



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

SIMETRÍA S3 DEL SABOR EN EL SECTOR LEPTÓNICO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

PRESENTA:

EDUARDO PEINADO RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALFONSO MONDRAGÓN BALLESTEROS

COMITÉ TUTORAL: DR. MYRIAM MONDRAGÓN CEBALLOS
DR. LUKAS NELLEN FILLA

pcf

posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

Dedico esta tesis a mi madre María Dolores Rodríguez Alcantar y a mi padre Asunción Peinado Bobadilla.

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor el Prof. Alfonso Mondragón Ballesteros por haberme propuesto este excelente, interesante y emocionante tema de tesis de doctorado.

A mis asesores Alfonso Mondragón Ballesteros y Myriam Mondragón Ceballos por todas las discusiones que ayudaron a enriquecer mis conocimientos así como también encaminaron mis intereses pasados y presentes en el área de física de altas energías.

A Olga Félix Beltrán y Ezequiel Rodríguez Jáuregui por las discusiones que ayudaron a enriquecer el trabajo y a aclarar muchas cosas.

A Jens Erler y Genaro Toledo por siempre estar disponibles a discutir los problemas con los que llegaba a sus oficinas.

A Juan Barranco, Roberto Noriega Papáqui y Melina Gómez Boch por las diversas discusiones.

A Enriqueta Hernández por todo el apoyo y sus consejos.

A todos mis maestros de la UNISON y de la UNAM.

Agradezco a los sinodales que revisaron y corrigieron esta tesis por sus atinados comentarios y correcciones

Dr. Peter Otto Hess Bechstedt
Dra. Rebeca Juárez Wysozka
Dr. Gabriel López Castro
Dr. Omar Miranda Romagnoli
Dr. Alfonso Mondragón Ballesteros
Dra. Myriam Mondragón Ceballos
Dr. Abdel Pérez Lorenzana

Asímismo, agradezco Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico que recibí para la realización de mis estudios de Doctorado con la beca CONACyT. y por el apoyo económico que recibí para la escritura de la Tesis a través de los proyectos; CONACyT 42026-F y CONACyT 51554-F y a los responsables de estos proyectos, los Doctores Jens Erler y Alfonso Modragón Ballesteros respectivamente.

A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM (DGAPA-UNAM) por el apoyo para la realización de esta tesis a través del proyecto No. PAPIIT-IN115207-2 y a los responsables de estos proyectos, los Doctores Myriam Mondragón Ceballos y Alfonso Mondragón Ballesteros.

Al Posgrado en Ciencias Físicas y muy en especial a Yanalté Herrero por toda su paciencia durante mis estudios.

Al Instituto de Física de la UNAM y en especial al Departamento de Física Teórica y a la Biblioteca Juan de Oryazábal que me brindaran sus instalaciones y servicios para llevar a cabo este trabajo de tesis.

Agradezco a mis profesores de la Universidad de Sonora Angelina Uribe A. y a Antonio Jáuregui D. por todo el apoyo y la ayuda que siempre me han dado.

A todos mis amigos de la UNAM y los “Gallineros” del IFUNAM en especial a Federico Cazares Bush y Saul Tapia Reynoso por los ratos de diversión y aguantar mis chistes malos.

Agradezco a las secretarias de Física Teórica: Maria Luisa Araujo, Lizette Ramirez y Martha Tinoco toda la ayuda que me dieron siempre que la necesité.

A Flavia Dalla Rosa por todo su apoyo, paciencia y comprensión durante estos tres últimos años así como por enseñarme el italiano.

A todos mis compañeros y amigos del “Gato Macho”.

Lista de acrónimos

BBN	Big Bang Nucleosynthesis
BooNE	Booster Neutrino Experiment
CKM	Cabibbo-Kobayashi-Maskawa
CMB	Cosmic Microwave Background
FCNC	Flavour Changing Neutral Current
GUTs	Grand Unified Theories
IGEX	International Germanium Experiment
K2K	KEK to Super-K (Long Baseline Experiment)
Kamiokande	Kamioka Nucleon Decay Experiment
KamLAND	Kamioka Liquid scintillator AntiNeutrino Detector
KATRIN	KARlsruhe TRItium Neutrino experiment
KEK	<i>Ko Enerugi Kasokuki Kenkyu Kiko</i> (High Energy Accelerator Research Organization, Tsukuba)
LFV	Lepton Flavour Violation
LMA	Large Mixing Angle (MSW solution)
LSND	Liquid Scintillator Neutrino Detector
ME	Modelo Estandar
MiniBooNE	(first phase of) BooNE
MINOS	Main Injector Neutrino Oscillation Search
MSW	Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein
$0\nu 2\beta$	Neutrinoless Double Beta Decay
PMNS	Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata
SAGE	Soviet-American Gallium Experiment
SNO	Sudbury Neutrino Observatory
SUSY	SUPerSYmmetry
VEV	Vacuum Expectation Value
WMAP	Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

Índice general

Lista de acrónimos	IX
Índice general	XIII
1. Introducción	1
2. El Modelo Estándar	3
2.1. Interacciones electro-débiles y fuertes	3
2.2. Contenido de materia del Modelo Estándar	4
2.3. La Lagrangiana del Modelo Estándar	5
2.4. Generación de las masas por el mecanismo de Higgs	6
2.5. Acoplamientos de Yukawa y violación de CP	8
2.6. Masas de los Neutrinos	9
2.7. Masas de Dirac	10
2.8. Masas de Majorana	11
2.9. El Mecanismo del subibaja (see-saw)	11
2.10. Violación de CP en los leptones	14
2.11. Corrientes cargadas y Matrices de Mezcla	15
2.12. Matrices de Mezcla	17
3. Simetrías del Sabor	21
3.1. ¿Simetrías Abelianas o no-Abelianas?	22
3.2. ¿Simetrías continuas o discretas?	22
4. La Extensión Mínima S_3-Invariante del Modelo Estándar	25
4.1. Como extender la teoría mas allá del Modelo Estándar	25
4.2. El grupo de permutaciones de tres objetos S_3	27

4.3. Lagrangiana de Yukawa en la extensión mínima S_3 -invariante del ME	28
5. El potencial de Higgs en la extensión mínima S_3-invariante del Modelo Estándar	33
5.1. Puntos estacionarios y minimización del potencial de Higgs	35
5.2. El mínimo normal	36
6. Matrices de masa de los leptones y la simetría Z_2	39
6.1. Matrices de masa de los leptones y la simetría Z_2	39
6.2. La matriz de masas de los leptones cargados	40
6.3. Reparametrización de la matriz de masas en función de sus eigenvalores	41
6.4. La matriz de masas de los neutrinos	45
6.5. La matriz de mezcla de los neutrinos	47
7. Masas y Mezclas de los neutrinos en la Extensión Mínima S_3-Invariante del Modelo Estándar	53
7.1. Desviación de la matriz de mezclas \mathbf{V}_{PMNS}^{th} de la forma tri-bimaxima	58
8. Corrientes Neutras que violan el Sabor	61
8.1. Cálculo del decaimiento $l_i \rightarrow 3l$	63
8.2. Calculo del decaimiento $l_i \rightarrow l_j \gamma$	68
8.3. Momento magnético anómalo del Muón	71
9. Conclusiones	79
A. Matriz de masas a partir de la Lagrangiana de Yukawa	83
B. Reparametrización de la matriz de masas de los leptones cargados	93
C. Matriz unitaria de los leptones cargados	95
D. Reparametrización de la matriz de masas de los neutrinos de Majorana	99

E. Cálculo de las corrientes neutras que violan el sabor leptónico a un rizo	101
---	------------

Resumen

En esta tesis se hizo un estudio teórico sistemático de la fenomenología de masas y mezclas de neutrinos y leptones cargados. Se obtuvieron predicciones precisas para los valores de los ángulos de mezcla θ_{23} y θ_{13} en función de las masas de los leptones cargados en buen acuerdo con las medidas experimentales más recientes. También se calcularon las tasas de ramificación de procesos que ocurren por intercambio de corrientes neutras que cambian el sabor, tales como $\mu \rightarrow e\gamma$ y $\mu \rightarrow 3e$, así como la contribución del intercambio de escalares neutros a la anomalía del momento magnético del muón.

Este estudio se efectuó en el marco teórico de la extensión mínima S_3 invariante del modelo Estándar. Extendimos el sector de Higgs agregando dos dobletes de $SU(2)_L$ y haciendo a la teoría invariante respecto de las permutaciones del sabor. En el sector leptónico se impuso una simetría Z_2 adicional con lo que el número de parámetros libres de la teoría se redujo drásticamente. Hicimos una comparación sistemática de nuestros resultados con la datos experimentales, y encontramos que nuestros resultados y predicciones teóricas están en excelente acuerdo con los datos experimentales más recientes.

Abstract

In this thesis we made a systematical theoretical study of the phenomenology of masses and mixings of neutrinos and charged leptons. We obtained precise predictions for the values of the mixing angles θ_{23} and θ_{13} as functions of the charged lepton masses in good agreement with the most recent experimental values. We also computed the branching ratios of lepton flavour violating processes, such as $\mu \rightarrow e\gamma$ and $\mu \rightarrow 3e$, as well as the contribution of the exchange of flavour changing scalars to the anomaly of the muon's magnetic moment.

This study was made in the framework of a minimal S_3 invariant extension of the Standard Model. We extended the Higgs sector by adding two $SU(2)_L$ doublets and making the theory invariant under flavour permutations. In the leptonic sector an extra symmetry Z_2 was imposed and the number of free parameters in the theory was reduced drastically. We made the systematical comparison of our theoretical results with the experimental data, we found the results reported in this work are in excellent agreement with the most recent experimental data.

Capítulo 1

Introducción

Las interacciones de norma de las partículas elementales están bien descritas por el grupo de norma del Modelo Estándar, $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ [1]. Por otro lado, las propiedades fundamentales de los fermiones como la cuantización de la carga se pueden explicar en el marco de una teoría de Gran Unificación (GUTs) como $SU(5)$ [2]. Supersimetría, la simetría fundamental que relaciona bosones con fermiones, es el tercer ingrediente de muchos modelos. Sin embargo, no hay un modelo que explique de manera exitosa, la existencia de tres generaciones de fermiones, la jerarquía observada entre los fermiones cargados y el hecho de que los quarks tengan ángulos de mezcla pequeños mientras que en el caso de los leptones dos de los ángulos de mezcla son grandes. Además, en el caso de los neutrinos, los datos experimentales se describen bien por patrones de mezcla muy particulares, como es el caso de la simetría $\mu - \tau$ [3–8] en donde $\sin^2 \theta_{23} = 1/2$ y $\theta_{13} = 0$ ó el de la forma tribimáxima [9, 10] en donde además de los dos valores anteriores se tiene que $\sin^2 \theta_{12} = 1/3$. Ésto debe tener, o creemos que debe tener, una explicación que no se encuentra en el Modelo Estándar y que debe corresponder a física más fundamental. Nosotros nos preguntamos hasta donde una simetría del sabor que actúa sobre las tres generaciones de fermiones podría o no explicar el origen de los patrones de mezcla de quarks y leptones.

En el Modelo Estándar hay sólo un bosón de Higgs, el cual es un doblete de $SU(2)$ débil. Si impusiéramos una simetría del sabor, éste podría ser asignado a una representación de singlete del grupo del sabor. Así, cuando se rompe la simetría de norma solamente las partículas de la tercera generación adquirirían masa. Esto suponiendo que las partículas de la tercera generación pertenecen a la representación irreducible de singlete del grupo del sabor.

Para estar de acuerdo con la fenomenología observada tenemos dos opciones, una es romper explícitamente la simetría del sabor y la otra es extender el sector de Higgs de tal manera que los bosones de Higgs extra se acoplen a todos los fermiones respetando la simetría del sabor [11]. A. Mondragón y E. Rodríguez-Jauregui estudiaron el caso en que la simetría S_3 del sabor se rompe explícitamente para generar las masas de las otras dos generaciones y explicar así la jerarquía de las masas de los quarks y las mezclas de éstos [12–19]. La segunda opción es extender el sector de Higgs tal como se hizo en [11].

Desarrollaremos esta tesis en el marco teórico de una extensión mínima del Modelo Estándar, en el cual se ha puesto como grupo del sabor al grupo no-Abeliano más pequeño, esto es el grupo de permutaciones de tres objetos S_3 [11]. Con el objetivo de no romper la simetría del sabor explícitamente, hemos extendido el sector de Higgs introduciendo tres bosones de Higgs, dobletes de $SU(2)$ en la representación reducible $\mathbf{1}_s \oplus \mathbf{2}$ del grupo S_3 del sabor. Con lo cual, una vez rota la simetría de norma, se generan tanto las masas como las mezclas de los quarks y de los leptones. Los resultados presentados en esta tesis fueron publicados en [20–24].

La tesis está estructurada como sigue: En el capítulo 2, se presenta brevemente el Modelo Estándar. En el capítulo 3, damos las razones por las cuales elegimos el grupo de sabor S_3 . En el capítulo 4, explicamos la extensión mínima S_3 invariante del Modelo Estándar y calculamos las matrices de masas de los fermiones. En el capítulo 5, se analiza el potencial de Higgs más general invariante del grupo del sabor S_3 y se calculan las matrices de masa de los bosones de Higgs. En el capítulo 6, se introduce una simetría Z_2 en el sector leptónico, lo cual nos permite reparametrizar las matrices de masa de los leptones en función de las masa de éstos y de las fases de Dirac solamente. En el capítulo 7 se analizan las masas y las mezclas de los neutrinos en este modelo así como la desviación de nuestra predicción teórica de la matriz de mezclas del patrón de mezclas tri-bimáximo. En el capítulo 8 se calculan las tasas de ramificación de los procesos que ocurren vía corrientes neutras que cambian el sabor leptónico así como la contribución de estas corrientes al momento magnético anómalo del muón. Por último en el capítulo 9 hacemos un resumen de los resultados obtenidos en este trabajo y damos una perspectiva sobre el desarrollo futuro del campo.

Capítulo 2

El Modelo Estándar

2.1. Interacciones electro-débiles y fuertes

El Modelo Estándar (ME) de las partículas elementales [1] es una teoría consistente, renormalizable y calculable dentro de las limitantes técnicas, que a excepción de las masas y las mezclas de los neutrinos, explica exitosamente los fenómenos conocidos de la física de las partículas elementales. La estructura del ME es, de cierto modo, una generalización de la electrodinámica cuántica (QED) ya que ésta es una teoría de campo renormalizable basada en una simetría de norma local $U(1)$. La generalización consiste en extender la invariancia de norma de la electrodinámica a un grupo de norma más grande.

El grupo de norma del ME G_{ME} es

$$G_{ME} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (2.1)$$

en donde el grupo $SU(3)_C$ es el que explica las interacciones fuertes mientras que $SU(2)_L \times U(1)_Y$ explica las interacciones electrodébiles de una manera unificada. Además de la extensión del grupo de norma, el Modelo Estándar contiene el mecanismo de Higgs el cual es el responsable de la generación de las masas en la teoría.

A diferencia de las interacciones electromagnéticas en las que el alcance de la interacción es infinito, las interacciones débiles son de corto alcance; ésto se debe a que los bosones intermediarios de las interacciones débiles tienen masas del orden de 80 GeV.

2.2. Contenido de materia del Modelo Estándar

En el Modelo Estándar hay tres generaciones ó “familias” de fermiones ψ_i , $i = 1, 2, 3$, donde i es el índice de familia. Las familias se numeran en orden jerárquico de acuerdo a su masa. La primer familia está formada así por los fermiones mas ligeros:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

El Modelo Estándar para una familia es una teoría completamente autocontenida y es autoconsistente. Sin embargo, en la naturaleza se observan otras dos familias más pesadas,

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

las cuales son idénticas a las partículas de la primer familia excepto por su masa.

Los campos fermiónicos ψ se describen por sus componentes de quiralidad derecha ψ_R e izquierda ψ_L

$$\psi_{L,R} = \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right) \psi, \quad \bar{\psi}_{L,R} = \bar{\psi} \left(\frac{1 \mp \gamma_5}{2} \right). \quad (2.4)$$

En el Modelo Estándar, los fermiones izquierdos y derechos tienen propiedades de transformación diferentes bajo el grupo de norma y cada una de las tres generaciones de fermiones está constituida por cinco representaciones diferentes del grupo de norma del Modelo Estándar:

$$Q_{Li}^I(3, 2)_{+1/6}, \quad u_{Ri}^I(3, 1)_{+2/3}, \quad d_{Ri}^I(3, 1)_{-1/3}, \quad L_{Li}^I(1, 2)_{-1/2}, \quad l_{Ri}^I(1, 1)_{-1}. \quad (2.5)$$

En esta notación, el superíndice I denota los eigenestados de interacción; los subíndices L y R denotan quiralidad izquierda y derecha respectivamente; $i = 1, 2, 3$ es el índice de sabor o de familias; los términos dentro del paréntesis indican las propiedades de transformación para cada fermión bajo los grupos $SU(3)_C$ y $SU(2)_L$ respectivamente; el subíndice del paréntesis es la hiper-carga $Y = Q_{em} - T_3$ del fermión correspondiente. Las interacciones de norma del Modelo Estándar no distinguen entre las diferentes generaciones

o familias; la magnitud de la interacción de norma depende de los números cuánticos pero no del índice de sabor i .

En el Modelo Estándar hay además un campo escalar, ϕ que se transforma bajo $SU(2)_L$ como un doblete, llamado bosón de Higgs

$$\phi(1, 2)_{+1/2}, \quad (2.6)$$

este campo es un singlete de $SU(3)$ y tiene hiper-carga $+1/2$. El bosón de Higgs se acopla a todos los fermiones y es el responsable de generar las masa a las partículas del Modelo Estándar -leptones, quarks y los bosones de norma W^\pm y Z .

2.3. La Lagrangiana del Modelo Estándar

La Lagrangiana del Modelo Estándar se obtiene de la invariancia de norma bajo el grupo G_{ME} de la Ec. (2.1) y da lugar a una teoría renormalizable [25]. La Lagrangiana completa del Modelo Estándar es la suma de la energía cinética de los campos de norma denotada por \mathcal{L}_{kn} , la energía cinética de los fermiones \mathcal{L}_{kf} , el término de los acoplamientos de Yukawa denotada como \mathcal{L}_Y y finalmente la energía cinética y el potencial del campo de Higgs denotados por L_H .

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kn} + \mathcal{L}_{kf} + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_H. \quad (2.7)$$

La invariancia de norma del segundo término de esta expresión bajo el grupo de norma $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ se obtiene en los términos de la energía cinética, cuando la derivada ordinaria se reemplaza por la derivada covariante,

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_s G_a^\mu \lambda^a + ig A_b^\mu T^b + ig' B^\mu \frac{Y}{2}. \quad (2.8)$$

En esta expresión, $G_a^\mu(X)$ son los ocho campos de los gluones, $A_b^\mu(X)$ son los tres bosones intermediarios de la interacción débil y $B^\mu(X)$ es el bosón de la hiper-carga. Las matrices λ_a son los generadores del grupo $SU(3)_C$ de las interacciones fuertes y se pueden representar con las matrices de Gell-Mann en el caso de tripletes; T_b son los generadores del grupo $SU(2)_L$ y se representan con las matrices de Pauli $\sigma_b/2$ de dimensión 2×2 ; finalmente tenemos las cargas Y del grupo $U(1)_Y$.

El primer término de la Ec. (2.7) es la energía cinética de los campos de norma

$$L_{kn} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los campos de norma, son los siguientes:

$$\begin{aligned} F_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g\epsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc}G_\mu^b G_\nu^c, \end{aligned} \quad (2.10)$$

en estas expresiones, $F_{\mu\nu}^a$ son los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los campos de norma $A_\mu^a(X)$, correspondientes a los tres generadores de $SU(2)$; ϵ^{abc} son las constantes de estructura del grupo $SU(2)$ y coinciden con el tensor ϵ_{abc} completamente antisimétrico de Levi-Civita; $B_{\mu\nu}$ son los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los campos de norma $B_\mu(X)$ asociados con $U(1)$; $G_{\mu\nu}^a$ son los tensores de norma antisimétricos construidos a partir de los ocho campos $G_\mu^a(X)$ de los gluones, correspondientes a los ocho generadores de $SU(3)$; f^{abc} son las constantes de estructura del grupo $SU(3)$.

2.4. Generación de las masas por el mecanismo de Higgs

Los términos bilineales en los campos fermiónicos no son invariantes de norma, y es por ésto que no es posible incluirlos en la Lagrangiana del. En el Modelo Estándar y en todas las teorías de norma se resuelve este problema agregando a la Lagrangiana el término L_H que genera la dinámica que producirá el rompimiento espontáneo de la simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$, conocido como el mecanismo de Higgs del rompimiento espontáneo de la simetría de norma. La Lagrangiana $L_H = (D^\mu\Phi)^\dagger D_\mu\Phi - V(\Phi^\dagger\Phi)$ de Higgs está dada por el principio de invariancia de norma y el requisito de renormalizabilidad. En el Modelo Estándar hay doce bosones de norma relacionados a la simetría de norma $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ y un solo escalar de Higgs relacionado al rompimiento espontáneo de la simetría

2.4. GENERACIÓN DE LAS MASAS POR EL MECANISMO DE HIGGS⁷

$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_{(EM)}$. El campo escalar complejo, doblete de $SU(2)$, lo escribimos como

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

La parte de la Lagrangiana de Higgs que contiene los acoplamientos de Higgs con los bosones de norma se escribe como,

$$L_H = (D^\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (2.12)$$

en donde el potencial $V(\Phi^\dagger \Phi)$, tiene los auto-acoplamientos del Higgs y es invariante bajo $SU(2) \otimes U(1)$ y de $SU(3)$, contiene a lo más términos cuárticos en ϕ , para garantizar la renormalizabilidad de la teoría:

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = -\mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (2.13)$$

De manera análoga a la electrodinámica se introduce la derivada covariante para obtener la invariancia de norma bajo $SU(2)_L \times U(1)_Y$,

$$D^\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} g_\tau \mathbf{A}_\mu - \frac{i}{2} g' Y B_\mu, \quad (2.14)$$

ésta contiene los términos de acoplamiento de los bosones de norma con el campo de Higgs. La Hermiticidad de L_H de la Ec. (2.12) implica que los parámetros μ^2 y λ sean reales. La Lagrangiana L_H , Ec. (2.12), respeta P , C , y T .

El rompimiento espontáneo de la simetría de norma $G_{ME} \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_{EM}$ se induce si el mínimo de V se obtiene para valores de Φ entre estados del vacío no nulos; esto es

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

en donde $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ es real y positivo.

En la figura 2.1 se muestra el potencial de Higgs antes y después del rompimiento de la simetría de norma. Si tomamos en cuenta que la masa del bosón W viene dada por

$$M_W = \frac{1}{\sqrt{2}} g' v \quad (2.16)$$

se obtiene que

$$v = 246 \text{ GeV}. \quad (2.17)$$

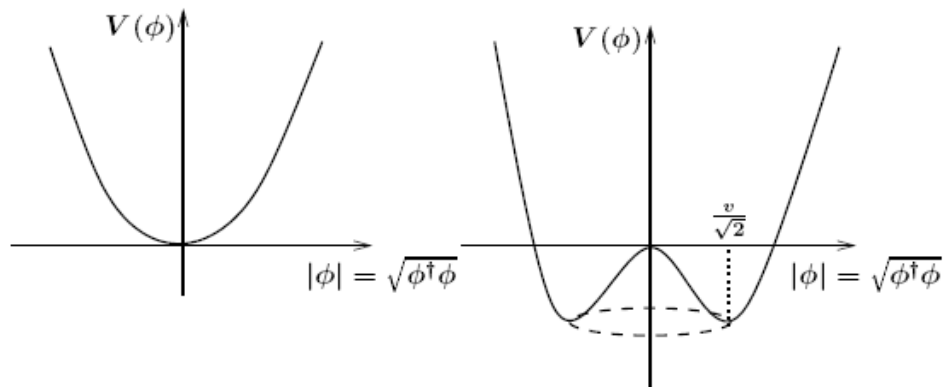


Figura 2.1: Potencial de Higgs antes y después del rompimiento espontáneo de la simetría de norma.

2.5. Acoplamientos de Yukawa y violación de CP

La Lagrangiana de Yukawa, L_Y , es la suma de los términos que acoplan el campo de Higgs con los campos de los quarks y los leptones. En la Lagrangiana de Yukawa, las condiciones de la renormalizabilidad y la invariancia de norma dan las restricciones más débiles y hay muchas posibilidades para las interacciones permitidas en la teoría.

En la representación de interacción las interacciones de norma son diagonales y universales en el sentido de que son descritas por una constante de acoplamiento de norma por cada factor en G_{ME} : g_s , g y g' . En esta representación, los eigenestados de interacción no tienen acoplamientos de norma entre fermiones de diferentes generaciones y no hay mezclas entre los fermiones de sabor diferente. Sin embargo, en el caso general las interacciones de Yukawa no son diagonales en esta representación. Por lo tanto en la representación débil los acoplamientos de Yukawa involucran fermiones de diferentes generaciones y, consecuentemente, los eigenestados de interacción se mezclan y no tienen masas definidas. El término de la Lagrangiana de Yukawa invariante de norma para una sola familia de fermiones está dado por la siguiente expresión:

$$L_Y = - (\bar{\nu}^e \quad \bar{e})_{L,1} Y_{11}^l \phi \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_{R,1} - (\bar{u} \quad \bar{d})_{L,1} Y_{11}^u \tilde{\phi} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{R,1}$$

$$- (\bar{u} \ \bar{d})_{L,1} Y_{11}^d \phi \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{R,1} + h.c., \quad (2.18)$$

en donde $\tilde{\phi} = i\tau_2\phi^*$ y las $Y^{u,d,l}$ son conocidas como acoplamientos de Yukawa en analogía con las constantes del acoplamiento pión-nucleón en la vieja teoría de Yukawa.

En el caso general de varias familias, las masas son reales, los acoplamientos de Yukawa Y^u , Y^d y Y^l son matrices complejas¹. En el caso de tres o más familias, esta parte de la Lagrangiana puede dar lugar a la violación de CP. Mas aún, toda la violación de CP en el modelo electrodébil se origina en este sector. Una explicación de por qué la violación de CP en este sector se relaciona con acoplamientos de Yukawa complejos se puede ver de la Hermiticidad de la Lagrangiana, ya que los diferentes términos de la Ec. (2.18) para tres familias de fermiones se pueden asociar en pares de la forma siguiente:

$$Y_{ij}\bar{\psi}_{Li}\phi\psi_{Rj} + Y_{ij}^*\bar{\psi}_{Rj}\phi^\dagger\psi_{Li}, \quad (2.19)$$

en esta expresión el índice i o j repetido no implica suma. La acción del operador de CP intercambia los operadores

$$\bar{\psi}_{Li}\phi\psi_{Rj} \leftrightarrow \bar{\psi}_{Rj}\phi^\dagger\psi_{Li}, \quad (2.20)$$

pero deja los coeficientes Y_{ij} y Y_{ij}^* invariantes. Esto significa que CP es una simetría del sector de Yukawa del Modelo Estándar si y sólo si $Y_{ij} = Y_{ij}^*$ con $i \neq j$. Se viola CP en el Modelo Estándar, si y sólo si [26]:

$$Y_{ij}^f \neq Y_{ij}^{*f} \quad y \quad Im \{ \det [S^d, S^u] \} \neq 0. \quad (2.21)$$

en donde para matrices de Yukawa Hermitianas $S^{u,d} = Y^{u,d}$ y para matrices de Yukawa no-Hermitianas $S^{u,d} = Y^{u,d}Y^{u,d\dagger}$.

Las interacciones de Yukawa son la fuente de las masas de los fermiones y la única fuente de violación de CP del Modelo Estándar.

2.6. Masas de los Neutrinos

En el Modelo Estándar, los neutrinos no tienen masa, por lo que para incluir en la teoría masas de neutrinos, el Modelo Estándar debe ser extendido

¹Normalmente se supone que son Hermitianas

a una teoría más completa. De los fermiones masivos del Modelo Estándar el que tiene la menor masa es el electrón, la cual es por lo menos cinco órdenes de magnitud mayor que las masas de los neutrinos [27], esto según las cotas cosmológicas superiores más recientes.

En el Modelo Estándar una vez que se introducen las componentes derechas de los neutrinos se pueden incluir tanto las masas como las mezclas de los neutrinos en completa analogía con los quarks. La Lagrangiana de Yukawa para los neutrinos se obtiene agregando la componente derecha de los neutrinos y la conservación del número leptónico. En este caso tendríamos neutrinos de Dirac.

2.7. Masas de Dirac

Las masas de Dirac para los neutrinos pueden ser generados al igual que para los quarks y los leptones cargados, por el mismo mecanismo de Higgs, lo único que necesita ser agregado al Modelo Estándar son las componentes derechas de los neutrinos, N_R , las cuales como dijimos antes son singletes bajo el grupo de norma del Modelo Estándar. El término de masa de Dirac es entonces de la forma

$$-\mathcal{L}_D = m_D \bar{\nu} \nu = m_D \bar{\nu}_L N_R + h.c. \quad (2.22)$$

en donde análogamente al caso de los quarks y los leptones cargados la masa de los neutrinos es $m_D = h_\nu \langle \phi^0 \rangle = h_\nu \frac{v}{\sqrt{2}}$, en donde h_ν es el acoplamiento de Yukawa del neutrino. La matriz de mezcla de los neutrinos en este caso es completamente análoga a la matriz de CKM. La cota superior para las masas de los neutrinos, $m_\nu \lesssim 1$ eV, implica que el acoplamiento de Yukawa del neutrino es tal que $h_\nu < 10^{-11}$, el cual es extremadamente pequeño en comparación con el acoplamiento del quark top $h_t = O(1)$, y también menor al acoplamiento del electrón, $h_{e^-} \sim 10^{-5}$.

Si queremos explicar las masas de los neutrinos con este mecanismo, nos metemos en el problema de explicar el por qué los acoplamientos de Yukawa para los neutrinos son tantos ordenes de magnitud menores a los acoplamientos de Yukawa del resto de los fermiones, por lo que el modo más natural de obtener masas pequeñas para los neutrinos es el mecanismo del subibaja (see-saw) el cual se explicará más adelante.

2.8. Masas de Majorana

Majorana descubrió en 1937 que un fermión neutro con masa, como el neutrino puede ser descrito por un espinor el cual tiene solo dos componentes independientes [28], imponiendo así la llamada condición de Majorana

$$\psi = \psi^c \quad (2.23)$$

en donde $\psi^c = \mathcal{C}\bar{\psi}^T = \mathcal{C}\gamma^{0T}\psi^*$ es la operación de conjugación de carga, con la matriz de conjugación de carga, \mathcal{C} , definida por la relación $\mathcal{C}\gamma^{\mu T}\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu$, $\mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1}$, $\mathcal{C}^T = -\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}\gamma^{5T}\mathcal{C}^{-1} = \gamma^5$ y $\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$, se tiene

$$P_L\psi_L^c = 0, \quad P_L\psi_R^c = \psi_R^c, \quad P_R\psi_L^c = \psi_L^c, \quad P_R\psi_R^c = 0. \quad (2.24)$$

En otras palabras, ψ_L^c es derecha y ψ_R^c es izquierda.

Descomponiendo la condición de Majorana (2.23) en componentes izquierda y derecha, $\psi_L + \psi_R = \psi_L^c + \psi_R^c$, y actuando en ambos lados de la ecuación con el operador proyector derecho P_R , se obtiene

$$\psi_R = \psi_L^c. \quad (2.25)$$

De este modo, la componente derecha, ψ_R , del campo del neutrino de Majorana ψ no es independiente, y está relacionado con la componente izquierda ψ_L a través de la conjugación de carga. El campo de Majorana se puede escribir como

$$\psi = \psi_L + \psi_L^c. \quad (2.26)$$

Usando la restricción (2.25) en el término de masa (2.22), se obtiene el término de masa de Majorana

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2}m_M(\bar{\psi}_L^c\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_L^c), \quad (2.27)$$

en donde el factor 1/2 se pone para no tener doble conteo debido a los grados de libertad de los neutrinos de Majorana.

2.9. El Mecanismo del subibaja (see-saw)

Los neutrinos tienen carga eléctrica cero lo cual nos permite explicar algunas de sus inusuales propiedades. Los neutrinos pueden ser partículas de

Dirac o de Majorana. Si los neutrinos son partículas de Majorana entonces éstos tienen masas de Majorana. Las componentes derechas de los neutrinos, si existen, son singletes de $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, por lo que sus masas no están protegidas por las simetría y por lo tanto pueden ser grandes: $M_R \gg v_{EW}$, en donde v_{EW} es la escala electrodébil.

Debido a que los neutrinos no tienen carga eléctrica tenemos dos posibles explicaciones para las masas de éstos, ya que pueden ser partículas de Dirac en cuyo caso estaríamos en un caso análogo al de los quarks ó pueden ser partículas de Majorana en cuyo caso haremos uso del mecanismo del subibaja (see-saw).

El mecanismo del subibaja (see-saw), explota el hecho de que los neutrinos no tienen carga eléctrica, si incluimos las componentes derechas de los neutrinos, además de tener la Lagrangiana de Dirac de los neutrinos, también se puede incluir masas de Majorana sin violar ninguna de las simetrías del Modelo Estándar debido a que estos términos serían singletes de G_{ME} . El término de Majorana se escribe como

$$\mathcal{L}_{Majorana} = -\frac{1}{2}\nu_R^T C^{-1} M_R \nu_R + h.c. \quad (2.28)$$

Si combinamos los términos de masa de Dirac y de Majorana, se obtiene la siguiente Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\nu mass} = \frac{1}{2}\omega_L^T C^{-1} \mathcal{M}_{D+M} \omega_L + h.c.$$

en donde \mathcal{M}_{D+M} es

$$\mathcal{M}_{D+M} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{m}_D \\ \mathbf{m}_D^T & M_R \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

y

$$\omega_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ C(\bar{\nu}_R)^T \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Para encontrar la expresión de la matriz de masa de los neutrinos ligeros se supone una jerarquía en los elementos de la matriz \mathcal{M}_{D+M} , esto es $m_D \ll m_R$ siendo $m_{D,R}$ las escalas de \mathbf{m}_D y M_R ; más precisamente: el eigenvalor más grande de $\sqrt{\mathbf{m}_D^\dagger \mathbf{m}_D}$ es mucho menor que el eigenvalor más pequeño de $\sqrt{M_R^\dagger M_R}$. Se puede demostrar que la matriz de los neutrinos ligeros se puede escribir como [29–32]

$$m_\nu \approx -\mathbf{m}_D M_R^{-1} \mathbf{m}_D^T \quad (2.31)$$

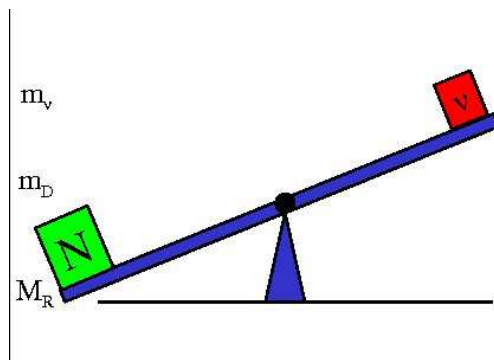


Figura 2.2: mecanismo del subibaja

mientras que la matriz de los neutrinos pesados se escribe como

$$M_R \approx M_R \quad (2.32)$$

en donde las correcciones a éstas están suprimidas por potencias de $(m_D/M_R)^2$. Ésto se ilustra en la figura (2.2). En el subibaja más simple para tres generaciones con tres neutrinos ligeros y tres neutrinos pesados son (si las matrices son diagonales)

$$\frac{m_{D1}^2}{M_1}, \quad \frac{m_{D2}^2}{M_2}, \quad \frac{m_{D3}^2}{M_3}, \quad M_1, \quad M_2 \quad \text{y} \quad M_3, \quad (2.33)$$

en donde m_{Di} y M_i son los eigenvalores de las matrices m_D y M respectivamente.

A este mecanismo se le conoce como see-saw tipo I. Hay otros mecanismo del subibaja en los cuales se introducen tripletes de $SU(2)$ los cuales adquieren VEV's pero no los trataremos en esta tesis.

Es importante hacer notar que si los neutrinos son partículas de Majorana, la condición de Majorana (2.23) implica que neutrino y anti-neutrino son la misma partícula. Esto trae como consecuencia que la fenomenología de neutrinos de Dirac sea distinta a la de neutrinos de Majorana, de aquí la importancia de encontrar una forma de saber de que tipo son los neutrinos.

La forma más prometedora de encontrar que tipo de partícula son los neutrinos es el decaimiento doble beta sin neutrinos, $0\nu 2\beta$, ya que en caso de observarse este proceso sería la prueba de que los neutrinos son partículas de Majorana.

Neutrinos estériles

El experimento LSND [33], sugiere la existencia de al menos un neutrino estéril a la escala de eV para poder acomodar la señal observada además de las oscilaciones solares y atmosféricas. Sin embargo después de los resultados de MiniBooNE [34] el esquema de un neutrino estéril está prácticamente excluido y el esquema más favorable de oscilaciones con neutrinos estériles es el (3+2) [35].

El ancho de decaimiento del bosón Z , indica que hay tres especies de neutrinos, ya que de acuerdo con al LEP la $N_\mu = 2.984 \pm 0.008$. Por lo que se puede concluir que a energías menores a la escala electrodébil no hay mas neutrinos activos. Sin embargo, esto no excluye la posibilidad de tener neutrinos estériles ligeros, los cuales son partículas como los otros neutrinos en todos los aspectos tales como masas, mezclas, etc., excepto que estos no tienen interacción débil. Una clase de estos neutrinos estériles son los compañeros derechos de los neutrinos, los cuales participan en el mecanismo del subibaja.

A pesar de que normalmente los neutrinos derechos de Majorana se suponen muy pesados, hay escenarios del mecanismo del subibaja como el “singular see-saw” [36] en el cuales se pueden tener dos neutrinos derechos muy pesados y un neutrino derecho de masa nula, el cual puede adquirir masa mediante correcciones radiativas.

2.10. Violación de CP en los leptones

En el sector leptónico, la condición de violación de CP esencialmente es la misma que para el sector de quarks, sin embargo, si los neutrinos son de Majorana aparecen en la teoría nuevas fases que violan CP. La condición de violación de CP es que el invariante de Jarlskog sea distinto de cero. El invariante de Jarlskog para el sector leptónico se escribe como el determinante del conmutador de las matrices de masas (cuadradas)² como [26, 37]

$$J = \frac{i}{2} \frac{\det(C)}{f(L)f(N)}, \quad (2.34)$$

²El invariante de Jarlskog se define con matrices Hermitianas por lo que si las matrices son complejas como es el caso necesitamos construirlo con las matrices cuadradas.

en donde $f(L)$ y $f(N)$ son funciones de las masas de los leptones cargados y de los neutrinos respectivamente,

$$\begin{aligned} f(L) &= (m_\tau^2 - m_\mu^2)(m_\mu^2 - m_e^2)(m_e^2 - m_\tau^2) \\ f(N) &= (m_{\nu_\tau}^2 - m_{\nu_\mu}^2)(m_{\nu_\mu}^2 - m_{\nu_e}^2)(m_{\nu_e}^2 - m_{\nu_\tau}^2) \end{aligned} \quad (2.35)$$

y C es el conmutador

$$C = [S_N, S_l] \quad (2.36)$$

en donde

$$S_l = M_l M_l^\dagger \quad (2.37)$$

y

$$S_N = \begin{cases} M_\nu M_\nu^\dagger & \text{Para neutrinos de Dirac} \\ M_\nu^\dagger M_\nu & \text{Para neutrinos de Majorana} \end{cases} \quad (2.38)$$

En estas expresiones M_l y M_ν son las matrices de masa de los leptones cargados y de los neutrinos respectivamente.

2.11. Corrientes cargadas y Matrices de Mezcla

En el Modelo Estándar sólo las interacciones débiles violan CP, así que los términos de la energía cinética L_{kf} de los fermiones son interesantes para estudios de violación de CP ya que incluyen a las corrientes de los fermiones en interacción con los campos de norma del grupo $SU(2) \times U(1)$.

La derivada covariante electrodébil, $D_\mu \psi_{L,R}$, (ver ecuación (2.14)) actuando sobre los campos fermiónicos está dada por:

$$D_\mu \psi_{L,R} = \left(\partial_\mu + ig \mathbf{T}_{L,R} \mathbf{A}_\mu + \frac{ig'}{2} Y_{L,R} \mathbf{B}_\mu \right) \psi_{L,R}, \quad (2.39)$$

donde $\mathbf{T}_{L,R}$ y $\frac{1}{2}Y_{L,R}$ son los generadores de $SU(2)$ y $U(1)$ respectivamente. Las relaciones de conmutación de los generadores de $SU(2)$ son:

$$[T_{L,R}^a, T_{L,R}^b] = i\epsilon_{abc} T_{L,R}^c \quad a, b, c = 1, 2, 3. \quad (2.40)$$

El generador Q de la carga eléctrica, e , está dado por

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}. \quad (2.41)$$

El acoplamiento de los fermiones de la primera familia a los bosones de norma se deriva directamente del término siguiente:

$$\begin{aligned}
L_{kf} &= (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu + \frac{ig'}{2} Y\mathbf{B}_\mu \right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\
&+ (\bar{\nu}_e \quad \bar{e})_L \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu + \frac{ig'}{2} \mathbf{B}_\mu \right) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\
&+ \bar{u}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{ig'}{2} Y\mathbf{B}_\mu \right) u_R + \bar{d}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{ig'}{2} Y\mathbf{B}_\mu \right) d_R \\
&+ \bar{e}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{ig'}{2} Y\mathbf{B}_\mu \right) e_R.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

En esta expresión se deben tomar los siguientes valores para la hiper-carga: $Y(L_L) = -1/2$, $Y(Q_L) = 1/3$, $Y(u_R) = 2/3$, $Y(d_R) = -1/3$, $Y(l_R) = -1/2$. Es precisamente en este término donde aparecen las corrientes de quarks y leptones. Si hacemos las operaciones indicadas, recordamos que $\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_\mu = \sum_1^3 T_i A_\mu^i$ y sustituimos los valores de las hiper-cargas, podemos reescribir esta Lagrangiana de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
L_{kf} &= (\bar{u} \quad \bar{d})_L i\gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + (\bar{\nu}_e \quad \bar{e})_L i\gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\
&+ \bar{e}_R i\gamma^\mu \partial_\mu e_R + \bar{u}_R i\gamma^\mu \partial_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu \partial_\mu d_R \\
&+ (gJ_\mu^1 A_\mu^1 + gJ_\mu^2 A_\mu^2) + \left(gJ_\mu^3 A_\mu^3 + \frac{g'}{2} J_\mu^Y B^\mu \right),
\end{aligned} \tag{2.43}$$

aquí hemos denotado a las corrientes cargadas de quarks y leptones como J_μ^1 y J_μ^2 y a las corrientes neutras las denotamos como J_μ^3 y J_μ^Y ; en función de los campos se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
J_1^\mu &= \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \\
J_2^\mu &= -i\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + i\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e - i\bar{u}_L \gamma^\mu d_L + i\bar{d}_L \gamma^\mu u_L \\
J_3^\mu &= \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu \nu_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L \\
J_Y^\mu &= \frac{1}{3} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L - (\bar{\nu}_e \quad \bar{e})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\
&\quad - 2\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{2}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

En la ausencia de términos de masa la Lagrangiana del Modelo Estándar es quiral, esto es, componentes derechas ψ_R e izquierdas ψ_L de los campos no

se mezclan, así que en el límite quiral sólo hay interacciones vectoriales y vectorial-axial. Sin embargo, cuando se rompe espontáneamente la simetría de norma G_{ME} las interacciones de Yukawa dan origen a las masas de los fermiones, y los términos de masa rompen la simetría de la Lagrangiana mezclando las diferentes componentes quirales de los campos.

2.12. Matrices de Mezcla

Una vez rota la simetría de norma, $SU(2) \otimes U(1) \rightarrow U'(1)$, los fermiones de Dirac - quarks, leptones cargados y neutrinos de Dirac - adquieren masa vía el mecanismo de Higgs. Como los acoplamientos de Yukawa no son diagonales en la base de interacción, las matrices de masa en la base de interacción tampoco son diagonales, esto es, los términos de masas de Dirac se escriben como

$$\mathcal{L}_{Mass} = \bar{d}_{Li}^I \mathbf{M}_{ij}^d \mathbf{d}_{Rj}^I + \bar{u}_{Li}^I \mathbf{M}_{ij}^u \mathbf{u}_{Rj}^I + \bar{l}_{Li}^I \mathbf{M}_{ij}^l \mathbf{l}_{Rj}^I + \bar{\nu}_{Li}^I \mathbf{M}_{ij}^\nu \mathbf{N}_{Rj}^I + \mathbf{h.c.}, \quad (2.45)$$

en donde las matrices \mathbf{M}^f son complejas de tres por tres y no diagonales. En la base de las interacciones los fermiones no son eigenestados de masa por lo que los términos de masa acoplan en una misma familia a fermiones de distinta generación. Sin embargo, nosotros podemos irnos a la base en que las masas son diagonales mediante transformaciones bi-unitarias, ésto es

$$\bar{\psi}_L^f \mathbf{U}_L^{\dagger f} \mathbf{U}_L^f \mathbf{M}^f \mathbf{U}_R^{\dagger f} \mathbf{U}_R^f \psi_R^f = \bar{\psi}_L^f \mathbf{M}_{\text{diag}}^f \psi_R^f, \quad (2.46)$$

en donde $\mathbf{M}_{\text{diag}}^f$ es una matriz diagonal y real cuyos elementos en la diagonal son asociados a las masas de los fermiones. Estas transformaciones bi-unitarias, llevan a los fermiones a la base de las masas,

$$\psi_{(L,R),i}^{\prime f} = \left(\mathbf{U}_{(L,R)}^f \right)_{ij} \psi_{(L,R),j}^f, \quad f = u, d, e, \quad (2.47)$$

en el caso de los neutrinos esto depende si son de Dirac, en cuyo caso sería igual que para los leptones cargados y los quarks, ó si son de Majorana, en cuyo caso sería distinto. En el caso de los neutrinos de Majorana, los neutrinos ligeros son los neutrinos izquierdos, y adquieren masa vía el mecanismo del see-saw, ver ecuación (2.31), y la matriz de masa de los neutrinos de Majorana,

$$m_\nu = -m_D M^{-1} m_D^T \quad (2.48)$$

es en general una matriz simétrica compleja por lo que se diagonaliza mediante la transformación

$$(V_L^\nu)^T m_\nu V_L^\nu = m_\nu^{diag} \quad (2.49)$$

y con esto los neutrinos izquierdos de Majorana en la base de las masas se escriben como

$$\nu_L^M = (V_L^\nu)^\dagger \nu_L^\nu, \quad (2.50)$$

en donde el super índice M indica que está en la base de las masas.

El término de la Lagrangiana que contiene las masas de Majorana para los neutrinos izquierdos en la representación de las masas se escribe como

$$\mathcal{L}_{mass}^\nu = \frac{1}{2} (\nu_L^M)^T \mathcal{C}^\dagger m_\nu^{diag} \nu_L^M, \quad (2.51)$$

en donde \mathcal{C} es la matriz de conjugación de carga.

Cuando se habla de los campos Físicos siempre pensamos en los campos que tienen masa bien definida. Si reescribimos la Lagrangiana del Modelo Estándar en la base de las masas para los fermiones, las únicas que transforman de una manera no trivial, son las corrientes cargadas, ya que contienen acoplamientos entre las distintas familias, y en éstas está también la información sobre la violación de CP, el término de las corrientes cargadas se expresa en la base de las masas como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W^\pm}^{fis} &= \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{Li} \gamma^\mu \left(\mathbf{U}_L^u \mathbf{U}_L^{d\dagger} \right)_{ij} d_{Lj} W_\mu^+ \\ &+ \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \bar{l}_{Lj} \left(\mathbf{U}_L^{\nu\dagger l} \right)_{ij} \nu_{Lj} W_\mu^+ + h.c. \end{aligned} \quad (2.52)$$

en esta expresión la matriz de mezclas de los neutrinos U y V son matrices unitarias de 3×3 .

Es claro que las corrientes cargadas sólo afectan a las partes izquierdas de los campos por lo que si los neutrinos son de Dirac o Majorana las expresiones para las matrices de mezcla no cambiarán. Las matrices de mezcla se definen entonces como

$$V_{CKM} = \mathbf{U}_L^u \mathbf{U}_L^{d\dagger} \quad y \quad U_{PMNS} = \mathbf{V}_L^\nu \mathbf{U}_L^{l\dagger}, \quad (2.53)$$

en donde CKM es por Cabibbo-Kobayashi-Maskawa y PMNS por Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata.

Si los neutrinos son partículas de Majorana, la matriz de mezclas se define como

$$V_{PMNS} = U_{PMNS}K \quad K = \text{diag}(1, e^{i\alpha}, e^{i\beta}), \quad (2.54)$$

en donde la matriz K es la matriz de fases de Majorana. Estas fases aparecen debido a que tres fases se pueden remover de la matriz de mezclas haciendo un refasamiento en los campos de los leptones cargados, sin embargo no podemos quitar las otras fases haciendo un refasamiento en los campos de los neutrinos de Majorana, ya que estos campos no son invariantes ante refasamientos.

