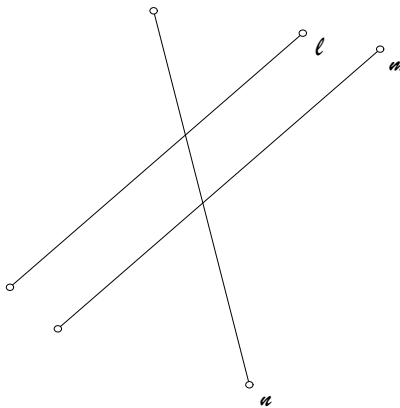


fig 1.4n es secante de m y l.

h) *A cada una de las aberturas que hay entre dos rectas que se intersecan la llamaremos*

ángulo.

Notemos que al intersectarse dos rectas se forman cuatro ángulos. (fig. 1.5)

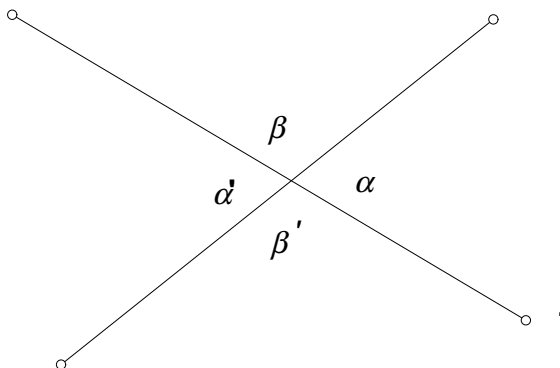


fig. 1.5 Dos rectas que se cortan forman dos pares de ángulos

Las cuatro semirectas que se obtienen de las rectas que se intersecan, serán llamadas lados del ángulo que forman y el punto de intersección vértice.

Cuando dos ángulos comparten uno de sus lados decimos que son adyacentes.

i) Un ángulo será denotado por tres letras una escrita en cada uno de los lados y la otra en el vértice acompañadas por el símbolo \sphericalangle , o bien por medio de una letra griega puesta en el vértice. Por ejemplo en la figura anterior $\sphericalangle AOB$ o α

Los ángulos se miden en grados, consideremos lo siguiente:

j) Llamaremos ángulo llano a un ángulo de lados colineales, es decir, que sus lados son una prolongación del otro, (o bien que se encuentra formado por una misma recta) este ángulo mide 180° . Dividamos dicho ángulo en 180 partes iguales cada una de esas partes es lo que llamaremos ángulo.

k) Dos ángulos son iguales cuando puede colocarse uno sobre el otro y coinciden los lados y vértices de ambos. Y se escribirá $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$.

l) Dos ángulos son opuestos por el vértice cuando los lados de uno son las prolongaciones de los lados del otro.

Afirmación: Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Esto se puede ver fácilmente en la fig 1.5 ya que en este se observa que $\alpha' + \beta = \alpha + \beta = 180^\circ$, de donde se puede concluir que los opuestos son iguales.

m) Cuando se suman dos ángulos y se obtiene un ángulo llano decimos que los ángulos sumados son suplementarios. (fig.1.6)

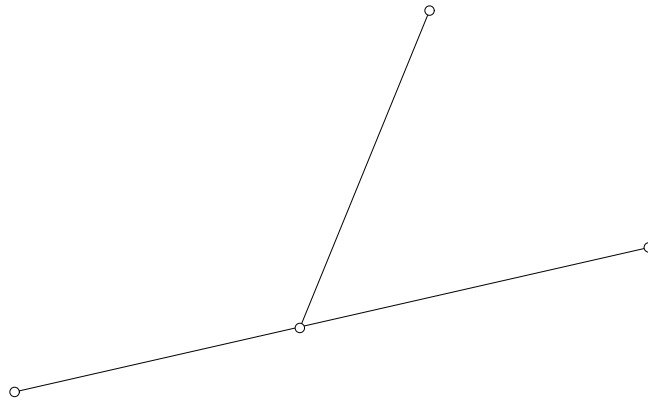


fig 1.6 Angulos suplementarios.

n) Si en un ángulo $\angle AOD$ se tienen segmentos de recta que determinan otros ángulos dentro de el, por ejemplo $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$, diremos que el ángulo inicial es la suma de los otros ángulos. En el ejemplo $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD$. (fig.1.7)

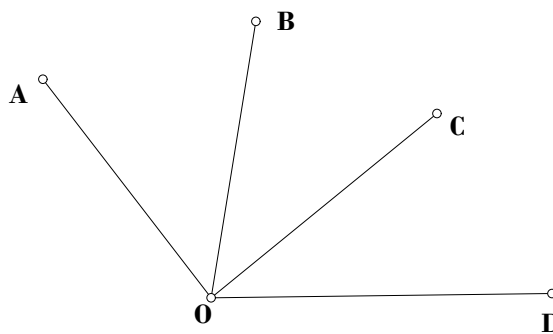


fig 1.7 $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD$

- o) Diremos que dos rectas son perpendiculares si se intersecan de tal manera que los ángulos formados son iguales; llamaremos a cada uno de estos ángulo recto, y medirá 90°
- p) Un ángulo agudo es menor que un recto y un obtuso es mayor que un recto.
- q) Dos rectas se llaman perpendiculares si al cortarse forman ángulos rectos.
- r) Si dos o más rectas son paralelas, toda perpendicular a una de ellas es perpendicular a las otras. (fig 1.8)

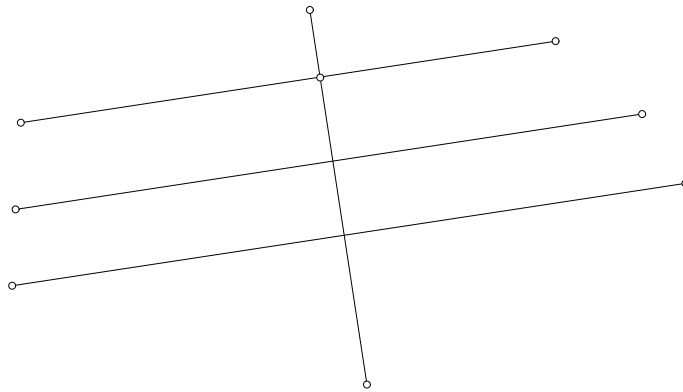


Fig 1.8 Si dos o más rectas son paralelas, toda perpendicular a una de ellas es perpendicular a las otras

Al ser cortadas dos rectas paralelas por una secante se forman ángulos, esto se representa en la fig.1.9, en donde de acuerdo a la figura llamaremos:

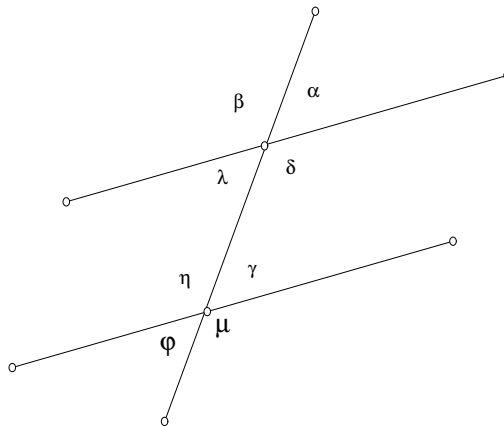


fig 1.9 Angulos formados por dos paralelas y una secante.

·) *Internos*: γ , δ , λ y η .

..) *Externos*: α , β , μ y φ .

Tomados por pares

...) *Alternos alternos internos*: Ángulos no adyacentes situados en distinto lado de la secante, en la figura γ y λ , δ y η .

....) *Alternos alternos externos*: Ángulos no adyacentes situados en distinto lado de la secante, en la figura α y φ , β y μ .

—) *Correspondientes*: Ángulos no adyacentes situados en el mismo lado de la secante y en lados correspondientes de las paralelas, en la figura α y γ , δ y μ , β y η , λ y φ .

–) *Conjugados internos*: Ángulos internos situados del mismo lado de la secante, en la figura γ y δ , η y λ .

–) *Conjugados externos*: Ángulos externos situados del mismo lado de la secante, en la figura β y φ , α y μ .

Es sencillo observar en la figura que de estos ocho ángulos cuatro son agudos e iguales entre si, y los otros cuatro son obtusos y tambien iguales entre si, es sencillo deducir

entonces la sig. proposición:

Proposición 1.1.1: *Si dos paralelas son cortadas por una secante*

- a) Los ángulos alternos internos son iguales.*
- b) Los ángulos alternos externos son iguales.*
- c) Los ángulos correspondientes son iguales.*
- d) Los ángulos conjugados internos son suplementarios.*
- e) Los ángulos conjugados externos son suplementarios.*

Definición: *Un Polígono de n lados es una configuración que consta de n puntos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$ llamados vértices, entre los cuales no hay 3 consecutivos que sean colineales, y los n segmentos $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$ llamados lados tales que solo se intersectan en los vértices.*

Un polígono divide al plano en dos regiones una de las cuales esta acotada por los segmentos y que llamaremos interior del polígono, y otra no acotada que llamaremos exterior. Llamamos área a la superficie contenida en el interior del polígono.

Por cada vértice del polígono se forman ángulos uno de los cuales está dentro del polígono ese es llamado ángulo interior y los adyacentes son llamados ángulos exteriores. (fig.1.10)

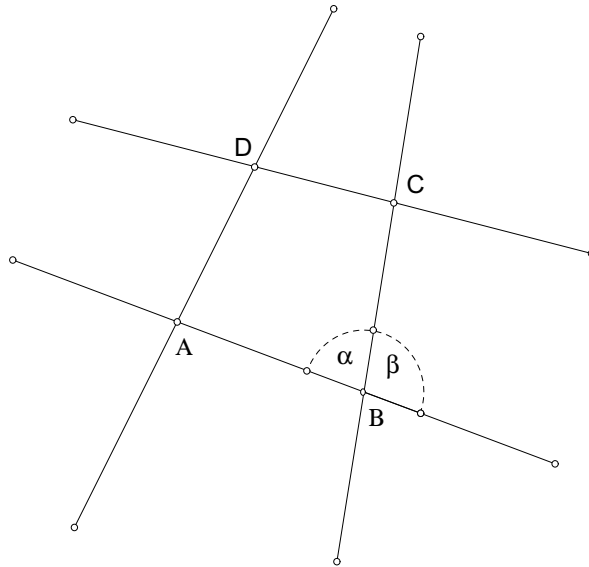


fig. 1.10 En el polígono ABCD observamos un ángulo interior y el exterior adyacente a él.

El polígono más simple en cuanto al número de lados y vértices, es llamado triángulo, y tiene tres lados y tres vértices.

a) *Los polígonos de cuatro lados son llamados cuadriláteros, entre los cuales destacan los rectángulos, que poseen sus cuatro ángulos rectos, y los cuadrados, que además de tener sus cuatro ángulos rectos tienen sus cuatro lados iguales.*

b) *Los paralelogramos son polígonos que tienen cuatro lados paralelos dos a dos, y que no necesariamente tienen lados y ángulos iguales.*

c) *En general los polígonos de lados y ángulos iguales son llamados polígonos regulares, y el resto son polígonos irregulares.*

Notemos que si trazamos un segmento de línea que una a dos vértices cualesquiera de un polígono, para este segmento hay alguna de estas posibilidades; puede ser un lado del polígono, puede estar totalmente contenido en él, o bien puede ser que el segmento completo o una de sus partes esté fuera del polígono. (fig. 1.11)

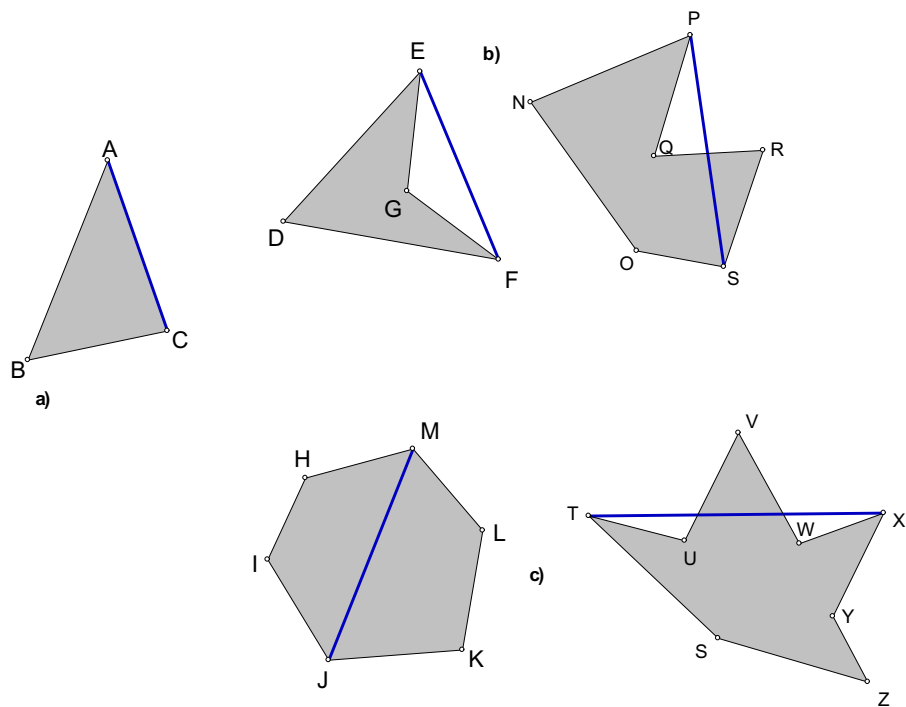


fig. 1.11. Al unir dos vértices de un polígono existen tres opciones; a) que sea un segmento del polígono, b) que el segmento completo o una de sus partes este fuera del polígono o c) que el segmento completo una de sus partes este totalmente en el interior del polígono.

d) Llamaremos *polígono convexo* a aquel cuyo segmento que une cualquier par de sus vértices está siempre contenido en el polígono o bien es uno de sus lados.

e) Un vértice de un polígono cualquiera es llamado *vértice saliente* si es posible trazar una recta en el plano que separe dicho vértice de todos los demás.

f) Si un vértice de un polígono cualquiera es tal que no es posible trazar una recta que lo separe totalmente de los otros vértices, entonces este vértice es llamado *vértice entrante*. (fig.1.12)

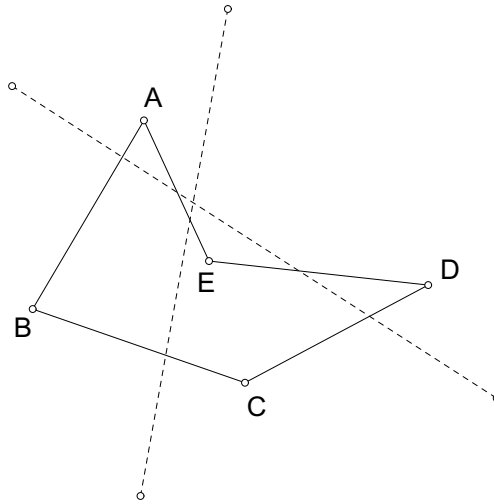


fig. 1.12. En el polígono el vértice E es un vértice entrante ya que no se puede trazar una recta que lo separe de los demás vértices

g) Los polígonos que tienen vértices salientes y entrantes son llamados polígonos estrellados. En la fig. 1.12 vemos un polígono estrellado.

Observemos la *figura 1.13* Puede ser entendida como un solo polígono o como la unión de dos o mas; figuras como esta serán consideradas como un solo polígono sin que esto afecte los resultados que se presentan en este trabajo.

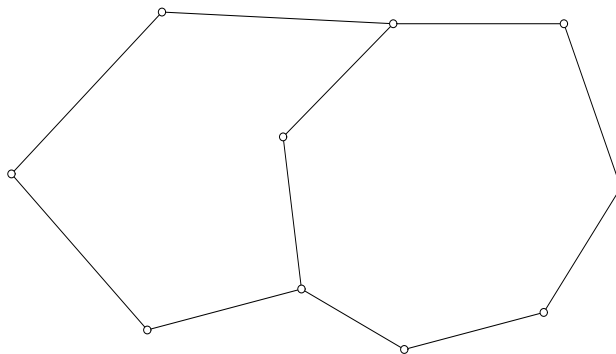


fig.1.13. Polígono formado por la union de dos polígonos

Algunos teoremas y resultados que usaremos serán los siguientes:

Teorema 1.1.1:

- a) Los ángulos internos de un triángulo suman 180° .
- b) Los ángulos internos de un cuadrilátero suman 360° .

Demostración:

a) Consideremos un triángulo con vértices A, B y C sean α, β y γ sus ángulos, tracemos por B una recta paralela a AC y prolonguemos el segmento AB , hemos obtenido los ángulos δ y η para los cuales se satisface que $\beta + \delta + \eta = 180^\circ$, pero $\alpha = \delta$ por ser correspondientes, y $\gamma = \eta$ por ser alternos internos. Por tanto $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. (fig.1.14)

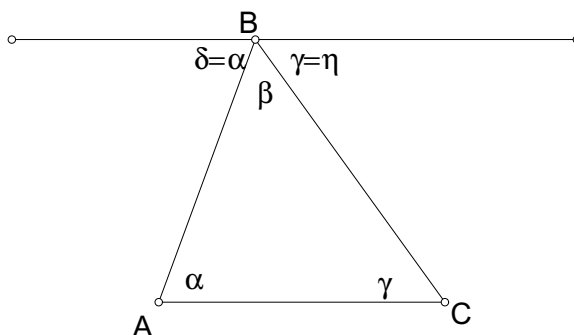


fig 1.14. Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°

b) Consideremos un cuadrilátero con vértices A, B, C y D , sean α, β, γ y δ sus ángulos. Tracemos la recta BD , esta divide al cuadrilátero en dos triángulos T_1 y T_2 con ángulos $\alpha, \beta_1, \delta_1$ y $\beta_2, \gamma, \delta_2$ respectivamente, para los cuales se tiene que: $\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180^\circ$ y $\beta_2 + \gamma + \delta_2 = 180^\circ$, entonces; $\alpha + \beta_1 + \delta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_2 = 360^\circ$ pero además $\beta = \beta_1 + \beta_2$ y $\delta = \delta_1 + \delta_2$, de donde se concluye que: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$. (fig. 1.15) ■

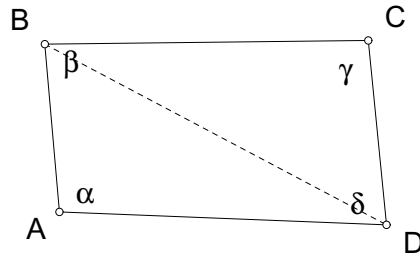


fig. 1.15. Los ángulos internos de un cuadrilátero suman 360°

Es sencillo observar que si se unen dos vértices no consecutivos de un cuadrilátero cualquiera, obtenemos una disección, en dos triángulos para dicho cuadrilátero, algo análogo se puede verificar para un polígono cualquiera, es decir, se puede verificar que un polígono puede siempre disecarse en triángulos. Para verificar revisaremos los siguientes resultados:

Teorema 1.1.2: *Un polígono cualquiera tiene al menos dos vértices salientes.*

Demostración:

Consideremos P un polígono cualquiera llamemos V_1, V_2, \dots, V_n a sus vértices, recorriendo estos en orden en sentido contrario a las manecillas del reloj. (fig. 1.16)

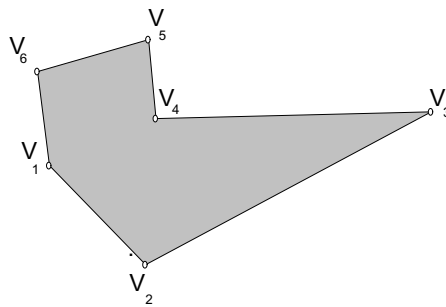


Fig. 1.16 Polígono P con vértices que se recorren en sentido contrario a las manecillas del reloj

Tracemos una recta s del plano distinta de cualquier recta V_iV_j y tal que intersecte a

todas las rectas V_iV_j , llamemos A_{ij} a dichas intersecciones. (fig 1.17)

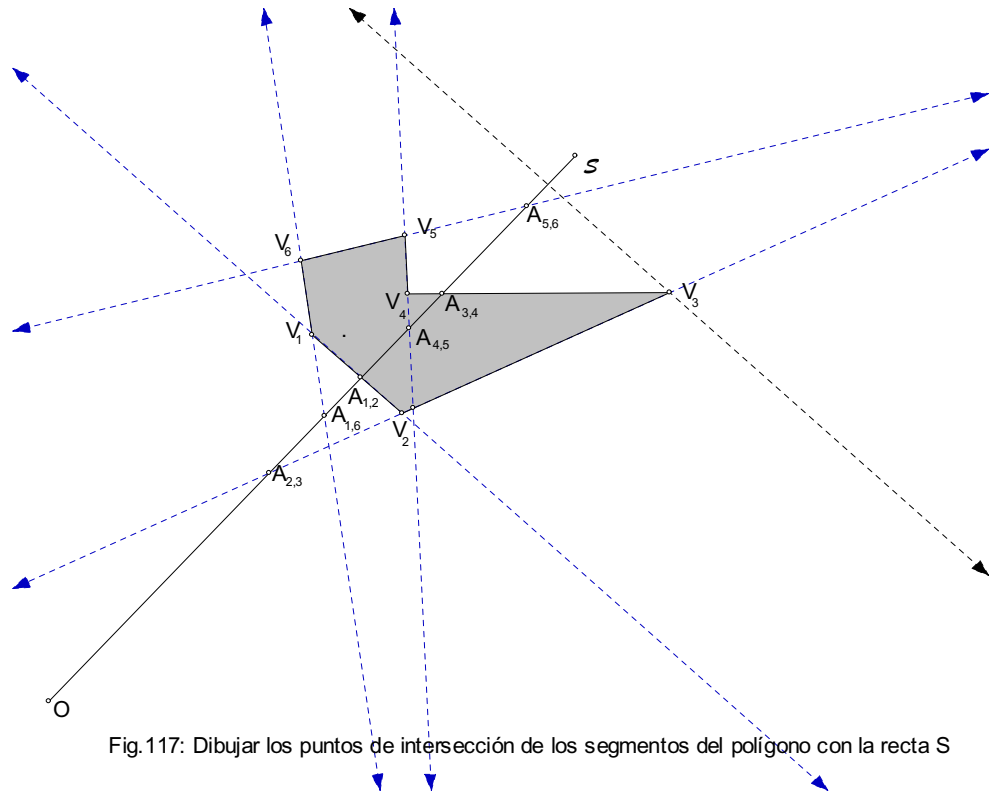


Fig.117: Dibujar los puntos de intersección de los segmentos del polígono con la recta S

Tracemos las rectas perpendiculares a s desde cada uno de los vértices V_k llamando B_K a los puntos de intersección de dichas rectas; elijamos ahora un punto O , sobre la recta s distinto de cualquier punto A_{ij} y tal que todos los puntos B_k y A_{ij} se encuentren en la misma dirección desde O . (fig1.18)

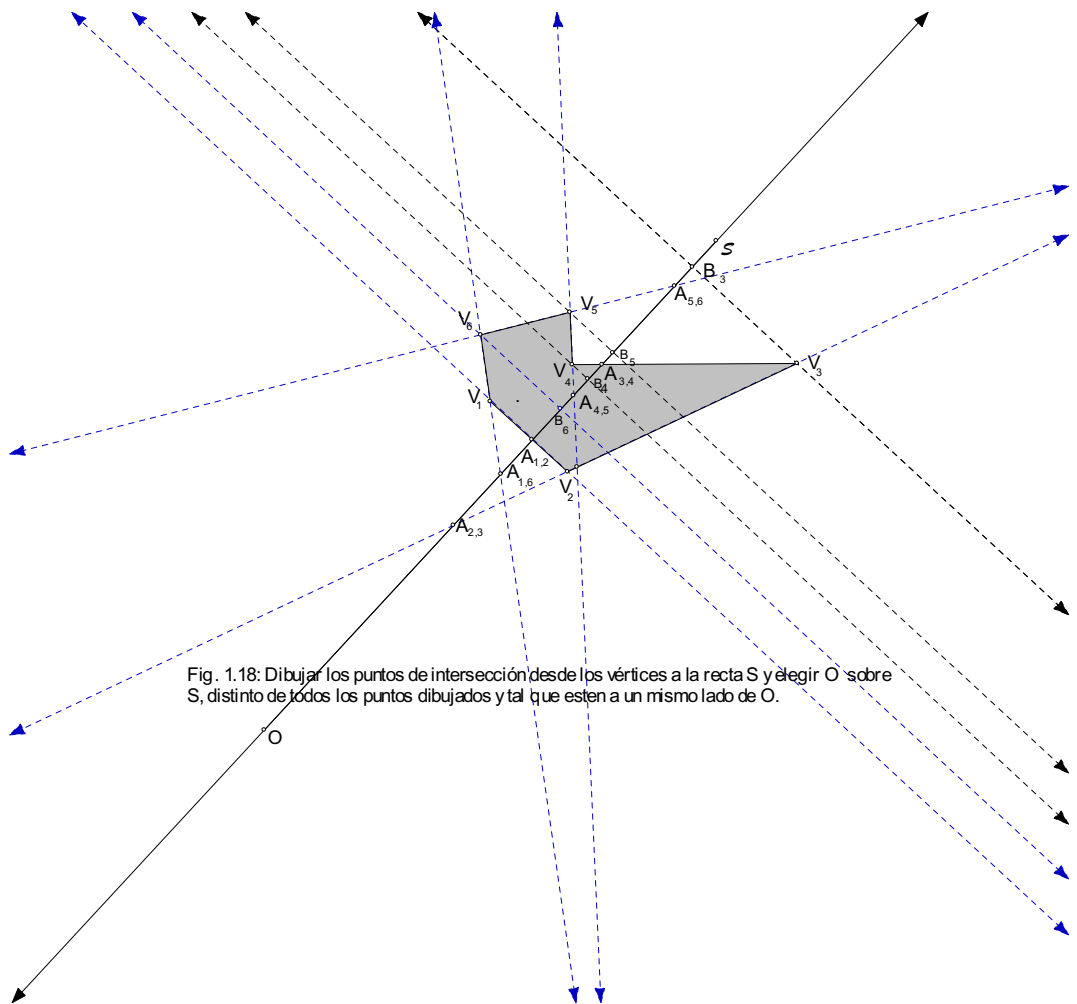


Fig. 1.18: Dibujar los puntos de intersección desde los vértices a la recta S y elegir O sobre S , distinto de todos los puntos dibujados y tal que estén a un mismo lado de O .

