Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

La Distancia de Gromov-Hausdorff

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Jesús Ángel Núñez Zimbrón

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. OSCAR PALMAS VELASCO

2009

Agradecimientos

Han sido muchas las personas que han puesto su esfuerzo, su dedicación, su paciencia y comprensión para que este trabajo fuera posible. Quiero comenzar agradeciendo a mis padres Laura y Raúl y mi hermana Laura, por su apoyo desde mi infancia, motivándome a seguir adelante. A mi tía Guadalupe por haberme abierto las puertas al mundo de las matemáticas. A mis amigos de carrera con quienes he sostenido inumerables pláticas matemáticas que me han impulsado a seguir buscando el conocimiento, Diego, Ramón, Minerva, Adela, Araceli, Violeta, Ilán, Aurelio, Karla. En particular menciono con gran afecto a Luis Ángel Zaldivar Corichi que siempre estuvo pendiente de mi trabajo como amigo y matemático y contribuyó enormemente a esta tesis. Agradezco a Elie Macario Peña Ruiz que con su gran talento matemático aportó brillantes ideas y me brindó su valiosa ayuda en la realización de las figuras y dibujos contenidos en la tesis. No puedo agradecer suficiente a la M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza, quien audaz me mostró lo bello de la geometría y siempre entusiasta me señaló mis fallas ayudándome a corregirlas y a mi Tutor el Dr. Oscar Palmas Velasco que dedicó gran parte de su tiempo a este proyecto y a quien admiro por su grandísima destreza matemática que no le impide ser modesto y alegre. Al M. en C. Miguel Lara Aparicio por brindarme su confianza al darme la oportunidad de trabajar con él, pero sobre todo, por brindarme su amistad. Al Dr. Santiago López de Medrano por aceptar leer este trabajo y haber propuesto modificaciones e ideas tan valiosas e interesantes. Agradezco también a los autores del libro *A Course in Metric Geometry* que forma la base de esta tesis. En particular agradezco al Prof. Sergei Ivanov el haber llamado nuestra atención sobre el artículo [6], donde se resuelven algunas cuestiones fundamentales que hemos incluido en el capítulo 4.

Índice general

Introducción

La Geometría Diferencial es una de las ramas más bellas de las matemáticas. Ha sido descubierta y estudiada por muchos de los matemáticos más geniales que han vivido; Gauss, Riemann, Hamilton y Gromov, por ejemplo. Es este último quien recientemente ha revolucionado la geometría y con ella otras áreas importantes, como la Topología Diferencial. Mikhail Leonidovich Gromov, en su artículo *Structures Métriques pour les Varietés Riemannienes*, extendió la idea de la distancia de Hausdorff a espacios métricos en abstracto. Al poco tiempo, Gromov atacaba problemas tan diversos como interesantes de manera uniforme con la herramienta que había creado.

En otras ramas como el análisis o el álgebra con frecuencia al hacer una demostración se puede aplicar métodos que de no existir, tendrían que hacerse *a mano*. Por ejemplo el Teorema de Arzelà-Ascoli en análisis o los Teoremas de Isomorfismo en álgebra. En cálculo, se obtiene más información al estudiar la derivabilidad de una función, su dominio y su imagen, que al estudiar cada uno de los valores que toma por separado como números u objetos aislados. En geometría se tiene una situación similar. Antes de Gromov, la mayoría de las herramientas en la geometría riemanniana global no tenían un enfoque tan uniforme. Podía ser que trabajáramos con dos variedades de propiedades geométricas muy similares, como una esfera y un elipsoide, pero al probar algo acerca de ellas, las demostraciones fueran totalmente distintas dado el enfoque más individual que se tenía. El teorema de Precompacidad de Gromov, y el Teorema de Rigidez [1], partes cruciales en el trabajo de Gromov y algunos otros matemáticos como Cheeger o Thurston, permiten aplicar argumentos más uniformes al estudio de las variedades y de los espacios métricos en general. Más aún, la teoría de Gromov-Hausdorff, como se conoce ahora, es tan poderosa que es aplicable a diversos temas como los Grupos de Lie.

[1] El lector puede consultar dichos teoremas en [4] pag.148-155.

Inclusive dicha teoría está íntimamente ligada, por ejemplo, con la Conjetura de Poincaré.

Esta tesis es una introducción a la distancia de Hausdorff y a su extensión, la de Gromov-Hausdorff. También incluimos algunas aplicaciones sencillas. En el capítulo 1 introducimos las distancias Uniforme, de Lipschitz y de Hausdorff. Estudiamos sus propiedades básicas y consideramos la familia de espacios métricos compactos en relación con éstas. En el capítulo 2 damos la definición de la distancia de Gromov-Hausdorff y algunos de los objetos que se utilizan actualmente para estudiarla, como el concepto de *correspondencia* y ε-*isometría*. En el capítulo 3 consideramos sucesiones de espacios métricos y analizamos su convergencia respecto a la distancia de Gromov-Hausdorff. Mostramos que las distancias definidas en el primer capítulo son generalizadas por la de Gromov e introducimos el concepto de (ε, δ)-*aproximación*. En este capítulo probamos una versión del teorema de precompacidad. En el capítulo 4 definimos los *Espacios de Longitud* y estudiamos la convergencia de Gromov-Hausdorff para este tipo de espacios mediante algunos ejemplos. Finalmente en el capítulo 5 bosquejamos dos aplicaciones importantes. A saber, un Teorema de Finitud y un teorema que ofrece condiciones suficientes sobre una variedad para la existencia de una métrica de curvatura seccional constante.

Capítulo 1

Convergencia de Espacios Métricos

Nuestro objetivo en este capítulo es encontrar alguna forma para comparar espacios métricos entre sí y decidir qué tan parecidos son. Para esto definiremos algunos tipos de distancias entre estos que se basan en los cambios relativos que hay entre los espacios, es decir, comparan más o menos directamente las métricas de estos. Mediante las conclusiones que obtengamos de cada una de estas distancias podremos decidir en algunos casos si una *sucesión* de espacios métricos se acerca a uno dado. Esto es, si los espacios de la sucesión cada vez son más parecidos en el sentido de estas distancias, al fijo. Esta noción será útil, pues veremos que varias propiedades de los espacios métricos se heredan de esta forma.

Una forma de comparar espacios entre sí es considerar todas las posibles funciones que hay entre ellos ya que los espacios pueden admitir ciertas clases de éstas. Así comenzamos con la siguiente definición:

Definición 1.1. *Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. La distorsión de f se define como*

$$\operatorname{dis}(f) = \sup_{x_1, x_2 \in X} |d_Y(f(x_1), f(x_2)) - d_X(x_1, x_2)|$$

donde d_X y d_Y son las métricas de X y Y respectivamente.

La definición anterior proporciona para cada función una comparación entre las métricas de X y Y mediante la resta. Entre más parecidas sean estas métricas para cada par de puntos en el dominio de la función, más cercana a cero será la distorsión. Sin embargo notemos que si la función no tiene características adecuadas, la distorsión podría no ser de utilidad, por ejemplo si la función es discontinua o no está definida en algún subconjunto. Otro problema es que de esta forma estamos comparando X con Y y no necesariamente Y con X; Es decir, si la función no es invertible. Por estas razones nos restringiremos a la familia de homeomorfismos entre X y Y. Así tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2. *Diremos que una sucesión de espacios métricos* $\{X_n\}$ *converge uniformemente a un espacio métrico* X *si existen homeomorfismos* $f_n : X_n \to X$ *tales que* $\operatorname{dis}(f_n) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Como un ejemplo sencillo podemos tomar a $X_n = \mathbb{R}$ con la métrica $d_n(x,y) = |y-x|\,(1+1/n)$ y $X = \mathbb{R}$ con la métrica $d(x,y) = |y-x|$. Luego basta tomar la sucesión de homeomorfismos identidad $id_n : X_n \to X$ con la cual

$$\operatorname{dis}(id_n) = \sup_{x,y \in X_n} ||y-x|1/n| \to 0$$

.

Otra forma de comparar dos espacios métricos es como sigue. Consideremos la familia de funciones siguientes dadas por el concepto de Función de Lipschitz.

Definición 1.3. *Sean* X *y* Y *espacios métricos. Una función* $f : X \to Y$ *es de Lipschitz si* $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)$ *para todo* $x_1, x_2 \in X$ *y alguna constante* C. *Si* f *además es un homeomorfismo, diremos que es bi-Lipschitz si existen constantes positivas* c *y* C *tales que*

$$c d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$.

Notemos que si una función es bi-Lipschitz, tanto ella como su inversa son de Lipschitz, y en la notación de la definición anterior, las constantes asociadas a ellas en el sentido de Lipschitz son C y c respectivamente. De manera similar a la distorsión podemos comparar de manera un poco más relativa las métricas como sigue:

Definición 1.4. *Definimos la dilatación de una función de Lipschitz entre espacios métricos $f : X \to Y$ como*

$$\mathrm{dil}(f) = \sup_{x,x' \in X} \frac{d_Y(f(x), f(x'))}{d_X(x, x')}$$

Antes de dar la definición análoga de convergencia respecto a la dilatación, definiremos una distancia en abstracto entre espacios métricos.

Definición 1.5. *La distancia de Lipschitz d_L entre dos espacios métricos X y Y está definida por:*

$$d_L(X, Y) = \inf_{f : X \to Y} \log(\max\{\mathrm{dil}(f), \mathrm{dil} f^{-1}\})$$

donde el ínfimo es sobre todos los homeomorfismos bi-Lipschitz $f : X \to Y$.

Si no existen homeomorfismos bi-Lipschitz entre dos espacios X y Y, definimos $d_L(X, Y) = \infty$.

Observación 1.6. *Si X, Y y Z son espacios métricos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son de Lipschitz, entonces $\mathrm{dil}(g \circ f) \leq \mathrm{dil}(g)\mathrm{dil}(f)$. Por otro lado $\mathrm{dil}(id) = 1$ y $\mathrm{dil}(id) = \mathrm{dil}(f \circ f^{-1}) \leq \mathrm{dil}(f)\mathrm{dil}(f^{-1})$. Notemos entonces que d_L siempre es mayor o igual a cero pues $\mathrm{dil}(f) \geq 1$ o $\mathrm{dil}(f^{-1}) \geq 1$.*

Ahora resulta natural la siguiente definición.