Capítulo 3

Simetrías del Sabor

A pesar de su destacado éxito en explicar prácticamente todos los experimentos terrestres a energías de laboratorio, el Modelo Estándar no explica la razón de que haya tres familias de fermiones. Las masas y ángulos de mezclas de los quarks y leptones son parámetros libres que deben ser introducidos a mano. Una manera de constreñir la estructura de las generaciones, reducir el número de parámetros libres y predecir algunas relaciones entre masas y ángulos de mezcla, es aumentar la simetría de la teoría añadiendo una simetría “horizontal” o de “sabor”, la cual actúa en el espacio de sabor.

La motivación de tomar una simetría de sabor es que en el Modelo Estándar, antes del rompimiento de la simetría de norma, no hay diferencia alguna entre las tres generaciones y una simetría del sabor hace posible una explicación natural de esto. Por ejemplo, nosotros podemos permutar una generación con otra y la Lagrangiana queda invariante. Una vez rota la simetría de norma, la única distinción entre generaciones es que tienen diferentes masas.

Además de las posibles extensiones del Modelo Estándar que pretenden explicar los patrones de masas y mezclas de los fermiones, el imponer una simetría del sabor es posiblemente la más conservadora. Nosotros encontramos que es posible explicar tanto los ángulos de mezcla pequeños de los quarks como los ángulos de mezcla grandes de los neutrinos extendiendo el sector de Higgs e imponiendo una simetría del sabor. Los ángulos de mezcla pequeños de los quarks salen debido a la jerarquía de las masas de los quarks y la simetría permutacional del sabor S_3 , mientras que los ángulos de mezcla grande para los neutrinos se debe al juego entre la simetría del sabor, la jerarquía de las masas de los leptones cargados y el mecanismo del subibaja.

3.1. ¿Simetrías Abelianas o no-Abelianas?

Las simetrías Abelianas son aquellas en que los elementos del grupo conmutan, $AB=BA$, tal como $U(1)$. Se ha demostrado que estas simetrías son capaces de explicar la jerarquía observada de las masas de los fermiones, si las cargas de las tres generaciones se escogen apropiadamente. Esta idea fue propuesta por Froggatt y Nielsen en 1979 [38]. Sin embargo, estas simetrías no dan una explicación de la existencia de las tres generaciones y tampoco pueden predecir los patrones de las mezclas de los quarks y neutrinos debido a que las representaciones irreducibles de los grupos Abelianos son todas uni-dimensionales. Mientras que las simetrías no-Abelianas, en las cuales los elementos del grupo no conmutan en general, $AB \neq BA$, tienen representaciones irreducibles de más de una dimensión, por lo que tanto la jerarquía de las masas de los fermiones y los patrones en las mezclas de los mismos se puede explicar. Por ésto, nosotros nos inclinamos por usar simetrías no-Abelianas.

3.2. ¿Simetrías continuas o discretas?

La siguiente pregunta que surge de manera natural es ¿Qué tipo de simetría imponer: continua ó discreta? Una simetría continua es aquella, que como su nombre lo indica, las transformaciones son funciones continuas de los parámetros, por ejemplo las rotaciones o las traslaciones. Como ejemplo de transformaciones discretas tenemos las reflexiones, o las rotaciones de los vértices de un triángulo equilátero. El escoger una simetría discreta o una simetría continua como simetría del sabor, tiene dos implicaciones fuertes: a) en el caso de un rompimiento espontáneo de la simetría, las simetrías continuas dan origen a la aparición de bosones de Goldstone, mientras que las simetrías discretas no lo hacen, y b) los grupos discretos tienen varias representaciones de dimensión pequeña, las cuales son apropiadas para describir las tres generaciones de fermiones, mientras que en los grupos continuos tales como $SO(3)$ o $SU(3)$, se tiene un número infinito de posibilidades.

Por estas razones nos inclinamos por los grupos no-Abelianos discretos. Como además no se observa una simetría del sabor intacta a bajas energías, ésta debe de estar rota. Por lo tanto debemos especificar la escala del rompimiento de esta simetría y como se rompe, ya sea explícitamente, es decir incluyendo términos en la Lagrangiana que no respeten la simetría ó es-

pontáneamente, es decir mediante campos escalares que adquieren VEV's. Si no queremos meter otra escala de energía en la teoría, la simetría del sabor se rompe a la escala electrodébil junto con el grupo de norma del Modelo Estándar.

Hay en la literatura muchas extensiones del Modelo Estándar basadas en simetrías del sabor con grupos discretos no-Abelianos, por ejemplo los más populares son, el grupo A_4 [39–56] el cual es el grupo de permutaciones pares de cuatro objetos, el grupo de permutaciones de tres objetos S_3 [10, 11, 20–24, 57–92]. Otros grupos que han sido estudiados son los grupos diédricos D_n [93–104] así como el grupo de permutaciones de cuatro objetos S_4 [105–116].

El que nosotros hemos elegido es el grupo de permutaciones de tres objetos, S_3 , debido a que es el grupo discreto no-Abeliano más pequeño y tiene dos representaciones irreducibles de una dimensión y una representación irreducible de dos dimensiones. Además, antes del rompimiento de la simetría de norma, la Lagrangiana del Modelo Estándar es invariante ante permutaciones de los fermiones de una misma familia, por lo cual las permutaciones son una simetría natural del Modelo Estándar antes del rompimiento de la simetría de norma. Como tenemos representaciones de singlete y doblete podemos poner a la partícula de la tercera generación en la representación de singlete y a las otras dos generaciones, las ligeras, en el doblete, de esta forma se acomoda naturalmente la jerarquía de masa.

Los receta a seguir para construir la Lagrangiana invariante ante el grupo del sabor que elegimos es la siguiente:

- Una vez que elegimos el grupo, que en nuestro caso es el S_3 , escribimos sus posibles representaciones. El grupo de permutaciones tiene dos representaciones unidimensionales,

$\mathbf{1}_S$ simétrica,

$\mathbf{1}_A$ anti-simétrica,

y un doblete $\mathbf{2}$.

Ahora que tenemos las representaciones, escribimos los posibles productos de éstas. En el siguiente capítulo se mostrará explícitamente el producto de las representaciones irreducibles del grupo S_3 .

- Asignamos los campos fermiónicos a las representaciones irreducibles que elijamos. En nuestro caso las acomodamos en la representación reducible $\mathbf{2} \oplus \mathbf{1}_S$. Si queremos tener una Lagrangiana invariante del grupo de sabor y simultáneamente, generar las mezclas observadas debemos tener más dobletes de Higgs los cuales asignamos también a representaciones del grupo del sabor. En este caso nosotros tenemos tres dobletes de $SU(2)$ de Higgs los cuales asignamos también a la representación $\mathbf{2} \oplus \mathbf{1}_S$ del grupo del sabor.
- De acuerdo con la elección que hicimos para las representaciones irreducibles, la estructura de Yukawa de la teoría está restringida. Debido a que los bosones de Higgs adquieren valores de expectación en el vacío, VEV's, las matrices de masas de fermiones de Dirac, leptones y quarks, tendrán una sola forma dada.
- Debido a que tenemos más dobletes de $SU(2)$ de Higgs los cuales están acoplados a todos los campos fermionicos, tendremos procesos que violan el sabor, FCNC, las cuales se deben calcular para estar seguros que están abajo de las cotas superiores experimentales.

Capítulo 4

La Extensión Mínima S_3 -Invariante del Modelo Estándar

Una simetría del sabor o simetría horizontal, es una simetría que actúa en el espacio del sabor. Para poder explicar tanto las masas como las mezclas de quarks, leptones cargados y neutrinos, la simetría del sabor se debe romper debido a que el bosón de Higgs solo puede ser un singlete ante el grupo del sabor y por ende solo las partículas de la tercera generación adquieren masa.

Si queremos imponer una simetría del sabor sin romperla explícitamente debemos necesariamente extender el sector de Higgs. Esto quiere decir que necesitamos incluir mas bosones de Higgs con el objeto de dar masa a las partículas de las otras dos generaciones y generar las mezclas.

4.1. Como extender la teoría mas allá del Modelo Estándar

Nosotros hemos optado por extender el sector de Higgs ya que es la única partícula del Modelo Estándar que no se ha encontrado experimentalmente. En esta extensión imponemos a S_3 como una simetría fundamental en el sector de materia de la teoría. Esta suposición nos lleva necesariamente a extender el concepto de sabor y generaciones al sector de Higgs de la teoría. A partir de aquí y haciendo referencia a las representaciones irreducibles de S_3 , agregamos, además del bosón de Higgs en las representaciones de doblete

de $SU(2)_L$ y singlete de S_3 , otros dos bosones de Higgs en las representaciones de dobletes de $SU(2)_L$ los cuales sólo pueden estar en las dos componentes de la representación de doblete de S_3 . De este modo, todos los campos materiales en la Extensión Mínima S_3 -Invariante del Modelo Standard, a saber, campos de Higgs, de quarks, de leptones cargados y neutrinos, incluyendo los campos de los neutrinos derechos, están en la representación tridimensional $\mathbf{1}_S \oplus \mathbf{2}$ del grupo permutacional S_3 .

El sector leptónico de la teoría fue, además, constreñido por una simetría Abelianas Z_2 . Encontramos que la simetría $Z_2 \otimes S_3$ predice la mezcla tribimáxima y una jerarquía de masas invertida de los neutrinos izquierdos en buen acuerdo con el experimento.

Para ver en que forma nuestros resultados son compatibles con los datos experimentales y que nuestras predicciones sobre los ángulos de mezcla de los neutrinos son solo funciones de las masas de los leptones cargados (las cuales están bien determinadas experimentalmente) y de las masas de los neutrinos, reparametrizamos las matrices de masas de los leptones cargados y de los neutrinos [20] y calculamos la matriz de mezclas de los neutrinos, U_{PMNS} , y con ésta los ángulos de mezcla de los neutrinos, así como las fases de Majorana como función de las masas de los leptones cargados y los neutrinos en acuerdo excelente con los resultados experimentales más recientes [20].

En el Modelo Estándar las corrientes neutras que cambian el sabor a nivel árbol están suprimidas por el mecanismo de Glashow-Iliopoulos-Maiani (GIM) [117], sin embargo, si el sector de Higgs es extendido, las matrices de Yukawa por lo general no son diagonales en la base de las masas por lo que hay acoplamientos de dos fermiones con distinto sabor con los Higgses escalares, los cuales dan origen a procesos que violan el sabor. En la extensión mínima del ME, obtuvimos expresiones explícitas para las matrices de los acoplamientos de Yukawa del sector leptónico como funciones de las masas de los leptones cargados y de los bosones de Higgs neutros, lo cual nos permitió calcular las tasas de ramificación (branching ratios) de algunos procesos mediados por las corrientes neutras que cambian el sabor (FCNC) en términos de las masas de los bosones de Higgs neutros y los leptones cargados [21]. Nuestros resultados demuestran que, en la Extensión Mínima S_3 -Invariante del Modelo Estándar, la muy pronunciada jerarquía de las masas de los leptones cargados suprime fuertemente los procesos mediados por las corrientes neutras que cambian el sabor (FCNC), de tal modo que sus valores están muchos ordenes de magnitud por abajo de las cotas superiores obtenidas de los experimentos.

\otimes	$\mathbf{1}_S$	$\mathbf{1}_A$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{1}_S$	$\mathbf{1}_S$	$\mathbf{1}_A$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{1}_A$	$\mathbf{1}_A$	$\mathbf{1}_S$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}_A \oplus \mathbf{1}_S \oplus \mathbf{2}$

Tabla 4.1: Descomposición de productos tensoriales de dos representaciones irreducibles en representaciones irreducibles.

El momento magnético del muón, recibe una contribución debido al intercambio de bosones neutros que cambian el sabor. El cálculo de esta contribución en la Extensión Mínima S_3 -Invariante del Modelo Estándar, nos dió una contribución máxima posible pequeña pero no despreciable del 6% de la discrepancia entre los datos experimentales y la predicción del Modelo Estándar.

4.2. El grupo de permutaciones de tres objetos S_3

En el Modelo Estándar, los fermiones análogos en las diferentes generaciones tienen acoplamientos completamente idénticos a todos los bosones de norma de las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas. Antes de la introducción del bosón de Higgs y de los términos de Yukawa, la Lagrangiana es quiral e invariante con respecto de cualquier permutación de los campos fermiónicos izquierdos y derechos.

El grupo cuyos elementos son las seis permutaciones posibles de tres objetos (f_1, f_2, f_3) es el grupo S_3 . El grupo S_3 es el grupo discreto, no-Abeliano, con el número más pequeño posible de elementos. Las representaciones reales, tridimensionales de S_3 no son irreducibles. Se pueden descomponer en la suma directa de dos representaciones irreducibles, un doblete f_D y un singlete f_s , en las que

$$\mathbf{f}_S = \frac{1}{\sqrt{3}}(f_1 + f_2 + f_3) \quad \mathbf{f}_D^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 - f_2), \frac{1}{\sqrt{6}}(f_1 + f_2 - 2f_3) \right). \quad (4.1)$$

El producto tensorial de dos dobletes $p_D^T = (p_{D1}, p_{D2})$ y $q_D = (q_{D1}, q_{D2})$ contiene dos singletes, \mathbf{r}_S y $\mathbf{r}_{S'}$, y un doblete $r_D = (r_{D1}, r_{D2})$, en los que

$$\mathbf{r}_S = p_{D1}q_{D1} + p_{D2}q_{D2}, \quad \mathbf{r}_{S'} = p_{D1}q_{D2} - p_{D2}q_{D1}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{r}_D^T = (r_{D1}, r_{D2}) = (p_{D1}q_{D2} + p_{D2}q_{D1}, p_{D1}q_{D1} - p_{D2}q_{D2}). \quad (4.3)$$

Nótese que $\mathbf{r}_{S'}$ no es un invariante de S_3 , en tanto que \mathbf{r}_S si lo es.

4.3. Lagrangiana de Yukawa en la extensión mínima S_3 -invariante del ME

Después de la breve introducción a S_3 dada antes, es directo extender el Modelo Estándar. Además del campo de Higgs del Modelo Estándar H_s , introducimos un par de Higgses en un doblete de S_3 .

Los campos de los quarks, leptones cargados, neutrinos y bosones de Higgs son

$$Q^T = (u_L, d_L), \quad u_R, d_R, \quad L^T = (\nu_L, e_L), \quad e_R, \nu_R, H, \quad (4.4)$$

en una notación obvia. Todos estos campos tienen tres especies, y podemos suponer que cada uno de ellos forma una representación reducible $\mathbf{1}_S \oplus \mathbf{2}$ de S_3 .

Los dobletes llevan índices de mayúsculas I, J que corren de 1 a 2, y los singletes se denotan por $Q_3, u_{3R}, d_{3R}, L_3, e_{3R}, \nu_{3R}$ y H_S . Note que el subíndice 3 no significa tercera generación y se refiere a singlete de S_3 .

La Lagrangiana de Yukawa invariante ante el grupo del sabor S_3 se puede construir formando los singletes del grupo mediante el producto de tres representaciones irreducibles, para lo cual hacemos uso de las reglas de productos de representaciones irreducibles.

Por ejemplo, el producto de tres singletes

$$\mathbf{1}_s \otimes \mathbf{1}_s \otimes \mathbf{1}_s$$

es claramente un singlete, de igual forma podemos formar un singlete con el producto de dos dobletes y al multiplicar éste con otro singlete formamos un singlete,

$$[\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}]_s \otimes \mathbf{1}_s,$$

y por último del producto de tres dobletes también se forma un singlete,

$$[\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}]_s.$$

Con ésto se obtienen los invariantes ante el grupo de permutaciones de tres objetos, el más simple es el producto de tres singletes, ésto es por ejemplo para los leptones cargados

$$\bar{L}_3 H_S e_{3R}. \quad (4.5)$$

Las interacciones de Yukawa renormalizables más generales están dadas por

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{Y_D} + \mathcal{L}_{Y_U} + \mathcal{L}_{Y_E} + \mathcal{L}_{Y_\nu}, \quad (4.6)$$

en las que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_D} &= -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR} - Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R} \\ &- Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\ &- Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR} - Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R} + h.c., \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_U} &= -Y_1^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_S^* u_{IR} - Y_3^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_S^* u_{3R} \\ &- Y_2^u [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} (i\sigma_2) H_1^* u_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} (i\sigma_2) H_2^* u_{JR}] \\ &- Y_4^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_I^* u_{IR} - Y_5^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_I^* u_{3R} + h.c., \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_E} &= -Y_1^e \bar{L}_I H_S e_{IR} - Y_3^e \bar{L}_3 H_S e_{3R} \\ &- Y_2^e [\bar{L}_I \kappa_{IJ} H_1 e_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ} H_2 e_{JR}] \\ &- Y_4^e \bar{L}_3 H_I e_{IR} - Y_5^e \bar{L}_I H_I e_{3R} + h.c., \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_\nu} &= -Y_1^\nu \bar{L}_I (i\sigma_2) H_S^* \nu_{IR} - Y_3^\nu \bar{L}_3 (i\sigma_2) H_S^* \nu_{3R} \\ &- Y_2^\nu [\bar{L}_I \kappa_{IJ} (i\sigma_2) H_1^* \nu_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ} (i\sigma_2) H_2^* \nu_{JR}] \\ &- Y_4^\nu \bar{L}_3 (i\sigma_2) H_I^* \nu_{IR} - Y_5^\nu \bar{L}_I (i\sigma_2) H_I^* \nu_{3R} + h.c., \end{aligned} \quad (4.10)$$

y

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

En las ecuaciones (4.7-4.10), los términos se desglosan de la siguiente manera:

1. El término proporcional a Y_1^f viene del producto del doblete de S_3 de los fermiones izquierdos, del dobles de S_3 de los fermiones derechos y del singlete de S_3 de Higgs.

2. El término proporcional a Y_3^f viene del producto del singlete de S_3 de los fermiones izquierdos, del singlete de S_3 de los fermiones derechos y del singlete de S_3 de Higgs.
3. Los términos proporcionales a Y_2^f viene del producto del doblete de S_3 de los fermiones izquierdos, del dobles de S_3 de los fermiones derechos y del doblete de S_3 de Higgs.
4. Los términos proporcionales a Y_4^f viene del producto del singlete de S_3 de los fermiones izquierdos, del dobles de S_3 de los fermiones derechos y del doblete de S_3 de Higgs.
5. Los términos proporcionales a Y_5^f viene del producto del doblete de S_3 de los fermiones izquierdos, del singlete de S_3 de los fermiones derechos y del doblete de S_3 de Higgs.

Suponemos que los neutrinos son de Majorana, por lo que las masas de los neutrinos ligeros se obtienen mediante el mecanismo del subibaja (see-saw). Para ésto introducimos el término de masa de Majorana para los neutrinos derechos, los cuales suponemos que también pertenecen a la representación reducible $\mathbf{1}_S \oplus \mathbf{2}$ de S_3 ,

$$\mathcal{L}_M = -M_1 \nu_{IR}^T C \nu_{IR} - M_3 \nu_{3R}^T C \nu_{3R}, \quad (4.12)$$

en la que C es la matriz de conjugación de carga. Nótese que la simetría del sabor nos impone la condición de que dos de las masas de los neutrinos derechos son necesariamente iguales.

Debido a la presencia de tres campos de Higgs, el potencial de Higgs, $V_H(H_S, H_D)$ es más complicado que el del Modelo Estándar. Después del rompimiento espontáneo de la simetría de norma, las matrices de masas de los fermiones de Dirac que se obtienen de las Lagrangianas de Yukawa en las ecuaciones (4.7-4.10) son de la forma¹

$$M_D^f = \begin{pmatrix} -2Y_1^f \langle H_S \rangle - 2Y_2^f \langle H_2 \rangle & -2Y_2^f \langle H_1 \rangle & -2Y_5^f \langle H_1 \rangle \\ -2Y_2^f \langle H_1 \rangle & -2Y_1^f \langle H_S \rangle + 2Y_2^f \langle H_2 \rangle & -2Y_5^f \langle H_2 \rangle \\ -2Y_4^f \langle H_1 \rangle & -2Y_4^f \langle H_2 \rangle & -2Y_3^f \langle H_S \rangle \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

en donde f indica fermiones y es para quarks u y d así como para los leptones cargados y los neutrinos de Dirac.

¹ver apéndice A

El mínimo normal del potencial, es decir el que preserva CP y carga, tiene una simetría accidental S'_2 en el mínimo, el cual es el mínimo absoluto [118–120]. Esta simetría nos relaciona dos las esperanzas entre estados del vacío ($VEV's$) las cuales son reales e iguales $\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle$. Además si queremos reproducir las mezclas de los quarks es necesario que $\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle \neq 0$ y $\langle H_s \rangle \neq 0$.

La única restricción sobre los valores de expectación en el vacío de los bosones de Higgs hasta este momento es

$$\langle H_s \rangle^2 + \langle H_1 \rangle^2 + \langle H_2 \rangle^2 \simeq (246 \text{ GeV})^2/2,$$

la cual viene de la masa del bosón W .

Con esto, las matrices de masa para los fermiones de Dirac están dadas por la forma general

$$\mathbf{M}_D^f = \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 & \mu_2 & \mu_5 \\ \mu_2 & \mu_1 - \mu_2 & \mu_5 \\ \mu_4 & \mu_4 & \mu_3 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Las masas de Majorana para ν_L pueden obtenerse del mecanismo del subibaja (4.12) y (4.14), y está dado por

$$\mathbf{M}_\nu = \mathbf{M}_D^\nu \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{M}_D^\nu)^T, \quad (4.15)$$

en la que como se puede ver de la ecuación (4.12), es diagonal y tiene la forma

$$\tilde{\mathbf{M}} = \text{diag}(M_1, M_1, M_3), \quad (4.16)$$

por lo que para los neutrinos de Majorana, la matriz de masa obtiene la forma

$$M_\nu = \begin{pmatrix} \frac{(\mu_1^\nu + \mu_2^\nu)^2 + (\mu_2^\nu)^2}{M_1} + \frac{(\mu_5^\nu)^2}{M_3} & \frac{(\mu_5^\nu)^2}{M_3} + \frac{2\mu_1^\nu \mu_2^\nu}{M_1} & \frac{\mu_5^\nu \mu_3^\nu}{M_3} + \frac{(\mu_1^\nu + 2\mu_2^\nu)\mu_4^\nu}{M_1} \\ \frac{(\mu_5^\nu)^2}{M_3} + \frac{2\mu_1^\nu \mu_2^\nu}{M_1} & \frac{(\mu_1^\nu - \mu_2^\nu)^2 + (\mu_2^\nu)^2}{M_1} + \frac{(\mu_5^\nu)^2}{M_3} & \frac{\mu_5^\nu \mu_3^\nu}{M_3} + \frac{\mu_1^\nu \mu_4^\nu}{M_1} \\ \frac{\mu_5^\nu \mu_3^\nu}{M_3} + \frac{(\mu_1^\nu + 2\mu_2^\nu)\mu_4^\nu}{M_1} & \frac{\mu_5^\nu \mu_3^\nu}{M_3} + \frac{\mu_1^\nu \mu_4^\nu}{M_1} & \frac{(\mu_3^\nu)^2}{M_3} + 2\frac{(\mu_4^\nu)^2}{M_1} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Todos los elementos en las matrices de masas pueden ser complejos; no hay restricción debida a S_3 .

Las matrices de masas se diagonalizan por medio de matrices unitarias, como

$$U_{d(u,e)L}^\dagger \mathbf{M}_{d(u,e)} U_{d(u,e)R} = \text{diag}(m_{d(u,e)}, m_{s(c,\mu)}, m_{b(t,\tau)}), \quad (4.18)$$

$$U_\nu^T \mathbf{M}_\nu U_\nu = \text{diag}(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}). \quad (4.19)$$

Las masas diagonales, m 's, pueden ser complejas y en tal caso, las masas físicas son las $|m|$'s. Las matrices de mezclas están definidas como

$$V_{CKM} = \mathbf{U}_L^u \mathbf{U}_L^{d\dagger} \quad \text{y} \quad V_{PMNS} = \mathbf{V}_L^\nu \mathbf{U}_L^{l\dagger}. \quad (4.20)$$

Capítulo 5

El potencial de Higgs en la extensión mínima S_3 -invariante del Modelo Estándar

En la extensión Mínima S_3 -invariante del Modelo Estándar, el sector de Higgs se extiende con dos dobletes de $SU(2)$ de Higgs adicionales con el objeto de generar las masas de los fermiones sin romper la simetría del sabor, que en nuestro caso asumimos que es S_3 . Suponemos que así como los fermiones de una familia pertenecen a la representación tridimensional reducible $\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$ del grupo de permutaciones de tres objetos, S_3 , los campos de Higgs también pertenecen a esta representación, con lo cual se extienden los conceptos de sabor y generación al sector de Higgs [11].

En esta sección analizaremos las condiciones de mínimo del potencial más general invariante de S_3 [118–120].

Como se vió en la sección 2.4, en el Modelo Estándar el campo de Higgs, doblete de $SU(2)$, se introduce para romper la simetría $SU(2) \times U(1)$ y dar masa a las partículas. El potencial de Higgs está dado por

$$V(\Phi) = -\mu^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4 \quad \text{where} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

el parámetro λ debe ser positivo para tener un vacío estable.

En la extensión mínima S_3 invariante del Modelo Estándar, el sector de Higgs es extendido, esto es, hay tres campos de Higgs dobletes de $SU(2)$, Φ_a , Φ_b , y Φ_c , los cuales entran en una representación reducible tridimensional

de S_3 como sigue

$$\Phi \rightarrow H = (\Phi_a, \Phi_b, \Phi_c)^T.$$

La representación de triplete de S_3 se puede descomponer como $\mathbf{1}_s \oplus \mathbf{2}$, así, expresamos los tres campos de Higgs como

$$H_s = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Phi_a + \Phi_b + \Phi_c), \quad \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_a - \Phi_b) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(\Phi_a + \Phi_b - 2\Phi_c) \end{pmatrix}.$$

La Lagrangiana del sector de Higgs en la extensión mínima S_3 invariante del Modelo Estándar se expresa de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_\Phi = [D_\mu H_S]^2 + [D_\mu H_1]^2 + [D_\mu H_2]^2 - V(H_1, H_2, H_S),$$

en donde D_μ es la derivada covariante. Las masas de los bosones de norma W^\pm y Z están dadas por:

$$m_W^2 = \frac{g^2 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}{4} \quad (5.2)$$

$$m_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2) (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}{4}. \quad (5.3)$$

El potencial de Higgs más general renormalizable e invariante ante la simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \times S_3$ se puede escribir como [57, 73]

$$\begin{aligned} V = & \mu_1^2 (H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2) + \mu_0^2 (H_S^\dagger H_S) + a (H_S^\dagger H_S)^2 \\ & + b (H_S^\dagger H_S) (H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2) + c (H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2)^2 \\ & + d (H_1^\dagger H_2 - H_2^\dagger H_1)^2 + e f_{ijk} \left((H_S^\dagger H_i) (H_j^\dagger H_k) \right) \\ & + f \left\{ (H_S^\dagger H_1) (H_1^\dagger H_S) + (H_S^\dagger H_2) (H_2^\dagger H_S) \right\} \\ & + g \left\{ (H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2)^2 + (H_1^\dagger H_2 + H_2^\dagger H_1) \right\} \\ & + h \left\{ (H_S^\dagger H_1) (H_S^\dagger H_1) + (H_S^\dagger H_2) (H_S^\dagger H_2) \right. \\ & \left. + (H_1^\dagger H_S) (H_1^\dagger H_S) + (H_2^\dagger H_S) (H_2^\dagger H_S) \right\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

en donde $f_{112} = f_{121} = f_{211} = -f_{222} = 1$.

5.1. PUNTOS ESTACIONARIOS Y MINIMIZACIÓN DEL POTENCIAL DE HIGGS³⁵

Los dobletes de $SU(2)_L$ de Higgs con índices de sabor 1, 2, S son

$$H_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_7 + i\phi_{10} \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_8 + i\phi_{11} \end{pmatrix}, H_S = \begin{pmatrix} \phi_5 + i\phi_6 \\ \phi_9 + i\phi_{12} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Si definimos

$$\begin{aligned} x_1 &= H_1^\dagger H_1, & x_2 &= H_2^\dagger H_2, & x_3 &= H_S^\dagger H_S, \\ x_4 &= \mathcal{R}(H_1^\dagger H_2), & x_5 &= \mathcal{I}(H_1^\dagger H_2), & x_6 &= \mathcal{R}(H_1^\dagger H_S), \\ x_7 &= \mathcal{I}(H_1^\dagger H_S), & x_8 &= \mathcal{R}(H_2^\dagger H_S), & x_9 &= \mathcal{I}(H_2^\dagger H_S), \end{aligned} \quad (5.6)$$

el potencial de Higgs invariante bajo la simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes S_3$ se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned} V &= \mu_1^2 (x_1 + x_2) + \mu_0^2 x_3 + ax_3^2 + bx_3 (x_1 + x_2) + c (x_1 + x_2)^2 - 4dx_5^2 \\ &+ g [(x_1 - x_2)^2 + 4x_4^2] + f (x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_9^2) + 2h (x_6^2 - x_7^2 + x_8^2 - x_9^2) \\ &+ 2e [2x_4x_6 + x_8(x_1 - x_2)] \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.1. Puntos estacionarios y minimización del potencial de Higgs

Como nos interesa hacer contacto de alguna manera con el Modelo Estándar, asumiremos que H_s no rompe la carga eléctrica ni CP. El potencial de Higgs (5.4), tiene tres tipos de puntos estacionarios:

1. El mínimo normal con la siguiente configuración de campos:

$$\phi_7 = v_1, \phi_8 = v_2, \phi_9 = v_3, \phi_i = 0, \quad i \neq 7, 8, 9.$$

2. El punto estacionario que rompe la carga eléctrica, en el cual dos de los campos cargados ϕ adquieren valores de expectación en el vacío, vev's, no nulos:

$$\phi_7 = v'_1, \phi_8 = v'_2, \phi_9 = v'_3, \phi_1 = \alpha, \phi_3 = \beta,$$

3. y el mínimo que rompe CP, en donde dos componentes imaginarias de los campos neutros ϕ adquieren valores de expectación en el vacío, vev's, no nulos:

$$\phi_7 = v''_1, \phi_8 = v''_2, \phi_9 = v''_3, \phi_{10} = \delta, \phi_{11} = \gamma.$$

5.2. El mínimo normal

A nosotros nos interesa el mínimo normal, el cual se demostró que es el mínimo más profundo [120]. De la definición dada antes se tiene que $x_i = v_i^2$ para $i = 1, 2, 3$, $x_4 = v_1 v_2$, $x_6 = v_1 v_3$, $x_8 = v_2 v_3$, y $x_5 = x_7 = x_9 = 0$. Así, podemos escribir las condiciones de minimización como

$$\frac{\partial V}{\partial v_i} = \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial v_i} = 0, \quad (5.8)$$

en donde $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \dots, 9$.

De aquí se obtiene el conjunto de tres ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\mu_1^2 + (b + f + 2h) v_3^2 + 2(c + g)(v_1^2 + v_2^2) \right] v_1 + 6e v_1 v_2 v_3, \\ 0 &= \left[\mu_1^2 + (b + f + 2h) v_3^2 + 2(c + g)(v_1^2 + v_2^2) \right] v_2 + 3e(v_1^2 - v_2^2) v_3, \\ 0 &= \left[\mu_0^2 + (b + f + 2h)(v_1^2 + v_2^2) + 2a v_3^2 \right] 2v_3 + 2e(3v_1^2 - v_2^2) v_2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Hasta este punto tenemos diez parámetros reales en el potencial mas tres vev's. Del conjunto de ecuaciones (5.9) podemos eliminar tres de éstos parámetros, y de la relación $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \approx (246 \text{ GeV})^2/2$ se puede eliminar otro.

Resultados preliminares [119, 120] sobre la condición de mínimo, dan matrices de masas cuyos eigenvalores se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \left(M_1^{(H)} \right)^2 &= (2a v_3^2 + 4(c + g) v_1^2) \\ &- \sqrt{(2a v_3^2 + 4(c + g) v_1^2)^2 - (32a(c + g) - 8(b + f + 2h)) v_1^2 v_3^2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \left(M_2^{(H)} \right)^2 &= (2a v_3^2 + 4(c + g) v_1^2) \\ &+ \sqrt{(2a v_3^2 + 4(c + g) v_1^2)^2 - (32a(c + g) - 8(b + f + 2h)) v_1^2 v_3^2} \end{aligned}$$

de aquí es claro que si $(c + g) \gg a$, $(b + f + 2h)$ podemos hacer un desarrollo en potencias de $a/(c + g)$ y $(b + f + 2h)/(c + g)$. Es importante hacer notar que estamos tomando a b , f , h y a como los parámetros pequeños en el sector de Higgs y son éstos los acoplamientos del bosón de Higgs singlete de S_3 con los bosones de Higgs en el doblete de S_3 .

La masa pequeña queda entonces escrita al primer orden como

$$\left(M_1^{(H)} \right)^2 \approx \frac{4a v_S^2}{1 + \frac{1}{2} \frac{a v_S^2}{4(c + g) v_1^2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{a v_S^2}{4(c + g) v_1^2}} \frac{(b + f + 2h)^2 v_S^2}{4(c + g)}$$

En total en el potencial de Higgs se tienen siete parámetros de acoplamiento a , b , c , d , f , g y h y de los vev's tenemos el cociente $\tan \beta = v_S/v_1$, de los cuales en principio siete se pueden eliminar como función de las masas de los Higgses. Así podemos hablar entonces de que en el potencial de Higgs hay 8 parámetros libres de los cuales 7 son masas.

Capítulo 6

Matrices de masa de los leptones y la simetría Z_2

En este capítulo discutiremos las matrices de masa de los leptones cargados y de los neutrinos de Majorana. Se verá que con la introducción de una simetría discreta adicional en el sector leptónico, es posible reducir el número de parámetros libres en las matrices de masa, lo cual permite hacer una reparametrización de éstas en función de sus eigenvalores, es decir como función de las masas. Se verá que gracias a esto es posible obtener una expresión para la matriz de mezcla de los neutrinos, V_{PMNS} , la cual es función de las masas de los neutrinos, de las masas de los leptones cargados y una fase que viola CP.

6.1. Matrices de masa de los leptones y la simetría Z_2

Las matrices de masa de los fermiones de Dirac tienen una forma bien definida en la extensión del ME con la cual estamos trabajando debido a la simetría del sabor, sin embargo el número de parámetros redundantes en éstas no son pocos. Para lograr una mayor reducción del número de parámetros, introducimos una simetría adicional Z_2 con lo cual como se verá más adelante, algunos acoplamientos de Yukawa no estarán permitidos. Una posible asignación de la simetría Z_2 compatible con los datos experimentales en el sector leptónico está dada en la Tabla

Tabla. Asignaciones Z_2 en el sector leptónico.

-	+
H_I, ν_{3R}	$H_S, L_3, L_I, e_{3R}, e_{IR}, \nu_{IR}$

en donde los índices 3 denotan singletes del grupo del sabor S_3 .

La simetría Z_2 tal como se tomó implica que los acoplamientos:

$$Y_1^e = Y_3^e = 0, \quad Y_1^\nu = Y_5^\nu = 0. \quad (6.1)$$

dado que los términos en la Lagrangiana que contiene dichos acoplamientos cambian de signo debido a la simetría Z_2 . Por consiguiente, los elementos correspondientes de las matrices de masas se anulan, es decir que $\mu_1^e = \mu_3^e = 0$ y $\mu_1^\nu = \mu_5^\nu = 0$. por lo que las matrices de masa para los leptones cargados y para los neutrinos de Dirac tienen la forma

$$M_e = m_\tau \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_5 \\ \tilde{\mu}_2 & -\tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_5 \\ \tilde{\mu}_4 & \tilde{\mu}_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

y

$$\mathbf{M}_{\nu_D} = \begin{pmatrix} \mu_2^\nu & \mu_2^\nu & 0 \\ \mu_2^\nu & -\mu_2^\nu & 0 \\ \mu_4^\nu & \mu_4^\nu & \mu_3^\nu \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

respectivamente.

Lo que sigue es ver como estas matrices quedan reparametrizadas en términos de sus eigenvalores para lo cual dividiremos el cálculo en dos partes, primero analizaremos la matriz de los leptones cargados y posteriormente la de los neutrinos de Majorana la cual como ya se mencionó antes, viene dada mediante el mecanismo del subibaja.

6.2. La matriz de masas de los leptones cargados

La matriz de masas de los leptones cargados toma la forma (B.1) de modo que la matriz unitaria U_{eL} que entra en la definición de la matriz de mezclas, V_{PMNS} , se obtiene de

$$U_{eL}^\dagger M_e M_e^\dagger U_{eL} = \text{diag}(m_e^2, m_\mu^2, m_\tau^2), \quad (6.4)$$

6.3. REPARAMETRIZACIÓN DE LA MATRIZ DE MASAS EN FUNCIÓN DE SUS EIGENVALORES

en la que m_e , m_μ y m_τ son las masas de los leptones cargados, y

$$\frac{M_e M_e^\dagger}{m_\tau^2} = \begin{pmatrix} 2|\tilde{\mu}_2|^2 + |\tilde{\mu}_5|^2 & |\tilde{\mu}_5|^2 & 2|\tilde{\mu}_2||\tilde{\mu}_4|e^{-i\delta_e} \\ |\tilde{\mu}_5|^2 & 2|\tilde{\mu}_2|^2 + |\tilde{\mu}_5|^2 & 0 \\ 2|\tilde{\mu}_2||\tilde{\mu}_4|e^{i\delta_e} & 0 & 2|\tilde{\mu}_4|^2 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Nótese que esta matriz tiene sólo un factor de fase no ignorable.

6.3. Reparametrización de la matriz de masas en función de sus eigenvalores

Los parámetros $|\tilde{\mu}_2|$, $|\tilde{\mu}_4|$ y $|\tilde{\mu}_5|$ pueden ser expresados en términos de las masas de los leptones cargados, para lo cual usamos los invariantes de las matrices Hermitianas de 3×3 .

1. La traza de la matriz
2. La traza del cuadrado de la matriz
3. La traza del cubo de la matriz o equivalentemente el determinante de la matriz.

Calculemos los invariantes de la matriz $M_e M_e^\dagger / m_\tau^2$ dada en la ecuación (C.2):

- La traza

$$\text{Tr}(M_e M_e^\dagger) = m_e^2 + m_\mu^2 + m_\tau^2 = \quad (6.6)$$

$$m_\tau^2 [4|\tilde{\mu}_2|^2 + 2(|\tilde{\mu}_4|^2 + |\tilde{\mu}_5|^2)],$$

- La traza del cuadrado la usaremos para definir otro invariante,

$$\chi^2 = \frac{\text{Tr}(M_e M_e^\dagger)^2 - \text{Tr}([M_e M_e^\dagger]^2)}{2}$$

el cual es

$$\chi(M_e M_e^\dagger) = m_\tau^2(m_e^2 + m_\mu^2) + m_e^2 m_\mu^2 = \quad (6.7)$$

$$4m_\tau^4 [|\tilde{\mu}_2|^4 + |\tilde{\mu}_2|^2 (|\tilde{\mu}_4|^2 + |\tilde{\mu}_5|^2) + |\tilde{\mu}_4|^2 |\tilde{\mu}_5|^2],$$

- El determinante

$$\det(M_e M_e^\dagger) = m_e^2 m_\mu^2 m_\tau^2 = 4m_\tau^6 |\tilde{\mu}_2|^2 |\tilde{\mu}_4|^2 |\tilde{\mu}_5|^2. \quad (6.8)$$

Combinando las ecuaciones (6.6-6.8) se encuentra una ecuación cúbica para $|\tilde{\mu}_2|^2$:

$$(|\tilde{\mu}_2|^2)^3 - \frac{1}{2} \text{Tr}(M_e M_e^\dagger) (|\tilde{\mu}_2|^2)^2 / m_\tau^4 + \frac{1}{4} \chi^2 |\tilde{\mu}_2|^2 / m_\tau^4 - \frac{1}{4} \text{Det}(M_e M_e^\dagger) / m_\tau^6 = 0 \quad (6.9)$$

o bien

$$(|\tilde{\mu}_2|^2)^3 - \frac{1}{2}(1+y)(|\tilde{\mu}_2|^2)^2 + \frac{1}{4}(y+z)|\tilde{\mu}_2|^2 - \frac{1}{4}z = 0, \quad (6.10)$$

en donde y y z son funciones de las masas de los leptones cargados dadas por

$$y = \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{m_\tau^2} \quad z = \frac{m_\mu^2 m_e^2}{m_\tau^4}. \quad (6.11)$$

La ecuación (6.10), la podemos llevar a la forma reducida mediante el cambio de variable $|\tilde{\mu}_2|^2 = \alpha + \frac{1}{6}(1+y)$, con lo cual la ecuación cúbica (6.10) queda como

$$\alpha^3 - \frac{1}{12}(1-y+y^2-3z)\alpha - \frac{1}{108}(1-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}y^2+y^3+\frac{45}{2}z-\frac{9}{2}zy) = 0, \quad (6.12)$$

la cual tiene la forma

$$\alpha^3 + p\alpha + q = 0, \quad (6.13)$$

para ver las soluciones de la ecuación cúbica reducida ver el apéndice (B)

Nótese que $|\tilde{\mu}_2|^2$ es función de α la cual satisface una ecuación cúbica por lo cual tiene tres posibles soluciones las cuales son funciones solamente de las masas de los leptones cargados.

Los parámetros $|\tilde{\mu}_4|^2$ y $|\tilde{\mu}_5|^2$ son funciones de las masas de los leptones cargados y de $|\tilde{\mu}_2|^2$.

Para el cálculo de $|\tilde{\mu}_4|^2$ y $|\tilde{\mu}_5|^2$ usaremos las siguientes ecuaciones

$$|\tilde{\mu}_5|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y - 2|\tilde{\mu}_2|^2 - |\tilde{\mu}_4|^2, \quad (6.14)$$

$$|\tilde{\mu}_4|^2 |\tilde{\mu}_5|^2 = \frac{z}{4|\tilde{\mu}_2|^2}.$$

De las ecuaciones (6.14) se obtiene una ecuación cuadrática¹ para $|\tilde{\mu}_{4,5}|^2$

$$|\tilde{\mu}_{4,5}|^2 - \frac{1}{2}(1+y-4|\tilde{\mu}_2|^2)|\tilde{\mu}_{4,5}|^2 + \frac{z}{4|\tilde{\mu}_2|^2} = 0, \quad (6.15)$$

¹Nótese que las ecuaciones (6.14) son simétricas en $\tilde{\mu}_4$ y $\tilde{\mu}_5$.

6.3. REPARAMETRIZACIÓN DE LA MATRIZ DE MASAS EN FUNCIÓN DE SUS EIGENVALORES

cuya solución² está dada por

$$|\tilde{\mu}_{4,5}|^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \tilde{m}_\mu^2 \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} - 4\beta \right)$$

$$\mp \frac{1}{4} \left[\left(1 - \tilde{m}_\mu^2 \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} \right)^2 - 8\tilde{m}_e^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} + 8\beta \left(1 - \tilde{m}_\mu^2 \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{1 + \frac{2\beta(1+x^2)}{\tilde{m}_\mu^2(1+x^4)}} \frac{(1+x^2)^2}{(1+x^4)^2} \right) + 16\beta^2 \right]^{1/2}, \quad (6.16)$$

en donde $\tilde{m}_\mu = m_\mu/m_\tau$. Nótese que las ecuaciones (6.14) son simétricas en $\tilde{\mu}_4$ y $\tilde{\mu}_5$ por lo que las soluciones de la ecuación (6.16) son válidas para ambas. En otras palabras una vez elegida la solución para $|\tilde{\mu}_4|^2$ en la ecuación (6.16), $|\tilde{\mu}_5|^2$ está determinada por la otra solución.

La pregunta de cual solución elegir para $|\tilde{\mu}_2|^2$ está determinada por la fenomenología. Nosotros encontramos que la solución correcta es cercana a

$$|\tilde{\mu}_2|^2 = \frac{\tilde{m}_\mu^2}{2} \frac{1+x^4}{1+x^2}, \quad (6.17)$$

por lo que podemos escribir a $|\tilde{\mu}_2|^2$ como

$$|\tilde{\mu}_2|^2 = \frac{\tilde{m}_\mu^2}{2} \frac{1+x^4}{1+x^2} + \beta, \quad (6.18)$$

por lo que $\tilde{\mu}_4$ y $\tilde{\mu}_5$ quedan como

$$|\tilde{\mu}_{4,5}|^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \tilde{m}_\mu^2 \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} - 4\beta \right)$$

$$\mp \frac{1}{4} \left[\left(1 - \tilde{m}_\mu^2 \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} \right)^2 - 8\tilde{m}_e^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} + 8\beta \left(1 - \tilde{m}_\mu^2 \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{1 + \frac{2\beta(1+x^2)}{\tilde{m}_\mu^2(1+x^4)}} \frac{(1+x^2)^2}{(1+x^4)^2} \right) + 16\beta^2 \right]^{1/2}. \quad (6.19)$$

En estas expresiones, $x = m_e/m_\mu$, y β es la solución más pequeña en valor absoluto de la ecuación cúbica

$$\beta^3 - \frac{1}{2}(1 - 2y + 6\frac{z}{y})\beta^2 - \frac{1}{4}(y - y^2 - 4\frac{z}{y} + 7z - 12\frac{z^2}{y^2})\beta - \frac{1}{8}yz - \frac{1}{2}\frac{z^2}{y^2} + \frac{3}{4}\frac{z^2}{y} - \frac{z^3}{y^3} = 0, \quad (6.20)$$

²Ésta es la solución compatible con las mezclas de los neutrinos

en donde $y = (m_e^2 + m_\mu^2)/m_\tau^2$ y $z = m_\mu^2 m_e^2/m_\tau^4$.

Para determinar el orden de magnitud de β notemos que en el límite $m_e = 0$, $z = 0$, y la ecuación (B.8) tiene una solución, $\beta_0 = 0$, mientras que las otras dos soluciones satisfacen la ecuación cuadrática

$$\beta^2 - \frac{1}{2}(1 - 2y)\beta - \frac{1}{4}(y - y^2) = 0, \quad (6.21)$$

por lo que las otras dos soluciones son

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{4}(1 - 2y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(1 - 4y + 4y^2) + y - y^2} = \frac{1}{4}(1 - 2y) \pm \frac{1}{4}.$$

De aquí, podemos estimar la solución pequeña, β_0 , debido a que el producto de las tres soluciones es aproximadamente

$$\beta_0\beta_1\beta_2 = -\left(-\frac{1}{8}yz\right)$$

mientras que el producto de $\beta_1\beta_2 = -\frac{y}{4}(1 - y)$, por lo que la solución pequeña es

$$\beta \approx -\frac{m_\mu^2 m_e^2}{2m_\tau^2(m_\tau^2 - (m_\mu^2 + m_e^2))}. \quad (6.22)$$

Con esto ya tenemos prácticamente reparametrizada la matriz de masas de los leptones cargados en términos de las masas de los leptones cargados, ésta reparametrización es exacta, sin embargo las expresiones si se quiere tener la forma explícita exacta son muy largas. Podemos expresar M_e como función de las masas de los leptones cargados escritas al orden $(m_\mu m_e/m_\tau^2)^2$ y $x^4 = (m_e/m_\mu)^4$,

$$M_e \approx m_\tau \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_e} & \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_e} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Esta expresión es numéricamente exacta hasta el orden de 10^{-9} en unidades de la masa del leptón τ . Nótese que esta matriz tiene un solo parámetro libre, la fase de Dirac δ_e [20].

La matriz unitaria U_{eL} que diagonaliza a $M_e M_e^\dagger$ y entra en la definición de la matriz de mezclas de los neutrinos V_{PMNS} , se puede escribir como (ver apéndice C)

$$U_{eL} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{11} & -O_{12} & O_{13} \\ -O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ -O_{31} & -O_{32} & O_{33} \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

en la que la matriz ortogonal \mathbf{O}_{eL} , en el lado derecho de la ecuación anterior, escrita en la misma aproximación que M_e es

$$\mathbf{O}_{eL} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1+2\tilde{m}_\mu^2+4x^2+\tilde{m}_\mu^4+2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1+4x^2-\tilde{m}_\mu^4-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4)}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}(1+\tilde{m}_\mu^2+x^2-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & -x \frac{(1+x^2-\tilde{m}_\mu^2-2\tilde{m}_e^2)\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{\sqrt{1+x^2}\tilde{m}_e\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

en la que, como antes, $\tilde{m}_\mu = m_\mu/m_\tau$, $\tilde{m}_e = m_e/m_\tau$ y $x = m_e/m_\mu$.

6.4. La matriz de masas de los neutrinos

De acuerdo con la regla de selección Z_2 , la matriz de masas de los neutrinos de Dirac toma la forma

$$\mathbf{M}_{\nu_D} = \begin{pmatrix} \mu_2^\nu & \mu_2^\nu & 0 \\ \mu_2^\nu & -\mu_2^\nu & 0 \\ \mu_4^\nu & \mu_4^\nu & \mu_3^\nu \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Entonces, la matriz de masas de los neutrinos izquierdos de Majorana, que se obtiene del mecanismo del subibaja, ec. (4.17), queda como

$$\mathbf{M}_\nu = \mathbf{M}_{\nu_D} \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{M}_{\nu_D})^T = \begin{pmatrix} 2(\rho_2^\nu)^2 & 0 & 2\rho_2^\nu \rho_4^\nu \\ 0 & 2(\rho_2^\nu)^2 & 0 \\ 2\rho_2^\nu \rho_4^\nu & 0 & 2(\rho_4^\nu)^2 + (\rho_3^\nu)^2 \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

en esta expresión $\rho_2^\nu = (\mu_2^\nu)/M_1^{1/2}$, $\rho_4^\nu = (\mu_4^\nu)/M_1^{1/2}$ y $\rho_3^\nu = (\mu_3^\nu)/M_3^{1/2}$; M_1 y M_3 son las masas de los neutrinos derechos que aparecen en (4.12). La matriz de masas de los neutrinos de Majorana, M_ν , es no-Hermitiana, simétrica y compleja y se puede llevar a una forma diagonal mediante una matriz unitaria U_ν ,

$$U_\nu^T M_\nu U_\nu = \text{diag} (|m_{\nu_1}|e^{i\phi_1}, |m_{\nu_2}|e^{i\phi_2}, |m_{\nu_3}|e^{i\phi_\nu}), \quad (6.28)$$

en donde U_ν es la matriz que diagonaliza la matriz $M_\nu^\dagger M_\nu$.