Desde O trazamos todas las rectas OV_k , estas rectas son todas distintas y se puede observar que dos de ellas determinan un ángulo en el cual se hallan todas las demás, supongamos que estas rectas son OV_m y OV_n entonces los vértices V_m y V_n son vértices salientes del polígono P . Esto último se puede observar si consideramos un punto P sobre el segmento $V_mV_{m'}$ (siendo $V_{m'}$ el vértice tal que el ángulo $V_mOV_{m'}$ es el más pequeño posible, manteniendo fija la semirecta V_mO) al construir la recta OP esta separa al vértice V_m de los demás. De manera similar se construye un punto Q para el cual se verifique que V_n también es vértice saliente.

Observemos que en esta construcción los vértices salientes del polígono se localizan en cada uno de los lados determinados por la recta s .

En la *fig.1.19* los vértices salientes son V_3 y V_6 ; aquí se observa que el ángulo V_3OV_2 es el más pequeño posible comparando con los otros vértices, análogamente el ángulo V_6OV_1 .

■

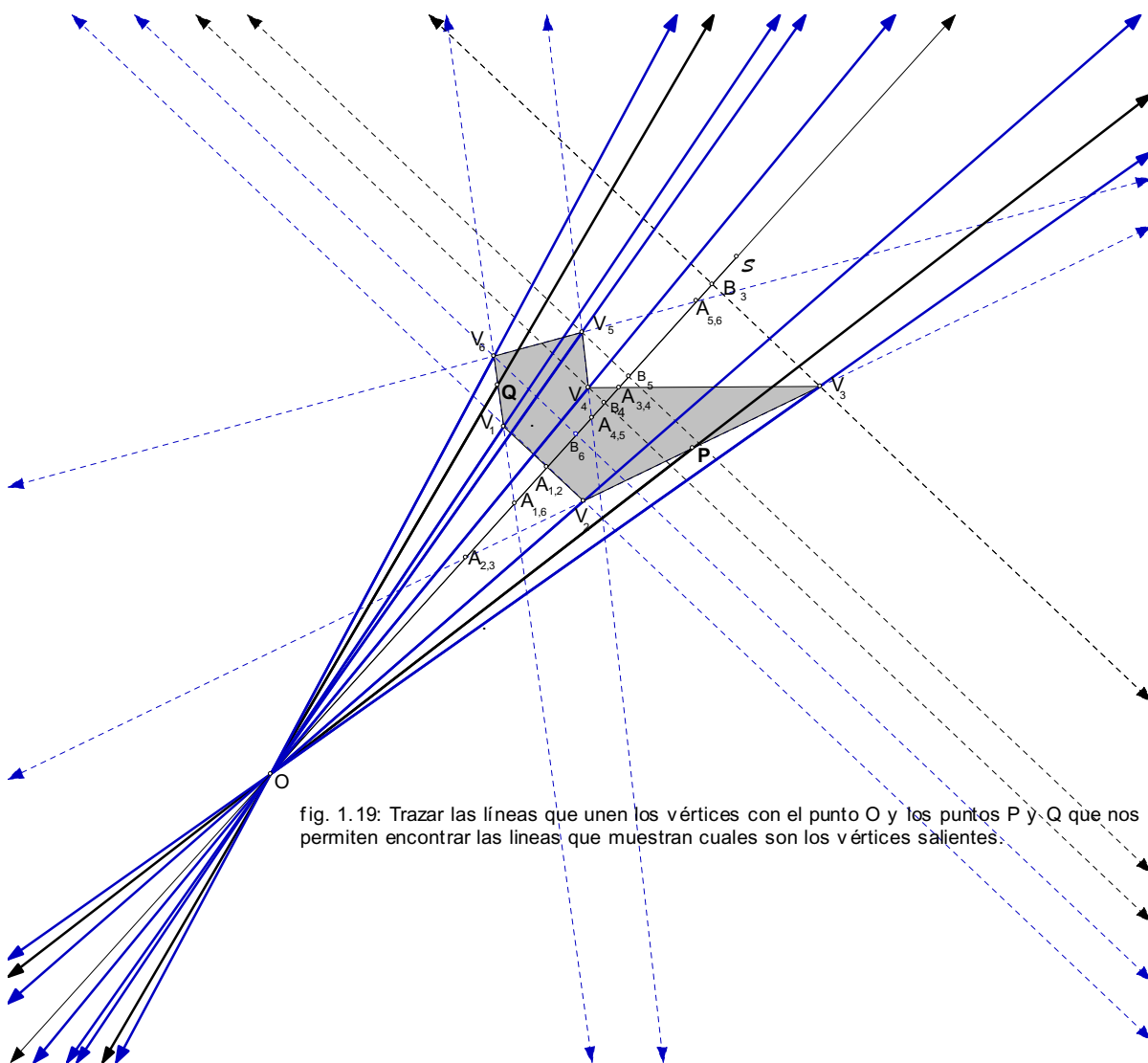


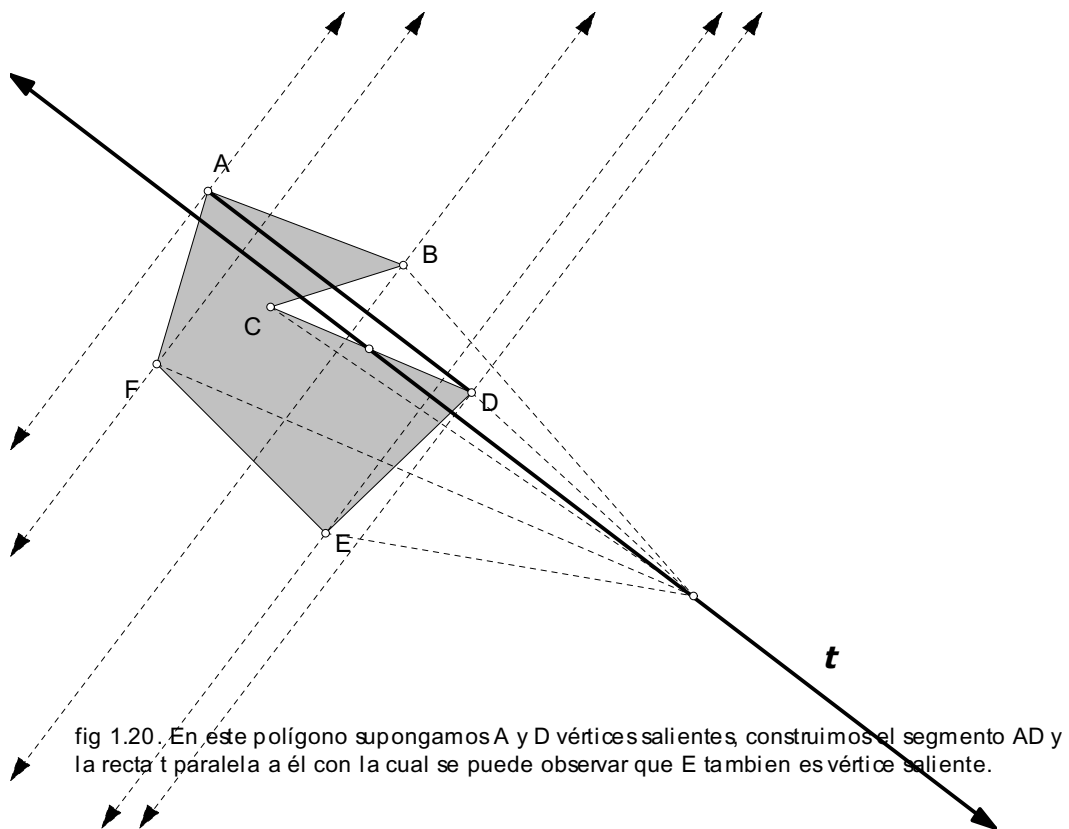
fig. 1.19: Trazar las líneas que unen los vértices con el punto O y los puntos P y Q que nos permiten encontrar las líneas que muestran cuales son los vértices salientes.

Teorema 1.1.3: *Todo polígono tiene al menos tres vértices salientes.*

Demostración:

Consideremos P un polígono cualquiera, sabemos que existen dos vértices salientes, sean V_m y V_n dichos vértices, hay vértices de P al menos a un lado de la recta V_mV_n , llamemos a este lado izquierdo; tracemos una recta t paralela a V_mV_n en su lado izquierdo, tal que no coincida con ninguna recta V_iV_j y que haya vértices de P a la izquierda de t Considerando izquierdo el mismo lado que en el segmento V_mV_n .

Se puede ahora utilizar la recta t en lugar de la recta s para hacer una construcción análoga a la anterior, con la cual se verifica que hay vértices salientes a ambos lados de t , en particular a la izquierda, pero, por construcción un vértice de lado izquierdo es distinto de V_m y V_n y no es colineal con ellos, con lo cual el teorema queda demostrado. ■ (fig. 1.20)



Ahora podemos demostrar el teorema siguiente:

Teorema 1.1.4: *Un polígono de n lados puede dividirse en $n - 2$ triángulos ajenos cuyos vértices esten todos en los del polígono.*

Demostración:

Sabemos que n es un número natural, por tanto es posible utilizar el método de inducción.

- Para $n = 3$ el resultado se verifica muy fácilmente, sin necesidad de dividir.
- Supongamos que el teorema se verifica para todo polígono de menos de n lados. Sea entonces un polígono P de k lados con vértices V_1, V_2, \dots, V_n . Sabemos que alguno de estos es un vértice saliente de P , sea V_i dicho vértice, tracemos entonces la recta $V_{i-1}V_{i+1}$, existen dos posibilidades, que todos los vértices esten fuera del triángulo $V_{i-1}V_iV_{i+1}$ o que al menos un vértice este dentro o sobre este triángulo.

Para el primer caso (fig. 1.21) tenemos que $V_{i-1}V_{i+1}$ ha disecado al polígono P en un triángulo y un polígono Q con $k - 1$ lados, dado que el teorema se verifica para este polígono Q , sabemos que se puede disecar Q en $(k - 1) - 2$ triángulos, cuyos vértices están todos en los vértices de Q . Tenemos entonces que P se puede disecar en $(k - 1) - 2 + 1$ triángulos es decir en $k - 2$ triángulos.

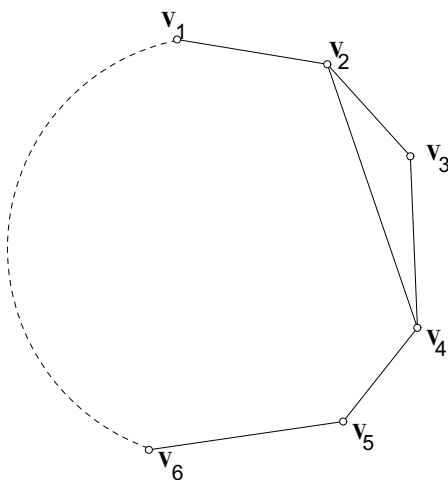


fig. 1.21. En este polígono V_3 es vértice saliente y el segmento V_2V_4 divide al polígono en un triángulo y un polígono de $K-1$ lados que se puede disecar en triángulos.

Para el segundo caso (fig.1.22), unamos el vértice V_i con cada uno de los vértices que se encuentren dentro del triángulo $V_{i-1}V_iV_{i+1}$ sea V_iV_j el segmento más próximo a V_iV_{i+1} , tenemos que V_iV_j disecciona al polígono P en dos polígonos Q y R , con lados q y r , donde $q + r = k + 2$, y todos los vértices de Q y R son vértices de P . Dado que q y r son menores que k , sabemos que los polígonos Q y R se pueden disecar en $q - 2$ y $r - 2$ triángulos respectivamente, dichos triángulos con vértices en los de P ; así tenemos que se puede disecar P en $(q - 2) + (r - 2)$ triángulos, esto es $(q + r) - 4 = (k + 2) - 4 = k - 2$ triángulos, todos ellos con vértices en los de P . ■

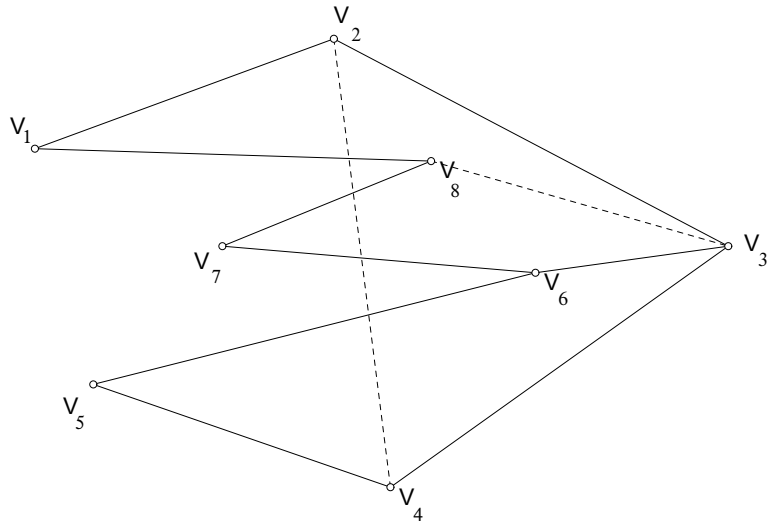


fig. 1.22. En este polígono V_3 es vértice saliente y el segmento V_2V_6 divide al polígono en 2 polígonos de 4 y 6 lados que se pueden cortar en 2 y 4 triángulos respectivamente.

El resultado anterior nos muestra que efectivamente es posible disecar un polígono cualquiera en un número finito de triángulos, este hecho se usará en el siguiente capítulo en la demostración del teorema 2.3.1.

Ahora bien, utilizando lo anterior podemos demostrar el siguiente resultado.

Corolario 1.1.1: *La suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es*

$$(n - 2)180^\circ.$$

Demostración:

Consideremos P un polígono cualquiera, por el teorema 1.1.4 sabemos que se puede disecar en $n - 2$ triángulos, todos los cuales tienen sus vértices en los vértices de P ; según el teorema 1.1.1, para cada uno de esos triángulos la suma de sus ángulos internos es igual a 180° , y cada uno de los ángulos de esos triángulos o bien es un ángulo de P o forma parte de uno de ellos; en caso de formar parte de uno de los ángulos de P , se

tiene que este, junto con otros ángulos de los triángulos en los cuales P se disecciona, forman sumados un ángulo de P . Entonces la suma de los ángulos internos del polígono P es la suma de los ángulos internos de todos los $n - 2$ triángulos en que se disecciona P , es decir $(n - 2)180^\circ$. ■

Hemos visto que todo polígono se puede diseccionar en triángulos y que este hecho se puede utilizar para demostrar algunas cosas referentes a polígonos: Hablemos ahora de algunos resultados referentes a triángulos, que serán usados en las demostraciones del capítulo siguiente.

Iniciemos con lo siguiente:

a) Diremos que dos triángulos son congruentes siempre que tengan iguales magnitudes en sus ángulos internos y en los lados correspondientes a esos ángulos.

En otras palabras dos triángulos son congruentes si puede llevarse uno en el otro con algún movimiento en el plano.

b) Dos triángulos que tienen las mismas magnitudes en sus ángulos internos, y cuyos lados correspondientes a esos ángulos guardan la misma proporción son llamados semejantes.

Nos referimos a que sus lados guarden la misma proporción, cuando al comparar dos lados correspondientes, el lado más pequeño cabe en el grande; el mismo número de veces, que en otro par de lados correspondientes, el lado pequeño cabe en el grande.

Utilizaremos el símbolo \cong para la congruencia y el símbolo \approx para la semejanza. De acuerdo con eso si vemos la *fig.1.23*, observaremos que el triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF , mientras que el mismo triángulo ABC es semejante con el triángulo LMN ; escribiremos esto así: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ y $\triangle ABC \approx \triangle LMN$. Y para denotar la igualdad entre las proporciones de $\triangle ABC$ y $\triangle LMN$ escribiremos $\frac{AB}{LN} = \frac{BC}{MN} = \frac{CA}{NL}$, o bien $\frac{LN}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{NL}{CA}$.

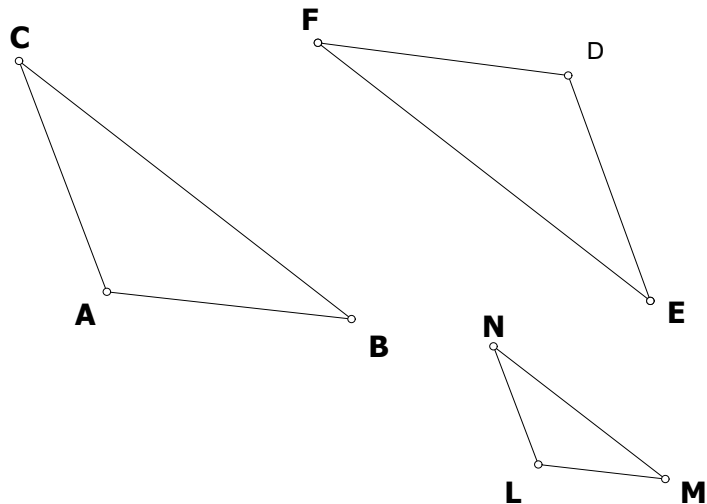


fig. 1.23. Triángulos congruentes y semejantes . El triángulo DEF es congruente al ABC y el LMN es semejante al mismo.

De acuerdo con esto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.1.5:

a) *Si un triángulo tiene dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales a los elementos correspondientes del otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes. (LAL)*

b) *Si dos triángulos tienen dos ángulos correspondientes iguales y estos ángulos son adyacentes a un lado correspondiente también igual, entonces los triángulos son congruentes. (ALA)*

c) *Si dos triángulos tienen sus tres lados iguales entonces son congruentes. (LLL)*

Demostración:

Sean $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ dos triángulos cualesquiera.

a) Supongamos que $AB = DE$ y $BC = EF$ y $\angle ABC = \angle DEF$, entonces podemos colocar uno sobre el otro de tal manera que coincidan los vértices B y E , y dada la igualdad

de los ángulos y los segmentos tendremos también que los puntos A y C coincidirán también con D y F , entonces se verifica la igualdad de los ángulos y el segmento faltantes, con lo cual los triángulos son congruentes.

b) Supongamos que $\angle CAB = \angle FDE$, $\angle ABC = \angle DEF$ y $AB = DE$, entonces se pueden colocar uno sobre el otro de tal manera que coincidan los puntos A y B con los puntos D y E respectivamente, y por la igualdad de los ángulos sucederá también que coincidirán los puntos C y F con lo cual se verifica la congruencia de los triángulos.

c) supongamos que $AB = DE$, $BC = EF$ y $CA = FD$, entonces podemos colocarlos uno sobre el otro de tal suerte que los vértices coincidan, es evidente entonces que sus ángulos son iguales, por lo tanto los triángulos son congruentes. ■

Para demostrar que dos triángulos son congruentes se puede utilizar cualquiera de los incisos anteriores.

Se llama congruencia directa si puede superponerse uno sobre el otro sin que sea necesario invertir uno de ellos, y se llama congruencia inversa si sólo pueden superponerse al invertir uno de los triángulos.

Similarmente se tienen tres criterios para demostrar la semejanza entre triángulos, sin embargo, antes de enunciarlos habrá que considerar lo siguiente:

Primero conviene tener una noción de commensurabilidad entre segmentos; es decir ¿cuándo se dice que dos segmentos son commensurables?. El uso proviene de la traducción de *Los Elementos de Euclides* en que se consideran segmentos commensurables no sólo como la posibilidad de comparación, sino la existencia de un factor común que pueda ser utilizado para "medir.^a los segmentos en cuestión; de esta manera consideremos la definición como sigue:

Definición: Dos segmentos a y b , son llamados commensurables si hay un tercer segmento c , que puede ser usado una cantidad entera de veces para llenar al segmento a , y también con un número entero distinto llenar al segmento b .

Proposición 1.1.1: En toda proporción si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{PQ}{P'Q'}$ entonces $\frac{AB+A'B'}{A'B'} = \frac{PQ+P'Q'}{P'Q'}$.

Demostración:

Supongamos que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{PQ}{P'Q'}$, entonces: $\frac{AB}{A'B'} + 1 = \frac{PQ}{P'Q'} + 1$, de donde:
 $\frac{AB+A'B'}{A'B'} = \frac{PQ+P'Q'}{P'Q'}$. ■

Proposición 1.1.2: Toda recta paralela a uno de los tres lados de un triángulo divide a los dos otros lados en segmentos proporcionales.

Demostración:

Consideremos el triángulo con vértices A , B y C . Tracemos una recta paralela a AC , sean D y E los puntos en que esta recta corta a BA y a BC respectivamente. Existen dos posibilidades; que BD y DA sean commensurables o que no lo sean.

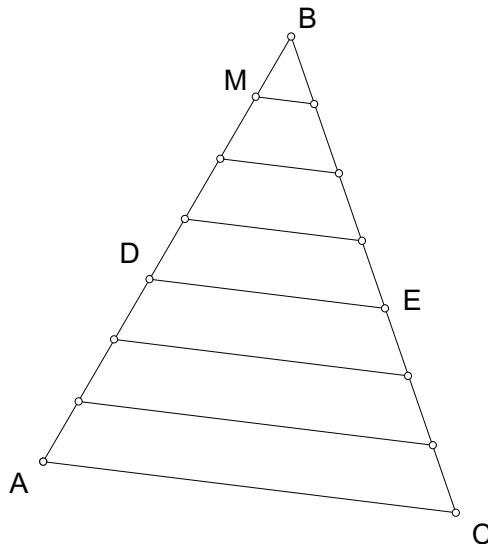


fig 1.24. Toda paralela a uno de los dos lados de un triángulo divide a esta en segmentos proporcionales.

a) Si BD y DA son commensurables. Supongamos que el segmento MB es la medida común de BD y DA , y que está contenido m veces en DA y n veces en BD . Entonces $\frac{DA}{BD} = \frac{m}{n}$. Dividamos BD y DA en esas m y n partes y por los puntos de división tracemos paralelas AC , estas paralelas cortaran a BE y EC en m y n partes respectivamente; entonces $\frac{DA}{BD} = \frac{m}{n} = \frac{EC}{BE}$. fig 1.24

b) Si BD y DA son inconmensurables. Dividamos BD en un número cualquiera de partes iguales y tomemos en DA tantas partes de estas como sea posible, puesto que son inconmensurables DA contiene cierto número de esas partes hasta un punto G y quedará un residuo GA menor que cualquiera de esas partes, Tracemos GH paralela a AC , tenemos que BD es commensurable con DG entonces $\frac{DG}{BD} = \frac{EH}{BE}$ por el caso anterior. Aumentemos el número de partes en que se divide BD , esto hara a GA más pequeño y haciendo este proceso sucesivamente se puede lograr que GA sea menor que cualquier cantidad dada, entonces tenemos GA tiende a cero y el segmento HC tambien tiende a cero; por lo tanto DG tiende a DA y EH tiende a EC así, $\frac{DG}{BD}$ tiende a $\frac{DA}{BD}$ y $\frac{EH}{BE}$ tiende a $\frac{EC}{BE}$ con lo cual teorema queda demostrado. ■ *fig 1.25*

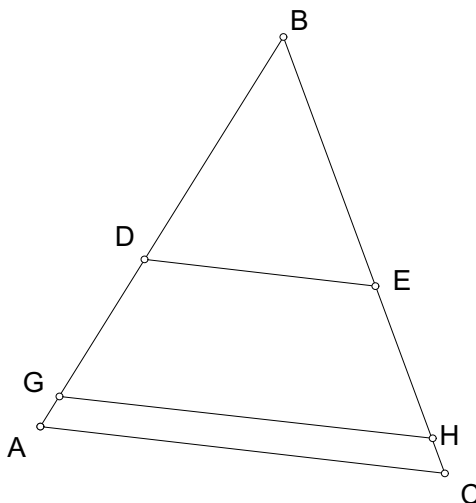


fig 1.25. Si BD y DA son inconmensurables se puede hacer un proceso límite con los puntos G y H hasta ver que los segmentos son proporcionales.

Teorema 1.1.6: *Dados dos triángulos cualesquiera, son semejantes si:*

- a) *Tienen dos ángulos iguales. (ALA)*
- b) *Si tienen dos lados proporcionales y el ángulo entre ellos igual.*

(LAL)

c) Si tienen sus tres lados proporcionales. (LLL)

Demostración:

Sean $\triangle ABC$ y $\triangle LMN$ los triángulos en cuestión, para demostrar la semejanza debemos ver que los ángulos correspondientes son iguales y que los lados correspondientes son proporcionales, es decir que $\frac{BA}{ML} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{LN}$.

a) Supongamos que $\angle ABC = \angle LMN$ y $\angle BCA = \angle MNL$, sabemos que $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$ y $\angle LMN + \angle MNL + \angle NLM = 180^\circ$ entonces $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle LMN + \angle MNL + \angle NLM$ de donde dada la igualdad entre ángulos se deduce que $\angle CAB = \angle NLM$ entonces pueden colocarse los triángulos uno sobre el otro de tal manera que coincidan en un vértice, sean los vértices coincidentes A y L , entonces se tiene que el vértice N está sobre AC y el vértice M sobre AB , de donde dada la igualdad de los ángulos se deduce que MN es paralela a BC con lo cual se tienen las proporciones deseadas.

b) Supongamos que $\frac{BA}{ML} = \frac{BC}{MN}$ y que $\angle ABC = \angle LMN$, coloquemos el triángulo LMN sobre el triángulo ABC de tal manera que coincidan en su ángulo igual (vértices B y M), entonces los puntos L y N están sobre los lados BA y BC respectivamente, de esta manera como $\frac{BA}{ML} = \frac{BC}{MN}$ entonces $\frac{BA}{BL} = \frac{BC}{BN}$ usando la proposición 1.1.1 $\frac{BA-BL}{BL} = \frac{BC-BN}{BN}$ esto es $\frac{LA}{BL} = \frac{NC}{BN}$ esto querría decir que los segmentos AC y LN son paralelos, entonces los ángulos de los triángulos son iguales, por lo tanto los triángulos son semejantes.

c) Supongamos que $\frac{BA}{ML} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{LN}$ En el segmento BA localicemos un punto L' tal que $BL' = ML$ y sobre BC localicemos el punto N' tal que $BN' = MN$, entonces como $\frac{BA}{ML} = \frac{BC}{MN}$, $BL' = ML$ y $BN' = MN$ Entonces $\frac{BA}{BL'} = \frac{BC}{BN'}$, los triángulos ABC y $L'BN'$ tienen un ángulo en común y dada la proporción son semejantes; Ahora bien por la semejanza $\frac{BA}{BL'} = \frac{AC}{L'N'}$ y $\frac{BA}{ML} = \frac{AC}{LN}$ y dado que $BL' = ML$ entonces $\frac{AC}{L'N'} = \frac{AC}{LN}$ por tanto $L'N' = LN$, esto quiere decir que $\triangle LMN = \triangle L'BN''$ por lo tanto $\triangle ABC \sim \triangle LMN$. ■

1.2. Transformaciones.

Iniciaremos esta sección introduciendo algunos conceptos importantes basados en nociones básicas de conjuntos.