Definición 1.7. *Diremos que una sucesión de espacios métricos $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en el sentido de Lipschitz a un espacio métrico X si $d_L(X_n, X) \to 0$ cuando $n \to \infty$*

En el Ejemplo 3.3 demostraremos que la convergencia en el sentido de Lipschitz implica la convergencia uniforme. A continuación daremos un par de ejemplos interesantes de convergencia en el sentido de Lipschitz, para lo cual recordamos la definición de *Estructura de Finsler.*

Definición 1.8. *Sea M una variedad diferenciable. Una Estructura de Finsler sobre M es una familia de funciones $F = \{F_p\}_{p \in M}$ tal que cada $F_p : T_pM \to \mathbb{R}$ es una norma y la familia varia diferenciablemente sobre M.*

Observación 1.9. *Podemos inducir una métrica a la variedad dada una estructura de Finsler como*

$$d(x,y) = \inf_{\gamma:[a,b]\to M} \int_a^b F(\gamma'(t))dt$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas de clase al menos C^1 *que unen a* x *con* y*.*

Ejemplo 1.10. *Sea* M *una variedad diferenciable y* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de estructuras de Finsler en* M*. Supongamos que esta sucesión converge a una estructura de Finsler* F *en el sentido de que* $\frac{F_n(v)}{F(v)} \to 1$ *cuando* $n \to \infty$ *uniformemente sobre todos los vectores* $v \neq 0$ *en* TM*. Entonces*

$$d_L((M,d_n),(M,d)) \to 0$$

donde d_n *y* d *son las métricas Finslerianas correspondientes a* F_n *y* F *respectivamente.*

Demostración:

Consideremos $id_n : (M,d_n) \to (M,d)$ la identidad para cada n. Observemos que como $c_n = \frac{F_n(v)}{F(v)} \geq 0$ converge uniformemente a 1, entonces $\{c_n\}$ es acotada y por lo tanto existe $\bar{c}$ tal que $F_n(v) \leq \bar{c}F(v)$. Luego para cada $x, y \in M$ si γ es una curva que los une tenemos que $F_n(\gamma'(t)) \leq \bar{c}F(\gamma'(t))$ Integrando de ambos lados de la desigualdad y sacando ínfimo de ambos lados sobre las curvas que unen a x y y tendremos que

$$\inf_{\gamma:[a,b]\to M} \int_a^b F_n(\gamma'(t))dt \leq \bar{c} \inf_{\gamma:[a,b]\to M} \int_a^b F(\gamma'(t))dt$$

pero esto es precisamente que $d_n(x,y) \leq \bar{c}d(id(x), id(y))$. De forma análoga se tiene que si $b_n = \frac{F(v)}{F_n(v)}$ entonces existe $\bar{b}$ tal que $d(x,y) \leq \bar{b}d_n(id(x), id(y))$ por lo que cada id_n es bi-Lipschitz. Ahora veamos que

$$\operatorname{dil}(id_n) = \sup_{x,y\in M} \frac{d(x,y)}{d_n(x,y)} \leq \sup_{x,y\in M} c_n = 1$$

por otro lado

$$\operatorname{dil}(id_n^{-1}) = \operatorname{dil}(id_n) = \sup_{x,y\in M} \frac{d_n(x,y)}{d(x,y)} \leq \sup_{x,y\in M} b_n = 1$$

De aquí que $d_L((M, d_n), (M, d)) \to 0$.

$\square$

Ejemplo 1.11. *Sea* $\{M_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *una familia de superficies suaves en* $\mathbb{R}^3$ *parametrizadas por funciones* $f_t : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *donde* Ω *es una región en* $\mathbb{R}^2$ *con cerradura compacta. La familia es al menos de clase* C^1*, es decir, la función* $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $F(x,t) = f_t(x)$ *es al menos de clase* C^1*. Entonces* $d_L(M_t, M_0) \to 0$ *cuando* $t \to 0$*.*

Demostración:

Consideremos las funciones dadas por $g_t = f_0 \circ f_t^{-1} : M_t \to M_0$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Como cada f_t es un homeomorfismo, también lo será g_t. Por otro lado, como la familia F es de clase C^1 tendremos que si $t \to 0$ entonces $F(x,t) \to F(x,0)$, es decir, para cada x, $f_t(x) \to f_0(x)$. Pero como Ω tiene cerradura compacta, la convergencia será uniforme. Luego, $g_t(x) \to id(x)$, por lo que para t suficientemente cercana a 0, g_t será bi-Lipschitz. Más aún, tendremos que para cada $x, y \in M_t$

$$\frac{d_0(g_t(x), g_t(y))}{d_t(x,y)} \to 1.$$

de donde se tiene el resultado. $\square$

La distancia de Lipschitz cumple propiedades análogas a las que cumple una métrica en un espacio. Sin embargo como estamos comparando espacios métricos en abstracto no podemos otorgarle ese nombre. Aún así, el siguiente Teorema y la Observación 1.14 justificarán que le llamemos *distancia*. Necesitaremos el siguiente lema técnico.

Lema 1.12. *Si* X *es un espacio métrico compacto y* $f : X \to X$ *es una función tal que* $d(x,y) = d(f(x), f(y))$*, es decir, que preserva distancias, entonces* $f(X) = X$*.*

Demostración:

Supongamos lo contrario, es decir, que existe $p \in X \setminus f(X)$. Como X es compacto, y por ser métrico cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \cap f(X) = \emptyset$. Ahora, sea n la máxima posible cardinalidad de los subconjuntos S tal que cualquier par de sus puntos $x, y \in S$ cumple que $d(x,y) \geq \varepsilon$. Notemos que $n < \infty$ por la compacidad de X. Como f preserva distancias entonces para cualesquiera $x, y \in S$, $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Por otro lado, $d(p, f(S)) \geq d(p, f(X)) \geq \varepsilon$ y por lo tanto $f(S) \cup \{p\}$ es un conjunto de cardinalidad $n+1$ tal que cualquier par de sus puntos está separado por una distancia de al menos ε, lo cual es una contradicción.

$\square$

Teorema 1.13. *d_L es una función no negativa, simétrica y satisface la desigualdad del triángulo. Más aún, si X y Y son espacios compactos entonces se tiene que $d_L(X, Y) = 0$ si y sólo si X es isométrico a Y.*

Demostración:

(a) *d_L es no negativa.* Dada $f : X \to Y$ un homeomorfismo bi-Lipschitz tenemos que $\mathrm{dil}(f) \geq 1$ o $\mathrm{dil}(f^{-1}) \geq 1$. Luego $\log(\text{máx}\{\mathrm{dil}(f), \mathrm{dil}(\mathrm{f}^{-1})\}) \geq 0$. Luego $d_L(X, Y) \geq 0$.

(b) *Simetría de d_L.* Tenemos que la expresión $\log(\text{máx}\{\mathrm{dil}(f), \mathrm{dil}(f^{-1})\})$ es simétrica. Entonces basta notar que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo bi-Lipschitz entonces $f^{-1} : Y \to X$ también lo es. De aquí que

$$\inf_{f:X\to Y}\{\log(\text{máx}\{\mathrm{dil}(f), \mathrm{dil}(f^{-1})\})\} = \inf_{g:Y\to X}\{\log(\text{máx}\{\mathrm{dil}(g^{-1}), \mathrm{dil}(g)\})\}$$

(c) *Desigualdad del Triángulo.* Sean X, Y y Z espacios métricos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ homeomorfismos bi-Lipschitz. Consideremos $h : X \to Z$ dada por $h = g \circ f$. Tenemos que h es bi-Lipschitz pues g y f lo son. Ahora $\mathrm{dil}(h) \leq \mathrm{dil}(f) \cdot \mathrm{dil}(g)$ y como el logaritmo es estrictamente creciente $\log(\mathrm{dil}(h)) \leq \log(\mathrm{dil}(f)) + \log(\mathrm{dil}(g))$. Análogamente $\log(\mathrm{dil}(h^{-1})) \leq \log(\mathrm{dil}(g^{-1})) + \log(\mathrm{dil}(h^{-1}))$. De aquí que

$$\inf_{f:X\to Y}\left\{\inf_{g:Y\to Z}\{\log(\mathrm{dil}(h))\}\right\} = \inf_{f:X\to Y}\{\log(\mathrm{dil}(g))\} + \inf_{g:Y\to Z}\{\log(\mathrm{dil}(f))\}$$

pero

$$\inf_{h:X\to Z}\{\log(\mathrm{dil}(h))\} \leq \inf_{f:X\to Y}\left\{\inf_{g:Y\to Z}\{\log(\mathrm{dil}(h))\}\right\}$$

(d) *Si X y Y son espacios compactos entonces se tiene que $d_L(X, Y) = 0$ si y sólo si X es isométrico a Y.* Supongamos que X y Y son isométricos.

Sea $\phi : X \to Y$ una isometría. Entonces ϕ es un homeomorfismo bi-Lipschitz con constante de Lipschitz 1. Luego:

$$\mathrm{dil}(\phi) = \sup_{x,y\in X} \frac{d_Y(\phi(x),\phi(y))}{d_X(x,y)} = 1$$

y

$$\mathrm{dil}(\phi^{-1}) = \sup_{x,y\in Y} \frac{d_X(\phi^{-1}(x),\phi^{-1}(y))}{d_Y(x,y)} = 1$$

Por lo tanto $d_L(X,Y)$=0.

Supongamos ahora que $d_L(X,Y) = 0$. Entonces existe una sucesión de homeomorfismos bi-Lipschitz $\{f_n : X \to Y\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\mathrm{dil}(f_n) \to 1$ y $\mathrm{dil}(f_n^{-1}) \to 1$ cuando $n \to \infty$.

Luego por el Teorema de Arzelà-Ascoli, existe una subsucesión $\{f_{n_k} : X \to Y\}_{k=1}^{\infty}$ que converge uniformemente digamos a $f : X \to Y$. Ahora como $\mathrm{dil}(f_{n_k}) \to 1$ cuando $k \to \infty$ tenemos que

$$\frac{d_Y(f_{n_k}(x), f_{n_k}(y))}{d_X(x,y)} \to 1$$

para todo $x, y \in X$. Luego $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y)$, de donde f preserva distancias. Repitiendo el procedimiento para la sucesión $\{f_n^{-1} : Y \to X\}$ encontramos $g : Y \to X$ que preserva distancias. Ahora $f \circ g$ preserva distancias de Y en Y. Por el lema anterior, $f \circ g$ es suprayectiva, y como preserva distancias claramente es inyectiva. Entonces $f \circ g$ es biyectiva. Luego f es suprayectiva y por lo tanto es una isometría.