Para determinar U_ν , notemos que la matriz $M_\nu^\dagger M_\nu$ tiene la misma textura de ceros que M_ν

$$M_\nu^\dagger M_\nu = \begin{pmatrix} |A|^2 + |B|^2 & 0 & A^*B + B^*D \\ 0 & |A|^2 & 0 \\ AB^* + BD^* & 0 & |B|^2 + |D|^2 \end{pmatrix}, \quad (6.29)$$

en donde $A = 2(\rho_2^\nu)^2$, $B = 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu$, y $D = 2(\rho_4^\nu)^2 + (\rho_3^\nu)^2$. Además, notemos que las entradas en la esquina superior derecha y la entrada de la esquina inferior izquierda, esto es, los elementos de matriz $M_\nu^\dagger M_\nu(1, 3)$ y $M_\nu^\dagger M_\nu(3, 1)$ son complejos conjugados uno del otro, los demás elementos de matriz son reales. Así, la matriz $U_{\nu L}$ que diagonaliza $M_\nu^\dagger M_\nu$, toma la forma

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

Sí requerimos que la ecuación (6.28) se satisfaga como una identidad, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2(\rho_2^\nu)^2 &= m_{\nu_3}, \\ 2(\rho_2^\nu)^2 &= m_{\nu_1} \cos^2 \eta + m_{\nu_2} \sin^2 \eta, \\ 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu &= \sin \eta \cos \eta (m_{\nu_2} - m_{\nu_1})e^{-i\delta_\nu}, \\ 2(\rho_4^\nu)^2 + (\rho_3^\nu)^2 &= (m_{\nu_1} \sin^2 \eta + m_{\nu_2} \cos^2 \eta)e^{-2i\delta_\nu}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Resolviendo estas ecuaciones para $\sin \eta$ y $\cos \eta$, encontramos que

$$\sin^2 \eta = \frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}, \quad \cos^2 \eta = \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}. \quad (6.32)$$

Así entonces, las matrices M_ν y U_ν , reparametrizadas en términos de las masas complejas de los neutrinos, toman la forma [20]

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_{\nu_3} & 0 & \sqrt{(m_{\nu_3} - m_{\nu_1})(m_{\nu_2} - m_{\nu_3})}e^{-i\delta_\nu} \\ 0 & m_{\nu_3} & 0 \\ \sqrt{(m_{\nu_3} - m_{\nu_1})(m_{\nu_2} - m_{\nu_3})}e^{-i\delta_\nu} & 0 & (m_{\nu_1} + m_{\nu_2} - m_{\nu_3})e^{-2i\delta_\nu} \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

y

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}} & \sqrt{\frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{\frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}} & \sqrt{\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.34)$$

La condición de unitariedad de U_ν construye a $\sin \eta$ a ser real y $|\sin \eta| \leq 1$, esta condición fija las fases ϕ_1 y ϕ_2 como

$$|m_{\nu_1}| \sin \phi_1 = |m_{\nu_2}| \sin \phi_2 = |m_{\nu_3}| \sin \phi_\nu. \quad (6.35)$$

Los únicos parámetros libres en estas matrices son la fase ϕ_ν implícita en m_{ν_1} , m_{ν_2} y m_{ν_3} y la fase de Dirac δ_ν .

6.5. La matriz de mezcla de los neutrinos

La matriz de mezcla de los neutrinos, V_{PMNS} , es el producto $U_{eL}U_\nu^\dagger K$, en esta expresión, K es la matriz diagonal de los factores de fase de Majorana, definida por

$$\text{diag}(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}) = K^\dagger \text{diag}(|m_{\nu_1}|, |m_{\nu_2}|, |m_{\nu_3}|)K^\dagger. \quad (6.36)$$

Excepto por un factor de fase global $e^{i\phi_1}$, el cual puede ser ignorado, K es

$$K = \text{diag}(1, e^{i\alpha}, e^{i\beta}), \quad (6.37)$$

en donde, $\alpha = 1/2(\phi_1 - \phi_2)$ y $\beta = 1/2(\phi_1 - \phi_\nu)$ son las fases de Majorana.

Por consiguiente, la matriz de mezclas teórica, V_{PMNS}^{th} , está dada por

$$V_{PMNS}^{th} = \begin{pmatrix} O_{11} \cos \eta + O_{31} \sin \eta e^{i\delta} & O_{11} \sin \eta - O_{31} \cos \eta e^{i\delta} & -O_{21} \\ -O_{12} \cos \eta + O_{32} \sin \eta e^{i\delta} & -O_{12} \sin \eta - O_{32} \cos \eta e^{i\delta} & O_{22} \\ O_{13} \cos \eta - O_{33} \sin \eta e^{i\delta} & O_{13} \sin \eta + O_{33} \cos \eta e^{i\delta} & O_{23} \end{pmatrix} \times K, \quad (6.38)$$

en donde O_{ij} está dada en (6.24) y (6.25), y $\delta = \delta_\nu - \delta_e$, mientras que $\cos^2 \eta$ y $\sin^2 \eta$ son

$$\begin{aligned}\sin^2 \eta &= \frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}, \\ \cos^2 \eta &= \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}.\end{aligned}\tag{6.39}$$

Escribimos de nuevo las expresiones para O_{ij} :

$$\begin{pmatrix} O_{11} & -O_{12} & O_{13} \\ -O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ -O_{31} & -O_{32} & O_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1+2\tilde{m}_\mu^2+4x^2+\tilde{m}_\mu^4+2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1+4x^2-\tilde{m}_\mu^4-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4)}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}(1+\tilde{m}_\mu^2+x^2-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & -x \frac{(1+x^2-\tilde{m}_\mu^2-2\tilde{m}_e^2)\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{\tilde{m}_e \tilde{m}_\mu \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} \end{pmatrix}.\tag{6.40}$$

La relación de nuestras expresiones teóricas con los ángulos de mezcla de los neutrinos tal como están definidos en la parametrización del Particle Data Group, se obtiene de igualar la magnitud de los elementos de matriz de las mezclas teóricas con la magnitud de los correspondientes elementos de la matriz de mezclas en la parametrización del Particle Data Group

$$|V_{PMNS}^{th}| = |V_{PMNS}^{PDG}|,\tag{6.41}$$

esto es

$$|V_{ij}^{th}| = |V_{ij}^{PDG}| \quad i, j = 1, 2, 3.\tag{6.42}$$

La parametrización de la matriz de mezclas de los neutrinos del Particle Data Group es

$$V_{PMNS}^{PDG} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{CP}} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}.\tag{6.43}$$

Las predicción que tenemos para los ángulos θ_{13} y θ_{23} están dadas por los elementos en la última columna; el ángulo de mezcla θ_{13} se determina directamente,

$$|\sin \theta_{13}| = |O_{21}| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1 + 4x^2 - \tilde{m}_\mu^4)}{\sqrt{1 + \tilde{m}_\mu^2 + 5x^2 - \tilde{m}_\mu^4}} \quad (6.44)$$

mientras que el ángulo de mezcla θ_{23} , se determina mediante el siguiente cociente,

$$|\sin \theta_{23}| = \left| \frac{O_{22}}{\sqrt{1 - O_{21}^2}} \right| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - 2\tilde{m}_\mu^2 + \tilde{m}_\mu^4}{\sqrt{1 - 4\tilde{m}_\mu^2 + x^2 + 6\tilde{m}_\mu^4}}, \quad (6.45)$$

en estas fórmulas, $\tilde{m}_\mu = m_\mu/m_\tau$ y $x = m_e/m_\mu$. De las expresiones anteriores, se observa que en este modelo, las magnitudes de los ángulos de mezcla de reactor y atmosférico, θ_{13} y θ_{23} , están determinados por las masas de los leptones cargados solamente.

El ángulo de mezcla θ_{12} se obtiene de los elementos 11 y 12, como

$$O_{11}^2 \cos^2 \eta + O_{31}^2 \sin^2 \eta + 2O_{31}O_{11} \sin \eta \cos \eta \cos \delta = c_{12}^2 c_{13}^2 \quad (6.46)$$

$$O_{11}^2 \sin^2 \eta + O_{31}^2 \cos^2 \eta - 2O_{31}O_{11} \sin \eta \cos \eta \cos \delta = s_{12}^2 c_{13}^2$$

de estas dos ecuaciones podemos obtener la tangente del ángulo de mezclas solar en función de las masas de los leptones cargados y las masas de los neutrinos. Si definimos $\alpha = 1/\tan \eta$

$$\alpha = \sqrt{\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}}, \quad (6.47)$$

por lo que la masa m_{ν_3} la podemos despejar en función de α

$$|m_{\nu_3}| \cos \phi_\nu = \pm \frac{\Delta m_{12}^2 + \Delta m_{13}^2 (1 - \alpha^4)}{\alpha \sqrt{(1 + \alpha^2) [\Delta m_{12}^2 + \Delta m_{13}^2 (1 + \alpha^2)]}}. \quad (6.48)$$

De las ecuaciones (6.46) se obtiene una ecuación para la $\tan \theta_{12}$

$$\tan \theta_{12} = \alpha^2 \frac{O_{11}^2 \frac{1}{\alpha^2} + O_{31}^2 - 2O_{31}O_{11} \frac{1}{\alpha} \cos \delta}{O_{11}^2 \alpha^2 + O_{31}^2 + 2O_{31}O_{11} \alpha \cos \delta}. \quad (6.49)$$

recordemos los valores de O_{11} y O_{31} para separar los términos grandes y los pequeños,

$$O_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m_e}{m_\mu} \frac{(1+2\tilde{m}_\mu^2+4x^2+\tilde{m}_\mu^4+2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m_e}{m_\mu},$$

$$O_{31} = \frac{\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}(1+\tilde{m}_\mu^2+x^2-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} \sim 1,$$
(6.50)

de aquí multiplicamos la ecuación (6.50) y encontramos una ecuación de orden dos para α

$$\left(1 - \left(\frac{O_{11}}{O_{31}}\right)^2 t_{12}^2\right) \alpha^2 - 2 \frac{O_{11}}{O_{31}} \cos \delta (1 + t_{12}^2) \alpha - \left(t_{12}^2 - \left(\frac{O_{11}}{O_{31}}\right)^2\right) = 0, \quad (6.51)$$

en donde $t_{12} = \tan \theta_{12}$. La ecuación de orden dos la podemos reescribir como

$$\alpha^2 - \frac{O_{11}}{O_{31}} \frac{2 \cos \delta (1 + t_{12}^2)}{1 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} t_{12}^2} \alpha - \frac{t_{12}^2 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2}}{1 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} t_{12}^2} = 0, \quad (6.52)$$

por lo que ahora tenemos dos soluciones posibles para α en función de t_{12}

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{t_{12}^2 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2}}{1 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} t_{12}^2} + \frac{O_{11}^2 \cos^2 \delta (1 + t_{12}^2)^2}{O_{31}^2 (1 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} t_{12}^2)^2} + \frac{O_{11}}{O_{31}} \frac{\cos \delta (1 + t_{12}^2)}{1 - \frac{O_{11}^2}{O_{31}^2} t_{12}^2}}, \quad (6.53)$$

equivalente a

$$\alpha = \pm t_{12} + \mathcal{O}\left(\frac{m_e}{m_\mu} \cos \delta\right), \quad (6.54)$$

por lo tanto α es igual a la tangente del ángulo solar hasta orden 10^{-3} . Ésto también se puede ver de escribir la fórmula de la tangente del ángulo solar en la siguiente forma

$$|\tan \theta_{12}|^2 = \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}} \left(\frac{1 - 2 \frac{O_{11}}{O_{31}} \cos \delta \sqrt{\frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}} + \left(\frac{O_{11}}{O_{31}}\right)^2 \frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}}}{1 + 2 \frac{O_{11}}{O_{31}} \cos \delta \sqrt{\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}} + \left(\frac{O_{11}}{O_{31}}\right)^2 \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}}} \right), \quad (6.55)$$

notemos que $O_{31} \sim 1$ y $O_{11} \sim 1/\sqrt{2}(m_e/m_\mu)$, así que si despreciamos términos proporcionales a O_{11}/O_{31} , la tangente del ángulo solar se escribe en forma aproximada como

$$|\tan \theta_{12}|^2 \approx \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}. \quad (6.56)$$

Con la ayuda de la restricción de unitariedad de U_ν , ec. (6.35), podemos reescribir la ecuación (6.56) como

$$\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}} = \frac{(|m_{\nu_2}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2 \phi_\nu)^{1/2} - |m_{\nu_3}| |\cos \phi_\nu|}{(|m_{\nu_1}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2 \phi_\nu)^{1/2} + |m_{\nu_3}| |\cos \phi_\nu|}. \quad (6.57)$$

De los experimentos sobre oscilaciones de neutrinos conocemos solo las diferencias de las masas cuadradas, podemos poner las masas m_{ν_1} y m_{ν_2} como función de las diferencias de las masas cuadradas y de la masa m_{ν_3} , con lo cual, la ecuación (6.57) se escribe como

$$\tan^2 \theta_{12} \approx \frac{(\Delta m_{12}^2 + \Delta m_{13}^2 + |m_{\nu_3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} - |m_{\nu_3}| \cos \phi_\nu}{(\Delta m_{13}^2 + |m_{\nu_3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} + |m_{\nu_3}| \cos \phi_\nu}. \quad (6.58)$$

De igual modo, las fases de Majorana están dadas por

$$\sin 2\alpha = \sin(\phi_1 - \phi_2) = \frac{|m_{\nu_3}| \sin \phi_\nu}{|m_{\nu_1}| |m_{\nu_2}|} \times \left(\sqrt{|m_{\nu_2}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2 \phi_\nu} + \sqrt{|m_{\nu_1}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2 \phi_\nu} \right), \quad (6.59)$$

y

$$\sin 2\beta = \sin(\phi_1 - \phi_\nu) = \frac{\sin \phi_\nu}{|m_{\nu_1}|} \left(|m_{\nu_3}| \sqrt{1 - \sin^2 \phi_\nu} + \sqrt{|m_{\nu_1}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2 \phi_\nu} \right). \quad (6.60)$$

Capítulo 7

Masas y Mezclas de los neutrinos en la Extensión Mínima S_3 -Invariante del Modelo Estándar

Como se vió en el capítulo anterior, los ángulos de mezcla θ_{13} y θ_{23} son funciones de las masas de los leptones cargados solamente, y como veremos están en excelente acuerdo con los valores experimentales [11,20,21], mientras que el ángulo de mezcla solar es función tanto de las masas de los leptones cargados como de las masas de los neutrinos, lo cual nos permite calcular la escala de masas de los neutrinos y las masas mismas de los neutrinos en términos de los observables físicos. La escala de masas de los neutrinos no se conoce, de lo único que se tiene información es de las diferencias de las masas cuadradas, $\Delta m_{ij}^2 = m_{\nu_i}^2 - m_{\nu_j}^2$, de las cuales se sabe solo el signo de una, $\Delta m_{21}^2 > 0$, mientras que de la otra se desconoce, es decir tanto $\Delta m_{31}^2 > 0$ como $\Delta m_{31}^2 < 0$ están permitidas. En otras palabras, la jerarquía de las masas de los neutrinos se desconoce y hay dos posibilidades, jerarquía directa, $\Delta m_{31}^2 > 0$, y jerarquía invertida, $\Delta m_{31}^2 < 0$, que es el caso que predice nuestra extensión.

Los ángulos de mezcla θ_{13} y θ_{23} en la extensión mínima S_3 -invariante del Modelo Estándar con la simetría Z_2 son

$$\sin \theta_{13} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m_e}{m_\mu} \frac{1 + 4\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 - \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^4}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^2 + 5\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 - \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^4}},$$

y

$$\sin \theta_{23} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 - 2\left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^2 + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^4}{\sqrt{1 - 4\left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^2 + \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 + 6\left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^4}}.$$

Los resultados numéricos de los ángulos de mezcla θ_{13} y θ_{23} comparados con los datos experimentales son

$$(\sin^2 \theta_{13})^{th} = 1.1 \times 10^{-5}, \quad (\sin^2 \theta_{13})^{exp} \leq 0.046, \quad (7.1)$$

y

$$(\sin^2 \theta_{23})^{th} = 0.5, \quad (\sin^2 \theta_{23})^{exp} = 0.5_{-0.05}^{+0.06}. \quad (7.2)$$

Como se puede ver están en excelente acuerdo con los datos experimentales [?, 121], el ángulo θ_{13} está muy por debajo de la cota experimental mientras que el ángulo θ_{23} está en el valor central.

En este modelo teórico, la restricción experimental $|\Delta m_{12}^2| < |\Delta m_{13}^2|$ implica que el espectro de masa está invertido, esto es, $|m_{\nu_3}| < |m_{\nu_1}| < |m_{\nu_2}|$ [11].

Si se desprecian los términos proporcionales a m_e/m_μ y $(m_e/m_\mu)^2$, la expresión teórica para el ángulo solar es

$$\tan^2 \theta_{12} = \frac{(\Delta m_{12}^2 + \Delta m_{13}^2 + |m_{\nu_3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} - |m_{\nu_3}| |\cos \phi_\nu|}{(\Delta m_{13}^2 + |m_{\nu_3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} + |m_{\nu_3}| |\cos \phi_\nu|}. \quad (7.3)$$

A partir de esta expresión, se pueden derivar expresiones que nos dan las masas de los neutrinos en términos de la fase ϕ_ν , así como de las observables de las oscilaciones de neutrinos, a saber, $\tan \theta_{12}$ y las diferencias de los cuadrados de las masas,

$$|m_{\nu_3}| = \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{2 \cos \phi_\nu \tan \theta_{12}} \frac{1 - \tan^4 \theta_{12} + r^2}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_{12}} \sqrt{1 + \tan^2 \theta_{12} + r^2}}, \quad (7.4)$$

de manera semejante, obtenemos

$$|m_{\nu_1}| = \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{2 \cos \phi_\nu t_{12}} \frac{[(1-t_{12}^4)^2 + 4 \cos^2 \phi_\nu t_{12}^2 (1+t_{12}^2)^2 + 2r^2 (1-t_{12}^4 + 2 \cos^2 \phi_\nu t_{12}^2 (1+t_{12}^2)) + r^4]^{(1/2)}}{\sqrt{1+t_{12}^2} \sqrt{1+t_{12}^2+r^2}},$$

$$|m_{\nu_2}| = \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{2 \cos \phi_\nu t_{12}} \sqrt{\frac{(1-t_{12}^4)^2 + 4\Theta(1+t_{12}^2) + 2r^2(1-t_{12}^4 + 2\Theta(2+t_{12}^2)) + r^4(1+4\Theta)}{(1+t_{12}^2)(1+t_{12}^2+r^2)}}, \quad (7.5)$$

en donde

$$\Theta = \cos^2 \phi_\nu t_{12}^2 (1 + t_{12}^2).$$

en estas expresiones, $t_{12} = \tan \theta_{12}$, y $r^2 = \Delta m_{12}^2 / \Delta m_{13}^2 \approx 3 \times 10^{-2}$. Como $r^2 \ll 1$, ec. (7.4) se reduce a

$$|m_{\nu_3}| \approx \frac{1}{2 \cos \phi_\nu} \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{\tan \theta_{12}} (1 - \tan^2 \theta_{12}). \quad (7.6)$$

A partir de estas expresiones, y poniendo $r^2 \sim 0$, la suma de las masas de los neutrinos es

$$|m_{\nu_1}| + |m_{\nu_2}| + |m_{\nu_3}| \approx \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{2 \cos \phi_\nu \tan \theta_{12}} \times \left(1 + 2\sqrt{1 + 2 \tan^2 \theta_{12} (2 \cos^2 \phi_\nu - 1) + \tan^4 \theta_{12} - \tan^2 \theta_{12}} \right). \quad (7.7)$$

La cota superior más restrictiva sobre esta suma es la cota cosmológica [122],

$$\sum |m_\nu| \leq 0.17 eV. \quad (7.8)$$

De esta cota superior y de los valores de $\tan \theta_{12}$ y Δm_{ij}^2 , determinados experimentalmente, podemos obtener una cota inferior para el único parámetro libre de nuestras fórmulas, $\cos \phi_\nu$,

$$\cos \phi_\nu \geq 0.55 \quad (7.9)$$

ó

$$0 \leq \phi_\nu \leq 57^\circ.$$

Las masas de los neutrinos toman sus valores mínimos cuando $\cos \phi_\nu = 1$. Cuando $\cos \phi_\nu$ toma valores en el intervalo $0.55 \leq \cos \phi \leq 1$, las masas de los neutrinos cambian muy lentamente con $\cos \phi_\nu$, ver la Figura 7.1.

A falta de información experimental, supondremos que ϕ_ν se anula. Por consiguiente, poniendo $\phi_\nu = 0$ en nuestras fórmulas, encontramos que

$$\begin{aligned} |m_{\nu_2}| &\approx 0.056 eV, \\ |m_{\nu_1}| &\approx 0.055 eV, \\ |m_{\nu_3}| &\approx 0.022 eV, \end{aligned} \quad (7.10)$$

en esta evaluación, usamos los valores en la tabla (7.1)

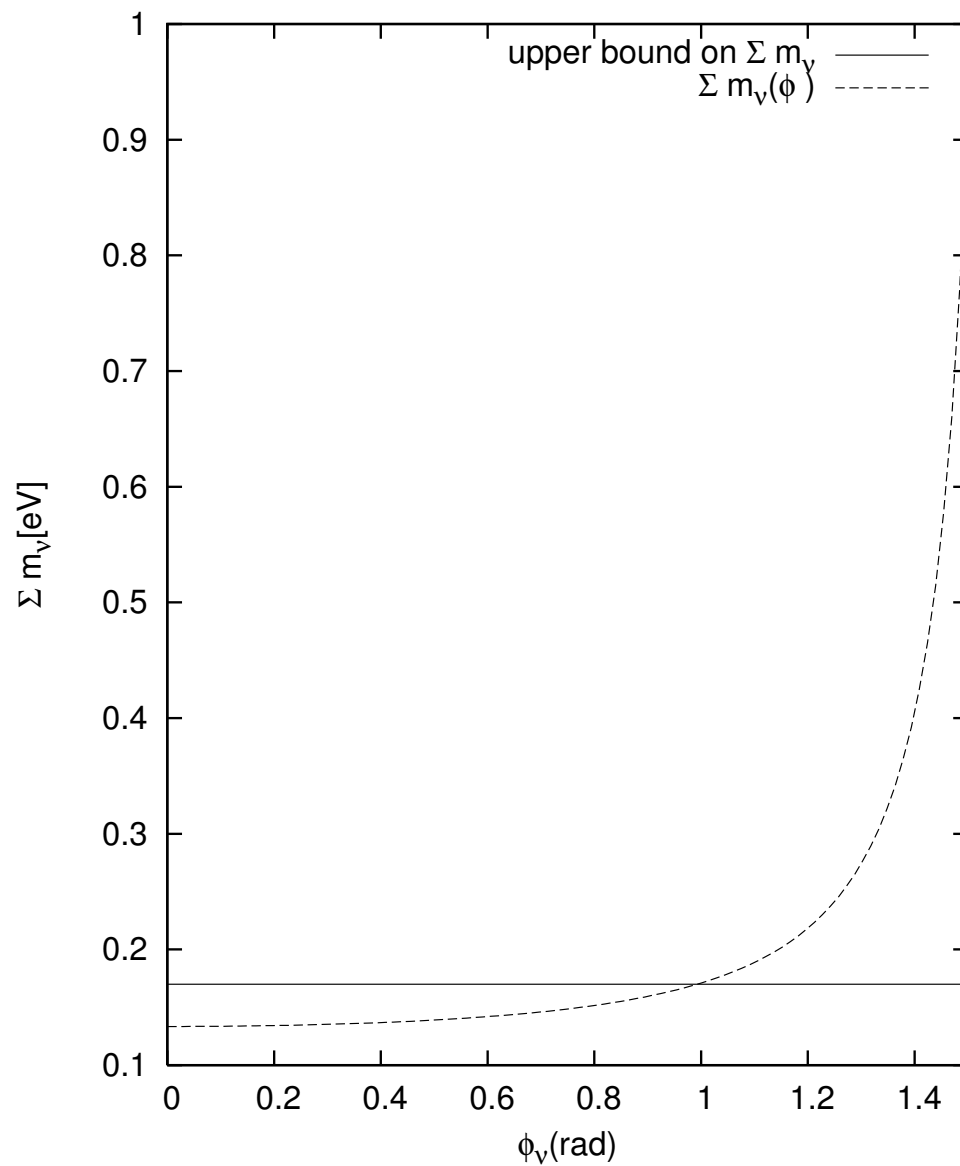


Figura 7.1: La línea punteada representa la suma de las masas de los neutrinos, $\sum_{i=1}^3 |m_{\nu_i}|$, como función de ϕ_ν . La línea recta horizontal es la cota superior cosmológica sobre $\sum |m_{\nu_i}|$ [122].

Parámetros	Mejor ajuste	2σ	3σ
$\Delta m_{21}^2 [10^{-5} eV]$	7.6	7.3–8.1	7.1–8.3
$\Delta m_{31}^2 [10^{-3} eV]$	2.4	2.1–2.7	2.0–2.8
$\sin^2 \theta_{12}$	0.32	0.28–0.37	0.26–0.40
$\sin^2 \theta_{23}$	0.50	0.38–0.63	0.34–0.67
$\sin^2 \theta_{13}$	0.007	≤ 0.033	≤ 0.050

Tabla 7.1: Valores del mejor ajuste, intervalos a 2σ y 3σ (1 d.o.f) para los parámetros de oscilaciones de tres neutrinos provenientes de los datos globales incluyendo los datos de neutrinos solares, atmosféricos, de reactor (KamLAND y CHOOZ) y aceleradores (K2K y MINOS).

Ahora, podemos comparar nuestros resultados con otras cotas sobre las masas de los neutrinos.

La masa efectiva de Majorana, $\langle m_{2\beta} \rangle$, en el decaimiento doble-beta sin neutrinos, $0\nu 2\beta$, definida como [123]

$$\langle m_{2\beta} \rangle = \left| \sum_{i=1}^3 V_{ei}^2 m_{\nu_i} \right|. \quad (7.11)$$

La cota experimental mas restrictiva sobre $\langle m_{2\beta} \rangle$, obtenida del análisis de datos recolectados por el experimento Heidelberg-Moscow sobre decaimiento doble-beta sin neutrinos del Ge enriquecido [124], es

$$\langle m_{2\beta} \rangle < 0.3 eV. \quad (7.12)$$

En nuestro modelo, se obtiene

$$\langle m_{2\beta} \rangle^{th} = 0.053 eV \quad (7.13)$$

muy por debajo de la cota superior experimental.

La medida indirecta de masas de neutrinos más restrictiva que involucra neutrinos del electrón, se basa en el ajuste de la curva del espectro beta [125]. En esta medida, la cantidad

$$\bar{m}_{\nu_e} = \sqrt{\sum_i |V_{ei}|^2 m_{\nu_i}^2} \quad (7.14)$$

se determina o constriñe. Una cota bastante restrictiva de esta suma se obtiene de procesos de nucleosíntesis [126, 127]

$$(\bar{m}_{\nu_e})^{exp} < 0.37 eV. \quad (7.15)$$

De las ecuaciones (7.10) y (7.14), obtenemos

$$(\bar{m}_{\nu_e})^{th} = 0.053 \text{ eV}. \quad (7.16)$$

de nuevo, muy por debajo de las cotas experimentales.

7.1. Desviación de la matriz de mezclas \mathbf{V}_{PMNS}^{th} de la forma tri-bimaxima

Harrison, Perkins y Scott [9] propusieron la forma tri-bimáxima de la matriz de mezcla de los neutrinos,

$$\mathbf{V}_{PMNS}^{tri} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (7.17)$$

la cual es, hasta la fecha, la forma más simple de la matriz de mezclas que está en acuerdo con los datos experimentales, y es por ésto que es muy popular y ha habido un sin número de intentos por obtener esta forma con simetrías discretas del sabor. Aquí demostraremos que la matriz de mezclas de los neutrinos que calculamos en nuestra extensión del Modelo Estándar difiere muy poco de la forma tri-bimaxima.

Nuestras predicciones de la sección anterior, como se puede ver, dependen débilmente en la fase de Dirac δ . Por simplicidad se considera violación de CP máxima, es decir $\delta = \pi/2$ ¹.

Para obtener una relación entre ambas matrices, es conveniente escribir $\tan \theta_{12}$ como

$$\tan \theta_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta t_{12}, \quad (7.18)$$

en donde δt_{12} es una cantidad pequeña del orden del 6 % del valor tri-bimáximo.

De la expresión (6.38), y la ecuación (7.18), podemos escribir la matriz de mezclas de la siguiente manera,

$$\mathbf{V}_{PMNS}^{th} = \mathbf{V}_{PMNS}^{tri} + \Delta \mathbf{V}_{PMNS}^{tri}. \quad (7.19)$$

¹Las predicciones que se obtienen para las mezclas, dependen muy poco del valor de la fase, δ , por lo que la elección del valor de ésta no afectará en forma sustancial nuestros resultados

en donde la forma tri-bimáxima, está dada en la ecuación (7.17), y

$$\Delta\mathbf{V}_{PMNS}^{tri} = \Delta\mathbf{V}_e + \delta t_{12} \frac{(\sqrt{2} + \delta t_{12})}{g(\delta t_{12})} \Delta\mathbf{V}_\nu, \quad (7.20)$$

con

$$g(\delta t_{12}) = 1 + \frac{2}{3}\delta t_{12}(\sqrt{2} + \delta t_{12}). \quad (7.21)$$

Comparando la expresión (6.38) para la matriz de mezcla de los neutrinos, con la forma tri-bimaxima (7.17) se obtiene,

$$\Delta\mathbf{V}_e \approx \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \frac{s_{13}^2}{1+c_{13}} & -\frac{1}{3} \frac{s_{13}^2}{1+c_{13}} & s_{13} \\ \frac{5}{2\sqrt{6}} \frac{x^2}{1+\sqrt{1+\frac{5}{2}x^2}} & \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

en donde $x = m_e/m_\mu$, $\tilde{m}_\mu = m_\mu/m_\tau$ y

$$s_{13} \approx 1/\sqrt{2}x(1 + 4x^2 - \tilde{m}_\mu^4)/\sqrt{1 + \tilde{m}_\mu^2 + 5x^2 - \tilde{m}_\mu^4}.$$

Nótese que todos los elementos de matriz en la ecuación (7.22) son proporcionales a $x^2 = (m_e/m_\mu)^2$ excepto por el elemento, $(\Delta\mathbf{V}_e)_{13}$, el cual es proporcional a $x = m_e/m_\mu$. Por lo tanto, en el límite en que la masa del electrón es cero, $\Delta\mathbf{V}_e \rightarrow 0$.

La matriz $\Delta\mathbf{V}_\nu$ se puede escribir como

$$\Delta\mathbf{V}_\nu = \begin{pmatrix} -\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{1 - \frac{s_{13}^2}{1+c_{13}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3} \frac{\delta t_{12}(\sqrt{2} + \delta t_{12})}{g(\delta t_{12})}}} & \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2} \frac{1 - \frac{s_{13}^2}{1+c_{13}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{3} \frac{\delta t_{12}(\sqrt{2} + \delta t_{12})}{g(\delta t_{12})}}} & 0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1+\frac{5}{2}x^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\delta t_{12}(\sqrt{2} + \delta t_{12})}{g(\delta t_{12})} \frac{1-2x^2}{1+\frac{5}{2}x^2}}\right)} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3} \frac{\delta t_{12}(\sqrt{2} + \delta t_{12})}{g(\delta t_{12})} \frac{1-2x^2}{1+\frac{1}{4}x^2}}\right)} & 0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{1+\frac{1}{4}x^2}{\sqrt{1+x^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\delta t_{12}(\sqrt{2} + \delta t_{12})}{g(\delta t_{12})} \frac{1+\frac{1}{4}x^2}{1+x^2}}\right)} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1+x^2}{\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3} \frac{\delta t_{12}(\sqrt{2} + \delta t_{12})}{g(\delta t_{12})} \frac{1+x^2}{1+\frac{1}{4}x^2}}\right)} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

nótese que todos los elementos de la tercer columna $\Delta\mathbf{V}_\nu$ son cero.

De las ecuaciones (7.20) y (7.22) podemos ver que en el límite en que $m_e = 0$ y $\delta t_{12} = 0$ la desviación del patrón tri-bimáximo es exactamente cero, esto es

$$\Delta \mathbf{V}_{PMNS}^{tri} = 0. \quad (7.24)$$

Hemos demostrado que la matriz de mezcla $\Delta \mathbf{V}_{PMNS}^{tri}$ no tiene parámetros ajustables y difiere muy poco de la forma tri-bimáxima de Harrison, Perkins y Scott.

El valor δt_{12} fija la escala y el origen de las masas de los neutrinos. Si tomamos para δt_{12} el valor experimental central $\delta t_{12} \approx -0.04$, obtenemos [21]

$$\begin{aligned} |m_{\nu_2}| &\approx 0.056 \text{ eV} \\ |m_{\nu_1}| &\approx 0.055 \text{ eV}, \end{aligned}$$

y

$$|m_{\nu_3}| \approx 0.022 \text{ eV}.$$

Cuando tomamos para δt_{12} el valor tri-bimáximo $\delta t_{12} = 0$, las masas de los neutrinos toman los valores

$$m_{\nu_1} = 0.0521 \text{ eV} \quad m_{\nu_2} = 0.0528 \text{ eV} \quad \text{and} \quad m_{\nu_3} = 0.0178 \text{ eV} \quad (7.25)$$

En ambos casos la extensión S_3 invariante del Modelo Estándar predice una jerarquía invertida. Debido a que el valor tri-bimáximo para δt_{12} difiere del valor experimental central en menos del 6% de $\tan \theta_{12}$, la diferencia en las correspondientes masas de los neutrinos no son significativas dentro de las incertidumbres experimentales más recientes.

Capítulo 8

Corrientes Neutras que violan el Sabor

Los modelos teóricos con más de un bosón de Higgs en un doblete de $SU(2)_L$ predicen procesos que proceden del intercambio de bosones de Higgs neutros en estados intermedios que no conservan el sabor. Estas son las corrientes neutras que cambian el sabor de los fermiones que intervienen en la reacción. Un ejemplo de estos procesos es la desintegración de un leptón τ en tres muones. Experimentalmente, se sabe que estos procesos están muy fuertemente suprimidos. Por consiguiente, es conveniente verificar que al agregar a la teoría dos bosones de Higgs en dobletes de $SU(2)_L$ y dobletes de S_3 , no se violen las cotas experimentales sobre los procesos mediados por las corrientes neutras que cambian el sabor (FCNC).

En la Extensión Mínima S_3 -Invariante del Modelo Estándar que aquí se considera, hay un doblete de Higgs $SU(2)_L$ por generación que se acopla a todos los fermiones. Los acoplamientos de Yukawa que cambian el sabor se pueden escribir en una base débil, adaptada a la simetría y etiquetada con índice de sabor, como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^{\text{FCNC}} = & (\bar{E}_{aL} Y_{ab}^{ES} E_{bR} + \bar{U}_{aL} Y_{ab}^{US} U_{bR} + \bar{D}_{aL} Y_{ab}^{DS} D_{bR}) H_S^0 \\ & + (\bar{E}_{aL} Y_{ab}^{E1} E_{bR} + \bar{U}_{aL} Y_{ab}^{U1} U_{bR} + \bar{D}_{aL} Y_{ab}^{D1} D_{bR}) H_1^0 + \\ & (\bar{E}_{aL} Y_{ab}^{E2} E_{bR} + \bar{U}_{aL} Y_{ab}^{U2} U_{bR} + \bar{D}_{aL} Y_{ab}^{D2} D_{bR}) H_2^0 + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (8.1)$$

En esta expresión, los elementos en las matrices columna E 's, U 's y D 's son los campos fermiónicos izquierdos y derechos, y $Y_{ab}^{(e,u,d)s}$, $Y_{ab}^{(e,u,d)1,2}$ son

las matrices de 3×3 de los acoplamientos de Yukawa de los campos fermiónicos a los bosones de Higgs neutros H_s^0 y H_I^0 que se encuentran en las representaciones de singlete y de doblete de S_3 , respectivamente.

En esta base, los acoplamientos de Yukawa de los campos de Higgs a cada familia de fermiones se pueden escribir en términos de matrices $\mathcal{M}_Y^{(e,u,d)}$ que dan lugar a las correspondientes matrices de masa $M^{(e,u,d)}$ cuando la simetría de norma se rompe espontáneamente. De esta relación, podemos calcular los acoplamientos de Yukawa que cambian el sabor en términos de las masas de los fermiones y las esperanzas matemáticas entre estados del vacío de los campos de Higgs neutros. Por ejemplo, la matriz \mathcal{M}_Y^e se escribe en términos de los acoplamientos de Yukawa de los leptones cargados como

$$\mathcal{M}_Y^e = Y_w^{E1} H_1^0 + Y_w^{E2} H_2^0, \quad (8.2)$$

en esta expresión, el índice w significa que las matrices de Yukawa están definidas en la base débil

$$Y_w^{E1} = \frac{m_\tau}{v_1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_e} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

y

$$Y_w^{E2} = \frac{m_\tau}{v_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ 0 & \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_e} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Los acoplamientos de Yukawa de interés físico inmediato en el cálculo de las corrientes neutras que cambian el sabor son aquellas definidas en la base de masa, de acuerdo con

$$\tilde{Y}_m^{EI} = U_{eL}^\dagger Y_w^{EI} U_{eR} \quad (8.5)$$

aquí, U_{eL} y U_{eR} son las matrices que diagonalizan a la matriz de masa de los leptones cargados y que fueron definidas en las ecuaciones (6.24) y (6.25).

Así, obtenemos

$$\tilde{Y}_m^{E1} \approx \frac{m_\tau}{v_1} \begin{pmatrix} 2\tilde{m}_e & -\frac{1}{2}\tilde{m}_e & \frac{1}{2}x \\ -\tilde{m}_\mu & \frac{1}{2}\tilde{m}_\mu & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\tilde{m}_\mu x^2 & -\frac{1}{2}\tilde{m}_\mu & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_m, \quad (8.6)$$

y

$$\tilde{Y}_m^{E2} \approx \frac{m_\tau}{v_2} \begin{pmatrix} -\tilde{m}_e & \frac{1}{2}\tilde{m}_e & -\frac{1}{2}x \\ \tilde{m}_\mu & \frac{1}{2}\tilde{m}_\mu & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\tilde{m}_\mu x^2 & \frac{1}{2}\tilde{m}_\mu & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_m, \quad (8.7)$$

en estas expresiones, $\tilde{m}_\mu = 5.94 \times 10^{-2}$, $\tilde{m}_e = 2.876 \times 10^{-4}$ y $x = m_e/m_\mu = 4.84 \times 10^{-3}$. Todos los elementos no-diagonales de las matrices \tilde{Y}_m^{EI} son responsables de procesos que proceden via corrientes neutras que cambian el sabor (FCNC) a nivel árbol y a un rizo, ver Figura 8.1. Los valores numéricos de los acoplamientos de Yukawa en (8.6) y (8.7) todavía dependen de las esperanzas matemáticas entre estados del vacío (VEV) de los campos de Higgs, v_1 y v_2 , y, por consiguiente, del potencial de Higgs. Si la simetría S'_2 del sector de Higgs, se conserva, $\langle H_1^0 \rangle = \langle H_2^0 \rangle = v$.

8.1. Cálculo del decaimiento $l_i \longrightarrow 3l$

Nos interesa ver explícitamente las tasas de decaimiento de los procesos leptónicos que violan el sabor en la Extensión S_3 -Invariante del Modelo Estándar. Un ejemplo de este tipo de procesos a nivel árbol es el decaimiento de un tau en tres muones, $\tau^- \rightarrow \mu^- \mu^+ \mu^-$, ó el decaimiento de un muón en tres electrones, $\mu^- \rightarrow e^- e^+ e^-$.

Por ejemplo, el proceso $\tau \rightarrow \mu e^+ e^-$, debido al intercambio de un boson de Higgs está descrito por un diagrama de Feynman como el que se muestra en la figura 8.2, y la amplitud de decaimiento este proceso, está dada por

$$\mathcal{A}(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) = \frac{i}{M_{H_{1,2}}^2} \left[\bar{u}_e \tilde{Y}_{1,2}^{ee} u_e \bar{u}_\mu \tilde{Y}_{1,2}^{\mu\tau} u_\tau \right], \quad (8.8)$$

en donde $M_{H_{1,2}}$ es la masa del boson de Higgs que interviene en el proceso,

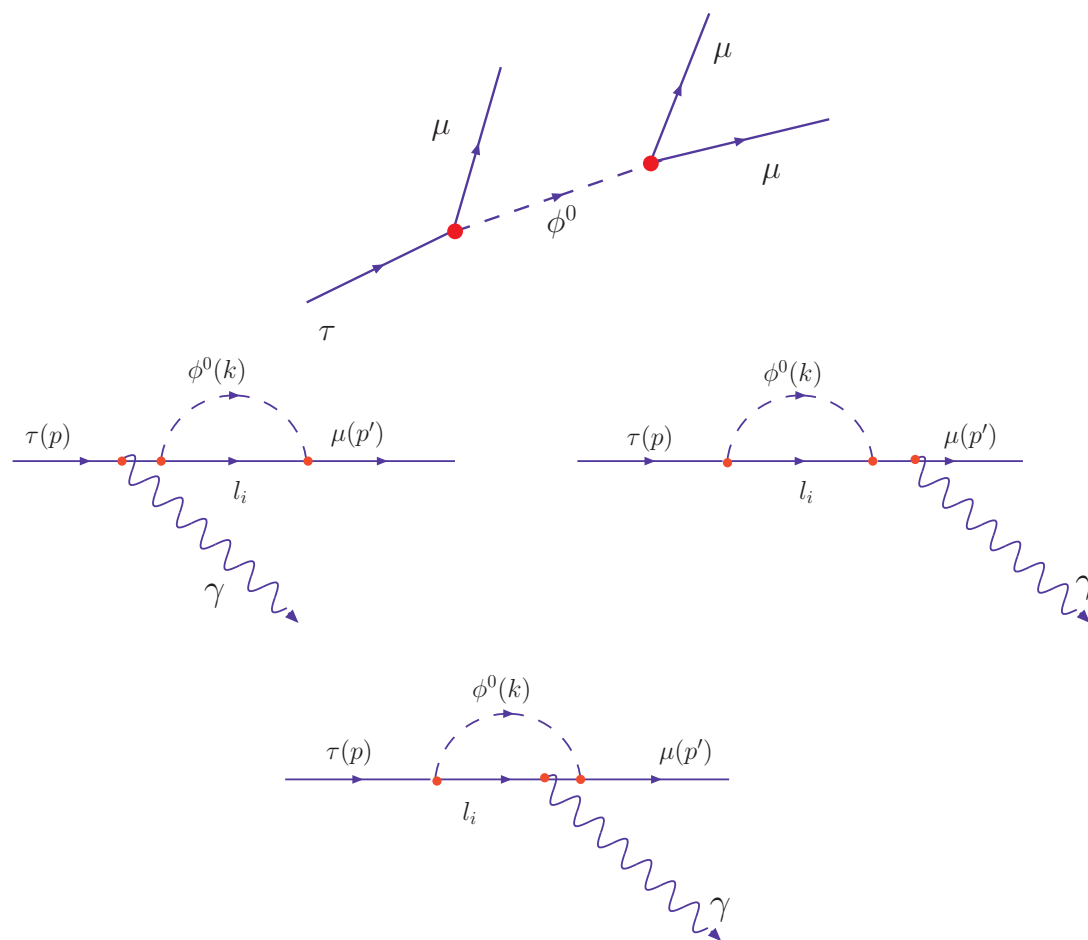
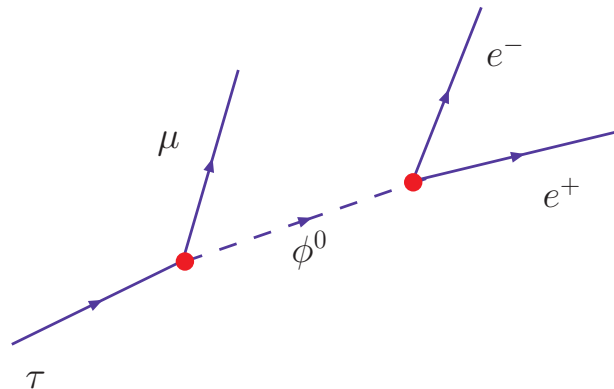


Figura 8.1: La figura de arriba es el diagrama de Feynman del proceso $\tau^- \rightarrow 3\mu$, mientras que los tres diagramas a la derecha son los tres diagramas de Feynman que contribuyen al proceso $\tau \rightarrow \mu\gamma$.

