



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

REGIONES FUNDAMENTALES LOCALMENTE  
FINITAS PARA GRUPOS FUCHSIANOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ALVARO ENRIQUE HERNÁNDEZ CASTRO



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE

2008



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

Formato	Ejemplo
<p>1. Datos del alumno                      Apellido paterno                      Apellido materno                      Nombre(s)                      Teléfono                      Universidad Nacional Autonoma de Mexico                      Facultad de Ciencias                      Carrera                      Número de cuenta</p>	<p>1. Datos del alumno                      Hernández                      Castro                      Alvaro Enrique                      56 79 28 08                      Universidad Nacional Autonoma de Mexico                      Facultad de Ciencias                      Matemáticas                      300123780</p>
<p>2. Datos del tutor                      Grado                      Nombre(s)                      Apellido paterno                      Apellido materno</p>	<p>2. Datos del tutor                      Dr.                      Antonio                      Lascurain                      Orive</p>
<p>3. Datos del sinodal 1                      Grado                      Nombre(s)                      Apellido paterno                      Apellido materno</p>	<p>3. Datos del sinodal 1                      Dr                      Mario                      Eudave                      Muñoz</p>
<p>4. Datos del sinodal 2                      Grado                      Nombre(s)                      Apellido paterno                      Apellido materno</p>	<p>4. Datos del sinodal 2                      M.en C.                      Francisco de Jesús                      Struck                      Chávez</p>
<p>5. Datos del sinodal 3                      Grado                      Nombre(s)                      Apellido paterno                      Apellido materno</p>	<p>5. Datos del sinodal 3                      Dr.                      Javier                      Páez                      Cárdenas</p>
<p>6. Datos del sinodal 4                      Grado                      Nombre(s)                      Apellido paterno                      Apellido materno</p>	<p>6. Datos del sinodal 4                      Mat.                      Héctor                      Bustos                      Castro</p>
<p>7. Datos del trabajo escrito.                      Título                       Número de páginas                      Año</p>	<p>7. Datos del trabajo escrito                      Regiones fundamentales localmente finitas para                      grupos fuchsianos                      49 p                      2008</p>

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Integral y medida de Lebesgue . . . . .	1
1.2. Geometría hiperbólica . . . . .	8
<b>2. Área de regiones fundamentales</b>	<b>14</b>
<b>3. Regiones fundamentales localmente finitas</b>	<b>24</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>

# Introducción

En las últimas décadas se ha manifestado que la geometría hiperbólica es una rama muy importante en las matemáticas debido en parte a sus relaciones con muchas otras ramas. De manera particular, los trabajos de Thurston y Jørgensen muestran varias aplicaciones fundamentales de los subgrupos discretos de  $PSL(2, \mathbb{C})$  en el estudio topológico de las variedades de dimensión 3.

El conocimiento de regiones fundamentales es muy útil si se quiere estudiar las superficies de Riemann o variedades hiperbólicas definidas por la acción de un grupo fuchsiano o kleiniano en espacios hiperbólicos, ya que es más sencillo estudiar el cociente de un subconjunto simple del plano (o el espacio), como un polígono o un poliedro. En esta tesis se estudia un tipo de regiones fundamentales para grupos fuchsianos llamadas localmente finitas que incluyen las de Dirichlet y Ford. Estas regiones *teselan* de tal manera que sólo un número finito de *mosaicos* cubren cualquier compacto.

En el primer capítulo, además de establecer los conceptos y resultados básicos necesarios de la geometría hiperbólica, se hace una breve introducción de la integral y la medida de Lebesgue y se construye una generalización del conjunto de Vitali en dos dimensiones, Teorema 1.1.4 (esta construcción aparentemente no se encuentra en los textos conocidos). Este estudio es necesario ya que se prueba en el segundo capítulo que el área hiperbólica no depende del conjunto fundamental medible que se tome, Teorema 2.0.1. También se prueba una propiedad multiplicativa de conjuntos fundamentales medibles con respecto a subgrupos de índice finito, Teorema 2.0.2. El segundo capítulo concluye con resultados que muestran como se puede modificar una región fundamental para obtener otra, Propositiones 2.0.3 y 2.0.4.

La parte central de la tesis la constituye el capítulo 3 donde se prueban varias características de las regiones fundamentales localmente finitas. La gran virtud de estas regiones es que en estos casos el espacio cociente del plano hiperbólico bajo la acción del grupo es homeomorfo al respectivo cociente aplicado a la región fundamental localmente finita.

Se exhibe también un ejemplo interesante donde se muestra como modificar una

región fundamental localmente finita en otra que no lo es, y en este ejemplo se hacen evidentes las anomalías geométricas que se tienen para polígonos que no son localmente finitos, por ejemplo se muestra como un número infinito de pentágonos se acumulan en el eje imaginario.

La tesis concluye probando que si  $g$  es un elemento parabólico de  $G$  (fuchsiano),  $K$  es una región horocíclica tal que  $g(K) = K$  y  $R$  es una región fundamental localmente finita, entonces  $\tilde{R}$  interseca un número positivo finito de imágenes de  $K$ , Teorema 3.0.8. En esta prueba se hace uso de la desigualdad de Jørgensen. Como consecuencia se muestra que todas las clases parabólicas están siempre representadas en las regiones fundamentales localmente finitas y que las hiperbólicas en contraste nunca están representadas, Teoremas 3.0.10 y 3.0.12.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Integral y medida de Lebesgue

En la presente tesis se usarán algunas propiedades de la integral de Lebesgue, por tanto se da una breve descripción del tema. Sea  $E \subset \mathbb{R}^2$ , le llamaremos la cubierta cerrada de  $E$  a cualquier familia a lo más numerable de rectángulos cerrados  $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$  que cumplan que  $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ . A dichas cubiertas les podemos asociar una función  $\sigma$  tal que si  $\mathcal{I}$  es una cubierta de  $E$ , entonces  $\sigma(\mathcal{I}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}(I_i)$  donde  $\mathcal{A}(I_i)$  es el área del rectángulo  $I_i$ .

La medida exterior se denota como  $|E|_e$  y está definida como  $|E|_e = \inf \sigma(\mathcal{I})$  tomando el ínfimo sobre todas las cubiertas cerradas de  $E$ . A continuación mostraremos algunas observaciones, la prueba de éstas así como otros resultados en esta sección se pueden consultar en [1].

- i)* Para un rectángulo  $I$ , se tiene  $|I|_e = \mathcal{A}(I)$ .
- ii)* Si  $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  con  $E_k \subset \mathbb{R}^2$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ , entonces  $|E|_e \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_e$
- iii)* Si  $E \subset \mathbb{R}^2$ , entonces dado  $\epsilon > 0$ , existe un conjunto  $G$  abierto tal que  $E \subset G$  y  $|G|_e \leq |E|_e + \epsilon$ .
- iv)* Si  $F \subset E$ , entonces  $|F|_e \leq |E|_e$ .

Diremos que  $E \subset \mathbb{R}^2$  es Lebesgue medible si dado  $\epsilon > 0$ , existe un conjunto  $G$  abierto tal que  $E \subset G$  y  $|G - E|_e \leq \epsilon$ . Si  $E$  es Lebesgue medible, al número  $|E|_e$  se le llamará la medida de Lebesgue del conjunto  $E$  y lo denotaremos simplemente por  $|E|$  y diremos que es medible. Obsérvese que por definición cualquier conjunto

abierto es Lebesgue medible y usando *iii)* se tiene también que los conjuntos de medida exterior cero son Lebesgue medibles. Se puede probar también que la unión numerable de medibles es medible y además si  $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$ , entonces  $|E| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|$ , y por otra parte que un rectángulo es medible y su medida coincide con su área.

**Teorema 1.1.1** *Cualquier conjunto cerrado es medible.*

**Definición 1.1.1** *Sea  $\mathbf{X}$  un conjunto, una colección  $\Sigma$  de subconjuntos de  $\mathbf{X}$ , es llamada  $\sigma$ -álgebra si satisface las siguientes tres condiciones:*

- i)  $\mathbf{X} \in \Sigma$ ,*
- ii)  $\mathbf{X} - E \in \Sigma$  si  $E \in \Sigma$ ,*
- iii)  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Sigma$  si  $E_k \in \Sigma$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ .*

Nótese que haciendo uso de las leyes de De Morgan si  $\mathbf{X} - E_k \in \Sigma$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ , entonces  $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \Sigma$ . El teorema anterior implica de manera casi inmediata el siguiente resultado.

**Teorema 1.1.2** *Los conjuntos medibles forman una  $\sigma$ -álgebra.*

El hecho de ser medible puede ser enunciado en términos de conjuntos cerrados, es decir, un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^2$  es medible si y sólo si dado  $\epsilon > 0$  existe un conjunto cerrado  $F$  que cumpla que  $F \subset E$  y  $|E - F|_e \leq \epsilon$ .

**Teorema 1.1.3** *Si  $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$  es una colección numerable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces*

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right| = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|$$

. *A esta propiedad se le conoce como  $\sigma$ -aditividad.*

Cuando una función  $\Phi$  cumple que, si  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  es una colección numerable de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces

$$\Phi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(A_k)$$

se dice que  $\Phi$  es  $\sigma$ -aditiva.

La medida de Lebesgue es invariante bajo isometrías; debido a que el área de un rectángulo es invariante bajo estas transformaciones. Dados los teoremas anteriores,



es importante hacer notar que no todo subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  es Lebesgue medible, para ello mostramos un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que no lo es. Iniciaremos definiendo una relación en  $\mathbb{R}^2$ , dados  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^2$  diremos que  $\bar{x}_1$  es equivalente a  $\bar{x}_2$  si y sólo si  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  esta relación es claramente de equivalencia. Por el Axioma de Elección podemos tomar exactamente un representante de cada clase en  $[0, 1] \times [0, 1]$  a tal conjunto lo llamaremos  $\mathcal{V}^2$  (en alusión al conjunto unidimensional de Vitali).

**Teorema 1.1.4** *El conjunto  $\mathcal{V}^2$  no es Lebesgue medible.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos primero las siguientes dos afirmaciones.

*i)* Si  $\bar{p}, \bar{q} \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  son distintos, entonces los conjuntos  $\mathcal{V}^2 + \bar{p}$  y  $\mathcal{V}^2 + \bar{q}$  son ajenos.

*ii)*  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \bigcup_{\bar{r} \in \mathbb{Q}'} (\mathcal{V}^2 + \bar{r}) \subset [-1, 2] \times [-1, 2]$  donde

$$\mathbb{Q}' = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Las afirmaciones implican el teorema, esto se sigue ya que si  $\mathcal{V}^2$  fuera medible, se tiene de la monotonía de la medida (*i.e.* si  $E \subset F$  entonces  $|E| \leq |F|$ ) y de *ii)*

$$|[0, 1] \times [0, 1]| \leq \left| \bigcup_{\bar{r} \in \mathbb{Q}'} (\mathcal{V}^2 + \bar{r}) \right| \leq |[-1, 2] \times [-1, 2]|.$$

Ahora usando *i)* y la  $\sigma$ -aditividad de la medida, se deduce que

$$1 \leq \sum_{\bar{r} \in \mathbb{Q}'} |\mathcal{V}^2 + \bar{r}| \leq 9$$

y como la medida es invariante bajo traslaciones, tenemos

$$1 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{V}^2| \leq 9.$$

Estas desigualdades no son consistentes, por una parte implican que la medida de  $\mathcal{V}^2$  no es cero y también si la medida de  $\mathcal{V}^2$  es digamos  $\epsilon$ , es claro que si  $n$  es suficientemente grande  $n\epsilon > 9$ . Falta solamente demostrar las afirmaciones.

Para probar *i)* sean  $\bar{p}$  y  $\bar{q}$  distintos en  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  y  $\bar{x} \in (\mathcal{V}^2 + \bar{p}) \cap (\mathcal{V}^2 + \bar{q})$ , entonces existen  $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathcal{V}^2$  tal que  $\bar{v}_1 + \bar{p} = \bar{x} = \bar{v}_2 + \bar{q}$ , lo que implica que  $\bar{v}_1$  está relacionado con  $\bar{v}_2$  por la construcción de  $\mathcal{V}^2$ . Esto implica que  $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ , y en consecuencia  $\bar{p} = \bar{q}$  lo que contradice la hipótesis.

Para probar *ii)* como  $\mathcal{V}^2 \subset [0, 1] \times [0, 1]$  entonces para toda  $\bar{v} \in \mathcal{V}^2$  y para toda  $\bar{r} \in \mathbb{Q}'$  se tiene que  $\bar{v} + \bar{r} \in [-1, 2] \times [-1, 2]$ , por lo que  $\mathcal{V}^2 + \bar{r} \subset [-1, 2] \times [-1, 2]$ . Además si  $\bar{x} \in [0, 1] \times [0, 1]$  existe  $\bar{v} \in \mathcal{V}^2$  único tal que  $\bar{x}$  está relacionado con  $\bar{v}$  y, entonces  $\bar{r} = \bar{x} - \bar{v} \in \mathbb{Q}'$ ; esto implica que  $\bar{x} = \bar{v} + \bar{r} \in \mathcal{V}^2 + \bar{r}$ , por lo tanto  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \bigcup_{\bar{r} \in \mathbb{Q}'} (\mathcal{V}^2 + \bar{r})$ .  $\square$

**Definición 1.1.2** Sea  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  decimos que  $f$  es Lebesgue medible en  $E$ , o medible, si para cada  $a \in \mathbb{R}$  el conjunto  $\{x \in E \mid f(x) > a\}$  es un conjunto medible en  $\mathbb{R}^2$ .

Nótese que las funciones continuas son medibles. Dada  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , usando las propiedades de  $\sigma$ -álgebra, se tiene que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)*  $f$  es medible.
- ii)*  $\{x \in E \mid f(x) \geq a\}$  es un conjunto medible para toda  $a \in \mathbb{R}$ .
- iii)*  $\{x \in E \mid f(x) < a\}$  es un conjunto medible para toda  $a \in \mathbb{R}$ .
- iv)*  $\{x \in E \mid f(x) \leq a\}$  es un conjunto medible para toda  $a \in \mathbb{R}$ .

Debido a que

$$\{x \in E \mid |f(x)| < a\} = \{x \in E \mid f(x) < a\} \cap \{x \in E \mid f(x) > -a\}$$

se sigue que si  $f$  es medible, entonces  $|f|$  es medible. El siguiente resultado se prueba fácilmente, usando los resultados enunciados anteriormente.

**Teorema 1.1.5** Si  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de funciones medibles, entonces

$$\inf \{f_n\} \quad \text{y} \quad \sup \{f_n\}$$

son medibles. Estos valores pueden pertenecer a los reales extendidos  $\mathbb{R}^*$ .

De igual manera es posible probar que si  $\{f_n(x)\}$  es una sucesión de funciones medibles, entonces

$$\limsup \{f_n\} \quad \text{y} \quad \liminf \{f_n\}$$

son medibles, usando este resultado se puede probar el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.6** El límite puntual de una sucesión de funciones medibles es medible.

**Definición 1.1.3** Sea  $s$  una función real definida en  $\mathbb{R}^2$ . Si el rango de  $s$  es finito, decimos que  $s$  es una función simple.

**Definición 1.1.4** Sea  $E \subset \mathbb{R}^2$  definimos

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

A  $\chi_E$  se le conoce como la función característica de  $E$ .

Es posible ver a toda función simple  $s$  como combinación lineal de funciones características, de la siguiente manera,

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x),$$

donde  $c_i$  son los valores que toma  $s$  y  $E_i$  son los conjuntos donde los toma, i.e.  $E_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid s(x) = c_i\}$ .

**Teorema 1.1.7** Sea  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ , entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

- i)  $f$  puede ser escrita como límite de una sucesión de funciones simples.
- ii) Si  $f(x) \geq 0 \quad \forall x$ , entonces la sucesión descrita en el inciso anterior, puede ser tomada creciente.
- iii) Si  $f$  es medible, entonces las funciones de la sucesión en i) pueden ser elegidas medibles.