□

Agregamos la siguiente observación, que aunque tiene carácter técnico, nos libera de la presión de trabajar en una familia muy grande de objetos, la familia de espacios métricos compactos. Si nos restringimos a tomar clases de espacios métricos compactos no isométricos entre sí, veremos que de hecho la familia es muy pequeña. Tanto como $\mathbb{R}$.

Observación 1.14. *Cualquier colección de espacios métricos compactos homeomorfos entre sí, módulo isometrías, tiene a lo más la cardinalidad de* $\mathbb{R}$.

Demostración:

Para demostrar esto supongamos que no es así (es decir, que hay más) y fijemos un espacio X. Como d_L puede tomar a lo más tantos valores como números reales no negativos, entonces deben existir espacios Y_0 y Z tales que $d_L(X,Y_0) = d_L(X,Z) = \alpha_0$ para algún $\alpha_0 > 0$. Ahora, dejemos fijo Z y consideremos el espacio (que resulta métrico y compacto) obtenido de considerar el conjunto de elementos de Y_0 y dotarlo de la métrica d_1 dada por $d_1(x,y) = \frac{1}{2}d_0(x,y)$ donde d_0 es la métrica de Y_0 y $x, y \in Y_0$. Como log es una función estrictamente creciente, y máx saca constantes positivas, tendremos que $\alpha_1 = d_L(X,Y_1) < d_L(X,Y_0) = \alpha_0$. En general para cada n natural consideramos Y_n el conjunto Y_0 con la métrica $d_n(x,y) = \frac{1}{2^n}d_0(x,y)$ y si denotamos por $\alpha_n = d_L(X,Y_n)$, obtendremos una sucesión de números positivos $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $\alpha_n \to 0$. Notemos que además $d_L(Y_n,Z)$ también es α_n. Denotemos ahora $d_L(X,Z) = \beta$. Aplicando la desigualdad del triángulo para cada n obtenemos que

$$d_L(X,Z) \leq d_L(X,Y_n) + d_L(Y_n,Z) = 2\alpha_n$$

es decir, $\frac{\beta}{2} \leq \alpha_n$ para toda n natural. Luego, $\beta = 0$ pues $\frac{\beta}{2}$ es una cota inferior para la sucesión, pero entonces $d_L(X,Z) = 0$ y como ya hemos demostrado, esto implica que X y Z son isométricos, lo cual es una contradicción.

$\square$

Desgraciadamente tanto la distancia uniforme como la de Lipschitz requieren que los espacios en cuestión sean homeomorfos, pero esto puede resultar demasiado restrictivo. Consideremos una sucesión de espacios donde el n-ésimo espacio de la sucesión es una esfera a la cual se le ha pegado un asa de diámetro menor a $1/n$ como se muestra en la figura 1.1. Esta sucesión de espacios, intuitivamente converge a la esfera, ya que como el diámetro de las asas tiende a cero, éstas tienden a un sólo punto. Sin embargo, ninguno de los espacios de la sucesión es homeomorfo al límite.

Parte del problema viene de considerar los espacios sin espacio ambiente. Para atacarlo definiremos otro tipo de distancia, primero entre subespacios de un espacio métrico fijo, y en el siguiente capítulo extenderemos la noción para espacios en abstracto.

Sea entonces A un subespacio de un espacio métrico. Consideremos el conjunto $U_r(A) = \cup_{a\in A} B_r(a)$ y notemos que en la notación usual, si toma-

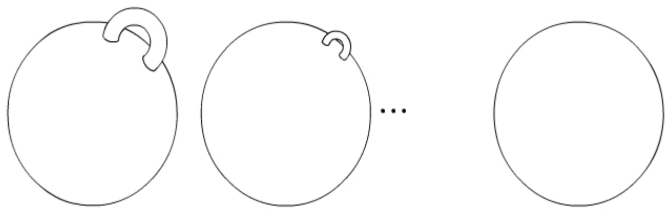

Figura 1.1: Sucesión de esferas con asa

mos un solo punto, $U_r(x) = B_r(x)$. Utilizaremos en algunos casos ambas notaciones dependiendo del contexto.

Definición 1.15. *Sean A, B subconjuntos de un espacio métrico. Definimos la distancia de Hausdorff entre A y B, denotada por $d_H(A, B)$, como*

$$d_H(A, B) = \text{ínf}\,\{r > 0 \mid A \subset U_r(B) \text{ y } B \subset U_r(A)\}$$

Veamos algunas propiedades de la distancia que acabamos de definir.

Proposición 1.16. *Sean A, B subconjuntos de (X, d) un espacio métrico y $r > 0$. Entonces:*

(i) $d_H(A, B) = \text{máx}\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\}$

(ii) $d_H(A, B) \leq r$ *si y sólo si* $d(a, B) \leq r$ *para todo* $a \in A$ *y* $d(b, A) \leq r$ *para todo* $b \in B$.

(iii) La afirmación previa es falsa si reemplazamos $\leq$ por $<$.

Demostración:

(i) Sea $r > 0$ tal que $A \subset U_r(B)$ y $B \subset U_r(A)$. Para cada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < r$, de donde $d(a, B) < r$. De modo que $d(a, B) \leq d_H(A, B)$. Análogamente, para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $d(b, A) < r$ de donde $d(b, A) \leq d_H(B, A)$. Luego

$$d_H(A, B) \geq \text{máx}\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\}$$

Ahora denotemos a $\sup_{a\in A} d(a, B)$ por α y supongamos que $\text{máx}\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\} = \alpha$. Es claro que $B \subset U_\alpha(A)$ ya que como $\alpha \geq d(a,b)$ para toda $a \in A$, entonces existe $\hat{a} \in A$ tal que $b \in B_\alpha(\hat{a})$. Ahora, como suponemos que $\alpha \geq \sup_{b\in B} d(b,A)$, también tenemos que $A \subset U_\alpha(B)$. Por lo tanto, por la definición de $d_H(A,B)$,

$$d_H(A,B) \leq \max\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\}.$$

(ii) Por el inciso anterior tenemos que $d_H(A,B) \leq r$ si y sólo si $d_H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\} \leq r$. De aquí que si $d_H(A,B) \leq r$ entonces $\sup_{a\in A} d(a,B) \leq r$ y $\sup_{b\in B} d(b,A) \leq r$ de donde, $d(a,B) \leq r$ para todo $a \in A$ y $d(b,A) \leq r$ para todo $b \in B$. Si suponemos ahora que $d(a,B) \leq r$ para todo $a \in A$ y $d(b,A) \leq r$ para todo $b \in B$, entonces $\sup_{a\in A} d(a,B) \leq r$ y $\sup_{b\in B} d(b,A) \leq r$. Claramente se tiene entonces que $d_H(A,B) \leq r$.

(iii) En $\mathbb{R}$ consideremos los conjuntos $A = (-1,0)$ y $B = (0,1)$. Se tiene entonces que $d(a,B) < 1$ para todo $a \in A$ y $d(b,A) < 1$ para todo $b \in B$ y sin embargo, $d_H(A,B) = 1$.

□

Lema 1.17. *Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $r_1, r_2 > 0$. Entonces $U_{r_1}(U_{r_2}(A)) \subset U_{r_1+r_2}(A)$.*

Demostración:

Sea $x \in U_{r_1}(U_{r_2}(A))$. Entonces existe $y \in U_{r_2}(A)$ tal que $x \in B_{r_1}(y)$, pero como $y \in U_{r_2}(A)$ existe $z \in A$ tal que $y \in B_{r_2}(z)$. Observemos que $d(x,y) < r_1$ y $d(y,z) < r_2$. Ahora aplicando la desigualdad del triángulo tenemos que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < r_1 + r_2$. Pero esto implica que $x \in B_{r_1+r_2}(z)$, luego $x \in U_{r_1+r_2}(A)$ y como x fue arbitrario, $U_{r_1}(U_{r_2}(A)) \subset U_{r_1+r_2}(A)$.

□

Proposición 1.18. *Sea X un espacio métrico. Entonces:*

(i) d_H es una semi-métrica en 2^X.

(ii) $d_H(A,\overline{A}) = 0$ para cada $A \subset X$, donde $\overline{A}$ denota la cerradura de A.

(iii) Si A y B son subconjuntos cerrados de X y $d_H(A,B) = 0$, entonces $A = B$.

Demostración:

(i) Claramente la distancia de Hausdorff es simétrica y dado que está definida por el ínfimo de un conjunto de números no negativos, es no negativa. Probemos la desigualdad del triángulo.

Definamos para cada $A, B \in 2^X$ el conjunto

$$K_{AB} = \{r \geq 0 \mid A \subset U_r(B) \text{ y } B \subset U_r(A)\}$$

Sean $A, B, C \in 2^X$ y $r_1 \in K_{AB}$ y $r_2 \in K_{BC}$. Observemos que como $B \subset U_{r_1}(A)$ entonces $U_{r_2}(B) \subset U_{r_2}(U_{r_1}(A))$. De igual forma usando que $B \subset U_{r_2}(C)$, tenemos que $U_{r_1}(B) \subset U_{r_1}(U_{r_2}(C))$. Ahora, como $C \subset U_{r_2}(B)$ y $A \subset U_{r_1}(B)$ tenemos que

$$C \subset U_{r_2}(U_{r_1}(A))$$
$$A \subset U_{r_1}(U_{r_2}(C))$$

Aplicando el lema 1.17 tenemos que

$$C \subset U_{r_1+r_2}(A)$$
$$A \subset U_{r_1+r_2}(C)$$

De aquí que si $r_1 \in K_{AB}$ y $r_2 \in K_{BC}$ entonces $r_1 + r_2 \in K_{AC}$, y esto implica que $K_{AC} \subset K_{AB} + K_{BC}$. Tomando ínfimos de ambos lados tenemos la desigualdad buscada.

(ii) Definamos la función $d_A : X \to \mathbb{R}$ dada por $d_A(x) = d(x, A)$. Tal función es continua pues la métrica lo es. Luego $d_A^{-1}(0)$ es un cerrado en X que contiene a A. Por lo tanto $\overline{A} \subset d_A^{-1}(0)$ y en particular, $x \in d_A^{-1}(0)$. Por otro lado, claramente $d(x, \overline{A}) = 0$ pues $A \subset \overline{A}$.

(iii) Supongamos por el contrario que por ejemplo $A \setminus B \neq \emptyset$. Entonces sea $x \in A \setminus B$. Como B es cerrado, existe $r > 0$ de tal forma que $B_r(x) \cap B = \emptyset$. Luego $x \notin U_r(B)$, de donde $d_H(A, B) \geq r > 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A \setminus B = \emptyset$. Análogamente $B \setminus A = \emptyset$ y entonces $A = B$.