Figura 8.2: Diagrama del proceso $\tau^- \rightarrow \mu^- e^- e^+$

$\tilde{Y}_{1,2}^{ab}$, es el acoplamiento de Yukawa en la base de masas que acopla a los leptones a y b con el boson de Higgs. Para propósitos del cálculo, podemos despreciar la masa del electrón, $m_e \rightarrow 0$, y la masa del muón, $m_\mu \rightarrow 0$. Al tomar la amplitud al cuadrado y sumar sobre la polarización inicial y las polarizaciones finales, se obtiene

$$\frac{1}{2} \sum |A|^2 = \frac{1}{4} \frac{\left(\tilde{Y}_{1,2}^{ee} \tilde{Y}_{1,2}^{\mu\tau}\right)^2}{M_{H_{1,2}}^4} [Tr(p_2 \cdot p_1) Tr(p_3 \cdot p_4 + \not{p}_3 m_\tau)] \quad (8.9)$$

en donde el término proporcional a \not{p}_3 es cero debido a que la traza de γ_μ es cero. Las trazas son inmediatas y dan un factor de 4 cada una, por lo que nos queda entonces que

$$\frac{1}{2} \sum |A|^2 = 4 \frac{\left(\tilde{Y}_{1,2}^{ee} \tilde{Y}_{1,2}^{\mu\tau}\right)^2}{M_{H_{1,2}}^4} p_2 \cdot p_1 p_3 \cdot p_4. \quad (8.10)$$

Nos interesa calcular la tasa de decaimiento debida a este proceso, por lo que escribimos la tasa de decaimiento diferencial de éste

$$d\Gamma(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) = \frac{(2\pi)\delta^4(p_2 + p_3 + p_4 - p_1)}{2m_\tau} \frac{d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4}{2E_2 (2\pi)^3 2E_3 (2\pi)^3 2E_4} \frac{1}{2} \sum |A|^2. \quad (8.11)$$

Reescribimos la expresión y nos queda

$$d\Gamma(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) = \left(\tilde{Y}_{1,2}^{ee} \tilde{Y}_{1,2}^{\mu\tau}\right)^2 \frac{\delta^4(p_2 + p_3 + p_4 - p_1)}{4(2\pi)^5 m_\tau M_{H_{1,2}}^4} \frac{d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4}{E_2 E_3 E_4} p_1^\alpha p_4^\beta p_{2\alpha} p_{4\beta}. \quad (8.12)$$

Definimos el cuadrimento transferido $q = p_1 - p_4$ e integrando sobre p_2 y p_3 , se obtiene

$$d\Gamma(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) = \frac{\left(\tilde{Y}_{1,2}^{ee} \tilde{Y}_{1,2}^{\mu\tau}\right)^2}{2(2\pi)^5 M_{H_{1,2}}^4} \frac{d^3 p_4}{m_\tau E_4} p_1^\alpha p_4^\beta \int \frac{d^3 p_2 d^3 p_3}{E_2 E_3} \delta^4(p_2 + p_3 - q) p_{2\alpha} p_{3\beta}. \quad (8.13)$$

La integral la podemos escribir como

$$I_{\alpha\beta} = \int \frac{d^3 p_2 d^3 p_3}{E_2 E_3} \delta^4(p_2 + p_3 - q) p_{2\alpha} p_{3\beta} = A q^2 g_{\alpha\beta} + B q_\alpha q_\beta. \quad (8.14)$$

Se puede demostrar que en este caso $A = \pi/6$ y que $B = \pi/3$. En el sistema en que el τ está en reposo, $p_1^\mu = (m_\tau, \vec{0})$, y en la aproximación en que la masas del muón y la masa del electrón son cero, se tiene

$$p_1 \cdot p_4 = m_\tau E_4, \quad p_1^2 = m_\tau^2, \quad p_4^2 = m_\mu^2 \rightarrow 0, \quad (8.15)$$

$$d^3 p_4 \sim p_4^2 d^3 p_4 \sim E_4^2 dE_4,$$

con lo cual, el producto $p_1^\alpha p_4^\beta I_{\alpha\beta}$ queda como

$$\begin{aligned} p_1^\alpha p_4^\beta I_{\alpha\beta} &= \frac{\pi}{6} (p_1 \cdot p_4 (p_1^2 - 2p_1 \cdot p_4 + p_4^2) + 2p_1 \cdot (p_1 - p_4) p_4 \cdot (p_1 - p_4)) \\ &= \frac{\pi}{6} m_\tau E_4 (3m_\tau^2 - 4m_\tau E_4). \end{aligned} \quad (8.16)$$

La integral sobre el ángulo sólido da 4π y sólo nos falta integrar sobre E_4 . Para ver los límites de integración vemos que para el caso en que $E_4 = 0$ $p_2 = -p_3$ y en el caso en que alcanza el máximo, $E_4 = \frac{m_\tau}{2}$, por lo que $0 \leq E_4 \leq m_\tau/2$.

$$\Gamma(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) = \frac{\pi}{6} \frac{2^2 (2\pi) \left(\tilde{Y}_{1,2}^{ee} \tilde{Y}_{1,2}^{\mu\tau}\right)^2}{2(2\pi)^5 M_{H_{1,2}}^4} \int_0^{m_\tau/2} E_4^2 dE_4 (3m_\tau - 4E_4), \quad (8.17)$$

la integral sobre E_4 con el cambio de variable $E_4 = \epsilon \frac{m_\tau}{2}$ queda como

$$\int_0^{m_\tau/2} \frac{E_4^2 dE_4}{m_\tau^2} (3m_\tau - 4E_4) \rightarrow \frac{m_\tau^5}{2^3} \int_0^1 \epsilon^2 (3 - 2\epsilon) = \frac{m_\tau^5}{2^4} \quad (8.18)$$

con lo cual la tasa de decaimiento total nos queda como

$$\Gamma(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) = \frac{m_\tau^5 \left(\tilde{Y}_{1,2}^{ee} \tilde{Y}_{1,2}^{\mu\tau}\right)^2}{6 \times 2^9 \pi^3 M_{H_{1,2}}^4} \quad (8.19)$$

la cual reescribimos como

$$\omega_\tau = \frac{m_\tau^5}{192 \times 16\pi^3} \frac{(\tilde{Y}_{1,2}^{ee} \tilde{Y}_{1,2}^{\tau\mu})^2}{M_{H_{1,2}}^4}. \quad (8.20)$$

Para poder hacer una estimación del orden de magnitud del coeficiente en las matrices de Yukawa, m_τ/v , podemos además suponer que los VEV's de todos los campos de Higgs son de magnitud comparable, esto es que

$$\langle H_s^0 \rangle = \langle H_1^0 \rangle = \langle H_2^0 \rangle = \frac{\sqrt{2} M_W}{\sqrt{3} g_2}$$

entonces,

$$m_\tau/v = \sqrt{\frac{3}{2}} g_2 \frac{m_\tau}{M_W}$$

y podemos estimar los valores numéricos de los acoplamientos de Yukawa a partir de los valores numéricos de las masas de los leptones cargados. Por ejemplo, la amplitud del proceso que viola el sabor $\tau^- \rightarrow \mu^- e^+ e^-$, es proporcional a $\tilde{Y}_{\tau\mu}^E \tilde{Y}_{ee}^E$ [128]. Entonces, la tasa de ramificación leptónica es

$$Br(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) = \frac{\Gamma(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-)}{\Gamma(\tau \rightarrow e\nu\bar{\nu}) + \Gamma(\tau \rightarrow \mu\nu\bar{\nu})} \times 0.34, \quad (8.21)$$

y

$$\Gamma(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) \approx \frac{m_\tau^5}{3 \times 2^{10} \pi^3} \frac{(\tilde{Y}_{1,2}^{ee} \tilde{Y}_{1,2}^{\tau\mu})^2}{M_{H_{1,2}}^4} \quad (8.22)$$

que es el término dominante. El factor 0.34 en la ecuación (8.21) es debido a que solo estamos contando los decaimientos leptónicos del tau siendo que los decaimientos en hadrones son dominantes. Las bien conocidas expresiones para $\Gamma(\tau \rightarrow e\nu\bar{\nu})$ y $\Gamma(\tau \rightarrow \mu\nu\bar{\nu})$ [129]¹, nos dan

$$Br(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) \approx \frac{9}{4} \left(\frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2} \right)^2 \left(\frac{m_\tau}{M_{H_{1,2}}} \right)^4, \quad (8.23)$$

¹Nótese que las amplitudes de decaimiento leptónicas del τ son solo el 30 % del total por lo que si queremos ser consistentes tendríamos que multiplicar por $1/3 \approx 0.34$ la tasa de ramificación que hemos calculado aunque para fines prácticos como estamos comparando con cotas superiores y estamos muy por debajo de éstas, no es necesario.

tomando para $M_{H_{1,2}} \sim 120 \text{ GeV}$, obtenemos

$$Br(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) \approx 3.15 \times 10^{-17}, \quad (8.24)$$

muy por abajo de la cota superior experimental para este proceso, que es 2.7×10^{-8} [130].

8.2. Calculo del decaimiento $l_i \longrightarrow l_j \gamma$

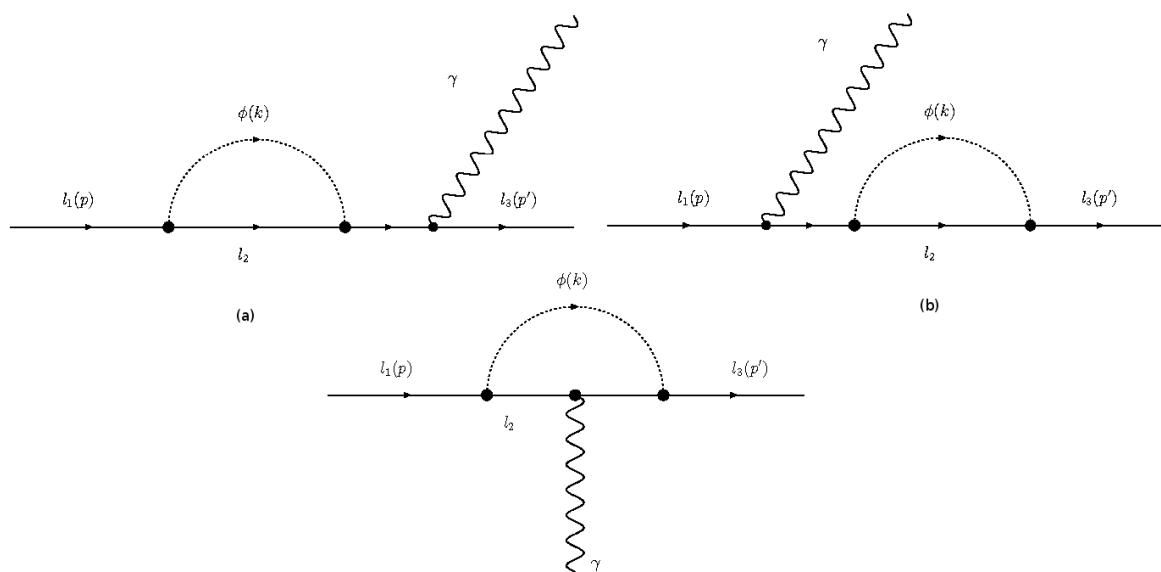


Figura 8.3: Diagramas que contribuyen a la violación del numero leptónico $l_1 \rightarrow l_3 \gamma$

Para calcular las tasas de ramificación de procesos radiativos como el de $\tau \rightarrow \mu \gamma$, necesitamos calcular primero la amplitud.

La amplitud del proceso $l_1 \rightarrow l_3 \gamma$, mostrado en la figura (E.1), está dada por la ecuación

$$M = -e\epsilon^\mu Y_{l_1 l_2} Y_{l_2 l_3} \bar{u}_{l_3}(p') \left[\Lambda_\mu + i\Sigma_L \frac{(\not{p}' + m_1)\gamma^\mu}{p'^2 - m_1^2} + i\frac{\gamma^\mu(\not{p} + m_3)}{p^2 - m_3^2} \Sigma_R \right] u_{l_1}(p) \quad (8.25)$$

en donde

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu &= - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{p}' - \not{k} + m_2}{(p-k)^2 - m_2^2} \frac{\gamma_\mu}{k^2 - m_s^2} \frac{\not{p}' - \not{k} + m_2}{(p'-k)^2 - m_2^2}, \\ \Sigma_L(p') &= \int \frac{\not{p}' - \not{k} + m_2}{(p'-k)^2 - m_2^2} \frac{1}{k^2 - m_s^2}, \\ \Sigma_R(p) &= \Sigma_L(p \rightarrow p').\end{aligned}\tag{8.26}$$

En el caso que estamos viendo, es claro que $m_1 = m_\tau$ y $m_3 = m_{e,\mu}$. Las divergencias en los diagramas se cancelan [128], (ver apéndice E). Consideremos el caso $\tau \rightarrow e\gamma$, calculando las partes finitas en las integrales y haciendo los desarrollos en potencias de $(m_\tau/m_H)^2$, se encuentra el término dominante a orden $\mathcal{O}(m_\tau^2/m_H^2)$,

$$|M|^2 = \frac{e^2}{(4\pi)^4} \left| \bar{u}_e(p') \left[\tilde{Y}_{\tau\tau} \tilde{Y}_{\tau e} \frac{m_\tau}{6M_H} \left(\not{\epsilon} - 2 \frac{p \cdot \epsilon}{m_\tau} \right) + (\tilde{Y}_{\tau e} \tilde{Y}_{ee} + \tilde{Y}_{\tau\mu} \tilde{Y}_{\mu e}) \frac{m_\tau}{3M_H} \left(\not{\epsilon} - 2 \frac{p \cdot \epsilon}{m_\tau} \right) \right] u_\tau(p) \right|^2\tag{8.27}$$

Ignorando los términos de interferencia, ya que en el caso de que alguno de los términos que aparecen sea mucho mayor que los otros dos la contribución dominante vendrá de éste, se obtiene

$$\omega_{\tau e\gamma} = \frac{\alpha m_\tau^5}{2^{11} 9 \pi^4 M_H^2} \left(\tilde{Y}_{\tau\tau}^2 \tilde{Y}_{\tau e}^2 + 4(\tilde{Y}_{\tau e}^2 \tilde{Y}_{ee}^2 + \tilde{Y}_{\tau\mu}^2 \tilde{Y}_{\mu e}^2) \right).\tag{8.28}$$

El cálculo para $\tau \rightarrow \mu\gamma$ es similar y el resultado de éste es

$$\omega_{\tau e\gamma} = \frac{\alpha m_\tau^5}{2^{11} 9 \pi^4 M_H^2} \left(\tilde{Y}_{\tau\tau}^2 \tilde{Y}_{\tau\mu}^2 + 4(\tilde{Y}_{\tau e}^2 \tilde{Y}_{e\mu}^2 + \tilde{Y}_{\tau\mu}^2 \tilde{Y}_{\mu\mu}^2) \right).\tag{8.29}$$

El cálculo del proceso $\mu \rightarrow e\gamma$ es similar y en este caso el término dominante es en el que aparece un τ en el lazo por lo que la amplitud de este proceso queda como

$$|M|^2 = \frac{e^2}{(4\pi)^4} \tilde{Y}_{\mu\tau}^2 \tilde{Y}_{\tau e}^2 \frac{m_\tau^2 m_\mu^2}{4M_H^4} \left| \bar{u}_e(p') \left[\left(\not{\epsilon} - 2 \frac{p \cdot \epsilon}{m_\mu} \right) \right] u_\mu(p) \right|^2\tag{8.30}$$

Para ver el cálculo de las tasas de ramificación de los procesos que violan el sabor leptónico a un lazo, ver el apéndice E.

Cálculos semejantes a la tasa de ramificación anterior, nos dan las siguientes estimaciones

$$Br(\tau \rightarrow 3\mu) \approx \frac{9}{64} \left(\frac{m_\mu}{M_H} \right)^4,\tag{8.31}$$

Tabla 8.1: Procesos leptónicos que ocurren vía FCNC calculados con $M_H = 120 \text{ GeV}$ y $\tan \beta = 1$

Proceso	BR Teórico	Cota superior del BR experimental	Referencias
$\tau \rightarrow 3\mu$	8.43×10^{-14}	2×10^{-7}	B. Aubert <i>et al.</i> [131]
$\tau \rightarrow \mu e^+ e^-$	3.15×10^{-17}	2.7×10^{-7}	B. Aubert <i>et al.</i> [131]
$\tau \rightarrow \mu \gamma$	9.24×10^{-15}	6.8×10^{-8}	B. Aubert <i>et al.</i> [132]
$\tau \rightarrow e \gamma$	5.22×10^{-16}	1.1×10^{-11}	B. Aubert <i>et al.</i> [133]
$\mu \rightarrow 3e$	2.53×10^{-16}	1×10^{-12}	U. Bellgardt <i>et al.</i> [134]
$\mu \rightarrow e \gamma$	1×10^{-19}	1.2×10^{-11}	M. L. Brooks <i>et al.</i> [135]

y

$$Br(\mu \rightarrow 3e) \approx 18 \left(\frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2} \right)^2 \left(\frac{m_\tau}{M_H} \right)^4. \quad (8.32)$$

Se calculó con $v_S = v_1 = v_2$. Si no se hace esta suposición y se deja $v_S/v_1 = \tan \beta$ sin especificar, (8.32) cambia a

$$Br(\mu \rightarrow 3e) \approx 2(2 + \tan^2 \beta)^2 \left(\frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2} \right)^2 \left(\frac{m_\tau}{M_H} \right)^4. \quad (8.33)$$

Además de los procesos a nivel árbol, tenemos los procesos a un lazo como $\tau \rightarrow (e, \mu)\gamma$ y $\mu \rightarrow e\gamma$,

$$Br(\tau \rightarrow e\gamma) \approx \frac{3\alpha}{8\pi} \left(\frac{m_\mu}{M_H} \right)^4, \quad (8.34)$$

$$Br(\tau \rightarrow \mu\gamma) \approx \frac{3\alpha}{128\pi} \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \left(\frac{m_\tau}{M_H} \right)^4, \quad (8.35)$$

$$Br(\mu \rightarrow e\gamma) \approx \frac{27\alpha}{16\pi} \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^4 \left(\frac{m_\tau}{M_H} \right)^4. \quad (8.36)$$

De las estimaciones anteriores, se aprecia fácilmente que los procesos que proceden vía corrientes neutras que cambian el sabor (FCNC) en el sector leptónico están fuertemente suprimidas por potencias de los valores pequeños de los cocientes de las masas m_e/m_τ , m_μ/m_τ y m_τ/M_H . Las estimaciones numéricas de las tasas de ramificación y las correspondientes cotas superiores experimentales se muestran en la Tabla 8.1. Se puede ver que, en todos

los casos considerados, los valores numéricos de las tasas de ramificación de los procesos de corrientes neutras que cambian el sabor (FCNC) en el sector leptónico están muy por debajo de las cotas superiores experimentales correspondientes. Las matrices de los acoplamientos de Yukawa de los quarks se pueden calcular de manera semejante. En el artículo [11], se dan valores numéricos para los quarks de tipo u y d. Ahí encontraron que debido a la marcada jerarquía de las masas de los quarks y las correspondientes valores pequeños o muy pequeños de los cocientes de las masas, los valores numéricos de todos los acoplamientos de Yukawa en el sector de los quarks son pequeños o muy pequeños. Kubo, Okada y Sakamaki [73] han investigado el rompimiento de la simetría de norma en la presente Extensión Mínima S_3 -Invariante del Modelo Estándar con el potencial de Higgs S_3 -invariante $V_H(H_S, H_2)$ analizado por Pakvasa y Sugawara. Ellos encontraron que es posible que todos los bosones de Higgs, exceptuando a uno neutro se pueden hacer lo suficientemente pesados ($M_H \sim 10 \text{ TeV}$) como para suprimir todos los procesos vía corrientes neutras que cambian el sabor en el sector de los quarks de la teoría sin tener problemas con la trivialidad.

Finalmente, queremos gregar que, aún cuando los valores teóricos de las tasas de ramificación de los procesos vía FCNC calculados en nuestro trabajo son mucho menores que las correspondientes cotas superiores experimentales medidas en los laboratorios terrestres, esos valores aún son mayores que los valores nulos o casi nulos que permite el Modelo Estándar y podrían tener importancia en algunos procesos astrofísicos. Ya se ha argumentado que procesos FCNC pequeños que sirven de intermediarios a las interacciones no-standard de los quarks y los neutrinos podrían tener importancia en la descripción teórica del colapso gravitacional del núcleo y la generación de choque en la etapa explosiva de una supernova [136, 137].

8.3. Momento magnético anómalo del Muón

El momento magnético anómalo del muón es una de las cantidades mejor medidas en la física de partículas. Las medidas de precisión más recientes de este observable, hechas en Brookhaven [138], revelan una discrepancia de tres desviaciones estándar de este valor respecto del que predice el ME. En la extensión que estudiamos en esta tesis, la anomalía del momento magnético del muón recibe una contribución del intercambio de bosones escalares que cambian el sabor leptónico, la cual se representa en el diagrama de Feynman

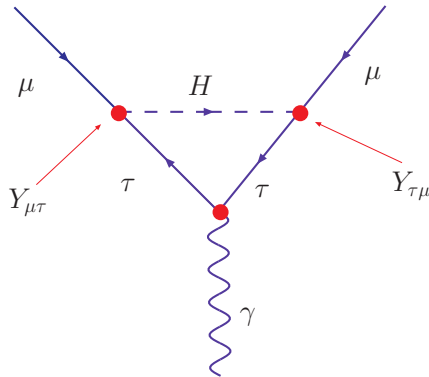


Figura 8.4: La contribución, $\Delta a_\mu^{(H)}$, a la anomalía del momento magnético del muón proveniente del intercambio de bosones escalares que cambian el sabor leptónico. El bosón de Higgs puede ser escalar o pseudo-escalar.

de la Figura 8.4.

La descomposición covariante relativista de este tipo de diagramas es [139]

$$A(g-2) = (-ie)\bar{u}(p') \left[\gamma^\mu F_E(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_\mu} F_M(q^2) \right] u(p) \quad (8.37)$$

en donde $F_E(q^2)$ y $F_M(q^2)$ son los factores de forma eléctricos y magnéticos respectivamente, y $q = p' - p$ y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. En el límite estático $q^2 \rightarrow 0$ se tiene que

$$F_M(0) = a_\mu \quad (8.38)$$

la cual define al momento anómalo del muón.

En nuestro modelo, las generaciones más pesadas tienen acoplamiento de Yukawa grandes, por lo tanto, la contribución más grande viene del acoplamiento $\mu - \tau - H$ ver figura 8.4. La contribución, $\Delta a_\mu^{(H)}$, al momento magnético del muón debida al intercambio del escalar neutro más ligero, calculada al orden más bajo en teoría de perturbaciones es representada por el diagrama de Feynman de la Figura (8.4), la cual genera

$$\Delta a_\mu^{(H)} = e \frac{Y_{\mu\tau}}{\sqrt{2}} \frac{Y_{\tau\mu}}{\sqrt{2}} \bar{u}(p') \Lambda^\mu u(p), \quad (8.39)$$

en donde

$$\Lambda^\mu = - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{p}' - \not{k} + m_\tau}{(p-k)^2 - m_\tau^2} \gamma^\mu \frac{\not{p}' - \not{k} + m_\tau}{(p'-k)^2 - m_\tau^2}. \quad (8.40)$$

Como nos interesa calcular la contribución al momento magnético anómalo del muón, entonces nos concentraremos en los términos que contribuyen a F_M . Primero tenemos que calcular la integral en el miembro derecho de la ecuación (8.40), para lo cual necesitamos hacer uso de los parámetros de Feynman [140], por lo que usamos la identidad

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dy dx \frac{1}{[C + (A - C)x + (B - C)y]^3}. \quad (8.41)$$

En nuestro caso

$$\begin{aligned} A &= (p - k)^2 - m_\tau^2 \\ &= k^2 - 2k \cdot p + p^2 - m_\tau^2 \\ &= k^2 - 2k \cdot p + m_\mu^2 - m_\tau^2 \\ B &= k^2 - M_H^2 \end{aligned} \quad (8.42)$$

$$\begin{aligned} C &= (p' - k)^2 - m_\tau^2 \\ &= k^2 - 2k \cdot p' + (p')^2 - m_\tau^2 \\ &= k^2 - 2k \cdot p' + m_\mu^2 - m_\tau^2 \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} A - C &= 2k \cdot (p' - p) = 2k \cdot q \\ B - C &= 2k \cdot p' + m_\tau^2 - m_\mu^2 - M_H^2. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Así Λ^μ se reescribe como

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu &= -2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dy dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\ &\quad \frac{(\not{p}' - \not{k} + m_\tau) \gamma^\mu (\not{p}' - \not{k} + m_\tau)}{[k^2 - 2k \cdot p' + m_\mu^2 - m_\tau^2 + x(2k \cdot (p' - p)) + y(2k \cdot p' + m_\tau^2 - m_\mu^2 - M_H^2)]^3} \end{aligned} \quad (8.44)$$

El denominador en la integral lo reescribimos como

$$D = k^2 - 2k \cdot (p'(1 - y) - xq) - (m_\tau^2 - m_\mu^2)(1 - y) - yM_H^2. \quad (8.45)$$

Para hacer la integral en k haremos el cambio de variable

$$k = l + p'(1 - y) - xq, \quad (8.46)$$

por lo que,

$$k^2 = l^2 + 2l \cdot (p'(1-y) - xq) + (p'(1-y) - xq)^2, \quad (8.47)$$

con lo que el denominador queda como:

$$D = l^2 + 2x(1-y)p' \cdot q - x^2q^2 - m_\mu^2(1-y)^2 - M_H^2y - (m_\mu^2 - m_\tau^2)(1-y), \quad (8.48)$$

o bien

$$D = l^2 - \Delta, \quad (8.49)$$

en donde

$$\Delta = M_H^2y + (m_\tau^2 - m_\mu^2)(1-y) + m_\mu^2(1-y)^2 + x^2q^2 - 2x(1-y)p' \cdot q. \quad (8.50)$$

El numerador queda como

$$\begin{aligned} N^\mu &= (\not{p} - \not{k} + m_\tau) \gamma^\mu (\not{p}' - \not{k} + m_\tau) \\ &= (-\not{l} + x\not{q} + \not{p} - \not{p}'(1-y) + m_\tau) \gamma^\mu (-\not{l} + x\not{q} - \not{p}'(1-y) + \not{p}' + m_\tau). \end{aligned} \quad (8.51)$$

En esta expresión, solamente contribuyen a F_M los términos lineales en q . Los términos cuadráticos en l no contribuyen porque son independientes de q . Los términos lineales en l dan una contribución nula a la integral. Además recordemos que $p = p' - q$ y $p' = p + q$, y también

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\not{p}' &= \bar{u}(p')m_\mu \\ \not{p}u(p) &= m_\mu u(p). \end{aligned} \quad (8.52)$$

por lo que al numerador lo podemos llevar a la forma

$$N^\mu \rightarrow (-\not{q}(1-x) + m_\tau + m_\mu y) \gamma^\mu (\not{q}(x-y) + m_\tau + m_\mu y). \quad (8.53)$$

Entonces la parte del numerador que contribuye a F_M se reduce a

$$N^\mu \rightarrow (m_\tau + m_\mu y) [-\not{q}\gamma^\mu - y\gamma^\mu\not{q} + x(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu q_\nu)]. \quad (8.54)$$

En esta expresión, el último término es proporcional a q^μ , por lo cual no contribuye debido a que al contraerlo con ϵ_μ se anula. Recordemos además que

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}, \quad (8.55)$$

con lo que el numerador queda como

$$N^\mu \rightarrow i\sigma^{\mu\nu} q_\nu (m_\tau + m_\mu y)(y - 1), \quad (8.56)$$

con esto $F_M(q^2)$ queda como

$$F_M(q^2) = 4im_\mu \frac{Y_{\mu\tau}}{\sqrt{2}} \frac{Y_{\tau\mu}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_0^{1-y} dy dx (1-y)(m_\tau + m_\mu y) \times \\ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - (M_H^2 y + (m_\tau^2 - m_\mu^2)(1-y) + m_\mu^2(1-y)^2 + x^2 q^2 - 2x(1-y)p' \cdot q)]^3}. \quad (8.57)$$

Como

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} = \frac{-i}{2 \times 16\pi^2} \left(\frac{1}{\Delta} \right), \quad (8.58)$$

entonces $\delta a_\mu \equiv F_M(q^2 = 0)$ queda como

$$\delta a_\mu = \frac{1}{16\pi^2} m_\mu Y_{\mu\tau} Y_{\tau\mu} \int_0^1 \int_0^{1-y} dy dx \frac{(1-y)(m_\tau + m_\mu y)}{M_H^2 y + (m_\tau^2 - m_\mu^2)(1-y) + m_\mu^2(1-y)^2}. \quad (8.59)$$

La integral en x es inmediata, por lo que la expresión para δa_μ se reduce a

$$\delta a_\mu = \frac{1}{16\pi^2} m_\mu Y_{\mu\tau} Y_{\tau\mu} \int_0^1 dy \frac{(1-y)^2 (m_\tau + m_\mu y)}{M_H^2 y + (m_\tau^2 - m_\mu^2)(1-y) + m_\mu^2(1-y)^2}. \quad (8.60)$$

Ahora, con el cambio de variable $y = 1 - x$, se tiene que

$$\delta a_\mu = \frac{1}{16\pi^2} m_\mu Y_{\mu\tau} Y_{\tau\mu} \int_0^1 dx \frac{x^2 (m_\tau + m_\mu(1-x))}{M_H^2(1-x) + (m_\tau^2 - m_\mu^2)x + m_\mu^2 x^2}. \quad (8.61)$$

Si hacemos la integral en x se obtiene el resultado siguiente [141]

$$\delta a_\mu^{(H)} = \frac{\tilde{Y}_{\mu\tau} \tilde{Y}_{\tau\mu} m_\mu m_\tau}{16\pi^2 M_H^2} \left(\log \left(\frac{M_H^2}{m_\tau^2} \right) - \frac{3}{2} \right). \quad (8.62)$$

Los acoplamientos de Yukawa que aparecen en esta expresión están dados en las ecuaciones (8.6) y (8.7). Por lo tanto, finalmente obtenemos

$$\delta a_\mu^{(H)} = \frac{m_\tau^2}{(246 \text{ GeV})^2} \frac{(2 + \tan^2 \beta)}{32\pi^2} \frac{m_\mu^2}{M_H^2} \left(\log \left(\frac{M_H^2}{m_\tau^2} \right) - \frac{3}{2} \right), \quad (8.63)$$

en esta expresión, $\tan \beta = v_s/v_1$, es la razón de los valores de expectación en el vacío de los escalares de Higgs en la representación de singlete, v_s , y doblete, v_1 , del grupo de sabor S_3 .

La cota más restrictiva para $\tan \beta$ se obtiene de la cota experimental de la tasa de ramificación (Branching ratio) para el proceso $Br(\mu \rightarrow 3e)$ dada en (8.33), y en la Tabla 8.1. Con ésto se obtiene,

$$\tan \beta \leq 14. \quad (8.64)$$

Sustituyendo este valor en (8.63) y tomando para la masa del escalar de Higgs el valor $M_H = 120 \text{ GeV}$ obtenemos un estimado del valor más grande posible para la contribución de las FCNC a la anomalía del momento magnético del muón

$$\delta a_\mu^{(H)} \approx 1.7 \times 10^{-10}. \quad (8.65)$$

Este número debe ser comparado con la diferencia entre el valor experimental y el valor que predice el Modelo Estándar para el momento magnético del muón [139]

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{exp} - a_\mu^{ME} = (28.7 \pm 9.1) \times 10^{-10}, \quad (8.66)$$

lo que significa

$$\frac{\delta a_\mu^{(H)}}{\Delta a_\mu} \approx 0.06. \quad (8.67)$$

Por lo tanto, la contribución a la anomalía del momento magnético del muón debida al intercambio de bosones escalares que cambian el sabor es menor o del orden del 6 % de la discrepancia entre el valor experimental y la predicción del Modelo Estándar. Esta discrepancia es del orden de tres desviaciones Estándar y bastante importante, pero su interpretación se ve comprometida por las incertidumbres en el cálculo de los efectos hadrónicos de orden más alto, principalmente debido a los efectos de polarización a tres lazos, $a_\mu^{VP}(3, had) \approx -1.82 \times 10^{-9}$ [142], y por las contribuciones hadrónicas a tres lazos de tipo luz por luz, $a_\mu^{LBL}(3, had) \approx 1.59 \times 10^{-9}$ [142].

Como se explicó antes, la contribución a la anomalía del momento magnético del muón que proviene de las corrientes neutras que cambian el sabor en la extensión mínima S_3 -invariante del Modelo Estándar es, a lo más, 6 % de la discrepancia entre el valor experimental y la predicción del Modelo Estándar para la anomalía, y es del mismo orden de magnitud que las incertidumbres

de las contribuciones hadrónicas de órdenes superiores, pero no es insignificante y es compatible con las medidas experimentales y los cálculos teóricos en el mejor estado del arte.

En la conferencia TAU08, Michael Davier presentó algunos adelantos sobre el estudio de los procesos $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$, medidos en BaBar en los cuales se toma en cuenta los procesos en los que un electrón radía un fotón y por lo tanto la energía en el centro de masa de la colisión es de hecho menor a la supuesta cuando no se tomaba en cuenta al fotón radiado. Los resultados preliminares indican que la discrepancia entre el Modelo Estándar y el experimento cambia del valor previamente estimado de 3.4σ al valor corregido de 1.7σ . Con esta corrección, en vez de que la contribución que se obtiene en la extensión mínima S_3 del ME fuese $\delta a_\mu^{(H)} \approx 0.06$, ahora sería aproximadamente del 12% ($\delta a_\mu^{(H)} \approx 0.12$).

Capítulo 9

Conclusiones

La introducción de tres dobletes de $SU(2)$ de Higgs en el Modelo Estándar permite la extensión del concepto de sabor y generaciones al sector de Higgs, así como la extensión a este sector del concepto de simetría del sabor. De esta manera, se formuló una extensión mínima S_3 -invariante del Modelo Estándar. En esta extensión se impuso una simetría Z_2 adicional en el sector leptónico con lo cual se redujo el número de parámetros libres del sector. De este modo fué posible calcular los ángulos de mezcla de los neutrinos como función solamente de las masas de los leptones cargados, las masas de los neutrinos y un parámetro libre, la fase de Dirac.

La simetría $S_3 \times Z_2$, tal como se impuso en la teoría, dió como resultado que dos de los ángulos de mezcla, esto es θ_{13} y θ_{23} , dependan solamente de las masas de los leptones cargados

$$\sin \theta_{13} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1+4x^2-\tilde{m}_\mu^4)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4}}$$

$$\sin \theta_{23} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4}}.$$

Estos resultados están en excelente acuerdo con los resultados experimentales como se puede ver de la siguiente comparación

Valor	
Experimental	Predicción Teórica
$(\sin^2 \theta_{13})^{exp} \left\{ \begin{array}{l} \leq 0.026 \\ 0.01^{+0.016}_{-0.011} \end{array} \right.$	$\sin^2 \theta_{13} = 1.1 \times 10^{-5}$
$(\sin^2 \theta_{23})^{exp} = 0.5^{+0.07}_{-0.06}$	$\sin^2 \theta_{23} = 0.5.$

En la teoría aquí desarrollada, el ángulo de mezcla solar, θ_{12} , es función tanto de las masas de los neutrinos como de las masas de los leptones cargados, sin embargo la dependencia en las masas de los leptones cargados es muy débil,

$$\tan \theta_{12}^2 = \frac{(\Delta m_{12}^2 + \Delta m_{13}^2 + |m_{\nu_3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} - |m_{\nu_3}| |\cos \phi_\nu|}{(\Delta m_{13}^2 + |m_{\nu_3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} + |m_{\nu_3}| |\cos \phi_\nu|}.$$

Esta expresión nos permitió calcular las masas de los neutrinos como función de los observables, $\tan \theta_{12}$, Δm_{12}^2 y Δm_{13}^2 , ya que en este trabajo encontramos que el ángulo ϕ_ν , el cual es la fase del acoplamiento Y_2 es cero y por lo tanto $\cos \phi_\nu = 1$.

Si en el cálculo de las masas de los neutrinos se usan los siguientes valores experimentales de las diferencias de los cuadrados de las masas:

$$\Delta m_{21}^2 = 7.65 \times 10^{-5} eV^2 \qquad \Delta m_{13}^2 = 2.4 \times 10^{-3} eV^2$$

y el ángulo de mezcla solar

$$\tan \theta_{12} = 0.661,$$

el resultado que se obtiene es

$$|m_{\nu_3}| \approx 0.021 eV, \quad |m_{\nu_2}| \approx 0.054 eV \quad \text{y} \quad |m_{\nu_1}| \approx 0.053 eV.$$

Estos resultados están en buen acuerdo con las cotas que vienen del decaimiento beta, del decaimiento doble beta sin neutrinos y con las cotas que vienen de la cosmología.

Demostramos también que la matriz de mezclas de los neutrinos difiere muy poco de la forma tri-bimáxima y la desviación que se obtiene es proporcional al cociente m_e/m_μ , el cual es muy pequeño.

En la extensión S_3 invariante del ME, que aquí estudiamos, el sector de Higgs tiene tres dobletes de $SU(2)$. Por lo tanto, en esta extensión del ME ocurren procesos por intercambio de corrientes neutras que violan el sabor, como también sucede, en otras extensiones del Modelo Estándar con más de un doblete de $SU(2)$ de Higgs. Para estar seguros que el modelo no contradice las cotas experimentales sobre procesos que violan el sabor leptónico, hemos calculado las tasas de ramificación de estos procesos y hemos encontrado que éstas están suprimidos por potencias de los cocientes, m_e/m_τ , m_μ/m_τ y m_τ/M_H en muy buen acuerdo con los datos experimentales más recientes. Sin embargo, hay que hacer notar que, a pesar de que el efecto de estos procesos suprimidos es pequeño, podría ser importante en la evolución de la onda de choque en la explosión de las supernovas. Esto se debe a que si los neutrinos del electrón ν_e cambian de sabor, esto puede alterar la captura electrónica y la física térmica en el núcleo, de hecho, la dinámica de implosión es sensible a la fracción electrónica debido a que la degeneración de los electrones provee alrededor del 90% de la presión en el núcleo. Si los neutrinos del electrón cambian de sabor se abren huecos en el mar de Fermi-Dirac de ν_e 's los cuales permiten la captura de electrones mediante la reacción $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$, lo cual cambia el potencial químico electrónico y con ello la presión en el núcleo.

También calculamos la contribución a la anomalía del momento magnético del muón que viene de procesos que violan el sabor leptónico y encontramos que esta contribución es, a lo más, del orden de 6% de la anomalía, la cual es una contribución pequeña, pero no insignificante.

El número de parámetros en la extensión mínima S_3 -invariante del ME comparado con el número de parámetros del ME queda como sigue:

En el ME hay 6 masas de los quarks, tres ángulos de mezcla y una fase que viola CP. Además están los acoplamientos de norma g_1 , g_2 y g_3 , la masa del bosón de Higgs y el valor de expectación del vacío de éste. Además están las masas de los leptones cargados. Hasta aquí hemos contado 18 parámetros libres que se fijan de los datos experimentales. Si además incluimos las masas de los neutrinos hay que agregar tres masas de los neutrinos y cuatro parámetros de la matriz de mezclas en analogía con el sector de quarks. Si se supone que son neutrinos de Majorana se tienen otros dos parámetros libres en la teoría, que son las fases de Majorana.

Así en el Modelo Estándar sin neutrinos masivos hay 18 parámetros libres y con neutrinos habría 25 ó 27 parámetros dependiendo de si los neutrinos son partículas de Dirac o Majorana.

En la Extensión Mínima S_3 -Invariante del Modelo Estándar, se tienen

las tres constantes de acoplamiento de norma, 6 masas de los quarks y 5 parámetros en la matriz de mezcla (uno más que en el Modelo Estándar). En el sector de leptones se tienen 3 masas de los leptones cargados, tres masas de los neutrinos y una fase de Dirac que viola CP. En el sector de Higgs se tienen siete masas de los bosones de Higgs y dos VEV's.

En total con neutrinos de Majorana hay 30 parámetros. Lo importante a hacer notar es que los parámetros a la escala electrodébil no son 30 porque seis Higgses son mucho más pesados que el Higgs ligero, así que de estos 30 parámetros, 24 están a la escala electrodébil. Esperamos además poder reducir el número de parámetros en el sector de los quarks por lo menos en dos parámetros.

Como se dijo antes, el número de parámetros en el sector de Higgs es 9. La cuenta de los parámetros en el sector de Higgs es como sigue: uno es la masa del Higgs del ME, otros son las 6 masas de los demás Higgses físicos los cuales están a otra escala. Otro parámetro es la suma de los vev's o bien la masa del bosón W y aún otro parámetro es el cociente de los valores de expectación en el vacío de los Higgses escalares, $\tan\beta = v_s/v_1$, el cual está acotado por el decaimiento $\mu \rightarrow 3e$ y su valor máximo es $\tan^{max}\beta \approx 14$.

En conclusión, se puede decir que la extensión mínima S_3 invariante del Modelo Estándar describe exitosamente masas y mezclas de neutrinos, así como los procesos que violan el sabor leptónico, con seis valores de las masas de los leptones que se fijan de los experimentos y una fase de Dirac que viola CP y que, por ahora, está libre.

Finalmente, hay fenomenología interesante que se debe estudiar en esta extensión, tal es el caso del cálculo de la leptogénesis resonante [143–147]. En esta teoría, la leptogénesis resonante es posible dado que dos de las masas de los neutrinos derechos de Majorana están degeneradas debido a que la simetría S_3 así lo impone.

Apéndice A

Matriz de masas a partir de la Lagrangiana de Yukawa

Se deriva la matriz de masas general en la extensión Mínima S_3 -invariante del Modelo Estándar.

Determinación de las matrices de masas

En la extensión Mínima S_3 -invariante del Modelo Estándar [11] Las interacciones de Yukawa están dadas por

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{Y_D} + \mathcal{L}_{Y_U} + \mathcal{L}_{Y_E} + \mathcal{L}_{Y_\nu}, \quad (\text{A.1})$$

en donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_D} = & -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR} - Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R} \\ & -Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\ & -Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR} - Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_U} = & -Y_1^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_S^* u_{IR} - Y_3^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_S^* u_{3R} \\ & -Y_2^u [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} (i\sigma_2) H_1^* u_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} (i\sigma_2) H_2^* u_{JR}] \\ & -Y_4^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_I^* u_{IR} - Y_5^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_I^* u_{3R} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_E} = & -Y_1^e \bar{L}_I H_S e_{IR} - Y_3^e \bar{L}_3 H_S e_{3R} \\ & -Y_2^e [\bar{L}_I \kappa_{IJ} H_1 e_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ} H_2 e_{JR}] \\ & -Y_4^e \bar{L}_3 H_I e_{IR} - Y_5^e \bar{L}_I H_I e_{3R} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_\nu} = & -Y_1^\nu \bar{L}_I(i\sigma_2) H_S^* \nu_{IR} - Y_3^\nu \bar{L}_3(i\sigma_2) H_S^* \nu_{3R} \\
& -Y_2^\nu [\bar{L}_I \kappa_{IJ}(i\sigma_2) H_1^* \nu_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ}(i\sigma_2) H_2^* \nu_{JR}] \\
& -Y_4^\nu \bar{L}_3(i\sigma_2) H_I^* \nu_{IR} - Y_5^\nu \bar{L}_I(i\sigma_2) H_I^* \nu_{3R} + \text{h.c.},
\end{aligned} \tag{A.5}$$

y

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.6}$$

Para el sector d se tiene¹

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y_D} = & -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR} - Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R} \\
& -Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\
& -Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR} - Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R} + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

En donde $I = 1, 2$ y $J = 1, 2$ son índices de doblete del sabor. El primer término del primer renglón está dado por:

$$\mathcal{L}_1 = -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR} \tag{A.8}$$

donde

- \bar{Q}_I es un doblete de sabor y doblete de $SU(2)$,
- H_S es un singlete de sabor y doblete de $SU(2)$,
- d_{IR} es un doblete de sabor y singlete de $SU(2)$.

Q tiene la forma

$$Q = \begin{pmatrix} q_L^u \\ q_L^d \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

Cuando la simetría de norma se rompe, los Higgses neutros adquieren un valor de expectación en el vacío,

$$\langle |H_S| \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(v_1 + v_2 + v_3) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ v_s \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

para el singlete de S_3 , y

$$\langle |H_1| \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ v_1^2 \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

¹**Nota:** No se tomará en cuenta para el cálculo si no hasta el final del mismo la parte del $h.c.$, por lo que en la Lagrangiana \mathcal{L}_i se omitirá el $h.c.$

$$\langle |H_2| \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(v_1 + v_2 - 2v_3) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ v_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

para los Higgses en el doblete de S_3 , H_1 y H_2 .

Entonces podemos reescribir la ecuación (A.8) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \longrightarrow & -Y_1^d [\overline{Q}_{HL1} H_s d_{1R} + \overline{Q}_{HL2} H_s d_{2R}] = \\ & -Y_1^d \left[(\overline{u}_L \ , \ \overline{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ v_s \end{pmatrix} d_R + (\overline{c}_L \ , \ \overline{s}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ v_s \end{pmatrix} s_R \right] = \\ & -Y_1^d [\overline{d}_L v_s d_R + \overline{s}_L v_s s_R]. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Para poner el índice de sabor en los campos debemos usar las siguientes identidades:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Si además

- asociamos $d \longrightarrow \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d$

- asociamos $s \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s$

- y $b \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} b$

podemos reescribir \mathcal{L}_1 en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & -Y_1^d (\overline{d}_L \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_s (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & -Y_1^d (0 \ \overline{s}_L \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_s (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

y lo reescribimos en forma matricial como sigue

$$\mathcal{L}_1 = -Y_1^d \begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_s & 0 & 0 \\ 0 & v_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Esta expresión se puede reescribir en la forma:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \bar{q}_L M_1 q_R, \quad (\text{A.17})$$

en donde la matriz M_1 está dada por

$$M_1^d = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

con

$$\mu_1^d = -2Y_1^d v_s. \quad (\text{A.19})$$

El segundo término del primer renglón está dado por

$$\mathcal{L}_2 = -Y_3^d \bar{Q}_3 v_s d_{3R} \quad (\text{A.20})$$

donde

- \bar{Q}_3 es un singlete de sabor y doblete de $SU(2)$
- d_{3R} es un singlete de sabor y singlete de $SU(2)$

Después del rompimiento espontáneo de la simetría nos queda

$$\mathcal{L}_2 \longrightarrow -Y_3^d \bar{d}_{L3} v_s, d_{3R} \quad (\text{A.21})$$

esto lo podemos reescribir en la forma

$$\mathcal{L}_2 = -Y_3^d \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{b}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_s \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_R \end{pmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

con lo que se obtiene,

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \bar{q}_L^d M_3 q_R^d, \quad (\text{A.23})$$

en donde M_3 está dada por

$$M_3 = -2Y_3^d v_s \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

con μ_3 dada por

$$\mu_3 = -2Y_3^d v_s. \quad (\text{A.25})$$

Ahora veamos como es el segundo renglón,

$$\mathcal{L}_3 = -Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}], \quad (\text{A.26})$$

éste término proviene del doblete que se obtiene del acoplamiento de un doblete de quarks y del doblete de Higgses $[Q^2 \otimes H^2]^2$.

Después del rompimiento de la simetría se escribe explícitamente como

$$[Q^2 \otimes H^2]^2 = \begin{pmatrix} d_L v_2^2 + s_L v_1^2 \\ d_L v_1^2 - s_L v_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

al multiplicarlo escalarmente por $(d_R, s_R)^T$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= -Y_2^d \begin{pmatrix} \bar{d}_L v_2^2 + \bar{s}_L v_1^2 & \bar{d}_L v_1^2 - \bar{s}_L v_2^2 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} \\ &= -Y_2^d (\bar{d}_L (v_2^2 d_R + v_1^2 s_R) + \bar{s}_L (v_1^2 d_R - v_2^2 s_R)), \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

si usamos

$$\begin{aligned} &\bar{d}_L (v_2^2 d_R + v_1^2 s_R) = \\ &(\bar{d}_L \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_2^2 (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &(\bar{d}_L \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_1^2 s_R (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &(\bar{d}_L \ 0 \ 0) \times \\ &\left(\begin{pmatrix} v_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

y

$$\begin{aligned} & \bar{s}_L(v_1^2 d_R - v_2^2 s_R) = \\ & (0 \ \bar{s}_L \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_1^2 (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \\ & v_2^2 (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} = \end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned} & (0 \ \bar{s}_L \ 0) \times \\ & \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

reescribimos (A.28) en la forma

$$(\bar{d}_L \ \bar{s}_L \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v_1^2 & -v_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.31}$$

con estas dos identidades podemos escribir entonces

$$\mathcal{L}_3 = -Y_2^d (\bar{d}_L \ \bar{s}_L \ 0) \begin{pmatrix} v_2^2 & v_1^2 & 0 \\ v_1^2 & -v_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.32}$$

Lo cual podemos escribir en la forma:

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2} \bar{q}_L^d M_2 q_R^d \tag{A.33}$$

donde M_2 está dada por

$$M_2 = -2Y_2^d \begin{pmatrix} v_2^2 & v_1^2 & 0 \\ v_1^2 & -v_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_6 & \mu_2 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.34}$$

donde μ_6 y μ_2 son reales y están dadas por

$$\mu_6 = -2Y_2^d v_2^2$$

$$\mu_2 = -2Y_2^d v_1^2.$$

Ahora veamos el ultimo renglón. El primer término de este es

$$\mathcal{L}_5 = -Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR}$$

el cual está dado por

$$\mathcal{L}_5 = -Y_4^d \bar{b}_L [H_1 d_R + H_2 s_R]$$

esto es

$$\mathcal{L}_5 = -Y_4^d v_1^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{b}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_R \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{A.35})$$

esto es, lo podemos escribir ahora como:

$$\mathcal{L}_5 = -Y_4^d \begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L & \bar{b}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ v_1^2 & v_2^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Lo cual podemos reescribir como:

$$\mathcal{L}_5 = \frac{1}{2} \bar{q}_L M_4 q_R \quad (\text{A.37})$$

donde M_4 está dada por

$$M_4 = -2Y_4^d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ v_1^2 & v_2^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu_4 & \mu_7 & 0 \end{pmatrix}$$

donde μ_4 y μ_7 son complejas y están dadas por:

$$\mu_4 = -2Y_4^d v_1^2$$

y

$$\mu_7 = -2Y_4^d v_2^2$$

y el segundo término del tercer renglón es

$$\mathcal{L}_6 = -Y_5^d \bar{Q}_I H_I d_{3R}$$

el cual está dado por

$$\mathcal{L}_6 = -Y_5^d [\bar{b}_L H_1 + \bar{s}_L H_2] b_R$$

esto es

$$\mathcal{L}_6 = -Y_5^d \left[\begin{array}{c} (\bar{d}_L \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v_1^2 + (0 \ \bar{s}_L \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_2^2 \\ (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_L \end{pmatrix} \end{array} \right] \times \quad (\text{A.38})$$

Esto se puede reescribir como

$$\mathcal{L}_6 = -Y_5^d (\bar{d}_L \ \bar{s}_L \ \bar{b}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_1^2 \\ 0 & 0 & v_2^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

lo cual podemos reescribir como:

$$\mathcal{L}_5 = \frac{1}{2} \bar{q}_L M_5 q_R \quad (\text{A.40})$$

donde M_5 está dada por

$$M_5 = -2Y_5^d \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_1^2 \\ 0 & 0 & v_2^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_5 \\ 0 & 0 & \mu_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con μ_5 y μ_8 dadas por:

$$\mu_5 = -2Y_5^d v_1^2$$

y

$$\mu_8 = -2Y_5^d v_2^2$$

con esto la matriz de masas nos queda como sigue:

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_6 & \mu_2 & \mu_5 \\ \mu_2 & \mu_1 - \mu_6 & \mu_8 \\ \mu_4 & \mu_7 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2Y_1^d v_s - 2Y_2^d v_2^2 & -2Y_2^d v_1^2 & -2Y_5^d v_1^2 \\ -2Y_2^d v_1^2 & -2Y_1^d v_s + 2Y_2^d v_2^2 & -2Y_5^d v_2^2 \\ -2Y_4^d v_1^2 & -2Y_4^d v_2^2 & -2Y_3^d v_s \end{pmatrix}.$$

Apéndice B

Reparametrización de la matriz de masas de los leptones cargados

La matriz de masas de los leptones cargados en la extensión mínima S_3 del Modelo Estándar con la simetría adicional Z_2 , toma la forma

$$M_e = m_\tau \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_5 \\ \tilde{\mu}_2 & -\tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_5 \\ \tilde{\mu}_4 & \tilde{\mu}_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

en donde las $\tilde{\mu}_i$ son los cocientes de las μ 's originales entre la masa del τ . Esta matriz es en general compleja y es claramente no-Hermitiana, sin embargo nosotros podemos construir la matriz Hermitiana $M_e M_e^\dagger$, la cual si la escalamos con la masa del leptón cargado más pesado, esto es el τ , obtenemos

$$\frac{M_e M_e^\dagger}{m_\tau^2} = \begin{pmatrix} 2|\tilde{\mu}_2|^2 + |\tilde{\mu}_5|^2 & |\tilde{\mu}_5|^2 & 2|\tilde{\mu}_2||\tilde{\mu}_4|e^{-i\delta_e} \\ |\tilde{\mu}_5|^2 & 2|\tilde{\mu}_2|^2 + |\tilde{\mu}_5|^2 & 0 \\ 2|\tilde{\mu}_2||\tilde{\mu}_4|e^{i\delta_e} & 0 & 2|\tilde{\mu}_4|^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Notese que esta matriz tiene solamente un factor de fase no ignorable.