Sea  $E \subset \mathbb{R}^2$  medible,  $c_i > 0$  y  $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x)$  medible, se define

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^n c_i |E \cap E_i|$$

**Definición 1.1.5** Sea  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  medible, se define la integral de Lebesgue de  $f$  como ,

$$\int_E f \, d\mu = \sup I_E(s)$$

donde el supremo está tomado sobre todas las funciones simples positivas menores ó iguales que  $f$  y se denota por  $\int_E f \, d\mu$  (este valor pertenece a  $\mathbb{R}^*$ ).

Es fácil probar que  $\int_E s \, d\mu = I_E(s)$  para toda función  $s$  simple no negativa. Dada una función  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a la función  $\max\{f, 0\}$  se le denota como  $f^+$ , y a la función  $-\min\{f, 0\}$  como  $f^-$ .

**Definición 1.1.6** Sea  $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , si las integrales

$$\int_E f^+ \, d\mu \quad \text{y} \quad \int_E f^- \, d\mu$$

son finitas entonces, se dice que  $f$  es Lebesgue integrable en  $E$ , se escribe  $f \in \mathcal{L}$  y el valor está dado por la siguiente igualdad:

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$$

Dado  $E \subset \mathbb{R}^2$  medible, las siguientes afirmaciones son consecuencia inmediata de la definición.

- i)* Si  $f$  es medible y acotada en  $E$ , y si  $|E| < \infty$ , entonces  $f \in \mathcal{L}$  en  $E$ .
- ii)* Si  $a \leq f(x) \leq b \, \forall x \in E$  y  $|E| < \infty$ , entonces  $a|E| \leq \int_E f \, d\mu \leq b|E|$ .
- iii)* Si  $f, g \in \mathcal{L}$  en el conjunto  $E$  y si  $f(x) \leq g(x) \, \forall x \in E$ , entonces

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

- iv)* Si  $f \in \mathcal{L}$  en el conjunto  $E$ , entonces  $cf \in \mathcal{L}$  en  $E \, \forall c$  constante y además

$$c \int_E f \, d\mu = \int_E cf \, d\mu.$$

- v)* Si  $|E| = 0$  y  $f$  medible, entonces

$$\int_E f \, d\mu = 0. \tag{1.1}$$

- vi)* Si  $f \in \mathcal{L}$  en  $E$  y  $A$  es medible, donde  $A \subseteq E$ , entonces  $f \in \mathcal{L}$  en  $A$ .

Las definiciones y resultados sobre medida y la integral de Lebesgue que se describieron anteriormente permiten probar el siguiente teorema, que será utilizado en esta tesis, por lo que incluimos su demostración.

**Teorema 1.1.8** *Sea  $f$  una función medible no negativa y  $E \subset \mathbb{R}^2$  medible, si se define  $\phi(E) = \int_E f d\mu$ , entonces  $\phi$  es  $\sigma$ -aditiva en la  $\sigma$ -álgebra de los medibles de  $\mathbb{R}^2$ .*

DEMOSTRACIÓN. Será suficiente probar que si  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  donde los  $E_k$  son subconjuntos medibles y disjuntos dos a dos, entonces  $\phi(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k)$ , consideremos tres casos.

1. Si  $f$  es una función característica, sobre un conjunto medible  $B$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned} \phi(E) &= \int_E \chi_B d\mu = |B \cap E| \\ &= |B \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)| = |\bigcup_{k=1}^{\infty} (B \cap E_k)| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |B \cap E_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} \chi_B d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k). \end{aligned}$$

2. Si  $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{B_j}$  es una función simple, se tiene

$$\phi(E) = \int_E \left( \sum_{j=1}^n c_j \chi_{B_j} \right) d\mu = \sum_{j=1}^n c_j |B_j \cap E|$$

y procediendo como en 1, se tiene que para toda  $j$

$$c_j |B_j \cap E| = c_j \left( \sum_{k=1}^{\infty} |B_j \cap E_k| \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} c_j \chi_{B_j} d\mu,$$

por lo cual, sumando sobre las  $j$ 's, se tiene que

$$\phi(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k).$$

3. Si  $f$  es una función cualquiera no negativa, se tiene usando 2 que para cada función simple medible  $s$ , tal que  $0 \leq s(x) \leq f(x)$  (para toda  $x$ )

$$\int_E s d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} s d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k)$$

tomando el supremo sobre todas las funciones simples que cumplen la propiedad, se tiene que

$$\phi(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k).$$

Supongamos ahora que  $\phi(E_k) < \infty$  para todo  $k$ , ya que de otro modo el resultado es trivial. Dado  $\epsilon > 0$ , podemos elegir una función simple  $s : E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq s(x) \leq f(x)$  para toda  $x$  y que cumple

$$\int_{E_1} s \, d\mu \geq \int_{E_1} f \, d\mu - \epsilon \quad y \quad \int_{E_2} s \, d\mu \geq \int_{E_2} f \, d\mu - \epsilon$$

por lo tanto, como

$$\phi(E_1 \cup E_2) \geq \int_{E_1 \cup E_2} s \, d\mu = \int_{E_1} s \, d\mu + \int_{E_2} s \, d\mu \geq \phi(E_1) + \phi(E_2) - 2\epsilon$$

se tiene que  $\phi(E_1 \cup E_2) \geq \phi(E_1) + \phi(E_2)$ . Iterando este proceso se deduce que, para toda  $k \in \mathbb{N}$

$$\phi(E) \geq \phi\left(\bigcup_{n=1}^k E_n\right) \geq \sum_{n=1}^k \phi(E_n) \tag{1.2}$$

ya que  $\bigcup_{n=1}^k E_n \subset E$ . Finalmente como se cumple (1.2) para toda  $k$ , se sigue

$$\phi(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \phi(E_k).$$

□

## 1.2. Geometría hiperbólica

Enunciaremos algunos resultados básicos de las transformaciones de Möbius y la geometría hiperbólica bidimensional sin pruebas, éstas se pueden consultar, por ejemplo, en [2] y [3]. Al plano complejo  $\mathbb{C}$  junto con el punto al infinito se le conoce como *plano complejo extendido*  $\widehat{\mathbb{C}}$ , una manera de visualizar este plano es mediante la proyección estereográfica, esta establece una biyección entre la esfera unitaria y  $\widehat{\mathbb{C}}$ , una de las posibles maneras de hacer esta biyección es la siguiente. La recta que une el polo

norte de la esfera con cualquier otro punto en ella  $(x_1, x_2, x_3)$ , interseca el plano en el punto

$$\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3},$$

y la inversa esta dada por

$$z \rightarrow \left( \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Esta biyección permite medir distancias en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , si  $w, z \in \widehat{\mathbb{C}}$  la métrica cordal está dada por

$$d_c(w, z) = \begin{cases} \frac{2|w-z|}{(1+|w|^2)^{1/2}(1+|z|^2)^{1/2}} & \text{si } w, z \neq \infty, \\ \frac{2}{(1+|w|^2)^{1/2}} & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

se llama métrica cordal ya que se mide la cuerda en la esfera, lo que proporciona la fórmula descrita.

**Definición 1.2.1** Una densidad es una función  $\mu : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  continua, donde  $A$  es una región (abierto conexo).

Dada una densidad, en una región  $A$ , podemos definir una métrica en  $A$ . Para esto, si  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  es una curva de clase  $C^1$ , se define la  $\mu$ -longitud de  $\gamma$  como

$$\int_a^b \mu(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

y se denota por  $l_\mu(\gamma)$ . Esta definición se extiende de manera natural a curvas  $C^1$  por tramos. Tomando el ínfimo sobre todas las curvas que unan dos puntos obtenemos la distancia entre dichos puntos. Esta distancia, que depende de la densidad, constituye una métrica.

Recordamos que a las funciones complejas de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $a, b, c$  y  $d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$  se les conoce como transformaciones de Möbius. Éstas están también definidas en la esfera de Riemann ( $\widehat{\mathbb{C}}$ ) de la siguiente manera:

*i)* Si  $c = 0$ , entonces  $T(\infty) = \infty$ ,

ii) Si  $c \neq 0$ , entonces se define  $T(\infty) = a/c$  y  $T(-d/c) = \infty$ .

De hecho estas funciones son continuas con la métrica cordal. Estas transformaciones mandan *círculos* en *círculos*, donde *círculos* significa rectas o círculos. El grupo de transformaciones de Möbius es isomorfo al grupo  $PSL(2, \mathbb{C})$ , que es el cociente de  $SL(2, \mathbb{C})$  (matrices de  $2 \times 2$  con coeficientes en los complejos y determinante uno) sobre su centro  $\pm Id$ . Por esta razón, se identifica al grupo de transformaciones de Möbius como  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

Las transformaciones de Möbius tienen una clasificación por conjugación: si  $g \in PSL(2, \mathbb{C})$  y  $g$  fija exactamente un punto, se le llama parabólica. Si  $g$  fija exactamente dos puntos y  $g$  es conjugada a  $z \mapsto \alpha z$ , se dice que

- a)  $g$  es elíptica, si  $|\alpha| = 1$ ,
- b)  $g$  es hiperbólica, si  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  (la recta real extendida),
- c)  $g$  en otro caso se le llama loxodrómica.

Al semiplano superior  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}[z] > 0\}$  dotado de la métrica que se obtiene a partir de la densidad  $\lambda : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  dada por

$$\lambda(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)},$$

se le conoce como plano hiperbólico y a la métrica, métrica hiperbólica. Las isometrías conformes de  $\mathbb{H}^2$  consisten en el grupo  $PSL(2, \mathbb{R})$  que son las transformaciones en  $PSL(2, \mathbb{C})$  definidas por las matrices en

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ab - bc = 1 \text{ y } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Otro modelo del plano hiperbólico es el de Beltrami-Poincaré, es decir

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

dotado de la métrica que se obtiene de la densidad

$$\sigma(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}.$$

Las isometrías conformes en este espacio son las transformaciones en  $PSL(2, \mathbb{C})$  de la forma

$$\phi(z) = \frac{az + c}{\bar{c}z + \bar{a}},$$



donde  $|a|^2 - |c|^2 = 1$ . A este subgrupo lo denotamos por  $M(\Delta)$ .

Dada la métrica hiperbólica en  $\mathbb{H}^2$  (o  $\Delta$ ) se tiene que las curvas que minimizan la distancia son *círculos* ortogonales al eje real (o al círculo unitario), a estas curvas se les conoce como geodésicas.

Al segmento de geodésica que une a  $z$  y  $w$  puntos en  $\mathbb{H}^2$  (o  $\Delta$ ) se le denota por  $[z, w]$ . Dados dos puntos  $z$  y  $w$  en  $\mathbb{H}^2$  se define el bisector perpendicular como la única geodésica que es ortogonal a  $[z, w]$  y que pasa por el punto medio. El bisector perpendicular resulta ser también el lugar de los puntos que equidistan hiperbólicamente de  $z$  y  $w$ .

Un subgrupo  $G$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  es discreto si no existe una sucesión de elementos distintos de  $G$  que converjan a una matriz en  $SL(2, \mathbb{C})$ . Un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  es discreto si el grupo correspondiente en  $SL(2, \mathbb{C})$  lo es. Un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{C})$  es fuchsiano si es conjugado a un subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , es decir  $G' = hGh^{-1}$  donde  $G$  es discreto y  $h \in PSL(2, \mathbb{C})$ .

**Definición 1.2.2** Dado un subgrupo  $G$  de  $PSL(2, \mathbb{C})$  se dice que un punto  $w \in \widehat{\mathbb{C}}$  es un punto límite de  $G$  si existe otro punto  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  y una sucesión de elementos distintos en  $G$ ,  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que

$$g_n(z) \rightarrow w$$

cuando  $n \rightarrow \infty$  (en este contexto se usa la métrica cordal).

Si  $G$  es un subgrupo, al conjunto de puntos límite se le conoce como el conjunto límite y a su complemento en la esfera de Riemann como conjunto ordinario. Si  $G$  es fuchsiano y  $G < PSL(2, \mathbb{R})$ , el conjunto límite consiste de elementos en la recta real extendida.

Dada una transformación de Möbius  $g$  tal que  $g(\infty) \neq \infty$  se define el círculo isométrico como

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |g'(z)| = 1\}$$

y lo denotamos como  $I_g$ .

Nótese que el círculo isométrico de la transformación  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , está dado por

$$I_g = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \left( \frac{-d}{c} \right) \right| = \frac{1}{c} \right\}.$$

Se tiene además que las transformaciones de Möbius que no fijan  $\infty$  actúan de manera euclidiana en sus respectivos círculos isométricos, es decir, si  $w$  y  $z \in I_g$ , entonces  $|g(w) - g(z)| = |w - z|$ .

Otras propiedades importantes de estos círculos son:

- i)  $g(I_g) = I_{g^{-1}}$ ,
- ii)  $g(\text{Int}(I_g)) = \text{Ext}(I_{g^{-1}})$ ,
- iii)  $g(\text{Ext}(I_g)) = \text{Int}(I_{g^{-1}})$ ,

donde  $\text{Int}(I_g)$  representa la región delimitada por el disco  $I_g$  que esta acotada y el  $\text{Ext}(I_g)$  representa la región delimitada por el disco  $I_g$  que no esta acotada. Dada una región  $A \subset \mathbb{H}^2(\Delta)$ , se denota  $\bar{A}$  su cerradura en  $\hat{\mathbb{C}}$  y se escribe  $\tilde{A}$  su cerradura en  $\mathbb{H}^2(\Delta)$ .

**Definición 1.2.3** Decimos que  $A \subset \mathbb{P}$  es  $h$ -convexo si para cualesquiera dos puntos  $z, w \in A$  el segmento de geodésica que los une está totalmente contenido en  $A$ .

En el siguiente lema convenimos en que las geodésicas hiperbólicas incluyen los puntos al infinito.

**Lema 1.2.1** Sea  $A \subset \mathbb{P}$  un conjunto  $h$ -convexo, entonces  $\bar{A}$  es  $h$ -convexo en el sentido de que dados  $z$  y  $w \in \bar{A}$  el segmento cerrado de geodésica hiperbólica que los contiene es un subconjunto de  $\bar{A}$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $\bar{A}$  no es  $h$ -convexo, existen  $z, w \in \bar{A}$  tal que  $[z, w]$  no está contenido en  $\bar{A}$ ;  $[z, w]$  es la geodésica que une a  $z$  y  $w$ , donde alguno de ellos puede ser un punto al infinito. Sin pérdida de generalidad, conjugando, podemos suponer que  $\bar{A} \subset \overline{\mathbb{H}^2}$ , y que además  $[z, w]$  está contenido en el eje imaginario. Ya que  $[z, w]$  no está contenido en  $\bar{A}$  existe  $z_0 \in [z, w]$  y  $N_{z_0}$  un abierto tal que  $z_0 \in N_{z_0} \subset (\bar{A})^c$  (esto es posible al ser  $(\bar{A})^c$  un abierto en  $\mathbb{C}$ ). Podemos suponer también que  $N_{z_0}$  está delimitada por geodésicas. Ver Figura 1.1.

Nótese que los conjuntos

$$P_\delta = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid -\delta < \text{Re}(z) < \delta\}$$

son  $h$ -convexos. Finalmente, al tomar sucesiones en  $A$ ,  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tales que converjan a  $z$  y  $w$ , respectivamente, se tendría que  $A$  no es  $h$ -convexo. Ya que para una  $n_0$  suficientemente grande,  $[z_n, w_n] \subset A \cap P_\delta$  si  $n > n_0$ , sin embargo  $[z_n, w_n] \cap N_{z_0} \neq \emptyset$ .  $\square$

Finalmente, si  $\rho$  denota la métrica hiperbólica en  $\mathbb{H}^2$  se tiene que

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - w|}{2(\text{Im}(z)\text{Im}(w))^{1/2}}. \quad (1.3)$$

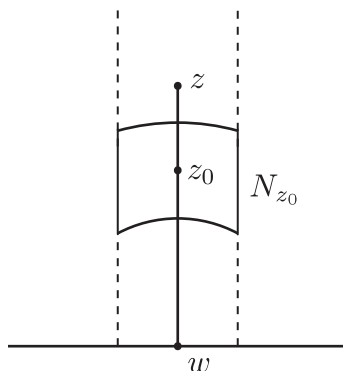


Figura 1.1: Si  $A$  es  $h$ -convexa,  $\overline{A}$  también lo es.