□

Probaremos ahora algunas proposiciones que nos permitirán restringir la clase de espacios en la que trabajamos y profundizaremos en las propiedades de la distancia de Hausdorff. Dado un espacio métrico X, denotemos por $\mathcal{M}(X)$ al espacio métrico de los subconjuntos cerrados de X, con la distancia de Hausdorff como métrica. La Proposición 1.18 nos permite hacerlo pues el inciso (ii) nos dice que podemos identificar a cada subespacio con su cerradura, y el inciso (iii), que la métrica estará bien definida.

Proposición 1.19. *Sea $\{A_i\}$ una sucesión de conjuntos en $\mathcal{M}(X)$ que converge a $A \in \mathcal{M}(X)$ con respecto a la distancia de Hausdorff. Entonces:*

(i) A es el conjunto de límites de todas las sucesiones convergentes $\{a_n\}$ en X tal que $a_n \in A_n$ para toda n.

(ii) $A = \cap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\cup_{m=n}^{\infty} A_m}\right)$

Demostración:

(i) Consideremos el conjunto

$$B = \{b \mid a_i \to b,\ a_i \in A_i\}$$

y tomemos una sucesión en dicho conjunto, digamos $\{b_i\}$ tal que $b_i \to \beta$. Como cada $b_i \in B$ existen sucesiones $\{a_j^i\}_{j=1}^{\infty}$ tal que para cada i

$$a_j^i \to b_i.$$

Aplicando un proceso diagonal de Cantor encontramos la sucesión $\{\alpha_k\} = \{a_k^k\}$ que cumple que cada $\alpha_k \in A_k$ y $\alpha_k \to \beta$. Pero entonces por la definición de B, tenemos que $\beta \in B$. Luego $B \in \mathcal{M}(X)$.

Ahora, sea $\varepsilon > 0$. Observemos que si $b \in B$, para i suficientemente grande, $d(A_i, b) < \varepsilon/2$ pues b es límite de alguna sucesión con terminos en cada A_i, y debe haber una infinidad de ellos en $B_{\varepsilon/2}(b)$. De forma similar, dado $a_i \in A_i$ tendremos que $d(a_i, B) < \varepsilon/2$, pues podemos tomar una sucesión convergente con términos en cada A_i que contenga a a_i y el argumento anterior aplica. Por lo tanto por la proposición 1.16

inciso (ii) se sigue que $d_H(A_i, B) < \varepsilon/2$ para i suficientemente grande.

Por otro lado como A_i converge a A, tomando adecuadamente a i aseguramos que $d_H(A_i, A) < \varepsilon/2$.

Aplicamos la desigualdad del triángulo de la siguiente manera y los argumentos anteriores

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &\leq d_H(A, A_i) + d_H(A_i, B) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Pero esto es para cualquier $\varepsilon > 0$ de donde se sigue que $d_H(A, B) = 0$ y por la proposición 1.18 inciso (iii) se sigue que $A = B$ como queríamos.

(ii) Observemos que $A \subset \text{lím inf}(A_n)$, pero $\text{lím inf}(A_n) \subset \cap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\cup_{m=n}^{\infty} A_m}\right)$.

Sea $x \in \cap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\cup_{m=n}^{\infty} A_m}\right)$. Entonces existe $n_0 \geq 1$ tal que $x \in \overline{\cup_{m=n_0}^{\infty} A_m}$. Luego existe alguna sucesión $\{x_j\}$ en $\cup_{m=n_0}^{\infty} A_m$ tal que $x_j \to x$. Notemos que cada $x_j \in A_m$ para algún $m \geq n_0$. Si existe algún A_m que no contenga a ningún término de la sucesión, simplemente la redefinimos como cualquier punto en dicho conjunto. Entonces basta considerar la sucesión $\{y_j\}$ cuyos primeros n_0 términos son x_{n_0} y que a partir del $(n_0 + 1)$-ésimo término coincide con $\{x_j\}$. Esta sucesión converge a x y además tiene la propiedad de que $y_j \in A_j$ para cada j, así que por el inciso anterior, $x \in A$. Por lo tanto $A \subset \cap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\cup_{m=n}^{\infty} A_m}\right)$.

$\square$

Proposición 1.20. *Sea X un espacio métrico compacto y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subespacios compactos de X. Entonces:*

(i) Si $A_{i+1} \subset A_i$ para toda i, entonces $A_i \to \cap_{i=1}^{\infty} A_i$ en $\mathcal{M}(X)$.

(ii) Si $A_i \subset A_{i+1}$ para toda i, entonces $A_i \to \overline{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}$ en $\mathcal{M}(X)$.

Demostración:

(i) Notemos que $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \subset A_j$, para cualquier j. Luego para $r > 0$ se tiene que $U_r\left(\cap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subset U_r(A_j)$ para cada j. De aquí que $d_H(A_j, \cap_{i=1}^{\infty} A_i) \leq r$ para cualquier $r > 0$. Por lanto $d_H(A_j, \cap_{i=1}^{\infty} A_i) \to 0$.

(ii) Observemos que $A_j \subset \overline{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}$ para cada j, así que $U_r(A_j) \subset U_r\left(\overline{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}\right)$ donde $r > 0$. Luego $d_H(A_j, \overline{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}) \to 0$.

□

Proposición 1.21. *Sean $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ tal que cada A_i es convexo y $A_i \to A$ en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Entonces A es convexo.*

Demostración:
Sean $a, b \in A$. Denotaremos al segmento de recta que determinan a y b por $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = b + (1-t)(a-b) \text{ con } t \in [0,1]\}$. Entonces queremos demostrar que $[a, b] \subset A$ para cada $a, b \in A$. Ahora, por la proposición 1.19 existen sucesiones $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ tales que $a_i, b_i \in A_i$ para toda i y $a_i \to a$ y $b_i \to b$. Consideremos la sucesión $\{c_i\}$ dada por $c_i = b_i + (1-t)(a_i - b_i)$ para t fija en $[0, 1]$. Pero tenemos que $c_i \in A_i$ ya que A_i es convexo para cada i y $c_i \to c$ donde $c = b + (1-t)(a-b)$ para cada $t \in [0, 1]$. Nuevamente por la proposición 1.19, $c \in A$ lo cual concluye la prueba.

□

Para dar fin a este capítulo demostramos dos teoremas que relacionan $\mathcal{M}(X)$ con el espacio que lo genera X, en términos de completez y compacidad.

Proposición 1.22. *Sea X un espacio métrico. Si X es completo entonces $\mathcal{M}(X)$ es completo.*

Demostración:
Sea $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}(X)$ y consideremos el conjunto S de puntos $x \in X$ tales que para toda V vecindad de x, se tiene que $V \cap S_n \neq \emptyset$ para una infinidad de n. Veamos primero que S es cerrado en X.
Sea $\{x_k\}$ una sucesión en S tal que $x_k \to x$. Ahora dado $\varepsilon > 0$ y m un número natural, consideremos $V_\varepsilon = B_\varepsilon(x) \cap S_m$. Ahora, como $x_k \to x$ entonces hay una infinidad de $x_k \in B_\varepsilon(x)$, pero como $x_k \in S$ para cada k, por la definición de S, $B_\varepsilon(x) \cap S_m \neq \emptyset$ para una infinidad de m's. Luego $V_\varepsilon \neq \emptyset$

para cada ε. Luego como cualquier vecindad V de x contiene a una vecindad de la forma $B_\varepsilon(x)$ para alguna ε suficientemente pequeña, tenemos que $V \cap S_m \neq \emptyset$ para una infinidad de m's. Por lo tanto $x \in S$. Luego S es cerrado.

Afirmamos ahora que $S_n \to S$, lo cual probaremos a partir de las dos siguientes afirmaciones:

(i) $d(x, S_n) < 2\varepsilon$ para $x \in S$.

(ii) $d(x, S) < 2\varepsilon$ para $x \in S_n$.

Para demostrar (i), dado $x \in S$, sean $\varepsilon > 0$ y n_0 tal que si $m, n \geq n_0$, entonces $d_H(S_n, S_m) < \varepsilon$. Ahora, consideremos $m \geq n_0$ tal que $B_\varepsilon \cap S_m \neq \emptyset$, lo cual podemos hacer ya que $x \in S$. Entonces tomemos $y \in B_\varepsilon \cap S_m$. Este punto cumple por un lado que, $d(x, y) < \varepsilon$ y como $y \in S_m$, si $n \geq n_0$ entonces como $\{S_n\}$ es de Cauchy, $d_H(S_n, S_m) < \varepsilon$; En particular, $d(y, S_n) < \varepsilon$. Luego para $n \geq n_0$:

$$d(x, S_n) \leq d(x, y) + d(y, S_n) < 2\varepsilon$$

Ahora para (ii), sea $x \in S_n$. Consideremos la sucesión de números $\{n_k\}$ como sigue: $n_1 = n$, y para cada $k > 1$, elegimos n_k de tal forma que $n_k < n_{k+1}$ y tal que para todo $p, q \geq n_k$ se tenga que $d_H(S_p, S_q) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.
Ahora, definimos la sucesión x_k como $x_1 = x$ y para $k > 1$, $x_k \in S_{n_{k+1}}$ tal que $d(x_k, x_{k+1}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Tales puntos existen ya que por la elección de la sucesión $\{n_k\}$, $d_H(S_{n_k}, S_{n_{k+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Luego:

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon < 2\varepsilon$$

Por lo tanto $\{x_k\}$ es de Cauchy. Como X es completo, $x_k \to y$ con $y \in X$. Entonces:

$$\begin{aligned} d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) &\leq \lim_{n\to\infty} \left(d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_k, x_{k+1}) + \ldots\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Pero $y \in S$ pues para cada vecindad $B_\varepsilon(y)$, tenemos que $B_\varepsilon(y) \cap S_m \neq \emptyset$ pues $x_k \to y$. Por lo tanto, $d(x, S) < 2\varepsilon$.

Ahora si $n \geq n_0$, por (i) y (ii) tenemos respectivamente que $\sup_{x\in S} d(x, S_n) \leq 2\varepsilon$ y $\sup_{x\in S_n} d(x, S) \leq 2\varepsilon$. Entonces, por la proposición 1.16 inciso (i), tenemos que $d_H(S, S_n) \leq 2\varepsilon$ para $n \geq n_0$, de donde $S_n \to S$; Pero como S es cerrado, $S \in \mathcal{M}(X)$. Luego $\mathcal{M}(X)$ es completo.