Los parámetros $|\tilde{\mu}_2|$, $|\tilde{\mu}_4|$ y $|\tilde{\mu}_5|$ pueden ser expresados fácilmente en términos de las masas de los leptones cargados. De los invariantes de la matriz

$M_e M_e^\dagger$, se obtiene el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M_e M_e^\dagger) &= m_e^2 + m_\mu^2 + m_\tau^2 = \\ & m_\tau^2 [4|\tilde{\mu}_2|^2 + 2(|\tilde{\mu}_4|^2 + |\tilde{\mu}_5|^2)], \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \chi(M_e M_e^\dagger) &= m_\tau^2(m_e^2 + m_\mu^2) + m_e^2 m_\mu^2 = \\ & 4m_\tau^4 [|\tilde{\mu}_2|^4 + |\tilde{\mu}_2|^2(|\tilde{\mu}_4|^2 + |\tilde{\mu}_5|^2) + |\tilde{\mu}_4|^2 |\tilde{\mu}_5|^2], \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\det(M_e M_e^\dagger) = m_e^2 m_\mu^2 m_\tau^2 = 4m_\tau^6 |\tilde{\mu}_2|^2 |\tilde{\mu}_4|^2 |\tilde{\mu}_5|^2, \quad (\text{B.5})$$

en donde $\chi(M_e M_e^\dagger) = \frac{1}{2} \left[(\text{Tr}(M_e M_e^\dagger))^2 - \text{Tr}(M_e M_e^\dagger)^2 \right]$.

Resolviendo éstas ecuaciones para $|\tilde{\mu}_2|^2$, $|\tilde{\mu}_4|^2$ y $|\tilde{\mu}_5|^2$, obtenemos

$$|\tilde{\mu}_2|^2 = \frac{\tilde{m}_\mu^2}{2} \frac{1+x^4}{1+x^2} + \beta, \quad (\text{B.6})$$

y

$$\begin{aligned} |\tilde{\mu}_{4,5}|^2 &= \frac{1}{4} \left(1 - \tilde{m}_\mu^2 \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} - 4\beta \right) \\ & \mp \frac{1}{4} \left[\left(1 - \tilde{m}_\mu^2 \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} \right)^2 - 8\tilde{m}_e^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} + \right. \\ & \left. 8\beta \left(1 - \tilde{m}_\mu^2 \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{1 + \frac{2\beta(1+x^2)}{\tilde{m}_\mu^2(1+x^4)}} \frac{(1+x^2)^2}{(1+x^4)^2} \right) + 16\beta^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

En estas expresiones, $x = m_e/m_\mu$, y β es la solución más pequeña de la ecuación cúbica ¹

$$\beta^3 - \frac{1}{2}(1 - 2y + 6\frac{z}{y})\beta^2 - \frac{1}{4}(y - y^2 - 4\frac{z}{y} + 7z - 12\frac{z^2}{y^2})\beta - \frac{1}{8}yz - \frac{1}{2}\frac{z^2}{y^2} + \frac{3}{4}\frac{z^2}{y} - \frac{z^3}{y^3} = 0, \quad (\text{B.8})$$

en donde $y = (m_e^2 + m_\mu^2)/m_\tau^2$ y $z = m_\mu^2 m_e^2/m_\tau^4$.

Una estimación excelente del orden de magnitud para β se obtiene de (B.8)

$$\beta \approx -\frac{m_\mu^2 m_e^2}{2m_\tau^2(m_\tau^2 - (m_\mu^2 + m_e^2))}. \quad (\text{B.9})$$

una vez que $M_e M_e^\dagger$ se escribe en términos de las masas de los leptones cargados, es directo escribir M_e y U_{eL} como función de las masas de los leptones cargados [20].

¹Se toma la más pequeña de las tres raíces cúbicas, debido a que es la que es compatible con la fenomenología.

Apéndice C

Matriz unitaria de los leptones cargados

La matriz de masas de los leptones cargados escrita en la ecuación (6.23) tiene la forma

$$M_e \approx m_\tau \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_e} & \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_e} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

la cual no es Hermitiana. Nos interesa calcular la matriz que diagonaliza a la matriz de masas M_e por la izquierda, la cual entra en la definición de la matriz de mezclas V_{PMNS} . La matriz U_{eL} está definida por

$$U_L^\dagger M_e M_e^\dagger U_L = \text{diag} (m_e^2, m_\mu^2, m_\tau^2),$$

La matriz cuadrada $M_e M_e^\dagger$ tiene la forma

$$M_e M_e^\dagger = m_\tau^2 \begin{pmatrix} 2a^2 + v^2 & v^2 & 2au \\ v^2 & 2a^2 + v^2 & 0 \\ 2au & 0 & 2u^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

la cual se puede reescribir como

$$\mu = \begin{pmatrix} A & B & Ce^{-i\delta} \\ B & A & 0 \\ Ce^{i\delta} & 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & 0 \\ C & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

si llamamos \bar{M} a la matriz real simétrica sin fases, ésto es $PM_eM_e^\dagger P^\dagger$ con $P = \text{diag}(1, 1, e^{i\delta})$ la matriz \bar{M} es real y se diagonaliza por una matriz ortogonal.

Para encontrar los eigenvectores se propone el i -ésimo eigenvector

$$|i\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \\ y_i \end{pmatrix},$$

De la identidad $M_eM_e^\dagger|i\rangle = \lambda_i|i\rangle$, en donde λ_i es el i -ésimo eigenvalor de $M_eM_e^\dagger$ correspondiente a $|i\rangle$ se obtienen las ecuaciones

- Primer renglón

$$A + Bx_i + Cy_i = \lambda_i.$$

- Segundo renglón

$$B + Ax_i = \lambda_ix_i$$

de donde se obtiene

$$x_i = \frac{B}{\lambda_i - A}$$

- Tercer renglón

$$C + Dy_i = \lambda_iy_i$$

de donde se obtiene

$$y_i = \frac{C}{\lambda_i - D}.$$

El eigenvector normalizado queda como

$$|i\rangle = \frac{1}{N_i} \begin{pmatrix} (\lambda_i - D)(\lambda_i - A) \\ B(\lambda_i - D) \\ C(\lambda_i - A) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

en donde N_i es el factor de normalización. La matriz ortogonal O_L se escribe entonces como

$$O_L = (|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle)$$

y la matriz unitaria U_L se escribe como

$$U_L = PO_L. \quad (\text{C.5})$$

Para calcularla explícitamente debemos sustituir en las fórmulas a A , B , C y D :

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{1}{2} \frac{1+x^2+\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2} \\ B &\approx \frac{1}{2} \frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2} \\ C &\approx \sqrt{2} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} \\ D &\approx 2 \frac{\tilde{m}_e^2(1+x^2)^2}{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

y los eigenvectores normalizados se escriben entonces como

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{(\tilde{m}_e^2 - A)^2[(\tilde{m}_e^2 - D)^2 + C^2] + B^2(\tilde{m}_e^2 - D)^2}} \begin{pmatrix} (\tilde{m}_e^2 - D)(\tilde{m}_e^2 - A) \\ B(\tilde{m}_e^2 - D) \\ C(\tilde{m}_e^2 - A) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{(\tilde{m}_\mu^2 - A)^2[(\tilde{m}_\mu^2 - D)^2 + C^2] + B^2(\tilde{m}_\mu^2 - D)^2}} \begin{pmatrix} (\tilde{m}_\mu^2 - D)(\tilde{m}_\mu^2 - A) \\ B(\tilde{m}_\mu^2 - D) \\ C(\tilde{m}_\mu^2 - A) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{(\tilde{m}_\tau^2 - A)^2[(\tilde{m}_\tau^2 - D)^2 + C^2] + B^2(\tilde{m}_\tau^2 - D)^2}} \begin{pmatrix} (\tilde{m}_\tau^2 - D)(\tilde{m}_\tau^2 - A) \\ B(\tilde{m}_\tau^2 - D) \\ C(\tilde{m}_\tau^2 - A) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Apéndice D

Reparametrización de la matriz de masas de los neutrinos de Majorana

La matriz de masas de los neutrinos izquierdos de Majorana en la extensión mínima S_3 del Modelo Estándar con la simetría adicional Z_2 , toma la forma

$$\mathbf{M}_\nu = \begin{pmatrix} 2(\rho_2^\nu)^2 & 0 & 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu \\ 0 & 2(\rho_2^\nu)^2 & 0 \\ 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu & 0 & 2(\rho_4^\nu)^2 + (\rho_3^\nu)^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

en donde $\rho_2^\nu = (\mu_2^\nu)/M_1^{1/2}$, $\rho_4^\nu = (\mu_4^\nu)/M_1^{1/2}$ y $\rho_3^\nu = (\mu_3^\nu)/M_3^{1/2}$; M_1 y M_3 son las masas de los neutrinos derechos que aparecen en la ecuación (4.12).

La matriz de masas de los neutrinos de Majorana M_ν se puede diagonalizar mediante la transformación bi-unitaria, de la siguiente manera

$$U_\nu^T M_\nu U_\nu = \text{diag} (|m_{\nu_1}|e^{i\phi_1}, |m_{\nu_2}|e^{i\phi_2}, |m_{\nu_3}|e^{i\phi_\nu}), \quad (\text{D.2})$$

en donde U_ν es la matriz que diagonaliza a la matriz $M_\nu^\dagger M_\nu$.

Para calcular la matriz U_ν , notemos que $M_\nu^\dagger M_\nu$ tiene la misma textura de ceros que M_ν

$$M_\nu^\dagger M_\nu = \begin{pmatrix} |A|^2 + |B|^2 & 0 & A^*B + B^*D \\ 0 & |A|^2 & 0 \\ AB^* + BD^* & 0 & |B|^2 + |D|^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

en donde $A = 2(\rho_2^\nu)^2$, $B = 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu$, y $D = 2(\rho_4^\nu)^2 + (\rho_3^\nu)^2$. Además, notamos que las entradas en la esquina superior derecha y en la esquina inferior izquierda

son complejos conjugados una de la otra mientras que las demás entradas en la matriz son reales. Por lo tanto, la matriz $U_{\nu L}$ que diagonaliza a $M_{\nu}^{\dagger}M_{\nu}$, toma la forma

$$U_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_{\nu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

Si requerimos que la ecuación (D.2) se satisfaga como una identidad, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2(\rho_2^{\nu})^2 &= m_{\nu_3}, \\ 2(\rho_2^{\nu})^2 &= m_{\nu_1} \cos^2 \eta + m_{\nu_2} \sin^2 \eta, \\ 2\rho_2^{\nu}\rho_4^{\nu} &= \sin \eta \cos \eta (m_{\nu_2} - m_{\nu_1}) e^{-i\delta_{\nu}}, \\ 2(\rho_4^{\nu})^2 + (\rho_3^{\nu})^2 &= (m_{\nu_1} \sin^2 \eta + m_{\nu_2} \cos^2 \eta) e^{-2i\delta_{\nu}}. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Resolviendo estas ecuaciones para $\sin \eta$ y $\cos \eta$, encontramos

$$\sin^2 \eta = \frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}, \quad \cos^2 \eta = \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}. \quad (\text{D.6})$$

de ahí, las matrices M_{ν} y U_{ν} , reparametrizadas en términos de las masas complejas de los neutrinos, toman la forma [20]

$$M_{\nu} = \begin{pmatrix} m_{\nu_3} & 0 & \sqrt{(m_{\nu_3} - m_{\nu_1})(m_{\nu_2} - m_{\nu_3})} e^{-i\delta_{\nu}} \\ 0 & m_{\nu_3} & 0 \\ \sqrt{(m_{\nu_3} - m_{\nu_1})(m_{\nu_2} - m_{\nu_3})} e^{-i\delta_{\nu}} & 0 & (m_{\nu_1} + m_{\nu_2} - m_{\nu_3}) e^{-2i\delta_{\nu}} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.7})$$

y

$$U_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_{\nu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}} & \sqrt{\frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{\frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}} & \sqrt{\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.8})$$

Apéndice E

Cálculo de las corrientes neutras que violan el sabor leptónico a un rizo

Queremos calcular las amplitudes de los procesos $l_1 \rightarrow l_3 \gamma$ en donde l_1 puede ser τ ó μ y el l_3 puede ser μ ó e . Para ésto, como en nuestro modelo tenemos más de un doblete de Higgs, tenemos acoplamientos de Yukawa de los Higgses con los leptones que permiten procesos que violan el sabor. Los procesos a nivel árbol, que son decaimientos por ejemplo de un τ a tres leptones es un cálculo simple y directo, mientras que los diagramas a un lazo, involucran integrales con divergencias ultravioletas, las cuales queremos demostrar que se cancelan entre si. Calcularemos primero el proceso $\tau \rightarrow e \gamma$ para ilustrar como las divergencias se cancelan y comparar con los resultados obtenidos en la referencia [128]. En la figura E.1 se muestran los tres diagramas que contribuyen a la amplitud de este proceso. La amplitud entonces la escribimos como

$$M = -e\epsilon^\mu Y_{l_1 l_2} Y_{l_2 l_3} \bar{u}_{l_3}(p') \left[\Lambda_\mu + i\Sigma_L \frac{(\not{p}' + m_1)\gamma^\mu}{p'^2 - m_1^2} + i\frac{\gamma^\mu(\not{p} + m_3)\Sigma_R}{p^2 - m_3^2} \right] u_{l_1}(p) \quad (\text{E.1})$$

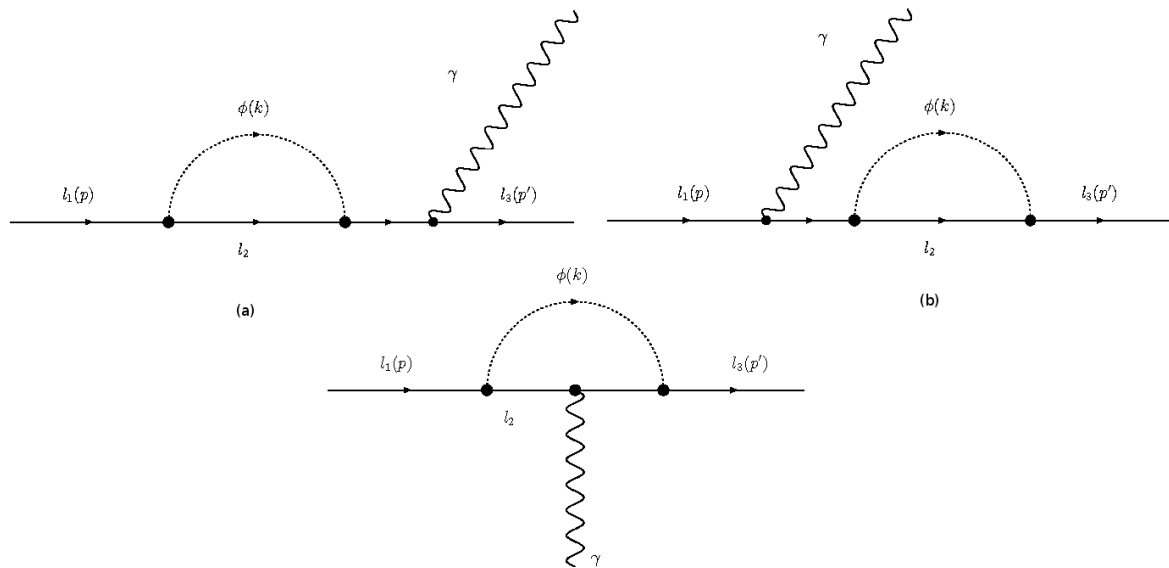


Figura E.1: Diagramas que contribuyen a la violación del numero leptónico $l_1 \rightarrow l_3 \gamma$

en donde

$$\Lambda_\mu = - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{p}' - \not{k} + m_2}{(p-k)^2 - m_2^2} \frac{\gamma_\mu}{k^2 - M_H^2} \frac{\not{p}' - \not{k} + m_2}{(p'-k)^2 - m_2^2},$$

$$\Sigma_L(p') = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{p}' - \not{k} + m_2}{(p'-k)^2 - m_2^2} \frac{1}{k^2 - M_H^2}, \quad (\text{E.2})$$

$$\Sigma_R(p) = \Sigma_L(p \rightarrow p').$$

En el caso que estamos viendo, es claro que $m_1 = m_\tau$ y $m_3 = m_{e,\mu}$. Calcularemos primero Λ_μ ,

$$\Lambda_\mu = - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{p}' - \not{k} + m_2}{(p-k)^2 - m_2^2} \frac{\gamma_\mu}{k^2 - M_H^2} \frac{\not{p}' - \not{k} + m_2}{(p'-k)^2 - m_2^2}, \quad (\text{E.3})$$

Para calcular esta integral, hacemos uso de los parámetros de Feynman. Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{ABC} &= 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \frac{1}{[Ax+By+Cz]^3} \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \frac{1}{[C+x(A-C)+y(B-C)]^3}. \end{aligned}$$

En nuestro caso,

$$A = (p - k)^2 - m_2^2 = k^2 - 2k \cdot p + p^2 - m_2^2,$$

$$B = k^2 - M_H^2,$$

$$C = (p' - k)^2 - m_2^2 = k^2 - 2k \cdot p' + p'^2 - m_2^2.$$

Si tomamos en cuenta que $(p')^2 \sim m_e^2 \rightarrow 0$ y $p^2 = m_1^2$. Por lo que

$$A - C = -2k \cdot (p - p') + m_1^2,$$

$$B - C = 2k \cdot p' + m_2^2 - M_H^2,$$

y el denominador en la integral queda como

$$D^{\frac{1}{3}} = k^2 - 2k \cdot (p'(1 - x - y) + px) - m_2^2(1 - y) + m_1^2x - M_H^2y.$$

Si hacemos el cambio de variable $k = l + (p'(1 - x - y) + px)$, el denominador queda como

$$D^{\frac{1}{3}} = l^2 - [m_s^2y - m_1^2x(1 - x) + m_2^2(1 - y) + 2p \cdot p'x(1 - x - y)] = l^2 - \Delta_1,$$

con

$$\Delta_1 = m_s^2y - m_1^2x(1 - x) + m_2^2(1 - y) + 2p \cdot p'x(1 - x - y).$$

El numerador queda como

$$N_\mu = (-\not{l} + \not{p}(1 - x) - \not{p}'(1 - x - y) + m_2)\gamma_\mu(-\not{l} - \not{p}x + \not{p}'(x + y) + m_\tau).$$

Como tenemos que en el numerador esta multiplicado por los espinores por la derecha y por la izquierda, $\bar{u}_{l_3}N_\mu u_{l_1}(p)$ y hacemos uso de las identidades:

$$\bar{u}_{l_3}\not{p}' = \bar{u}_{l_3}m_e \rightarrow 0,$$

$$\not{p}u_{l_1}(p) = m_1u_{l_1}(p),$$

el numerador se reduce a

$$N_\mu \rightarrow (-\not{l} + \not{p}(1 - x) + m_2)\gamma_\mu(-\not{l} + \not{p}'(x + y) + m_2 - m_1x).$$

Los términos lineales en l al integrar son cero por lo que

$$N_\mu \rightarrow \not{l}\gamma_\mu\not{l} + [\not{p}(1-x) + m_2]\gamma_\mu[\not{p}'(x+y) + m_2 - m_1x].$$

con lo cual tenemos dos contribuciones a la integral, la que va como l^2 y la que va como l^0 . Primero calcularemos la integral que depende como l^2 . Haremos uso del hecho $\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\rho = -\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho + 2g_{\mu\nu}\gamma_\rho$, además de que en la integral podemos reemplazar a $l^\mu l^\rho \rightarrow \frac{1}{d}g^{\mu\rho}l^2$ y con ésto se obtiene que en la integral $\not{l}\gamma_\mu\not{l} \rightarrow -\frac{1}{2}\gamma_\mu l^2$. Como,

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - \Delta_1)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d \Gamma(n-1-\frac{d}{2})}{2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^{n-1-\frac{d}{2}}, \quad (\text{E.4})$$

en nuestro caso $d = 4$ y $n = 3$. Necesitamos además

$$\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log\Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right), \quad (\text{E.5})$$

en donde $\epsilon = 4 - d$. Con ayuda de éstas expresiones, nosotros podemos ya calcular la integral en la ecuación (E.4) y con ésto ver cual es la contribución a Λ_μ que viene de la parte proporcional a l^2 ,

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(l^2) &= -2 \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{dx dy d^d l}{(2\pi)^d} \frac{-\frac{1}{2}l^2}{(l^2 - \Delta_1)^n} \\ &= i\gamma_\mu \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{dx dy}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log\Delta_1 - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right), \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

con

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= m_s^2 y - m_1^2 x(1-x) + m_2^2(1-y) + 2p \cdot p' x(1-x-y) \\ &= y(m_s^2 - m_2^2 - 2p \cdot p' x) - m_1^2 x(1-x) + m_2^2 + 2p \cdot p' x(1-x). \end{aligned}$$

La parte proporcional a l^0 es también inmediata de calcular, recordamos que

$$\not{p}u_{l_1}(p) = m_1 u_{l_1}(p),$$

$$\not{p}'u_{l_3}(p') = m_e u_{l_3}(p'),$$

y que

$$\gamma_\nu\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_\nu + 2g_{\mu\nu}.$$

Reescribimos la parte proporcional a l^0 del numerador de Λ_μ ,

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu(l^0) &\sim [\not{p}(1-x) + m_2] \gamma_\mu [\not{p}'(x+y) + m_2 - m_1x] \\ &= (1-x)(x+y)\not{p}'\gamma_\mu\not{p}' + (m_2 - m_1x)(1-x)\not{p}'\gamma_\mu \\ &\quad m_2(x+y)\gamma_\mu\not{p}' + \gamma_\mu m_2(m_2 - m_1x).\end{aligned}$$

Recordemos que el numerador esta multiplicado por la izquierda por $\bar{u}_{l_3}(p')$ y por la derecha por $u_{l_1}(p)$.

Veamos el primer término:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{l_3}(p')(\not{p}')\not{p}'\gamma_\mu\not{p}'u_{l_1}(p) &= \bar{u}_{l_3}(p')(\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\rho)(p')^\rho p^\nu u_{l_1}(p) \\ &= \bar{u}_{l_3}(p')(-\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho + 2g_{\mu\nu}\gamma_\rho)(p')^\rho p^\nu u_{l_1}(p) \\ &= \bar{u}_{l_3}(p')(\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu - 2\gamma_\mu g_{\nu\rho} + 2g_{\mu\nu}\gamma_\rho)(p')^\rho p^\nu u_{l_1}(p) \\ &= \bar{u}_{l_3}(p')(-\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu + 2\gamma_\nu g_{\rho\mu} - 2\gamma_\mu g_{\nu\rho} + 2g_{\mu\nu}\gamma_\rho) \times \\ &\quad (p')^\rho p^\nu u_{l_1}(p).\end{aligned}$$

de aquí es claro que el primer término es proporcional a m_e y por lo tanto es despreciable, el segundo término es proporcional a m_1 , el tercer término es proporcional a $p' \cdot p$ y el último es proporcional a m_e y por lo tanto es despreciable, así entonces, el primer término del numerador de la parte proporcional a l^0 queda como

$$(1-x)(x+y)[2m_1 p'_\mu - 2\gamma_\mu p' \cdot p].$$

El segundo término se escribe como

$$\begin{aligned}(m_2 - m_1x)(1-x)\not{p}'\gamma_\mu u_{l_1}(p) &= \\ [- (m_2 - m_1x)(1-x)\gamma_\mu m_1 + 2(m_2 - m_1x)(1-x)p_\mu] u_{l_1}(p)\end{aligned}$$

el tercer término

$$\begin{aligned}\bar{u}_{l_3}(p')m_2(x+y)\gamma_\mu\not{p}' &= \bar{u}_{l_3}(p')[-m_e m_2(x+y)\gamma_\mu + 2m_2(x+y)p'_\mu] \\ &= \bar{u}_{l_3}(p')[2m_2(x+y)p'_\mu],\end{aligned}$$

y el cuarto es trivial, por lo tanto la integral proporcional a l^0 queda como

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(l^0) = & -2 \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{dx dy d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta_1)^n} \times \\ & \{2 [m_1(1-x)(x+y) + m_2(x+y)] p'_\mu + 2 [m_2 - m_1 x] (1-x) p_\mu + \\ & - \gamma_\mu [-(m_2 - m_1 x)(m_2 - m_1(1-x)) + 2p' \cdot p(1-x)(x+y)] \}. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Además, como el momento del fotón es $q = p - p'$ y además al final contraemos con la polarización del fotón ϵ^μ y

$$\epsilon^\mu q_\mu = 0,$$

la integral la podemos reescribir como

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(l^0) = & -2 \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{dx dy d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta_1)^n} \times \\ & \{2 [m_2(1+y) + m_1 y(1-x)] p_\mu \\ & - \gamma_\mu [-(m_2 - m_1 x)(m_2 - m_1(1-x)) + 2p' \cdot p(1-x)(x+y)] \} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Además como

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta_1)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma(n - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta_1} \right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (\text{E.9})$$

y en nuestro caso $n = 3$, la integral es finita.

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(l^0) = & \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \times \\ & \frac{2[m_2(1+y) + m_1 y(1-x)] p_\mu + \gamma_\mu [(m_2 - m_1(1-x))(m_2 - m_1 x) - 2p' \cdot p(1-x)(x+y)]}{\Delta_1}. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Ahora, queremos calcular $\Sigma_R(p)$ y $\Sigma_L(p')$, que como se puede ver en la ecuación (E.2) es necesario solo calcular $\Sigma_L(p')$ y luego solo se reemplaza $p' \rightarrow p$. Para calcular ésta, haremos uso de nuevo de los parámetros de Feynman,

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[B + x(A - B)]^2}, \quad (\text{E.11})$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 i\Sigma_L(p') &= - \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{p}' - \not{k} + m_2}{(p' - k)^2 - m_2^2} \frac{1}{k^2 - M_H^2} \\
 &= - \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{p}' - \not{k} + m_2}{[k^2 - 2kp'x + p'^2x - m_2^2x - m_s^2(1-x)]^2}.
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

Hacemos el cambio de variable $k = l + p'x$, con lo que nos queda la integral

$$\begin{aligned}
 i\Sigma_L(p') &= - \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\not{p}'(1-x) - \not{l} + m_2}{(l^2 + p'^2x(1-x) - m_2^2x - m_s^2(1-x))^2} \\
 &= - \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\not{p}'(1-x) - \not{l} + m_2}{(l^2 - \Delta_2)^2},
 \end{aligned} \tag{E.13}$$

en donde $\Delta_2 = m_2^2x + (m_s^2 - p'^2x)(1-x)$. Si sustituimos $p' \rightarrow p$ en la ecuación (E.13) obtenemos la expresión para $\Sigma_R(p)$:

$$\begin{aligned}
 i\Sigma_R(p) &= - \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\not{p}'(1-x) - \not{l} + m_2}{(l^2 + p^2x(1-x) - m_2^2x - m_s^2(1-x))^2} \\
 &= - \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\not{p}'(1-x) - \not{l} + m_2}{(l^2 - \Delta_3)^2},
 \end{aligned} \tag{E.14}$$

en donde $\Delta_3 = m_2^2x + (m_s^2 - p^2x)(1-x)$. Como $\bar{u}_{l_3}(p')\not{p}' = \bar{u}_{l_3}(p')m_e$ y $\not{p}u_{l_1}(p) = m_1u_{l_1}(p)$ y recordando que las integrales con potencias impares en l son cero, ya podemos ver como son las contribuciones a la amplitud total de estas dos amplitudes. Para esto haremos uso de la ecuación (E.9)

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta_1)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma(n - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta_1} \right)^{n - \frac{d}{2}}, \tag{E.15}$$

con $n = 2$,

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta_1)^2} = \frac{(-1)^2 i \Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^2 \Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta_1} \right)^{2 - \frac{d}{2}}$$

y usamos la ecuación (E.5)

$$\frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2 - \frac{d}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right),$$

por lo que las integrales se reducen a

$$i\Sigma_L(p') = -i \int_0^1 dx \frac{(\not{p}'(1-x) + m_2)}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta_2 - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right)$$

y

$$i\Sigma_R(p) = -i \int_0^1 dx \int \frac{(\not{p}(1-x) + m_2)}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log\Delta_3 - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right)$$

en donde

$$\Delta_2 = m_2^2 x + (m_s^2 - p'^2 x)(1-x) \rightarrow m_2^2 x + m_s^2(1-x), \quad (\text{E.16})$$

$$\Delta_3 = m_2^2 x + (m_s^2 - p^2 x)(1-x),$$

por lo que las contribuciones a la amplitud de estos dos son

$$\begin{aligned} \bar{u}_{l_3}(p') i\Sigma_L \frac{(\not{p} + m_1)\gamma^\mu}{p'^2 - m_1^2} u_{l_1}(p) &= i\bar{u}_{l_3} \left[- \int_0^1 dx \frac{(\not{p}(1-x) + m_2)(\not{p} + m_1)\gamma^\mu}{(4\pi)^2(p'^2 - m_1^2)} (g(\epsilon) - \log\Delta_2) \right] \\ &\quad \times u_{l_1}(p) \\ &= i\bar{u}_{l_3} \left[\int_0^1 dx \frac{m_2\gamma^\mu}{(4\pi)^2 m_1} (g(\epsilon) - \log\Delta_2) \right] u_{l_1}(p) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \bar{u}_{l_3}(p') i \frac{\gamma^\mu(\not{p} + m_3)}{p^2 - m_3^2} \Sigma_R u_{l_1}(p) &= i\bar{u}_{l_3} \left[- \int_0^1 dx \int \frac{\gamma^\mu(\not{p} + m_3)(\not{p}(1-x) + m_2)}{(4\pi)^2(p^2 - m_3^2)} (g(\epsilon) - \log\Delta_3) \right] \\ &\quad \times u_{l_1}(p) \\ &= i\bar{u}_{l_3} \left[- \int_0^1 dx \int \frac{\gamma^\mu(m_1(1-x) + m_2)}{(4\pi)^2 m_1} (g(\epsilon) - \log\Delta_3) \right] \\ &\quad \times u_{l_1}(p), \end{aligned}$$

donde $g(\epsilon) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)$.

Recordemos además que Λ_μ tiene dos contribuciones

$$\Lambda_\mu = \Lambda_\mu(l^2) + \Lambda_\mu(l^0)$$

con

$$\Lambda_\mu(l^2) = i\gamma_\mu \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{dx dy}{(4\pi)^2} (g(\epsilon) - \log\Delta_1)$$

y

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(l^0) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \times \\ &\quad \frac{2[m_2(1+y) + m_1 y(1-x)]p_\mu + \gamma_\mu [m_1(m_2 - m_1 x)(1-x) + 2p' \cdot p(1-x)(x+y)]}{\Delta_1}. \end{aligned}$$

Veamos la parte proporcional a $g(\epsilon)$ en $\Lambda_\mu(l^2)$, ésto es

$$\bar{\Lambda}_\mu(l^2) = i\gamma_\mu \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{dx dy}{(4\pi)^2} g(\epsilon)$$

al integrar en y queda como

$$\bar{\Lambda}_\mu(l^2) = i\gamma_\mu \int_0^1 \frac{dx}{(4\pi)^2} (1-x) g(\epsilon).$$

Ahora sumamos todas las integrales dependientes de $g(\epsilon)$, las cuales son divergentes y se obtiene

$$\begin{aligned} f(\epsilon) &= ig(\epsilon)\gamma_\mu \int_0^1 \frac{dx}{(4\pi)^2} \left[(1-x) + \frac{m_2}{m_1} - \frac{(m_1(1-x)+m_2)}{m_1} \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo cual las divergencias se cancelan.

La parte finita de Λ_μ que viene del término $\Lambda_\mu(l^0)$ es

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(l^0) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \times \\ &\quad \frac{2[m_2(1+y)+m_1y(1-x)]p_\mu + \gamma_\mu [(m_2-m_1x)m_1(1-x)+2p' \cdot p(1-x)(x+y)]}{\Delta_1}. \end{aligned} \tag{E.17}$$

Si estamos en el sistema de referencia en el que el leptón l_1 está en reposo y además suponemos la masa de l_3 es cero, entonces

$$p' \cdot p = m_1^2/2$$

por lo que la integral se reduce a

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(l^0) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \times \\ &\quad \frac{2[m_2(1+y)+m_1y(1-x)]p_\mu - \gamma_\mu [m_1^2y(1-x)-m_2^2+m_1m_2]}{\Delta_1}, \end{aligned}$$

en donde

$$\Delta_1 = y(m_s^2 - m_2^2 - m_1^2x) + m_2^2,$$

por lo que podemos escribir la integral como

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu(l^0) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \frac{2[m_2(1+y)+m_1y(1-x)]p_\mu - \gamma_\mu [-m_2^2 + m_1m_2 + m_1^2y(1-x)]}{y(m_2^2 - m_2^2 - m_1^2x) + m_2^2} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \frac{2[\tilde{m}_2(1+y)+\tilde{m}_1y(1-x)]\frac{p_\mu}{M_H} - \gamma_\mu [-\tilde{m}_2^2 + \tilde{m}_1\tilde{m}_2 + \tilde{m}_1^2y(1-x)]}{y(1-\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2x) + \tilde{m}_2^2}\end{aligned}\quad (\text{E.18})$$

en donde $\tilde{m}_1 = \frac{m_1}{M_H}$ y $\tilde{m}_2 = \frac{m_2}{M_H}$. La parte proporcional a p_μ en (E.18) es

$$\Lambda_\mu(l^0(p_\mu)) = 2 \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{p_\mu}{M_H} \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \frac{[\tilde{m}_2(1+y) + \tilde{m}_1y(1-x)]}{y(1-\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2x) + \tilde{m}_2^2} \quad (\text{E.19})$$

Tomaremos el caso en que la partícula que entra en el loop es ligera, esto es $m_1 \gg m_2$. Con ésto la integral (E.19) se escribe como

$$\Lambda_\mu(l^0(p_\mu)) = 2 \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{p_\mu}{M_H} \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \frac{[\tilde{m}_1(1-x)]}{(1-\tilde{m}_1^2x)}.$$

Integrando en y y escribiendo el resultado a orden $\mathcal{O}((m_1/M_H)^2)$ el resultado es¹

$$\Lambda_\mu(l^0(p_\mu)) = 2 \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{p_\mu}{M_H} \int_0^1 dx \frac{\tilde{m}_1^2(1-x)^2}{1-\tilde{m}_1^2x} \approx 2 \int_0^1 dx \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{p_\mu}{M_H} \frac{m_1(1-x)^2}{1-m_1^2x},$$

la cual al integrar en x de cero a uno nos da

$$\Lambda_\mu(l^0(p_\mu)) = 2 \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{p_\mu}{M_H} \frac{\tilde{m}_1}{3}.$$

La parte proporcional a γ_μ de $\Lambda_\mu(l^0)$ es

$$\Lambda_\mu(l^0) = \frac{-i}{(4\pi)^2} \gamma_\mu \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \frac{[-\tilde{m}_2^2 + \tilde{m}_1\tilde{m}_2 + \tilde{m}_1^2y(1-x)]}{y(1-\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2x) + \tilde{m}_2^2} \quad (\text{E.20})$$

De nuevo tomamos el caso en que $m_1 \gg m_2$, con lo cual la integral (E.20) se escribe como

$$\Lambda_\mu(l^0) = \frac{-i}{(4\pi)^2} \gamma_\mu \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \frac{[\tilde{m}_1^2(1-x)]}{(1-\tilde{m}_1^2x)},$$

¹note que p_μ a lo mas es de orden $p_\mu \sim m_1$

integrando en y se obtiene

$$\Lambda_\mu(l^0) = \frac{-i}{(4\pi)^2} \gamma_\mu \int_0^1 dx \frac{[\tilde{m}_1^2(1-x)^2]}{(1-\tilde{m}_1^2 x)},$$

la cual al integrar en x y tomar los términos hasta orden $\mathcal{O}((m_1/m_s)^2)$ tenemos

$$\Lambda_\mu(l^0) = \frac{-i}{(4\pi)^2} \gamma_\mu \frac{1}{3} \tilde{m}_1^2,$$

por lo que la contribución a la amplitud del proceso $\tau \rightarrow e\gamma$ es [128]

$$|M|^2 = e^2/(4\pi)^4 \left| Y_{\tau(e,\mu)} Y_{(e,\mu)e} \bar{u}_e(p') \left(\frac{m_\tau}{3M_H} \right)^2 \left[\not{\epsilon} - 2 \frac{\not{p}}{m_\tau} \right] u_{l_1}(p) \right|^2. \quad (\text{E.21})$$

Bibliografía

- [1] T. P. Cheng and L. F. Li, “Gauge theory of elementary particle physics,”. Oxford, Uk: Clarendon (1984) 536 P. (Oxford Science Publications).
- [2] R. N. Mohapatra, “Unification and supersymmetry, the frontiers of quark - lepton physics,”. Berlin, Germany: Springer (1986) 309 P. (Contemporary Physics).
- [3] T. Fukuyama and H. Nishiura, “Mass matrix of Majorana neutrinos,” [arXiv:hep-ph/9702253](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9702253).
- [4] R. N. Mohapatra and S. Nussinov, “Bimaximal neutrino mixing and neutrino mass matrix,” *Phys. Rev.* **D60** (1999) 013002, [arXiv:hep-ph/9809415](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9809415).
- [5] E. Ma and M. Raidal, “Neutrino mass, muon anomalous magnetic moment, and lepton flavor nonconservation,” *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 011802, [arXiv:hep-ph/0102255](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0102255).
- [6] C. S. Lam, “A 2-3 symmetry in neutrino oscillations,” *Phys. Lett.* **B507** (2001) 214–218, [arXiv:hep-ph/0104116](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0104116).
- [7] P. F. Harrison and W. G. Scott, “mu - tau reflection symmetry in lepton mixing and neutrino oscillations,” *Phys. Lett.* **B547** (2002) 219–228, [arXiv:hep-ph/0210197](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0210197).
- [8] J. C. Gomez-Izquierdo and A. Perez-Lorenzana, “Softly broken $\mu \leftrightarrow \tau$ symmetry in the minimal see-saw model,” *Phys. Rev.* **D77** (2008) 113015, [arXiv:0711.0045](https://arxiv.org/abs/0711.0045) [hep-ph].

- [9] P. F. Harrison, D. H. Perkins, and W. G. Scott, “Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data,” *Phys. Lett.* **B530** (2002) 167, [arXiv:hep-ph/0202074](#).
- [10] P. F. Harrison and W. G. Scott, “Permutation symmetry, tri-bimaximal neutrino mixing and the S_3 group characters,” *Phys. Lett.* **B557** (2003) 76, [arXiv:hep-ph/0302025](#).
- [11] J. Kubo, A. Mondragón, M. Mondragón, and E. Rodríguez-Jáuregui, “The flavor symmetry,” *Prog. Theor. Phys.* **109** (2003) 795–807, [arXiv:hep-ph/0302196](#).
- [12] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jauregui, “The quark mixing matrix from the breaking of $S(3)_L \times S(3)_R$ flavor symmetry,”. Prepared for 22nd International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics (GROUP22 ICGTMP 98), Hobart, Tasmania, Australia, 13-18 Jul 1998.
- [13] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jauregui, “Quark mixing angles and CP-violating phase from flavor permutational symmetry breaking,” *AIP Conf. Proc.* **539** (2000) 86–91.
- [14] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jauregui, “Mass textures and the mixing matrix from the flavor permutational symmetry,”. Prepared for Workshop on CP Violation, Adelaide, Australia, 3-8 Jul 1998.
- [15] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jauregui, “Breaking of flavor permutational symmetry and the CKM matrix,” *AIP Conf. Proc.* **531** (2000) 310–314.
- [16] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, “CP violating phase and quark mixing angles from flavour permutational symmetry breaking,” *Rev. Mex. Fis.* **46** (2000) 5–22, [arXiv:hep-ph/0003104](#).
- [17] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, “The CP violating phase $\delta(13)$ and the quark mixing angles $\Theta(13)$, $\Theta(23)$ and $\Theta(12)$ from flavour permutational symmetry breaking,” *Phys. Rev.* **D61** (2000) 113002, [arXiv:hep-ph/9906429](#).

- [18] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, “The breaking of the flavor permutational symmetry: Mass textures and the CKM matrix,” *Phys. Rev.* **D59** (1999) 093009, [arXiv:hep-ph/9807214](#).
- [19] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, “A parametrization of the CKM mixing matrix from a scheme of $S(3)_L \times S(3)_R$ symmetry breaking,” [arXiv:hep-ph/9804267](#).
- [20] O. Félix, A. Mondragón, M. Mondragón, and E. Peinado, “Neutrino masses and mixings in a minimal $S(3)$ -invariant extension of the standard model,” *AIP Conf. Proc.* **917** (2007) 383–389, [arXiv:hep-ph/0610061](#).
- [21] A. Mondragón, M. Mondragón, and E. Peinado, “Lepton masses, mixings and FCNC in a minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model,” *Phys. Rev.* **D76** (2007) 076003, [arXiv:0706.0354](#) [hep-ph].
- [22] A. Mondragón, M. Mondragón, and E. Peinado, “ S_3 -flavour symmetry as realized in lepton flavour violating processes,” *J. Phys.* **A41** (2008) 304035, [arXiv:0712.1799](#) [hep-ph].
- [23] A. Mondragón, M. Mondragón, and E. Peinado, “Nearly tri-bimaximal mixing in the S_3 flavour symmetry,” *AIP Conf. Proc.* **1026** (2008) 164–169, [arXiv:0712.2488](#) [hep-ph].
- [24] A. Mondragón, M. Mondragón, and E. Peinado, “Lepton flavour violating processes in an S_3 -symmetric model,” [arXiv:0805.3507](#) [hep-ph].
- [25] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, “Regularization and Renormalization of Gauge Fields,” *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189–213.
- [26] C. Jarlskog, “Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Violation,” *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 1039.
- [27] P. Langacker, J. Erler, and E. Peinado, “Neutrino physics,” *J. Phys. Conf. Ser.* **18** (2005) 154–187, [hep-ph/0506257](#).

- [28] E. Majorana, “Theory of the Symmetry of Electrons and Positrons,” *Nuovo Cim.* **14** (1937) 171–184.
- [29] T. Yanagida, “Horizontal gauge symmetry and masses of neutrinos,”. In Proceedings of the Workshop on the Baryon Number of the Universe and Unified Theories, Tsukuba, Japan, 13-14 Feb 1979.
- [30] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, “Neutrino mass and spontaneous parity nonconservation,” *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 912.
- [31] M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, “Complex spinors and unified theories,”. In Supergravity, P. van Nieuwenhuizen and D.Z. Freedman (eds.), North Holland Publ. Co. 1979. Print-80-0576 (CERN).
- [32] W. Grimus and L. Lavoura, “The seesaw mechanism at arbitrary order: Disentangling the small scale from the large scale,” *JHEP* **11** (2000) 042, [arXiv:hep-ph/0008179](#).
- [33] **LSND** Collaboration, A. Aguilar *et al.*, “Evidence for neutrino oscillations from the observation of anti- ν /e appearance in a anti- ν / μ beam,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 112007, [arXiv:hep-ex/0104049](#).
- [34] **The MiniBooNE** Collaboration, A. A. Aguilar-Arevalo *et al.*, “A Search for electron neutrino appearance at the $\Delta m^2 \sim 1\text{eV}^2$ scale,” *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 231801, [arXiv:0704.1500 \[hep-ex\]](#).
- [35] T. Schwetz, “The LSND puzzle in the light of MiniBooNE results,” [arXiv:0805.2234 \[hep-ph\]](#).
- [36] R. N. Mohapatra, “Connecting bimaximal neutrino mixing to a light sterile neutrino,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 091301, [arXiv:hep-ph/0107264](#).
- [37] G. C. Branco and M. N. Rebelo, “Neutrino Physics and CP violation,” *Acta Phys. Polon.* **B38** (2007) 3819–3850, [arXiv:0711.2650 \[hep-ph\]](#).
- [38] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, “Hierarchy of Quark Masses, Cabibbo Angles and CP Violation,” *Nucl. Phys.* **B147** (1979) 277.

- [39] E. Ma and G. Rajasekaran, “Softly broken $A(4)$ symmetry for nearly degenerate neutrino masses,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 113012, arXiv:hep-ph/0106291.
- [40] K. S. Babu, E. Ma, and J. W. F. Valle, “Underlying $A(4)$ symmetry for the neutrino mass matrix and the quark mixing matrix,” *Phys. Lett.* **B552** (2003) 207–213, arXiv:hep-ph/0206292.
- [41] M. Hirsch, J. C. Romao, S. Skadhauge, J. W. F. Valle, and A. Villanova del Moral, “Degenerate neutrinos from a supersymmetric $A(4)$ model,” arXiv:hep-ph/0312244.
- [42] M. Hirsch, J. C. Romao, S. Skadhauge, J. W. F. Valle, and A. Villanova del Moral, “Phenomenological tests of supersymmetric $A(4)$ family symmetry model of neutrino mass,” *Phys. Rev.* **D69** (2004) 093006, arXiv:hep-ph/0312265.
- [43] E. Ma, “ $A(4)$ origin of the neutrino mass matrix,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 031901, arXiv:hep-ph/0404199.
- [44] E. Ma, “Symmetries and neutrino masses,” *New J. Phys.* **6** (2004) 104, arXiv:hep-ph/0405152.
- [45] S.-L. Chen, M. Frigerio, and E. Ma, “Hybrid seesaw neutrino masses with $A(4)$ family symmetry,” *Nucl. Phys.* **B724** (2005) 423–431, arXiv:hep-ph/0504181.
- [46] E. Ma, “Aspects of the tetrahedral neutrino mass matrix,” *Phys. Rev.* **D72** (2005) 037301, arXiv:hep-ph/0505209.
- [47] K. S. Babu and X.-G. He, “Model of geometric neutrino mixing,” arXiv:hep-ph/0507217.
- [48] A. Zee, “Obtaining the neutrino mixing matrix with the tetrahedral group,” *Phys. Lett.* **B630** (2005) 58–67, arXiv:hep-ph/0508278.
- [49] E. Ma, “Tetrahedral family symmetry and the neutrino mixing matrix,” *Mod. Phys. Lett.* **A20** (2005) 2601–2606, arXiv:hep-ph/0508099.

- [50] E. Ma, “Tribimaximal neutrino mixing from a supersymmetric model with A_4 family symmetry,” *Phys. Rev.* **D73** (2006) 057304, [arXiv:hep-ph/0511133](#).
- [51] S. K. Kang, Z.-z. Xing, and S. Zhou, “Possible deviation from the tri-bimaximal neutrino mixing in a seesaw model,” *Phys. Rev.* **D73** (2006) 013001, [arXiv:hep-ph/0511157](#).
- [52] X.-G. He, Y.-Y. Keum, and R. R. Volkas, “ $A(4)$ flavour symmetry breaking scheme for understanding quark and neutrino mixing angles,” *JHEP* **04** (2006) 039, [arXiv:hep-ph/0601001](#).
- [53] G. Altarelli and F. Feruglio, “Tri-bimaximal neutrino mixing from discrete symmetry in extra dimensions,” *Nucl. Phys.* **B720** (2005) 64–88, [arXiv:hep-ph/0504165](#).
- [54] G. Altarelli and F. Feruglio, “Tri-bimaximal neutrino mixing, $A(4)$ and the modular symmetry,” *Nucl. Phys.* **B741** (2006) 215–235, [arXiv:hep-ph/0512103](#).
- [55] G. Altarelli, F. Feruglio, and Y. Lin, “Tri-bimaximal neutrino mixing from orbifolding,” *Nucl. Phys.* **B775** (2007) 31–44, [arXiv:hep-ph/0610165](#).
- [56] G. Altarelli, F. Feruglio, and C. Hagedorn, “A SUSY $SU(5)$ Grand Unified Model of Tri-Bimaximal Mixing from A_4 ,” *JHEP* **03** (2008) 052–052, [arXiv:0802.0090 \[hep-ph\]](#).
- [57] S. Pakvasa and H. Sugawara, “Discrete Symmetry and Cabibbo Angle,” *Phys. Lett.* **B73** (1978) 61.
- [58] Y.-P. Yao, “A Finite group analysis of the quark mass matrices and flavor dynamics,” [arXiv:hep-ph/9507207](#).
- [59] L. J. Hall and H. Murayama, “A Geometry of the generations,” *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3985–3988, [arXiv:hep-ph/9508296](#).
- [60] K. Kang, J. E. Kim, and P. Ko, “A simple modification of the maximal mixing scenario for three light neutrinos,” *Z. Phys.* **C72** (1996) 671–675, [arXiv:hep-ph/9503436](#).