**Definición 1.2.4** Decimos que  $K \subset \mathbb{H}^2$  es una región horocíclica si es el interior de un disco euclidiano tangente a un punto  $x \in \mathbb{R}^*$ , cuando  $x = \infty$ , se trata de conjuntos en  $\mathbb{H}^2$  de la forma

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Im}(z) > k > 0\}.$$

**Definición 1.2.5** Un conjunto  $K \subset \mathbb{H}^2$  es una región hipercíclica si es de la forma

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid |\arg[z] - \pi/2|, \theta\}.$$

## Capítulo 2

# Área de regiones fundamentales

Denotamos por  $\mathbb{P}$  al plano hiperbólico, ya sea el disco de Beltrami-Poincaré ( $\Delta$ ) o el semiplano superior ( $\mathbb{H}^2$ ). En la siguiente discusión trabajaremos sobre un grupo fuchsiano actuando en  $\mathbb{P}$  que denotaremos por  $G$ .

**Definición 2.0.6** *El área hiperbólica de un conjunto medible  $A \subset \mathbb{P}$  está dado por las integrales de Lebesgue,*

$$\int_A \frac{d\mu}{(\operatorname{Im}(z))^2}, \quad \int_A \frac{4 d\mu}{(1 - |z|^2)^2}$$

en  $\mathbb{H}^2$  y en  $\Delta$ , respectivamente y se le denota por  $h\text{-área}(A)$  o  $\mathcal{A}_h(A)$ .

**Definición 2.0.7** *Llamaremos a  $F$  conjunto fundamental de  $G$  si es un subconjunto de  $\mathbb{P}$  que contiene exactamente un punto de cada órbita en  $\mathbb{P}$ .*

Por definición tenemos que dos puntos distintos en  $F$  no son  $G$ -equivalentes y

$$\bigcup_{f \in G} f(F) = \mathbb{P},$$

por el Axioma de elección tenemos garantizada la existencia de este tipo de conjuntos. Una región fundamental es una región tal que al adjuntarle parte de su frontera se obtiene un conjunto fundamental para  $G$ , más precisamente.

**Definición 2.0.8** *Un subconjunto  $R$  de  $\mathbb{P}$  es una región fundamental para un grupo fuchsiano  $G$  si se cumplen las siguientes condiciones:*

- i)  $R$  es abierto conexo,*

ii) existe algún conjunto fundamental  $F$  tal que

$$R \subset F \subset \tilde{R},$$

iii)  $h\text{-área}(\partial R) = 0$ .

Dado un grupo fuchsiano  $G$  no existe una única región fundamental, por ejemplo, dada  $R$  una región fundamental de un grupo fuchsiano  $G$ , se tiene que  $g(R)$ ,  $g \in G$  también lo es.

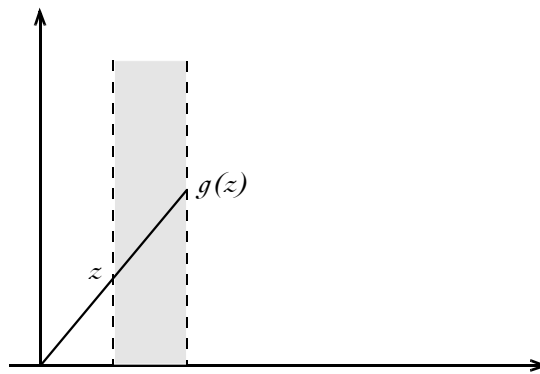


Figura 2.1: Región no fundamental

No es cierto que en la anterior definición se pueda sustituir la condición ii) por la siguiente condición

$$\forall z \in \partial R \quad \exists w \in \partial R \text{ tal que } f(w) = z \quad \text{para alguna } f \in G. \quad (2.1)$$

Esto se puede verificar examinando el siguiente ejemplo. Sea  $G = \langle z \mapsto 2z \rangle$ ,  $G$  es un grupo fuchsiano actuando en  $\mathbb{H}^2$  y el conjunto  $\{x + iy \in \mathbb{H}^2 \mid y > 0, 1 < x < 2\}$  cumple (2.1) sin embargo no es una región fundamental, ya que sólo cubre el primer cuadrante. Ver Figura 2.1

**Proposición 2.0.1** *Si  $A$  es un conjunto medible, entonces  $h\text{-área}(A) = 0$  si y sólo si  $|A| = 0$ , donde  $|A|$  es la medida de Lebesgue de  $A$ .*

DEMOSTRACIÓN. Se demostrará que  $h\text{-área}(A) = 0$  implica  $|A| = 0$ , ya que por (1.1) se tiene la otra implicación. Para esto supondremos que  $0 < |A| < \infty$  y  $h\text{-área}(A) = 0$ . Consideraremos a los siguientes rectángulos

$$I_{i,j} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid i \leq \operatorname{Re}(z) \leq i+1, \quad \frac{1}{j+1} \leq \operatorname{Im}(z) \leq \frac{1}{j} \right\}$$

y

$$E_{l,k} = \{ z \in \mathbb{C} \mid l \leq \operatorname{Re}(z) \leq l+1, \quad k \leq \operatorname{Im}(z) \leq k+1 \},$$

donde  $i, l \in \mathbb{Z}$  y  $j, k \in \mathbb{N}$ .

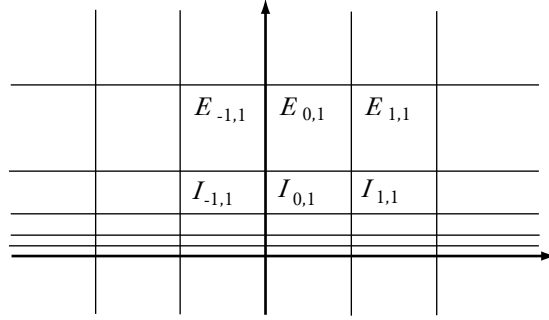


Figura 2.2: Partición de  $\mathbb{P}$

Nótese que

$$\mathbb{H}^2 = \left( \left( \bigcup_{i,j} I_{i,j} \right) \cup \left( \bigcup_{l,k} E_{l,k} \right) \right),$$

y los distintos rectángulos, si se intersectan, la intersección tiene medida cero. Entonces necesariamente existe algún  $I_{i,j}$  o  $E_{l,k}$ , tal que  $|A \cap I_{i,j}| > 0$  o  $|A \cap E_{l,k}| > 0$ . De otra manera por  $\sigma$ -aditividad se tendría que

$$|A| = |A \cap \mathbb{H}^2| = \left| A \cap \left( \left( \bigcup_{i,j} I_{i,j} \right) \cup \left( \bigcup_{l,k} E_{l,k} \right) \right) \right| = 0.$$

Supongamos que  $|A \cap I_{i,j}| > 0$  (el otro caso es análogo) y ahora nos fijamos en la función simple  $\frac{1}{(j+1)^2}$ , tenemos que

$$0 < \int_{A \cap I_{i,j}} \frac{1}{(j+1)^2} d\mu \leq \int_A \frac{1}{(j+1)^2} d\mu \leq h\text{-área}(A),$$

lo cual es una contradicción.  $\square$

Nótese que las propiedades *ii)* y *iii)* de la definición 2.0.8 implican que  $F$  es medible, debido a que

$$F = F \cap \tilde{R} = R \cup (F \cap \partial R) \quad (2.2)$$

y tanto  $R$  como  $F \cap \partial R$  son medibles,  $R$  por ser abierto y  $F \cap \partial R$  por la Proposición 2.0.1. Además se sigue directamente de la identidad (2.2) que

$$h\text{-área}(R) = h\text{-área}(F).$$

**Lema 2.0.2** *El  $h$ -área es invariante bajo isometrías hiperbólicas.*

DEMOSTRACIÓN. Se probará el teorema para el disco de Beltrami-Poincaré ( $\Delta$ ) una demostración para  $\mathbb{H}^2$  se encuentra en [3]. El teorema de cambio de variable para la integral de Lebesgue es válido cf [5]. Probaremos primero el caso de  $A \subset \Delta$  medible tal que su  $h$ -área es finita. Sea  $f \in M(\Delta)$  entonces

$$f(z) = \frac{az + c}{\bar{c}z + \bar{a}}$$

donde  $a, c \in \mathbb{C}$  y  $|a|^2 - |c|^2 = 1$ . Se tiene que la norma al cuadrado de su derivada está dada por

$$|f'(z)|^2 = \frac{1}{|\bar{c}z + \bar{a}|^4}$$

y por Cauchy-Riemann este número es precisamente el determinante del Jacobiano de  $f$  (pensado como función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ ). Ahora calculamos

$$\begin{aligned} (1 - |f(z)|^2)^2 &= \left(1 - \left|\frac{az + c}{\bar{c}z + \bar{a}}\right|^2\right)^2 \\ &= \left(\frac{(\bar{c}z + \bar{a})(c\bar{z} + a) - (az + c)(\bar{a}\bar{z} + \bar{c})}{|\bar{c}z + \bar{a}|^2}\right)^2 = \left(\frac{1 - |z|^2}{|\bar{c}z + \bar{a}|^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Finalmente usando el teorema de cambio de variable se sigue

$$\int_{f(A)} \frac{4}{(1 - |w|^2)^2} d\mu = \int_A \frac{4}{(1 - |f(z)|^2)^2} \frac{1}{|\bar{c}z + \bar{a}|^4} d\mu = \int_A \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} d\mu.$$

Si  $A$  tiene área hiperbólica infinita, se subdivide a  $\Delta$  en anillos

$$D_n = \left\{ z \in \Delta \mid 1 - \frac{1}{n} < |z| \leq 1 - \frac{1}{n+1} \right\}$$

y aplicamos el primer caso a  $A \cap D_n$  (que claramente son de  $h$ -área finita).  $\square$

Se probará mediante el siguiente teorema que el área de una región fundamental  $R$  solamente depende del grupo  $G$  y no de la elección de  $R$ . Es preciso observar que el  $h$ -área cumple cabalmente las hipótesis del Teorema 1.1.8, ya que es continua y positiva definida, y por lo tanto  $\sigma$ -aditiva sobre la  $\sigma$ -álgebra de los medibles.

**Teorema 2.0.1** *Si  $F_1$  y  $F_2$  son conjuntos fundamentales medibles de  $G$ , entonces*

$$\mathcal{A}_h(F_1) = \mathcal{A}_h(F_2).$$

DEMOSTRACIÓN. Usando la  $\sigma$ -aditividad se tiene que

$$\mathcal{A}_h(F_1) = \mathcal{A}_h\left(F_1 \cap \left(\bigcup_{g \in G} g(F_2)\right)\right) = \mathcal{A}_h\left(\bigcup_{g \in G} (F_1 \cap g(F_2))\right) = \sum_{g \in G} \mathcal{A}_h(F_1 \cap g(F_2)).$$

Ahora usando el Lema 2.0.2

$$\mathcal{A}_h(F_1 \cap g(F_2)) = \mathcal{A}_h(g^{-1}(F_1 \cap g(F_2)))$$

, de donde

$$\mathcal{A}_h(F_1) = \sum_{g \in G} \mathcal{A}_h(F_2 \cap g^{-1}F_1) = \mathcal{A}_h(F_2).$$

$\square$

**Teorema 2.0.2** *Sea  $F_0$  un conjunto fundamental medible para un subgrupo normal  $G_0$  de índice  $k$  del grupo  $G$ , entonces*

$$\mathcal{A}_h(F_0) = k\mathcal{A}_h(F),$$

donde  $F$  es un conjunto fundamental para  $G$ .

DEMOSTRACIÓN. Escribiremos a  $G$  como clases laterales derechas de  $G_0$  es decir

$$G = \bigcup_{n=1}^k G_0 g_n.$$

Ahora, llamaremos  $F^*$  a la unión de las imágenes de  $F$  bajo los representantes, *i.e.*

$$F^* = \bigcup_{n=1}^k g_n(F). \quad (2.3)$$



Mostraremos ahora que  $F^*$  contiene al menos un punto de cada órbita. Esto se sigue ya que dado  $w \in \mathbb{P}$ , sabemos que existe  $z \in F$  y  $g \in G$  tal que  $w = g(z)$ , y por (2.3) existen  $h \in G_0$  y  $g_n \in G$  tales que

$$w = g(z) = hg_n(z) = h(z')$$

donde  $z' \in F^*$ .

Se afirma que  $F^*$  contiene exactamente un punto de cada órbita que no consista de puntos fijos de  $G$ . Para probar la afirmación, supongamos que  $z$  y  $f(z)$  pertenecen a  $F^*$ , donde  $f$  es un elemento de  $G_0$  y  $z$  no es un punto fijo para ningún elemento no trivial de  $G$ . Usando (2.3) existen  $m$  y  $n$  tales  $g_n^{-1}(z)$ ,  $g_m^{-1}(f(z)) \in F$ . Sin embargo, como ambos puntos están en la órbita de  $z$  y  $F$  es fundamental para  $G$  se tiene

$$g_n^{-1}(z) = g_m^{-1}(f(z)).$$

Y entonces  $g_n g_m^{-1} f(z) = z$ , por lo cual

$$g_n g_m^{-1} f = Id.$$

En consecuencia, como  $f \in G_0$ , necesariamente  $g_n g_m^{-1} \in G_0$ , lo cual implica de manera directa que  $n = m$ . Esto es  $f$  fija a  $z$ , de esto se concluye que  $f$  es la identidad, lo cual prueba la afirmación.

Si ahora quitamos el conjunto de puntos fijos de  $F^*$  (que es numerable por ser  $G$  discreto), el conjunto que obtenemos en ese proceso, será un conjunto fundamental de  $G_0$  y por el teorema anterior

$$\mathcal{A}_h(F^*) = \mathcal{A}_h(F_0).$$

Finalmente, dada  $g \in G$ ,  $F \cap g(F)$  consiste de puntos fijos (que es un conjunto a lo más numerable y por tanto de medida de Lebesgue cero), ya que si  $z, w \in F$  y  $g(w) = z$  implica que  $z = w$ . Por lo tanto

$$\mathcal{A}_h(F^*) = \mathcal{A}_h\left(\bigcup_{n=1}^k g_n F\right) = \sum_{n=1}^k \mathcal{A}_h(g_n F) = k(\mathcal{A}_h(F)).$$

□

Al tomar el cociente  $\mathbb{P}/G$ , sus elementos son  $G$  órbitas, es decir  $z$  está relacionado con  $w$  si existe  $g \in G$  tal que  $g(z) = w$ , se obtiene una superficie de Riemann (cf. [2] p.118) que es una variedad de dimensión 2 en este caso y el Teorema 2.0.1 dice que

$$\mathcal{A}_h(F) = \mathcal{A}_h(\mathbb{P}/G)$$

lo cual de manera intuitiva es claro.

**Proposición 2.0.2** *Si  $R$  es una región fundamental para un grupo  $G$  y  $w \in R$ , entonces  $R' = R - \{w\}$  es también región fundamental.*

DEMOSTRACIÓN.

- i)*  $R'$  es abierto ya que para toda  $z \in R'$  existe un disco hiperbólico con centro en  $z$  contenido en  $R$  tal que  $w$  no está en él.
- ii)* Sea  $F' = F \cup \{w\}$ , donde  $F$  es un conjunto fundamental para  $R$ .  $F'$  es fundamental debido a que  $w$  no es  $G$ -equivalente a ningún otro punto en  $R$  distinto de él (ya que  $w \in R$ ). Además es claro que

$$R' \subset F' \subset \tilde{R}' = \tilde{R}.$$

$$\text{iii) } \mathcal{A}_h(\partial R') = \mathcal{A}_h(\partial R) = 0. \quad \square$$

Una observación importante sobre las regiones fundamentales es que un punto frontera nunca es  $G$ -equivalente a uno interior, ya que si  $z \in \partial R$  fuera  $G$ -equivalente a  $w \in R$ , tomando vecindades  $N_z$  y  $N_w$  suficientemente pequeñas tal que  $N_w \subset R$  y  $z_1 \in N_z \cap R$ , se tiene que es  $G$ -equivalente a algún  $w_1 \in N_w$ , lo cual es imposible.