Consideremos dos conjuntos A y B .

El *producto cartesiano* $A \times B$ se define como el conjunto de todos los *pares ordenados* (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.

Notemos que la noción de *par ordenado* indica que $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ si y solo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

Esto nos permite observar claramente que $A \times B \neq B \times A$.

Se puede definir el *producto cartesiano* de un conjunto A en si mismo $A \times A$, como el conjunto cuyos elementos son (a, b) $a, b \in A$ y también el llamado *diagonal* de $A \times A$ que se puede denotar como $\Delta(A) \subset A \times A$

Definición:

Dados dos conjuntos A y B una relación de A en B es un subconjunto R de $A \times B$. Decimos que $a \in A$ se relaciona con $b \in B$ siempre y cuando $(a, b) \in R$.

Se puede definir también una relación de A en si mismo la cual resulta ser también un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$.

Ejemplo:

1. Consideremos el conjunto de los números enteros, definamos la relación R de \mathbb{Z} en \mathbb{Z} dada por; $(a, b) \in R$ si $a - b$ es un entero par.

2. Sea T el conjunto de todos los triángulos en el plano, Dos triángulos t_1 y t_2 se relacionan si son semejantes.

Definición:

Una relación R de A en si mismo se dice que es una relación de equivalencia si para $a, b, c \in A$ se cumple que:

a) $(a, a) \in R$.

b) $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.

c) $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

La primera de estas propiedades es llamada *reflexividad*, la segunda *Simetría*, y, la tercera *transitividad*.

De acuerdo con esto para demostrar que una relación es de equivalencia habrá que demostrar que es; *reflexiva, simétrica y transitiva*.

Ejemplo:

Consideremos P el conjunto de todos los puntos en el plano. Definamos la relación Γ , como sigue: $(p_1, p_2) \in \Gamma$ si la distancia de p_1 al origen es la misma que la distancia de p_2 al origen.

Afirmación: Γ de $P \times P$. es una relación de equivalencia.

Demostración:

Reflexiva: p_1 se relaciona consigo mismo puesto que si la distancia de p_1 al origen es d , es evidente que $d = d$ por lo tanto $(p_1, p_1) \in \Gamma$.

Simétrica: Supongamos que $(p_1, p_2) \in \Gamma$ es decir; si la distancia de p_1 al origen es d , entonces la distancia de p_2 al origen también es d , lo anterior hace evidente que $(p_2, p_1) \in \Gamma$.

Transitiva: Consideremos p_1, p_2, p_3 puntos en el plano tales que $(p_1, p_2) \in \Gamma$ y $(p_2, p_3) \in \Gamma$, de $(p_1, p_2) \in \Gamma$ vemos que si la distancia de p_1 al origen es d_1 entonces la distancia de p_2 al origen es también d_1 , así mismo de $(p_2, p_3) \in \Gamma$ si d_2 es la distancia de p_3 al origen entonces la distancia de p_2 al origen también es d_2 , con lo anterior deducimos que $d_1 = d_2$. Esto permite concluir que $(p_1, p_3) \in \Gamma$. ■

Definición:

Si S y T son conjuntos no vacíos, entonces una función de S en T es un subconjunto F de $S \times T$ tal que para toda $s \in S$ hay un solo $t \in T$, tal que $(s, t) \in F$.

La definición anterior permite dar precisión al concepto de función, aunque de manera sencilla baste pensar en función como una regla que permite asociar $s \in S$ con $t \in T$, siendo la regla aquella que verifica el hecho de que $(s, t) \in F$. La notación $f(s) = t$ significa que $(s, t) \in F$.

Ejemplo:

Consideremos el conjunto P de todos los puntos en el plano, sean O un punto fijo y k un número real cualquiera, definimos h de P en si mismo ($h \subset P \times P$), de la siguiente manera: $(P_1, P_2) \in h$ si $OP_2 = kOP_1$ y O, P_1, P_2 determinan un segmento en el que O es uno de los extremos.

Afirmación: h es una función de P en P . $h : P \longrightarrow P$.

Demostración:

Consideremos un punto P cualquiera, tracemos el segmento OP y prolonguemos este hasta encontrar el punto Q tal que $OQ = kOP$. Entonces $h(P) = Q$ y es evidente que Q es único.

La función h define un alargamiento del plano siempre que $k \geq 1$ y una contracción en el caso que $0 < k < 1$ $k \neq 0$, y si $k \leq -1$ tendremos un cambio de dirección en el segmento.

Si f es una función de A en B , $f : A \longrightarrow B$, y $x \in A$, la notación $f(x)$, indica que el valor $f(x)$ es la imagen de x bajo la función f . El conjunto A es llamado el dominio de la función. La imagen de una función es el conjunto de las imágenes de los elementos de A , es decir:

$$\text{Im } f = \{b \in B \mid \exists a \in A \quad f(a) = b\}$$

De la definición de función se sigue que si dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ son iguales entonces $A = C$, y $f(x) = g(x)$ para todo x elemento de A . ■

Definición:

Consideremos S un conjunto cualquiera, definimos $i : S \longrightarrow S$ de tal manera que $i(s) = s \quad \forall s \in S$, la función i así definida se llama función identidad.

Definición: Dadas dos funciones; $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$

a) La composición $g \circ f : A \longrightarrow C$ es una función definida por: $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

b) La función inversa de f , es una función $f^{-1} : B \longrightarrow A$, para la cual $f \circ f^{-1} :$

$A \longrightarrow A$ y $f \circ f^{-1} = i$.

Ejemplo:

En el ejemplo anterior $h^{-1} : P \longrightarrow P$ con $(Q, P) \in h^{-1}$ si $OQ = \frac{1}{K}OP$.

Definición: Una función $f : A \longrightarrow B$ es

- a) *inyectiva* si $f(a_1) \neq f(a_2)$ siempre que $a_1 \neq a_2$.
- b) *suprayectiva* si $\forall b \in B \exists a \in A$ tal que $f(a) = b$. ($B = \text{Im } f$)
- c) *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva a la vez.

Teorema 1.2.1: Si f, g, h son funciones biyectivas entonces:

- a) $f \circ g$ es biyectiva.
- b) La función i es biyectiva.
- c) f^{-1} es biyectiva.

Definición : Una transformación t es una función biyectiva de un conjunto en si mismo.

En particular el conjunto arriba mencionado puede ser el plano Euclideo, que debido a la naturaleza de este trabajo será de particular interés y lo consideremos siempre que hablemos de una transformación, a menos que se especifique lo contrario.

El enunciado del teorema anterior hace obvio el siguiente:

Corolario 1.2.1:

- a) *La composición de transformaciones es una transformación.*
- b) *La identidad es una transformación.*
- c) *La inversa de una transformación es una transformación.*

Más adelante identificaremos la inversa de algunas transformaciones.

1.3. Isometrías

Las isometrías son transformaciones del plano en si mismo que conservan la magnitud de los segmentos de las figuras en el; es decir dada una transformación del plano en si

mismo esta es isometría si sucede que cualquier polígono en el plano es enviado a otro polígono en el plano tal que las magnitudes de sus lados correspondientes son iguales.

De la conservación de las magnitudes de sus lados se sigue que también conservan las magnitudes de los ángulos.

En esta sección definiremos y analizaremos las isometrías en un plano e identificaremos algunos resultados importantes que utilizaremos más adelante.

Veamos ahora una definición formal de isometría:

Definición: Una transformación M es una isometría si y solo si $PQ = P'Q'$ para todo par de puntos P y Q siendo $M(P) = P'$ y $M(Q) = Q'$. Es decir una isometría es una transformación que conserva distancias.

Lema 1.3.1: Toda isometría envía líneas rectas en líneas rectas.

Demostración:

Sea l una línea recta cualquiera, y sean A y B dos puntos en esta recta, sean A' y B' las imágenes de estos puntos bajo la isometría T . Consideremos C otro punto sobre la recta l , como A, B y C son colineales sabemos que $AB + BC = AC$; supongamos que sea C' la imagen de C bajo T , dado que T es isometría tendríamos que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y $AC = A'C'$; entonces $A'B' + B'C' = A'C'$ esto querría decir que A', B' y C' son colineales por lo tanto T envió una línea recta en otra línea recta. ■

Lema 1.3.2: La composición de isometrías es isometría.

Demostración:

Sean T y T' isometrías y sean P, Q y R polígonos tales que $T(P) = Q$ y $T'(Q) = R$ dado que son isometrías sabemos que los lados correspondientes entre P y Q son iguales en magnitud y análogamente para los lados correspondientes entre Q y R , por tanto por transitividad los lados correspondientes en R a P son también iguales en magnitud y como $T'(T(P)) = T'(Q) = R$ se concluye que la composición es isometría. ■

Decimos que una isometría preserva orientación si al recorrerse los vértices de un polígono en sentido de las manecillas del reloj, los vértices correspondientes del polígono al cual es enviado bajo la isometría también se recorren en ese sentido. Si los vértices

del polígono correspondiente se recorren en sentido contrario decimos que se invierte la orientación.

Definición: Una Isometría es directa si preserva la orientación y es inversa si invierte la orientación.

Ahora definiremos algunos movimientos en el plano con el fin de poderlos identificar posteriormente como isometrías.

Definición:

1) *Traslación:* Es una transformación T tal que dados los segmentos AB y CD si $T(A) = C$ y $T(B) = D$ entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo. fig 1.26

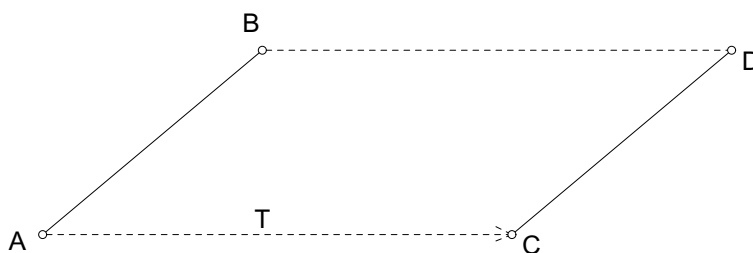


fig. 1.26: Si T es una traslación entonces $ABCD$ es un paralelogramo.

La traslación es llamada también traslación paralela al segmento AC .

2) *Rotación:* Es una transformación R para la cual existe un punto A tal que $R(A) = A$ y dados los puntos P y P' y un ángulo α ; y si $R(P) = P'$ entonces $AP = AP'$ y $\angle PAP' = \alpha$. fig 1.27

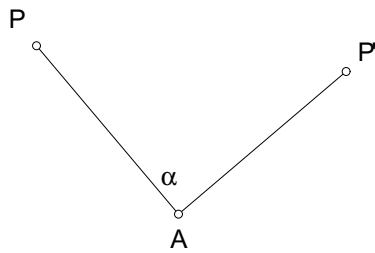


fig.1.27: Una rotación con centro en A y ángulo α .

3) *Reflexión: Es una transformación R para la cual existe una recta m tal que dados dos puntos P y P' si $R(P) = P'$ entonces m es la mediatriz del segmento PP'.* fig1.28

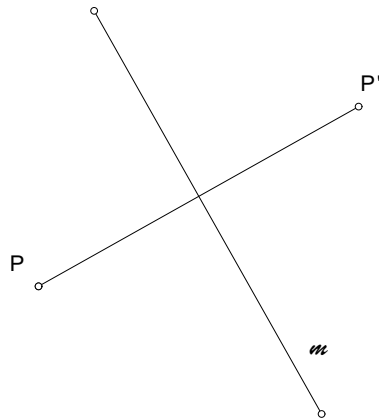


fig. 1.28. una reflexión con respecto de

4) *Deslizamiento: Llamamos deslizamiento a la transformación que se obtiene de la composición de una reflexión seguida de una traslación en la dirección de la recta de reflexión o viceversa.* fig1.29

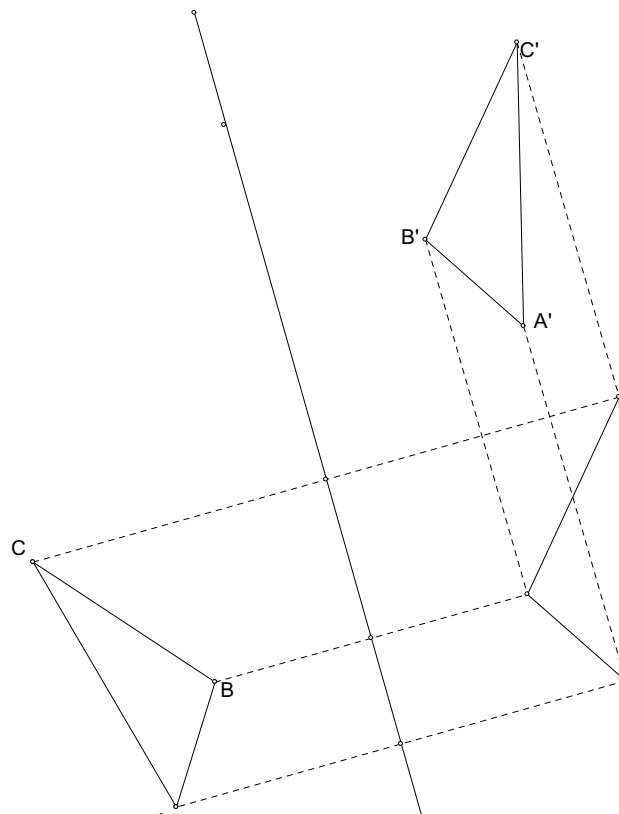


fig. 1.29 : El triángulo A'B'C' es imagen de ABC bajo un deslizamiento

Teorema 1.3.1: *Las traslaciones, Rotaciones, Reflexiones y Deslizamientos son isometrías.*

Demostración:

1) Sea T una traslación y sean los puntos A, B, C y D tales que $T(A) = C$ y $T(B) = D$, entonces sabemos que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo, esto quiere decir que la $AB = CD$, por lo tanto T conserva distancias, es una isometría.

2) Consideremos una rotación R , los puntos A, P, P' y el ángulo α , tales que $R(P) = P'$ y $\angle PAP' = \alpha$, de acuerdo a la definición; consideraremos también dos puntos distintos de los anteriores Q y Q' tales que $R(Q) = Q'$, sabemos que $\angle QAQ' = \alpha$ y que $AP = AP' = AQ = AQ'$, definamos $\beta = \angle QAP'$, entonces en los triángulos $\triangle APQ$ y $\triangle AP'Q'$ tenemos que $\angle Q'AP' = \angle QAP = \alpha + \beta$, y como los lados $AP = AP'$ y $AQ = AQ'$ de

acuerdo al criterio de *L.A.L.* sabemos que son congruentes por lo tanto $PQ = P'Q'$. Con esto se demuestra que es isometría. (*fig.1.30*).

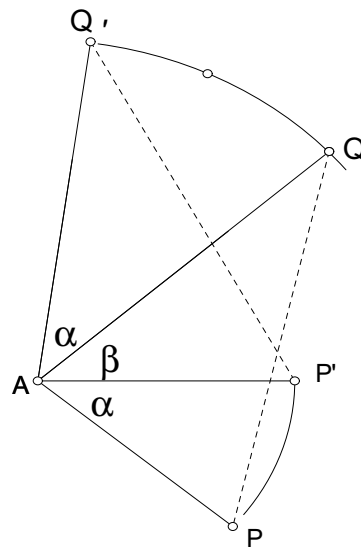


fig 1.30: Una rotación es isometría

3) Sea R una reflexión, sean los puntos P , P' , Q y Q' y una recta m , tales que $R(P) = P'$, $R(Q) = Q'$ y m es la mediatriz de los segmentos PP' y QQ' (*fig1.31*)

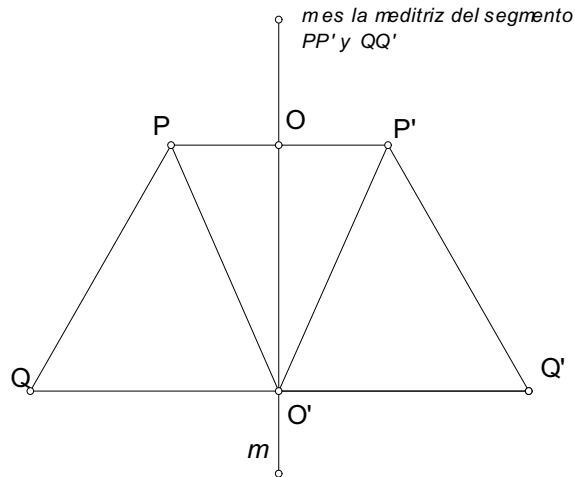


Fig. 1.31 Si T es un deslizamiento entonces es Isometría

Sean O y O' los puntos de intersección de m con los segmentos PP' y QQ' respectivamente. Entonces $\triangle POO' \cong \triangle P'OO'$, ya que $\angle POO' = \angle P'OO' = 90^\circ$, $PO = P'O$ y OO' es común; esto permite ver que $PO' = P'O'$ y además como $\angle PO'O = \angle P'O'O$ y $\angle QO'O = \angle Q'O'O$ se deduce que $\angle PO'Q = \angle P'O'Q'$ Con todo esto $\triangle PQO' \cong \triangle P'Q'O'$ con lo cual se verifica que $PQ = P'Q'$ por tanto se demuestra que es isometría.

4) Sea D un deslizamiento; sabemos que este es una composición entre una traslación y una reflexión. Y como composición de isometrías es isometría tenemos que un deslizamiento es isometría. ■ *fig.1.32*

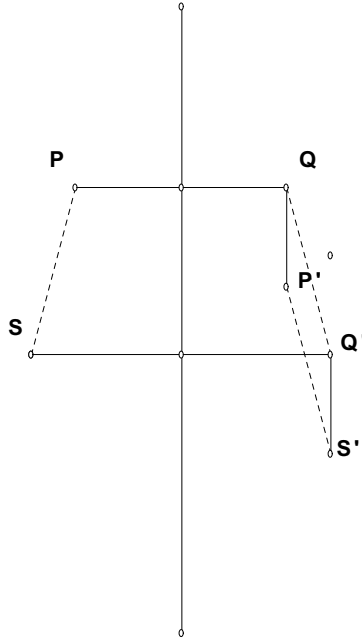


Fig. 1.32. Un deslizamiento es una isometría.
 $D(P)=T(R(P))=P'$ y $D(S)=T(R(S))=S'$ y se observa que $PS=P'S'$

Teorema 1.3.2: *Toda isometría es uno de los siguientes movimientos: traslación, rotación, reflexión o deslizamiento.*

Demostración:

Sea M una isometría, consideremos un triángulo ABC y el triángulo $A'B'C'$ su imagen bajo M . entonces tenemos dos posibilidades:

- a) Que sea una isometría directa (preserve orientación)
- b) Que sea una isometría indirecta (invierte orientación.)

a) Si la isometría es directa y además los lados correspondientes del triángulos son paralelos consideraremos el segmento AA' entonces el movimiento que envía el triángulo ABC en el triángulo $A'B'C'$ es una traslación paralela a este segmento y con la misma magnitud. *fig 1.33*

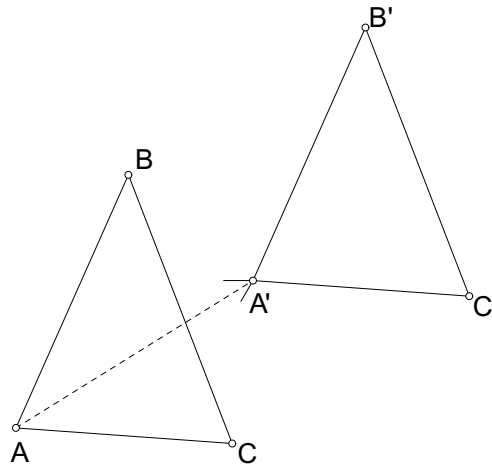


fig 1.33 Una isometría que conserva orientación y paralelismo es una traslación.

Si sus lados correspondientes no son paralelos entonces al menos dos de las rectas AA' , BB' y CC' no son paralelas, Supongamos que AA' y CC' no son paralelas, Construyamos l y m las mediatrices de los segmentos AA' y CC' respectivamente, y sea O el punto de intersección de estas rectas.

Entonces; al ser las rectas mediatrices $OA=OA'$ y $OC=OC'$ y como $AC=A'C'$ por el criterio LLL tenemos que $\triangle ACO \cong \triangle A'C'O$, por lo tanto $\angle AOC = \angle A'OC'$, por lo tanto $\angle AOA' = \angle C'OC = \alpha$,Entonces la isometría que envía ABC en $A'B'C'$ es una rotación con centro en O y ángulo α . *fig 1.34*

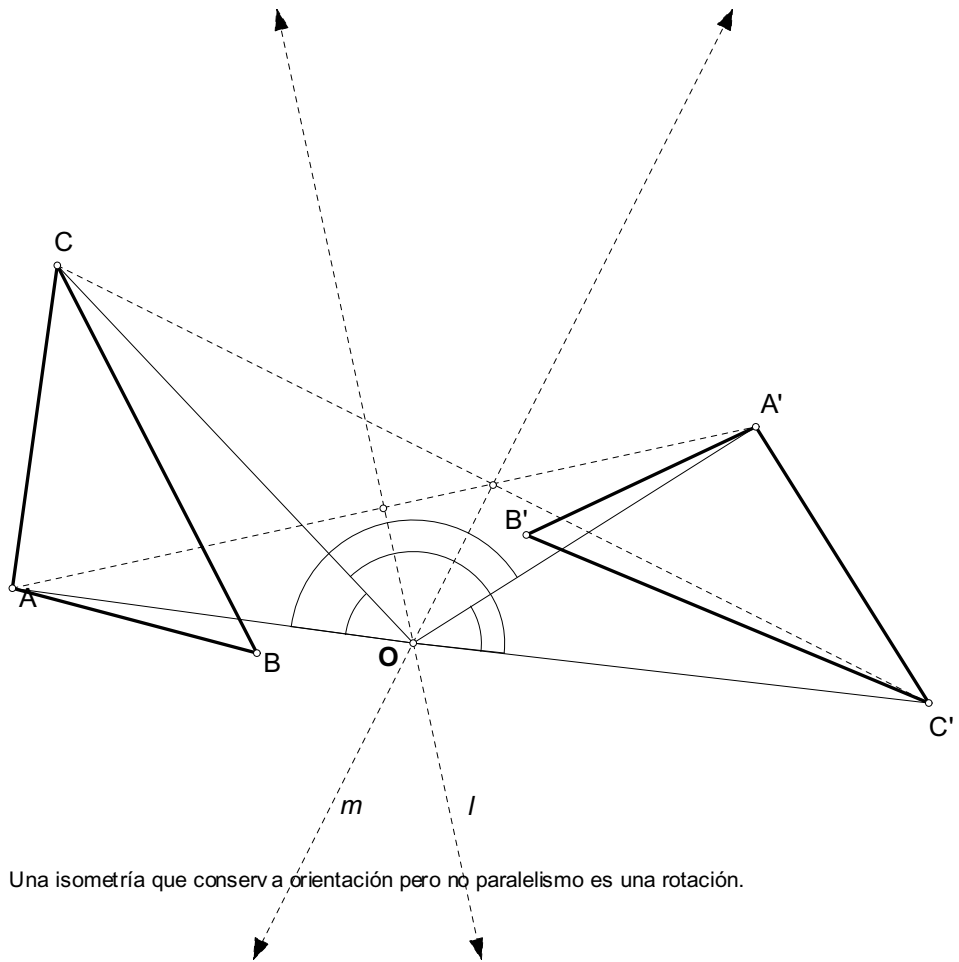


fig. 1,34: Una isometría que conserva orientación pero no paralelismo es una rotación.

b) Si la isometría no conserva orientación, y los segmentos AA' , BB' y CC' son paralelos entonces se trata de una reflexión con eje en la mediatriz de estos segmentos. *fig 1.35*

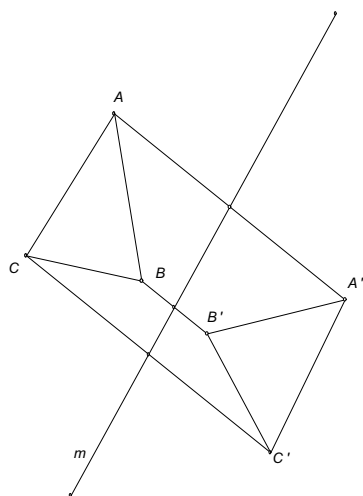


fig.1.35: Una isometría que no conserva orientación y tal que los segmentos AA', BB' y CC' es una reflexión cuyo eje es la mediatriz de dichos segmentos.

Supongamos que al menos un par de estos segmentos no son paralelos; existe entonces, al menos un par de lados de los triángulos ABC y $A'B'C'$ que se intersectan, Supongamos que AC y $A'C'$ son los lados que se intersectan, sea P el punto de intersección, tracemos la bisectriz del ángulo CPC' ; llamemos b a esa recta.