- [61] C. D. Carone, “ $S(3)^{*3}$ theories of flavor,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **52A** (1997) 177–181, [arXiv:hep-ph/9607323](#).
- [62] S. L. Adler, “Model for particle masses, flavor mixing, and CP violation, based on spontaneously broken discrete chiral symmetry as the origin of families,” *Phys. Rev.* **D59** (1999) 015012, [arXiv:hep-ph/9806518](#).
- [63] M. Tanimoto, “Vacuum neutrino oscillations of solar neutrinos and lepton mass matrices,” *Phys. Rev.* **D59** (1999) 017304, [arXiv:hep-ph/9807283](#).
- [64] M. Tanimoto, “Neutrino masses and mixings with flavor symmetries,” *Acta Phys. Polon.* **B30** (1999) 3105–3120, [arXiv:hep-ph/9910261](#).
- [65] M. Tanimoto, “Large mixing angle MSW solution in $S(3)$ flavor symmetry,” *Phys. Lett.* **B483** (2000) 417–424, [arXiv:hep-ph/0001306](#).
- [66] Y. Koide, “Universal seesaw mass matrix model with an $S(3)$ symmetry,” *Phys. Rev.* **D60** (1999) 077301, [arXiv:hep-ph/9905416](#).
- [67] E. Ma, “Permutation symmetry for neutrino and charged-lepton mass matrices,” *Phys. Rev.* **D61** (2000) 033012, [arXiv:hep-ph/9909249](#).
- [68] R. N. Mohapatra, A. Perez-Lorenzana, and C. A. de Sousa Pires, “Type II seesaw and a gauge model for the bimaximal mixing explanation of neutrino puzzles,” *Phys. Lett.* **B474** (2000) 355–360, [arXiv:hep-ph/9911395](#).
- [69] J. I. Silva-Marcos, “The problem of large leptonic mixing,” *JHEP* **07** (2003) 012, [arXiv:hep-ph/0204051](#).
- [70] T. Kobayashi, J. Kubo, and H. Terao, “Exact $S(3)$ symmetry solving the supersymmetric flavor problem,” *Phys. Lett.* **B568** (2003) 83–91, [arXiv:hep-ph/0303084](#).
- [71] K. Hamaguchi, M. Kakizaki, and M. Yamaguchi, “Democratic (s)fermions and lepton flavor violation,” *Phys. Rev.* **D68** (2003) 056007, [arXiv:hep-ph/0212172](#).

- [72] J. Kubo, “Majorana phase in minimal $S(3)$ invariant extension of the standard model,” *Phys. Lett.* **B578** (2004) 156–164, [arXiv:hep-ph/0309167](#).
- [73] J. Kubo, H. Okada, and F. Sakamaki, “Higgs potential in minimal $S(3)$ invariant extension of the standard model,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 036007, [arXiv:hep-ph/0402089](#).
- [74] S.-L. Chen, M. Frigerio, and E. Ma, “Large neutrino mixing and normal mass hierarchy: A discrete understanding,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 073008, [arXiv:hep-ph/0404084](#).
- [75] W.-l. Guo, “Neutrino mixing and leptogenesis in type II seesaw mechanism,” *Phys. Rev.* **D70** (2004) 053009, [arXiv:hep-ph/0406268](#).
- [76] T. Araki, J. Kubo, and E. A. Paschos, “ $S(3)$ flavor symmetry and leptogenesis,” *Eur. Phys. J.* **C45** (2006) 465–475, [arXiv:hep-ph/0502164](#).
- [77] W. Grimus and L. Lavoura, “ $S(3) \times Z(2)$ model for neutrino mass matrices,” *JHEP* **08** (2005) 013, [arXiv:hep-ph/0504153](#).
- [78] W. Grimus and L. Lavoura, “A model realizing the Harrison-Perkins-Scott lepton mixing matrix,” *JHEP* **01** (2006) 018, [arXiv:hep-ph/0509239](#).
- [79] W. Grimus and L. Lavoura, “A three-parameter model for the neutrino mass matrix,” *J. Phys.* **G34** (2007) 1757–1770, [arXiv:hep-ph/0611149](#).
- [80] T. Teshima, “Flavor mass and mixing and $S(3)$ symmetry: An $S(3)$ invariant model reasonable to all,” *Phys. Rev.* **D73** (2006) 045019, [arXiv:hep-ph/0509094](#).
- [81] Y. Koide, “Permutation symmetry $S(3)$ and VEV structure of flavor-triplet Higgs scalars,” *Phys. Rev.* **D73** (2006) 057901, [arXiv:hep-ph/0509214](#).
- [82] Y. Koide, “ $S(3)$ symmetry and neutrino masses and mixings,” *Eur. Phys. J.* **C50** (2007) 809–816, [arXiv:hep-ph/0612058](#).

- [83] J. E. Kim and J.-C. Park, “Quantum numbers of heavy neutrinos, tri-bi-maximal mixing through double seesaw with permutation symmetry, and comment on $\theta(\text{sol}) + \theta(\text{c}) \approx \pi/4$,” *JHEP* **05** (2006) 017, arXiv:hep-ph/0512130.
- [84] N. Haba, A. Watanabe, and K. Yoshioka, “Twisted flavors and tri/bi-maximal neutrino mixing,” *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 041601, arXiv:hep-ph/0603116.
- [85] N. Haba and K. Yoshioka, “Discrete flavor symmetry, dynamical mass textures, and grand unification,” *Nucl. Phys.* **B739** (2006) 254–284, arXiv:hep-ph/0511108.
- [86] S. Morisi, “S(3) family permutation symmetry and quark masses: A model independent approach,” arXiv:hep-ph/0604106.
- [87] M. Picariello, “Neutrino CP violating parameters from nontrivial quark-lepton correlation: A S(3) x GUT model,” arXiv:hep-ph/0611189.
- [88] R. N. Mohapatra, S. Nasri, and H.-B. Yu, “S(3) symmetry and tri-bimaximal mixing,” *Phys. Lett.* **B639** (2006) 318–321, arXiv:hep-ph/0605020.
- [89] R. N. Mohapatra and H.-B. Yu, “Connecting leptogenesis to CP violation in neutrino mixings in a tri-bimaximal mixing model,” *Phys. Lett.* **B644** (2007) 346–351, arXiv:hep-ph/0610023.
- [90] K. S. Babu, S. M. Barr, and I. Gogoladze, “Family Unification with SO(10),” *Phys. Lett.* **B661** (2008) 124–128, arXiv:0709.3491 [hep-ph].
- [91] C.-Y. Chen and L. Wolfenstein, “Consequences of Approximate S_3 Symmetry of the Neutrino Mass Matrix,” *Phys. Rev.* **D77** (2008) 093009, arXiv:0709.3767 [hep-ph].
- [92] M. Mitra and S. Choubey, “Lepton Masses in a Minimal Model with Triplet Higgs and $S_3 \times Z_4$ Flavor Symmetry,” arXiv:0806.3254 [hep-ph].

- [93] W. Grimus and L. Lavoura, “A discrete symmetry group for maximal atmospheric neutrino mixing,” *Phys. Lett.* **B572** (2003) 189–195, [arXiv:hep-ph/0305046](#).
- [94] W. Grimus, A. S. Joshipura, S. Kaneko, L. Lavoura, and M. Tanimoto, “Lepton mixing angle $\theta_{13} = 0$ with a horizontal symmetry $D(4)$,” *JHEP* **07** (2004) 078, [arXiv:hep-ph/0407112](#).
- [95] G. Seidl, “Deconstruction and bilarge neutrino mixing,” [arXiv:hep-ph/0301044](#).
- [96] T. Kobayashi, S. Raby, and R.-J. Zhang, “Searching for realistic 4d string models with a Pati-Salam symmetry: Orbifold grand unified theories from heterotic string compactification on a $Z(6)$ orbifold,” *Nucl. Phys.* **B704** (2005) 3–55, [arXiv:hep-ph/0409098](#).
- [97] P. H. Frampton and T. W. Kephart, “Classification of conformality models based on nonabelian orbifolds,” *Phys. Rev.* **D64** (2001) 086007, [arXiv:hep-th/0011186](#).
- [98] C. D. Carone and R. F. Lebed, “A hexagonal theory of flavor,” *Phys. Rev.* **D60** (1999) 096002, [arXiv:hep-ph/9905275](#).
- [99] E. Ma, “Polygonal derivation of the neutrino mass matrix,” *Fizika* **B14** (2005) 35–40, [arXiv:hep-ph/0409288](#).
- [100] S.-L. Chen and E. Ma, “Discrete symmetry and CP phase of the quark mixing matrix,” *Phys. Lett.* **B620** (2005) 151–155, [arXiv:hep-ph/0505064](#).
- [101] C. Hagedorn, M. Lindner, and F. Plentinger, “The discrete flavor symmetry $D(5)$,” *Phys. Rev.* **D74** (2006) 025007, [arXiv:hep-ph/0604265](#).
- [102] P. Ko, T. Kobayashi, J.-h. Park, and S. Raby, “String-derived $D4$ flavor symmetry and phenomenological implications,” *Phys. Rev.* **D76** (2007) 035005, [arXiv:0704.2807 \[hep-ph\]](#).
- [103] J. Kubo, “Dihedral flavor symmetry from dimensional deconstruction,” *Phys. Lett.* **B622** (2005) 303–310, [arXiv:hep-ph/0506043](#).

- [104] Y. Kajiyama, J. Kubo, and H. Okada, “D(6) family symmetry and cold dark matter at LHC,” *Phys. Rev.* **D75** (2007) 033001, arXiv:hep-ph/0610072.
- [105] S. Pakvasa and H. Sugawara, “Mass of the t Quark in $SU(2) \times U(1)$,” *Phys. Lett.* **B82** (1979) 105.
- [106] Y. Yamanaka, H. Sugawara, and S. Pakvasa, “Permutation symmetry and the fermion mass matrix,” *Phys. Rev.* **D25** (1982) 1895.
- [107] E. Ma, “Neutrino mass matrix from S_4 symmetry,” *Phys. Lett.* **B632** (2006) 352–356, arXiv:hep-ph/0508231.
- [108] C. Hagedorn, M. Lindner, and R. N. Mohapatra, “ $S(4)$ flavor symmetry and fermion masses: Towards a grand unified theory of flavor,” *JHEP* **06** (2006) 042, arXiv:hep-ph/0602244.
- [109] B. Lampe, “Tetrons - a possible solution to the family problem,” arXiv:hep-ph/0610270.
- [110] F. Caravaglios and S. Morisi, “Gauge boson families in grand unified theories of fermion masses: $E_6^4 \times S_4$,” *Int. J. Mod. Phys.* **A22** (2007) 2469–2492, arXiv:hep-ph/0611078.
- [111] H. Zhang, “Flavor $S_4 \times Z_2$ symmetry and neutrino mixing,” *Phys. Lett.* **B655** (2007) 132–140, arXiv:hep-ph/0612214.
- [112] Y. Koide, “ S_4 Flavor Symmetry Embedded into $SU(3)$ and Lepton Masses and Mixing,” *JHEP* **08** (2007) 086, arXiv:0705.2275 [hep-ph].
- [113] Y. Koide, “Broken $SU(3)$ Flavor Symmetry and Tribimaximal Neutrino Mixing,” arXiv:0707.0899 [hep-ph].
- [114] S. Nandi and Z. Tavartkiladze, “New Prediction For Leptonic θ_{13} ,” *Phys. Lett.* **B661** (2008) 109–112, arXiv:0708.4033 [hep-ph].
- [115] M. K. Parida, “Intermediate left-right gauge symmetry, unification of couplings and fermion masses in SUSY $SO(10) \times S_4$,” arXiv:0804.4571 [hep-ph].

- [116] C. S. Lam, “The Unique Horizontal Symmetry of Leptons,”
arXiv:0809.1185 [hep-ph].
- [117] S. L. Glashow and S. Weinberg, “Natural Conservation Laws for
Neutral Currents,” *Phys. Rev.* **D15** (1977) 1958.
- [118] D. Emmanuel-Costa, O. Félix-Beltran, M. Mondragón, and
E. Rodríguez-Jáuregui, “Stability of the tree-level vacuum in a
minimal $S(3)$ extension of the standard model,” *AIP Conf. Proc.* **917**
(2007) 390–393.
- [119] O. Félix Beltrán, M. Mondragón, E. Rodríguez Jauregui, and
D. Emmanuel Costa, “Vacuum stability in a minimal S_3 extension of
the Standard Model,” *To appear in, Rev. Mex. Fis.* **S54** (2008) .
- [120] O. Félix Beltrán, M. Mondragón, and R. Jauregui, “Higgs mass
matrices in a stable tree level vacuum in a S_3 extended SM,” *Work in
progress* .
- [121] T. Schwetz, M. Tortola, and J. W. F. Valle, “Three-flavour neutrino
oscillation update,” *New J. Phys.* **10** (2008) 113011,
arXiv:0808.2016 [hep-ph].
- [122] U. Seljak, A. Slosar, and P. McDonald, “Cosmological parameters
from combining the Lyman-alpha forest with CMB, galaxy clustering
and SN constraints,” *JCAP* **0610** (2006) 014, astro-ph/0604335.
- [123] S. R. Elliott and J. Engel, “Double beta decay,” *J. Phys.* **G30** (2004)
R183, arXiv:hep-ph/0405078.
- [124] H. V. Klapdor-Kleingrothaus *et al.*, “Latest results from the
Heidelberg-Moscow double-beta- decay experiment,” *Eur. Phys. J.*
A12 (2001) 147–154, arXiv:hep-ph/0103062.
- [125] K. Eitel, “Direct neutrino mass experiments,” *Nucl. Phys. Proc.*
Suppl. **143** (2005) 197–204.
- [126] B. D. Fields, K. Kainulainen, and K. A. Olive, “Nucleosynthesis
limits on the mass of longlived tau and muon neutrinos,” *Astropart.*
Phys. **6** (1997) 169–186, arXiv:hep-ph/9512321.

- [127] E. W. Kolb, M. S. Turner, A. Chakravorty, and D. N. Schramm, “Constraints from primordial nucleosynthesis on the mass of the tau neutrino,” *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 533–536.
- [128] M. Sher and Y. Yuan, “Rare B decays, rare tau decays and grand unification,” *Phys. Rev.* **D44** (1991) 1461–1472.
- [129] **Particle Data Group** Collaboration, W. M. Yao *et al.*, “Review of particle physics,” *J. Phys.* **G33** (2006) 1–1232.
- [130] **Belle** Collaboration, Y. Miyazaki *et al.*, “Search for Lepton Flavor Violating tau Decays into Three Leptons,” [arXiv:0711.2189](https://arxiv.org/abs/0711.2189) [hep-ex].
- [131] **BABAR** Collaboration, B. Aubert *et al.*, “Improved Limits on the Lepton-Flavor Violating Decays $\tau \rightarrow \mu l + l^-$,” *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 251803, [arXiv:0708.3650](https://arxiv.org/abs/0708.3650) [hep-ex].
- [132] **BABAR** Collaboration, B. Aubert *et al.*, “Search for lepton flavor violation in the decay $\tau \rightarrow \mu \gamma$,” *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 041802, [arXiv:hep-ex/0502032](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0502032).
- [133] **BABAR** Collaboration, B. Aubert *et al.*, “Search for lepton flavor violation in the decay $\tau^\pm \rightarrow e^\pm \gamma$,” *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 041801, [arXiv:hep-ex/0508012](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0508012).
- [134] **SINDRUM** Collaboration, U. Bellgardt *et al.*, “Search for the Decay $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$,” *Nucl. Phys.* **B299** (1988) 1.
- [135] **MEGA** Collaboration, M. L. Brooks *et al.*, “New limit for the family-number non-conserving decay $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 1521–1524, [arXiv:hep-ex/9905013](https://arxiv.org/abs/hep-ex/9905013).
- [136] P. S. Amanik, G. M. Fuller, and B. Grinstein, “Flavor changing supersymmetry interactions in a supernova,” *Astropart. Phys.* **24** (2005) 160–182, [arXiv:hep-ph/0407130](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0407130).
- [137] G. G. Raffelt, “Supernova neutrino observations: What can we learn?,” [arXiv:astro-ph/0701677](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0701677).

- [138] **Muon G-2** Collaboration, G. W. Bennett *et al.*, “Final report of the muon E821 anomalous magnetic moment measurement at BNL,” *Phys. Rev.* **D73** (2006) 072003, arXiv:hep-ex/0602035.
- [139] F. Jegerlehner, “Essentials of the Muon $g-2$,” *Acta Phys. Polon.* **B38** (2007) 3021, arXiv:hep-ph/0703125.
- [140] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,”. Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [141] S. Nie and M. Sher, “The anomalous magnetic moment of the muon and Higgs-mediated flavor changing neutral currents,” *Phys. Rev.* **D58** (1998) 097701, arXiv:hep-ph/9805376.
- [142] J. Erler and G. T. Sanchez, “An upper bound on the hadronic light-by-light contribution to the muon $g-2$,” *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 161801, arXiv:hep-ph/0605052.
- [143] A. De Simone, “Quantum Boltzmann equations in resonant leptogenesis,” arXiv:0805.2354 [hep-ph].
- [144] V. Cirigliano, A. De Simone, G. Isidori, I. Masina, and A. Riotto, “Quantum Resonant Leptogenesis and Minimal Lepton Flavour Violation,” *JCAP* **0801** (2008) 004, arXiv:0711.0778 [hep-ph].
- [145] K. S. Babu, A. G. Bachri, and Z. Tavartkiladze, “Predictive Model of Inverted Neutrino Mass Hierarchy and Resonant Leptogenesis,” *Int. J. Mod. Phys.* **A23** (2008) 1679–1696, arXiv:0705.4419 [hep-ph].
- [146] A. De Simone and A. Riotto, “On Resonant Leptogenesis,” *JCAP* **0708** (2007) 013, arXiv:0705.2183 [hep-ph].
- [147] E. J. Chun and K. Turzyski, “Quasi-degenerate neutrinos and leptogenesis from $L_\mu - L_\tau$,” *Phys. Rev.* **D76** (2007) 053008, arXiv:hep-ph/0703070.

Lepton masses, mixings, and flavor-changing neutral currents in a minimal S_3 -invariant extension of the standard model

A. Mondragón,^{*} M. Mondragón,[†] and E. Peinado[‡]*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 20-364, 01000 México D.F., Mexico*

(Received 3 May 2007; published 3 October 2007)

The mass matrices of the charged leptons and neutrinos, previously derived in a minimal S_3 -invariant extension of the standard model, were reparametrized in terms of their eigenvalues. We obtained explicit, analytical expressions for all entries in the neutrino mixing matrix, V_{PMNS} , the neutrino mixing angles, and the Majorana phases as functions of the masses of charged leptons and neutrinos in excellent agreement with the latest experimental values. The resulting V_{PMNS} matrix is very close to the tribimaximal form of the neutrino mixing matrix. We also derived explicit, analytical expressions for the matrices of the Yukawa couplings and computed the branching ratios of some selected flavor-changing neutral current processes as functions of the masses of the charged leptons and the neutral Higgs bosons. We find that the $S_3 \times Z_2$ flavor symmetry and the strong mass hierarchy of the charged leptons strongly suppress the FCNC processes in the leptonic sector well below the present experimental upper bounds by many orders of magnitude.

DOI: 10.1103/PhysRevD.76.076003

PACS numbers: 11.30.Hv, 12.15.Ff, 14.60.Pq

I. INTRODUCTION

The recent discovery of flavor oscillations of solar, atmospheric, reactor, and accelerator neutrinos have irrefutably established that neutrinos have nonvanishing masses and mix among themselves much like the quarks, thereby providing the first conclusive evidence of new physics beyond the standard model [1,2]. Neutrino oscillation observations and experiments, made in the past eight years, have allowed the determination of the differences of the neutrino masses squared and the flavor mixing angles in the leptonic sector. The solar [3–6], atmospheric [7,8], and reactor [9,10] experiments produced the following results:

$$7.1 \times 10^{-5} (\text{eV})^2 \leq \Delta^2 m_{12} \leq 8.9 \times 10^{-5} (\text{eV})^2, \quad (1)$$

$$0.24 \leq \sin^2 \theta_{12} \leq 0.40, \quad (2)$$

$$1.4 \times 10^{-3} (\text{eV})^2 \leq \Delta^2 m_{13} \leq 3.3 \times 10^{-3} (\text{eV})^2, \quad (3)$$

$$0.34 \leq \sin^2 \theta_{23} \leq 0.68, \quad (4)$$

at 90% confidence level [11,12]. For a recent review on the phenomenology of massive neutrinos, see [13]. The CHOOZ experiment [14] determined an upper bound for the flavor mixing angle between the first and the third generation:

$$\sin^2 \theta_{13} \leq 0.046. \quad (5)$$

However, neutrino oscillation data are insensitive to the absolute value of neutrino masses and also to the funda-

mental issue of whether neutrinos are Dirac or Majorana particles. Hence, the importance of the upper bounds on neutrino masses provided by the searches that probe the neutrino mass values at rest: beta decay experiments [15], neutrinoless double beta decay [16], and precision cosmology [17–19].

In the standard model, the Higgs and Yukawa sectors, which are responsible for the generation of the masses of quarks and charged leptons, do not give mass to the neutrinos. Furthermore, the Yukawa sector of the standard model already has too many parameters whose values can only be determined from experiment. These two facts point to the necessity and convenience of extending the standard model in order to make a unified and systematic treatment of the observed hierarchies of masses and mixings of all fermions, as well as the presence or absence of CP violating phases in the mixing matrices. At the same time, we would also like to reduce drastically the number of free parameters in the theory. These two seemingly contradictory demands can be met by means of a flavor symmetry under which the families transform in a non-trivial fashion.

Recently, we introduced a minimal S_3 -invariant extension of the standard model [20] in which we argued that such a flavor symmetry unbroken at the Fermi scale, is the permutational symmetry of three objects S_3 . In this model, we imposed S_3 as a fundamental symmetry in the matter sector. This assumption led us necessarily to extend the concept of flavor and generations to the Higgs sector. Hence, going to the irreducible representations of S_3 , we added to the Higgs $SU(2)_L$ doublet in the S_3 -singlet representation two more Higgs $SU(2)_L$ doublets, which can only belong to the two components of the S_3 -doublet representation. In this way, all the matter fields in the minimal S_3 -invariant extension of the standard model—Higgs, quark, and lepton fields, including the right-handed

*mondra@fisica.unam.mx

†myriam@fisica.unam.mx

‡eduardo@fisica.unam.mx

neutrino fields—belong to the three-dimensional representation $\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$ of the permutational group S_3 . The leptonic sector of the model was further constrained by an Abelian Z_2 symmetry. We found that the $S_3 \times Z_2$ symmetry predicts the tribimaximal mixing and an inverted mass hierarchy of the left-handed neutrinos in good agreement with experiment [20]. More recently, we reparametrized the mass matrices of the charged leptons and neutrinos, previously derived in [20], in terms of their eigenvalues and derived explicit analytical expressions for the entries in the neutrino mixing matrix, V_{PMNS} , and the neutrino mixing angles and Majorana phases as functions of the masses of charged leptons and neutrinos, in excellent agreement with the latest experimental values [21].

The group S_3 [22–31] and the product groups $S_3 \times S_3$ [31–34] and $S_3 \times S_3 \times S_3$ [35,36] have been considered by many authors to explain successfully the hierarchical structure of quark masses and mixings in the standard model. However, in these works, the S_3 , $S_3 \times S_3$ and $S_3 \times S_3 \times S_3$ symmetries are explicitly broken at the Fermi scale to give mass to the lighter quarks and charged leptons, while neutrinos are left massless. Some other interesting models based on the S_3 , S_4 , A_4 , and D_5 flavor symmetry groups, unbroken at the Fermi scale, have also been proposed [37–44], but in those models, equality of the number of fields and the irreducible representations is not obtained. The generic properties of mass textures of quarks and leptons derived in the standard model and in supersymmetric models with a Higgs sector with nontrivial flavors and an S_3 flavor symmetry have been discussed in [45,46]. Recent flavor symmetry models are reviewed in [47–50], see also the references therein.

In this paper, we consider the flavor-changing neutral current (FCNC) processes in the minimal S_3 -invariant extension of the standard model [20]. After a short review of some relevant results on lepton masses and mixings, we derive exact, explicit expressions for the matrices of the Yukawa couplings in the leptonic sector expressed as functions of the masses of the charged leptons and neutral Higgs bosons. With the help of the Yukawa matrices we compute the branching ratios of some selected FCNC processes as functions of the masses of charged leptons and neutral Higgs bosons. We find that the interplay of the $S_3 \times Z_2$ flavor symmetry and the strong mass hierarchy of charged leptons strongly suppresses the FCNC processes in the leptonic sector well below the experimental upper bounds by many orders of magnitude.

II. THE MINIMAL S_3 -INVARIANT EXTENSION OF THE STANDARD MODEL

In the standard model analogous fermions in different generations have identical couplings to all gauge bosons of the strong, weak, and electromagnetic interactions. Prior to the introduction of the Higgs boson and mass terms, the

Lagrangian is chiral and invariant with respect to permutations of the left and right fermionic fields.

The six possible permutations of three objects (f_1, f_2, f_3) are elements of the permutational group S_3 . This is the discrete, non-Abelian group with the smallest number of elements. The three-dimensional real representation is not an irreducible representation of S_3 . It can be decomposed into the direct sum of a doublet f_D and a singlet f_s , where

$$\begin{aligned} f_s &= \frac{1}{\sqrt{3}}(f_1 + f_2 + f_3), \\ f_D^T &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 - f_2), \frac{1}{\sqrt{6}}(f_1 + f_2 - 2f_3)\right). \end{aligned} \quad (6)$$

The direct product of two doublets $\mathbf{p}_D^T = (p_{D1}, p_{D2})$ and $\mathbf{q}_D^T = (q_{D1}, q_{D2})$ may be decomposed into the direct sum of two singlets \mathbf{r}_s and $\mathbf{r}_{s'}$, and one doublet \mathbf{r}_D^T where

$$\mathbf{r}_s = p_{D1}q_{D1} + p_{D2}q_{D2}, \quad \mathbf{r}_{s'} = p_{D1}q_{D2} - p_{D2}q_{D1}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_D^T &= (r_{D1}, r_{D2}) \\ &= (p_{D1}q_{D2} + p_{D2}q_{D1}, p_{D1}q_{D1} - p_{D2}q_{D2}). \end{aligned} \quad (8)$$

The antisymmetric singlet $\mathbf{r}_{s'}$ is not invariant under S_3 .

Since the standard model has only one Higgs $SU(2)_L$ doublet, which can only be an S_3 singlet, it can only give mass to the quark or charged lepton in the S_3 singlet representation, one in each family, without breaking the S_3 symmetry.

Hence, in order to impose S_3 as a fundamental symmetry, unbroken at the Fermi scale, we are led to extend the Higgs sector of the theory. The quark, lepton, and Higgs fields are

$$\begin{aligned} Q^T &= (u_L, d_L), u_R, d_R, \\ L^T &= (\nu_L, e_L), e_R, \nu_R \quad \text{and} \quad H, \end{aligned} \quad (9)$$

in an obvious notation. All of these fields have three species, and we assume that each one forms a reducible representation $\mathbf{1}_S \oplus \mathbf{2}$. The doublets carry capital indices I and J , which run from 1 to 2, and the singlets are denoted by $Q_3, u_{3R}, d_{3R}, L_3, e_{3R}, \nu_{3R}$, and H_3 . Note that the subscript 3 denotes the singlet representation and not the third generation. The most general renormalizable Yukawa interactions of this model are given by

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{Y_D} + \mathcal{L}_{Y_U} + \mathcal{L}_{Y_E} + \mathcal{L}_{Y_\nu}, \quad (10)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_D} &= -Y_1^d \bar{Q}_I H_S d_{IR} - Y_3^d \bar{Q}_3 H_S d_{3R} \\ &\quad - Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\ &\quad - Y_4^d \bar{Q}_3 H_I d_{IR} - Y_5^d \bar{Q}_I H_1 d_{3R} + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_U} = & -Y_1^u \bar{Q}_1(i\sigma_2) H_S^* u_{1R} - Y_3^u \bar{Q}_3(i\sigma_2) H_S^* u_{3R} \\ & - Y_2^u [\bar{Q}_1 \kappa_{1J}(i\sigma_2) H_1^* u_{JR} + \eta \bar{Q}_1 \eta_{1J}(i\sigma_2) H_2^* u_{JR}] \\ & - Y_4^u \bar{Q}_3(i\sigma_2) H_1^* u_{1R} - Y_5^u \bar{Q}_1(i\sigma_2) H_1^* u_{3R} + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_E} = & -Y_1^e \bar{L}_1 H_S e_{1R} - Y_3^e \bar{L}_3 H_S e_{3R} \\ & - Y_2^e [\bar{L}_1 \kappa_{1J} H_1 e_{JR} + \bar{L}_1 \eta_{1J} H_2 e_{JR}] \\ & - Y_4^e \bar{L}_3 H_1 e_{1R} - Y_5^e \bar{L}_1 H_1 e_{3R} + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_\nu} = & -Y_1^\nu \bar{L}_1(i\sigma_2) H_S^* \nu_{1R} - Y_3^\nu \bar{L}_3(i\sigma_2) H_S^* \nu_{3R} \\ & - Y_2^\nu [\bar{L}_1 \kappa_{1J}(i\sigma_2) H_1^* \nu_{JR} + \bar{L}_1 \eta_{1J}(i\sigma_2) H_2^* \nu_{JR}] \\ & - Y_4^\nu \bar{L}_3(i\sigma_2) H_1^* \nu_{1R} - Y_5^\nu \bar{L}_1(i\sigma_2) H_1^* \nu_{3R} + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (14)$$

and

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Furthermore, we add to the Lagrangian the Majorana mass terms for the right-handed neutrinos

$$\mathcal{L}_M = -M_1 \nu_{1R}^T C \nu_{1R} - M_3 \nu_{3R}^T C \nu_{3R}. \quad (16)$$

Because of the presence of three Higgs fields, the Higgs potential $V_H(H_S, H_D)$ is more complicated than that of the standard model. This potential was analyzed by Pakvasa and Sugawara [23] who found that in addition to the S_3 symmetry, it has a permutational symmetry $S'_2: H_1 \leftrightarrow H_2$, which is not a subgroup of the flavor group S_3 . In this communication, we will assume that the vacuum respects the accidental S'_2 symmetry of the Higgs potential and that

$$\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle. \quad (17)$$

With these assumptions, the Yukawa interactions, Eqs. (11)–(14) yield mass matrices, for all fermions in the theory, of the general form [20]

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 & \mu_2 & \mu_5 \\ \mu_2 & \mu_1 - \mu_2 & \mu_5 \\ \mu_4 & \mu_4 & \mu_3 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

The Majorana mass for the left-handed neutrinos ν_L is generated by the seesaw mechanism. The corresponding mass matrix is given by

$$\frac{M_e M_e^\dagger}{m_\tau^2} = \begin{pmatrix} 2|\tilde{\mu}_2|^2 + |\tilde{\mu}_5|^2 & |\tilde{\mu}_5|^2 & 2|\tilde{\mu}_2||\tilde{\mu}_4|e^{i\delta_e} \\ |\tilde{\mu}_5|^2 & 2|\tilde{\mu}_2|^2 + |\tilde{\mu}_5|^2 & 0 \\ 2|\tilde{\mu}_2||\tilde{\mu}_4|e^{i\delta_e} & 0 & 2|\tilde{\mu}_4|^2 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Notice that this matrix has only one nonignorable phase factor.

The parameters $|\tilde{\mu}_2|$, $|\tilde{\mu}_4|$, and $|\tilde{\mu}_5|$ may readily be expressed in terms of the charged lepton masses. From the invariants of $M_e M_e^\dagger$, we get the set of equations

$$\mathbf{M}_\nu = \mathbf{M}_{\nu_D} \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{M}_{\nu_D})^T, \quad (19)$$

where $\tilde{\mathbf{M}} = \text{diag}(M_1, M_1, M_3)$.

In principle, all entries in the mass matrices can be complex since there is no restriction coming from the flavor symmetry S_3 . The mass matrices are diagonalized by bi-unitary transformations as

$$\begin{aligned} U_{d(u,e)L}^\dagger \mathbf{M}_{d(u,e)} U_{d(u,e)R} &= \text{diag}(m_{d(u,e)}, m_{s(c,\mu)}, m_{b(t,\tau)}), \\ U_\nu^T \mathbf{M}_\nu U_\nu &= \text{diag}(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}). \end{aligned} \quad (20)$$

The entries in the diagonal matrices may be complex, so the physical masses are their absolute values.

The mixing matrices are, by definition,

$$V_{\text{CKM}} = U_{uL}^\dagger U_{dL}, \quad V_{\text{PMNS}} = U_{eL}^\dagger U_\nu K, \quad (21)$$

where K is the diagonal matrix of the Majorana phase factors.

III. THE MASS MATRICES IN THE LEPTONIC SECTOR AND Z_2 SYMMETRY

A further reduction of the number of parameters in the leptonic sector may be achieved by means of an Abelian Z_2 symmetry. A possible set of charge assignments of Z_2 , compatible with the experimental data on masses and mixings in the leptonic sector, is given in Table I.

These Z_2 assignments forbid the following Yukawa couplings

$$Y_1^e = Y_3^e = Y_1^\nu = Y_3^\nu = 0. \quad (22)$$

Therefore, the corresponding entries in the mass matrices vanish, i.e., $\mu_1^e = \mu_3^e = 0$ and $\mu_1^\nu = \mu_3^\nu = 0$.

A. The mass matrix of the charged leptons

The mass matrix of the charged leptons takes the form

$$M_e = m_\tau \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_5 \\ \tilde{\mu}_2 & -\tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_5 \\ \tilde{\mu}_4 & \tilde{\mu}_4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

The unitary matrix U_{eL} that enters in the definition of the mixing matrix, V_{PMNS} , is calculated from

$$U_{eL}^\dagger M_e M_e^\dagger U_{eL} = \text{diag}(m_e^2, m_\mu^2, m_\tau^2), \quad (24)$$

where m_e , m_μ , and m_τ are the masses of the charged leptons, and

TABLE I. Z_2 assignment in the leptonic sector.

-	+
H_S, ν_{3R}	$H_I, L_3, L_I, e_{3R}, e_{IR}, \nu_{IR}$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M_e M_e^\dagger) &= m_e^2 + m_\mu^2 + m_\tau^2 \\ &= m_\tau^2[4|\tilde{\mu}_2|^2 + 2(|\tilde{\mu}_4|^2 + |\tilde{\mu}_5|^2)], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \chi(M_e M_e^\dagger) &= m_\tau^2(m_e^2 + m_\mu^2) + m_e^2 m_\mu^2 \\ &= 4m_\tau^4[|\tilde{\mu}_2|^4 + |\tilde{\mu}_2|^2(|\tilde{\mu}_4|^2 + |\tilde{\mu}_5|^2) \\ &\quad + |\tilde{\mu}_4|^2|\tilde{\mu}_5|^2], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\det(M_e M_e^\dagger) = m_e^2 m_\mu^2 m_\tau^2 = 4m_e^6 |\tilde{\mu}_2|^2 |\tilde{\mu}_4|^2 |\tilde{\mu}_5|^2, \quad (28)$$

where $\chi(M_e M_e^\dagger) = \frac{1}{2}[(\text{Tr}(M_e M_e^\dagger))^2 - \text{Tr}(M_e M_e^\dagger)^2]$.

Solving these equations for $|\tilde{\mu}_2|^2$, $|\tilde{\mu}_4|^2$, and $|\tilde{\mu}_5|^2$, we obtain

$$|\tilde{\mu}_2|^2 = \frac{\tilde{m}_\mu^2}{2} \frac{1+x^4}{1+x^2} + \beta, \quad (29)$$

and

$$\begin{aligned} |\tilde{\mu}_{4,5}|^2 &= \frac{1}{4} \left(1 - \tilde{m}_\mu^2 \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} - 4\beta \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\left(1 - \tilde{m}_\mu^2 \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} \right)^2 - 8\tilde{m}_e^2 \frac{1+x^2}{1+x^4} \right. \\ &\quad + 8\beta \left(1 - \tilde{m}_\mu^2 \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x^2}{1 + \frac{2\beta(1+x^2)}{\tilde{m}_\mu^2(1+x^4)}} \frac{(1+x^2)^2}{(1+x^4)^2} \right) + 16\beta^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (30)$$

In these expressions, $x = m_e/m_\mu$, $\tilde{m}_\mu = m_\mu/m_\tau$ and β is the smallest solution of the equation

$$\mathbf{O}_{eL} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1+2\tilde{m}_\mu^2+4x^2+\tilde{m}_\mu^4+2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1+4x^2-\tilde{m}_\mu^4-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4)}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}(1+\tilde{m}_\mu^2+x^2-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & -x \frac{(1+x^2-\tilde{m}_\mu^2-2\tilde{m}_e^2)\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{\sqrt{1+x^2}\tilde{m}_e\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

where, as before, $\tilde{m}_\mu = m_\mu/m_\tau$, $\tilde{m}_e = m_e/m_\tau$, and $x = m_e/m_\mu$.

B. The mass matrix of the neutrinos

According to the Z_2 selection rule, Eq. (22), the mass matrix of the Dirac neutrinos takes the form

$$\begin{aligned} \beta^3 - \frac{1}{2} \left(1 - 2y + 6\frac{z}{y} \right) \beta^2 \\ - \frac{1}{4} \left(y - y^2 - 4\frac{z}{y} + 7z - 12\frac{z^2}{y^2} \right) \beta - \frac{1}{8} yz - \frac{1}{2} \frac{z^2}{y^2} \\ + \frac{3}{4} \frac{z^2}{y} - \frac{z^3}{y^3} = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

where $y = (m_e^2 + m_\mu^2)/m_\tau^2$ and $z = m_\mu^2 m_e^2/m_\tau^4$.

A good, order of magnitude, estimate for β is obtained from (31)

$$\beta \approx -\frac{m_\mu^2 m_e^2}{2m_\tau^2(m_\tau^2 - (m_\mu^2 + m_e^2))}. \quad (32)$$

Once $M_e M_e^\dagger$ has been reparametrized in terms of the charged lepton masses, it is straightforward to compute M_e and U_{eL} also as functions of the charged lepton masses [21]. The resulting expression for M_e , written to order $(m_\mu m_e/m_\tau^2)^2$ and $x^4 = (m_e/m_\mu)^4$ is

$$M_e \approx m_\tau \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_e} & \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_e} & 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

This approximation is numerically exact up to order 10^{-9} in units of the τ mass. Notice that this matrix has no free parameters other than the Dirac phase δ_e .

The unitary matrix U_{eL} that diagonalizes $M_e M_e^\dagger$ and enters in the definition of the neutrino mixing matrix V_{PMNS} may be written as

$$U_{eL} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{11} & -O_{12} & O_{13} \\ -O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ -O_{31} & -O_{32} & O_{33} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

where the orthogonal matrix \mathbf{O}_{eL} in the right-hand side of Eq. (34), written to the same order of magnitude as M_e , is

$$\mathbf{M}_{\nu_D} = \begin{pmatrix} \mu_2^\nu & \mu_2^\nu & 0 \\ \mu_2^\nu & -\mu_2^\nu & 0 \\ \mu_4^\nu & \mu_4^\nu & \mu_3^\nu \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Then, the mass matrix for the left-handed Majorana neutrinos, \mathbf{M}_ν , obtained from the seesaw mechanism, $\mathbf{M}_\nu = \mathbf{M}_{\nu_D} \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{M}_{\nu_D})^T$, is

$$\mathbf{M}_\nu = \begin{pmatrix} 2(\rho_2^\nu)^2 & 0 & 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu \\ 0 & 2(\rho_2^\nu)^2 & 0 \\ 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu & 0 & 2(\rho_4^\nu)^2 + (\rho_3^\nu)^2 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

where $\rho_2^\nu = (\mu_2^\nu)/M_1^{1/2}$, $\rho_4^\nu = (\mu_4^\nu)/M_1^{1/2}$, and $\rho_3^\nu = (\mu_3^\nu)/M_3^{1/2}$; M_1 and M_3 are the masses of the right-handed neutrinos appearing in (16).

The non-Hermitian, complex, symmetric neutrino mass matrix, M_ν , may be brought to a diagonal form by a bi-unitary transformation, as

$$U_\nu^T M_\nu U_\nu = \text{diag}(|m_{\nu_1}|e^{i\phi_1}, |m_{\nu_2}|e^{i\phi_2}, |m_{\nu_3}|e^{i\phi_\nu}), \quad (38)$$

where U_ν is the matrix that diagonalizes the matrix $M_\nu^\dagger M_\nu$.

In order to compute U_ν , we notice that $M_\nu^\dagger M_\nu$ has the same texture zeroes as M_ν

$$M_\nu^\dagger M_\nu = \begin{pmatrix} |A|^2 + |B|^2 & 0 & A^*B + B^*D \\ 0 & |A|^2 & 0 \\ AB^* + BD^* & 0 & |B|^2 + |D|^2 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

where $A = 2(\rho_2^\nu)^2$, $B = 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu$, and $D = 2(\rho_4^\nu)^2 + (\rho_3^\nu)^2$.

Furthermore, notice that the entries in the upper right corner and lower left corner are complex conjugates of

$$M_\nu = \begin{pmatrix} & m_{\nu_3} & \\ & 0 & \\ \sqrt{(m_{\nu_3} - m_{\nu_1})(m_{\nu_2} - m_{\nu_3})}e^{-i\delta_\nu} & & \end{pmatrix}$$

and

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}} & \sqrt{\frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{\frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}} & \sqrt{\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

The unitarity of U_ν constrains $\sin\eta$ to be real and thus $|\sin\eta| \leq 1$, this condition fixes the phases ϕ_1 and ϕ_2 as

$$|m_{\nu_1}| \sin\phi_1 = |m_{\nu_2}| \sin\phi_2 = |m_{\nu_3}| \sin\phi_\nu. \quad (45)$$

The only free parameters in these matrices, are the phase ϕ_ν , implicit in m_{ν_1} , m_{ν_2} , and m_{ν_3} , and the Dirac phase δ_ν .

each other, all other entries are real. Therefore, the matrix $U_{\nu L}$ that diagonalizes $M_\nu^\dagger M_\nu$, takes the form

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\eta & \sin\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin\eta & \cos\eta & 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

If we require that the defining Eq. (38) be satisfied as an identity, we get the following set of equations:

$$\begin{aligned} 2(\rho_2^\nu)^2 &= m_{\nu_3}, \\ 2(\rho_2^\nu)^2 &= m_{\nu_1} \cos^2\eta + m_{\nu_2} \sin^2\eta, \\ 2\rho_2^\nu\rho_4^\nu &= \sin\eta \cos\eta (m_{\nu_2} - m_{\nu_1}) e^{-i\delta_\nu}, \\ 2(\rho_4^\nu)^2 + (\rho_3^\nu)^2 &= (m_{\nu_1} \sin^2\eta + m_{\nu_2} \cos^2\eta) e^{-2i\delta_\nu}. \end{aligned} \quad (41)$$

Solving these equations for $\sin\eta$ and $\cos\eta$, we find

$$\sin^2\eta = \frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}, \quad \cos^2\eta = \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}. \quad (42)$$

Hence, the matrices M_ν and U_ν , reparametrized in terms of the complex neutrino masses, take the form [21]

$$M_\nu = \begin{pmatrix} & m_{\nu_3} & \\ & 0 & \\ \sqrt{(m_{\nu_3} - m_{\nu_1})(m_{\nu_2} - m_{\nu_3})}e^{-i\delta_\nu} & & \\ m_{\nu_3} & 0 & \\ 0 & (m_{\nu_1} + m_{\nu_2} - m_{\nu_3})e^{-2i\delta_\nu} & \end{pmatrix} \quad (43)$$

C. The neutrino mixing matrix

The neutrino mixing matrix V_{PMNS} is the product $U_{eL}^\dagger U_\nu K$, where K is the diagonal matrix of the Majorana phase factors, defined by

$$\text{diag}(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}) = K^\dagger \text{diag}(|m_{\nu_1}|, |m_{\nu_2}|, |m_{\nu_3}|) K. \quad (46)$$

Except for an overall phase factor $e^{i\phi_1}$, which can be ignored, K is

$$K = \text{diag}(1, e^{i\alpha}, e^{i\beta}), \quad (47)$$

where $\alpha = 1/2(\phi_1 - \phi_2)$ and $\beta = 1/2(\phi_1 - \phi_\nu)$ are the Majorana phases.

Therefore, the theoretical mixing matrix $V_{\text{PMNS}}^{\text{th}}$, is given by

$$V_{\text{PMNS}}^{\text{th}} = \begin{pmatrix} O_{11} \cos\eta + O_{31} \sin\eta e^{i\delta} & O_{11} \sin\eta - O_{31} \cos\eta e^{i\delta} & -O_{21} \\ -O_{12} \cos\eta + O_{32} \sin\eta e^{i\delta} & -O_{12} \sin\eta - O_{32} \cos\eta e^{i\delta} & O_{22} \\ O_{13} \cos\eta - O_{33} \sin\eta e^{i\delta} & O_{13} \sin\eta + O_{33} \cos\eta e^{i\delta} & O_{23} \end{pmatrix} \times K, \quad (48)$$

where $\cos\eta$ and $\sin\eta$ are given in Eq. (42), O_{ij} are given in Eqs. (34) and (35), and $\delta = \delta_\nu - \delta_e$.

To find the relation of our results with the neutrino mixing angles we make use of the equality of the absolute values of the elements of $V_{\text{PMNS}}^{\text{th}}$ and $V_{\text{PMNS}}^{\text{PDG}}$ [51], that is

$$|V_{\text{PMNS}}^{\text{th}}| = |V_{\text{PMNS}}^{\text{PDG}}|. \quad (49)$$

This relation allows us to derive expressions for the mixing angles in terms of the charged lepton and neutrino masses

$$|\sin\theta_{13}| = O_{21}, \quad |\sin\theta_{23}| = \frac{O_{22}}{\sqrt{O_{22}^2 + O_{23}^2}} \quad (50)$$

and

$$|\tan\theta_{12}|^2 = \cot^2\eta \frac{O_{11}^2 \frac{1}{\cot^2\eta} + O_{31}^2 - 2O_{31}O_{11} \frac{1}{\cot\eta} \cos\delta}{O_{11}^2 \cot^2\eta + O_{31}^2 + 2O_{31}O_{11} \cot\eta \cos\delta}. \quad (51)$$

The magnitudes of the reactor and atmospheric mixing angles, θ_{13} and θ_{23} , are determined by the masses of the charged leptons only. Keeping terms up to order (m_e^2/m_μ^2) and $(m_\mu/m_\tau)^4$, we get

$$\begin{aligned} \sin\theta_{13} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1 + 4x^2 - \tilde{m}_\mu^4)}{\sqrt{1 + \tilde{m}_\mu^2 + 5x^2 - \tilde{m}_\mu^4}}, \\ \sin\theta_{23} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - 2\tilde{m}_\mu^2 + \tilde{m}_\mu^4}{\sqrt{1 - 4\tilde{m}_\mu^2 + x^2 + 6\tilde{m}_\mu^4}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Substitution of the small numerical values $\tilde{m}_\mu = 5.94 \times 10^{-2}$, $x = m_e/m_\mu = 4.84 \times 10^{-3}$, and $\tilde{m}_\mu = m_\mu/m_\tau = 5.95 \times 10^{-2}$ for the leptonic mass ratios \tilde{m}_μ and x in the right-hand side of (52) yields the numerical values of $\sin\theta_{13}$ and $\sin\theta_{23}$

$$\sin\theta_{13} = 0.0034, \quad \sin\theta_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 8.4 \times 10^{-6}. \quad (53)$$

From these numbers, it is evident that the theoretical values of $\sin\theta_{13}$ and $\sin\theta_{23}$ are very close to the corresponding tribimaximal mixing values $\sin\theta_{13}^{\text{tri}} = 0$ and $\sin\theta_{23}^{\text{tri}} = 1/\sqrt{2}$ [52].

The dependence of $\tan\theta_{12}$ on the Dirac phase δ , see (51), is very weak, since $O_{31} \sim 1$ but $O_{11} \sim 1/\sqrt{2}(m_e/m_\mu)$. Hence, we may neglect it when comparing (51) with the data on neutrino mixings.

The dependence of $\tan\theta_{12}$ on the phase ϕ_ν and the physical masses of the neutrinos enters through the ratio of the neutrino mass differences under the square root sign, it can be made explicit with the help of the unitarity

$$\tan^2\theta_{12} = \frac{(\Delta m_{12}^2 + \Delta m_{13}^2 + |m_{\nu_3}|^2 \cos^2\phi_\nu)^{1/2} - |m_{\nu_3}| |\cos\phi_\nu|}{(\Delta m_{13}^2 + |m_{\nu_3}|^2 \cos^2\phi_\nu)^{1/2} + |m_{\nu_3}| |\cos\phi_\nu|}. \quad (57)$$

From this expression, we may readily derive expressions for the neutrino masses in terms of $\tan\theta_{12}$ and ϕ_ν and the differences of the squared masses

$$|m_{\nu_3}| = \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{2 \cos\phi_\nu \tan\theta_{12}} \frac{1 - \tan^4\theta_{12} + r^2}{\sqrt{1 + \tan^2\theta_{12}} \sqrt{1 + \tan^2\theta_{12} + r^2}}, \quad (58)$$

constraint on U_ν , Eq. (45),

$$\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}} = \frac{(|m_{\nu_2}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2\phi_\nu)^{1/2} - |m_{\nu_3}| |\cos\phi_\nu|}{(|m_{\nu_1}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2\phi_\nu)^{1/2} + |m_{\nu_3}| |\cos\phi_\nu|}. \quad (54)$$

Similarly, the Majorana phases are given by

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin(\phi_1 - \phi_2) \\ &= \frac{|m_{\nu_3}| \sin\phi_\nu}{|m_{\nu_1}| |m_{\nu_2}|} (\sqrt{|m_{\nu_2}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2\phi_\nu} \\ &\quad + \sqrt{|m_{\nu_1}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2\phi_\nu}), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= \sin(\phi_1 - \phi_\nu) \\ &= \frac{\sin\phi_\nu}{|m_{\nu_1}|} (|m_{\nu_3}| \sqrt{1 - \sin^2\phi_\nu} \\ &\quad + \sqrt{|m_{\nu_1}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2\phi_\nu}). \end{aligned} \quad (56)$$

A more complete and detailed discussion of the Majorana phases in the neutrino mixing matrix V_{PMNS} obtained in our model is given by J. Kubo [53].