A partir de este momento si  $z$  y  $w$  son  $G$ -equivalentes, diremos simplemente que son equivalentes.

**Proposición 2.0.3** *Sea  $R$  una región fundamental para un grupo fuchsiano  $G$  entonces,  $E = (\tilde{R})^\circ$  es una región fundamental simplemente conexa tal que  $R \subset E$ .*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que  $R \subset E$  ya que  $R \subset \tilde{R}$  y al tomar interiores

$$R \subset (\tilde{R})^\circ.$$

Ahora para demostrar que  $E$  es región fundamental mostramos que cumple las condiciones de la Definición 2.0.8.

- i)*  $E$  es evidentemente abierto y consiste de los puntos de  $R$  junto con algunos puntos de  $\partial R$ . Estos últimos se pueden conectar por un segmento de geodésica a algún punto en  $R$ , por lo que  $E$  es conexo por trayectorias y por lo tanto conexo.
- ii)* Existe algún conjunto fundamental  $F$  tal que  $R \subset F \subset \tilde{R}$ , por ser  $R$  región fundamental, y se tiene que para todo punto  $z \in E - R$  necesariamente  $z \in \partial R$ . Además por la observación hecha anteriormente  $z$  no es equivalente a ningún punto en  $R$ , por lo tanto se tiene que

$$E \subset F \subset \tilde{E}.$$

iii)  $h\text{-área}(\partial E)=0$  debido a que  $\partial E \subset \partial R$ .

Falta demostrar que  $E$  es simplemente conexo. Nótese primero que, el exterior de  $R$  (en  $\mathbb{P}$ ) no puede contener componentes acotadas. Si existe  $A$  componente acotada, dado  $z \in A$  existe  $f \in G$  tal que  $z \in f(R)$ . Como  $R$  es conexo, se sigue que  $f(R) \subset A$ . Ahora, por ser  $f$  homeomorfismo el exterior de  $f(R)$  tendría una componente acotada, iterando este proceso habría un punto límite.

Obsérvese que existen 2 tipos de puntos en  $\partial R$ ,  $F_1 = \{z \in \partial R \mid z \in (\tilde{R})^\circ\}$  y  $F_2$  aquellos puntos con la propiedad de que cualquier vecindad alrededor de ellos interseca al exterior de  $R$ . Los puntos en  $F_1$  por definición pertenecen a  $E$  mientras que los de  $F_2$  pertenecen a  $\partial E$ .

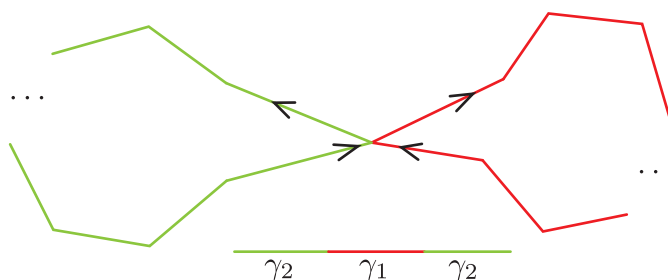


Figura 2.3: Posible intersección de  $\gamma$

Para mostrar que  $E$  es simplemente conexo, sea  $\lambda$  una curva cerrada en  $E$  y  $\gamma$  una poligonal finita que es  $\epsilon$ -cercana a  $\lambda$  ( $\gamma \subset \{z \in E \mid d(z, \lambda) < \epsilon\}$ ) donde  $\epsilon < d(E^c, \lambda)$ , y por ende  $\gamma$  y  $\lambda$  son homotópicas en  $E$ , cf. [4] pp. 99-100. En consecuencia basta probar que  $\gamma$  es nulhomotópica. Si  $\gamma$  es simple cerrada se puede aplicar el Teorema de Schoenflies y es nulhomotópica en  $\mathbb{C}$  y por lo tanto también lo es en  $E$ , ya que el interior de la curva está totalmente contenido en  $E$ . Esta última afirmación se sigue de las dos observaciones anteriores, ya que en el interior de  $\gamma$  no puede haber puntos de la frontera de  $R$  del tipo  $F_2$ .

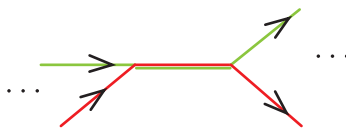


Figura 2.4: Otro caso

Si  $\gamma$  no es simple cerrada y no es nulhomotópica en  $E$ , la poligonal puede tener intersecciones como las descritas en la Figura 2.3 y se pueden tomar dos poligona-

les finitas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Una de ellas no es contraíble, de otra manera  $\gamma$  lo es. Se puede proceder de esta manera hasta obtener un curva cerrada simple, lo cual contradice la existencia de curvas no contraíbles y muestra que  $E$  es simplemente conexo. Otro caso que puede suceder es el descrito en la Figura 2.4 y es claro que se puede aplicar el mismo argumento. Nótese que se puede usar homotopía libre u homotopía basada en un punto, cf. [8] p. 84.  $\square$

La siguiente proposición es útil para modificar regiones fundamentales de un grupo fuchsiano  $G$ .

**Proposición 2.0.4** *Sea  $R$  una región fundamental para el grupo  $G$  y  $R_1, R_2$  conjuntos abiertos ajenos tales que,*

$$(\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2)^\circ = R.$$

*Supóngase también que  $(g(\tilde{R}_1) \cup \tilde{R}_2)^\circ$  es conexo, donde  $g \in G$  y que  $\partial(R_1), \partial(R_2)$  tienen h-área cero, entonces*

$$R' = (g(\tilde{R}_1) \cup \tilde{R}_2)^\circ$$

*es una región fundamental.*

DEMOSTRACIÓN. Probamos que  $R'$  cumple las condiciones de la definición 2.0.8

i)  $R'$  claramente es abierto conexo.

ii) Probamos que para toda  $z \in \mathbb{P}$  existe algún  $w \in \tilde{R}'$  tal que  $w \sim z$ .

Caso 1) Si  $z \sim w_1 \in \partial R$ , entonces  $w_1 \in \partial R_1$  (o  $\partial R_2$ ), en el primer caso  $w_1 \sim w$ , donde  $w \in \partial g(R_1)$  y  $z \sim w \in \tilde{R}'$ ; análogamente si  $w_1 \in \partial R_2$ .

Caso 2) Si  $z \sim w_1 \in R$ , entonces si  $w_1$  pertenece a  $\partial R_1 \cup \partial R_2$  se aplica el caso anterior, de otra manera  $w_1 \in R_1$  (o  $R_2$ ), y  $z \sim g(w_1) \in \tilde{R}'$  (el caso  $w_1 \in R_2$  es claro).

Falta mostrar que dos puntos en  $R'$  no son  $G$ -equivalentes. Supongamos que sí, *i.e.* existen  $w, z$  en  $R'$  y  $h \in G - Id$  tales que

$$w = h(z).$$

No es posible que  $z, w$  pertenezcan a  $g(R_1) \cup R_2$  por ser  $R$  región fundamental. Es importante notar que  $R' = (g(R_1) \cup R_2) \cup A$ , donde  $A \subset \partial g(R_1) \cup \partial R_2$ , ya

que si  $z \in R' \cap \partial R_2$  y  $z \notin g(\tilde{R}_1)$ , entonces  $z$  pertenece al exterior de  $g(R_1)$ , por lo que cualquier vecindad suficientemente pequeña está contenida en el exterior de  $g(R_1)$ , y como además interseca el exterior de  $R_2$  necesariamente  $z \in \partial R'$ , por lo tanto  $z \notin R'$ . Análogamente el caso  $z \in R' \cap \partial g(R_1)$  y  $z \notin \partial R_2$  no sucede. Ver Figura 2.5.

Si  $z, w$  pertenecen a  $A$ , tomamos vecindades  $N_z$  y  $N_w$  tales que  $N_w = h(N_z)$ , tomando  $z_1 \in N_z \cap R_2$  y  $w_1 \in N_w \cap R_2$  tal que  $h(z_1) = w_1$ , se tiene una contradicción.

iii) Esto se sigue, ya que  $\partial R' \subset (\partial g(R_1) \cup \partial R_2)$ .

□

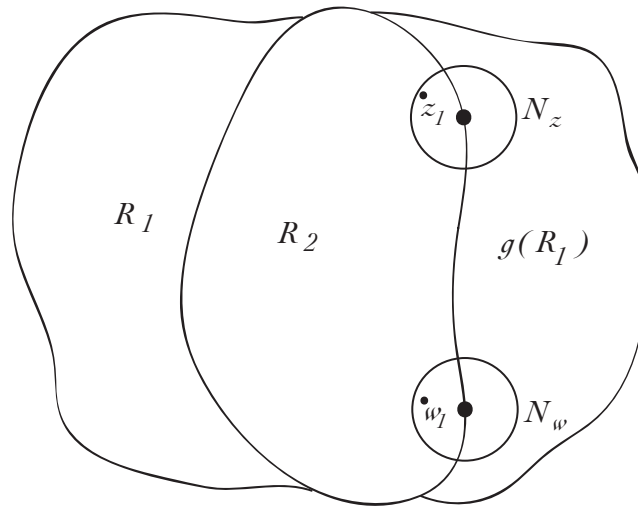


Figura 2.5: Esquema de modificación de región fundamental

# Capítulo 3

## Regiones fundamentales localmente finitas

Sería conveniente que al considerar los cocientes  $\mathbb{P}/G$  y  $\tilde{R}/G$ , donde  $G$  es un grupo actuando en  $\mathbb{P}$  y  $R$  una región fundamental medible para el grupo  $G$ , se preservaran las propiedades topológicas; esto no siempre pasa, como se verá en el siguiente ejemplo. En el ejemplo el grupo no es fuchsiano por lo que se hablara de la cerradura en  $\mathbb{C}$ .

Sea  $G = \langle g \rangle$ , donde  $g(z) = 2z$ , analizamos la acción de  $G$  en  $\mathbb{C} - \{0\}$ ; observemos que  $(\mathbb{C} - \{0\})/G$  es un toro (es el cociente del anillo delimitado por  $|z| = 1$  y  $|z| = 2$ ). Se construye una región fundamental para  $G$  a partir de la siguiente curva. Sea  $B$  la curva definida por  $y = e^{-x}$  en el primer cuadrante y  $|z| = 1$  en los restantes. Nótese que  $R$ , la región delimitada por la curva  $B$  y su imagen bajo  $g$ , es fundamental, ya que todos los puntos son equivalentes a exactamente uno en la región así delimitada. Ver Figura 3.1.

Resulta que el cociente  $\bar{R}/G$  no es compacto. Esto se sigue al tomar la cubierta abierta de  $R$ ,

$$D_n = \{z \in \mathbb{C} - \{0\} \mid |z| < n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

que claramente no tiene una subcubierta finita. Ahora tomando  $E_n \subset \bar{R}/G$  tal que  $p^{-1}(E_n) = D_n$  donde  $p$  es la proyección de  $\bar{R}$  en  $\bar{R}/G$ , se sigue por definición de topología cociente que  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , es una cubierta abierta de  $\bar{R}/G$  que no tiene una subcubierta finita. Por consiguiente  $(\mathbb{C} - \{0\})/G$  no es homeomorfo a  $\bar{R}/G$ .

Posteriormente, mostramos un ejemplo similar de un grupo fuchsiano, donde aparece también esta anomalía.

Para poder dar las condiciones necesarias que eviten esta situación no deseable hacemos primero algunas observaciones. Sea  $G$  un grupo fuchsiano actuando en  $\mathbb{P}$

y  $R$  una región fundamental para  $G$  en  $\mathbb{P}$ , consideramos a los dos espacios cociente que se obtienen mediante  $G$  es decir  $\mathbb{P}/G$  y  $\tilde{R}/G$ . De manera natural se tiene que las respectivas proyecciones

$$p : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}/G, \quad q : \tilde{R} \longrightarrow \tilde{R}/G$$

son continuas y suprayectivas; ahora bien los elementos de  $\mathbb{P}/G$  son las órbitas  $G(z) = \{w \in \mathbb{P} \mid \exists g \in G, g(w) = z\}$  y los elementos de  $\tilde{R}/G$  son conjuntos de la forma  $\tilde{R} \cap G(z)$ . Como  $\tilde{R} \subset \mathbb{P}$  se tiene naturalmente que la función inclusión  $i$  de  $\tilde{R}$  en  $\mathbb{P}$  es continua. Se construye ahora una función  $\gamma : \tilde{R}/G \longrightarrow \mathbb{P}/G$  con la siguiente regla de correspondencia

$$\gamma(\tilde{R} \cap G(z)) = G(z). \tag{3.1}$$

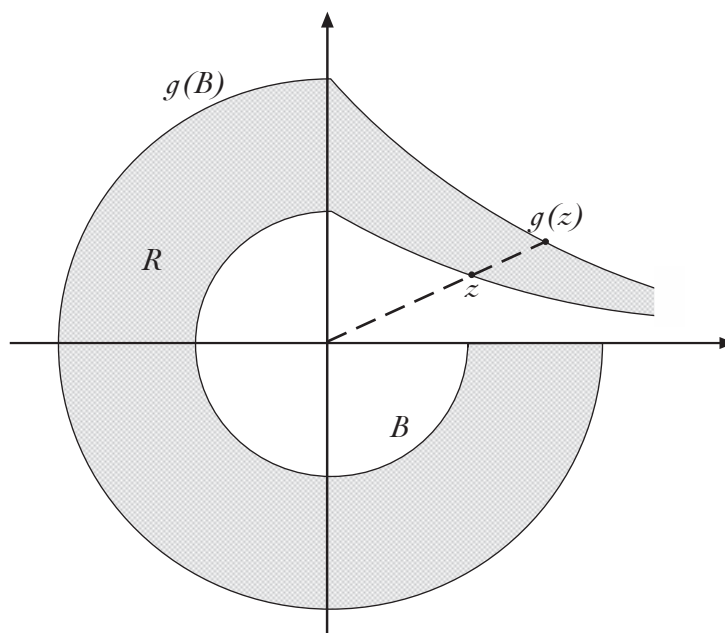


Figura 3.1: Región fundamental

Esta función está bien definida dado que para cada  $z$ ,  $\tilde{R} \cap G(z) \neq \emptyset$  y el siguiente

diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R} & \xrightarrow{i} & \mathbb{P} \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ \tilde{R}/G & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{P}/G \end{array} \quad (3.2)$$

esto es

$$\gamma q = p i. \quad (3.3)$$

El siguiente resultado exhibe la relación entre  $\tilde{R}/G$  y  $\mathbb{P}/G$ .

**Proposición 3.0.5** *La función  $\gamma$  definida en (3.1) es una biyección continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $N$  un abierto en  $\mathbb{P}/G$ , como  $p$  e  $i$  son continuas,  $\tilde{R} \cap p^{-1}(N)$  es un abierto relativo en  $\tilde{R}$ , usando (3.3) este conjunto resulta ser  $q^{-1}(\gamma^{-1}(N))$  y por la definición de topología cociente se sigue que  $\gamma^{-1}(N)$  es abierto en  $\tilde{R}/G$  y por lo tanto  $\gamma$  es continua. La biyectividad es evidente ya que para toda órbita  $G(w)$  existe un único conjunto  $\tilde{R} \cap G(w)$  tal que  $\gamma(\tilde{R} \cap G(w)) = G(w)$ .  $\square$

Ahora damos la condición para que  $\gamma$  sea un homeomorfismo.

**Definición 3.0.9** *Decimos que una región fundamental  $R$  para un grupo fuchsiano  $G$  es localmente finita, si dado un compacto  $K \subset \mathbb{P}$  se tiene que*

$$K \cap g_j(\tilde{R}) \neq \emptyset,$$

*solamente para un número finito de transformaciones  $g_j \in G$ .*

La siguiente proposición nos ayudará para entender mejor la definición.