Sea $A''B''C''$ el triángulo que se obtiene al reflejar a ABC con respecto a b , los triángulos $A'B'C'$ y $A''B''C''$ tienen lados correspondientes paralelos debido a que la reflexión se hizo respecto de la bisectriz e iguales debido a que la reflexión se hizo de el triángulo ABC , entonces se puede llevar a el triángulo $A''B''C''$ al $A'B'C'$ mediante una traslación, sin embargo para lograr que la traslación sea paralela a la recta b tracemos rectas paralelas a esta desde C y C' , sean l_1 y l_2 las rectas trazadas, construyamos l una recta perpendicular a ellas; sean K y H los puntos de intersección de l con l_1 y l_2 respectivamente consideremos la mediatriz del segmento KH , llamemos m a esa recta. Por construcción si tomamos m como eje de reflexión obtendremos un triángulo $A'''B'''C'''$ que se puede llevar al triángulo $A'B'C'$ mediante una traslación paralela al segmento $C'''C'$; con lo cual se prueba que la isometría en cuestión es un deslizamiento. ■ fig. 1.36

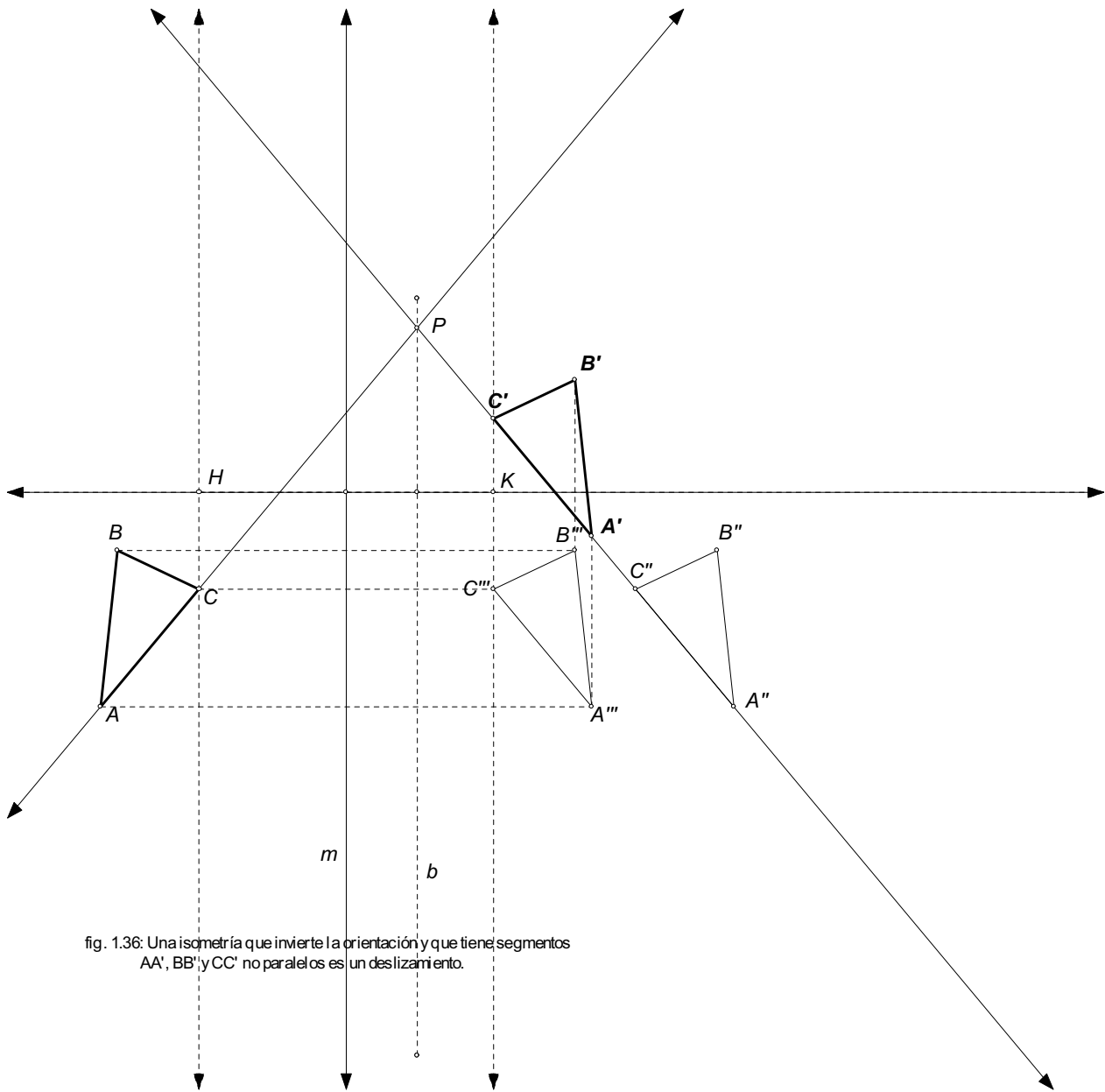


fig. 1.36: Una isometría que invierte la orientación y que tiene segmentos AA' , BB' y CC' no paralelos es un deslizamiento.

1.4. Grupos

El concepto de grupo será muy importante a lo largo de este trabajo, pues algunos de los resultados importantes utilizan este concepto; trataremos principalmente con grupos de movimientos en el plano es decir con grupos de isometría y algunas características de ellos. Empezaremos con una definición importante:

Definición: Sea un conjunto G no vacío una operación binaria $*$ es una función tal que a cada par ordenado de elementos $G \times G$ le asigna un único elemento de G . La imagen del par (a, b) mediante la función se denota por $a * b$ y se denomina también resultado.

Por ejemplo La adición de números naturales es una operación binaria.

Definición: Un grupo (G, \cdot) es un conjunto G con una operación binaria \cdot que satisface:

a) $a \cdot b \in G \quad \forall a, b \in G$

b) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in G$

c) $\exists e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in G$

d) cada elemento $a \in G$ tiene un elemento inverso a^{-1} tal que $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$.

Si sucede que $a \cdot b = b \cdot a$ se dice que el grupo es abeliano.

Veamos un ejemplo:

Consideremos el conjunto de simetrías de un rectángulo en si mismo (los movimientos que dejan fijo al rectángulo en cuestión) este conjunto está constituido por 4 elementos, A saber la identidad, una rotación de 180° con centro en la intersección de las diagonales considerando el ángulo de 180° sobre una de estas y dos reflexiones sobre los ejes del rectángulo. *fig 1.37*

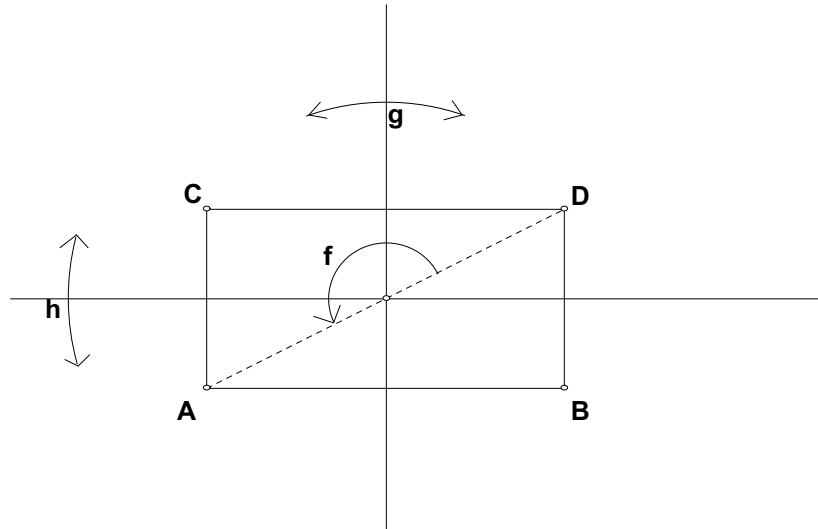


fig. 1.37. Las simetrías de un rectángulo en si mismo.

Podemos expresar las simetrías del rectángulo en si mismas de la siguiente manera: $e = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$ Que indica la correspondencia de los vértices del rectángulo en si mismos, es decir en este caso; $A \rightarrow A, B \rightarrow B, C \rightarrow C$ y $D \rightarrow D$ (se trata de la transformación identidad); así mismo $f = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$ y $h = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}$.

Consideremos la operación composición es fácil ver que: $e \circ g = g = g \circ e$, $e \circ h = h = h \circ e$, $e \circ f = f = f \circ e$, $g \circ h = f = h \circ g$, $f \circ h = g = h \circ f$, $f \circ g = h = g \circ f$, $h \circ h = e$, $g \circ g = e$, $f \circ f = e$, y por último $e \circ e = e$; con todo esto se puede ver que:

a) $a \circ b \in G \forall a, b \in G$

b) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \forall a, b, c \in G$

c) $\exists e \in G$ tal que $a \circ e = e \circ a = a \forall a \in G$

d) cada elemento $a \in G$ tiene un elemento inverso tal que $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$. en este caso la misma función es su propia inversa.

Además se observa también que este grupo es un grupo Abeliano.

Lema 1.4.1: Si G es un grupo y a, b, c son elementos de el entonces:

-) e es único.
-) a^{-1} es único.
-) $(a^{-1})^{-1} = a$
-) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
-) $ab = ac$ o $ba = ca$ implica $b = c$.

Demostración:

Sean a, b, c elementos de un grupo G .

·) Sean e y f dos elementos de G tales que $a \circ e = e \circ a = a$ $a \circ f = f \circ a = a$
 $\forall a \in G$ en particular $f \circ e = e \circ f = f$ y $e \circ f = f \circ e = e$, entonces $f = f \circ e = e$
entonces $f = e$.

··) Supongamos que existe x elemento de G tal que $xa = ax = e$ sabemos que G
contiene también a a^{-1} de aquí $xa = a^{-1}a$; en particular $(xa)x = (a^{-1}a)x$ usando la
propiedad asociativa $x(ax) = a^{-1}(ax)$ entonces $x = a^{-1}$.

···) Sabemos que todo elemento en G tienen un inverso sea x el inverso de a^{-1} entonces:
 $a^{-1}x = e = xa^{-1}$ y también $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$ lo cual quiere decir que $a^{-1}x = a^{-1}a$
entonces $aa^{-1}x = aa^{-1}a$ de donde $x = a$ de esta forma $(a^{-1})^{-1} = x = a$.

····) Sabemos que $(ab)b^{-1}a^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$, esto quiere decir
que $b^{-1}a^{-1}$ es el inverso de ab o bien $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

···) Supongamos que $ab = ac$ entonces $a^{-1}ab = a^{-1}ac$ de donde $eb = ec$ esto implica
 $b = c$, de manera similar para $ba = ca$. ■

Definición: Si (G, \cdot) es un grupo y H es un subconjunto no vacío de G entonces (H, \cdot)
es llamado subgrupo de G si satisface:

- a) $a \cdot b \in H \forall a, b \in H$.
- b) Si $a \in H$ entonces $a^{-1} \in H$.

Teorema 1.4.1: Si (H, \cdot) es un subgrupo de (G, \cdot) entonces (H, \cdot) es también un grupo.

Demostración:

Si (H, \cdot) es un subgrupo de (G, \cdot) sabemos que $a \cdot b \in H \forall a, b \in H$ y que cada elemento

$a \in H$ tiene un elemento inverso $a^{-1} \in H$ tal que $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$. Falta ver que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \forall a, b, c \in H$ y que $\exists e \in H$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a \forall a \in H$, sin embargo si $a, b, c \in H$ entonces $a, b, c \in G$ ya que H es subconjunto de G entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; además cada elemento tienen un inverso y H es cerrado con la operación y como $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$ entonces $e \in H$. *Todo lo cual quiere decir que (H, \cdot) es un grupo. ■*

Capítulo 2

Teorema fundamental de la teoría de disección

2.1. Introducción.

En este capítulo enunciaremos y demostraremos el teorema fundamental de la teoría de disección, o teorema de Bolyai-Gerwien; para tal efecto se enunciarán y demostrarán primero algunas proposiciones y teoremas que harán posible la demostración

Diremos que dos polígonos son equidisecables o congruentes por adición, si puede descomponerse uno de ellos en un número finito de partes tales que puedan reorganizarse para formar al otro.

La figura siguiente nos muestra un ejemplo de polígonos equidisecables:

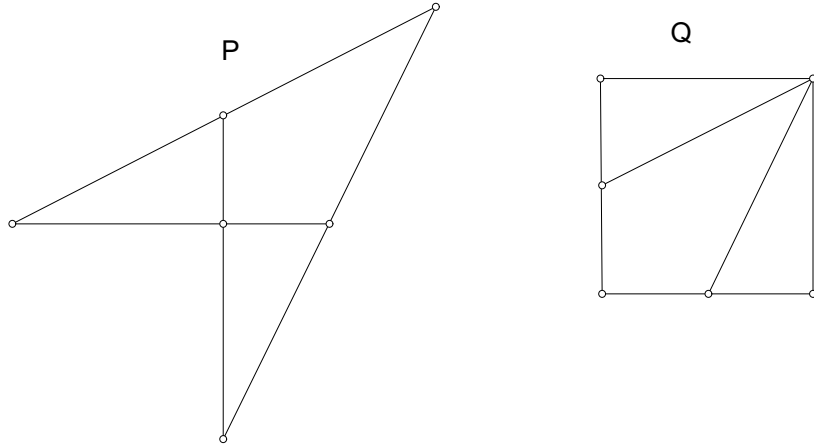


fig.2. 1. bs polígonos P y Q son equidisecables

Si observamos la (fig.2.1) resultará sencillo apreciar que si dos polígonos son congruentes por adición tienen la misma área. El inverso también es cierto, es decir, si dos polígonos tienen la misma área estos son congruentes por adición, este hecho es el que se conoce como *Teorema Fundamental de la Teoría de Diseción*.

2.2. Preliminares

La notación y definiciones que usaremos serán las siguientes:

Sean P y Q polígonos

a) Si P y Q tienen la misma área diremos que P es equivalente con Q , y lo escribiremos $P \sim Q$.

b) Entendemos que dos polígonos son congruentes cuando tienen la misma magnitud de sus lados correspondientes. Si P es congruente con Q escribiremos $P \cong Q$.

De igual manera que en los triángulos diremos que la congruencia entre dos polígonos es directa si conserva el sentido y es inversa si invierte el sentido de los segmentos del polígono.

c) Si P se disecciona en polígonos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ escribiremos $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$.

d) Si $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$ y además $P_1 \cong Q_1$, $P_2 \cong Q_2$, $P_3 \cong Q_3$, ..., $P_n \cong Q_n$ diremos que P es equidisecable o congruente por adición con Q y escribiremos $P \cong Q(+)$.

e) Si Existen R y S polígonos equidisecables ($R \cong S(+)$) tales que $R = P + R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$, $S = Q + S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ y $R_1 \cong S_1$, $R_2 \cong S_2$, $R_3 \cong S_3$, ..., $R_n \cong S_n$ entonces diremos que P y Q son equicomplementables o congruentes por sustracción y escribiremos $P \cong Q(-)$.

La *fig.2.1* nos mostró un ejemplo para la definición del inciso d, la (*fig.2.2*) nos mostrará un ejemplo para la definición del inciso e.

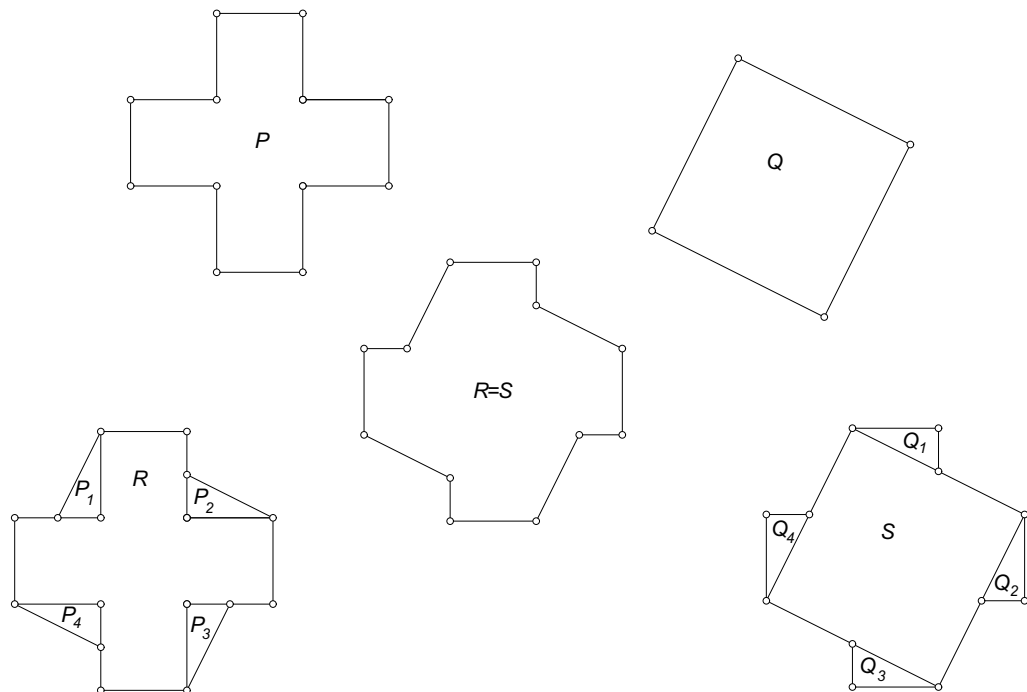


fig.2.2. Considerando $R=S$, la ilustración muestra a R y a S con una disección, que incluye, en el caso de R a P y cuatro triángulos congruentes a los triángulos en que se encuentra dividido S además de Q , así, los polígonos P y Q son equicomplementables.

Las siguientes proposiciones se obtienen directamente de las definiciones anteriores.

Proposición 2.1.1: Sean P y Q polígonos:

- 1) Si $P \cong Q$ entonces $P \cong Q(+)$.
- 2) Si $P \cong Q(+)$ entonces $P \cong Q(-)$.
- 3) Si $P \cong Q$ entonces $P \cong Q(-)$.

Demostración:

1) Sean P y Q polígonos que satisfacen las hipótesis de la proposición, si la congruencia es directa se puede llevar P en Q mediante una rotación, una traslación o una composición de ambas; y si la congruencia es inversa se puede utilizar una reflexión seguida de alguno de los movimientos anteriores, es decir en ambos casos la disección a

efectuar es la que deja ambos polígonos intactos y con esta se verifica que $P \cong Q(+)$ (fig.2.3).

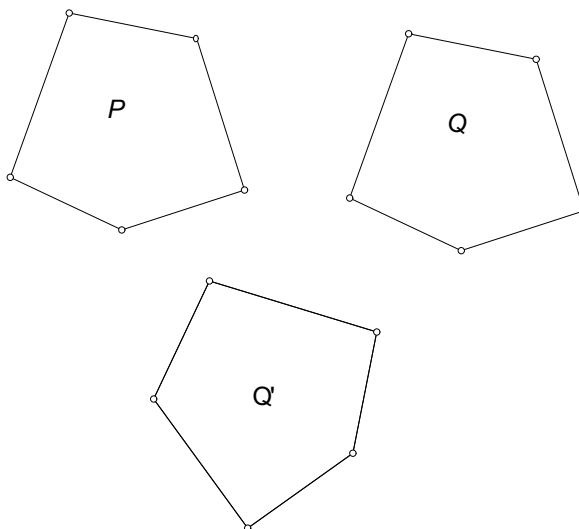


fig.2.3. los polígonos P y Q se obtienen uno del otro mediante una traslación, el polígono Q' se obtiene de P o de Q mediante una reflexión compuesta con una traslación.

2) Sean P y Q polígonos tales que $P \cong Q(+)$, entonces, existen $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ y $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ para los cuales $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$ y $P_1 \cong Q_1, P_2 \cong Q_2, P_3 \cong Q_3, \dots, P_n \cong Q_n$, tomemos $V_1, V_2, V_3, \dots, V_m$ y $U_1, U_2, U_3, \dots, U_m$ polígonos tales que $V_1 \cong U_1, V_2 \cong U_2, V_3 \cong U_3, \dots, V_m \cong U_m$, construyamos ahora $R = P + V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_m$ y $S = Q + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_m$, es decir $R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n + V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_m$ y $S = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_m$ con $P_1 \cong Q_1, P_2 \cong Q_2, P_3 \cong Q_3, \dots, P_n \cong Q_n, V_1 \cong U_1, V_2 \cong U_2, V_3 \cong U_3, \dots, V_m \cong U_m$, con lo cual se tiene que $R \cong S(+)$, por lo tanto $P \cong Q(-)$ (fig.2.4).

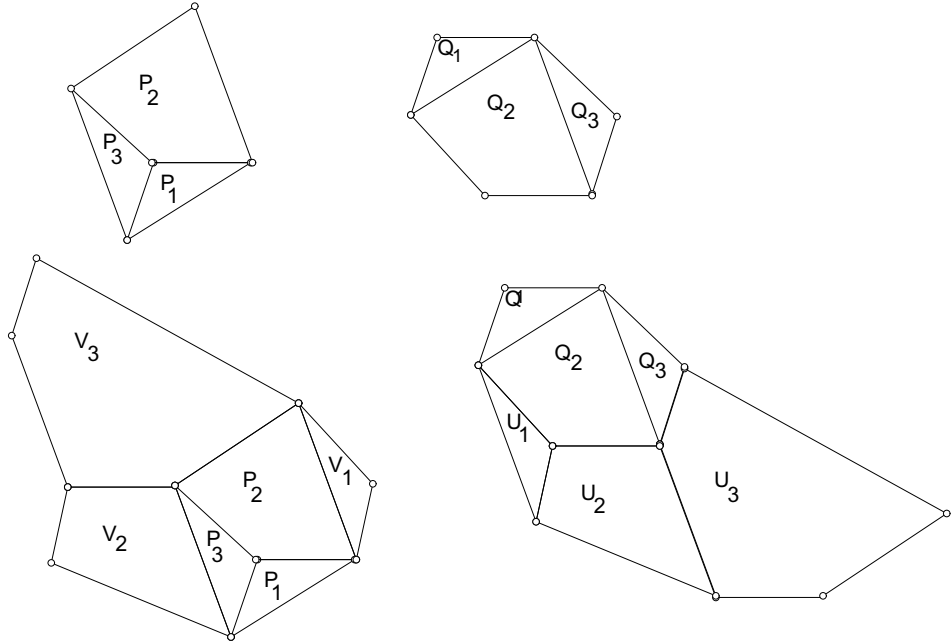


fig.2.4 Si P y Q son congruentes por adición lo son también por sustracción.

3) Sean P y Q polígonos tales que $P \cong Q$, entonces por transitividad de 1 y 2 se tiene que $P \cong Q(-)$. ■

Proposición 2.1.2:

- 1) Ser equidisecable es relación de equivalencia.
- 2) Ser equicomplementable es relación de equivalencia.

Demostración:

1) *Reflexiva.* Dado cualquier polígono P sabemos que este es congruente con sigomismo, tomemos la disección que deja igual a P , para esta se satisface que P es congruente por adición con el mismo, es decir $P \cong P(+)$.

Simétrica. Sean P y Q polígonos tales que $P \cong Q(+)$, entonces, $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$ y $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$ con $P_1 \cong Q_1, P_2 \cong Q_2, P_3 \cong Q_3, \dots, P_n \cong Q_n$, invirtiendo las congruencias tenemos $Q \cong P(+)$.

Transitiva. Sean O , P y Q Polígonos tales que $O \cong P(+)$ y $P \cong Q(+)$, es decir $O = O_1 + O_2 + O_3 + \dots + O_n$ y $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$ con $O_1 \cong P_1$, $O_2 \cong P_2$, $O_3 \cong P_3$, ..., $O_n \cong P_n$ y también $P = P'_1 + P'_2 + P'_3 + \dots + P'_m$ y $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_m$ con $P'_1 \cong Q_1$, $P'_2 \cong Q_2$, $P'_3 \cong Q_3$, ..., $P'_m \cong Q_m$. Ahora si tomamos las disecciones P_n y P'_m de P y las colocamos una sobre la otra respetando la forma de P obtendremos una disección (P_n, P'_m) de P con la cual podemos formar tanto a O como a Q y con la cual se verifica que $O \cong Q(+)$ (fig.2.5).

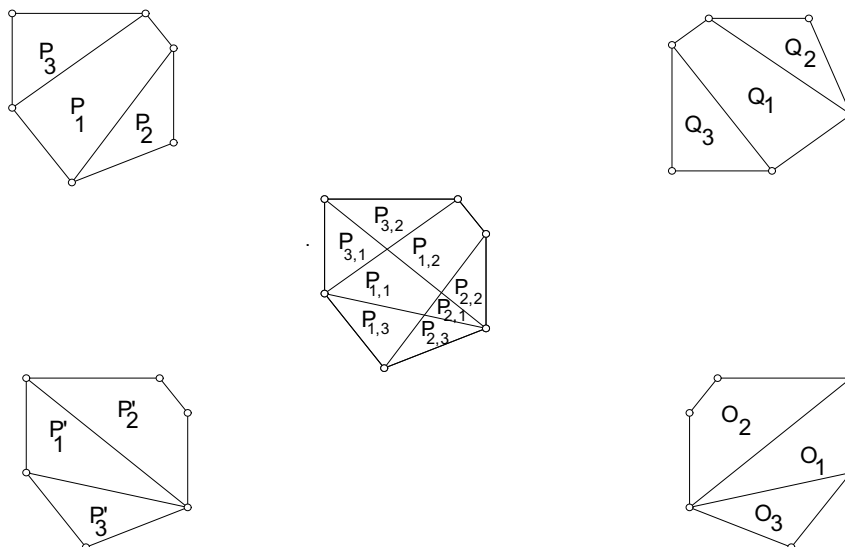


fig.2.5. Sobreposición de P en si mismo para obtener una disección de P util para los polígonos Q y O .

2) *Reflexiva.* Tomemos P un polígono cualquiera y, sea R un polígono tal que P esté en su interior, por la reflexividad anterior sabemos que $R \cong R(+)$, además $R = P + R_1$, con $R_1 = R - P$ (Es posible que R_1 este a su vez formado por varios polígonos los cuales pueden incluso ser ajenos) con esto se satisface que P es equicomplementable con él mismo, es decir $P \cong P(-)$.