D. Neutrino masses and mixings

In the present model, $\sin^2\theta_{13}$ and $\sin^2\theta_{23}$ are determined only by the masses of the charged leptons in very good agreement with the experimental values [11,12,54],

$$(\sin^2\theta_{13})^{\text{th}} = 1.1 \times 10^{-5}, \quad (\sin^2\theta_{13})^{\text{exp}} \leq 0.046,$$

and

$$(\sin^2\theta_{23})^{\text{th}} = 0.499, \quad (\sin^2\theta_{23})^{\text{exp}} = 0.5_{-0.05}^{+0.06}.$$

In this model, the experimental restriction $|\Delta m_{12}^2| < |\Delta m_{13}^2|$ implies an inverted neutrino mass spectrum, $|m_{\nu_3}| < |m_{\nu_1}| < |m_{\nu_2}|$ [20].

As can be seen from Eqs. (51) and (54), the solar mixing angle is sensitive to the neutrino mass differences and the phase ϕ_ν but is only very weakly sensitive to the charged lepton masses. If we neglect the small terms proportional to O_{11} and O_{11}^2 in (51), we get

in a similar way, we obtain

$$|m_{\nu_1}| = \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2} [(1-t_{12}^4)^2 + 4\cos^2\phi_\nu t_{12}^2(1+t_{12}^2)^2 + 2r^2(1-t_{12}^4 + 2\cos^2\phi_\nu t_{12}^2(1+t_{12}^2)) + r^4]^{(1/2)}}{2\cos\phi_\nu t_{12} \sqrt{1+t_{12}^2} \sqrt{1+t_{12}^2+r^2}}$$

$$|m_{\nu_2}| = \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{2\cos\phi_\nu t_{12}} \times \frac{[(1-t_{12}^4)^2 + 4\cos^2\phi_\nu t_{12}^2(1+t_{12}^2)^2 + 2r^2(1-t_{12}^4 + 2\cos^2\phi_\nu t_{12}^2(1+t_{12}^2)(2+t_{12}^2)) + r^4(1+4\cos^2\phi_\nu t_{12}^2(1+t_{12}^2))]^{(1/2)}}{\sqrt{1+t_{12}^2} \sqrt{1+t_{12}^2+r^2}},$$
(59)

where $t_{12} = \tan\theta_{12}$, and $r^2 = \Delta m_{12}^2/\Delta m_{13}^2 \approx 3 \times 10^{-2}$. As $r^2 \ll 1$, Eq. (58) reduces to

$$|m_{\nu_3}| \approx \frac{1}{2\cos\phi_\nu} \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{\tan\theta_{12}} (1 - \tan^2\theta_{12}).$$
(60)

From these expressions, and setting $r^2 \sim 0$, the sum of the neutrino masses is

$$|m_{\nu_1}| + |m_{\nu_2}| + |m_{\nu_3}| \approx \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{2\cos\phi_\nu \tan\theta_{12}} (1 + 2\sqrt{1 + 2\tan^2\theta_{12}(2\cos^2\phi_\nu - 1) + \tan^4\theta_{12}} - \tan^2\theta_{12}).$$
(61)

The most restrictive cosmological upper bound for this sum is [17]

$$\sum |m_\nu| \leq 0.17 \text{ eV.}$$
(62)

From this upper bound and the experimentally determined

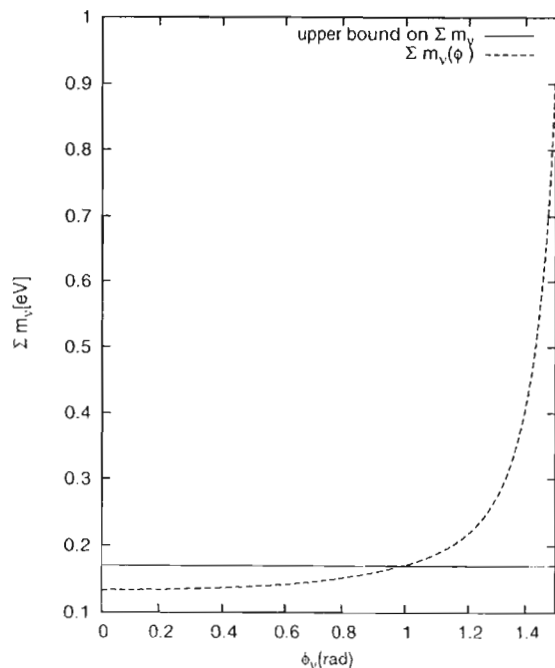


FIG. 1. The dashed line represents the sum of the neutrino masses, $\sum_{i=1}^3 |m_{\nu_i}|$, as function of ϕ_ν . The horizontal straight line is the cosmological upper bound on $\sum |m_{\nu_i}|$ [17].

values of $\tan\theta_{12}$ and Δm_{ij}^2 , we may derive a lower bound for $\cos\phi_\nu$,

$$\cos\phi_\nu \geq 0.55,$$
(63)

or $0 \leq \phi_\nu \leq 57^\circ$. The neutrino masses $|m_{\nu_i}|$ assume their minimal values when $\cos\phi_\nu = 1$. When $\cos\phi_\nu$ takes values in the range $0.55 \leq \cos\phi_\nu \leq 1$, the neutrino masses change very slowly with $\cos\phi_\nu$, see Fig. 1. In the absence of experimental information we will assume that ϕ_ν vanishes. Hence, setting $\phi_\nu = 0$ in our formula, we find

$$|m_{\nu_2}| \approx 0.056 \text{ eV}, \quad |m_{\nu_1}| \approx 0.055 \text{ eV},$$

$$|m_{\nu_3}| \approx 0.022 \text{ eV},$$
(64)

where we used the values $\Delta m_{13}^2 = 2.6 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$, $\Delta m_{21}^2 = 7.9 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$, and $\tan\theta_{12} = 0.667$, taken from [13].

E. V_{PMNS} and the tribimaximal form

Once the numerical values of the neutrino masses are determined, we may readily verify that the theoretical mixing matrix, V_{PMNS} , is very close to the tribimaximal form of the mixing matrix,

$$V_{\text{PMNS}}^{\text{th}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} + \delta V_{\text{PMNS}}^{\text{tri}},$$
(65)

where $\delta V_{\text{PMNS}}^{\text{tri}} = V_{\text{PMNS}}^{\text{th}} - V_{\text{PMNS}}^{\text{tri}}$. From Eqs. (35), (40), (42), (48), (52), and (64), the correction term to the tribimaximal form of the mixing matrix comes out as

$$\delta V_{\text{PMNS}}^{\text{tri}} \approx \begin{pmatrix} 1.94 \times 10^{-2} & -2.84 \times 10^{-2} & -3.4 \times 10^{-3} \\ 2.21 \times 10^{-2} & 1.5 \times 10^{-2} & -8.2 \times 10^{-6} \\ 1.8 \times 10^{-2} & 1.24 \times 10^{-2} & 3.1 \times 10^{-10} \end{pmatrix}. \quad (66)$$

IV. FLAVOR-CHANGING NEUTRAL CURRENTS (FCNC)

Models with more than one Higgs $SU(2)$ doublet have tree-level flavor-changing neutral currents. In the minimal S_3 -invariant extension of the standard model considered here, there is one Higgs $SU(2)$ doublet per generation coupling to all fermions. The flavor-changing Yukawa couplings may be written in a flavor labeled, symmetry adapted weak basis as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^{\text{FCNC}} = & (\bar{E}_{aL} Y_{ab}^{ES} E_{bR} + \bar{U}_{aL} Y_{ab}^{US} U_{bR} + \bar{D}_{aL} Y_{ab}^{DS} D_{bR}) H_S^0 \\ & + (\bar{E}_{aL} Y_{ab}^{E1} E_{bR} + \bar{U}_{aL} Y_{ab}^{U1} U_{bR} \\ & + \bar{D}_{aL} Y_{ab}^{D1} D_{bR}) H_1^0 + (\bar{E}_{aL} Y_{ab}^{E2} E_{bR} \\ & + \bar{U}_{aL} Y_{ab}^{U2} U_{bR} + \bar{D}_{aL} Y_{ab}^{D2} D_{bR}) H_2^0 + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (67)$$

where the entries in the column matrices E^i 's, U^i 's, and D^i 's are the left and right fermion fields and $Y_{ab}^{(e,u,d)s}$, $Y_{ab}^{(e,u,d)1,2}$ are 3×3 matrices of the Yukawa couplings of the fermion fields to the neutral Higgs fields H_S^0 and H_1^0 in the S_3 -singlet and doublet representations, respectively.

In this basis, the Yukawa couplings of the Higgs fields to each family of fermions may be written in terms of matrices $\mathcal{M}_Y^{(e,u,d)}$, which give rise to the corresponding mass matrices $M^{(e,u,d)}$ when the gauge symmetry is spontaneously broken. From this relation we may calculate the flavor-changing Yukawa couplings in terms of the fermion masses and the vacuum expectation values of the neutral Higgs fields. For example, the matrix \mathcal{M}_Y^e is written in terms of the matrices of the Yukawa couplings of the charged leptons as

$$\mathcal{M}_Y^e = Y_w^{E1} H_1^0 + Y_w^{E2} H_2^0, \quad (68)$$

in this expression, the index w means that the Yukawa matrices are defined in the weak basis,

$$Y_w^{E1} = \frac{m_\tau}{v_1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_c} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (69)$$

and

$$Y_w^{E2} = \frac{m_\tau}{v_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ 0 & \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

The Yukawa couplings of immediate physical interest in the computation of the flavor-changing neutral currents are those defined in the mass basis, according to $\tilde{Y}_m^{EI} = U_{eL}^\dagger Y_w^{EI} U_{eR}$, where U_{eL} and U_{eR} are the matrices that diagonalize the charged lepton mass matrix defined in Eqs. (20) and (34). We obtain

$$\tilde{Y}_m^{E1} \approx \frac{m_\tau}{v_1} \begin{pmatrix} 2\tilde{m}_e & -\frac{1}{2}\tilde{m}_e & \frac{1}{2}x \\ -\tilde{m}_\mu & \frac{1}{2}\tilde{m}_\mu & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\tilde{m}_\mu x^2 & -\frac{1}{2}\tilde{m}_\mu & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_m, \quad (71)$$

and

$$\tilde{Y}_m^{E2} \approx \frac{m_\tau}{v_2} \begin{pmatrix} -\tilde{m}_e & \frac{1}{2}\tilde{m}_e & -\frac{1}{2}x \\ \tilde{m}_\mu & \frac{1}{2}\tilde{m}_\mu & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\tilde{m}_\mu x^2 & \frac{1}{2}\tilde{m}_\mu & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_m, \quad (72)$$

where $\tilde{m}_\mu = 5.94 \times 10^{-2}$, $\tilde{m}_e = 2.876 \times 10^{-4}$, and $x = m_e/m_\mu = 4.84 \times 10^{-3}$. All the nondiagonal elements are responsible for tree-level FCNC processes. The actual values of the Yukawa couplings in Eqs. (71) and (72) still depend on the VEV's of the Higgs fields v_1 and v_2 , and, hence, on the Higgs potential. If the S_3' symmetry in the Higgs sector is preserved [23], $\langle H_1^0 \rangle = \langle H_2^0 \rangle = v$. To make an order of magnitude estimate of the coefficient in the Yukawa matrices, m_τ/v , we may further assume that the VEV's for all the Higgs fields are comparable, that is, $\langle H_S^0 \rangle = \langle H_1^0 \rangle = \langle H_2^0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{M_w}{g_2}$, then, $m_\tau/v = \sqrt{3}/\sqrt{2} g_2 m_\tau/M_w$ and we may estimate the numerical values of the Yukawa couplings from the numerical values of the lepton masses. For instance, the amplitude of the flavor violating process $\tau^- \rightarrow \mu^- e^+ e^-$, is proportional to $\tilde{Y}_{\tau\mu}^E \tilde{Y}_{ee}^E$ [55]. Then, the leptonic branching ratio,

$$\text{Br}(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) = \frac{\Gamma(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-)}{\Gamma(\tau \rightarrow e \nu \bar{\nu}) + \Gamma(\tau \rightarrow \mu \nu \bar{\nu})} \quad (73)$$

and

$$\Gamma(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) \approx \frac{m_\tau^5}{3 \times 2^{10} \pi^3} \frac{(Y_{\tau\mu}^{1,2} Y_{ee}^{1,2})^2}{M_{H_{1,2}}^4}, \quad (74)$$

which is the dominant term, and the well-known expressions for $\Gamma(\tau \rightarrow e \nu \bar{\nu})$ and $\Gamma(\tau \rightarrow \mu \nu \bar{\nu})$ [51], give

$$\text{Br}(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) \approx \frac{9}{4} \left(\frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2} \right)^2 \left(\frac{m_\tau}{M_{H_{1,2}}} \right)^4, \quad (75)$$

taking for $M_{H_{1,2}} \sim 120$ GeV, we obtain

$$\text{Br}(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) \approx 3.15 \times 10^{-17}.$$

well below the experimental upper bound for this process, which is 2.7×10^{-7} [56]. Similar computations give the following estimates

$$\text{Br}(\tau \rightarrow e\gamma) \approx \frac{3\alpha}{8\pi} \left(\frac{m_\mu}{M_H}\right)^4, \quad (76)$$

$$\text{Br}(\tau \rightarrow \mu\gamma) \approx \frac{3\alpha}{128\pi} \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^2 \left(\frac{m_\tau}{M_H}\right)^4, \quad (77)$$

$$\text{Br}(\tau \rightarrow 3\mu) \approx \frac{9}{64} \left(\frac{m_\mu}{M_H}\right)^4, \quad (78)$$

$$\text{Br}(\mu \rightarrow 3e) \approx 18 \left(\frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2}\right)^2 \left(\frac{m_\tau}{M_H}\right)^4, \quad (79)$$

and

$$\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) \approx \frac{27\alpha}{64\pi} \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^4 \left(\frac{m_\tau}{M_H}\right)^4. \quad (80)$$

We see that FCNC processes in the leptonic sector are strongly suppressed by the small values of the mass ratios m_e/m_τ , m_μ/m_τ , and m_τ/M_H . The numerical estimates of the branching ratios and the corresponding experimental upper bounds are shown in Table II. It may be seen that, in all cases considered, the numerical values for the branching ratios of the FCNC in the leptonic sector are well below the corresponding experimental upper bounds. The matrices of the quark Yukawa couplings may be computed in a similar way. Numerical values for the Yukawa couplings for u and d -type quarks are given in our previous paper [20]. There it was found that, due to the strong hierarchy in the quark masses and the corresponding small or very small mass ratios, the numerical values of all the Yukawa couplings in the quark sector are small or very small. Kubo, Okada, and Sakamaki [61] have investigated the breaking of the gauge symmetry in the present S_3 -invariant extension of the standard model with the S_3 -invariant Higgs potential $V_H(H_S, H_2)$ analyzed by Pakvasa and Sugawara [23]. They found that it is possible that all physical Higgs bosons, except one neutral one, could become sufficiently heavy ($M_H \sim 10$ TeV) to suppress all the flavor-changing neutral current processes in the quark sector of the theory without having a problem with triviality.

V. CONCLUSIONS

By introducing three Higgs fields that are $SU(2)_L$ doublets in the theory, we extended the concept of flavor and generations to the Higgs sector and formulated a minimal S_3 -invariant extension of the standard model [20]. A well-defined structure of the Yukawa couplings is obtained, which permits the calculation of mass and mixing matrices for quarks and leptons in a unified way. A further reduction of redundant parameters is achieved in the leptonic sector by introducing a Z_2 symmetry. The flavor symmetry group $Z_2 \times S_3$ relates the mass spectrum and mixings. This allowed us to derive explicit, analytical expressions for all entries in the neutrino mixing matrix, V_{PMNS} , as functions of the masses of the charged leptons and neutrinos and two phases δ and ϕ_ν [21]. In this model, the tribimaximal mixing structure of V_{PMNS} and the magnitudes of the three mixing angles are determined by the interplay of the flavor $S_3 \times Z_2$ symmetry, the seesaw mechanism, and the charged lepton mass hierarchy. We also found that V_{PMNS} has three CP violating phases, namely, one Dirac phase $\delta = \delta_\nu - \delta_e$ and two Majorana phases, α and β , which are functions of the neutrino masses and the phase ϕ_ν , which is independent of the Dirac phase. The numerical values of the reactor, θ_{13} , and the atmospheric, θ_{23} , mixing angles are determined by the masses of the charged leptons only, in very good agreement with the experiment. The solar mixing angle θ_{12} is almost insensitive to the values of the masses of the charged leptons, but its experimental value allowed us to fix the scale and origin of the neutrino mass spectrum, which has an inverted hierarchy, with the values $|m_{\nu_2}| = 0.056$ eV, $|m_{\nu_1}| = 0.055$ eV, and $|m_{\nu_3}| = 0.022$ eV. In the present work, we obtained explicit expressions for the matrices of the Yukawa couplings of the lepton sector parametrized in terms of the charged lepton masses and the VEV's of the neutral Higgs bosons in the S_3 -doublet representation. These Yukawa matrices are closely related to the fermion mass matrices and have a structure of small and very small entries reflecting the observed charged lepton mass hierarchy. With the help of the Yukawa matrices, we computed the branching ratios of a number of FCNC processes and found that the branching ratios of all FCNC processes considered are strongly suppressed by powers of the small mass ratios m_e/m_τ and m_μ/m_τ , and by the ratio $(m_\tau/M_{H_{1,2}})^4$, where $M_{H_{1,2}}$ is the

TABLE II. Leptonic FCNC processes, calculated with $M_{H_{1,2}} \sim 120$ GeV.

FCNC processes	Theoretical BR	Experimental upper bound BR	References
$\tau \rightarrow 3\mu$	8.43×10^{-14}	2×10^{-7}	B. Aubert <i>et al.</i> [56]
$\tau \rightarrow \mu e^+ e^-$	3.15×10^{-17}	2.7×10^{-7}	B. Aubert <i>et al.</i> [56]
$\tau \rightarrow \mu\gamma$	9.24×10^{-15}	6.8×10^{-8}	B. Aubert <i>et al.</i> [57]
$\tau \rightarrow e\gamma$	5.22×10^{-16}	1.1×10^{-11}	B. Aubert <i>et al.</i> [58]
$\mu \rightarrow 3e$	2.53×10^{-16}	1×10^{-12}	U. Bellgardt <i>et al.</i> [59]
$\mu \rightarrow e\gamma$	2.42×10^{-20}	1.2×10^{-11}	M. L. Brooks <i>et al.</i> [60]

mass of the neutral Higgs bosons in the S_3 -doublet. Taking for $M_{H_{1,2}}$ a very conservative value ($M_{H_{1,2}} \approx 120$ GeV), we found that the numerical values of the branching ratios of the FCNC in the leptonic sector are well below the corresponding experimental upper bounds by many orders of magnitude. We may add that although the theoretical values of the branching ratios of FCNC processes computed in this work are much smaller than their experimental upper bounds measured in terrestrial laboratories, they still are larger than the vanishing or nearly vanishing values allowed by the standard model, and could be important in astrophysical processes [62]. It has already been argued

that small FCNC processes mediating nonstandard quark-neutrino interactions could be important in the theoretical description of the gravitational core collapse and shock generation in the explosion stage of a supernova [63,64].

ACKNOWLEDGMENTS

We are indebted to Professor S. Pakvasa for useful comments on this work. This work was partially supported by CONACYT Mexico under Contract No. 51554-F and by DGAPA-UNAM under Contract No. PAPIIT-IN115207-2.

-
- [1] C. K. Jung, C. Mc Grew, T. Kajita, and T. Mann, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **51**, 451 (2001).
- [2] R. N. Mohapatra and A. Y. Smirnov, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **56**, 569 (2006).
- [3] M. Altmann *et al.* (GNO Collaboration), *Phys. Lett. B* **616**, 174 (2005).
- [4] M. B. Smy *et al.* (SK Collaboration), *Phys. Rev. D* **69**, 011104 (2004).
- [5] Q. R. Ahmad *et al.* (SNO Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **89**, 011301 (2002).
- [6] B. Aharmim *et al.* (SNO Collaboration), *Phys. Rev. C* **72**, 055502 (2005).
- [7] S. Fukuda *et al.* (SK Collaboration), *Phys. Lett. B* **539**, 179 (2002).
- [8] Y. Ashie *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 101801 (2004).
- [9] C. Bemporad, G. Gratta, and P. Vogel, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 297 (2002).
- [10] T. Araki *et al.* (KamLAND Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081801 (2005).
- [11] M. Maltoni, T. Schwetz, M. A. Tórtola, and J. W. F. Valle, *New J. Phys.* **6**, 122 (2004).
- [12] T. Schwetz, *Acta Phys. Pol. B* **36**, 3203 (2005).
- [13] M. C. González-García and M. Maltoni, arXiv:hep-ph/0704.1800.
- [14] M. Apollonio *et al.* (CHOOZ Collaboration), *Eur. Phys. J. C* **27**, 331 (2003).
- [15] K. Eitel, *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **143**, 197 (2005).
- [16] S. R. Eliot and J. Engel, *J. Phys. G* **30**, R183 (2004).
- [17] U. Seljak, A. Slosar, and P. McDonald, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **10** (2006) 014.
- [18] O. Elgaroy and O. Lahav, *New J. Phys.* **7**, 61 (2005).
- [19] J. Lesgourgues and S. Pastor, *Phys. Rep.* **429**, 307 (2006).
- [20] J. Kubo, A. Mondragón, M. Mondragón, and E. Rodríguez-Jáuregui, *Prog. Theor. Phys.* **109**, 795 (2003).
- [21] O. Félix, A. Mondragón, M. Mondragón, and E. Peinado, *Rev. Mex. Fís.* **S52N4**, 67 (2006).
- [22] H. Fritzsch, *Phys. Lett. B* **70**, 436 (1977).
- [23] S. Pakvasa and H. Sugawara, *Phys. Lett. B* **73**, 61 (1978).
- [24] H. Fritzsch, *Phys. Lett. B* **73**, 317 (1978).
- [25] H. Harari, H. Haut, and J. Weyers, *Phys. Lett. B* **78**, 459 (1978).
- [26] J. M. Frere, *Phys. Lett. B* **80**, 369 (1979).
- [27] H. Fritzsch, *Nucl. Phys.* **B155**, i89 (1979).
- [28] Y. Yamanaka, S. Pakvasa, and H. Sugawara, *Phys. Rev. D* **25**, 1895 (1982); **29**, 2135(E) (1984).
- [29] P. Kaus and S. Meshkov, *Phys. Rev. D* **42**, 1863 (1990).
- [30] H. Fritzsch and J. P. Plankl, *Phys. Lett. B* **237**, 451 (1990).
- [31] P. F. Harrison and W. G. Scott, *Phys. Lett. B* **333**, 471 (1994).
- [32] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, *Phys. Rev. D* **59**, 093009 (1999).
- [33] A. Mondragón and E. Rodríguez-Jáuregui, *Phys. Rev. D* **61**, 113002 (2000).
- [34] For a review see H. Fritzsch and Z. Z. Xing, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **45**, 1 (2000).
- [35] L. J. Hall and H. Murayama, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3985 (1995).
- [36] C. D. Carone, L. J. Hall, and H. Murayama, *Phys. Rev. D* **53**, 6282 (1996).
- [37] Y. Koide, *Phys. Rev. D* **60**, 077301 (1999).
- [38] E. Ma, *Phys. Rev. D* **44**, R587 (1991).
- [39] E. Ma, *Mod. Phys. Lett. A* **17**, 627 (2002); **17**, 2361 (2002).
- [40] K. S. Babu, E. Ma, and J. W. F. Valle, *Phys. Lett. B* **552**, 207 (2003).
- [41] S.-L. Chen, M. Frigerio, and E. Ma, *Phys. Rev. D* **70**, 073008 (2004); **70**, 079905(E) (2004).
- [42] W. Grimus and Lavoura, *J. High Energy Phys.* **08** (2005) 013.
- [43] C. Hagedorn, M. Lindner, and R. N. Mohapatra, *J. High Energy Phys.* **06** (2006) 042.
- [44] C. Hagedorn, M. Lindner, and F. Plentinger, *Phys. Rev. D* **74**, 025007 (2006).
- [45] N. Haba and K. Yoshioka, *Nucl. Phys.* **B739**, 254 (2006).
- [46] S. Kaneko, H. Sawanaka, T. Shingai, M. Tanimoto, and K. Yoshioka, *Prog. Theor. Phys.* **117**, 161 (2007).
- [47] A. Y. Smirnov, *J. Phys. Conf. Ser.* **53**, 44 (2006).
- [48] G. Altarelli and F. Feruglio, *New J. Phys.* **6**, 106 (2004); G. Altarelli, in Proceedings of IPM School and Conference on Lepton and Hadron Physics (IPM-LHP06), Tehran, Iran, 2006 (unpublished), p. 0001.
- [49] A. Mondragón, *AIP Conf. Proc.* **857B**, 266 (2006).

- [50] C.H. Albright and M.C. Chen, Phys. Rev. D **74**, 113006 (2006).
- [51] W.-M. Yao *et al.* (Particle Data Group), J. Phys. G **33**, 1 (2006).
- [52] P.F. Harrison, D.H. Perkins, and W.G. Scott, Phys. Lett. B **530**, 167 (2002).
- [53] J. Kubo, Phys. Lett. B **578**, 156 (2004); **619**, 387(E) (2005).
- [54] G.L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, and A. Palazzo, Prog. Part. Nucl. Phys. **57**, 742 (2006).
- [55] M. Sher and Y. Yuan, Phys. Rev. D **44**, 1461 (1991).
- [56] B. Aubert *et al.* (BABAR Collaboration), Phys. Rev. Lett. **92**, 121801 (2004).
- [57] B. Aubert *et al.* (BABAR Collaboration), Phys. Rev. Lett. **95**, 041802 (2005).
- [58] B. Aubert *et al.* (BABAR Collaboration), Phys. Rev. Lett. **96**, 041801 (2006).
- [59] U. Bellgardt *et al.* (SINDRUM Collaboration), Nucl. Phys. **B299**, 1 (1988).
- [60] M.L. Brooks *et al.* (MEGA Collaboration), Phys. Rev. Lett. **83**, 1521 (1999).
- [61] J. Kubo, H. Okada, and F. Sakamaki, Phys. Rev. D **70**, 036007 (2004).
- [62] G. G. Raffelt, arXiv:astro-ph/0701677.
- [63] P.S. Amanik, G.M. Fuller, and B. Grinstein, Astropart. Phys. **24**, 160 (2005).
- [64] A. Esteban-Pretel, R. Tomas, and J.W.F. Valle, arXiv:0704.0032.

S_3 -flavour symmetry as realized in lepton flavour violating processes

A Mondragón, M Mondragón and E Peinado

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 20-364,
01000 México DF, Mexico

E-mail: mondra@fisica.unam.mx, myriam@fisica.unam.mx and eduardo@fisica.unam.mx

Received 25 October 2007, in final form 10 December 2007

Published 15 July 2008

Online at stacks.iop.org/JPhysA/41/304035

Abstract

A variety of lepton flavour violating effects related to the recent discovery of neutrino oscillations and mixings is here systematically discussed in terms of an S_3 -flavour permutational symmetry. After a brief review of some relevant results on lepton masses and mixings, that had been derived in the framework of a minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model, we derive explicit analytical expressions for the matrices of the Yukawa couplings and compute the branching ratios of some selected flavour-changing neutral current (FCNC) processes as well as the contribution of the exchange of neutral flavour-changing scalars to the anomaly of the muon's magnetic moment as functions of the masses of the charged leptons and the neutral Higgs bosons. We find that the $S_3 \times Z_2$ flavour symmetry and the strong mass hierarchy of the charged leptons strongly suppress the FCNC processes in the leptonic sector well below the present experimental upper bounds by many orders of magnitude. The contribution of FCNC to the anomaly of the muon's magnetic moment is small but non-negligible.

PACS numbers: 11.30.Hv, 14.60.Pq, 14.60.St, 14.80.Cp, 12.15.Ff, 12.15.Mm

1. Introduction

Neutrino oscillation observations and experiments, made in the past 9 years, have allowed the determination of the differences of the squared neutrino masses and the mixing angles in the leptonic sector [1–19]. The discovery that neutrinos have non-vanishing masses and mix among themselves much like the quarks do provides the first conclusive evidence of new physics beyond the Standard Model. This important discovery also brought out very forcefully the need of extending the Standard Model to accommodate in the theory the new data on neutrino physics in a coherent way, free of contradictions and without spoiling the Standard Model's many phenomenological successes.

In the Standard Model, the Higgs and Yukawa sectors, which are responsible for the generation of the masses of quarks and charged leptons, do not give mass to the neutrinos. Furthermore, the Yukawa sector of the Standard Model already has too many parameters whose values can only be determined from experiment. These two facts point to the necessity and convenience of extending the Standard Model in order to make a unified and systematic treatment of the observed hierarchies of masses and mixings of all fermions as well as the presence or absence of CP violating phases in the mixing matrices. At the same time, we would also like to reduce drastically the number of free parameters in the theory. These two seemingly contradictory demands can be met by means of a flavour symmetry under which the families transform in a non-trivial fashion.

Recently, we argued that such a flavour symmetry unbroken at the Fermi scale is the permutational symmetry of three objects S_3 and introduced a minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model [20]. In this model, we imposed S_3 as a fundamental symmetry in the matter sector. This assumption led us necessarily to extend the concept of flavour and generations to the Higgs sector. Hence, going to the irreducible representations of S_3 , we added to the Higgs $SU(2)_L$ doublet in the S_3 -singlet representation two more Higgs $SU(2)_L$ doublets, which can only belong to the two components of the S_3 -doublet representation, in this way all the matter fields in the minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model—Higgs, quark and lepton fields, including the right-handed neutrino fields—belong to the three-dimensional representation $\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$ of the permutational group S_3 . The leptonic sector of the model was further constrained by an Abelian Z_2 symmetry. We found that the $S_3 \times Z_2$ symmetry predicts an almost maximal $\sin \theta_{23}$ and a very small value for $\sin \theta_{13}$ and an inverted mass hierarchy of the left-handed neutrinos in good agreement with experiment [20, 21]. More recently, we reparametrized the mass matrices of the charged leptons and neutrinos, previously derived in [20], in terms of their eigenvalues and computed the neutrino mixing matrix, V_{PMNS} , and the neutrino mixing angles and Majorana phases as functions of the masses of charged leptons and neutrinos. The numerical values of the reactor, θ_{13} , and atmospheric, θ_{23} , mixing angles are determined only by the masses of the charged leptons in very good agreement with experiment. The solar mixing angle, θ_{12} , is almost insensitive to the values of the masses of the charged leptons, but its experimental value allowed us to fix the scale and origin of the neutrino mass spectrum. We found that the theoretical neutrino mixing matrix V_{PMNS} is nearly tri-bimaximal in excellent agreement with the latest experimental values [22, 23].

The symmetry S_3 [24–33] and the symmetry product groups $S_3 \times S_3$ [33–36] and $S_3 \times S_3 \times S_3$ [37, 38] broken at the Fermi scale have been considered by many authors to explain successfully the hierarchical structure of quark masses and mixings in the Standard Model. Some other interesting models based on the S_3 , S_4 , A_4 and D_5 flavour symmetry groups, unbroken at the Fermi scale, have also been proposed [39–46]. Recent flavour symmetry models are reviewed in [47–50], see also the references therein.

In this paper, after a short, updated review of some relevant results on lepton masses and mixings, we had previously derived, we will discuss some other important flavour violating effects in the minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model. We will give exact explicit expressions for the matrices of the Yukawa couplings in the leptonic sector expressed as functions of the masses of charged leptons and neutral Higgs bosons. With the help of the Yukawa matrices we will compute the branching ratios of some selected FCNC processes and the contribution of the exchange of neutral flavour-changing scalars to the anomaly of the muon's magnetic moment. We find that the interplay of the $S_3 \times Z_2$ flavour symmetry and the strong mass hierarchy of charged leptons strongly suppress the FCNC processes in the leptonic sector well below the experimental upper bounds by many orders of magnitude. The contribution to the anomaly, a_μ , from FCNC is at most 6% of the discrepancy between

the experimental value and the Standard Model prediction for a_μ , which is a small but not negligible contribution.

2. The minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model

In the Standard Model analogous fermions in different generations have identical couplings to all gauge bosons of the strong, weak and electromagnetic interactions. Prior to the introduction of the Higgs boson and mass terms, the Lagrangian is chiral and invariant with respect to permutations of the left and right fermionic fields.

The six possible permutations of three objects (f_1, f_2, f_3) are elements of the permutational group S_3 . This is the discrete, non-Abelian group with the smallest number of elements. The three-dimensional real representation is not an irreducible representation of S_3 . It can be decomposed into the direct sum of a doublet f_D and a singlet f_s , where

$$\begin{aligned} f_s &= \frac{1}{\sqrt{3}}(f_1 + f_2 + f_3), \\ f_D^T &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 - f_2), \frac{1}{\sqrt{6}}(f_1 + f_2 - 2f_3) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

The direct product of two doublets $\mathbf{p}_D^T = (p_{D1}, p_{D2})$ and $\mathbf{q}_D^T = (q_{D1}, q_{D2})$ may be decomposed into the direct sum of two singlets \mathbf{r}_s and $\mathbf{r}_{s'}$ and one doublet \mathbf{r}_D^T where

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_s &= p_{D1}q_{D1} + p_{D2}q_{D2}, & \mathbf{r}_{s'} &= p_{D1}q_{D2} - p_{D2}q_{D1}, \\ \mathbf{r}_D^T &= (r_{D1}, r_{D2}) = (p_{D1}q_{D2} + p_{D2}q_{D1}, p_{D1}q_{D1} - p_{D2}q_{D2}). \end{aligned} \quad (2)$$

The antisymmetric singlet $\mathbf{r}_{s'}$ is not invariant under S_3 .

Since the Standard Model has only one Higgs $SU(2)_L$ doublet, which can only be an S_3 singlet, it can only give mass to the quark or charged lepton in the S_3 singlet representation, one in each family, without breaking the S_3 symmetry.

Hence, in order to impose S_3 as a fundamental symmetry, unbroken at the Fermi scale, we are led to extend the Higgs sector of the theory. The quark, lepton and Higgs fields are

$$\begin{aligned} Q^T &= (u_L, d_L), u_R, d_R, \\ L^T &= (v_L, e_L), e_R, \nu_R \quad \text{and } H, \end{aligned} \quad (4)$$

in an obvious notation. All of these fields have three species, and we assume that each one forms a reducible representation $\mathbf{1}_5 \oplus \mathbf{2}$. The doublets carry capital indices I and J , which run from 1 to 2, and the singlets are denoted by $Q_3, u_{3R}, d_{3R}, L_3, e_{3R}, \nu_{3R}$ and H_5 . Note that the subscript 3 denotes the singlet representation and not the third generation. The most general renormalizable Yukawa interactions of this model are given by

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{Y_D} + \mathcal{L}_{Y_U} + \mathcal{L}_{Y_E} + \mathcal{L}_{Y_\nu}, \quad (5)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_D} &= -Y_1^d \bar{Q}_I H_5 d_{IR} - Y_3^d \bar{Q}_3 H_5 d_{3R} - Y_2^d [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} H_1 d_{JR} + \bar{Q}_I \eta_{IJ} H_2 d_{JR}] \\ &\quad - Y_4^d \bar{Q}_3 H_1 d_{IR} - Y_5^d \bar{Q}_1 H_1 d_{3R} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_U} &= -Y_1^u \bar{Q}_I (i\sigma_2) H_5^* u_{IR} - Y_3^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_5^* u_{3R} - Y_2^u [\bar{Q}_I \kappa_{IJ} (i\sigma_2) H_1^* u_{JR}] \\ &\quad + \bar{Q}_I \eta_{IJ} (i\sigma_2) H_2^* u_{JR}] - Y_4^u \bar{Q}_3 (i\sigma_2) H_1^* u_{IR} - Y_5^u \bar{Q}_1 (i\sigma_2) H_1^* u_{3R} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_E} &= -Y_1^e \bar{L}_I H_5 e_{IR} - Y_3^e \bar{L}_3 H_5 e_{3R} - Y_2^e [\bar{L}_I \kappa_{IJ} H_1 e_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ} H_2 e_{JR}] \\ &\quad - Y_4^e \bar{L}_3 H_1 e_{IR} - Y_5^e \bar{L}_1 H_1 e_{3R} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y_\nu} = & -Y_1^\nu \bar{L}_I(i\sigma_2) H_S^* \nu_{IR} - Y_3^\nu \bar{L}_3(i\sigma_2) H_S^* \nu_{3R} - Y_2^\nu [\bar{L}_I \kappa_{IJ}(i\sigma_2) H_1^* \nu_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ}(i\sigma_2) H_2^* \nu_{JR}] \\ & - Y_4^\nu \bar{L}_3(i\sigma_2) H_1^* \nu_{IR} - Y_5^\nu \bar{L}_I(i\sigma_2) H_1^* \nu_{3R} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (9)$$

and

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Furthermore, we add to the Lagrangian the Majorana mass terms for the right-handed neutrinos:

$$\mathcal{L}_M = -M_1 \nu_{IR}^T C \nu_{IR} - M_3 \nu_{3R}^T C \nu_{3R}. \quad (11)$$

Due to the presence of three Higgs fields, the Higgs potential $V_H(H_S, H_D)$ is more complicated than that of the Standard Model. A Higgs potential invariant under S_3 was first proposed by Pakvasa and Sugawara [25], who assumed an additional reflection symmetry $R : H_S \rightarrow -H_S$. These authors found that in addition to the S_3 symmetry, their Higgs potential has an accidental permutational symmetry $S'_2 : H_1 \leftrightarrow H_2$. The accidental S'_2 symmetry is also present in our $V_H(H_S, H_D)$. The most general form of the potential $V_H(H_S, H_D)$ was investigated in detail by Kubo, Okada and Sakamaki [51], who discussed the potential of Pakvasa and Sugawara as a special case. A preliminary study on conditions under which the minimum of the Higgs potential is a global and stable one can be found in [52]. In this paper, we will assume that the vacuum respects the accidental S'_2 symmetry of the Higgs potential and therefore that

$$\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle. \quad (12)$$

With these assumptions, the Yukawa interactions, equations (6)–(9) yield mass matrices, for all fermions in the theory, of the general form [20]

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 & \mu_2 & \mu_5 \\ \mu_2 & \mu_1 - \mu_2 & \mu_5 \\ \mu_4 & \mu_4 & \mu_3 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

The Majorana mass for the left-handed neutrinos ν_L is generated by the see-saw mechanism. The corresponding mass matrix is given by

$$\mathbf{M}_\nu = \mathbf{M}_{\nu_D} \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{M}_{\nu_D})^T, \quad (14)$$

where $\tilde{\mathbf{M}} = \text{diag}(M_1, M_1, M_3)$.

In principle, all entries in the mass matrices can be complex since there is no restriction coming from the flavour symmetry S_3 . The mass matrices are diagonalized by bi-unitary transformations as

$$\begin{aligned} U_{d(u,e)L}^\dagger \mathbf{M}_{d(u,e)} U_{d(u,e)R} &= \text{diag}(m_{d(u,e)}, m_{s(c,\mu)}, m_{b(t,\tau)}), \\ U_\nu^T \mathbf{M}_\nu U_\nu &= \text{diag}(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}). \end{aligned} \quad (15)$$

The entries in the diagonal matrices may be complex, so the physical masses are their absolute values.

The mixing matrices are, by definition,

$$V_{CKM} = U_{uL}^\dagger U_{dL}, \quad V_{PMNS} = U_{eL}^\dagger U_\nu K. \quad (16)$$

where K is the diagonal matrix of the Majorana phase factors.

Table 1. Z_2 assignment in the leptonic sector.

-	+
H_S, ν_{3R}	$H_1, L_3, L_1, e_{3R}, e_{1R}, \nu_{1R}$

3. The mass matrices in the leptonic sector and Z_2 symmetry

A further reduction of the number of parameters in the leptonic sector may be achieved by means of an Abelian Z_2 symmetry. A possible set of charge assignments of Z_2 , compatible with the experimental data on masses and mixings in the leptonic sector, is given in table 1.

These Z_2 assignments forbid the following Yukawa couplings:

$$Y_1^e = Y_3^e = Y_1^\nu = Y_5^\nu = 0. \quad (17)$$

Therefore, the corresponding entries in the mass matrices vanish, i.e., $\mu_1^e = \mu_3^e = 0$ and $\mu_1^\nu = \mu_5^\nu = 0$.

3.1. The mass matrix of the charged leptons

The mass matrix of the charged leptons takes the form

$$M_e = m_\tau \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_5 \\ \tilde{\mu}_2 & -\tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_5 \\ \tilde{\mu}_4 & \tilde{\mu}_4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

The unitary matrix U_{eL} that enters in the definition of the mixing matrix, V_{PMNS} , is calculated from

$$U_{eL}^\dagger M_e M_e^\dagger U_{eL} = \text{diag}(m_e^2, m_\mu^2, m_\tau^2), \quad (19)$$

where m_e, m_μ and m_τ are the masses of the charged leptons [23]. The parameters $|\tilde{\mu}_2|, |\tilde{\mu}_4|$ and $|\tilde{\mu}_5|$ may readily be expressed in terms of the charged lepton masses [22]. The resulting expression for M_e , written to order $(m_\mu m_e/m_\tau^2)^2$ and $x^4 = (m_e/m_\mu)^4$, is

$$M_e \approx m_\tau \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}{1+x^2}} \\ \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_e} & \frac{\tilde{m}_e(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} e^{i\delta_e} & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

This approximation is numerically exact up to order 10^{-9} in units of the τ mass. Note that this matrix has no free parameters other than the Dirac phase δ_e .

The unitary matrix U_{eL} that diagonalizes $M_e M_e^\dagger$ and enters in the definition of the neutrino mixing matrix V_{PMNS} may be written as

$$U_{eL} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{11} & -O_{12} & O_{13} \\ -O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ -O_{31} & -O_{32} & O_{33} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

where the orthogonal matrix \mathbf{O}_{eL} on the right-hand side of equation (21), written to the same order of magnitude as M_e , is

$$\mathbf{O}_{eL} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x \frac{(1+2\bar{m}_\mu^2+4x^2+\bar{m}_\mu^4+2\bar{m}_e^2)}{\sqrt{1+\bar{m}_\mu^2+5x^2-\bar{m}_\mu^4-\bar{m}_e^6+\bar{m}_e^2+12x^4}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\bar{m}_\mu^2+\bar{m}_\mu^4-2\bar{m}_e^2)}{\sqrt{1-4\bar{m}_\mu^2+x^2+6\bar{m}_\mu^4-4\bar{m}_\mu^6-5\bar{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x \frac{(1+4x^2-\bar{m}_\mu^4-2\bar{m}_e^2)}{\sqrt{1+\bar{m}_\mu^2+5x^2-\bar{m}_\mu^4-\bar{m}_e^6+\bar{m}_e^2+12x^4}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\bar{m}_\mu^2+\bar{m}_\mu^4)}{\sqrt{1-4\bar{m}_\mu^2+x^2+6\bar{m}_\mu^4-4\bar{m}_\mu^6-5\bar{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{1+2x^2-\bar{m}_\mu^2-\bar{m}_e^2}(1+\bar{m}_\mu^2+x^2-2\bar{m}_e^2)}{\sqrt{1+\bar{m}_\mu^2+5x^2-\bar{m}_\mu^4-\bar{m}_e^6+\bar{m}_e^2+12x^4}} & -x \frac{(1+x^2-\bar{m}_\mu^2-2\bar{m}_e^2)\sqrt{1+2x^2-\bar{m}_\mu^2-\bar{m}_e^2}}{\sqrt{1-4\bar{m}_\mu^2+x^2+6\bar{m}_\mu^4-4\bar{m}_\mu^6-5\bar{m}_e^2}} & \frac{\sqrt{1+x^2-\bar{m}_\mu^2}}{\sqrt{1+x^2-\bar{m}_\mu^2}} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

where, as before, $\bar{m}_\mu = m_\mu/m_\tau$, $\bar{m}_e = m_e/m_\tau$ and $x = m_e/m_\mu$.

3.2. The mass matrix of the neutrinos

According to the Z_2 selection rule, equation (17), the mass matrix of the Dirac neutrinos takes the form

$$\mathbf{M}_{\nu D} = \begin{pmatrix} \mu_2^\nu & \mu_2^\nu & 0 \\ \mu_2^\nu & -\mu_2^\nu & 0 \\ \mu_4^\nu & \mu_4^\nu & \mu_3^\nu \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Then, the mass matrix for the left-handed Majorana neutrinos, \mathbf{M}_ν , obtained from the see-saw mechanism, $\mathbf{M}_\nu = \mathbf{M}_{\nu D} \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{M}_{\nu D})^T$, is

$$\mathbf{M}_\nu = \begin{pmatrix} 2(\rho_2^\nu)^2 & 0 & 2\rho_2^\nu \rho_4^\nu \\ 0 & 2(\rho_2^\nu)^2 & 0 \\ 2\rho_2^\nu \rho_4^\nu & 0 & 2(\rho_4^\nu)^2 + (\rho_3^\nu)^2 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

where $\rho_2^\nu = (\mu_2^\nu)/M_1^{1/2}$, $\rho_4^\nu = (\mu_4^\nu)/M_1^{1/2}$ and $\rho_3^\nu = (\mu_3^\nu)/M_3^{1/2}$; M_1 and M_3 are the masses of the right-handed neutrinos appearing in (11).

The non-Hermitian, complex, symmetric neutrino mass matrix M_ν may be brought to a diagonal form by a unitary transformation as

$$U_\nu^T M_\nu U_\nu = \text{diag}(|m_{\nu_1}|e^{i\phi_1}, |m_{\nu_2}|e^{i\phi_2}, |m_{\nu_3}|e^{i\phi_\nu}), \quad (25)$$

where U_ν is the matrix that diagonalizes the matrix $M_\nu^\dagger M_\nu$.

As in the case of the charged leptons the matrices M_ν and U_ν can be reparametrized in terms of the complex neutrino masses. Then [22, 23]

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_{\nu_3} & 0 & \sqrt{(m_{\nu_3} - m_{\nu_1})(m_{\nu_2} - m_{\nu_3})} e^{-i\delta_\nu} \\ 0 & m_{\nu_3} & 0 \\ \sqrt{(m_{\nu_3} - m_{\nu_1})(m_{\nu_2} - m_{\nu_3})} e^{-i\delta_\nu} & 0 & (m_{\nu_1} + m_{\nu_2} - m_{\nu_1}) e^{-2i\delta_\nu} \end{pmatrix} \quad (26)$$

and

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

where

$$\sin^2 \eta = \frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}, \quad \cos^2 \eta = \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}. \quad (28)$$

The unitarity of U_ν constrains $\sin \eta$ to be real and thus $|\sin \eta| \leq 1$, this condition fixes the phases ϕ_1 and ϕ_2 as

$$|m_{\nu_1}| \sin \phi_1 = |m_{\nu_2}| \sin \phi_2 = |m_{\nu_3}| \sin \phi_\nu. \quad (29)$$

The only free parameters in these matrices are the phase ϕ_ν , implicit in m_{ν_1} , m_{ν_2} and m_{ν_3} , and the Dirac phase δ_ν .

3.3. The neutrino mixing matrix

The neutrino mixing matrix V_{PMNS} is the product $U_{eL}^\dagger U_\nu K$, where K is the diagonal matrix of the Majorana phase factors, defined by

$$\text{diag}(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}) = K^\dagger \text{diag}(|m_{\nu_1}|, |m_{\nu_2}|, |m_{\nu_3}|) K^\dagger. \quad (30)$$

Except for an overall phase factor $e^{i\phi_1}$, which can be ignored, K is

$$K = \text{diag}(1, e^{i\alpha}, e^{i\beta}), \quad (31)$$

where $\alpha = 1/2(\phi_1 - \phi_2)$ and $\beta = 1/2(\phi_1 - \phi_\nu)$ are the Majorana phases.

Therefore, the theoretical mixing matrix V_{PMNS}^{th} is given by

$$V_{PMNS}^{\text{th}} = \begin{pmatrix} O_{11} \cos \eta + O_{31} \sin \eta e^{i\delta} & O_{11} \sin \eta - O_{31} \cos \eta e^{i\delta} & -O_{21} \\ -O_{12} \cos \eta + O_{32} \sin \eta e^{i\delta} & -O_{12} \sin \eta - O_{32} \cos \eta e^{i\delta} & O_{22} \\ O_{13} \cos \eta - O_{33} \sin \eta e^{i\delta} & O_{13} \sin \eta + O_{33} \cos \eta e^{i\delta} & O_{23} \end{pmatrix} \times K, \quad (32)$$

where $\cos \eta$ and $\sin \eta$ are given in equation (28), O_{ij} are given in equations (21) and (22), and $\delta = \delta_\nu - \delta_e$.

To find the relation of our results with the neutrino mixing angles we make use of the equality of the absolute values of the elements of V_{PMNS}^{th} and V_{PMNS}^{PDG} [53], that is

$$|V_{PMNS}^{\text{th}}| = |V_{PMNS}^{PDG}|. \quad (33)$$

This relation allows us to derive expressions for the mixing angles in terms of the charged lepton and neutrino masses.