**Proposición 3.0.6** *Una región fundamental  $R$  para un grupo fuchsiano  $G$  es localmente finita si y sólo si para toda  $z \in \mathbb{P}$  existe una vecindad compacta  $N_z$  y un conjunto finito de elementos del grupo  $G$ ,  $g_1, g_2, \dots, g_m$  tal que,*

- i)  $z \in g_1(\tilde{R}) \cap \dots \cap g_m(\tilde{R})$  y
- ii)  $N_z \subset g_1(\tilde{R}) \cup \dots \cup g_m(\tilde{R})$
- iii)  $h(\tilde{R}) \cap N_z = \emptyset$  si  $h \neq g_1, \dots, g_m$ .



DEMOSTRACIÓN. Se probará primero que si  $R$  es localmente finita, entonces para toda  $z \in \mathbb{P}$  existe una vecindad con las propiedades requeridas. Como  $R$  es localmente finita, si dada una vecindad compacta  $N_z$ , ésta interseca un número finito de imágenes  $g_1(\tilde{R}), \dots, g_m(\tilde{R})$  de  $\tilde{R}$ , si  $N_z$  es suficientemente pequeña podemos suponer que  $z \in g_j(\tilde{R})$  para toda  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Ahora supongamos que  $R$  es una región fundamental y que se cumplen las condiciones *i*), *ii*) y sea  $K$  un compacto en  $\mathbb{P}$ . Para cada  $z \in K$  se puede tomar una vecindad  $N_z$  compacta (que cumple *i*), *ii*)), al tomar los interiores de estas vecindades compactas se tiene una cubierta abierta, que podemos reducir a una finita, a saber las vecindades de los puntos  $z_j$  con  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Finalmente es claro que estas vecindades intersecan un número finito de imágenes de  $\tilde{R}$ .  $\square$

**Teorema 3.0.3** *Una región fundamental es localmente finita si y sólo si la función  $\gamma$  descrita en (3.1) es un homeomorfismo de  $\tilde{R}/G$  en  $\mathbb{P}/G$ .*

DEMOSTRACIÓN. Las letras  $q, p, i$  y  $\gamma$  denotarán las funciones descritas en el Diagrama (3.2). Probamos primero que si  $\gamma$  es homeomorfismo, entonces  $R$  es localmente finita. Para esto mostramos que si  $R$  no es localmente finita, entonces  $\gamma$  no es homeomorfismo. Se afirma que si  $R$  no es localmente finita existen  $w \in \mathbb{P}$ ,  $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in R$  y  $\{g_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in G$  distintas, tales que

$$g_j(z_j) \longrightarrow w,$$

cuando  $j$  tiende a infinito. La afirmación se sigue en virtud de la Proposición 3.0.6, ya que si  $R$  no es localmente finita, existe  $w \in \mathbb{P}$  tal que  $w = g_j(z'_j)$ , donde  $z'_j \in \tilde{R}$  y las  $g_j$  son distintas. Sean  $z_j \in R$  tales que  $\rho(z_j, z'_j) < 1/j$ , por ser las  $g_j$  isometrías hiperbólicas se tiene que  $\rho(z_j, z'_j) = \rho(g_j(z_j), g_j(z'_j))$ , y por lo tanto se tiene que  $g_j(z_j) \longrightarrow w$ . Al conjunto  $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  lo llamamos  $B$ . Como  $B \subset R$ , cualquier vecindad de  $w$  interseca una infinidad de imágenes distintas  $g_n(R)$ , por lo cual  $w \notin h(R)$  para ninguna  $h \in G$ . En consecuencia, ya que  $B \subset R$

$$p(w) \notin p(B).$$

Se probará que  $p(w) \in p(B)$  lo cual es una contradicción y así concluimos esta parte. Los puntos  $g_j^{-1}(w)$  no pueden acumularse en  $\mathbb{P}$  por ser  $G$  discreto. Como  $g_j(z_j)$  convergen a  $w$ , los puntos  $z_j$  no se acumulan en  $\mathbb{P}$ . Si se acumularan en un punto  $\alpha$ , esto es,  $\rho(z_j, \alpha) \rightarrow 0$ , como  $\rho(g_j(z_j), w) \rightarrow 0$  se tiene que  $\rho(g_j^{-1}(w), z_j) \rightarrow 0$  y por ende  $\rho(g_j^{-1}(w), \alpha) \rightarrow 0$ , lo que contradice la afirmación anterior. Esto muestra que  $B$  es cerrado en  $R$ ; Además como  $B$  es un subconjunto de  $R$ , se tiene que

$$q^{-1}(q(B)) = B.$$

Se sigue entonces de la definición de topología cociente en  $\tilde{R}/G$ , que  $q(B)$  es cerrado en  $\tilde{R}/G$ . Ahora usando (3.3), se sigue que

$$p(B) = pi(B) = \gamma q(B),$$

y al ser  $\gamma$  homeomorfismo, el conjunto  $p(B)$  es cerrado en  $\mathbb{P}/G$ .

Probamos ahora la condición de necesidad, esto es, suponemos que  $R$  es localmente finita. Usando la Proposición 3.0.5 basta probar que  $\gamma$  es una función abierta. Sea  $A$  un abierto no vacío de  $\tilde{R}/G$ , dado que  $q$  es suprayectiva y continua sabemos que existe  $B$  abierto en  $\mathbb{P}$ , tal que  $q^{-1}(A) = \tilde{R} \cap B$  y por lo tanto  $q(\tilde{R} \cap B) = A$ .

Sea

$$W = \bigcup_{g \in G} g(\tilde{R} \cap B).$$

Nótese que dado (3.3), se tiene

$$p(W) = p\left(\bigcup_{g \in G} g(\tilde{R} \cap B)\right) = p(\tilde{R} \cap B) = pi(\tilde{R} \cap B) = \gamma q(\tilde{R} \cap B) = \gamma(A).$$

Queremos probar que  $\gamma(A)$  es abierto. Nótese primero que la proyección  $p$  es abierta. Esto se sigue ya que si  $C$  es un abierto en  $\mathbb{P}$ , entonces

$$\bigcup_{g \in G} g(C)$$

es abierto en  $\mathbb{P}$ , por lo tanto como

$$p^{-1}p(C) = \bigcup_{g \in G} g(C)$$

se sigue que  $p(A)$  es abierto en  $\mathbb{P}/G$ . Por consiguiente, basta probar que  $W$  es abierto. Consideramos a  $z \in W$ , por ser  $W$   $G$ -invariante, es decir  $g(W) = W \forall g \in G$  podemos asumir que  $z \in \tilde{R} \cap B$ ; lo que se busca es una vecindad de  $z$  abierta y contenida en  $W$ . Como  $R$  es localmente finita existe un disco abierto hiperbólico  $N$  que tiene centro en  $z$ , el cual interseca sólo a las imágenes  $g_0(\tilde{R}), \dots, g_m(\tilde{R})$ , donde  $g_0$  es la identidad; se puede suponer que todas estas imágenes contienen a  $z$ , de donde

$$g_j^{-1}(z) \in \tilde{R},$$

para toda  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Ahora bien,  $q$  manda a estos puntos a  $q(z) \in A$ , entonces  $g_j^{-1}(z) \in q^{-1}(A) = \tilde{R} \cap B$  para toda  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Se sigue que  $z \in g_j(B)$  para

toda  $j \in \{1, \dots, m\}$  y al hacer mas pequeño el radio de  $N$  (si es necesario) podemos suponer que  $N \subset g_0(B) \cap \dots \cap g_m(B)$ . Finalmente dado cualquier punto  $w \in N$  existe alguna  $j$  tal que  $w \in g_j(\tilde{R}) \cap g_j(B)$ , lo que implica que  $w \in g_j(\tilde{R} \cap B) \subset W$  por lo tanto,

$$N \subset W.$$

□

Para poder dar un ejemplo de una región fundamental convexa pero no localmente finita se requiere primero probar un resultado.

**Definición 3.0.10** Sea  $G$  un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$  (o de  $M(\Delta)$ ), se dice que  $R \subset \mathbb{P}$  un abierto no vacío es un  $G$ -paquete si  $g(R) \cap R = \emptyset$  para toda  $g \in G - Id$ .

Nótese que si existe un  $G$ -paquete el grupo  $G$  es discreto, ya que si no fuera así se tendría que existen transformaciones distintas  $g_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $g_n(z) \rightarrow z$  para toda  $z$  cuando  $n$  tiende a infinito. Sin embargo, por otro lado

$$g_j(R) \cap R = \emptyset \quad \forall j$$

por lo que basta tomar una  $z$  en  $R$ , para llegar a una contradicción. El siguiente teorema es muy útil para construir regiones fundamentales.

**Teorema 3.0.4** Sean  $G_1 = \langle g_1 \rangle$  y  $G_2 = \langle g_2 \rangle$  subgrupos de  $PSL(2, \mathbb{R})$  (o  $M(\Delta)$ ) y  $G = \langle G_1 \cup G_2 \rangle$ . Sea  $R_j$  un  $G_j$ -paquete  $j = 1, 2$  y  $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ . Además supóngase que  $R_1 \cup R_2 = \mathbb{P}$ , entonces

$$R^* = R_1 \cap R_2$$

es un  $G$ -paquete.

DEMOSTRACIÓN. Considere cualquier elemento  $h_n \cdots h_1$  de  $G$ , donde  $h_j \in G_{i_j}$ ,  $h_j \neq Id$  y  $i_j \neq i_{j+1}$ , para cualquier  $j$ ,  $i_j = 1, 2$ . Primero como  $R_{i_1}$  es un  $G_{i_1}$ -paquete, tenemos que

$$h_1(R^*) \subset h_1(R_{i_1}) \subset \mathbb{P} - R_{i_1},$$

es decir  $h_1(R^*) \subset R_{i_2}$ , iterando este proceso para cada  $h_j$  se tiene que

$$\begin{aligned} h_n h_{n-1} \cdots h_1(R^*) &\subset h_n(\mathbb{P} - R_{i_{n-1}}) \\ &\subset h_n(R_{i_n}) \subset \mathbb{P} - R_{i_n} \\ &\subset \mathbb{P} - R^* \end{aligned}$$

lo que quiere decir que  $R^*$  es un  $G$ -paquete. □

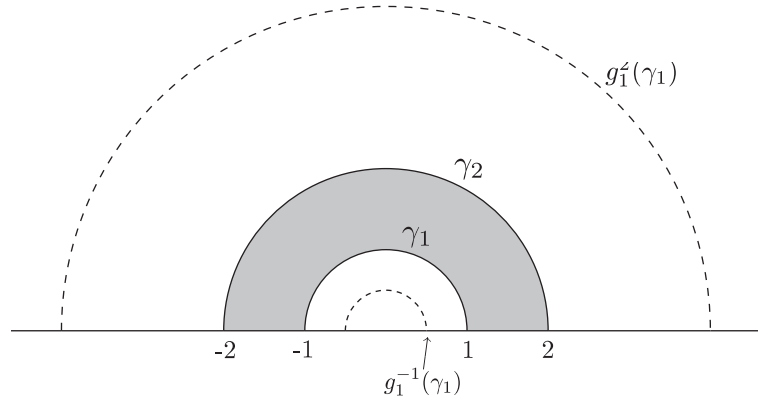


Figura 3.2:  $G_1$ -paquete

Exhibimos ahora un ejemplo de una región fundamental convexa que no es localmente finita para un grupo fuchsiano  $G$ . Sea  $G$  el grupo actuando en  $\mathbb{H}^2$  generado por las transformaciones hiperbólicas

$$g_1(z) = 2z \quad \text{y} \quad g_2(z) = \frac{3z + 4}{2z + 3}.$$

Observemos primero la región comprendida entre  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = 1\}$  y  $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = 2\}$ , claramente es un  $G_1$ -paquete, donde  $G_1 = \langle g_1 \rangle$ . Ver figura 3.2.

El círculo  $I_{g_2} = \{z \mid |z + 3/2| = 1/2\}$  es el círculo isométrico de la transformación  $g_2$  y  $I_{g_2^{-1}} = \{z \mid |z - 3/2| = 1/2\}$  es el círculo isométrico de la transformación  $g_2^{-1}$ . Por lo que  $g_2(I_{g_2}) = I_{g_2^{-1}}$ , más aún  $g_2(\text{ext}(I_{g_2})) = \text{int}(I_{g_2^{-1}})$  cf. [3] p. 159. Esta Acción geométrica (y su iteración) muestra que en efecto la región comprendida entre  $I_{g_2}$  e  $I_{g_2^{-1}}$  es un  $G_2$ -paquete, donde  $G_2 = \langle g_2 \rangle$ . Denotamos por  $\sigma_1$  a  $I_{g_2}$  y por  $\sigma_2$  a  $I_{g_2^{-1}}$ . Se aplica entonces el Teorema 3.0.4 a la región  $R$  comprendida entre  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , véase la Figura 3.5. Este se sigue ya que la unión de las regiones comprendidas entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  y la determinada por  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  cubren  $\mathbb{H}^2$ . Por lo tanto  $R$  es un  $G$ -paquete, donde  $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ , en particular  $G$  es discreto.

Se afirma que  $R$  es una región fundamental localmente finita para  $G$ . Para probar esto, tomamos  $z \in \mathbb{H}^2$  y seleccionamos una de sus imágenes mas cercanas a  $\sqrt{2}i$  (esto es posible ya que  $G$  es discreto). Renombrando, decimos que  $z$  es uno de estos puntos. Nótese que  $\{w \mid |w| = 2\}$  es el bisector perpendicular entre  $\sqrt{2}i$  y  $g_1(\sqrt{2}i) = 2\sqrt{2}i$ .

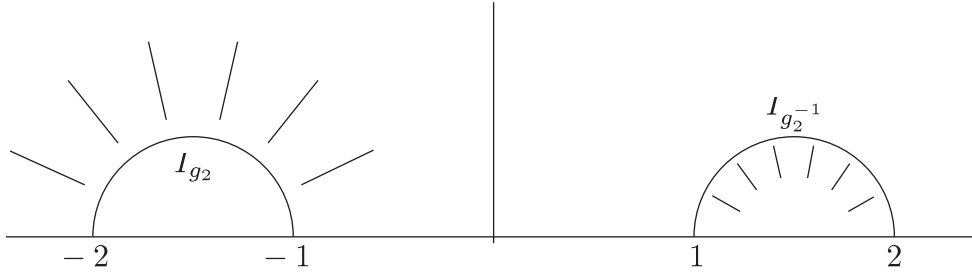


Figura 3.3: Círculos Isométricos

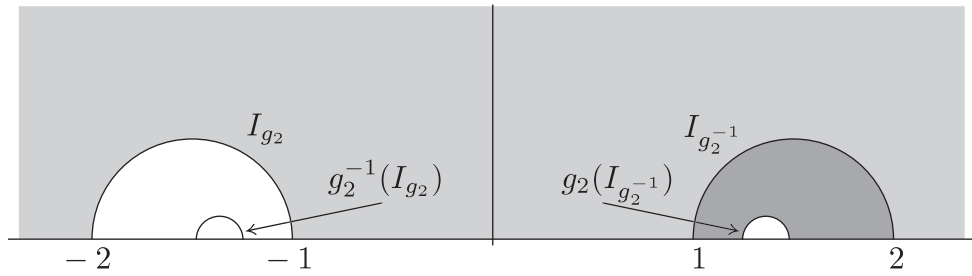


Figura 3.4: La imagen de la región entre  $I_{g_2}$  y  $I_{g_2}^{-1}$  se transforma en la región entre  $I_{g_2}^{-1}$  y  $g_2(I_{g_2}^{-1})$ .