Simétrica. Sean P y Q polígonos tales que $P \cong Q(-)$ entonces existen R y S polígonos tales que $R \cong S(+)$ y además $R = P + R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$ y $S = Q + S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$, en donde por la simetría anterior sabemos que $S \cong R(+)$, y entonces se satisface que $Q \cong P(-)$.

Transitiva. Sean O , P y Q polígonos tales que $O \cong P(-)$ y $P \cong Q(-)$, entonces existen R , S , T , y U polígonos tales que $R = P + R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$ y $S = O + S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ con $R \cong S(+)$, $R_1 \cong S_1$, $R_2 \cong S_2$, $R_3 \cong S_3$, ..., $R_n \cong S_n$ y $T = P + T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_m$ y $U = Q + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_m$ con $T \cong U(+)$, $T_1 \cong U_1$, $T_2 \cong U_2$, $T_3 \cong U_3$, ..., $T_m \cong U_m$ (fig.2.6).

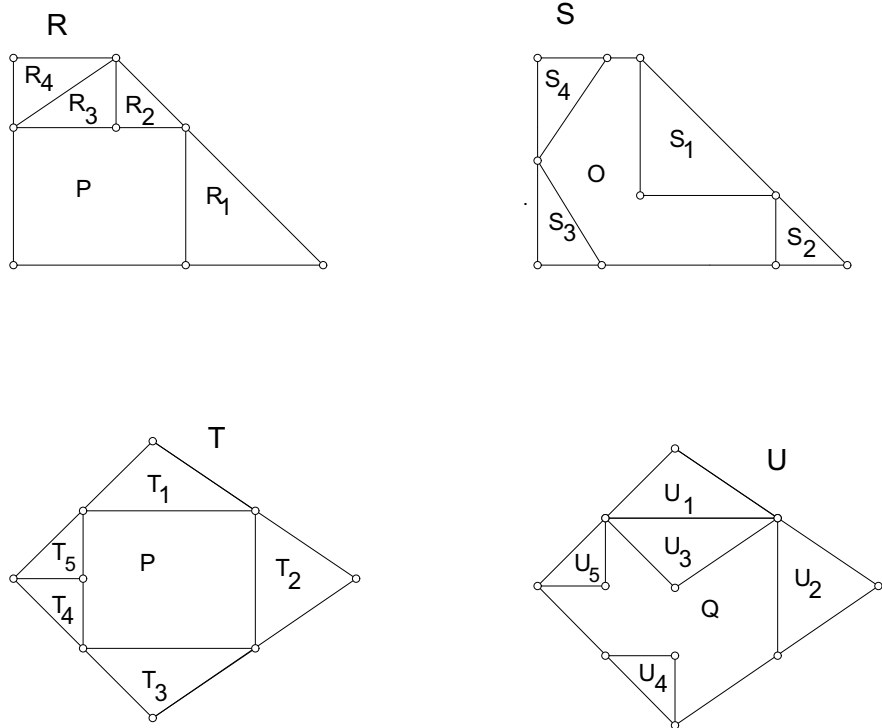


fig.2.6. Polígonos R,S,T y U en los que el polígono P es equicomplementable con los polígonos O y Q, y aparece en la descomposición de R y S.

Superponemos R y T , sea $\Omega = R - T$ y $\Delta = T - R$ (donde Ω y Δ pueden incluso estar formados por polígonos ajenos) entonces obtenemos una disección para lo cuál se verifica lo siguiente $(R + \Delta) \cong (S + \Delta)(+)$, $(S + \Delta) \cong (T + \Omega)(+)$ y $(T + \Omega) \cong (U + \Omega)(+)$, de donde por la transitividad anterior se tiene que $(R + \Delta) \cong (U + \Omega)(+)$ ahora, utilizando las disecciones tanto de S como de T obtendremos una nueva disección para la cual se concluye que $O \cong Q(-)$ (fig.2.7).■

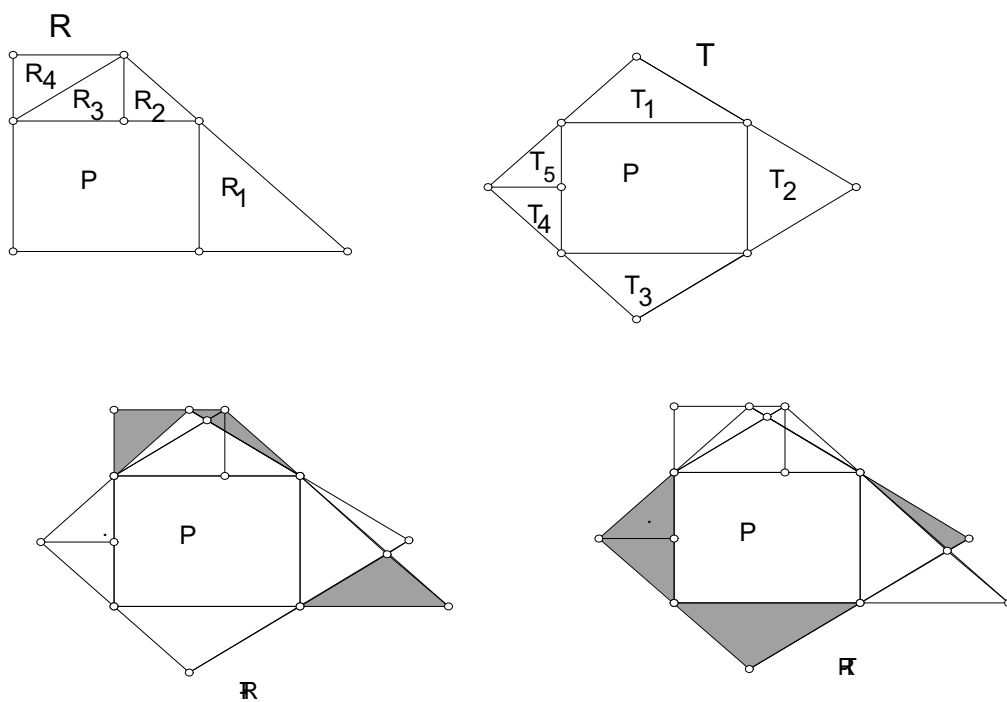


fig.2.7 Superposición de los polígonos R y T donde se obtiene R . Los cuales permiten observar la transitividad de la equicomplementariedad

Proposición 2.1.3: Sean P y Q polígonos, si $P \cong Q$, $P \cong Q(+)$ o $P \cong Q(-)$ entonces $P \sim Q$.

Demostración:

· Si $P \cong Q$, sabemos que se puede llevar uno en el otro mediante una isometría, así, es evidente que tienen la misma área.

· Si $P \cong Q(+)$, existen $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ y $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ tales que $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$ y $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$ con $P_1 \cong Q_1, P_2 \cong Q_2, P_3 \cong Q_3, \dots, P_n \cong Q_n$, entonces $P_1 \sim Q_1, P_2 \sim Q_2, P_3 \sim Q_3, \dots, P_n \sim Q_n$ además $A(P) = A(P_1) + A(P_2) + A(P_3) + \dots + A(P_n)$ y $A(Q) = A(Q_1) + A(Q_2) + A(Q_3) + \dots + A(Q_n)$ entonces $A(P) = A(Q)$ por lo tanto $P \sim Q$.

· Si $P \cong Q(-)$, existen R y S polígonos tales que $R \cong S(+)$ donde $R = P + R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$ y $S = Q + S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ con $R_1 \cong S_1, R_2 \cong S_2, R_3 \cong S_3, \dots, R_n \cong S_n$, entonces $R_1 \sim S_1, R_2 \sim S_2, R_3 \sim S_3, \dots, R_n \sim S_n$ y como $R \cong S(+)$ por lo anterior $R \sim S$ entonces tenemos que $A(R) = A(P) + A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + \dots + A(R_n) = A(Q) + A(S_1) + A(S_2) + A(S_3) + \dots + A(S_n) = A(S)$ de donde se puede ver que $A(P) = A(Q)$ por lo tanto $P \sim Q$ ■.

2.3. Teorema de Pitágoras

En esta sección enunciaremos y demostraremos el teorema de pitágoras; primero utilizando congruencia por adición y posteriormente congruencia por sustracción, ilustrando de esa manera el uso de estos dos conceptos en una demostración.

Esta es una sección importante ya que este teorema será de gran utilidad para la demostración del teorema fundamental de disección; demostración que realizaremos en la sección siguiente.

Teorema 2.2.1: *(Teorema de Pitágoras)*

1) *Dado un triángulo rectángulo, los cuadrados construidos sobre los catetos, colocados juntos de tal manera que no se traslapen forman un polígono que es congruente por adición con el cuadrado construido sobre la hipotenusa.*

2) *Dado un triángulo rectángulo, los cuadrados construidos sobre los catetos, colocados juntos de tal manera que no se traslapen forman un polígono que es*

congruente por sustracción con el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Demostración:

Llamemos \mathbf{T} al triángulo dado, sean a y b los catetos, C_a y C_b los cuadrados construidos sobre a y b respectivamente y C_h el cuadrado sobre la hipotenusa, sean α el ángulo adyacente a a y β el ángulo adyacente a b (*fig.2.8*).

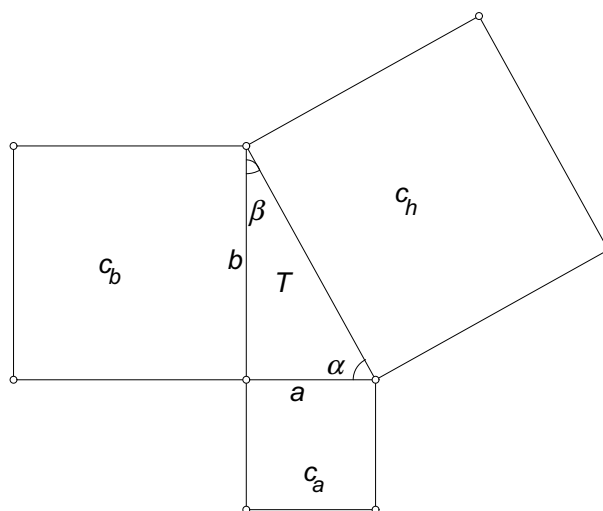


fig.2.8 Dado un triángulo rectángulo, construir los cuadrados sobre los catetos y sobre la hipotenusa.

1) Tomemos el triángulo ABC congruente con el triángulo T , tracemos el cuadrado $ABDE \cong C_b$ tal que coincidan en los vértices A y B , y que el vértice C del triángulo esté en el segmento BD , sea F en DE tal que $BC = DF$, tracemos el cuadrado $DFGH \cong C_a$ sobre el segmento DF , en DE encontremos el punto I tal que $FI = BA$ (*fig.2.9*).

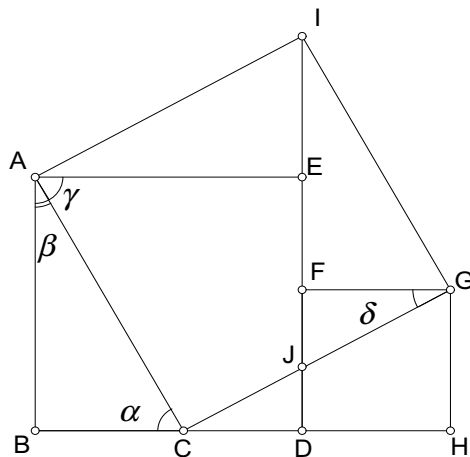


fig. 2.9. Teorema de Pitágoras usando equidistancia.

Por construcción observamos lo siguiente:

◆ $BC = DF = HG$, $AB = DB = BC + CD = CD + DH = CH$ y $\angle ABC = 90^\circ = \angle CHG$ entonces el triángulo ABC es congruente con el triángulo CHG , de donde $AC = CG$.

◆ $BC = DF = FG$, $FI = BA$ y $\angle ABC = 90^\circ = \angle IFG$ con lo cual el triángulo ABC es también congruente con el triángulo IFG , entonces $GI = AC$.

◆ $FE + EI = FI = BA = DE = DF + FE \Rightarrow EI = DF = BC$, $AB = AE$ y $\angle ABC = 90^\circ = \angle AEI$ así el triángulo ABC es congruente con el triángulo AEI , y $AC = AI$.

Hasta aquí hemos visto que el polígono $ACGI$ es un cuadrilátero de lados iguales, pero en el triángulo T sabemos que $\alpha + \beta = 90^\circ$, además, como $DFGH$ es un cuadrado se tiene que $\alpha + \delta = 90^\circ$ (no olvidemos las congruencias de los triángulos arriba mencionadas), análogamente en $ABDE$ tenemos $\beta + \gamma = 90^\circ$ entonces $\delta = \beta$ y $\gamma = \alpha$, con lo cual $\angle CAI = \angle AIG = \angle IGC = \angle GCA = 90^\circ$, por lo tanto $ACGI$ es un cuadrado congruente a C_h .

Ahora, si observamos la *fig.2.9* y llamamos J a la intersección de GC con DI y P al triángulo FGJ y Q al cuadrilátero $AEJC$ entonces $C_h = P + Q + T + T$ y $C_b + C_a = P + Q + T + T$ por lo tanto $C_h \cong C_a + C_b(+)$.

2) Construyamos los polígonos R y S de la siguiente manera :

Sea el cuadrado $ABCD$ congruente a C_h y unamos a los lados AC y BD dos triángulos congruentes a T (*fig.2.10*), llamaremos E y F a los vértices de los triángulos y R al polígono $ABEDCF$ así construido.

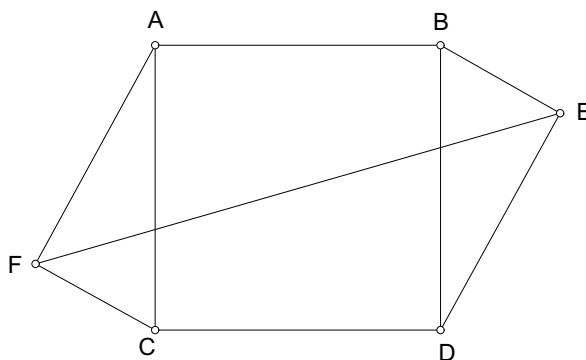


Fig. 2.10 Construcción de un cuadrado ABCD congruente con el cuadrado sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo

Sean los cuadrados $A'B'C'D'$ y $A''B''C''D''$ congruentes con C_a y C_b respectivamente unidos de tal manera que los puntos $B'D'B''$ son colineales y la recta $B'B''$ es diagonal de ambos cuadrados (*fig.2.11*) unamos A' con A'' y C' con C'' , llamaremos S al polígono $A'A''B''C''C'B'$ así construido.

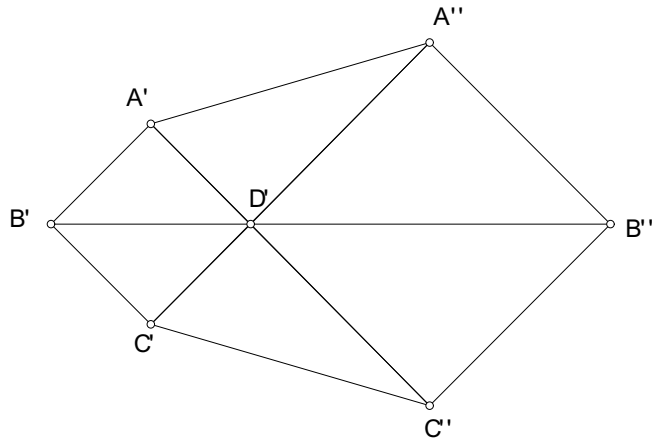


fig 2.11. Construcción de dos cuadrados congruentes a los cuadrados sobre los catetos del triángulo rectángulo unidos por un vértice

Ahora hagamos las siguientes observaciones:

Por construcción tenemos que:

◆ $\angle FCD = \alpha + 90^\circ = \angle EBA$ y $\angle CDE = \beta + 90^\circ = \angle BAF$ en R .

◆ $\angle B'C'C'' = 90^\circ + \alpha = \angle B'A'A''$ y $\angle C'C''B'' = 90^\circ + \beta = \angle B''A''A'$ en S .

Entonces $\angle FCD = \angle B'C'C''$, $\angle EBA = \angle B'A'A''$, $\angle CDE = \angle C'C''B''$ y $\angle BAF = \angle B''A''A'$.

Si tomamos las diagonales FE y BB' en R y S respectivamente, estas dividen a los polígonos R y S en cuadriláteros ($FABE$ y $FCDE$ para R y $B''A''A'B'$ y $B'C'C''B''$ para S) en los cuales $FC = B'C'$, $CD = C'C''$, $DE = C''B''$, $FA = B''A''$, $AB = A''A'$ y $BE = A'B'$ donde con la igualdad de los ángulos arriba mencionada se tiene entonces que los cuadriláteros $FCDE$ y $FABE$ son congruentes con los cuadriláteros $B'C'C''B''$ y $B''A''A'B'$ respectivamente, entonces $R \cong S(+)$, pero $R = C_h + T + T$ y $S = C_a + C_b + T + T$ por lo tanto $C_h \cong C_a + C_b(-)$. ■

Nota: Los dibujos que corresponden a la congruencia por sustracción son construcciones que pertenecen al maestro Leonardo Da Vinci y han sido utilizados aquí por permitir

observar claramente una demostración de congruencia por sustracción.

2.4. Teorema fundamental de la teoría de disección (Bolyai-Gerwien).

Ahora, para poder realizar la demostración del teorema fundamental de la teoría de disección necesitamos algunos resultados previos, estos los obtendremos de las siguientes proposiciones.

Proposición 2.3.1: *Todo triángulo es equidisecable con algún rectángulo.*

Demostración:

Sea T un triángulo cualquiera, llamemos A , B y C a sus vértices, sin pérdida de generalidad podemos suponer que AB es el lado de mayor longitud del triángulo. Sea CD la altura del triángulo tomada desde C y con D el pie de ésta sobre AB , llamemos H al punto medio de CD . Construyamos R un rectángulo de base AB y altura HD (fig.2.12).

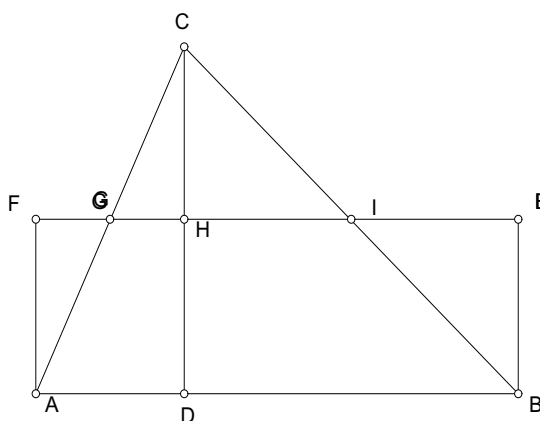


fig.2.12: Equidisecabilidad de un triángulo y un rectángulo de la misma área.

Sean B, A, E y F los vértices de R , y G, I los puntos de intersección de AC y BC con EF respectivamente, llamemos T_1 al triángulo CGH que resulta congruente con el triángulo AGE ($\angle GEA = \angle GHC$, $AE = CH$, $\angle EAG = \angle HCG$) y T el triángulo CHI que a su vez es congruente con el triángulo BFI ($\angle IFB = \angle IHC$, $BF = CH$, $\angle FBI = \angle HCI$), ahora si llamamos P al polígono $AGIB$ tenemos que $T = T_1 + T_2 + P$ y $R = T_1 + T_2 + P$ con lo cual $T \cong R(+)$. ■

Proposición 2.3.2: *Todo rectángulo es equidisecable con el cuadrado de la misma área.*

Demostración:

Sea $ABCD$ el rectángulo dado, y sea $AEFH$ el cuadrado de la misma área colocados el cuadrado sobre el rectángulo de tal manera que coincidan en el vértice A , supongamos que BC corta a HF en G , tracemos ED que corta a BC en R y a HF en K .

Sean A_C y A_R las áreas del cuadrado y del rectángulo respectivamente, notemos que:

$$A_C = EA \cdot AH = BA \cdot AD = A_R$$

Consideraremos tres casos:

1) Si sucede que $2 \cdot AH > AD$ (fig.2.13) entonces K está en el segmento GH , así los triángulos KDH y EDA son semejantes ($\angle HDK = \angle ADE$, $\angle HKD = \angle BER = \angle AED$), entonces $\frac{KH}{EA} = \frac{HD}{AD}$ de donde:

$$\begin{aligned} KH &= \frac{HD \cdot EA}{AD} = \frac{EA(AD - AH)}{AD} \\ &= EA - \frac{EA \cdot AH}{AD} = EA - \frac{BA \cdot AD}{AD} \\ &= EA - BA = EA + AB = EB \end{aligned}$$

Además $\angle DKH = \angle REB$, $\angle EBR = \angle KHD$, entonces los triángulos HKD y BER

son congruentes.

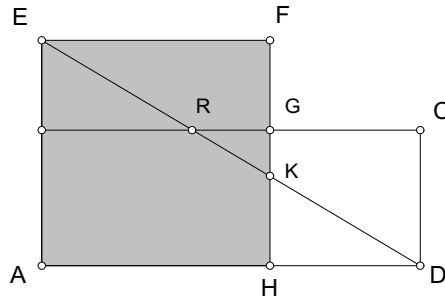


fig. 2.13 Cuadrado y rectángulo de la misma área tales que $2AH > AD$

Observemos que $EA = FH$ y $EB = KH$, además $EA = EB + BA$, $FH = FK + KH$ entonces $BA = FK$ y como $BA = CD$ tenemos $FK = CD$ pero $\angle EKF = \angle RDC$ y $\angle EFK = 90^\circ = \angle RCD$ así, los triángulos CDR y FKE también son congruentes.

Ahora identifiquemos con T_1 a los triángulos HKD y BER , T_2 a los triángulos CDR y FKE y con P al polígono $ABRKH$, sean \mathbf{R} el rectángulo y \mathbf{C} el cuadrado entonces:

$$\mathbf{R} = P + T_1 + T_2 \text{ y } \mathbf{C} = P + T_1 + T_2 \text{ con lo cual } \mathbf{R} \cong \mathbf{C}(+).$$

2) En el caso que $2AH = AD$ (fig.2.14) K coincide con G y R , y las congruencias se verifican de manera análoga a la anterior.

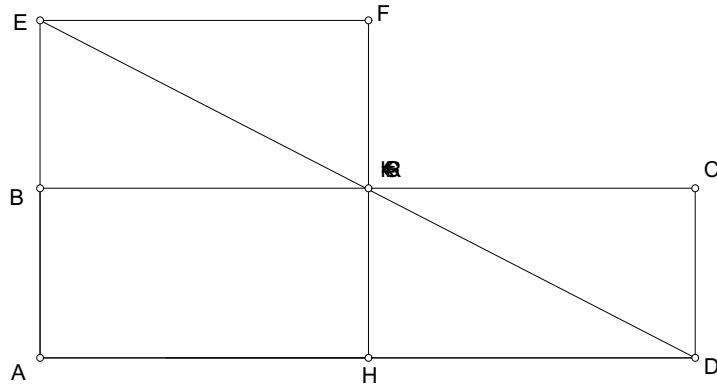


fig. 2.14 Cuadrado y rectángulo de la misma área tales que $2AH > AD$

3) Ahora, si $2AH < AD$ (fig.2.15), entonces, dividiremos la base del rectángulo a la mitad y duplicaremos la altura hasta obtener un rectángulo como en los casos anteriores.

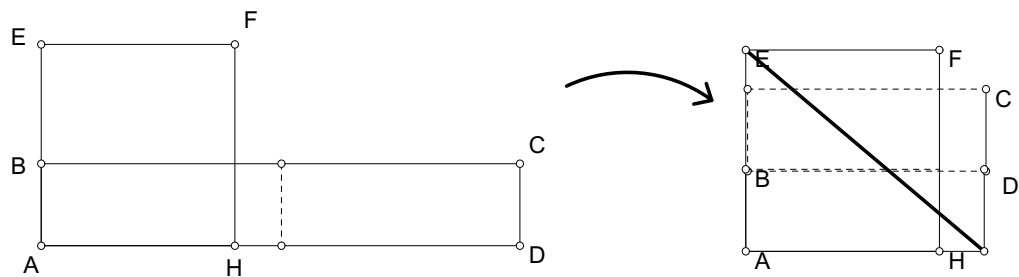


fig.2.15. Cuadrado y rectángulo de la misma área tales que $2AH < AD$. Se divide el rectángulo entre dos y se construye un rectángulo con el cual se puede realizar la demostración como en el caso de que $2AH > AD$.

Los cortes indicados en los casos 1 y 2 determinan la descomposición para la cual se verifica la equidisecabilidad del rectángulo y el cuadrado. ■

Notemos que hemos obtenido una manera de disecar un triángulo en un cuadrado de su misma área, (utilizando sucesivamente los dos resultados anteriores (*fig.2.16*)), este hecho nos será de mucha utilidad para la demostración de el teorema siguiente.