The magnitudes of the reactor and atmospheric mixing angles, θ_{13} and θ_{23} , are determined by the masses of the charged leptons only. Keeping only terms of order (m_e^2/m_μ^2) and $(m_\mu/m_\tau)^4$, we get

$$\sin \theta_{13} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1 + 4x^2 - \tilde{m}_\mu^4)}{\sqrt{1 + \tilde{m}_\mu^2 + 5x^2 - \tilde{m}_\mu^4}}, \quad \sin \theta_{23} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + \frac{1}{4}x^2 - 2\tilde{m}_\mu^2 + \tilde{m}_\mu^4}{\sqrt{1 - 4\tilde{m}_\mu^2 + x^2 + 6\tilde{m}_\mu^4}}. \quad (34)$$

The magnitude of the solar angle depends on charged lepton and neutrino masses as well as the Dirac and Majorana phases

$$|\tan \theta_{12}|^2 = \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_1} - m_{\nu_1}} \left(\frac{1 - 2 \frac{O_{11}}{O_{31}} \cos \delta \sqrt{\frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}} + \left(\frac{O_{11}}{O_{31}}\right)^2 \frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}}{1 + 2 \frac{O_{11}}{O_{31}} \cos \delta \sqrt{\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}} + \left(\frac{O_{11}}{O_{31}}\right)^2 \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}} \right). \quad (35)$$

The dependence of $\tan \theta_{12}$ on the Dirac phase δ , see (35), is very weak, since $O_{31} \sim 1$ but $O_{11} \sim 1/\sqrt{2}(m_e/m_\mu)$. Hence, we may neglect it when comparing (35) with the data on neutrino mixings.

The dependence of $\tan \theta_{12}$ on the phase ϕ_ν and the physical masses of the neutrinos enters through the ratio of the neutrino mass differences, it can be made explicit with the help of the unitarity constraint on U_ν , equation (29),

$$\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}} = \frac{(|m_{\nu_2}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2 \phi_\nu)^{1/2} - |m_{\nu_3}| |\cos \phi_\nu|}{(|m_{\nu_1}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2 \phi_\nu)^{1/2} + |m_{\nu_3}| |\cos \phi_\nu|}. \quad (36)$$

Similarly, the Majorana phases are given by

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha = \sin(\phi_1 - \phi_2) &= \frac{|m_{\nu_3}| \sin \phi_\nu}{|m_{\nu_1}| |m_{\nu_2}|} \\ &\times (\sqrt{|m_{\nu_2}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2 \phi_\nu} + \sqrt{|m_{\nu_1}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2 \phi_\nu}), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \sin 2\beta = \sin(\phi_1 - \phi_\nu) \\ = \frac{\sin \phi_\nu}{|m_{\nu_1}|} (|m_{\nu_3}| \sqrt{1 - \sin^2 \phi_\nu} + \sqrt{|m_{\nu_1}|^2 - |m_{\nu_3}|^2 \sin^2 \phi_\nu}). \end{aligned} \quad (38)$$

A more complete and detailed discussion of the Majorana phases in the neutrino mixing matrix V_{PMNS} obtained in our model is given by Kubo [54].

4. Neutrino masses and mixings

In the present model, $\sin^2 \theta_{13}$ and $\sin^2 \theta_{23}$ are determined by the masses of the charged leptons in very good agreement with the experimental values [11, 12, 55],

$$(\sin^2 \theta_{13})^{\text{th}} = 1.1 \times 10^{-5}, \quad (\sin^2 \theta_{13})^{\text{exp}} \leq 0.046, \quad (39)$$

and

$$(\sin^2 \theta_{23})^{\text{th}} = 0.499, \quad (\sin^2 \theta_{23})^{\text{exp}} = 0.5_{-0.05}^{+0.06}. \quad (40)$$

In this model, the experimental restriction $|\Delta m_{12}^2| < |\Delta m_{13}^2|$ implies an inverted neutrino mass spectrum, $|m_{\nu_3}| < |m_{\nu_1}| < |m_{\nu_2}|$ [20].

As can be seen from equations (35) and (36), the solar mixing angle is sensitive to the neutrino mass differences and the phase ϕ_ν but is only very weakly sensitive to the charged lepton masses. If we neglect the small terms proportional to O_{11} and O_{11}^2 in (35), we get

$$\tan^2 \theta_{12} = \frac{(\Delta m_{12}^2 + \Delta m_{13}^2 + |m_{\nu_3}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} - |m_{\nu_3}| |\cos \phi_\nu|}{(\Delta m_{13}^2 + |m_{\nu_1}|^2 \cos^2 \phi_\nu)^{1/2} + |m_{\nu_1}| |\cos \phi_\nu|}. \quad (41)$$

From this expression, we may readily derive expressions for the neutrino masses in terms of $\tan \theta_{12}$ and ϕ_ν and the differences of the squared masses of the neutrinos

$$|m_{\nu_3}| = \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{2 \cos \phi_\nu \tan \theta_{12}} \frac{1 - \tan^4 \theta_{12} + r^2}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_{12}} \sqrt{1 + \tan^2 \theta_{12} + r^2}}, \quad (42)$$

and

$$|m_{\nu_1}| = \sqrt{|m_{\nu_3}|^2 + \Delta m_{13}^2}, \quad |m_{\nu_2}| = \sqrt{|m_{\nu_3}|^2 + \Delta m_{13}^2 (1 + r^2)} \quad (43)$$

where $r^2 = \Delta m_{12}^2 / \Delta m_{13}^2 \approx 3 \times 10^{-2}$.

As $r^2 \ll 1$, the sum of the neutrino masses is

$$\sum_{i=1}^3 |m_{\nu_i}| \approx \frac{\sqrt{\Delta m_{13}^2}}{2 \cos \phi_\nu \tan \theta_{12}} \left(1 + 2\sqrt{1 + 2 \tan^2 \theta_{12} (2 \cos^2 \phi_\nu - 1) + \tan^4 \theta_{12}} - \tan^2 \theta_{12} \right). \quad (44)$$

The most restrictive cosmological upper bound for this sum is [17]

$$\sum |m_\nu| \leq 0.17 \text{ eV}. \quad (45)$$

From this upper bound and the experimentally determined values of $\tan \theta_{12}$ and Δm_{ij}^2 , we may derive a lower bound for $\cos \phi_\nu$,

$$\cos \phi_\nu \geq 0.55, \quad (46)$$

or $0 \leq \phi_\nu \leq 57^\circ$. The neutrino masses $|m_{\nu_i}|$ assume their minimal values when $\cos \phi_\nu = 1$. When $\cos \phi_\nu$ takes values in the range $0.55 \leq \cos \phi \leq 1$, the neutrino masses change very slowly with $\cos \phi_\nu$. In the absence of experimental information we will assume that ϕ_ν vanishes. Hence, setting $\phi_\nu = 0$ in our formula, we find

$$|m_{\nu_2}| \approx 0.056 \text{ eV} \quad |m_{\nu_1}| \approx 0.055 \text{ eV} \quad |m_{\nu_3}| \approx 0.022 \text{ eV}, \quad (47)$$

where we used the values $\Delta m_{13}^2 = 2.6 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$, $\Delta m_{21}^2 = 7.9 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ and $\tan \theta_{12} = 0.667$ taken from [13].

5. Flavour-changing neutral currents (FCNC)

Models with more than one Higgs $SU(2)$ doublet have tree level flavour-changing neutral currents. In the minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model, considered here, there is one Higgs $SU(2)$ doublet per generation coupling to all fermions. The flavour-changing Yukawa couplings may be written in a flavour labelled symmetry adapted weak basis as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^{\text{FCNC}} = & (\bar{E}_{aL} Y_{ab}^{ES} E_{bR} + \bar{U}_{aL} Y_{ab}^{US} U_{bR} + \bar{D}_{aL} Y_{ab}^{DS} D_{bR}) H_S^0 \\ & + (\bar{E}_{aL} Y_{ab}^{E1} E_{bR} + \bar{U}_{aL} Y_{ab}^{U1} U_{bR} + \bar{D}_{aL} Y_{ab}^{D1} D_{bR}) H_1^0 \\ & + (\bar{E}_{aL} Y_{ab}^{E2} E_{bR} + \bar{U}_{aL} Y_{ab}^{U2} U_{bR} + \bar{D}_{aL} Y_{ab}^{D2} D_{bR}) H_2^0 + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (48)$$

where the entries in the column matrices E 's, U 's and D 's are the left and right fermion fields and $Y_{ab}^{(e,u,d)S}$, $Y_{ab}^{(e,u,d)1,2}$ are 3×3 matrices of the Yukawa couplings of the fermion fields to the neutral Higgs fields H_S^0 and H_i^0 in the S_3 -singlet and doublet representations, respectively.

In this basis, the Yukawa couplings of the Higgs fields to each family of fermions may be written in terms of matrices $\mathcal{M}_Y^{(e,u,d)}$, which give rise to the corresponding mass matrices $M^{(e,u,d)}$ when the gauge symmetry is spontaneously broken. From this relation we may calculate the flavour-changing Yukawa couplings in terms of the fermion masses and the vacuum expectation values of the neutral Higgs fields. For example, the matrix \mathcal{M}_Y^e is written in terms of the matrices of the Yukawa couplings of the charged leptons as

$$\mathcal{M}_Y^e = Y_w^{E1} H_1^0 + Y_w^{E2} H_2^0, \quad (49)$$

in this expression the index w means that the Yukawa matrices are defined in the weak basis. The Yukawa couplings of immediate physical interest in the computation of the flavour-changing neutral currents are those defined in the mass basis, according to $\tilde{Y}_m^{El} = U_{eL}^\dagger Y_w^{El} U_{eR}$,

where U_{eL} and U_{eR} are the matrices that diagonalize the charged lepton mass matrix defined in equations (15) and (21). We obtain [23]

$$\tilde{Y}_m^{E1} \approx \frac{m_\tau}{v_1} \begin{pmatrix} 2\tilde{m}_e & -\frac{1}{2}\tilde{m}_e & \frac{1}{2}x \\ -\tilde{m}_\mu & \frac{1}{2}\tilde{m}_\mu & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\tilde{m}_\mu x^2 & -\frac{1}{2}\tilde{m}_\mu & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_m, \quad (50)$$

and

$$\tilde{Y}_m^{E2} \approx \frac{m_\tau}{v_2} \begin{pmatrix} -\tilde{m}_e & \frac{1}{2}\tilde{m}_e & -\frac{1}{2}x \\ \tilde{m}_\mu & \frac{1}{2}\tilde{m}_\mu & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\tilde{m}_\mu x^2 & \frac{1}{2}\tilde{m}_\mu & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_m, \quad (51)$$

where $\tilde{m}_\mu = 5.94 \times 10^{-2}$, $\tilde{m}_e = 2.876 \times 10^{-4}$ and $x = m_e/m_\mu = 4.84 \times 10^{-3}$. All the non-diagonal elements are responsible for tree-level FCNC processes. The actual values of the Yukawa couplings in equations (50) and (51) still depend on the VEVs of the Higgs fields v_1 and v_2 and hence on the Higgs potential. If the S'_2 symmetry in the Higgs sector is preserved [25], $\langle H_1^0 \rangle = \langle H_2^0 \rangle = v$. In order to make an order of magnitude estimate of the coefficient in the Yukawa matrices, m_τ/v , we may further assume that the VEVs for all the Higgs fields are comparable, that is, $\tan \beta = \langle H_s^0 \rangle / \langle H_1^0 \rangle = 1$, and $\langle H_s^0 \rangle = \langle H_1^0 \rangle = \langle H_2^0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{M_W}{g_2}$, then $m_\tau/v = \sqrt{3}/\sqrt{2} g_2 m_\tau / M_W$ and we may estimate the numerical values of the Yukawa couplings from the numerical values of the lepton masses. For instance, the amplitude of the flavour violating process $\tau^- \rightarrow \mu^- e^+ e^-$ is proportional to $\tilde{Y}_{\tau\mu}^E \tilde{Y}_{ee}^E$ [56]. Then, the leptonic branching ratio,

$$\text{Br}(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) = \frac{\Gamma(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-)}{\Gamma(\tau \rightarrow e \nu \bar{\nu}) + \Gamma(\tau \rightarrow \mu \nu \bar{\nu})} \quad (52)$$

and

$$\Gamma(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) \approx \frac{m_\tau^5}{3 \times 2^{10} \pi^3} \frac{(Y_{\tau\mu}^{1,2} Y_{ee}^{1,2})^2}{M_{H_{1,2}}^4} \quad (53)$$

which is the dominant term, and the well-known expressions for $\Gamma(\tau \rightarrow e \nu \bar{\nu})$ and $\Gamma(\tau \rightarrow \mu \nu \bar{\nu})$ [53] give

$$\text{Br}(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) \approx \frac{9}{4} \left(\frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2} \right)^2 \left(\frac{m_\tau}{M_{H_{1,2}}} \right)^4, \quad (54)$$

taking for $M_{H_{1,2}} \sim 120$ GeV, we obtain

$$\text{Br}(\tau \rightarrow \mu e^+ e^-) \approx 3.15 \times 10^{-17}$$

well below the experimental upper bound for this process, which is 2.7×10^{-7} [57]. Similar computations give the following estimates:

$$\text{Br}(\tau \rightarrow e \gamma) \approx \frac{3\alpha}{8\pi} \left(\frac{m_\mu}{M_H} \right)^4, \quad (55)$$

$$\text{Br}(\tau \rightarrow \mu \gamma) \approx \frac{3\alpha}{128\pi} \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \left(\frac{m_\tau}{M_H} \right)^4, \quad (56)$$

$$\text{Br}(\tau \rightarrow 3\mu) \approx \frac{9}{64} \left(\frac{m_\mu}{M_H} \right)^4, \quad (57)$$

Table 2. Leptonic FCNC processes, calculated with $M_{H_{1,2}} \sim 120$ GeV.

FCNC processes	Theoretical BR	Experimental upper bound BR	References
$\tau \rightarrow 3\mu$	8.43×10^{-14}	2×10^{-7}	Aubert <i>et al</i> [57]
$\tau \rightarrow \mu e^+ e^-$	3.15×10^{-17}	2.7×10^{-7}	Aubert <i>et al</i> [57]
$\tau \rightarrow \mu \gamma$	9.24×10^{-15}	6.8×10^{-8}	Aubert <i>et al</i> [58]
$\tau \rightarrow e \gamma$	5.22×10^{-16}	1.1×10^{-11}	Aubert <i>et al</i> [59]
$\mu \rightarrow 3e$	2.53×10^{-16}	1×10^{-12}	Bellgardt <i>et al</i> [60]
$\mu \rightarrow e \gamma$	2.42×10^{-20}	1.2×10^{-11}	Brooks <i>et al</i> [61]

$$\text{Br}(\mu \rightarrow 3e) \approx 18 \left(\frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2} \right)^2 \left(\frac{m_\tau}{M_H} \right)^4, \quad (58)$$

and

$$\text{Br}(\mu \rightarrow e \gamma) \approx \frac{27\alpha}{64\pi} \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^4 \left(\frac{m_\tau}{M_H} \right)^4. \quad (59)$$

If we do not assume $v_s = v_1 = v_2$, but keep $v_s/v_1 = \tan \beta$ unspecified, the expressions (55)–(59) must be multiplied by a factor $(2 + \tan^2 \beta)^2/9$.

We see that FCNC processes in the leptonic sector are strongly suppressed by the small values of the mass ratios m_e/m_τ , m_μ/m_τ and m_τ/M_H . The numerical estimates of the branching ratios and the corresponding experimental upper bounds are shown in table 2. It may be seen that, in all cases considered, the numerical values for the branching ratios of the FCNC in the leptonic sector are well below the corresponding experimental upper bounds. The matrices of the quark Yukawa couplings may be computed in a similar way. Numerical values for the Yukawa couplings for u- and d-type quarks are given in our previous paper [20]. There, it was found that, due to the strong hierarchy in the quark masses and the corresponding small or very small mass ratios, the numerical values of all the Yukawa couplings in the quark sector are small or very small. Kubo, Okada and Sakamaki [51] have investigated the breaking of the gauge symmetry in the case of the most general Higgs potential invariant under S_3 . They found that by breaking the S_3 symmetry very softly at very high energies it is possible to maintain the consistency and predictions of the present S_3 -invariant extension of the Standard Model while simultaneously satisfying the experimental constraints for FCNC processes, that is, it is possible that all physical Higgs bosons, except one neutral one, could become sufficiently heavy ($M_H \sim 10$ TeV) to suppress all the flavour-changing neutral current processes in the quark sector of the theory without having a problem with triviality.

6. Muon anomalous magnetic moment

In models with more than one Higgs $SU(2)$ doublet, the exchange of flavour-changing scalars may contribute to the anomalous magnetic moment of the muon. In the minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model we are considering here, we have three Higgs $SU(2)$ doublets, one in the singlet and the other two in the doublet representations of the S_3 flavour group. The Z_2 symmetry decouples the charged leptons from the Higgs boson in the S_3 singlet representation. Therefore, in the theory there are two neutral scalars and two neutral pseudoscalars whose exchange will contribute to the anomalous magnetic moment of the muon, in the leading order of magnitude. Since the heavier generations have larger

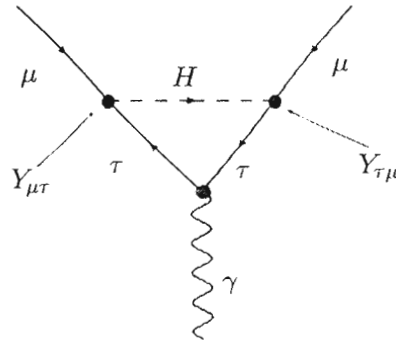


Figure 1. The contribution, $\delta a_\mu^{(H)}$, to the anomalous magnetic moment of the muon from the exchange of flavour-changing scalars. The neutral Higgs boson can be a scalar or a pseudoscalar. (This figure is in colour only in the electronic version)

flavour-changing couplings, the largest contribution comes from the heaviest charged leptons coupled to the lightest of the neutral Higgs bosons, $\mu - \tau - H$, as shown in figure 1.

A straightforward computation gives

$$\delta a_\mu^{(H)} = \frac{Y_{\mu\tau} Y_{\tau\mu}}{16\pi^2} \frac{m_\mu m_\tau}{M_H^2} \left(\log \left(\frac{M_H^2}{m_\tau^2} \right) - \frac{3}{2} \right). \quad (60)$$

With the help of (50) and (51) we may write $\delta a_\mu^{(H)}$ as

$$\delta a_\mu^{(H)} = \frac{m_\tau^2}{(246 \text{ GeV})^2} \frac{(2 + \tan^2 \beta)}{32\pi^2} \frac{m_\mu^2}{M_H^2} \left(\log \left(\frac{M_H^2}{m_\tau^2} \right) - \frac{3}{2} \right), \quad (61)$$

in this expression $\tan \beta = v_s/v_1$ is the ratio of the vacuum expectation values of the Higgs scalars in the singlet representation, v_s , and in the doublet representation, v_1 , of the S_3 flavour group. The most restrictive upper bound on $\tan \beta$ may be obtained from the experimental upper bound on $\text{Br}(\mu \rightarrow 3e)$ given in (58), and in table 2 we obtain

$$\tan \beta \leq 14. \quad (62)$$

Substitution of this value into (61) and taking for the Higgs mass the value $M_H = 120 \text{ GeV}$ gives an estimate of the largest possible contribution of the FCNC to the anomaly of the muon's magnetic moment:

$$\delta a_\mu^{(H)} \approx 1.7 \times 10^{-10}. \quad (63)$$

This number has to be compared with the difference between the experimental value and the Standard Model prediction for the anomaly of the muon's magnetic moment [62],

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{SM}} = (28.7 \pm 9.1) \times 10^{-10}, \quad (64)$$

which means

$$\frac{\delta a_\mu^{(H)}}{\Delta a_\mu} \approx 0.06. \quad (65)$$

Hence, the contribution of the flavour-changing neutral currents to the anomaly of the muon's magnetic moment is smaller than or of the order of 6% of the discrepancy between the experimental value and the Standard Model prediction. This discrepancy is of the order of three standard deviations and quite important, but its interpretation is compromised by uncertainties

in the computation of higher order hadronic effects arising mainly from three-loop vacuum polarization effects, $a_\mu^{\text{VP}}(3, \text{had}) \approx -1.82 \times 10^{-9}$ [63], and from three-loop contributions of hadronic light by light type, $a_\mu^{\text{LBL}}(3, \text{had}) \approx 1.59 \times 10^{-9}$ [63]. As explained above, the contribution to the anomaly from flavour-changing neutral currents in the minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model, computed in this work, is, at most, 6% of the discrepancy between the experimental value and the Standard Model prediction for the anomaly and is of the same order of magnitude as the uncertainties in the higher order hadronic contributions, but still it is not negligible and is certainly compatible with the best, state-of-the-art, experimental measurements and theoretical computations.

7. Conclusions

In the minimal S_3 -invariant extension of the SM the flavour symmetry group $Z_2 \times S_3$ relates the mass spectrum and mixings. This allowed us to compute the neutrino mixing matrix explicitly in terms of the masses of the charged leptons and neutrinos [22]. In this model, the magnitudes of the three mixing angles are determined by the interplay of the flavour $S_3 \times Z_2$ symmetry, the see-saw mechanism and the lepton mass hierarchy. We also found that V_{PMNS} has three CP violating phases, one Dirac phase $\delta = \delta_\nu - \delta_e$ and two Majorana phases, α and β , that are functions of the neutrino masses and another phase ϕ_ν which is independent of the Dirac phase. The numerical values of the reactor, θ_{13} , and the atmospheric, θ_{23} , mixing angles are determined by the masses of the charged leptons only, in very good agreement with the experiment. The solar mixing angle θ_{12} is almost insensitive to the values of the masses of the charged leptons, but its experimental value allowed us to fix the scale and origin of the neutrino mass spectrum, which has an inverted hierarchy, with the values $|m_{\nu_2}| = 0.056$ eV, $|m_{\nu_1}| = 0.055$ eV and $|m_{\nu_3}| = 0.022$ eV. We also obtained explicit expressions for the matrices of the Yukawa couplings of the lepton sector parametrized in terms of the charged lepton masses and the VEVs of the neutral Higgs bosons in the S_3 -doublet representation. These Yukawa matrices are closely related to the fermion mass matrices and have a structure of small and very small entries reflecting the observed charged lepton mass hierarchy. With the help of the Yukawa matrices, we computed the branching ratios of a number of FCNC processes and found that the branching ratios of all FCNC processes considered are strongly suppressed by powers of the small mass ratios m_e/m_τ and m_μ/m_τ and by the ratio $(m_\tau/M_{H_{1,2}})^4$, where $M_{H_{1,2}}$ is the mass of the neutral Higgs bosons in the S_3 -doublet. Taking for $M_{H_{1,2}}$ a very conservative value ($M_{H_{1,2}} \approx 120$ GeV), we found that the numerical values of the branching ratios of the FCNC in the leptonic sector are well below the corresponding experimental upper bounds by many orders of magnitude. It has already been argued that small FCNC processes mediating non-standard quark–neutrino interactions could be important in the theoretical description of the gravitational core collapse and shock generation in the explosion stage of a supernova [64–66]. Finally, the contribution of the flavour-changing neutral currents to the anomalous magnetic moment of the muon is small but non-negligible and it is compatible with the best state-of-the-art measurements and theoretical computations.

Acknowledgments

We thank Professor Jens Erler and Dr Genaro Toledo-Sánchez for helpful discussions about $g - 2$. This work was partially supported by CONACYT México under contract no 51554-F and by DGAPA-UNAM under contract PAPIIT-IN115207-2.

References

- [1] Jung C K, Grew C Mc, Kajita T and Mann T 2001 *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **51** 451
- [2] Mohapatra R N and Smirnov A Y 2006 *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **56** 569 (Preprint hep-ph/0603118)
- [3] Altmann M *et al* (GNO Collaboration) 2005 *Phys. Lett. B* **616** 174
- [4] Smy M B *et al* (SK Collaboration) 2004 *Phys. Rev. D* **69** 011104
- [5] Ahmad Q R *et al* (SNO Collaboration) 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 011301
- [6] Aharmim B *et al* (SNO Collaboration) 2005 *Phys. Rev. C* **72** 055502 (Preprint nucl-ex/0502021)
- [7] Fukuda S *et al* (SK Collaboration) 2002 *Phys. Lett. B* **539** 179
- [8] Ashie Y *et al* 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 101801 (Preprint hep-ex/0404034)
- [9] Bemporad C, Gratta G and Vogel P 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 297
- [10] Araki T *et al* (KamLAND Collaboration) 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 081801
- [11] Maltoni M, Schwetz T, Tórtola M A and Valle J W F 2004 *New J. Phys.* **6** 122
- [12] Schwetz T 2005 Neutrino oscillations: current status and prospects *Acta Phys. Polon. B* **36** 3203 (Preprint hep-ph/0510331)
- [13] Gonzalez-Garcia M C and Maltoni M 2007 Preprint hep-ph/0704.1800
- [14] Apollonio M *et al* (CHOOZ Collaboration) 2003 *Eur. Phys. J. C* **27** 331
- [15] Eitel K 2004 'Neutrino 2004' 21st Int. Conf. on Neutrino Physics and Astrophysics (Paris, France 2004) ed J Dumarchey, Th Patyak and F Vanucci (2005 *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **143** 197)
- [16] Eliot S R and Engel J 2004 *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **30** R183
- [17] Seljak U, Slosar A and McDonald P 2006 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP10(2006)014 (Preprint astro-ph/0604335)
- [18] Elgaroy O and Lahav O 2005 *New J. Phys.* **7** 61
- [19] Lesgourgues J and Pastor S 2006 *Phys. Rep.* **429** 307 (Preprint astro-ph/0603494)
- [20] Kubo J, Mondragón A, Mondragón M and Rodríguez-Jáuregui E 2003 *Prog. Theor. Phys.* **109** 795
- [21] Kubo J, Mondragón A, Mondragón M and Rodríguez-Jáuregui E 2005 *Prog. Theor. Phys.* **114** 287 (erratum)
- [22] Kubo J, Mondragon A, Mondragon M, Rodriguez-Jauregui E, Felix-Beltran O and Peinado E 2005 *J. Phys. Conf. Ser.* **18** 380
- [23] Felix O, Mondragon A, Mondragon M and Peinado E 2006 *Rev. Mex. Fis. S* **52N4** 67 (Preprint hep-ph/0610061)
- [24] Mondragon A, Mondragon M and Peinado E 2007 *Phys. Rev. D* **76** 076003 (Preprint hep-ph/0706.0354)
- [25] Fritsch H 1977 *Phys. Lett. B* **70** 436
- [26] Pakvasa S and Sugawara H 1978 *Phys. Lett.* **73B** 61
- [27] Fritsch H 1978 *Phys. Lett. B* **73** 317
- [28] Harari H, Haut H and Weyers J 1978 *Phys. Lett. B* **78** 459
- [29] Frere J M 1979 *Phys. Lett. B* **80** 369
- [30] Fritsch H 1979 *Nucl. Phys. B* **155** 189
- [31] Yamanaka Y, Pakvasa S and Sugawara H 1982 *Phys. Rev. D* **25** 1895
- [32] Yamanaka Y, Pakvasa S and Sugawara H 1984 *Phys. Rev. D* **29** 2135 (erratum)
- [33] Kaus P and Meshkov S 1990 *Phys. Rev. D* **42** 1863
- [34] Fritsch H and Plankl J P 1990 *Phys. Lett. B* **237** 451
- [35] Harrison P F and Scott W G 1994 *Phys. Lett. B* **333** 471
- [36] Mondragón A and Rodríguez-Jáuregui E 1999 *Phys. Rev. D* **59** 093009
- [37] Mondragón A and Rodríguez-Jáuregui E 2000 *Phys. Rev. D* **61** 113002
- [38] For a review see Fritsch H and Xing Z Z 2000 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **45** 1
- [39] Hall L J and Murayama H 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3985
- [40] Carone C D, Hall L J and Murayama H 1996 *Phys. Rev. D* **53** 6282
- [41] Koide Y 1999 *Phys. Rev. D* **60** 077301
- [42] Ma E 1991 *Phys. Rev. D* **44** 587
- [43] Ma E 2002 *Mod. Phys. Lett. A* **17** 627
- [44] Ma E 2002 *Mod. Phys. Lett. A* **17** 2361
- [45] Babu K S, Ma E and Valle J W F 2003 *Phys. Lett. B* **552** 207
- [46] Chen S-L, Frigerio M and Ma E 2004 *Phys. Rev. D* **70** 073008
- [47] Chen S-L, Frigerio M and Ma E 2004 *Phys. Rev. D* **70** 079905 (erratum)
- [48] Grimus W and Lavoura L 2005 *J. High Energy Phys.* JHEP08(2005)013
- [49] Hagedorn C, Lindner M and Mohapatra R N 2006 *J. High Energy Phys.* JHEP06(2006)042 (Preprint hep-ph/0602244)
- [50] Hagedorn C, Lindner M and Plentinger F 2006 *Phys. Rev. D* **74** 025007 (Preprint hep-ph/0604265)
- [51] Smirnov A Y 2006 *J. Phys. Conf. Ser.* **53** 44

- [48] Altarelli G and Feruglio F 2004 *New J. Phys.* **6** 106
Altarelli G 2006 *Proc. IPM School and Conf. on Lepton and Hadron Physics (IPM-LHP06) (Tehran, Iran, 15–20 May 2006)* p 0001 (*Preprint hep-ph/0610164*)
- [49] Mondragon A 2006 *AIP Conf. Ser.* **857B** 266–82 (*Preprint hep-ph/0609243*)
- [50] Albright C H and Chen M C 2006 *Phys. Rev. D* **74** 113006 (*Preprint hep-ph/0608137*)
- [51] Kubo J, Okada H and Sakamaki F 2004 *Phys. Rev. D* **70** 036007
- [52] Emmanuel-Costa D, Felix-Beltran O, Mondragon M and Rodriguez-Jauregui E 2007 *AIP Conf. Proc.* **917** 390
- [53] Yao W-M *et al* (Particle Data Group) 2006 *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **33** 1
- [54] Kubo J 2004 *Phys. Lett. B* **578** 156
Kubo J 2005 *Phys. Lett.* **619** 387 (erratum)
- [55] Fogli G L, Lisi E, Marrone A and Palazzo A 2006 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **57** 742–95 (*Preprint hep-ph/0506083*)
- [56] Sher M and Yuan Y 1991 *Phys. Rev. D* **44** 1461
- [57] Aubert B *et al* (BABAR Collaboration) 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 121801
- [58] Aubert B *et al* (BABAR Collaboration) 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 041802
- [59] Aubert B *et al* (BABAR Collaboration) 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 041801
- [60] Bellgardt U *et al* (SINDRUM Collaboration) 1998 *Nucl. Phys. B* **299** 1
- [61] Brooks M L *et al* (MEGA Collaboration) 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 1521 (*Preprint hep-ex/9905013*)
- [62] Jegerlehner F 2007 *Acta Phys. Polon. B* **38** 3021 (*Preprint hep-ph/0703125*)
- [63] Erler J and Sanchez G T 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 161801 (*Preprint hep-ph/0605052*)
- [64] Raffelt G G 2006 Supernova neutrino observations: what can we learn? *Proc. 22nd Int. Conf. Neutrino Physics and Astrophysics (Neutrino 2006) (Santa Fe, New Mexico, 13–19 June 2006)* (*Preprint astro-ph/0701677*)
- [65] Amanik P S, Fuller G M and Grinstein B 2005 *Astropart. Phys.* **24** 160 (*Preprint hep-ph/0407130*)
- [66] Esteban-Pretel A, Tomas R and Valle J W F 2007 Probing non-standard neutrino interactions with supernova neutrinos *Preprint arXiv:0704.0032*

Nearly tri-bimaximal mixing in the S_3 flavour symmetry

A. Mondragón^{*}, M. Mondragón^{*} and E. Peinado^{*}

^{*}*Departamento de Física Teórica,
Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México,
Apdo. Postal 20-364, 01000 México D.F., México.*

Abstract. We present an analysis of the theoretical neutrino mixing matrix, V_{PMNS}^{th} , previously derived in the framework of the minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model. All entries in the neutrino mixing matrix, V_{PMNS}^{th} , the mixing angles and the Majorana phases are given as exact, explicit analytical functions of the mass ratios of the charged leptons and neutrinos, and one Dirac phase, in excellent agreement with the latest experimental data. Here, it will be shown that all entries in V_{PMNS}^{th} are numerically very close to the tri-bimaximal form of the neutrino mixing matrix, so that V_{PMNS}^{th} may be written as $V^{tri} + \Delta V_{PMNS}^{tri}$. The small correction ΔV_{PMNS}^{tri} is expressed as a sum of two terms: first, a small correction term proportional to m_e/m_μ depending only on the charged lepton mass ratios and, second, a Cabibbo-like, small term, $\delta\epsilon_{12}$, which is a function of both the charged lepton and the neutrino mass ratios.

INTRODUCTION

In the Standard Model (SM) the neutrinos are chiral and therefore massless, but in the past nine years the experiments and observations related to the neutrino physics showed us that neutrinos oscillate between states of well defined flavours. In this way it was established beyond reasonable doubt that neutrinos have non-vanishing masses [1].

The masses of the neutrinos are at least five orders of magnitude smaller than the electron mass, which is the lightest particle of all the fermions other than the neutrinos. The small magnitude of neutrino masses is naturally explained by assuming that the physical neutrinos are Majorana fermions which acquire their masses via the see-saw mechanism [1, 2].

The Standard Model explains almost all the experimental data at laboratory energies but it cannot give mass to the neutrinos and, even without the neutrino masses, it already has a large number of free parameters. In order to accommodate the massive neutrinos and at the same time reduce the number of free parameters in the theory, we formulated a minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model [3]. The flavour symmetry group of the extended theory is the group S_3 of permutations of three objects, assumed to be unbroken at the Fermi scale.

The symmetry group S_3 is the smallest non-Abelian group and it has only doublet and singlet irreducible representations. In order to have the theory invariant under S_3 , we had to extend the concept of flavour and family to the Higgs sector, that is, in the extended form of the theory we have three Higgs $SU(2)_L$ doublets that belong to one singlet and the two components of the one doublet of S_3 .

In this way, all the matter fields in the minimal S_3 -invariant extension of the Standard Model, that is, quarks, leptons and Higgs fields, are in a reducible representation $\mathbf{1}_s \oplus \mathbf{2}$ of S_3 . We constructed the most general Yukawa Lagrangian and the Higgs potential invariant under this symmetry and obtained a generic form for the mass matrices of the Dirac fermions [3].

A further reduction of the number of parameters in the leptonic sector may be achieved by means of an Abelian Z_2 symmetry. A set of charge assignments of Z_2 , compatible with the experimental data on masses and mixings in the leptonic sector is given in [3]. This allowed us to reparametrize the mass matrices of the charged leptons and neutrinos, previously derived in [3], in terms of their eigenvalues and only one free parameter, the Dirac phase δ . Then, we computed the neutrino mixing matrix, V_{PMNS} , and the neutrino mixing angles and Majorana phases as functions of the masses of charged leptons and neutrinos and only two undetermined phases. The numerical values of the reactor, θ_{13} , and atmospheric, θ_{23} , mixing angles are determined only by the masses of the charged leptons in very good agreement with experiment. The solar mixing angle, θ_{12} , is almost insensitive to the values of the masses of the charged leptons, but its experimental value allowed us to fix the scale and origin of the neutrino mass spectrum [4].

More recently, we found exact, analytical expressions for the matrices of the Yukawa couplings in the leptonic sector expressed as functions of the masses of charged leptons and the vacuum expectation values of the Higgs bosons. With the help of the Yukawa matrices we computed the branching ratios of some selected FCNC processes [5], and more recently, the contribution of the exchange of neutral flavour changing scalars to the anomaly of the muon's magnetic moment [6]. We found that the interplay of the $S_3 \times Z_2$ flavour symmetry and the strong mass hierarchy of charged leptons strongly suppress the FCNC processes in the leptonic sector, well below the experimental upper bounds by many orders of magnitude. The contribution of the FCNC to the anomaly, a_μ , is at most 6% of the discrepancy between the experimental value and the Standard Model prediction for a_μ , which is a small but non-negligible contribution [6].

In this short communication, we will show that all entries in V_{PMNS}^{lh} derived in [4] are numerically very close to the tri-bimaximal form of the neutrino mixing matrix, so that, V_{PMNS}^{lh} may be written as $V^{tri} + \Delta V_{PMNS}^{tri}$. The small correction ΔV_{PMNS}^{tri} is expressed as a sum of two terms: first, a small correction term proportional to m_e/m_μ depending only on the charged lepton mass ratios and, second, a Cabibbo-like, small term, δt_{12} , which is a function of both the charged lepton and the neutrino mass ratios.

NEUTRINO MASSES AND MIXINGS

The neutrino mixing matrix V_{PMNS} is the product $U_{eL}^\dagger U_\nu K$, where K is the diagonal matrix of the Majorana phase factors, defined by

$$diag(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3}) = K^\dagger diag(|m_{\nu_1}|, |m_{\nu_2}|, |m_{\nu_3}|) K^\dagger. \quad (1)$$

Except for an overall phase factor, $e^{i\phi}$, which can be ignored, K is

$$K = diag(1, e^{i\alpha}, e^{i\beta}). \quad (2)$$

The unitary matrix which diagonalizes the charged lepton mass matrix is of the form $U_{eL} = \Phi_e O_{eL}$, where Φ_e is the diagonal phase matrix, $\Phi_e = \text{diag}(1, 1, e^{i\delta_e})$, and O_{eL} is the orthogonal matrix

$$O_{eL} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1+2\tilde{m}_\mu^2+4x^2+\tilde{m}_\mu^4+2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1+4x^2-\tilde{m}_\mu^4-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4)}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}(1+\tilde{m}_\mu^2+x^2-2\tilde{m}_e^2)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4-\tilde{m}_\mu^6+\tilde{m}_e^2+12x^4}} & -x \frac{(1+x^2-\tilde{m}_\mu^2-2\tilde{m}_e^2)\sqrt{1+2x^2-\tilde{m}_\mu^2-\tilde{m}_e^2}}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4-4\tilde{m}_\mu^6-5\tilde{m}_e^2}} & \frac{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_e^2}\tilde{m}_\mu}{\sqrt{1+x^2-\tilde{m}_\mu^2}} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

The Majorana neutrino mass matrix is obtained via the see-saw mechanism $M_\nu = M_{\nu D} \tilde{M}_R^{-1} (M_{\nu D})^T$, this matrix is diagonalized by a unitary matrix

$$U_\nu^T M_\nu U_\nu = \text{diag}(|m_{\nu_1}| e^{i\phi_1}, |m_{\nu_2}| e^{i\phi_2}, |m_{\nu_3}| e^{i\phi_3}), \quad (4)$$

where

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

and

$$\sin^2 \eta = \frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}, \quad \cos^2 \eta = \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_1}}. \quad (6)$$

The resulting theoretical mixing matrix, $V_{PMNS}^{th} = U_{eL}^\dagger U_\nu K$, is given by

$$V_{PMNS}^{th} = \begin{pmatrix} O_{11} \cos \eta + O_{31} \sin \eta e^{i\delta} & O_{11} \sin \eta - O_{31} \cos \eta e^{i\delta} & -O_{21} \\ -O_{12} \cos \eta + O_{32} \sin \eta e^{i\delta} & -O_{12} \sin \eta - O_{32} \cos \eta e^{i\delta} & O_{22} \\ O_{13} \cos \eta - O_{33} \sin \eta e^{i\delta} & O_{13} \sin \eta + O_{33} \cos \eta e^{i\delta} & O_{23} \end{pmatrix} \times K. \quad (7)$$

To find the relation of our results with the neutrino mixing angles, we make use of the equality of the absolute values of the elements of V_{PMNS}^{th} and V_{PMNS}^{PDG} [8], that is

$$|V_{PMNS}^{th}| = |V_{PMNS}^{PDG}|. \quad (8)$$

This relation allowed us to derive expressions for the mixing angles in terms of the charged lepton and neutrino masses [4, 5].

The magnitudes of the reactor and atmospheric mixing angles, θ_{13} and θ_{23} , are determined by the masses of the charged leptons only. Keeping only terms of order (m_e^2/m_μ^2) and $(m_\mu/m_\tau)^4$, we get

$$\sin \theta_{13} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} x \frac{(1+4x^2-\tilde{m}_\mu^4)}{\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4}} \quad \text{and} \quad \sin \theta_{23} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+\frac{1}{4}x^2-2\tilde{m}_\mu^2+\tilde{m}_\mu^4}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2+6\tilde{m}_\mu^4}}. \quad (9)$$

The magnitude of the solar angle depends on the charged lepton and neutrino masses, as well as the Dirac and Majorana phases

$$|\tan \theta_{12}|^2 = \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}} \left(\frac{1 - 2 \frac{O_{11}}{O_{31}} \cos \delta \sqrt{\frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}} + \left(\frac{O_{11}}{O_{31}}\right)^2 \frac{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}}{1 + 2 \frac{O_{11}}{O_{31}} \cos \delta \sqrt{\frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}} + \left(\frac{O_{11}}{O_{31}}\right)^2 \frac{m_{\nu_2} - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_{\nu_1}}} \right). \quad (10)$$

From this expression, we found m_{ν_3} as function of the solar angle, the squared neutrino mass differences and ϕ_ν , and, thus, fixed the origin and scale of the neutrino masses.

We are interested in the relation between our mixing matrix in Eq. (7) and the tri-bimaximal pattern [7]. In order to obtain this relation, it would be convenient to write $\tan \theta_{12}$ as

$$\tan \theta_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta t_{12}, \quad (11)$$

where δt_{12} is a small quantity of the order of 6% of the tri-bimaximal value.

DEVIATION OF THE MIXING MATRIX \mathbf{V}_{PMNS}^{th} FROM THE TRI-BIMAXIMAL FORM

The previous results on neutrino masses and mixings weakly depend on the Dirac phase δ , for simplicity we will assume in this work that $\delta = \pi/2$. From the expression (7), and the Eq. (11), we may write the mixing matrix as follows,

$$\mathbf{V}_{PMNS}^{th} = \mathbf{V}_{PMNS}^{tri} + \Delta \mathbf{V}_{PMNS}^{tri}, \quad (12)$$

where the tri-bimaximal form \mathbf{V}_{PMNS}^{tri} [7] is

$$\mathbf{V}_{PMNS}^{tri} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

and

$$\Delta \mathbf{V}_{PMNS}^{tri} = \Delta \mathbf{V}_e + \delta t_{12} \frac{(\sqrt{2} + \delta t_{12})}{g(\delta t_{12})} \Delta \mathbf{V}_\nu, \quad (14)$$

where

$$g(\delta t_{12}) = 1 + \frac{2}{3} \delta t_{12} (\sqrt{2} + \delta t_{12}). \quad (15)$$

Comparing the expression (7) for the neutrino mixing matrix, with the tri-bimaximal form (13) we get,

$$\Delta \mathbf{V}_e \approx \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \frac{s_{13}^2}{1+c_{13}} & -\frac{1}{3} \frac{s_{13}^2}{1+c_{13}} & s_{13} \\ \frac{5}{2\sqrt{6}} \frac{x^2}{1+\sqrt{1+\frac{5}{2}x^2}} & \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-4\tilde{m}_\mu^2+x^2}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} & \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

where $x = m_e/m_\mu$, $\tilde{m}_\mu = m_\mu/m_\tau$ and $s_{13} \approx 1/\sqrt{2}x(1+4x^2-\tilde{m}_\mu^4)/\sqrt{1+\tilde{m}_\mu^2+5x^2-\tilde{m}_\mu^4}$.

Notice that all entries in Eq. (16) are proportional to x^2 except for the $(\Delta \mathbf{V}_e)_{13}$ which is proportional to x . Therefore, in the limit of vanishing electron mass, $\Delta \mathbf{V}_e \rightarrow 0$.

The matrix $\Delta \mathbf{V}_\nu$ can be written as

$$\Delta \mathbf{V}_\nu = \begin{pmatrix} -\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{1-\frac{s_{13}^2}{1+c_{13}}}{1+\sqrt{1-\frac{2}{3}\frac{\delta t_{12}(\sqrt{2}+\delta t_{12})}{s(\delta t_{12})}}} & \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2} \frac{1-\frac{s_{13}^2}{1+c_{13}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{3}\frac{\delta t_{12}(\sqrt{2}+\delta t_{12})}{s(\delta t_{12})}}} & 0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1+\frac{5}{2}x^2} \left(1+\sqrt{1+\frac{1}{3}\frac{\delta t_{12}(\sqrt{2}+\delta t_{12})}{s(\delta t_{12})}} \frac{1-2x^2}{1+\frac{5}{2}x^2}\right)} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2} \left(1+\sqrt{1-\frac{2}{3}\frac{\delta t_{12}(\sqrt{2}+\delta t_{12})}{s(\delta t_{12})}} \frac{1-2x^2}{1+\frac{1}{4}x^2}\right)} & 0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{1+\frac{1}{4}x^2}{\sqrt{1+x^2} \left(1+\sqrt{1+\frac{4}{3}\frac{\delta t_{12}(\sqrt{2}+\delta t_{12})}{s(\delta t_{12})}} \frac{1+\frac{1}{4}x^2}{1+x^2}\right)} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1+x^2}{\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2} \left(1+\sqrt{1+\frac{2}{3}\frac{\delta t_{12}(\sqrt{2}+\delta t_{12})}{s(\delta t_{12})}} \frac{1+x^2}{1+\frac{1}{4}x^2}\right)} & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

notice that all the entries in the third column of $\Delta \mathbf{V}_\nu$ vanish.

From Eq. (14) and Eq. (16) we can see that in the limit of $m_e = 0$ and $\delta t_{12} = 0$ the deviation from the tri-bimaximal pattern is exactly zero, that is

$$\Delta \mathbf{V}_{PMNS}^{tri} = 0. \quad (18)$$

The value for δt_{12} fixes the scale and the origin of the neutrino masses. If we take for δt_{12} the experimental central value $\delta t_{12} \approx -0.04$, we obtain [5]

$$\begin{aligned} |m_{\nu_2}| &\approx 0.056 eV \\ |m_{\nu_1}| &\approx 0.055 eV. \end{aligned}$$

and

$$|m_{\nu_3}| \approx 0.022 eV.$$

When we take for δt_{12} the tri-bimaximal value $\delta t_{12} = 0$, the neutrino masses are

$$m_{\nu_1} = 0.0521 eV \quad m_{\nu_2} = 0.0528 eV \quad \text{and} \quad m_{\nu_3} = 0.0178 eV \quad (19)$$

In both cases the S_3 invariant extension of the SM predicts an inverted hierarchy. Since the tri-bimaximal value of δt_{12} differs from the experimental central value by less than 6% of $\tan \theta_{12}$, the difference in the corresponding numerical values of the neutrino masses are not significant within the present experimental uncertainties.

CONCLUSIONS

In the minimal S_3 -invariant extension of the SM, the flavour symmetry group $S_3 \times Z_2$ relates the mass spectrum and mixings, and reduces the number of free parameters in the leptonic sector of the theory. This allowed us to predict two mixing angles, θ_{13} and θ_{23} , as function of the charged lepton masses only, in excellent agreement with the experimental values, while the other neutrino mixing angle, θ_{12} , depends also on the neutrino mass spectrum. The tangent of the solar angle, $\tan \theta_{12}$, fixes the scale and origin of the neutrino masses which has an inverted hierarchy. In this model, we found that the deviation of the theoretical neutrino mixing matrix, V_{PMNS}^{sh} , from the tri-bimaximal pattern is very small. In this form of the theory, the flavour violating processes are strongly suppressed by the flavour symmetry $S_3 \times Z_2$ and the strong mass hierarchy of the charged leptons. Processes that proceed through the exchange of flavour changing neutral currents give information on the vacuum expectation values for the scalar Higgs bosons. The contribution of FCNC to the magnetic moment anomaly of the muon is at most 6% of the discrepancy between the experimental value and the Standard Model prediction, this contribution is small but non-negligible [6].

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was partially supported by CONACYT México under contract No 51554-F and by DGAPA-UNAM under contract PAPIIT-IN115207-2.

REFERENCES

1. See for instance C. Giunti, "Neutrino Physics" in these proceedings.
2. P. Langacker, J. Erler and E. Peinado, "Neutrino physics," *J. Phys. Conf. Ser.* **18** (2005) 154; [arXiv:hep-ph/0506257].
3. J. Kubo, A. Mondragon, M. Mondragon and E. Rodriguez-Jauregui, *Prog. Theor. Phys.* **109** (2003) 795 [Erratum-ibid. **114** (2005) 287] [arXiv:hep-ph/0302196].
4. O. Felix, A. Mondragon, M. Mondragon and E. Peinado, "Neutrino masses and mixings in a minimal $S(3)$ -invariant extension of the standard model," *AIP Conf. Proc.* **917** (2007) 383 [*Rev. Mex. Fis. S52N4* (2006) 67]; [arXiv:hep-ph/0610061].
5. A. Mondragon, M. Mondragon and E. Peinado, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 076003 [arXiv:0706.0354 [hep-ph]].
6. A. Mondragon, M. Mondragon and E. Peinado, "S₃-flavour symmetry as realized in lepton flavour violating processes," arXiv:0712.1799 [hep-ph].
7. P. F. Harrison, D. H. Perkins and W. G. Scott, *Phys. Lett. B* **530** (2002) 167 arXiv:hep-ph/0202074.
8. W-M Yao *et al.* [Particle Data Group] *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **33** (2006) 1.