Esto se cumple ya que,

$$\begin{aligned} \rho(\sqrt{2}i, 2i) &= \log(2) - \log(\sqrt{2}) \\ &= \log(\sqrt{2}) \\ &= \log(2\sqrt{2}) - \log(2) = \rho(2i, 2\sqrt{2}i). \end{aligned}$$

Ahora, como

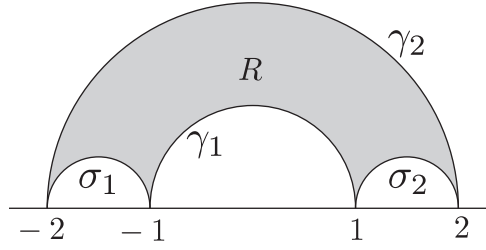
$$\rho(z, \sqrt{2}i) \leq \rho(g_1^{-1}(z), \sqrt{2}i) = \rho(z, g_1(\sqrt{2}i))$$

se sigue que  $|z| \leq 2$ . Usando un argumento análogo se sigue que  $1 \leq |z|$ , ya que también

$$\rho(z, \sqrt{2}i) \leq \rho(g_1(z), \sqrt{2}i) = \rho(z, g_1^{-1}(\sqrt{2}i)).$$

Por consiguiente  $1 \leq |z| \leq 2$ .

Mostramos ahora que  $z$  está también en la cerradura de la región comprendida entre  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

Figura 3.5:  $G$ -paquete para el grupo  $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ 

Para probar esto se afirma que el bisector perpendicular de  $\sqrt{2}i$  y  $g_2(\sqrt{2}i)$  es precisamente  $\sigma_2$  (y análogamente  $\sigma_1$  es el bisector perpendicular entre  $\sqrt{2}i$  y  $g_2^{-1}(\sqrt{2}i)$ ). La afirmación implica que

$$\rho(z, \sqrt{2}i) \leq \rho(g_2^{-1}(z), \sqrt{2}i) = \rho(z, g_2(\sqrt{2}i)),$$

por lo que  $z$  está en el exterior de  $\sigma_2$  y análogamente  $z$  está en el exterior de  $\sigma_1$ . Estos razonamientos implican que  $R$  es en efecto una región fundamental. Resta probar que  $\sigma_2$  es el bisector perpendicular de  $\sqrt{2}i$  y  $g_2(\sqrt{2}i)$ , para esto mostramos que  $\sqrt{2}i$  es el reflejado de  $g_2(\sqrt{2}i)$  por el círculo  $\sigma_2$ . Un cálculo sencillo muestra que la reflexión en el círculo de centro  $3/2$  y radio  $1/2$  está dada por

$$\psi(z) = \frac{3/2(\bar{z}) - 2}{\bar{z} - 3/2},$$

cf. [3] p. 70, de donde

$$\begin{aligned} \psi(\sqrt{2}i) &= \frac{-2 + 3/2(-\sqrt{2}i)}{-3/2 - \sqrt{2}i} = \frac{(2 + 3i/\sqrt{2})(3/2 - \sqrt{2}i)}{17/4} \\ &= \frac{24 + \sqrt{2}i}{17}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} g_2(\sqrt{2}i) &= \frac{4 + 3(\sqrt{2}i)}{3 + 2\sqrt{2}i} = \frac{(4 + 3\sqrt{2}i)(3 - 2\sqrt{2}i)}{17} \\ &= \frac{24 + \sqrt{2}i}{17}, \end{aligned}$$

se tiene entonces que  $\psi(\sqrt{2}i) = g_2(\sqrt{2}i)$ .

Ahora, el producto inversivo de los círculos  $C = \{w \mid |w| = \sqrt{2}\}$  y  $\sigma_2$ , es el valor absoluto del coseno del ángulo de la intersección, también este número está dado por

$$(C, \sigma_2) = \frac{(\sqrt{2})^2 + (1/4)^2 + |3/2 - 0|^2}{2(1/2)(\sqrt{2})} = \frac{2 + 1/4 - (3/2)^2}{\sqrt{2}} = \frac{9/4 - 9/4}{\sqrt{2}} = 0$$

por lo que son ortogonales cf. [2] pp. 28, 29.

Se sigue entonces que  $\sigma_2$  es en efecto el bisector perpendicular de  $\sqrt{2}i$  y  $g_2(\sqrt{2}i)$ . Finalmente, como la reflexión  $\psi$  es una isometría hiperbólica y el círculo  $C$  es invariante bajo esta reflexión, ya que estas transformaciones son conformes, por lo tanto como se había afirmado  $\sigma_2$  es el bisector perpendicular de  $\sqrt{2}i$  y  $g_2(\sqrt{2}i)$ . Así concluimos que  $R$  es una región fundamental, pero dado que todo punto se encuentra a lo más en 2 imágenes de  $\tilde{R}$ , se tiene que este dominio es también localmente finito. Procedemos ahora a modificar  $R$  para obtener una nueva región fundamental que no es localmente finita. Este proceso consiste en reemplazar partes de  $R$ .

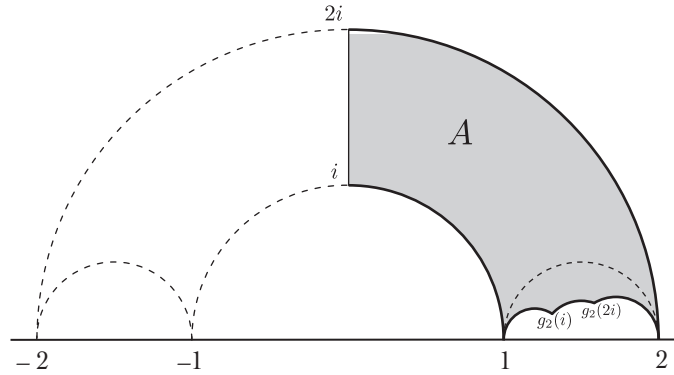


Figura 3.6: Región fundamental para  $G$

Primero a  $R_1 = R \cap \{z \mid \operatorname{Re}[z] \leq 0\}$  le aplicamos la transformación  $g_2$  y obtenemos una nueva región  $A = (R - R_1) \cup g_2(R_1) \cup \sigma_2$ .

Es fácil verificar que este hexágono  $A$  es también una región fundamental para  $G$ . Como una segunda etapa construimos las geodésicas  $\operatorname{Re}[z] = 1$  y  $\operatorname{Re}[z] = 2$  y se toman  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\beta'$  como en la Figura 3.7. Se transforma por medio de  $g_1$  el triángulo determinado por  $\alpha$ , 1 y  $2\alpha$  en el triángulo definido por  $2\alpha$ , 2 y  $4\alpha$ . Cada segmento euclidiano  $[\beta, 2\beta]$ , donde  $|\beta| = 1$  y  $\arg(\alpha) < \arg(\beta) < \pi/2$ , se reemplaza por un segmento equivalente  $[\beta', 2\beta']$ , cabe aclarar que no son equivalentes bajo un elemento en el grupo.

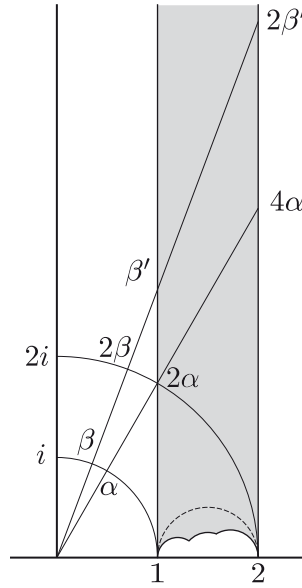


Figura 3.7: Pentágono fundamental para  $G$  que no es localmente finito

Sin embargo estos intervalos sí son equivalentes, ya que cualquier órbita representada por un punto en el segmento euclidiano  $[\beta, 2\beta]$ , está representada por otro punto en el segmento  $[\beta', 2\beta']$  y claramente los puntos *interiores* representan una sola órbita.

Otra parte importante de esta modificación es notar que los puntos del segmento  $[i, 2i]$  ya no aparecen en la nueva región, pero sí tienen representantes en el segmento de geodésica hiperbólica  $[g_2(i), g_2(2i)]$ .

De esta manera hemos modificado el cuadrilátero fundamental  $R$  en el pentágono que llamaremos  $B$ , que por construcción sigue siendo región fundamental para el grupo  $G$ . Este pentágono es también convexo cf. [2] p. 154.

Nótese que los puntos de la geodésica hiperbólica  $[g_2(i), g_2(2i)]$  no tienen ningún equivalente en la frontera de  $B$ , y al ser región fundamental, esto implica que un número infinito de las imágenes de  $B$  se tienen que acumular en ese segmento, esto es,  $B$  no es localmente finita.

Esto lo podemos comprobar mas precisamente al considerar los puntos  $1 + 2^n i$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , que pertenecen a  $\tilde{B}$  y sus imágenes  $g_1^{-n}(1 + 2^n i) = 2^{-n} + i$ . Estos últimos convergen a  $i$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , de donde cualquier vecindad compacta de  $i$  interseca un número infinito de imágenes de  $B$ . Este hecho se observa claramente al considerar las imágenes de  $B$  bajo  $g_1$  ver Figura 3.8.



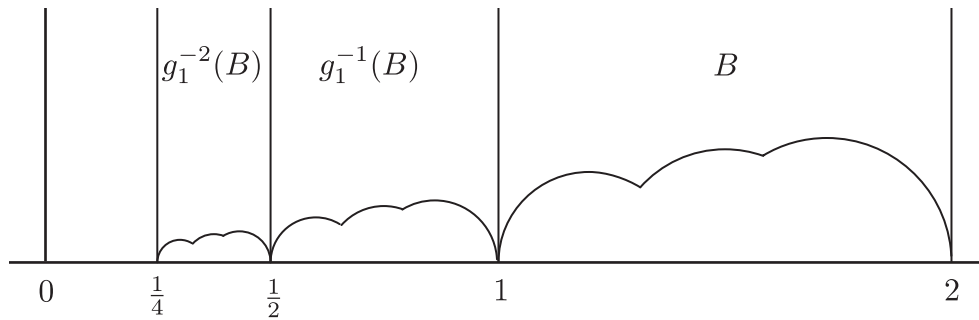


Figura 3.8: Acumulación de imágenes

Finalmente, como consecuencia del Teorema 3.0.3 se tiene que  $\tilde{R}/G$  es homeomorfo a  $\mathbb{H}^2/G$ , ya que  $R$  es localmente finita. Ahora este cociente es topológicamente equivalente a un toro menos un punto. Para mostrar esto, podemos incluir primero la imagen de los puntos  $\pm 1, \pm 2$  que se identifican en un sólo punto (y después excluir su proyección). Formalmente, se puede aplicar la fórmula de Euler, obteniendo, una 2-celda, dos 1-celdas y una 0-celda, esto es, el cociente tiene característica cero, que corresponde con la de un toro, por lo que se sigue la afirmación.

Este mismo teorema nos dice que  $\tilde{B}/G$  no es homeomorfo a  $\mathbb{H}^2/G$ , es interesante describir topológicamente este cociente y ver el comportamiento de la función  $\gamma$  descrita en el diagrama (3.2).

Topológicamente el cociente  $\tilde{B}/G$  es un anillo menos un punto y que incluye una de sus 3 fronteras, a saber, la proyección del segmento de geodésica  $[g_2(i), g_2(2i)]$ , que es una curva simple cerrada. Véase la Figura 3.10.

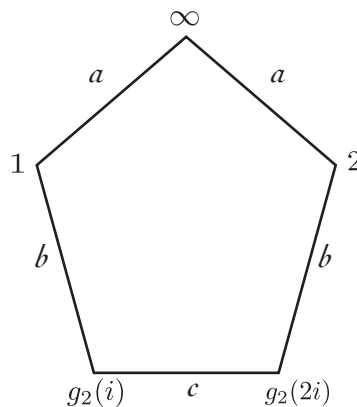


Figura 3.9: Compactificación de  $B$

Para mostrar esto notamos que las geodésicas  $\text{Re}(z) = 1$  y  $\text{Re}(z) = 2$  se identifican por medio de la transformación  $g_1$  asimismo los segmentos de geodésica  $[1, g_2(i)]$  y  $[g_2(2i), 2]$  se identifican por medio de  $g_1 \circ g_2^{-1}$ ; el segmento  $[g_2(i), g_2(2i)]$  se proyecta en una curva simple cerrada, ya que  $g_2(i)$  se identifica con  $g_2(2i)$ .

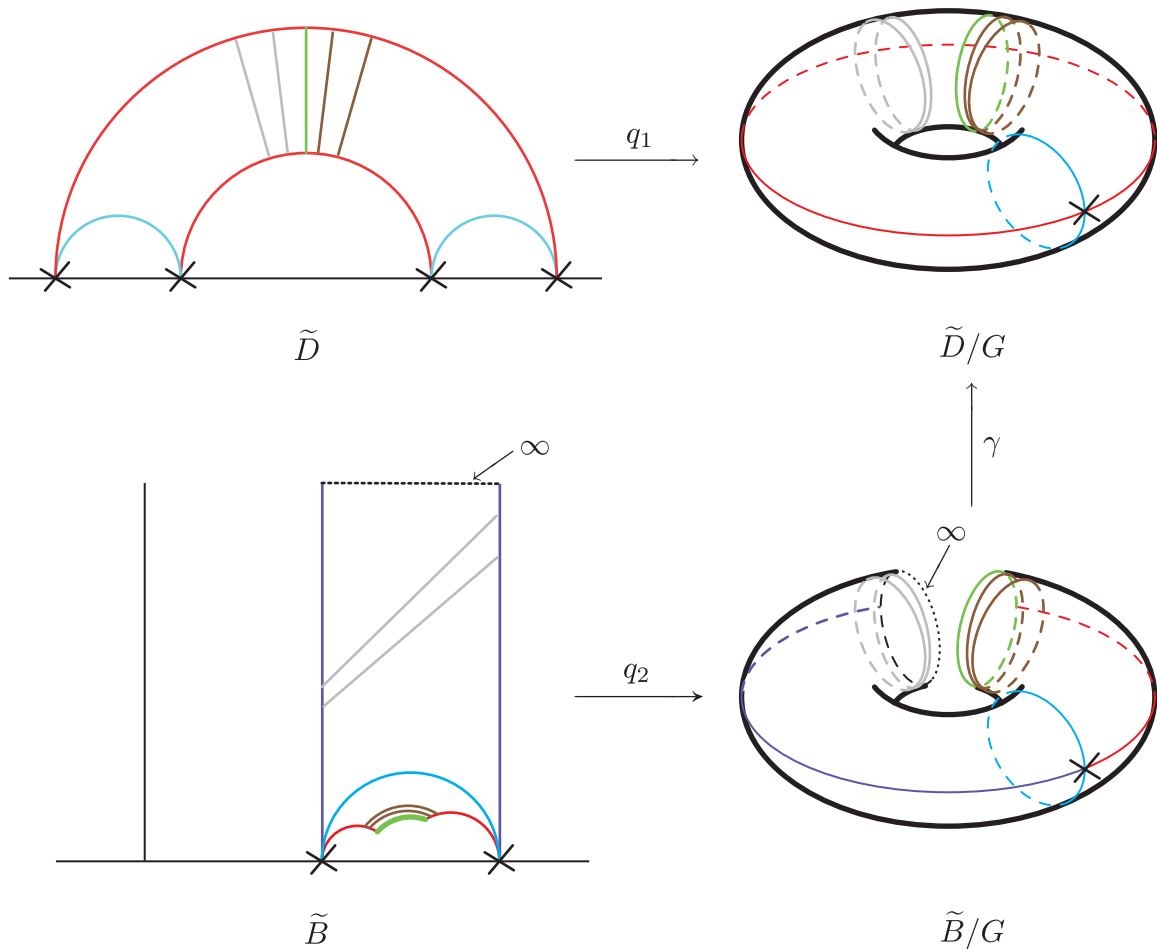


Figura 3.10: Esquema de los espacios cocientes (la cruz significa que esos puntos no pertenecen a los espacios topológicos)

Se puede formalizar esto con argumentos de la característica de Euler, compactificando los puntos correspondientes a  $\infty$  y a  $1, 2$ , donde  $a$  corresponde a las geodésicas  $[1, \infty]$  y  $[2, \infty]$ ,  $b$  los segmentos de geodésicas  $[1, g_2(i)]$  y  $[g_2(2i), 2]$  y  $c$  corresponde a  $[g_2(i), g_2(2i)]$ , al identificar el complejo esférico compactificado se tiene como característica de Euler, una 2-celda, tres 1-celdas y 3 0-celdas, lo que resulta en

característica 1 correspondiente a la de un disco con su frontera. Ver Figura 3.9.