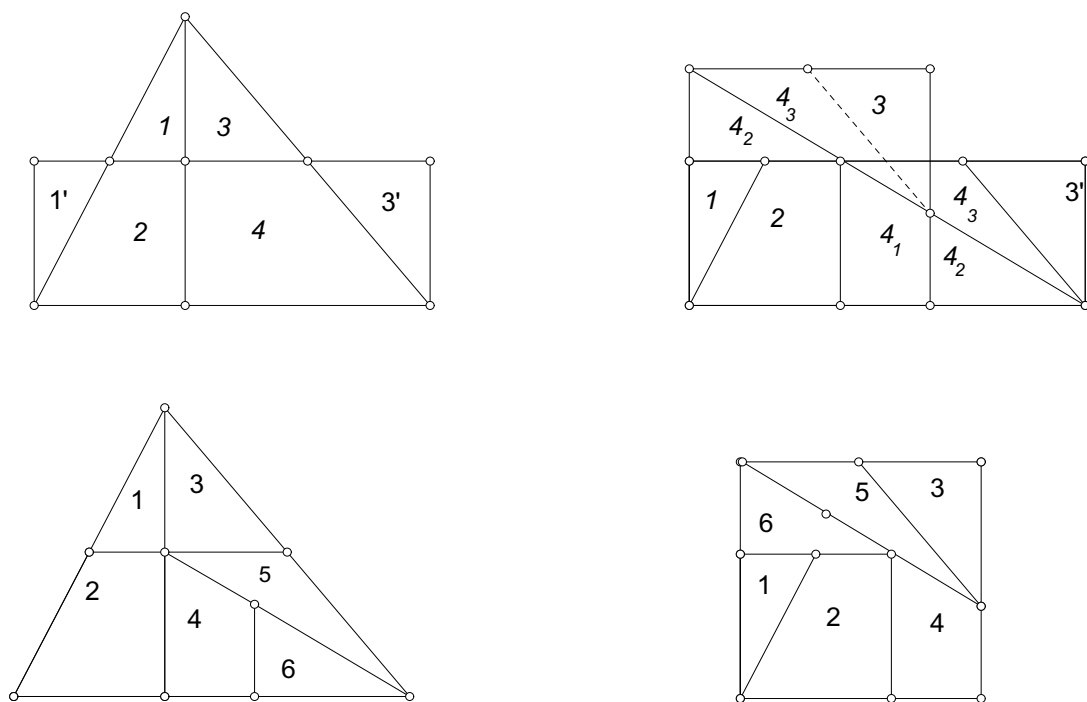


fig. 2.16. Disecación de un triángulo en un cuadrado de la misma área, utilizando sucesivamente la disecación de triángulo en rectángulo y de rectángulo en cuadrado.

Teorema 2.3.1: *Todo Polígono es equidisecable con el cuadrado de su misma área.*

Demostración:

Sea P un polígono cualquiera, según vimos en el capítulo 1 este puede ser descompuesto en un número finito de triángulos, llamemos $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ a dichos triángulos, según la proposición 2.2.1 estos triángulos a su vez puede ser disecados para formar rectángulos $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ de la misma área, y por la proposición 2.2.2 estos

rectángulos se puede disecar en cuadrados $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ también de la misma área. Con esto, y haciendo uso de la transitividad, hemos descompuesto a P en un número finito de cuadrados, ahora utilicemos el teorema 2.0.1 de la siguiente manera, tomemos C_1 y C_2 y construyamos T_1 el triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados de C_1 y C_2 entonces sea C_{h_1} , el cuadrado sobre la hipotenusa de T_1 , es equidisecable con $C_1 + C_2$; luego, tomemos C_{h_1} , C_3 y T_2 el triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados de C_{h_1} y C_3 entonces C_{h_2} , el cuadrado sobre la hipotenusa de T_2 , es equidisecable con $C_{h_1} + C_3$ el cual por transitividad es equidisecable con $C_1 + C_2 + C_3$, así, sucesivamente llegamos a C_{h_n} un cuadrado equidisecable con $C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$ (*fig2.17*), este cuadrado tiene área igual a la de el polígono P , ya que:

$$\begin{aligned}
 A(P) &= A(T_1) + A(T_2) + A(T_3) + \dots + A(T_n) \\
 &= A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + \dots + A(R_n) \\
 &= A(C_1) + A(C_2) + A(C_3) + \dots + A(C_n)
 \end{aligned}$$

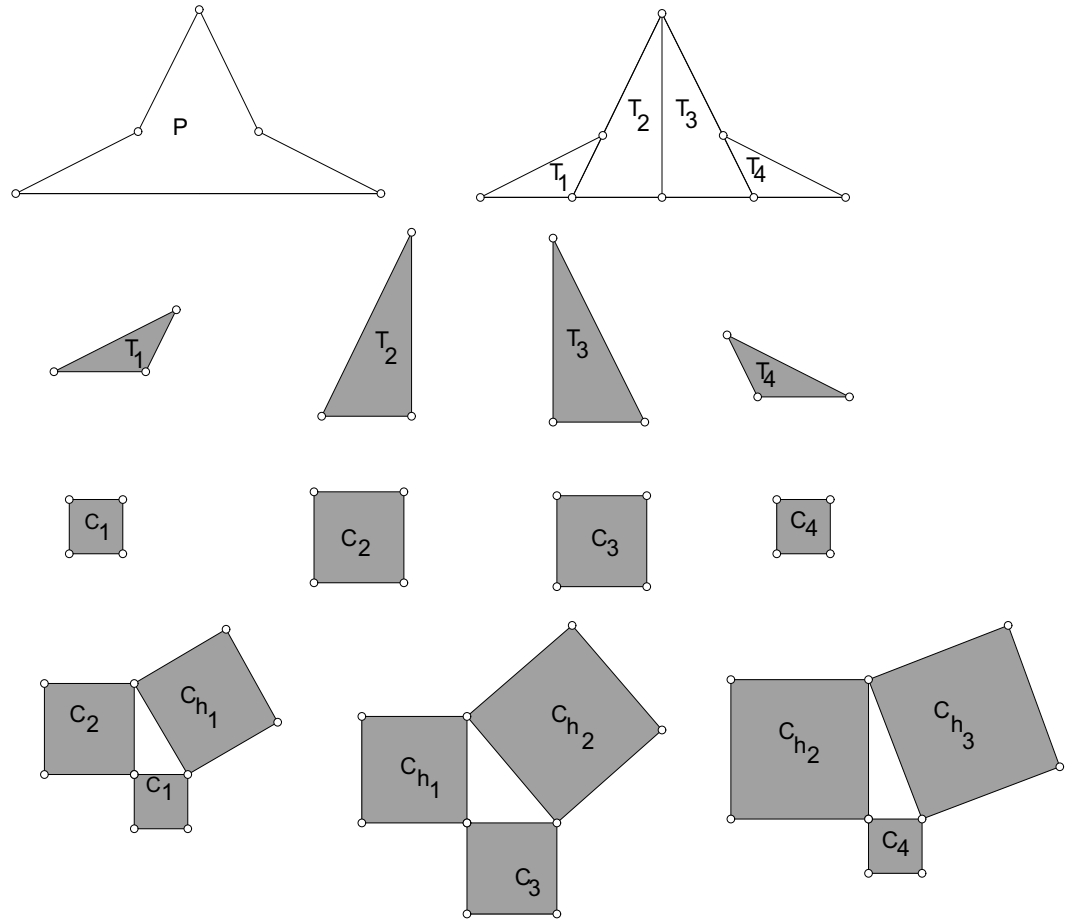


fig. 2.17. La descomposición de un polígono en triángulos que a su vez se transforman en cuadrados con los cuales se puede construir un cuadrado del área del polígono original.

Además, por la transitividad de la equidisecabilidad tenemos que $P \cong C_{h_n}(+)$ con lo cual el teorema queda demostrado (*fig.2.18*).■

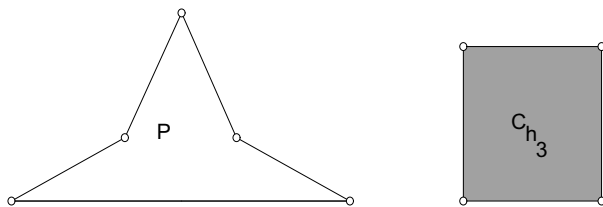


fig. 2.18. Polígono P y el cuadrado de su misma área.

Teorema 2.3.2: *(Teorema Fundamental de la Teoría de Disección Bolyai-Gerwin)*

Dos polígonos P y Q de la misma área son equidisecables.

en símbolos; Si $P \sim Q$ entonces $P \cong Q(+)$.

Demostración:

Por el teorema 2.3.1 sabemos que P es equidisecable con el cuadrado C_P de la misma área, y Q a su vez es equidisecable con C_Q el cuadrado de su misma área, entonces:

$A(C_P) = A(P) = A(Q) = A(C_Q)$ además como $C_P \cong C_Q$ por la proposición 2.1.1 $C_P \cong C_Q(+)$ con lo cual tenemos $P \cong C_P(+)$, $C_P \cong C_Q(+)$ y $C_Q \cong Q(+)$ de donde por transitividad $P \cong Q(+)$.■

Notemos que con este teorema y la proposición 2.1.3 en realidad lo que tenemos es:

$$P \sim Q \Leftrightarrow P \cong Q(+)$$

Corolario 2.3.1: *Sean P y Q polígonos $P \cong Q(+)$ si y solo si $P \cong Q(-)$.*

Demostración:

\Rightarrow) Si $P \cong Q(+)$ entonces $P \cong Q(-)$ proposición 2.1.1.

\Leftarrow) Supongamos $P \cong Q(-)$ entonces $P \sim Q$ (proposición 2.1.3) y por el teorema anterior $P \cong Q(+)$.■

El teorema anterior nos muestra que podemos utilizar indistintamente que dos polígonos sean equidisecables o que sean equicomplementables, en adelante utilizaremos solo equidisecabilidad.

Ahora bien, el teorema 2.3.2 puede ser escrito como sigue:

Teorema 2.3.3: *Dados dos polígonos P y Q entonces $P \sim Q \Leftrightarrow P \cong Q(+)$ $\Leftrightarrow P \cong Q(-)$.*

En el capítulo siguiente, desviaremos un poco nuestra atención a un tema que nos permitirá analizar el teorema de la equidisecabilidad desde otro punto de vista. Analizando algunas posibles variantes en la demostración.

Capítulo 3

Variaciones para el teorema fundamental de disección

Introducción

En el capítulo anterior demostramos que dos polígonos son equivalentes si y solo si son equidescomponibles. Ahora, si se revisan las demostraciones de cada resultado utilizado, se verá que se emplean distintos movimientos Isométricos en el plano; utilizando con mayor frecuencia las traslaciones. Esta observación lleva a preguntarse ¿Será posible una demostración del teorema fundamental que utilice solo traslaciones? o bien ¿bajo que circunstancias se puede usar solo traslaciones? y ¿cuál es el mínimo número de movimientos que hacen posible una demostración? Estos cuestionamientos fueron contestados al demostrar el teorema de Hadwiger-Glur en 1951. En este capítulo se dará una demostración de este teorema, para ello se definirán y demostrarán algunos conceptos referentes a grupos de isometrías necesarios en la demostración.

3.1. Grupos de Isometrías.

Denotemos por D el conjunto de todas las isometrías en el plano, el cual, según se vio en 1.4, es un grupo.

Consideremos ahora los siguientes conjuntos:

$$S = \{d/d \text{ es una rotación de } 180^\circ \text{ o una traslación} \}$$

$$T = \{d/d \text{ es una traslación} \}$$

Notemos que las rotaciones de 180° pueden ser en cualquier sentido.

Evidentemente $T \subset S \subset D$ y además S y T son grupos con la composición, es decir, ambos son subgrupos de D .

Para demostrar que efectivamente S y T son grupos utilizaremos las siguientes proposiciones:

Proposición 3.1.1: Sean d_1 y d_2 rotación de 180° , entonces $d_1 \circ d_2$ es una traslación

Demostración:

Sean d_1 y d_2 rotaciones con centros O_1 y O_2 respectivamente, tomemos A un punto cualquiera A' su imagen bajo d_1 y A'' la imagen de A' bajo d_2 notemos que los triángulos $AA'A''$ y $O_1A'O_2$ son semejantes, y su razón de semejanza es $\frac{1}{2}$ (fig.3.1 a)).

Es decir $\frac{O_1O_2}{AA''} = \frac{A'O_1}{A'A} = \frac{A'O_2}{A'A''} = \frac{1}{2}$ entonces el movimiento que envía A en A'' es una traslación paralela al segmento O_1O_2 y la longitud de traslación es $2O_1O_2$

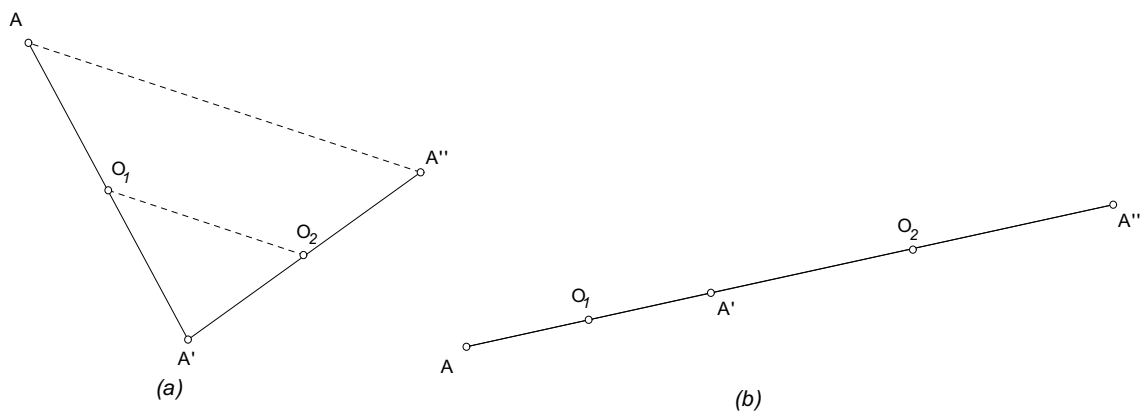


fig. 3.1. La composición de dos rotaciones de 180° , es una traslación.

Ahora bien, cabe mencionar el hecho de que en esta demostración se ha supuesto que los puntos A , A' y A'' no son colineales, sin embargo es fácil ver que en caso de que lo sean el resultado es el mismo (fig.3.1 b)) .■

Observación: Si tenemos una traslación paralela a un segmento AA' y construimos un triángulo con AA' como base y A'' su tercer vértice entonces la traslación puede ser pensada como la composición de las rotaciones de 180° con centros en los puntos medios de AA'' y $A'A''$, para las cuales A' se obtiene de aplicar la composición de dichas rotaciones a A .

Proposición 3.1.2: Sean d_1 , d_2 y d_3 rotaciones de 180° , entonces $d_1 \circ d_2 \circ d_3$ es una rotación de 180° .

Demostración:

Sean O_1, O_2, O_3 los centros de las rotaciones d_1, d_2 y d_3 respectivamente, tomemos A un punto cualquiera, sea A' la imagen de A bajo d_1 , A'' la imagen de A' bajo d_2 , y A''' la imagen de A'' bajo d_3 . Tracemos un segmento de recta paralelo a O_1O_2 que pase por O_3 y un punto O en l tal que $O_1O_2 = O_3O$, tenemos que los triángulos $AA'A''$ y $O_1A'O_2$ son semejantes con razón de semejanza $\frac{1}{2}$ y por construcción OO_3 es también $\frac{1}{2}$ de AA'' , además como OO_3 es paralelo a O_1O_2 también es paralelo a AA'' así

$\frac{O_3 A'''}{A'' A'''} = \frac{O_3 O}{A'' A} = \frac{1}{2}$ y $\angle A A'' A''' = \angle O O_3 A'''$ entonces los triángulos $AA''A'''$ y OO_3A''' son semejantes con razón de semejanza $\frac{1}{2}$, por tanto O es el punto medio de AA''' .

Finalmente la composición de las tres rotaciones, es una rotación de 180° con centro en el punto O así construido (fig. 3.2). ■

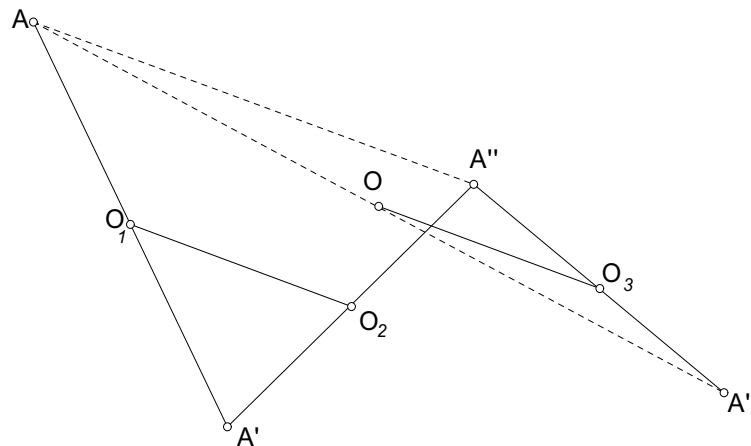


fig.3.2. La composición de tres rotaciones de 180° , es una rotación de 180°

Proposición 3.1.3: Sean d y d' traslaciones entonces $d \circ d'$ es una traslación.

Demostración:

Según observamos en la proposición 3.1.1 podemos considerar a $d = d_1 \circ d_2$ y $d' = d_3 \circ d_4$ donde d_1, d_2, d_3, d_4 son rotaciones de 180° , entonces $d \circ d' = (d_1 \circ d_2) \circ (d_3 \circ d_4) = (d_1 \circ d_2 \circ d_3) \circ d_4 = d_5 \circ d_4$ y dado que el producto de tres rotaciones de 180° es una rotación de 180° , tendremos d_5 rotación de 180° (proposición 3.1.2) y $d_5 \circ d_4$ según se vió en la proposición 3.1.1 es una traslación. ■

Teorema 3.1.1: S es Grupo.

Demostración:

·) Sean d_1 y d_2 en S entonces:

Si d_1 y d_2 son traslaciones $d_1 \circ d_2$ es una traslación y está en S .

Si d_1 es traslación y d_2 rotación de 180° , podemos pensar en $d_1 \circ d_2$ como la composición de tres rotaciones de 180° (observación de la proposición 3.1.1) así tendríamos que $d_1 \circ d_2$ es rotación de 180° y está en S . Análogamente si d_1 es rotación de 180° y d_2 traslación obtendremos que $d_1 \circ d_2$ es rotación de 180° .

Si d_1 y d_2 son rotaciones de 180° $d_1 \circ d_2$ es traslación y está en S .

..) Sean d_1 , d_2 y d_3 en S , como $S \subset D$ y en D se cumple la asociatividad entonces también se cumple en S .

...) Tomemos $e \in D$, podemos pensar a e como una traslación respecto a un segmento de longitud cero, así $e \in S$.

...) Por último, sea $d \in S$ entonces:

Si d es una rotación de 180° y A' es la imagen de un punto A cualquiera respecto a d , el movimiento que envía A' en A es la misma rotación esto es $d \circ d = e$ o bien $d^{-1} = d$.

Si d es una traslación paralela a un segmento AB y A' es la imagen de un punto A cualquiera respecto a d , el movimiento que envía A' en A es una traslación d' paralela al segmento BA esto es, $d \circ d' = e = d' \circ d$ o bien $d^{-1} = d'$ en ambos casos $d^{-1} \in S$. ■

Teorema 3.1.2: T es Grupo.

Demostración:

·) Sean d y d' en T ent. $d \circ d' \in T$ (Proposición 3.1.3).

..) Sean d_1 , d_2 y d_3 en T , como $T \subset D$ entonces se cumple $d_1 \circ (d_2 \circ d_3) = (d_1 \circ d_2) \circ d_3$ en T .

...) Tomemos $e \in D$, podemos pensar a e como una traslación respecto a un segmento de longitud cero, esta cumple con las propiedades de neutro así $e \in T$.

...) Por último, sea $d \in T$ entonces d es una traslación paralela a un segmento AB y si A' es la imagen de un punto A cualquiera respecto a d , el movimiento que envía A' en A es una traslación d' paralela al segmento BA esto es: $d^{-1} = d' \in T$. ■

En la siguiente sección utilizaremos todo esto para demostrar un hecho interesante.

3.2. El teorema de Hadwiger-Glur.

El teorema de Bolyai-Gerwien establece la equidisecabilidad de los polígonos de igual área, ahora restringiremos este hecho estableciendo la equidisecabilidad solo con las isometrías contenidas en el grupo S , es decir, que las partes correspondientes en los polígonos equidisecables pueden ser obtenidas una de la otra mediante una traslación o rotación de 180° (el grupo T será utilizado posteriormente). Para esto demostraremos algunos resultados previos.

Definición: Diremos que dos polígonos P y Q son equidisecables S si su equidisecabilidad puede establecerse solo con movimientos en S , es decir $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$ con $P_1 \cong Q_1$, $P_2 \cong Q_2$, $P_3 \cong Q_3$, ..., $P_n \cong Q_n$, y además Q_i es la imagen de P_i bajo alguna isometría contenida en S .

Dados P y Q polígonos si P es equidisecable S con Q escribiremos $P \cong Q(+)$ S

Proposición 3.2.1: Ser equidisecable S es de equivalencia.

Demostación:

Reflexiva. Dado cualquier polígono P sabemos que este es equidisecable consigo mismo y que aplicando $e \in S$ el polígono permanece intacto, entonces, si tomamos la disección que deja igual a P , se satisface que P es equidisecable S con el mismo, es decir $P \cong P(+)$ S .

Simétrica. Sean P y Q polígonos tales que $P \cong Q(+)$ S , entonces, $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$ y $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$ con $P_1 \cong Q_1$, $P_2 \cong Q_2$, $P_3 \cong Q_3$, ..., $P_n \cong Q_n$ y obtenidos uno del otro mediante una isometría contenida en S , tomemos cualquier par $P_i \cong Q_i$ es evidente que si P_i se obtiene de Q_i mediante una isometría $d \in S$, entonces Q_i se obtiene de P_i mediante el movimiento inverso d^{-1} el cual también está en S dado que es grupo, así $Q \cong P(+)$ S .

Transitiva. Sean O , P y Q Polígonos tales que $O \cong P(+)$ S y $P \cong Q(+)$ S , es decir $O = O_1 + O_2 + O_3 + \dots + O_n$ y $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$ con $O_1 \cong P_1$, $O_2 \cong P_2$,

$O_3 \cong P_3, \dots, O_n \cong P_n$ y obtenibles uno del otro mediante isometrías en S , y también $P = P'_1 + P'_2 + P'_3 + \dots + P'_m$ y $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_m$ con $P'_1 \cong Q_1, P'_2 \cong Q_2, P'_3 \cong Q_3, \dots, P'_m \cong Q_m$ también obtenibles uno del otro mediante isometrías en S . Entonces si tomamos las disecciones P_n y P'_m de P y las colocamos una sobre la otra respetando la forma de P obtendremos una disección (P_n, P'_m) de P la cual resulta común a O y a Q y con la cual se verifica que $O \cong Q(+)S$. ■

Proposición 3.2.2: *Todo triángulo es equidisecable S con algún rectángulo que tiene la misma área.*

Demostración:

Observemos la *fig.3.3* que corresponde a la demostración hecha para la proposición 2.3.1, notemos que los triángulos T_1 y T_2 se obtienen de sus correspondientes mediante rotaciones de 180° con centros en I y G respectivamente, es decir, con solo isometrías contenidas en S se puede pasar del triángulo al rectángulo, entonces, esta misma demostración nos es útil para demostrar la equidisecabilidad S entre el triángulo y el rectángulo. ■

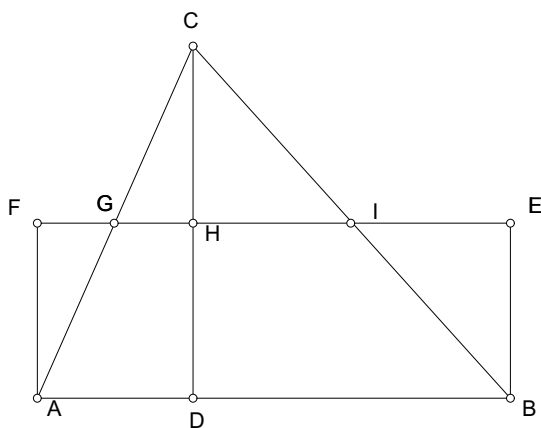


fig.3.3: Equidisecabilidad de un triángulo y un rectángulo de la misma área, utilizando solo rotaciones de 180° .

Proposición 3.2.3: *Dos paralelogramos de la misma altura, que tienen bases iguales y paralelas son equidisecables S .*

Demostración:

Sean $ABCD$ y $EFGH$ dos paralelogramos que cumplen las hipótesis de la proposición, sin pérdida de generalidad podemos suponer que AB y EF son las bases iguales y paralelas, entonces podemos sobreponer AB en EF mediante una traslación (fig.3.4); sea $EFC'D'$ el paralelogramo que obtuvimos al trasladar $ABCD$; como tienen la misma altura los puntos C' , D' , G y F son colineales.

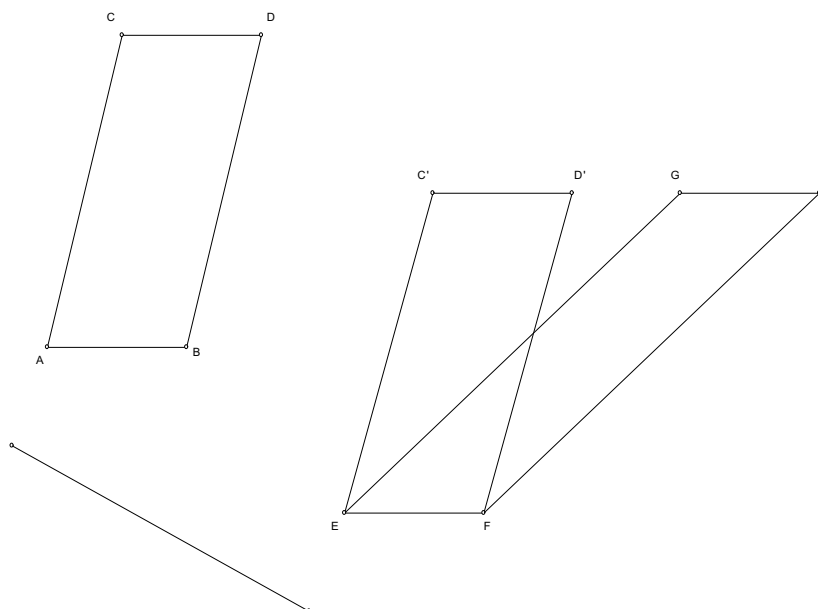


fig.3.4. Dos paralelogramos de igual base y altura, trasladando uno sobre la base del otro.

·)Supongamos que EG se intersecta con FD' , llamemos I a este punto tracemos sobre la línea de EF segmentos de igual magnitud a EF , y en los puntos que determinan estos segmentos tracemos rectas paralelas a EG y a FD' (fig.3.5), al trazar estas líneas hemos dividido ambos paralelogramos en piezas, una común a ambos, que llamaremos P , y también $P_1, P_2 \dots P_n$ y $Q_1, Q_2 \dots Q_n$ correspondientes a $EFC'D'$ y $EFGH$ respectivamente,

de las cuales (dado que se obtienen de líneas paralelas) se observa fácilmente que $P_1 \cong Q_1$ y $P_2 \cong Q_2 \dots P_n \cong Q_n$ y además, Q_i se obtiene de P_i mediante una traslación paralela al segmento dirigido $C'G$, entonces esta es la descomposición para la cual se verifica que los paralelogramos son equidisecables S .