□

Teorema 1.23. ***(Blaschke)*** *Sea X un espacio métrico. Si X es compacto, entonces $\mathcal{M}(X)$ es compacto.*

Demostración:

Como X es compacto, entonces es completo, y por la proposición anterior, $\mathcal{M}(X)$ también lo es. Basta probar que $\mathcal{M}(X)$ es totalmente acotado. Sea S una ε-red finita en X, la cual existe por la compacidad de X. Queremos demostrar entonces que 2^S es una ε-red en $\mathcal{M}(X)$.
Consideremos $A \in \mathcal{M}(X)$ y definamos el conjunto

$$S_A = \{x \in S \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Ahora, como S es una ε-red en X, para cada $y \in A$ existe $x \in S$ tal que $d(x, y) \leq \varepsilon$. Pero $d(x, A) = \inf_{z\in A} d(x, z) \leq d(x, y) \leq \varepsilon$. Luego $x \in S_A$, de donde $d(y, S_A) \leq \varepsilon$ para cada $y \in A$. Pero como $d(x, A) \leq \varepsilon$ para todo $x \in S_A$ (por la definición de S_A), tenemos que $d_H(A, S_A) \leq \varepsilon$. Como A fue arbitrario, 2^S es una ε-red en $\mathcal{M}(X)$.

□

Capítulo 2

La Distancia de Gromov-Hausdorff

Una vez que hemos definido la distancia de Hausdorff para subespacios métricos de uno dado, podemos extender su definición en abstracto para aplicarla a espacios métricos en general. Esto nos ayudará a deshacernos de algunas restricciones que hemos tenido hasta ahora para comparar los espacios en cuestión. Probaremos las propiedades básicas de tal distancia y definiremos los conceptos de *correspondencia* y *ε-isometría*, que facilitarán un teorema que da una fórmula explícita para calcularla y algunos criterios para determinar la convergencia de sucesiones de espacios.

Comenzamos dando la definición siguiente:

Definición 2.1. *Sean X y Y dos espacios métricos. La distancia de Gromov-Hausdorff entre X y Y (denotada por $d_{GH}(X,Y)$) está dada de la siguiente forma. Para $r > 0$, diremos que $d_{GH}(X,Y) < r$ si y sólo si existe un espacio métrico Z y subespacios de éste X' y Y' isométricos a X y Y respectivamente tales que $d_H(X',Y') < r$. Es decir, $d_{GH}(X,Y)$ es el ínfimo de las $r > 0$ para las cuales existen los espacios mencionados.*

En otras palabras la definición anterior extiende a la de la distancia de Hausdorff en el sentido de que para comparar dos espacios X y Y buscamos considerarlos como subespacios métricos de otro más grande en el cual no se alteren las métricas ya dadas de ambos y tomar la distancia de Hausdorff entre ellos. Este proceso lo repetimos para cada espacio Z en el cual haya copias isométricas de X y Y. Como una observación trivial pero muy importante tenemos que la distancia de Gromov-Hausdorff entre espacios isométricos es cero pues podemos considerar a cualquiera de los dos como subespacio del otro y las métricas se respetarán. Una comparación sencilla para ilustrar la definición está dada por el ejemplo siguiente en el cual hacemos uso del concepto de ε-red que será muy útil en nuestro estudio posterior. Una ε-red es un conjunto de puntos X en un espacio métrico Y tal que para cualquier $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $d(x, y) \leq \varepsilon$, donde d es la métrica de Y.

Ejemplo 2.2. *Si Y es una ε-red en un espacio métrico X, tendremos que $d_{GH}(X, Y) \leq \varepsilon$.*

Probaremos a continuación algunas propiedades de la distancia de Gromov-Hausdorff y comenzaremos notando que dicha distancia es finita si nos restringimos a la familia de espacios métricos acotados.

Proposición 2.3. *Si X y Y son espacios métricos acotados, entonces $d_{GH}(X, Y) < \infty$.*

Demostración:

Como X y Y son acotados, entonces existen constantes $M_X, M_Y \geq 0$ tales que

$$d_X(x, \hat{x}) \leq M_X \quad \text{para cada } x, \hat{x} \in X$$
$$d_Y(y, \hat{y}) \leq M_Y \quad \text{para cada } y, \hat{y} \in Y$$

Fijemos ahora una constante $C > \text{máx}\{M_X, M_Y\}$ y sobre $Z = X \bigsqcup Y$ la métrica siguiente

$$d_Z(z, \hat{z}) = \begin{cases} d_X(z, \hat{z}) & \text{si } z, \hat{z} \in X \\ d_Y(z, \hat{z}) & \text{si } z, \hat{z} \in Y \\ C & \text{en otro caso} \end{cases}$$

d_Z es una métrica; las propiedades se heredan de las métricas de X y Y. Así, tenemos que $X \subset U_C(Y)$ y $Y \subset U_C(X)$ por lo que $d_{GH}(X, Y) \leq C < \infty$.

Si por otro lado dejamos abierta la posibilidad de que tan sólo uno de los espacios sea tal que su diámetro esté acotado, podemos establecer las dos afirmaciones siguientes.

Proposición 2.4. *Sean X y Y dos espacios métricos y* $\text{diam}(X) < \infty$. *Entonces se tiene que $d_{GH}(X, Y) \geq \frac{1}{2} |\text{diam}(X) - \text{diam}(Y)|$, es decir,* diam, *es una función de Lipschitz con constante de Lipschitz 2.*

Demostración:

(i) Comenzaremos por el caso en el que $\operatorname{diam}(Y) = \infty$. Si Z es un espacio métrico que contiene copias isométricas de X y Y, entonces tendremos que $d_H(X, Y) = \infty$ en Z. En efecto, si suponemos lo contrario, es decir que existe $0 < r < \infty$ tal que $Y \subset U_r(X)$ entonces tendremos que $\operatorname{diam}(Y) \leq \operatorname{diam}(X) + 2r < \infty$, lo cual es una contradicción por la hipótesis de este caso. Por otro lado, claramente $\frac{1}{2}|\operatorname{diam}(X) - \operatorname{diam}(Y)| \leq \infty$ de donde se tiene la desigualdad.

(ii) Si por el contrario $\operatorname{diam}(Y) < \infty$ y de nuevo, Z es un espacio métrico en el cual se encajan X y Y de manera isométrica, podemos hacer lo siguiente.
Sean $x_1, x_2 \in X$ y $y_1, y_2 \in Y$. Entonces por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d(y_1, y_2) \leq d(y_1, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2).$$

Ahora, como $\operatorname{diam}(X) = \sup_{x_1, x_2 \in X} d(x_1, x_2)$ se tiene que

$$d(y_1, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2) \leq d(y_1, x_1) + \operatorname{diam}(X) + d(x_2, y_2).$$

Luego $d(y_1, y_2) - \operatorname{diam}(X) - d(x_2, y_2) \leq d(y_1, x_1)$ de donde, aplicando ínfimo respecto a x_1 de ambos lados

$$d(y_1, y_2) - \operatorname{diam}(X) - d(x_2, y_2) \leq \inf_{x_1} \{d(y_1, x_1)\}.$$

También tenemos que $d(y_1, y_2) - \operatorname{diam}(X) - \inf_{x_1} \{d(y_1, x_1)\} \leq d(x_2, y_2)$, por lo que aplicando ínfimo, pero ahora respecto a x_2 se tiene que

$$d(y_1, y_2) - \operatorname{diam}(X) - \inf_{x_1} \{d(y_1, x_1)\} \leq \inf_{x_2} \{d(x_2, y_2)\}.$$

Por lo tanto

$$d(y_1, y_2) \leq \operatorname{diam}(X) + d(y_1, X) + d(y_2, X).$$

Se sigue que $\operatorname{diam}(Y) - \operatorname{diam}(X) \leq \sup_{y_1, y_2} \{d(y_1, X)\} + \sup_{y_1, y_2} \{d(y_2, X)\}$, pero por la proposición 1.16,

$$\sup_{y_1, y_2} \{d(y_1, X)\} + \sup_{y_1, y_2} \{d(y_2, X)\} \leq 2d_H(X, Y)$$

en Z. Claramente también $\operatorname{diam}(X) - \operatorname{diam}(Y) \leq 2d_H(X, Y)$ pues d_H es no negativa. Luego, como esto se vale para cada Z

$$|\operatorname{diam}(X) - \operatorname{diam}(Y)| \leq 2d_{GH}(X, Y)$$

$\square$

Corolario 2.5. *Si P es un espacio métrico que consta de un solo punto, entonces $d_{GH}(X, P) = \operatorname{diam}(X)/2$ para cualquier espacio métrico X.*

Demostración:

Como P es un solo punto, tenemos que $\operatorname{diam}(P) = 0 < \infty$. Luego por el ejercicio anterior, $d_{GH}(X, P) = \frac{1}{2}|\operatorname{diam}(P) - \operatorname{diam}(X)| = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(X)$.

$\square$

La siguiente proposición establece una de las propiedades más importantes de la distancia de Gromov-Hausdorff, a saber la desigualdad del triángulo. Para demostrarla haremos una observación acerca de la definición de dicha distancia. Para poder comparar dos espacios métricos X y Y necesitamos que exista al menos otro espacio métrico Z que contenga copias isométricas de los dos primeros y en principio podría no existir ninguno. Afortunadamente vemos que ése no es el caso notando lo siguiente.

Consideremos $X' \cup Y' \subset Z$ la unión de las copias isométricas de X y Y y sean $f : X \to X'$ y $g : Y \to Y'$ isometrías. Luego en $X \cup Y$ consideramos $d : (X \cup Y) \times (X \cup Y) \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = d_Z(f(x), g(y)) + \delta$ donde δ es una constante positiva fija y d_Z es la métrica de Z. Tenemos que d es una métrica ya que d_Z lo es. Por otro lado, si $d_H(X, Y) < r$ en Z entonces $d_H(X, Y) < r + \delta$ en $X \cup Y$. En otras palabras podemos siempre encajar a X y Y en su unión disjunta $X \sqcup Y$ considerada con una métrica que extienda a las de X y Y.