Es importante notar que  $g_2(\sigma_1) \subset B$  se proyecta en una círculo menos un punto, el punto corresponde con los dos vertices infinitos 1 y 2 que no pertenecen a  $\mathbb{H}^2$ . Recordamos que la función  $\gamma$  es continua. Un análisis cuidadoso muestra que el comportamiento que tiene en este caso particular es el de identificar curvas cerradas simples *cercanas* a  $\infty$ , con la curva simple cerrada que corresponde con la proyección de  $[g_2(i), g_2(2i)]$ . Ver Figura 3.10.

**Proposición 3.0.7** *Si  $R$  es una región fundamental para un grupo fuchsiano  $G$  tal que  $\tilde{R}$  es compacta, entonces  $R$  es localmente finita.*

DEMOSTRACIÓN. Sin perder generalidad  $G$  es un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$  actuando en  $\mathbb{H}^2$ . Supongamos que  $R$  no es localmente finita, entonces existe un compacto  $K$  y una sucesión  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$g_n(\tilde{R}) \cap K \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $K$  es compacto existe  $r_0 \in \mathbb{R}^+$  tal que  $K \subset D_h(i, r_0)$ , denotamos por  $r_1$  el diámetro hiperbólico de  $R$ . Ahora, notemos que si  $z \in \tilde{R}$  y  $z_n \in \tilde{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , son tales que  $g_n(z_n) \in K$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\begin{aligned} \rho(i, g_n(z)) &\leq \rho(i, g_n(z_n)) + \rho(g_n(z_n), g_n(z)) \\ &= \rho(i, g_n(z_n)) + \rho(z_n, z) \\ &\leq r_0 + r_1. \end{aligned}$$

De donde podemos concluir que  $\tilde{R} \cup K \subset \overline{D_h(i, r_0 + r_1)}$ . Por consiguiente, existe un número infinito de transformaciones distintas  $g_n$  tales que  $g_n(z) \in \overline{D_h(i, r_0 + r_1)}$ , lo que contradice el hecho de que en los grupos fuchsianos el conjunto límite está contenido en la recta real extendida (la contradicción se tiene al tomar una subsucesión convergente). □

**Definición 3.0.11** *Dado un grupo fuchsiano  $G$  y una región fundamental  $R$  decimos que  $z \in \mathbb{P}$  es regular si existe una vecindad de  $z$  que interseca sólo un número finito de imágenes de  $\tilde{R}$  bajo elementos de  $G$ , si no es así lo llamaremos excepcional.*

**Teorema 3.0.5** *Sea  $R$  una región fundamental para un grupo fuchsiano  $G$  que es convexa y cumple la condición:*

$$\forall z \in \partial R \quad \exists g \in G - Id \quad \text{tal que} \quad g(z) \in \partial R,$$

*entonces  $R$  es localmente finita.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si no existen puntos excepcionales para la región  $R$ , es localmente finita (Proposición 3.0.6). Para demostrar el teorema, se prueba que si existen puntos excepcionales el conjunto de ellos es a la vez numerable y no numerable, por lo que debe ser vacío.

Mostramos primero que el conjunto de puntos excepcionales es numerable. Si  $z$  es un punto excepcional, se tiene que  $z \in g(\tilde{R}) \cap h(\tilde{R})$ , donde  $g \neq h$  (ya que  $z$  pertenece a un número infinito de imágenes de  $\tilde{R}$ ). Ahora como  $R$  es  $h$ -convexo se sigue que  $\tilde{R}$  es  $h$ -convexo (cf. [3] p. 137) y al ser  $g$  y  $h$  isometrías hiperbólicas se sigue que  $g(\tilde{R})$  y  $h(\tilde{R})$  son  $h$ -convexos y por lo tanto  $g(\tilde{R}) \cap h(\tilde{R})$  es un conjunto  $h$ -convexo, el cual puede consistir de un sólo punto o un segmento de geodésica. En el último caso, el conjunto de puntos interiores del segmento  $\sigma(g, h) = g(\tilde{R}) \cap h(\tilde{R})$  son regulares, ya que si consideramos  $w_1$  y  $w_2$  en el interior de  $\sigma(g, h)$  y puntos  $z_1 \in h(\tilde{R})$  y  $z_2 \in g(\tilde{R})$  se tiene que el interior del triángulo hiperbólico con vértices  $(w_1, w_2, z_1)$  está totalmente contenido en  $h(\tilde{R})$  y análogamente el interior de triángulo hiperbólico con vértices  $(w_1, w_2, z_2)$  está totalmente contenido en  $g(\tilde{R})$ , por lo que para todo punto  $w$  en el interior de  $\sigma(g, h)$  está a lo más en 2 imágenes de  $\tilde{R}$ . Ver Figura 3.11.

De donde para este segmento existen a lo más 2 puntos excepcionales, esto prueba la afirmación ya que  $G \times G$  es a lo sumo numerable (cf. [3] p. 100) y existen a lo más 2 puntos excepcionales por cada elemento de  $G \times G$ .

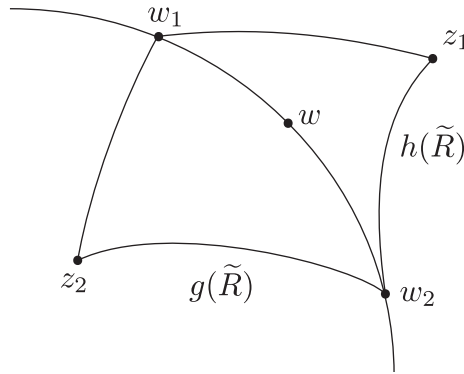


Figura 3.11: La intersección de dos regiones fundamentales localmente finitas tiene a lo más dos puntos excepcionales.

Probamos ahora que si hay un punto excepcional, entonces existe una cantidad no numerable de ellos. Sin pérdida de generalidad  $G < M(\Delta)$  actuando en  $\Delta$ . Sea  $w$  un punto excepcional, por lo tanto existe una sucesión de transformaciones distintas

$\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in G$ , y  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{R}$  tales que

$$g_n(z_n) \longrightarrow w.$$

En virtud de la Proposición 3.0.7 podemos suponer que  $\tilde{R}$  no es compacta. Sea  $\alpha \in \overline{R}$  tal que  $|\alpha| = 1$ , y entonces los puntos  $g_n(\alpha)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , forman una sucesión infinita en el compacto  $\partial\Delta$ , por lo que existe una subsucesión convergente a un punto  $\alpha^*$ . Consideramos solamente esta subsucesión y la renombramos. Sean  $L_n = [z_n, \alpha]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , los rayos hiperbólicos que van de  $z_n$  a  $\alpha$ , nótese que sus imágenes  $g_n(L_n)$  convergen a  $[w, \alpha^*]$ .

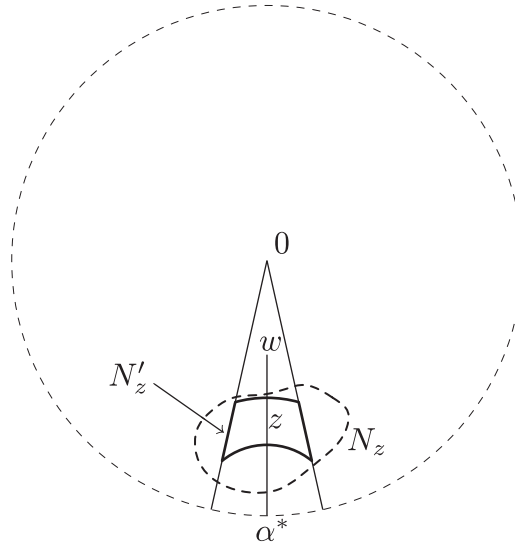


Figura 3.12: Vecindad conexa y convexa de  $z$  en  $\Delta$

Se afirma que todo  $z \in [w, \alpha^*]$  es un punto excepcional lo cual concluye la prueba. Para probar la afirmación se puede suponer, conjugando, que el segmento de geodésica está contenido en un diámetro (euclidiano). Esto se puede suponer ya que el grupo  $M(\Delta)$  es transitivo en geodésicas (manda geodésicas en geodésicas). Ahora sea  $N_z$  una vecindad abierta de  $z$ , podemos encontrar una vecindad  $N'_z$  contenida en  $N_z$  tal que su frontera esté formada por 2 segmentos de radio (geodésica del origen a un punto al infinito) y 2 geodésicas como se muestra en la Figura 3.12. Finalmente, como las imágenes  $g_n(z_n)$  y  $g_n(\alpha)$  convergen a  $w$  y  $\alpha^*$ , respectivamente, podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$ , entonces  $g_n(z_n) \in A$  y  $g_n(\alpha) \in \overline{A}$ , donde  $A$  es la región entre los 2 radios que delimitan a  $N'_z$ .  $\overline{A}$  es  $h$ -convexa (en el sentido descrito en el Lema 1.2.1), por lo que los segmentos de geodésica  $[g_n(z_n), g_n(\alpha)]$  están contenidos

en  $\bar{A}$ . Además existe  $n_1 > n_0$ , tal que si  $n > n_1$ , entonces  $g_n(z_n) \notin N'_z$ . Se sigue de esta manera, por conexidad y convexidad, que si  $n > n_1$ , los segmentos  $g_n(L_N)$  intersecan  $N'_z$ . Esto es, para todo  $z \in [w, \alpha^*]$  y cualquier vecindad abierta  $N_z$ , ésta interseca un número infinito de imágenes de  $\tilde{R}$  a saber  $g_n(\tilde{R})$ , donde  $n > n_1$ .  $\square$

**Teorema 3.0.6** *Sea  $R$  una región fundamental localmente finita para un grupo fuchsiano  $G$ , entonces*

$$G_0 = \{g \in G \mid g(\tilde{R}) \cap \tilde{R} \neq \emptyset\}$$

genera a  $G$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $G' = \langle G_0 \rangle$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $G$  en este caso actúa en  $\Delta$ . Recordamos que para toda  $z \in \Delta$  existe una  $g \in G$  tal que  $g(z) \in \tilde{R}$ . Ahora, se define una función

$$\Psi : \Delta \longrightarrow G/G',$$

dada por  $\Psi(z) = G'g$ , donde  $g$  es tal que  $g(z) \in \tilde{R}$  y  $G/G'$  es el cociente de clases laterales derechas determinadas por  $G'$ . Esta función está bien definida, ya que si  $h$  es otra transformación tal que  $h(z) \in \tilde{R}$ , se tiene que  $h(z) \in hg^{-1}(\tilde{R})$  ( $z \in g^{-1}(\tilde{R})$ ), por lo que  $hg^{-1} \in G_0$ . De donde

$$G'h = G'g.$$

Ahora sea  $z \in \Delta$ , al ser  $R$  localmente finita se tiene, en virtud de la Proposición 3.0.6, que existe un número finito de imágenes

$$g_1(\tilde{R}), \dots, g_m(\tilde{R})$$

que contienen a  $z$ , y existe  $N_z$  una vecindad de  $z$  tal que

$$N_z \subset g_1(\tilde{R}) \cup \dots \cup g_m(\tilde{R}).$$

Nótese que si  $w \in N_z$ , entonces  $w \in g_j(\tilde{R})$  para alguna  $j$ , de donde

$$\Psi(w) = G'g_j^{-1} = \Psi(z),$$

(ya que  $z \in g_j(\tilde{R})$ ). Como esto sucede para toda  $w \in N_z$ , se tiene que  $\Psi$  es constante en una vecindad de  $z$  y al cumplirse esto para todo  $z \in \Delta$ ,  $\Psi$  es localmente constante.

Se afirma que  $\Psi$  es constante. Este hecho finalizara la prueba, ya que dada cualquier transformación  $g \in G$  tomando  $z \in R$  y  $w \in g^{-1}(R)$ , como  $\Psi$  es constante se tiene

$$G' = \Psi(z) = \Psi(w) = G'g$$

por lo que  $g \in G'$  y  $G = G'$ . Resta solamente probar que  $\Psi$  es constante. Para esto se dota a  $G/G'$  con la topología discreta y se nota que  $\Psi$  es continua. Esto se debe a que la preimagen bajo  $\Psi$  de cualquier punto en  $G/G'$  es un abierto en  $\Delta$ , lo cual se sigue de manera inmediata al ser  $\Psi$  localmente constante. Finalmente,  $\Psi(\Delta)$  es conexo por ser  $\Delta$  conexo y  $\Psi$  continua, por lo que sólo puede consistir de un punto.  $\square$

Para el siguiente teorema usaremos una desigualdad probada por Jørgensen. Recordemos que dada la transformación de Möbius  $g$  se le puede asociar una matriz en  $SL(2, \mathbb{C})$  que denotaremos por  $A_g$ , esta última es determinada por  $g$  salvo el signo, así que al considerar dos matrices  $A_g$  y  $A_f$  que representan a  $g$  y  $f$ , respectivamente, su conmutador  $A_g A_f A_{g^{-1}} A_{f^{-1}}$  esta determinado de manera única y sin ambigüedad.

**Definición 3.0.12** *Un grupo  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  es elemental si su conjunto limite 1.2.2 tiene a lo más 2 puntos, en caso contrario se dice que el grupo es no elemental.*

**Teorema 3.0.7 (Desigualdad de Jørgensen)** *Sean  $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$  tales que generan un grupo no elemental, entonces*

$$|(tr(A_g))^2 - 4| + |tr(A_g A_f A_{g^{-1}} A_{f^{-1}}) - 2| \geq 1$$

La prueba original se puede consultar en [6], otra demostración aparece en [2] y con más detalle en [7].

El siguiente resultado es importante y como veremos tiene como consecuencia el hecho de que las clases parabólicas están representadas en las regiones fundamentales localmente finitas.

**Teorema 3.0.8** *Sea  $R$  una región fundamental localmente finita para un grupo fuchsiano  $G$ . Entonces*

- i) si  $g$  es un elemento elíptico de  $G$  y  $K$  es un disco compacto tal que  $g(K) = K$ , entonces  $\tilde{R}$  interseca un número positivo finito de imágenes de  $K$ ,*
- ii) si  $g$  es un elemento parabólico de  $G$  y  $K$  es una región horocíclica tal que  $g(K) = K$ , entonces  $\tilde{R}$  interseca un número positivo finito de imágenes de  $K$ ,*

iii) si  $g$  es un elemento hiperbólico de  $G$  y  $K$  es una región hipercíclica tal que  $g(K) = K$ , entonces  $\tilde{R}$  interseca un número positivo finito de imágenes de  $K$ .

DEMOSTRACIÓN. En todos los casos al ser  $R$  una región fundamental se tiene que si  $w \in K$  existe  $h \in G$  tal que  $h(w) \in \tilde{R}$ , por lo que  $\tilde{R}$  interseca al menos una imagen de  $K$  ( $h^{-1}(K)$ ).

Caso *i*). En este caso el resultado se tiene ya que si  $\tilde{R}$  interseca a  $h(K)$  para alguna  $h \in G$ , entonces  $h^{-1}(\tilde{R})$  interseca a  $K$ , lo cual sólo puede ocurrir un número finito de veces.

Caso *ii*). Sin perder generalidad, conjugando, se puede suponer que  $G$  actúa en  $\mathbb{H}^2$  y que  $g(z) = z + 1$ . Como  $K$  es una región horocíclica se sigue que es de la forma:

$$K = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Im}(z) > k > 0\}.$$

Relacionados con  $K$  usaremos otros dos subconjuntos de  $\mathbb{H}^2$ ,

$$K_0 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Im}(z) \geq k_0\}$$

y

$$K_1 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid k_0 \geq \text{Im}(z) \geq k\},$$

donde  $k_0$  se elige de tal manera que

$$\bigcup_{f \in G} f(K_0) \neq \mathbb{H}^2. \quad (3.4)$$

Esencialmente, la existencia de dicho  $k_0$  se deriva de la desigualdad de Jørgensen. Para mostrar esto, si  $f \in G$  y no fija  $\infty$  calculamos primero la traza de  $gfg^{-1}f^{-1}$ , consideramos matrices asociadas a  $g$ ,  $f$  y sus inversas,

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A_{g^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

de donde

$$\begin{aligned} A_g A_f A_{g^{-1}} A_{f^{-1}} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d+c & -a-b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad+ac-bc+c^2 & * \\ * & -bc-ac+ad \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



y por lo tanto la traza de  $gfg^{-1}f^{-1}$  es  $c^2 + 2$ , substituyendo estos valores en la desigualdad de Jørgensen, se tiene:

$$|(tr(g))^2 - 4| + |tr(gfg^{-1}f^{-1}) - 2| = 0 + |c^2 + 2 - 2| = |c^2| \geq 1,$$

lo que implica que  $|c| \geq 1$ .