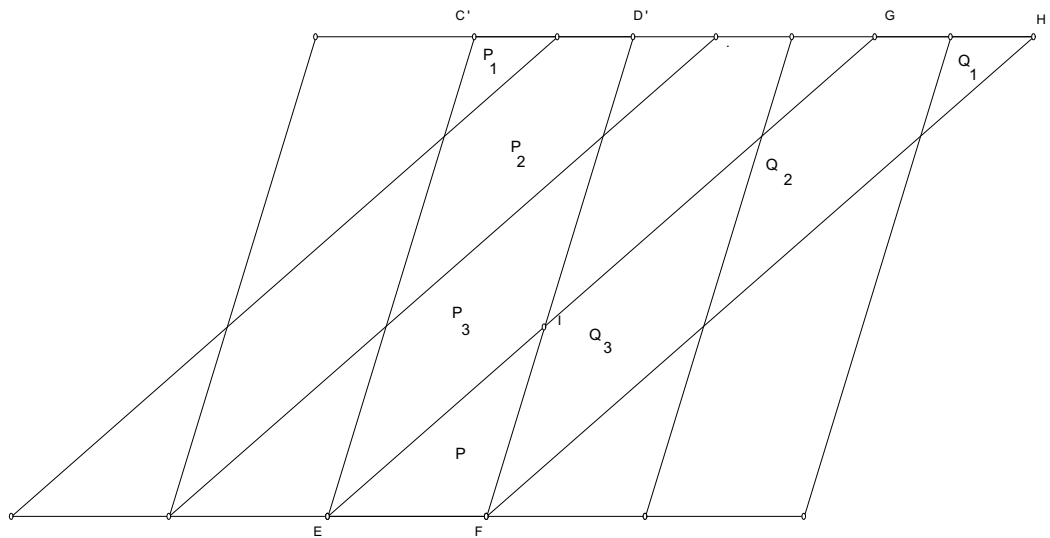


fig. 3.5. Descomposición de dos paralelogramos de bases y alturas iguales para obtenerse uno del otro.

..)Supongamos que EG no se intersecta con FD' , entonces los triángulos $EC'G$ y $FD'H$ son congruentes, y obtenibles uno del otro mediante una traslación paralela al segmento EF (fig3.6), así tenemos cada paralelogramo dividido en dos polígonos, P común a ambos y P_1 y Q_1 que son los triángulos $EC'G$ y $FD'H$ respectivamente, con los cuales se verifica la equidisecabilidad deseada.■

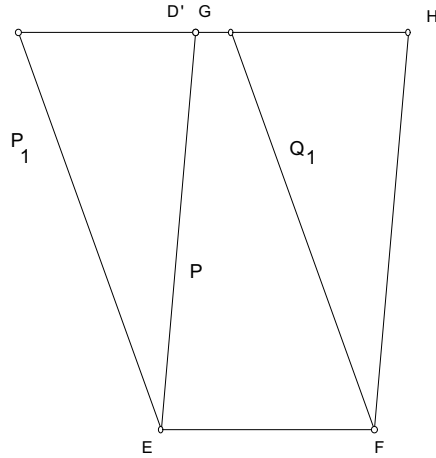


Fig.3.6. Dos paralelogramos de igual base y altura, en los que los segmentos EG y FD' no se intersectan.

Proposición 3.2.4: *Dos rectángulos de áreas iguales son equidisecables S .*

Demostración:

Supondremos dos casos:

-) Que tienen sus lados paralelos.
-) Que no tienen sus lados paralelos.

Sean $ABCD$ y $EFGH$ los rectángulos en cuestión.

-) Traslademos $ABCD$ hasta sobreponerlo a $EFGH$ de tal forma que coincidan los vértices A y E y que F esté sobre el segmento AB , tracemos las líneas FD , BH y CG ; sean M y N los puntos de intersección de FG y DC con BH respectivamente, y O el punto de intersección de FG con CD , (fig.3.7).

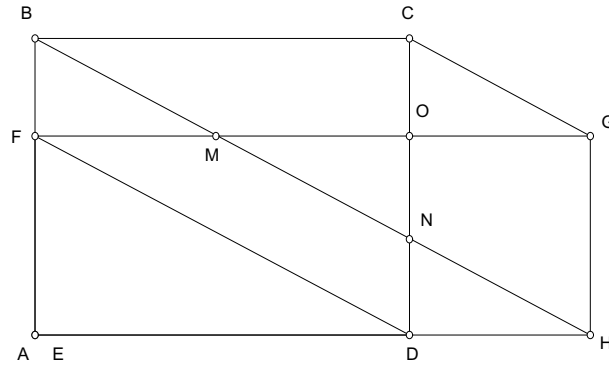


fig.3.7. Equidisecabilidad de dos rectángulos de la misma área, sobreponiéndolos de tal forma que coincidan en un vértice.

De la construcción realizada y la igualdad de las áreas se desprende lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 AB \cdot AD &= AF \cdot AH \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \Delta ABH \approx \Delta AFD \\
 GH \cdot GO &= BC \cdot CO \text{ pero } AF = GH \text{ y } AD = BC \text{ así:} \\
 AF \cdot GO &= AD \cdot CO \Rightarrow \frac{AF}{CO} = \frac{AD}{GO} \Rightarrow \Delta AFD \approx \Delta OCG
 \end{aligned}$$

de donde, por transitividad, se tiene:

$$\Delta ABH \approx \Delta OCG$$

todo esto muestra que FD , BH y CG son paralelas, entonces:

$$\Delta FBM \cong \Delta DNH \text{ y } \Delta BCN \cong \Delta MGH$$

Obteniéndose estos triángulos uno del otro mediante una traslación; así, hemos obtenido una disección que verifica que los rectángulos son *equidisecables* S .

..)En caso de no tener sus lados paralelos hagamos la siguiente construcción:

Tracemos por A y B rectas paralelas a FG y prolonguemos CD de tal forma que obtengamos los puntos C' y D' de las intersecciones de las rectas, el paralelogramo $ABC'D'$ comparte una base y tiene la misma altura que el rectángulo $ABCD$. Tracemos ahora por B y C' rectas paralelas a FE obteniendo así los puntos A' y D'' con las intersecciones, el paralelogramo $A'BC'D''$ comparte una base y tiene la misma altura que el paralelogramo $ABC'D'$. (fig.3.8)

Hemos obtenido el rectángulo $A'BC'D''$ se puede observar que $ABCD \cong ABC'D'(S)$ y $ABC'D' \cong A'BC'D''(S)$ aplicando la transitividad vista en proposición 3.2.1 tenemos que $A'BC'D''$ es equidisecable con el rectángulo $ABCD$ y además, este rectángulo tiene lados paralelos al rectángulo $EFGH$, y con el se puede proceder como en el inciso anterior para demostrar la equidisecabilidad S . ■

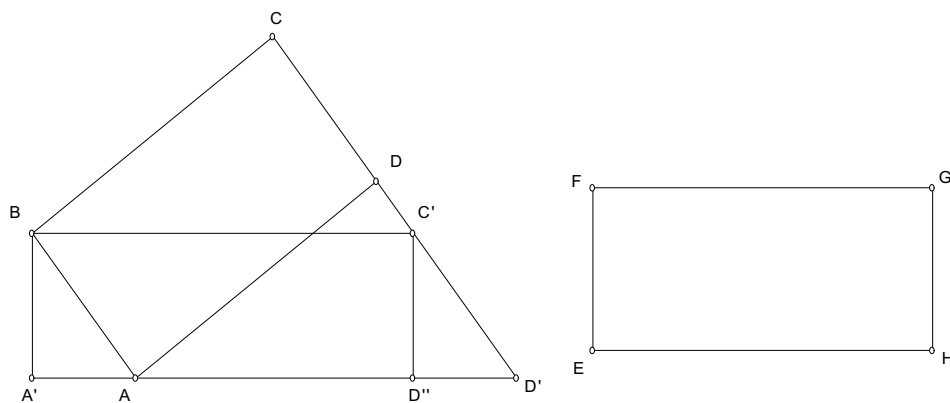


Fig. 3.8. Si los rectángulos no tienen lados paralelos, se puede hacer una construcción sobre uno de ellos, para obtener un rectángulo de lados paralelos a los del otro, y con el cual se verifica la equidisecabilidad.

Proposición 3.2.5: *Todo polígono es equidisecable S con algún rectángulo.*

Demostración:

Sea P un polígono cualquiera, lo podemos dividir en un número finito de triángulos, por la proposición 3.2.5 estos triángulos son equidisecables S con rectángulos de su misma área. Llamemos R_1, R_2, \dots, R_n a estos rectángulos, ahora tomemos un segmento AB y construyamos sobre él un rectángulo de igual área que R_1 (por la proposición 3.2.4 sabemos que estos rectángulos son equidisecables S), procediendo de manera análoga con los rectángulos restantes, obtendremos un rectángulo R sobre el segmento AB tal que $R \cong R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n(S)$ y por transitividad también lo es con P . ■

Teorema 3.2.1: Teorema de Hadwiger Glur. *Dos polígonos de áreas iguales son equidisecables S .*

Demostración:

Sean P y Q los polígonos dados, por el lema anterior ambos son equidisecables S con algún rectángulo de su misma área, y estos son equidisecables entre sí por la proposición 3.2.4, y por transitividad se deduce que $P \cong Q(S)$.

3.3. Invariantes aditivos y el grupo T .

En la sección anterior vimos que S es un grupo con el cual se puede verificar la equidisecabilidad, sin embargo si revisamos la demostración de la proposición 3.2.3 nos daremos cuenta que en ella sólo se usan traslaciones, entonces cabe preguntarse ¿en qué casos puede establecerse la equidisecabilidad haciendo uso solo del grupo T ?, en esta sección daremos respuesta a esta pregunta.

Definiremos algunos conceptos que nos serán útiles para esta demostración.

Sea P un polígono cualquiera, orientemos los segmentos que forman sus lados de manera que al recorrerlos en ese sentido los puntos a la izquierda esten siempre en el interior de P , consideremos también una recta orientada l , definimos $J_l(P)$ como la suma de las longitudes de los lados de P paralelos a l , tomando como positivos aquellos que estén en

la dirección de l y como negativos los que estén en sentido contrario. (fig. 3.9)

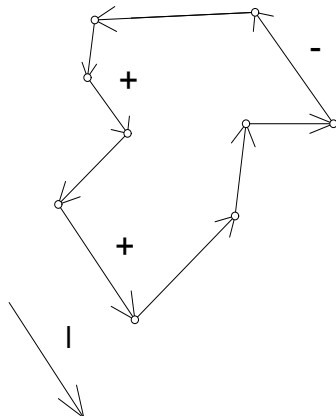


fig 3.9. Polígono con lados orientados y recta orientada l .

Notemos que si l no es paralela a ningún lado del polígono entonces $J_l(P) = 0$.

Observemos algunas propiedades del número $J_l(P)$.

Proposición 3.3.1: *Sea l una recta orientada y M y M' dos polígonos que se obtienen uno del otro mediante una traslación, entonces: $J_l(M) = J_l(M')$.*

Demostración:

Consideremos dos polígonos M y M' que se obtienen uno del otro mediante una traslación, es evidente que al aplicar dicha traslación a un polígono las longitudes y direcciones de sus lados no sufren cambio alguno, por tanto, es sencillo observar que $J_l(M) = J_l(M')$. ■

Esta proposición nos dice en otras palabras que el número J_l no cambia para los polígonos que se someten a una traslación, por esta razón le llamaremos **invariante**.

Proposición 3.3.2: *Sea l una recta orientada y A algún polígono descompuesto en un número finito de polígonos $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$ entonces:*

$$A = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_k$$

$$J_l(A) = J_l(M_1) + J_l(M_2) + J_l(M_3) + \dots + J_l(M_k)$$

Demostración:

Observemos los lados de los polígonos $A, M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$ marcando sobre ellos los puntos que son vértices de dichos polígonos, se han obtenido entonces, segmentos rectilíneos de distintas longitudes algunos de los cuales conforman los lados del polígono A y otros que están dentro de él, (*fig.3.10*).

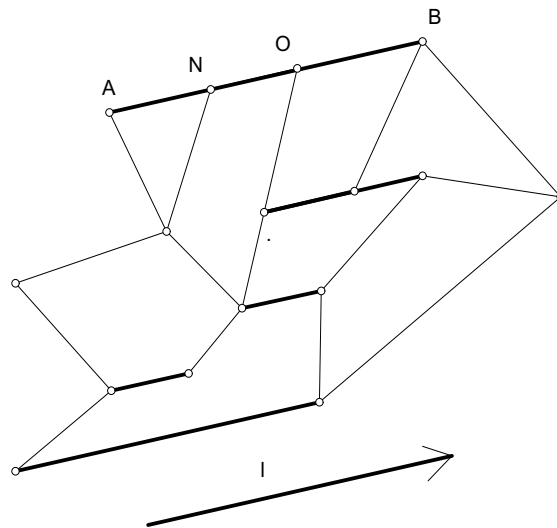


fig.3.10. Polígono descompuesto en un número finito de polígonos, algunos de los cuales tienen lados paralelos a la recta l .

Consideremos un lado AB del polígono A paralelo a la recta l , este segmento puede o no estar dividido en otros segmentos más cortos, si no estuviera dividido entonces tanto es lado de A como de algún polígono M_j conservando para ambos polígonos el sentido,

así se observa que aporta la misma cantidad para $J_l(A)$ como para $J_l(M_1) + J_l(M_2) + J_l(M_3) + \dots + J_l(M_k)$; ahora bien, si sucediera que este lado se encuentra dividido en segmentos (digamos AN, NO, OB por ejemplo), entonces al calcular el número $J_l(M_1) + J_l(M_2) + J_l(M_3) + \dots + J_l(M_k)$ se debe calcular la suma algebraica de las longitudes de estos segmentos, observamos que para cada uno de los segmentos que compone a A , solo uno de los polígonos $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$ lo contiene ; y dado que se encuentra en el mismo lado que en el polígono A entra en el cálculo con el mismo signo, al hacer entonces la suma se obtiene el mismo valor que para el número $J_l(A)$.

Examinemos ahora un segmento que se encuentre totalmente dentro del polígono A , habrá al menos dos polígonos M_i que lo contienen, estando estos polígonos situados en los lados opuestos a él, por lo tanto uno entrará en la suma con signo positivo y el otro con signo negativo y al calcular la suma algebraica estos términos se cancelaran mutuamente, de esta forma se hace evidente que estos segmentos no afectarán en ninguno de los cálculos. Todo esto nos permite verificar la veracidad de la proposición dada. ■

Esta proposición nos permite ver que si un polígono A esta constituido por varios polígonos más pequeños, el número $J_l(A)$ puede obtenerse por la adición de los invariantes de los polígonos constituyentes, diremos entonces que el número J_l es *invariante aditivo*

Con lo anterior estamos ya en condiciones de enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1: Sean A y A' dos polígonos equidisecables T y sea l una recta orientada entonces $J_l(A) = J_l(A')$.

Demostración:

Sabemos que A y A' son equidisecables T , es decir A se puede cortar en un número finito de polígonos $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$ y A' se puede cortar en el mismo número de polígonos $M'_1, M'_2, M'_3, \dots, M'_k$, de tal manera que $M_1 \cong M'_1, M_2 \cong M'_2, M_3 \cong M'_3, M_k \cong M'_k$ y son obtenidos uno del otro mediante una traslación paralela.

Entonces de acuerdo a la proposición 3.3.1

$$J_l(M_1) = J_l(M'_1), J_l(M_2) = J_l(M'_2), J_l(M_3) = J_l(M'_3), J_l(M_k) = J_l(M'_k)$$

Usando entonces la proposición 3.3.1 tenemos que:

$$J_l(A) = J_l(M_1) + J_l(M_2) + J_l(M_3) + \dots + J_l(M_k)$$

$$J_l(A') = J_l(M'_1) + J_l(M'_2) + J_l(M'_3) + \dots + J_l(M'_k)$$

Por lo tanto

$$J_l(A) = J_l(A').$$

■

Observemos que esto sucede para toda recta orientada l .

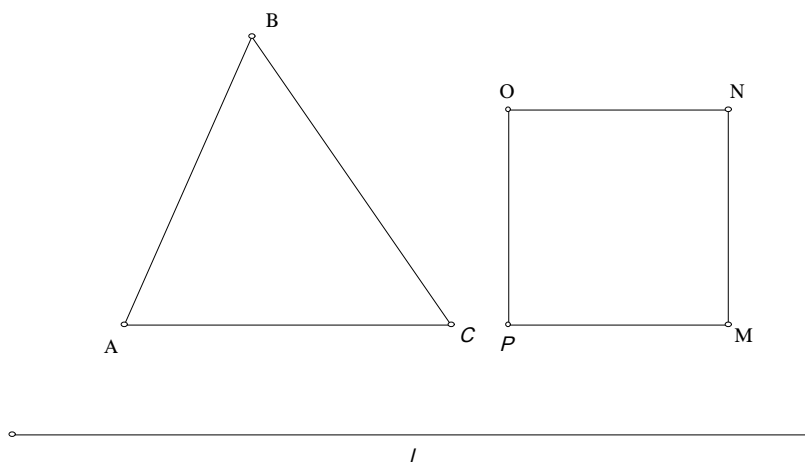


fig.3.11 El invariante del cuadrado siempre es cero, sin embargo para el triángulo tiene el valor de la magnitud del segmento AC, es decir no es cero, esto quiere decir que a pesar de tener la misma área no pueden ser obtenidos uno del otro con solo traslaciones.

Ahora bien todo lo anterior nos permite observar que dos polígonos de áreas iguales no son siempre *equidescomponibles* T por ejemplo un cuadrado y un triángulo de la misma

área (fig 3.11) tienen distintos valores para una recta tomada paralela a algún lado del triángulo entonces no son equidescomponibles con solo traslaciones.

Esto quiere decir que son necesarios más movimientos además de las traslaciones para garantizar la equidescomponibilidad de cualesquiera dos polígonos de la misma área; la próxima sección nos mostrará precisamente cual es el mínimo grupo que permite garantizar esto.

3.4. El grupo S .

La sección anterior mostró una propiedad que relaciona al Invariante aditivo $J_l(P)$ y el grupo T . En esta sección observaremos que el mínimo grupo que permite establecer la equidisecabilidad de las parejas arbitrarias de polígonos con áreas iguales es S . Esto equivale a demostrar que un grupo G que permite establecer la equidisecabilidad de dos polígonos cualesquiera de áreas iguales contiene todas las traslaciones y todas las rotaciones de 180° .

Primero haremos algunas definiciones y observaciones:

Consideraremos un grupo G de isometrías tal que dados cualquier par de polígonos equivalentes estos se pueden obtener uno del otro con movimientos de G .

Sea P un punto en el plano, llamaremos órbita de P bajo G , al conjunto de todos los puntos en el plano que son imágenes de P mediante movimientos de G .

Notemos que P está en la órbita de P dado que al ser G grupo contiene la transformación identidad.

Sea M un polígono, denotaremos $I_P(M)$ a la suma de todos los ángulos de M cuyos vértices se encuentran en la órbita de P .

Notemos que el punto P puede o no ser vértice del polígono. Para poder comprender mejor esta definición mostraremos los siguientes ejemplos:

1) Sea E un triángulo equilátero, y H el grupo de simetrías de E (estas son a saber las rotaciones 120° , 240° y 360°) (fig 3.12) Consideremos el vértice A ; la órbita de A bajo

H contiene a los tres vértices del triángulo, entonces $I_A(E) = 60 + 60 + 60 = 180$.

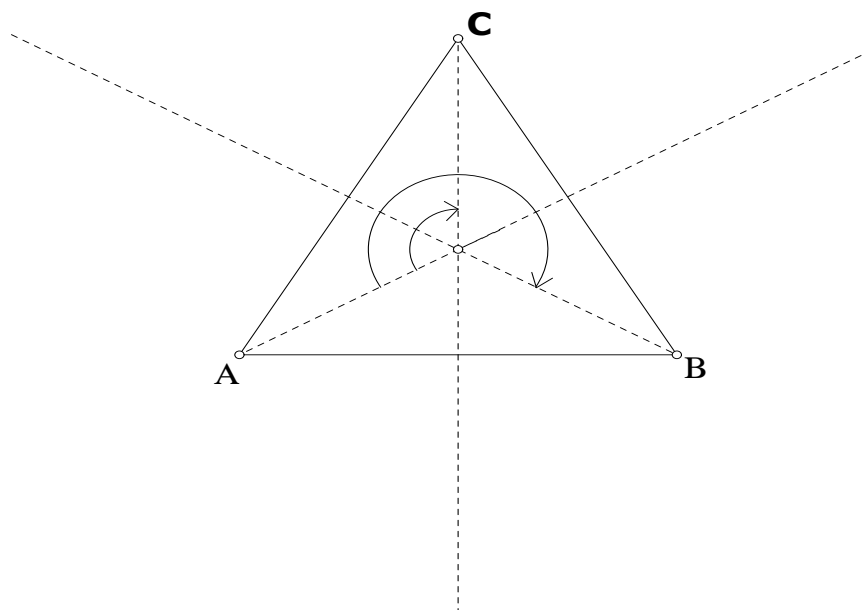


Fig 3.12. El conjunto de las simetrías de un triángulo equilátero es un grupo que consta de seis elementos a saber: la identidad, dos rotaciones y tres reflexiones. Es fácil ver que la órbita de un vértice del triángulo incluye a los tres vértices del mismo.

2) Tomemos un triángulo equilátero E y un punto Q fuera de él; consideremos al grupo T de todas las traslaciones en el plano. Sean A , B y C los vértices del triángulo, tracemos el segmento QA es seguro que T contiene una traslación paralela a este segmento por tanto A esta en la órbita de Q bajo T , análogamente se puede observar que B y C estan tambien en la órbita de Q , por lo tanto $I_Q(E) = 60 + 60 + 60 = 180$. *fig 3.13*

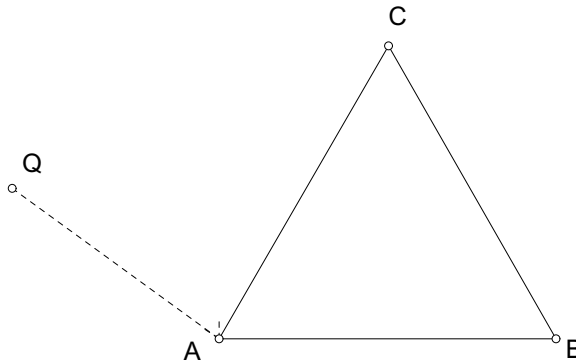


fig. 3.13. Un punto Q fuera del triángulo puede transformarse en un vértice al aplicar una traslación. Así los puntos A, B y C están en la órbita de Q.

Notemos que si ningún vértice del polígono es imagen de P bajo los movimientos de G entonces $I_P(M) = 0$.

Proposición 3.4.1: ·) Si M y M' son polígonos y M' se obtiene de M con algún movimiento de G entonces: $I_P(M) = I_P(M')$.

·) Si A es polígono que se descompone en un número finito de polígonos $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$ entonces $I_P(M_1) + I_P(M_2) + I_P(M_3) + \dots + I_P(M_k) + n\pi = I_P(A)$ para $n \in \mathbb{N}$

Demostración:

·) Sean M y M' dos polígonos que se obtienen uno del otro mediante movimientos de G , sabemos que los movimientos de G son transformaciones rígidas, por tanto conservan los ángulos, así que si Q es un punto en la órbita de P , el valor del ángulo en M es el mismo valor para el ángulo en M' del punto correspondiente Q' , con lo cual se hace evidente que $I_P(M) = I_P(M')$.

·) Supongamos que A es un polígono que se descompone en polígonos $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$. entonces para cada vértice de A que se encuentre en la órbita de P pasa lo siguiente:

Si Q es un vértice de A , entonces es un vértice de uno o más polígonos M_j , así que el valor del ángulo en A es la suma de los valores de los ángulos en los polígonos M_j ,

y como Q se encuentra en la *órbita* de P entonces al calcular los números $I_p(A)$ y $I_P(M_1) + I_p(M_2) + I_P(M_3) + \dots + I_p(M_k)$ el valor del ángulo en A aparece en ambos.

Ahora si Q fuese un punto en el interior de A o en un lado de él; entonces o no es vértice de ningún polígono o es vértice de dos o más polígonos M_j , y si Q está en la órbita de P la suma de los ángulos de estos polígonos es 2π así que en la suma $I_P(M_1) + I_p(M_2) + I_P(M_3) + \dots + I_p(M_k)$ aparece el valor 2π tantas veces como puntos haya en el interior de A que sean vértices de algún M_j y que pertenezcan a la órbita de P , por tanto

$$I_P(M_1) + I_p(M_2) + I_P(M_3) + \dots + I_p(M_k) = I_p(A) + m2\pi$$

donde m es el número de puntos en el interior de A que son vértices de algún polígono M_j y que están en la órbita de P , de otra manera,

$$I_P(M_1) + I_p(M_2) + I_P(M_3) + \dots + I_p(M_k) - m2\pi = I_p(A)$$

así

$$I_P(M_1) + I_p(M_2) + I_P(M_3) + \dots + I_p(M_k) + n\pi = I_p(A) \text{ con } n = 2m \in \mathbb{N} \blacksquare$$

Ahora utilizaremos lo anterior para demostrar lo siguiente

Proposición 3.4.2: *Si P y Q son puntos arbitrarios en el plano, el grupo G contendrá siempre un movimiento que transforma P en Q .*

Demostración:

Supongamos que existen puntos P y Q tales que ningún movimiento en G transforma P en Q o viceversa.