Proposición 2.6. *d_{GH} satisface la desigualdad del triángulo, es decir, si X,Y y Z son espacios métricos, entonces se tiene que*

$$d_{GH}(X, Z) \leq d_{GH}(X, Y) + d_{GH}(Y, Z)$$

Demostración:

Sean d_{12} y d_{23} métricas en $X_1 \cup X_2$ y $X_2 \cup X_3$ respectivamente, que extiendan las métricas de X_1, X_2 y X_3, y definamos la distancia entre $x_1 \in X_1$ y $x_3 \in X_3$ como

$$d_{13}(x_1, x_3) = \inf_{x_2 \in X_2} \{d_{12}(x_1, x_2) + d_{23}(x_2, x_3)\}$$

Claramente d_{13} satisface la desigualdad del triángulo en $X_1 \cup X_3$ pues si $x, y \in X_1$, $z \in X_3$ y $x_2 \in X_2$ utilizando la desigualdad del triángulo en $X_1 \cup X_2$ se tiene que $d_{12}(x, x_2) \leq d_{12}(x, y) + d_{12}(y, x_2)$, de donde

$$\begin{aligned}
d_{13}(x, z) &= \inf_{x_2 \in X_2} \{d_{12}(x, x_2) + d_{23}(x_2, z)\} \\
&\leq \inf_{x_2 \in X_2} \{d_{12}(x, y) + d_{12}(y, x_2) + d_{23}(x_2, z)\} \\
&\leq d_{12}(x, y) + \inf_{x_2 \in X_2} \{d_{12}(y, x_2) + d_{23}(x_2, z)\} \\
&= d_{12}(x, y) + d_{13}(y, z) \\
&= d_{13}(x, y) + d_{13}(y, z)
\end{aligned}$$

Los demás casos son análogos. Luego es claro que d_{13} es una métrica en $X_1 \cup X_3$. Luego de la definición de d_{13} se tiene que

$$d_H(x_1, x_3) \leq d_H(X_1, X_2) + d_H(X_2, X_3)$$

Basta ahora tomar el ínfimo sobre todas las posibles métricas sobre $X_1 \cup X_2$ y $X_2 \cup X_3$ para obtener la desigualdad buscada.

$\square$

La observación 1.14 puede ser refinada con la herramienta proporcionada por d_{GH}. Podemos modificar la demostración utilizando esta distancia en lugar de la de Lipschitz para quitarnos la restricción de que los espacios de la colección sean homeomorfos. Es decir, la familia de espacios métricos compactos no isométricos entre sí, tiene a lo más la cardinalidad de $\mathbb{R}$. Éste será el espacio donde trabajemos.

El concepto de *correspondencia*, que daremos a continuación recuerda la idea de comparar a los espacios utilizando las funciones que hay entre ellos. sin embargo una correspondencia es algo mucho más débil. Damos la definición para conjuntos en general aunque sólo nos interese el caso en el que éstos son espacios métricos. Veremos que en términos de correspondencias recuperamos la definición de la distancia de Gromov-Hausdorff. Inmediatamente después de la definición damos un par de ejemplos y una proposición que nos dicen cómo se comportan las correspondencias.

Definición 2.7. *Sean X y Y conjuntos. Diremos que $\Re \subset X \times Y$ es una correspondencia entre X y Y si satisface la siguiente condición: para cada $x \in X$ existe al menos una $y \in Y$ tal que $(x, y) \in \Re$ y de igual forma para cada $y \in Y$ existe al menos una $x \in X$ tal que $(x, y) \in \Re$.*

Ejemplo 2.8. *Si $f : X \to Y$ es una función suprayectiva, entonces $\Re = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ es una correspondencia entre X y Y, que llamamos La correspondencia asociada a f.*

Ejemplo 2.9. *Sean $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$ dos funciones suprayectivas para algún conjunto Z. Entonces se puede definir una correspondencia $\Re$ por*

$$\Re = \{(f(z), g(z)) \; z \in Z\}$$

Proposición 2.10. *Cualquier correspondencia puede obtenerse mediante la construcción anterior.*

Demostración:

Sean X y Y dos conjuntos y $\Re$ una correspondencia en $X \times Y$.Fijemos dos puntos $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$ y consideremos $Z = X \cup Y$. Definamos ahora dos funciones $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$ como sigue:

$$f(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in X \\ x_0 & \text{si } z \notin X \end{cases}$$

y

$$g(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in Y \\ y_0 & \text{si } z \notin Y \end{cases}$$

Notemos que estas funciones son suprayectivas. De esta forma, si $(x, y) \in \Re$, entonces $(x, y) = (f(x), g(y))$.

$\square$

Así como definimos la distorsión de una función, podemos definir el concepto análogo para las correspondencias que llamaremos de igual forma. No sólo por la idea de comparación sino porque además veremos que la distorsión de una correspondencia asociada a una función es simplemente la distorsión de esta última. Así, al comparar espacios mediante sus correspondencias, obtenemos de manera implícita la comparación mediante las funciones que pudiera haber entre estos.

Definición 2.11. *Sea $\Re$ una correspondencia entre espacios métricos X y Y. Definimos la distorsión de $\Re$ como*

$$\operatorname{dis}(\Re) = \sup\{|d_X(x,x') - d_Y(y,y')| \mid (x,y),(x',y') \in \Re\}$$

donde d_X y d_Y son las métricas de X y Y respectivamente.

Observación 2.12. *Claramente para una correspondencia $\Re$ asociada a una función $f : X \to Y$ como en el Ejemplo 2.8 se tiene que* $\operatorname{dis}\Re = \operatorname{dis}f$*. Recordemos que la relación está dada por $\Re = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. Tenemos que*

$$\operatorname{dis}(\Re) = \sup\{|d_X(x,x') - d_Y(y,y')| \ : \ (x,y),(x',y') \in \Re\}$$

pero entonces como $y = f(x)$ y $y' = f(x')$ se tiene que

$$\operatorname{dis}(\Re) = \sup_{x,x' \in X}\{|d_X(x,x') - d_Y(f(x), f(x'))|\} = \operatorname{dis}(f)$$

De manera similar si $\Re$ es una correspondencia obtenida de las funciones $f : Z \to Y$ y $g : Z \to Y$ como en el ejemplo 2.9 basta sustituir en la definición de $\operatorname{dis}\Re$ *para obtener que*

$$\operatorname{dis}\Re = \sup_{z,z' \in Z} |d_X(f(z), f(z')) - d_Y(g(z), g(z'))|\,.$$

Ya que tenemos una relación tan estrecha entre ambas distorsiones, la siguiente proposición resulta natural a la vez que útil.

Proposición 2.13. *Sea $\Re$ una correspondencia entre dos espacios métricos X y Y. Probar que* $\operatorname{dis}\Re = 0$ *si y sólo si $\Re$ está asociada con una isometría de X en Y.*

Demostración:

(i) Supongamos que $\Re$ está asociada con una isometría $f : X \to Y$. Entonces $\Re = \{(x, f(x)) \ : \ x \in X\}$ y por la observación 2.12, $\operatorname{dis}\Re = \operatorname{dis}f = 0$.

(ii) Supongamos ahora que $\mathrm{dis}\Re = 0$. Esto es $\sup\{|d_X(x,x') - d_Y(y,y')| \ : \ (x,y),(x',y') \in \Re\} = 0$ pero como $|d_X(x,x') - d_Y(y,y')| \geq 0$ para cada x,x',y,y' entonces $d_X(x,x') = d_Y(y,y')$.

Esto obliga a que si $(x,y),(x,y') \in \Re$ entonces $y = y'$ ya que $0 = d_X(x,x) = d_Y(y,y')$. Luego definimos la función $f : X \to Y$ dada por $f(x) = y$ si $(x,y) \in \Re$, que por lo anterior es biyectiva y preserva distancias, es decir, es una isometría y claramente $\Re = \{(x,f(x)) \ : \ x \in X\}$.

Ya estamos en posición de relacionar la distancia de Gromov-Hausdorff con el concepto de correspondencia. Tal relación será tan grande que podremos dar una fórmula en términos de correspondencias de la distancia de Gromov-Hausdorff. Esto es muy deseable pues nos permite pasar de la idea abstracta de esta distancia a una forma de calcularla más eficiente, lo cual también hace varias propiedades más evidentes y fáciles de demostrar.

Teorema 2.14. *Para cualesquiera dos espacios métricos X y Y*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2} \inf_{\Re}(\mathrm{dis}\Re)$$

donde el ínfimo es respecto a todas las correspondencias $\Re$ entre X y Y. En otras palabras $d_{GH}(X,Y)$ es igual al ínfimo de $r > 0$ tales que existe una correspondencia $\Re$ entre X y Y con $\mathrm{dis}\Re < 2r$.

Demostración:
Lo haremos en dos partes:

(i) Queremos demostrar que *para cada r tal que $d_{GH}(X,Y) < r$ existe una correspondencia $\Re$ con $\mathrm{dis}\Re < 2r$.*
Como $d_{GH}(X,Y) < r$ podemos asumir que X y Y son subespacios de algún espacio métrico Z en el cual $d_H(X,Y) < r$. Definamos entonces $\Re$ como:

$$\Re = \{(x,y) \ : \ x \in X, y \in Y, d(x,y) < r\}$$

donde d es la métrica de Z. Tenemos que $\Re$ es una correspondencia pues como $d_H(X,Y) < r$ por la proposición 1.16, incisio (ii), para cada $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $d(x,y) < r$ y viceversa. Ahora, si $(x,y) \in \Re$ y $(x',y') \in \Re$, por la desigualdad del triángulo en Z

$$|d(x,x') - d(y,y')| \leq d(x,y) + d(x',y') < 2r$$

De aquí que $\mathrm{dis}\Re \leq 2r$.

(ii) Veremos que $d_{GH}(X,Y) \leq \frac{1}{2}\mathrm{dis}\Re$ *para cualquier correspondencia* $\Re$ *entre* X *y* Y.
Consideremos $X \sqcup Y$ la unión disjunta de X y Y y dada una correspondencia $\Re$ definamos sobre $X \sqcup Y$

$$d(x,y) = \text{ínf}\left\{d_X(x,x') + d_Y(y,y') + r \ : \ (x',y') \in \Re\right\}.$$

Luego, si $(x,y) \in \Re$ entonces el número $d_X(x,x) + d_Y(y,y) + r = r$ aparece en el conjunto al cual estamos calculando el ínfimo, más aún, tenemos que $d_X(x,x') + d_Y(y,y') + r \geq r$ pues d_X y d_Y son mayores o iguales que cero por ser métricas. Por lo tanto en este caso $d(x,y) = r$.