Ahora, se tiene que para esa  $f$ ,

$$\operatorname{Im}(f(z)) \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(z)},$$

esto se sigue ya que, por una parte

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}, \end{aligned}$$

por lo que basta verificar que

$$(\operatorname{Im}(z))^2 \leq |cz+d|^2,$$

lo cual se cumple, ya que escribiendo  $z = x + iy$ , como  $|c^2| \geq 1$ , se tiene

$$y^2 \leq (cy)^2 \leq (cy)^2 + (cx+d)^2 = |cz+d|^2.$$

Estas observaciones implican 3.4, tomando por ejemplo  $k_0 > 1$ , se tendría que  $K_0$  no interseca la órbita de  $i$ ; si para alguna  $h \in G$  se tiene que  $h(i) \in f(K_0)$ , entonces  $f^{-1}h(i) \in K_0$  lo que no es posible. Por consiguiente las imágenes de  $K_0$  no pueden cubrir todo  $\mathbb{H}^2$ .

Ahora si suponemos que  $\tilde{R}$  interseca a  $h(K)$ , se tiene que  $h^{-1}(\tilde{R})$  interseca a  $K$ , y ya que  $\tilde{R}$  es conexo,  $h^{-1}(\tilde{R})$  interseca necesariamente a  $K_1$ . Esto se sigue ya que, por un lado  $h^{-1}(\tilde{R})$  no puede estar contenido en  $K_0$ , de ser así se contradice (3.4), y además si  $h^{-1}(\tilde{R}) \cap K_1 = \emptyset$  y  $h^{-1}(\tilde{R}) \cap K_0 \neq \emptyset$ , resultaría que  $h^{-1}(\tilde{R})$  no es conexo.

Consideramos ahora el conjunto

$$E = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid 0 \leq \operatorname{Re}[z] \leq 1 \text{ y } k \leq \operatorname{Im}[z] \leq k_0\}$$

y notamos que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(E) = K_1 \quad (3.5)$$

además, al ser  $E$  un conjunto compacto y  $\tilde{R}$  localmente finita, existe sólo un número finito de imágenes de  $\tilde{R}$  que intersecan a  $E$ , las cuales denotamos por

$$g_1(\tilde{R}), \dots, g_m(\tilde{R}).$$

Recordamos que el conjunto  $h^{-1}(\tilde{R}) \cap K_1$  es no vacío por lo que de (3.5) se sigue que  $g^n h^{-1}(\tilde{R}) \cap E \neq \emptyset$ , para alguna  $n \in \mathbb{Z}$ , y por lo anterior se tiene que necesariamente  $g^n h^{-1} = g_j$  para alguna  $j \in \{1, \dots, m\}$ , entonces

$$g_j^{-1}(K) = h g^{-n}(K) = h(K).$$

Esto es, las únicas imágenes de  $K$  que intersecan a  $\tilde{R}$  son

$$g_1^{-1}(K), \dots, g_m^{-1}(K).$$

Caso *iii*). Nuevamente, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $G$  actúa en  $\mathbb{H}^2$  y que  $g(z) = kz$ ,  $k > 1$ . La región hipercíclica es de la forma

$$K = \{z \mid z = r e^{i\theta}, r > 0, |\theta - \pi/2| < \epsilon\}$$

para alguna  $\epsilon > 0$ .

Tomamos

$$E = \{z \in K \mid 1 \leq |z| \leq k\},$$

claramente

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(E) = K.$$

Ya que  $E$  es compacto sólo un número finito de imágenes de  $\tilde{R}$  lo intersecan, digamos  $g_1(\tilde{R}), \dots, g_m(\tilde{R})$ . Si  $h(K)$  interseca a  $\tilde{R}$ , se tiene que para alguna  $n$ ,  $g^n h^{-1}(\tilde{R})$  interseca a  $E$  y por lo tanto, para alguna  $j$ ,  $g^n h^{-1} = g_j$  esto es,  $g_j^{-1} = h g^{-n}$ , por lo que

$$g_j^{-1}(K) = h g^{-n}(K) = h(K).$$

Por lo tanto dada cualquier  $h$  tal que  $h(K)$  interseca a  $\tilde{R}$  y necesariamente, para alguna  $j$ ,  $h(K) = g_j^{-1}(K)$ , esto es, solamente un número finito de imágenes distintas de  $K$  intersecan a  $\tilde{R}$ .  $\square$

Otra manera de justificar 3.4 es mediante el siguiente resultado, que también es consecuencia de la desigualdad de Jørgensen. Antes del resultado es necesario definir el siguiente conjunto, dado un elemento parabólico  $g$  se define el conjunto  $K_g$  como

$$K_g = \{z \mid \sinh \frac{1}{2} \rho(z, g(z)) < \frac{1}{2}\}.$$

**Teorema 3.0.9** *Sea  $G$  un grupo no elemental discreto con elementos parabólicos. Entonces los conjuntos*

$$K_g, \quad g \text{ parabólico en } G$$

*son permutados por  $G$  y  $K_g \cap K_h = \emptyset$  excepto si  $g$  y  $h$  tienen el mismo punto fijo.*

Este teorema es una adaptación bidimensional del teorema 5.4.4 de [2]. La prueba esencialmente se sigue del hecho de que si  $g, h$  son parabólicos en  $PSL(2, \mathbb{R})$  y generan un grupo discreto y no elemental entonces se cumple

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \sinh \frac{1}{2} \rho(z, h(z)) \geq \frac{1}{4},$$

lo cual es consecuencia de la desigualdad de Jørgensen.

Esto se hace de manera idéntica a la prueba en [2] p. 109, reemplazando  $j$  por  $i$  en la identidad

$$2 \cosh \rho(j, T(j)) = \|T\|^2.$$

Nótese que en efecto  $K_g$  es una región horocíclica. Para mostrar esto, sin perder generalidad  $g(z) = z + 1$ , de donde

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, z + 1) < \frac{1}{2} \tag{3.6}$$

se cumple si y sólo si

$$\frac{|z - (z + 1)|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z + 1))^{1/2}} < \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2y} < \frac{1}{2},$$

donde  $z = x + iy$ , esto es,

$$y > 1,$$

que es en efecto una región horocíclica.

**Teorema 3.0.10** *Sea  $R$  cualquier región fundamental localmente finita para un grupo fuchsiano  $G$ . Si  $v$  es un punto fijo parabólico, entonces existe alguna  $g \in G$  tal que  $g(v) \in \bar{R}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Conjugando podemos suponer que  $G$  actúa en  $\mathbb{H}^2$ ,  $v = \infty$  y que el elemento parabólico que lo fija es  $h(z) \rightarrow z + 1$ . Ahora consideremos  $K$  una región horocíclica invariante bajo  $h$ . En esta región tomamos una sucesión de puntos  $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $\text{Im}(z_n) \rightarrow \infty$ . Al ser  $\tilde{R}$  una región fundamental se tiene que existen  $\{h_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in G$  tales que  $h_n(z_n) \in \tilde{R}$ . De donde  $\tilde{R}$  interseca cada imagen  $h_i(K)$ . Como consecuencia del teorema anterior se tiene que esto sólo es posible para un número finito de transformaciones, por lo que necesariamente se puede encontrar una subsucesión constante de conjuntos  $h_{n_j}(K)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Renombrando tenemos que

$$h_1(K) = h_2(K) = \dots$$

Se tiene de esta manera que para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h_1(K) = h_n(K)$ , esto es,  $h_1^{-1}h_n(K) = K$  por lo cual,  $h_1^{-1}h_n = h^{t_n}$ , ya que las únicas transformaciones en  $G$  que preservan la región horocíclica  $K$  son las potencias de  $h$ . Por lo tanto  $h_n = h_1 h^{t_n}$ , donde  $t_n \in \mathbb{Z}$ , concluimos que  $h_1(w_n) \in \tilde{R}$ , donde  $w_n = h^{t_n}(z_n)$ . Finalmente, como  $\text{Im}(w_n) = \text{Im}(z_n)$  se tiene que  $w_n \rightarrow \infty$  y  $h_1(\infty) \in \bar{R}$ .  $\square$

Concluimos la tesis con algunas observaciones generales de regiones fundamentales localmente finitas. La definición de región fundamental 2.0.8 puede ser adaptada a la acción en  $\mathbb{C}^*$  cambiando en el inciso *iii*) que la medida bidimensional de Lebesgue sea 0. Usando esta versión de *región fundamental* se copia de manera casi idéntica la definición de región fundamental localmente finita 3.0.9 y es posible probar que la región descrita en la Figura 3.1 no es localmente finita. Para esto, tomemos la sucesión  $z_n = 2^n + ie^{-2^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Esta sucesión pertenece a la frontera de  $R$ , ahora considerando  $g^{-n}(z_n) = (2^n + ie^{-2^n})/2^n$  se tiene que converge a 1, por lo tanto cualquier vecindad compacta de 1 necesariamente interseca un número infinito de imágenes de  $R$ .

Es posible que al considerar un grupo fuchsiano  $G$  actuando en  $\mathbb{H}^2$  y  $R$  una región fundamental localmente finita el diámetro euclidiano de  $g(R)$  sea  $\infty$  para toda  $g \in G$ . Por ejemplo, si  $G = \langle z \rightarrow z + 1 \rangle$  y se toma la región  $R = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid 0 < \text{Re}(z) < 1\}$  se tiene esta situación.

**Teorema 3.0.11** *Sea  $G$  un grupo actuando en  $\mathbb{P}$  y  $R$  una región fundamental convexa, entonces  $R$  está acotada en la métrica hiperbólica si y sólo si:*

*i)  $\mathbb{P}/G$  es compacto,*

*ii)  $R$  es localmente finita.*

DEMOSTRACIÓN. Nótese que,  $R$  es acotada si y sólo si  $\tilde{R}$  lo es. Si  $R$  está acotada con la métrica hiperbólica, entonces  $R$  es localmente finita. Si  $\tilde{R}$  está acotada con la métrica hiperbólica  $\tilde{R}$  es compacto (la métrica euclidiana y la hiperbólica definen la misma topología en  $\mathbb{P}$ ) y en virtud de la Proposición 3.0.7  $R$  es localmente finita. Ahora como  $R$  es localmente finita se sigue del Teorema 3.0.3 que  $\mathbb{P}/G$  es homeomorfo a  $\tilde{R}/G$ , y como este último es compacto, ya que es la imagen continua del compacto  $\tilde{R}$ , se sigue que  $\mathbb{P}/G$  es compacto.

Ahora si se cumple *i)* y *ii)* se tiene que  $\mathbb{P}/G$  es homeomorfo a  $\tilde{R}/G$ , por lo que  $\tilde{R}/G$  es compacto. Si  $R$  no es acotado, existe una sucesión  $\{z_n\} \in R$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tal que se acumula en  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $\tilde{R}/G$  es compacto, renombrando, podemos decir que  $q(z_n)$  converge a  $q(x^*)$ , donde  $x^* \in \tilde{R}$  y  $q : \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}/G$  es como en (3.2). Por ser  $\tilde{R}$  localmente finita, existe una vecindad abierta  $N$  de  $x^*$  y un número finito de transformaciones  $Id = g_1, g_2, \dots, g_m$ , tal que  $x \in \bigcap_{i=1}^m g_i(\tilde{R})$  y  $N \subset \bigcup_{i=1}^m g_i(\tilde{R})$ , esto se sigue tomando el interior de la vecindad compacta descrita en la Proposición 3.0.6. Ahora  $q(N \cap \tilde{R})$  es un abierto en  $\tilde{R}/G$  debido a que

$$q^{-1}(q(N \cap \tilde{R})) = \bigcup_{i=1}^m (g_i^{-1}(N) \cap \tilde{R})$$

que es abierto en  $\tilde{R}$ . Como el número de conjuntos  $g_i^{-1}(N)$  es finito es posible encontrar una vecindad euclidiana  $M$  de  $x$  tal que

$$g_i(N) \cap M = \emptyset \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Es decir que  $q(z_n)$  no se puede acumular en  $q(x^*)$ , lo cual es una contradicción ya que si  $n$  es suficientemente grande  $z_n \in M$  y  $q(z_n) \notin q(N \cap \tilde{R})$ . Por lo tanto  $R$  es acotado con la métrica hiperbólica.  $\square$

**Teorema 3.0.12** *Sea  $R$  una región fundamental localmente finita convexa para un grupo fuchsiano  $G$  y  $v$  un punto fijo hiperbólico, entonces  $v \notin \tilde{R}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que sí. Por conjugación podemos asumir que  $G$  actúa en  $\mathbb{H}^2$ ,  $v$  es el origen y donde  $g(z) = kz$ ,  $k > 1$  pertenece a  $G$ . Consideramos una región hipercíclica  $K$  para  $G$  de la forma,

$$K = \{z \mid z = re^{i\theta}, r > 0, |\theta - \pi/2| < \epsilon\}$$

para alguna  $\epsilon > 0$ . Ahora al compacto

$$F = \{z \in K \mid 1 \leq |z| \leq k\}$$

lo intersecan sólo un número finito de imágenes de  $\tilde{R}$  distintas,  $g_1(\tilde{R}), \dots, g_m(\tilde{R})$ . Podemos suponer, tomando  $\epsilon$  suficientemente grande, que  $K \cap R \neq \emptyset$  y que existen  $z_1, z_2 \in K \cap R$ . Ahora por  $h$ -convexidad el triángulo hiperbólico determinado por  $0, z_1, z_2$  está contenido en  $R \cap K$ . Finalmente, tomando  $n_0$  suficientemente grande se tiene que  $g^n(\bar{R} \cap F) \neq \emptyset$  para toda  $n > n_0$ . Esto contradice el hecho de que  $R$  es localmente finita. Por lo tanto  $0 \notin \bar{R}$ .  $\square$

para alguna  $\epsilon > 0$ . Ahora al compacto

$$F = \{z \in K \mid 1 \leq |z| \leq k\}$$

lo intersecan sólo un número finito de imágenes de  $\tilde{R}$  distintas,  $g_1(\tilde{R}), \dots, g_m(\tilde{R})$ . Podemos suponer, tomando  $\epsilon$  suficientemente grande, que  $K \cap R \neq \emptyset$  y que existen  $z_1, z_2 \in K \cap R$ . Ahora por  $h$ -convexidad el triángulo hiperbólico determinado por  $0, z_1, z_2$  está contenido en  $R \cap K$ . Finalmente, tomando  $n_0$  suficientemente grande se tiene que  $g^n(\bar{R} \cap F) \neq \emptyset$  para toda  $n > n_0$ . Esto contradice el hecho de que  $R$  es localmente finita. Por lo tanto  $0 \notin \bar{R}$ .  $\square$

# Bibliografía

- [1] WHEEDEN, R.L. AND ZYGMUND A. *Measure and Integral*, Marcel Dekker, New York, 1977.
- [2] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.
- [3] LASCURAIN ORIVE, A., *Una introduccion a la geometría hiperbólica bidimensional*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005
- [4] LASCURAIN ORIVE, A., *Curso básico de variable compleja*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2007
- [5] BILLINGSLEY, P., *Probability and measure*, New York: Wiley, 1995.
- [6] JØRGENSEN, T., On discrete groups of Möbius transformations, Amer. J. Math., 1976.
- [7] ZUÑIGA, O., *Desigualdad de Jørgensen*, México, D.F., 1996. Tesis de Licenciatura
- [8] WALLACE A. H. *An Introduction to Algebraic Topology*, Dover, 2007.