Construyamos PQR y PQS dos triángulos isósceles obtusángulos congruentes con α como ángulo en la base, (*fig. 3.14*) entonces;

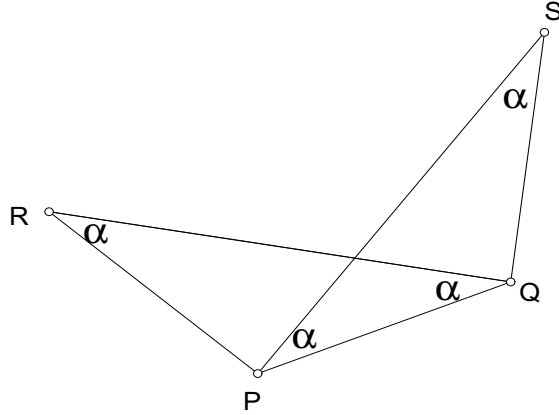


fig.3.14. triángulos isósceles, obtusangulos, congruentes entre si con alfa como ángulo en la base.

$$I_P(PQR) = \begin{cases} \pi - \alpha & \text{si } R \text{ está en la órbita de } P \\ \pi - 2\alpha & \text{si } R \text{ no está en la órbita de } P \end{cases}$$

$$I_P(PQS) = \begin{cases} 2\alpha & \text{si } S \text{ está en la órbita de } P \\ \alpha & \text{si } S \text{ no está en la órbita de } P \end{cases}$$

En cualquier caso debido a que el triángulo es obtusángulo $\alpha \neq \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

$$I_P(PQR) \neq I_P(PQS) + n\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Esto querría decir que los triángulos PQR y PQS no son equidescomponibles en G , lo cual es una contradicción dado que al ser congruentes son equivalentes, y por tanto equidisecables con movimientos de G .

Por tanto, para todo par de puntos P y Q debe existir un movimiento en G que transforma uno en otro. ■

Usaremos lo anterior mas adelante; en el siguiente teorema demostraremos que G debe contener al menos una rotación de 180° y procederemos también por contradicción, es decir, *supondremos que G no contiene rotaciones de 180°* , y usando esto haremos algunas consideraciones y demostraciones.

Consideremos una recta l y una recta l' que forma un ángulo α con la recta l , entonces l' está en la órbita de l siempre que G contenga una rotación con un ángulo α (fig.3.15). Es evidente que si l y l' son paralelas el ángulo α es cero, por otro lado, si sucede que l' esta en la órbita de l no puede ser que una recta l'' paralela a l' pero con orientación contraria este también en la órbita de l , pues esto querría decir que G contiene dos rotaciones cuyos ángulos difieren en 180° y al ser grupo contendría entonces una rotación de ángulo 180° lo cual no estaría en acuerdo con lo que explicamos al inicio de esta consideración.

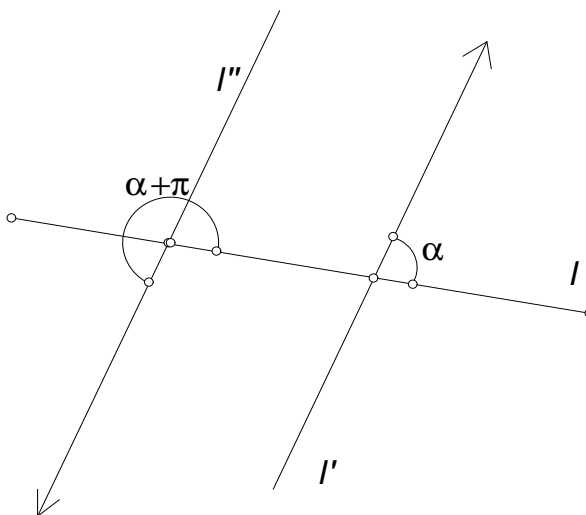


fig. 3.15. l' y l'' no pueden estar ambas en la órbita de l , pues esto querría decir que el grupo contendría una rotación de 180° .

Consideremos un polígono arbitrario M , AB un lado de el y una recta l' intersectada con AB en un ángulo de 90° y orientada de tal forma que al recorrerla en su sentido positivo pasamos del interior al exterior del polígono M atravesando AB . Sea α el ángulo entre l y l' de acuerdo a la orientación de la recta l' . Si G no contiene una rotación con ángulo α ni $\alpha + \pi$ le asignaremos a AB el valor de cero, si contiene alguna de estas rotaciones asignaremos el valor como sigue: Si la recta perpendicular al segmento forma con la recta l un ángulo α (de acuerdo a la orientación de esta recta perpendicular) y el

grupo G contiene una rotación con ángulo α asignaremos a AB un signo positivo, si no contiene una rotación con ese ángulo le asignaremos signo negativo.

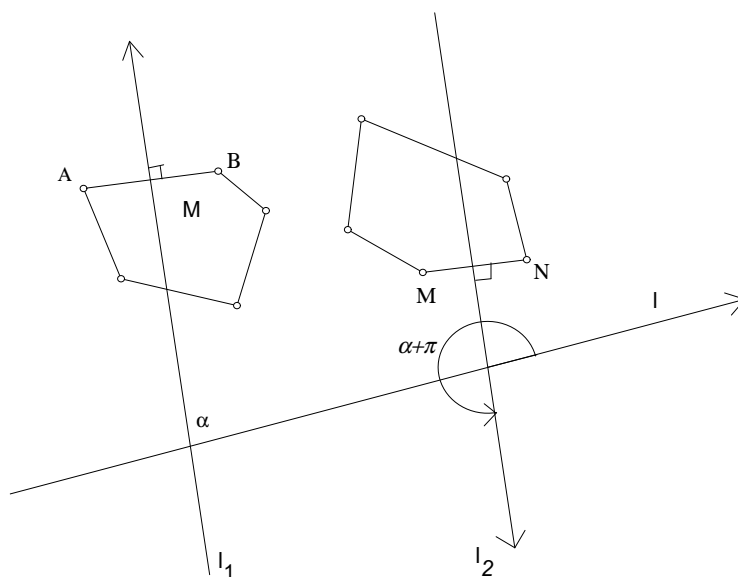


fig. 3.16 Para el lado AB del primer polígono el valor que se le asignará será de pósitoivo si se considera que el grupo tiene una rotación de ángulo α Sin embargo para el otro polígono se tiene que MN es paralela a AB y dada la posición del segmento la recta perpendicular estará en sentido contrario por lo cual dado que G no contiene una rotación de ángulo $\alpha + \pi$ se le asignará signo negativo.

Denotemos $J'_i(M)$ a la suma algebraica de las longitudes de los lados del polígono M tomando el signo o el valor asignado anteriormente.

Proposición 3.4.3: ·) $J'_i(M)$ es invariante bajo movimientos en G
 ··) $J'_i(M)$ aditivo.

Demostración:

·) Sean M_1 y M_2 dos polígonos que pueden obtenerse uno del otro con movimientos de G , queremos demostrar que $J'_i(M_1) = J'_i(M_2)$.

Sea g un movimiento que pertenece a G , y que convierte al polígono M_1 en el polígono

M_2 , tomemos A_1B_1 un lado de M_1 y A_2B_2 el lado de M_2 en el cual se transforma A_1B_1 mediante g , sea l_1 perpendicular a A_1B_1 y l_2 perpendicular a A_2B_2 orientadas de tal manera que al recorrerlas en su sentido positivo pasamos del interior al exterior de M_1 y M_2 segun corresponda.

Sea α_1 el ángulo entre l_1 y l , y α_2 el ángulo entre l_2 y l .

Supongamos que l_1 esta en la órbita de l , querriamos demostrar que l_2 esta también en la órbita de l .

Ahora, si g es una traslación paralela entonces sabemos que conserva ángulos y orientación, así que l_2 debe ser paralela a l_1 y con la misma dirección, por tanto ambas deben estar en la órbita de l . (fig. 3.17)

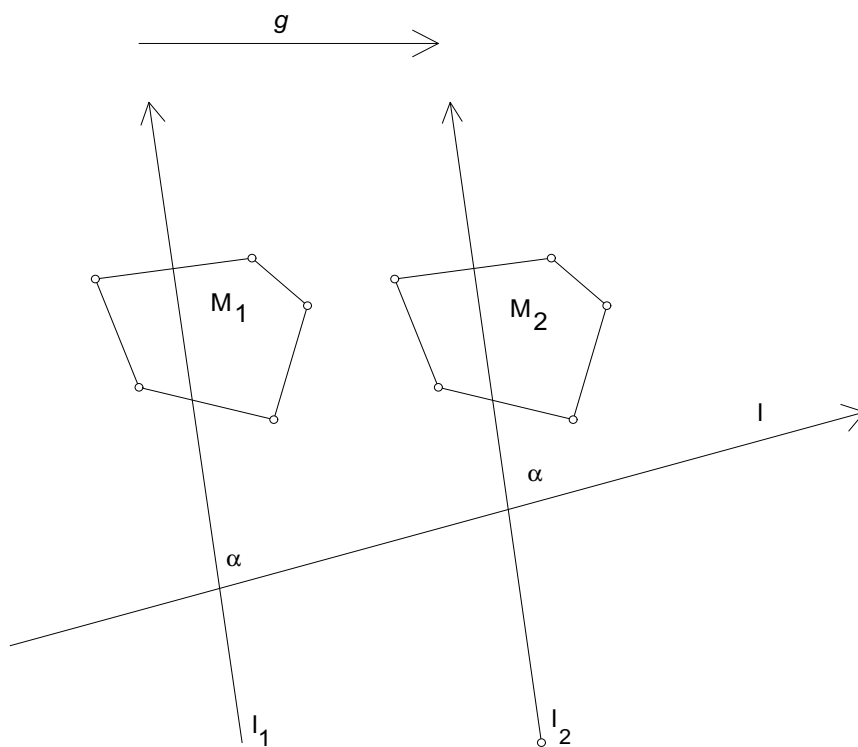


fig.3.17. Si g es una traslación paralela ambas rectas estan en la órbita de l .

Si g es rotación su ángulo es $\alpha_2 - \alpha_1$, y como l_1 está en la órbita de l también hay una rotación de ángulo α_1 , y como G es grupo debe haber también una rotación de ángulo $(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 = \alpha_2$, esto querría decir que l_2 está en la órbita de l . (fig 3.18)

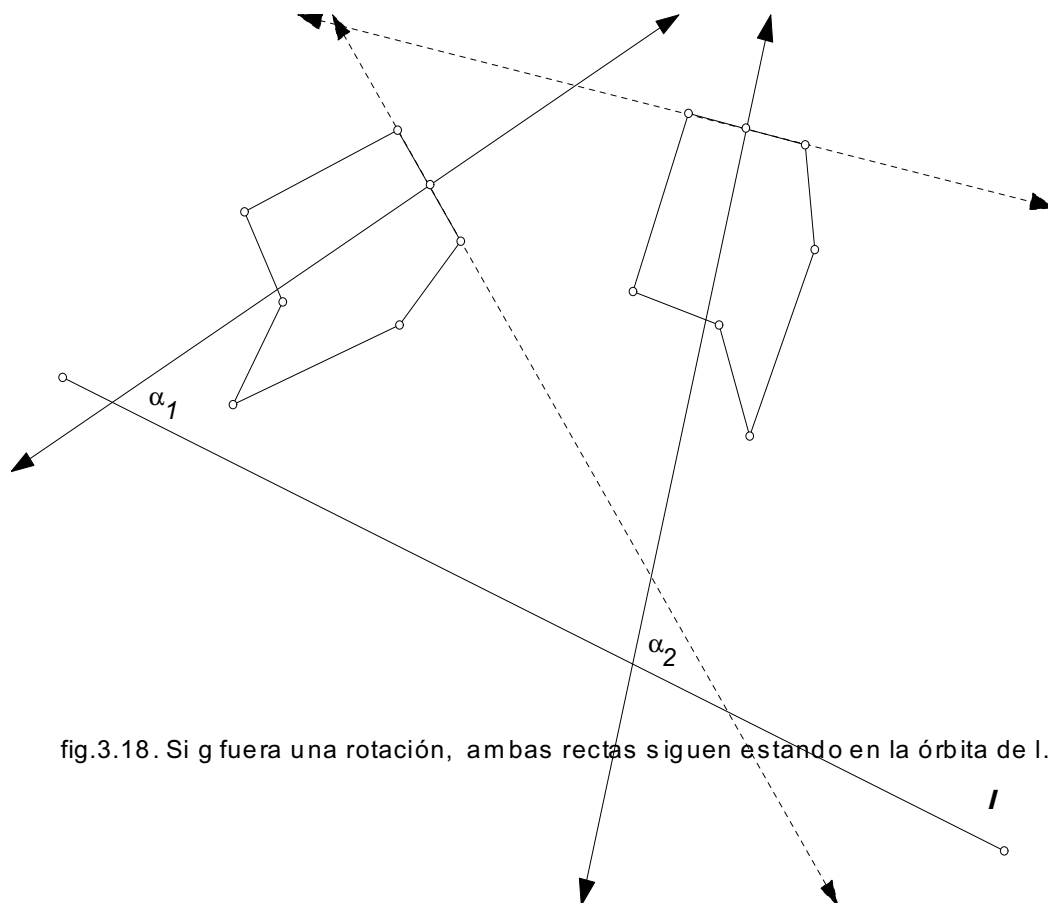


fig.3.18. Si g fuera una rotación, ambas rectas siguen estando en la órbita de l .

Si g es una simetría por deslizamiento, el eje de simetría forma un ángulo $\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$ con la recta l (fig3.19), esto querría decir que contienen una rotación con ángulo $\alpha_2 + \alpha_1$ de donde se deduce que también debe contener una rotación con ángulo α_2 , así que l_2 debe estar en la órbita de l .

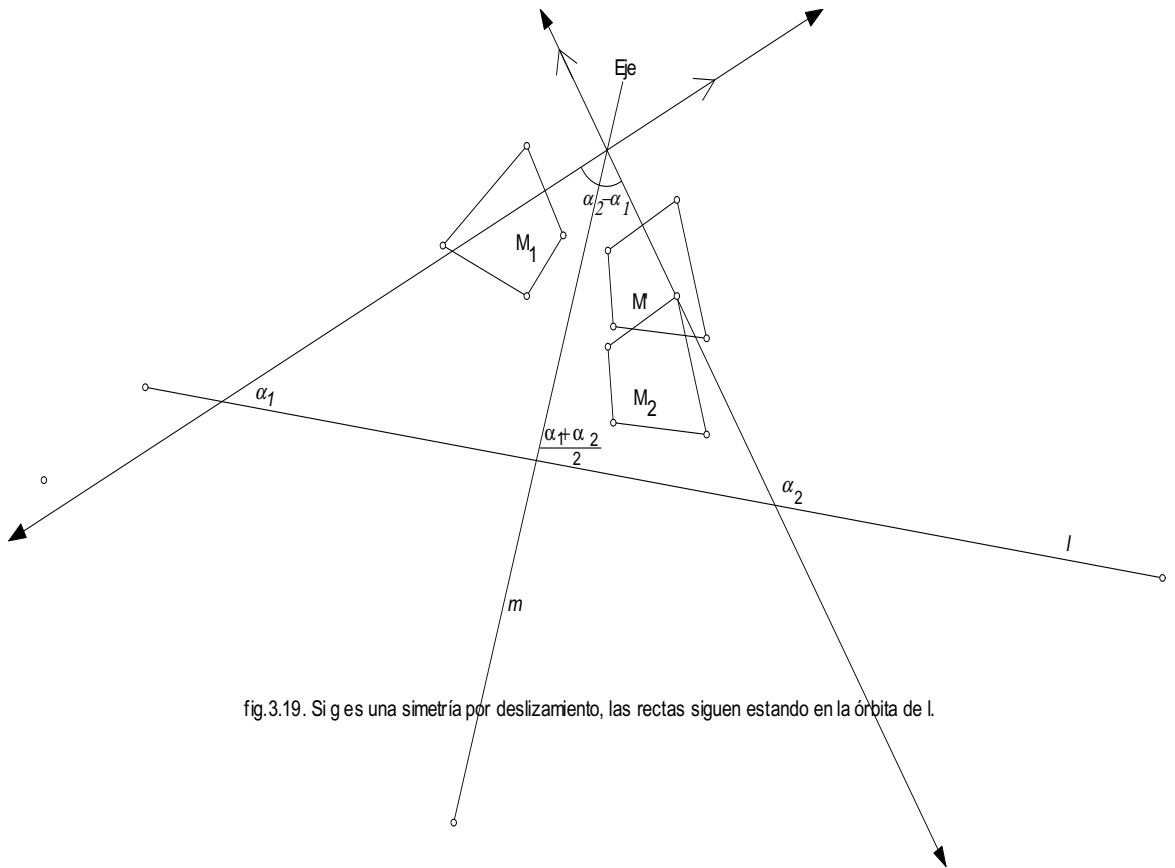


fig.3.19. Si g es una simetría por deslizamiento, las rectas siguen estando en la órbita de l .

Si sucediera que l'_1 (la recta paralela a l_1 pero con dirección contraria), está en la órbita de l un procedimiento análogo al anterior nos permite ver que l'_2 también está en la órbita de l , y de igual manera si ninguna de estas rectas entra en la órbita de l .

∴) $J'_l(M)$ es aditivo.

Sea A un polígono que se puede descomponer en polígonos $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$, tomemos un lado AB del polígono A tracemos una recta ortogonal a AB siguiendo las condiciones señaladas, al dividir A en polígonos $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$ el lado AB se transforma en lado de uno o más polígonos M_i , así, si l_1 está en la órbita de l , entonces dado que es ortogonal a l también es ortogonal a cada uno de los eslabones que lo integran así que AB será positivo y los eslabones también, por tanto ambos entran en el cálculo de J'_l y con el mismo signo.

Supongamos que hay un lado $A_i B_i$ de algún polígono M_i que está en el interior A

y tal que una recta ortogonal a l'_i está en la órbita de l entonces este lado ingresará a la suma $J'_l(M_1) + J'_l(M_2) + J'_l(M_3) + \dots + J'_l(M_k)$; con un valor positivo, ahora bien este lado debe ser también lado de algún otro polígono M_j para el cual la recta l'_i también es ortogonal, sin embargo con sentido contrario, entonces este lado también participa en la suma pero con signo contrario, entonces se anulan ambos valores, por tanto los lados interiores a A de los polígonos M_j no alteran el resultado de la suma. así que

$$J_l(A) = J'_l(M_1) + J'_l(M_2) + J'_l(M_3) + \dots + J'_l(M_k)$$

Recordemos que este resultado solo es válido al suponer que G no contiene rotaciones de 180° , ya que esto garantiza que una recta l y su paralela en sentido opuesto no pueden estar ambas en la órbita de una recta l .

Usaremos lo anterior para demostrar lo siguiente:

Teorema 3.4.1: *G debe contener al menos una rotación de 180°*

Demostración:

Supongamos que G no contiene ninguna rotación de 180° , consideremos una recta l elegida de tal forma que si G contiene una simetría por deslizamiento l es eje y si no es cualquiera, consideremos los triángulos rectángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ isósceles y congruentes tales que sus lados A_1C_1 y A_2C_2 son paralelos a la recta l como en la *fig.3.20*.

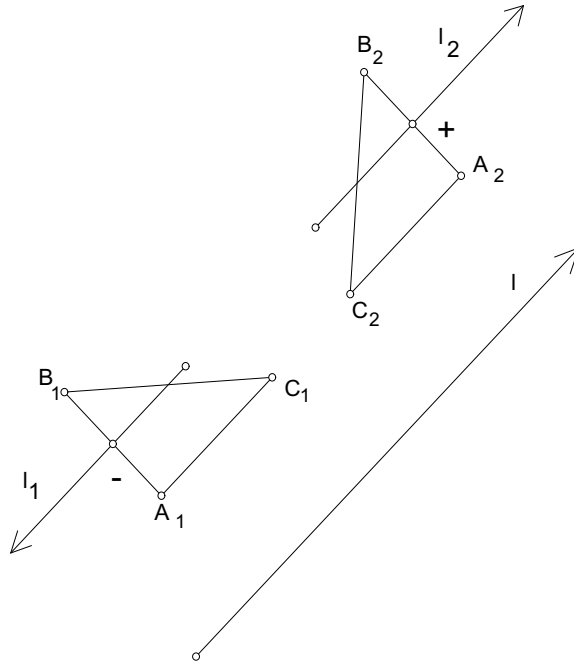


fig. 3.20. Triángulos rectángulos, isósceles y congruentes (equidisecables), para los cuales se obtiene diferente valor para J' .

El lado B_2C_2 del triángulo $A_2B_2C_2$ tiene valor cero ya que la recta perpendicular no puede estar en la órbita de l (forma un ángulo de $\frac{3}{4}\pi$, y al componer una rotación con este ángulo 4 veces se obtiene una rotación con ángulo 3π que se puede ver como una rotación de 180°) análogamente A_1C_1 , B_1C_1 y A_2C_2 (sus rectas respectivas forman ángulos $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$) , por tanto solo A_1B_1 y A_2B_2 intervienen en el cálculo de $J'_l(A_1B_1C_1)$ y $J'_l(A_2B_2C_2)$, sin embargo uno es positivo y el otro negativo, es decir $J'_l(A_1B_1C_1) \neq J'_l(A_2B_2C_2)$.

Esto querría decir que dos triángulos congruentes no son equidescomponibles con movimientos en G contradiciendo las propiedades de G .

Por lo tanto G debe contener al menos una rotación de 180° . ■

Ahora podemos demostrar el siguiente hecho:

Teorema 3.4.2 : *El grupo G debe contener todas las rotaciones de 180° .*

Demostración:

Sea s la simetría central que sabemos que debe tener, y O_1 el centro de esta simetría, tomemos O un punto arbitrario, sabemos que existe g que transforma O en O_1 y como G es grupo gsg^{-1} es un movimiento en G que deja fijo a O , y para el cual se puede verificar que es una rotación de 180° .

Si g fuese una traslación, g^{-1} también lo es, y según la proposición 3.1.1 se pueden ver como el producto de dos rotaciones de 180° cada una, entonces la composición gsg^{-1} es en realidad el producto de 5 rotaciones de 180° lo cual sigue siendo una rotación de 180° .

Si g fuese una rotación, g^{-1} también lo es, entonces la composición gsg^{-1} es en realidad el producto de 3 rotaciones lo cual según la proposición 3.1.2 sigue siendo una rotación de 180° .

Si g fuese una simetría por deslizamiento, es la composición de una reflexión y una traslación entonces g^{-1} también lo es. Sea un P un punto en el plano, P' el punto en el cual se transforma P bajo g , y P'' el punto en el que se transforma P' bajo s , y P''' el punto en el que se transforma P'' bajo g^{-1} (*fig.3.21*) para ver que gsg^{-1} es una rotación de 180° , habría que demostrar que $OP = OP'''$.

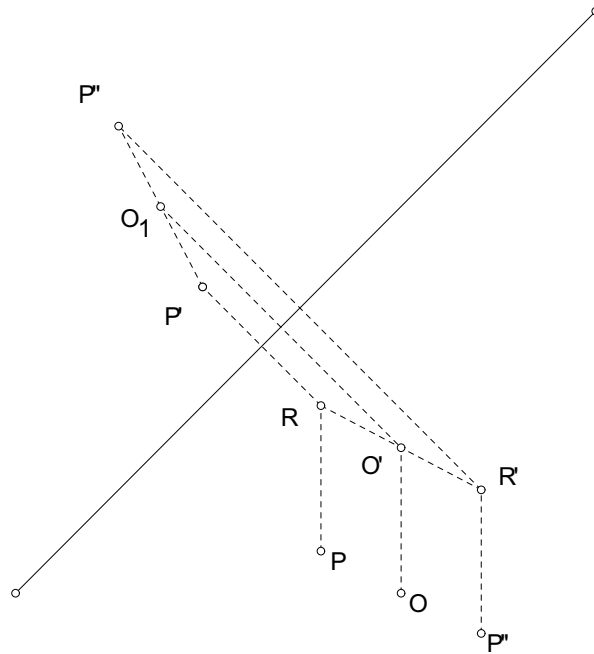


fig. 3.21. Si g fuera una simetría por deslizamiento, al realizar la composición se obtiene una rotación de 180° desde el punto O .

Observemos la *fig.3.21*, sabemos que O_1 es la imagen de O bajo g , consideremos el punto auxiliar O' (suponiendo que la traslación que compone a la simetría por deslizamiento, es paralela al segmento OO') entonces O_1 es la reflexión de O' , consideremos también los puntos R y R' que son las reflexiones de los puntos P' y P'' respectivamente, como la reflexión conserva distancias $RO' = O'R'$ de donde se observa que $OP = OP'''$ (ya que se obtienen de una traslación de O, R y R'), con lo cual se prueba que es una rotación de 180° . Lo cual prueba el teorema. ■

Finalmente habrá que probar lo siguiente

Teorema 3.4.3: *El grupo G contiene todas las traslaciones.*

Demostración:

Sea T una traslación cualquiera, sabemos que esta se puede expresar como el producto de dos simetrías centrales y como G contiene todas las simetrías centrales y es grupo debe contener también el producto de ellas, entonces debe contener a T . ■

Hemos demostrado entonces que el grupo G contiene todas las traslaciones y rotaciones de 180° lo cual indica que es S el mínimo grupo que permite la equidisecabilidad de cualesquiera dos polígonos de la misma área.

Este resultado ponen fin a este trabajo, sin embargo cabe preguntarse si la situación se repite en el espacio, la respuesta es no y aunque no trataremos este hecho hacemos mención de él para conocimiento de quienes lean este trabajo.

Bibliografía

1. Wentworth, J; Smith, D. E. (1990). Geometría plana y del espacio. México D.F.:Editorial porrua S.A.
2. William J. Gilbert; (1976). Modern Algebra with Applications.United States of America: AWiley-Interscience publication John Wiley & Sons.
3. Cárdenas H.; Lluis E.; Raggi F.; Tomas F. (1978) Algebra Superior. México D.F.: Trillas.
4. Eves Howard; (1985). Estudio de las geometrías. Volumen I. México D.F.: Editorial Uteha.
5. Boltianskii B. G.; (1973). Figuras Equivalentes y Equidescomponibles. México D.F.:Limusa-Winley, S.A.
6. Illingworth H. Jorge; Tesis.(1998). Algunos Teoremas de geometría moderna demostrados con transformaciones.Facultad de Ciencias. UNAM