$\square$

El concepto de correspondencia es tan útil que podríamos haber empezado definiendo la distancia de Gromov-Hausdorff mediante el teorema anterior y probar a partir de ahí las propiedades básicas. Como veremos a continuación se puede probar la desigualdad del triángulo de manera relativamente sencilla siguiendo ese camino.

Proposición 2.15. *Sean* X,Y *y* Z *espacios métricos,* $\Re_1$ *una correspondencia entre* X *y* Y *y* $\Re_2$ *una correspondencia entre* Y *y* Z*. Definimos la composición de* $\Re_1$ *y* $\Re_2$*, denotada por* $\Re_1 \circ \Re_2$ *como*

$$\Re_1 \circ \Re_2 = \left\{(x,z) \in X \times Z \mid \text{existe } y \in Y \text{ tal que } (x,y) \in \Re_1 \text{ y } (y,z) \in \Re_2\right\}.$$

Entonces

(i) $\Re_1 \circ \Re_2$ *es una correspondencia.*

(ii) $\mathrm{dis}(\Re_1 \circ \Re_2) \leq \mathrm{dis}\Re_1 + \mathrm{dis}\Re_2$.

(iii) Podemos dar una prueba alterna de la desigualdad del triángulo para la distancia de Gromov-Hausdorff utilizando la desigualdad anterior.

Demostración:

(i) Dado $x \in X$, como $\Re_1$ es una correspondencia, existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in \Re_1$. Luego, como $\Re_2$ es una correspondencia, existe $z \in Z$ tal que $(y, z) \in \Re_2$. Por lo tanto $(x, z) \in \Re_1 \circ \Re_2$ para cada x. De forma análoga, para cada $z \in Z$ existe $x \in X$ tal que $(x, z) \in \Re_1 \circ \Re_2$.

(ii)

$$\begin{aligned} \operatorname{dis}(\Re_1 \circ \Re_2) &= \sup\{|d_X(x, x') - d_Z(z, z')|\} \\ &= \sup\{|d_X(x, x') - d_Y(y, y') + d_Y(y, y') - d_Z(z, z')|\} \\ &\leq \sup\{|d_X(x, x') - d_Y(y, y')|\} + \sup\{|d_Y(y, y') - d_Z(z, z')|\} \\ &= \operatorname{dis}\Re_1 + \operatorname{dis}\Re_2 \end{aligned}$$

(iii) Definamos para los conjuntos X, Y y Z,

$$R_X^Y = \{\Re \subset X \times Y \mid \Re \text{ es una correspondencia}\}.$$

y

$$R_X^Y \circ R_Y^Z = \left\{\Re_1 \circ \Re_2 \mid \Re_1 \in R_X^Y, \Re_2 \in R_Y^Z\right\}$$

Ahora sean $\Re_1 \in R_X^Y$ y $\Re_2 \in R_Y^Z$. Entonces por el inciso (i), $\Re_1 \circ \Re_2 \in R_X^Z$. Luego, se tiene que

$$\inf_{R_X^Z}\{\operatorname{dis}\Re\} \leq \inf_{R_X^Y \circ R_Y^Z}\{\operatorname{dis}\Re_1 \circ \Re_2\}.$$

Pero por el inciso (ii) se tiene que

$$\inf_{R_X^Y \circ R_Y^Z}\{\operatorname{dis}\Re_1 \circ \Re_2\} \leq \inf_{R_X^Y}\{\operatorname{dis}\Re\} + \inf_{R_Y^Z}\{\operatorname{dis}\Re\}$$

Combinando ambas desigualdades se tiene que

$$\inf_{R_X^Z}\{\operatorname{dis}\Re\} \leq \inf_{R_X^Y}\{\operatorname{dis}\Re\} + \inf_{R_Y^Z}\{\operatorname{dis}\Re\}$$

y por el teorema 2.14 se tiene que

$$d_{GH}(X, Z) \leq d_{GH}(X, Y) + d_{GH}(Y, Z)$$

□

Nos interesa ahora analizar la convergencia en el sentido de Gromov-Hausdorff, lo cual haremos con detalle en el siguiente capítulo. Para este propósito a continuación definiremos un tipo de funciones con las cuales además demostraremos las últimas propiedades de d_{GH}, que cerrarán este capítulo.

Definición 2.16. *Sean X y Y espacios métricos y $\varepsilon > 0$. Diremos que una función $f : X \to Y$ (posiblemente discontinua) es una ε-isometría si se cumplen las condiciones siguientes:*

(i) $\mathrm{dis} f \leq \varepsilon$

(ii) *$f(X)$ es una ε-red en Y.*

Corolario 2.17. *Sean X y Y dos espacios métricos y $\varepsilon > 0$. Entonces:*

(i) Si $d_{GH}(X,Y) < \varepsilon$, entonces existe una 2ε-isometría de X en Y.

(ii) Si existe una ε-isometría de X en Y, entonces $d_{GH}(X,Y) < 2\varepsilon$.

Demostración:

(i) Por el Teorema 2.14 podemos considerar una correspondencia $\Re$ entre X y Y con $\mathrm{dis}\Re < 2\varepsilon$. Definiremos ahora una función $f : X \to Y$ como sigue:
Para cada $x \in X$ sea $f(x) \in Y$ tal que $(x, f(x)) \in \Re$. Ahora como $f(X) \subset Y$ tenemos que

$$\sup_{x,x' \in X} \{d_X(x,x') - d_Y(f(x), f(x'))\} \leq$$
$$\sup_{x,x' \in X} \{d_X(x,x') - d_Y(y,y') \;:\; (x,y),(x'y') \in \Re\}.$$

De donde $\mathrm{dis}(f) \leq \mathrm{dis}\Re < 2\varepsilon$. Basta ver que $f(X)$ sea una 2ε-red con lo cual f será una 2ε-isometría. Sea $y \in Y$ y $x \in X$ tal que $(x,y) \in \Re$. Ahora, como tanto y como $f(x)$, están en correspondencia con x, se tiene que

$$d_Y(y, f(x)) - d_X(x,x) \leq |d_Y(y, f(x)) - d_X(x,x)| \leq \mathrm{dis}\Re < 2\varepsilon$$

pero entonces

$$d_Y(y, f(x)) < d(x,x) + 2\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Pero esto vale para cada $y \in Y$, por lo que $f(X)$ es una 2ε-red en Y.

(ii) Sea f una ε-isometría. Definamos $R \subset X \times Y$ como

$$\Re = \{(x,y) \in X \times Y \ : \ d(y, f(x)) \leq \varepsilon\}$$

$\Re$ es una correspondencia pues $f(X)$ es una ε-red en Y. Luego si $(x,y), (x',y') \in \Re$

$$\begin{aligned}
|d_Y(y,y') - d_X(x,x')| &\leq |d_Y(y,f(x)) + d_Y(f(x),y') - d_X(x,x')| \\
&\leq |d_Y(y,f(x)) + d_Y(f(x),f(x') \\
&\quad + d_Y(f(x'),y') - d_X(x,x')| \\
&\leq |d_Y(f(x),f(x') - d_X(x,x')| \\
&\quad + |d_Y(y,f(x)) + d(f(x'),y')| \\
&\leq \mathrm{dis}(f) + 2\varepsilon \\
&< 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Luego $\mathrm{dis}\Re < 3\varepsilon$, y por el teorema 2.14 $d_{GH}(X,Y) \leq \frac{1}{2}\mathrm{dis}\Re < \frac{3}{2}\varepsilon < 2\varepsilon$.

□

El siguiente teorema de gran importancia, nos dice cómo es posible considerar a d_{GH} como una métrica genuina. Nuevamente nos restringiremos a los espacios métricos compactos.

Teorema 2.18. *La distancia de Gromov-Hausdorff define una métrica finita en el espacio de clases de isometría de espacios métricos compactos. Es decir, es no negativa, simétrica y satisface la desigualdad del triángulo. Más aún,* $d_{GH}(X,Y) = 0$ *si y sólo si,* X *y* Y *son isométricos.*

Demostración:
La no-negatividad, la simetría y la desigualdad del tríangulo están demostradas en el teorema 2.14 y la proposición que le sigue. Resta probar que $d_{GH}(X,Y) = 0$ si y sólo si, X y Y son isométricos.
Para la parte de suficiencia consideremos la sucesión de números positivos $\{\varepsilon_n\}$ dada por $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Por el corolario 2.17 para cada n existe una $2\varepsilon_n$-isometría $f_n : X \to Y$. Así que como $\varepsilon_n \to 0$ entonces $\mathrm{dis} f_n \to 0$. Ahora como X es compacto, podemos encontrar $S \subset X$ un conjunto denso numerable. Luego, para cada $x \in S$, tenemos una sucesión $\{f_n(x)\}$ en Y. Por la compacidad de Y, usando el proceso diagonal de Cantor podemos encontrar

una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que para cada $x \in S$, $\{f_{n_k}(x)\}$ sea convergente. Definimos entonces $f : S \to Y$ como

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

Pero entonces para cada $x, y \in S$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \lim_{k\to\infty} d(f_{n_k}(x), f_{n_k}(y)) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} (d(x,y) + \mathrm{dis} f_{n_k}) \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

Por lo tanto f preserva distancias. Podemos extender f a una función $\hat{f}$ definida en todo X, que también preserva distancias.
Repetimos el proceso hecho pero ahora tomando $2\varepsilon_n$-isometrías $g_n : Y \to X$, con lo cual encontramos $\hat{g} : Y \to X$ que preserva distancias. De igual forma, podemos encontrar una función que preserve distancias de Y en X. Se sigue que X y Y son isométricos, utilizando el mismo argumento que en el Teorema 1.13 inciso (d).

□

Podemos generalizar el teorema anterior como sigue.

Proposición 2.19. *Si X y Y son espacios métricos tales que $d_{GH}(X,Y) = 0$, X es compacto y Y es completo, entonces X y Y son isométricos.*

Demostración:
Veamos que de hecho Y es compacto, con lo cual esta proposición se reduce al teorema anterior. Sea $\varepsilon > 0$. Como Y es completo, basta mostrar que es totalmente acotado, esto es, basta construir una ε-red finita en Y para cada ε. Como $d_{GH}(X,Y) = 0$ en particular $d_{GH}(X,Y) < \frac{\varepsilon}{6}$. Entonces por el corolario 2.17 existe $f : X \to Y$ $\varepsilon/3$-isometría.
Consideremos ahora la cubierta abierta $\left\{B_{\varepsilon/3}(x) \ : \ x \in X\right\}$ de X . Como éste es compacto, podemos extraer una subcubierta finita, digamos $\left\{B_{\varepsilon/3}(x_i)\right\}_{i=1}^{N}$.
Ahora consideremos $\{y_i\}_{i=1}^N$ donde $y_i = f(x_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.
Como $f(X)$ es una $\varepsilon/3$-red en Y, existe $x \in X$ tal que $d(y, f(x)) \leq \varepsilon/3$. Por otro lado, en X existe x_i tal que $d(x, x_i) \leq \varepsilon/3$. Luego

$$\begin{aligned} d(y, f(x_i)) &\leq d(y, f(x)) + d(f(x), f(x_i)) \\ &\leq \varepsilon/3 + (\mathrm{dis}(f) + d(x, x_i)) \\ &\leq 3(\varepsilon/3) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Entonces para y, $f(x_i)$ es tal que $d(y, f(x_i)) \leq \varepsilon$. Pero y fue arbitrario, por lo que $\{y_i\}$ es una ε-red en Y.

$\square$

Capítulo 3

Convergencia en el sentido de Gromov-Hausdorff

En el capítulo 1 definimos varios tipos de distancias entre espacios métricos. En este capítulo buscaremos relacionarlos con la de Gromov-Hausdorff. En ese proceso encontraremos varias propiedades de la distancia de Gromov-Hausdorff y daremos algunas otras, que nos ayudarán a entender mejor el concepto de convergencia en este nuevo sentido. Comenzaremos con las siguientes afirmaciones que enunciamos como ejemplos en los cuales observamos que la distancia de Gromov-Hausdorff no sólo es una generalización de la de Hausdorff sino también de la Uniforme y de la de Lipschitz.

Ejemplo 3.1 (Convergencia en el sentido de Hausdorff)**.** *Si X es un espacio métrico y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subespacios que converge respecto a la distancia de Hausdorff, entonces converge respecto a la de Gromov-Hausdorff, ya que por definición, ésta es menor o igual que la primera.*

Ejemplo 3.2 (Convergencia Uniforme)**.** *Supongamos que $X_n \to X$ uniformemente. Entonces existen homeomorfismos $f_n : X_n \to X$ tales que* $\mathrm{dis} f_n \to 0$*. Ahora, como cada f_n es suprayectiva, podemos definir las correspondencias dadas por $\Re_n = \{(x, f_n(x))\}$. Por la Observación 2.12 se tiene que* $\mathrm{dis}\Re_n = \mathrm{dis} f_n$*, y por el teorema 2.14* $d_{GH}(X_n, X) \leq \mathrm{dis}\Re_n \to 0$*. Por lo tanto $X_n \to_{GH} X$.*

Ejemplo 3.3 (Convergencia en el sentido de Lipschitz)**.** *De hecho se tiene que la convergencia en el sentido de Lipschitz implica la convergencia* *uniforme. Supongamos que $X_n \to_{lip} X$. Entonces existe una sucesión de homeomorfismos bi-lipschitz $f_n : X_n \to X$ tales que $\varepsilon_n = \mathrm{dil} f_n \to 1$. Esto es*

$$\sup_{x,x' \in X_n} \frac{d_{X_n}(x,x')}{d_X(f(x),f(x'))} \to 1$$

Ahora, para cada $x, x' \in X_n$ se tiene que $d_{X_n}(x,x') \leq \varepsilon_n d_X(f(x),f(x'))$, pero como $\varepsilon_n \to 0$, $d_{X_n}(x,x') \to d_X(f(x),f(x'))$ de donde

$$|d_{X_n}(x,x') - d_X(f(x),f(x'))| \to 0$$

Por lo tanto $X_n \to_{unif} X$ y por el ejemplo anterior tenemos que $X_n \to_{GH} X$.

El siguiente ejemplo presenta otra situación que generaliza la distancia de Gromov-Hausdorff. En este caso la sucesión de espacios está dada por uno fijo al cual dotamos de distintas métricas de forma que éstas converjan.

Ejemplo 3.4 (Convergencia uniforme a una semi-métrica)**.** *Sea $\{d_n\}$ una sucesión de métricas en un conjunto fijo X que converge uniformemente a una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Si consideramos la relación de equivalencia dada por $x \asymp y$ si y sólo si $d(x,y) = 0$, entonces observamos que d es una semi-métrica. Ahora consideremos las proyecciones $\pi_n : (X, d_n) \to (X/d, d)$, dadas por $\pi_n(x) = [x]$. Como $d_n \to_{unif} d$ entonces $|d_n(x_1,x_2) - d(\pi_n(x_1), \pi_n(x_2)| \to 0$ para cada $x_1, x_2 \in X$. Luego $\mathrm{dis}\pi_n \to 0$ y por lo tanto $(X, d_n) \to_{GH} (X/d, d)$.*

Observemos que si X es finito basta pedir que $d_n(x,y) \to d(x,y)$ pues en conjuntos finitos, la convergencia puntual implica la convergencia uniforme.

Pondremos nuestra atención en los espacios métricos finitos. Podríamos pensar que éstos son demasiado simples para ser relevantes en comparación con otros espacios, sin embargo, recuerde el lector que en particular las ε-redes pueden ser consideradas como espacios métricos y que han sido decisivas para nuestro estudio. De hecho veremos que juegan un papel muy importante; comencemos analizando la convergencia de este tipo de espacios, primero suponiendo que los espacios de la sucesión son finitos, y después para el límite. Este análisis se hace en las siguientes tres proposiciones.

Proposición 3.5. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente de espacios métricos finitos de cardinalidad fija N. Entonces existe una sucesión de métricas $\{d_n\}$ en un conjunto fijo X tal que (X, d_n) es isométrico a X_n para cada n y $\{d_n\}$ converge uniformemente a una semimétrica. En particular el límite de $\{X_n\}$ es un espacio finito de cardinalidad menor o igual a N.*

Demostración:

Como cada X_n es finito, podemos ordenarlo, así, supongamos que $X_n = \{x_i^n\}_{i=1}^N$. Sea $X = \{1, 2, \ldots, N\}$ y para cada n definimos la métrica $d_n : X \times X \to \mathbb{R}$ como $d_n(i,j) = d_{X_n}(x_i^n, x_j^n)$ para $1 \leq i, j \leq N$. De esta manera tenemos que X_n es isométrico a (X, d_n) con la isometría $f : X_n \to (X, d_n)$, $f(x_i^n) = i$. Ahora, d_n converge uniformemente a una semimétrica ya que si $\hat{X}$ es el límite de Gromov-Hausdorff de X_n, entonces existe una sucesión de ε_n-isometrías tales que $|d_{X_n}(x_i^n, x_j^n) - d_{\hat{X}}(f_n(x_i^n), f_n(x_j^n)| = |d_n(i,j) - d_{\hat{X}}(f_n(x_i^n), f_n(x_j^n)| \to 0$. Por lo tanto, por el ejemplo anterior, $\hat{X}$ es isométrico a $(X/d, d)$ donde d es la semimétrica a la cual converge $\{d_n\}$.

$\square$

Proposición 3.6. $\{X_n\}$ *una sucesión de espacios métricos, converge a un espacio de un solo punto si y sólo si* $\mathrm{diam} X_n \to 0$.

Demostración:

(i) Supongamos que $X_n \to_{GH} P$ un espacio de un solo punto. Por el Corolario 2.5 tenemos que $d_{GH}(X_n, P) = \mathrm{diam}(X_n)/2 \to 0$. pero entonces $\mathrm{diam}(X_n) \to 0$.

(ii) De forma inversa tenemos que si $\mathrm{diam}(X_n) \to 0$, como $d_{GH}(X_n, P) = \mathrm{diam}(X_n)/2 \to 0$, entonces $d_{GH}(X_n, P) \to 0$, de donde $X_n \to_{GH} P$

$\square$

Proposición 3.7. *Sea* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de espacios métricos y* X *un espacio métrico finito de cardinalidad* N, $X = \{x_i \ : \ 1 \leq i \leq N\}$. *Entonces se tiene que:*

(i) Si $X_n \to_{GH} X$, *entonces para* n *suficientemente grande, la cardinalidad de* X_n *es al menos* N.

(ii) $X_n \to_{GH} X$ *si y sólo si se tiene la siguiente condición: Para toda* n *suficientemente grande* X_n *puede separarse como una unión disjunta de* N *conjuntos no vacíos* $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,N}$ *tales que para toda* i, j $\mathrm{diam}(X_{n,i}) \to 0$ *y* $d_{X_n}(X_{n,i}, X_{n,j}) \to d_X(x_i, x_j)$.

Demostración:

(i) Supongamos que $d_{GH}(X_n, X) \to 0$, pero que la cardinalidad de cada X_n es estrictamente menor a N. Entonces por la Proposición 3.5, la cardinalidad de X no puede ser mayor a N lo cual es una contradicción.

(ii) Supongamos que $X_n = \bigsqcup_{i=1}^{N} X_{n,i}$, con $\text{diam} X_{n,i} \to 0$ y $d(X_{n,i}, X_{n,j}) \to d_X(x_i, x_j)$. Definamos para cada n, $f_n : X_n \to X$ dada por $f(x) = x_i$ si $x \in X_{n,i}$. Veamos que f_n es ε_n-isometría para alguna sucesión $\varepsilon_n \to 0$.

Observemos primero que $f_n(X_n) = X$ por lo que $f_n(X_n)$ es una ε-red en X para cualquier $\varepsilon > 0$. Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} \text{dis} f_n &= \sup_{x,y \in X_n} |d_{X_n}(x,y) - d_X(f_n(x), f_n(y))| \\ &= \sup_{i,j} |d(X_{n,i}, X_{n,j}) - d_X(f_n(x), f_n(y))| \to 0 \end{aligned}$$

Luego $\text{dis} f_n = \varepsilon_n \to 0$. Por lo tanto cada f_n es una ε_n-isometría, y por el Corolario 2.17 $X_n \to_{GH} X$.

Supongamos ahora que $X_n \to_{GH} X$. Entonces existe una sucesión de números positivos $\varepsilon_n \to 0$ y una sucesión de ε_n-isometrías $f_n : X_n \to X$. Definamos $X_{n,i} = f_n^{-1}(\{x_i\})$ para $1 \leq i \leq N$. Necesariamente los $X_{n,i}$ son disjuntos ya que de otra forma se tendría que existen $x \in X_{n,i}$ y $y \in X_{n,j}$ con $i \neq j$ tales que $x_i = f_n(x) = f_n(y) = x_j$ y f_n no sería función. Además $X_{n,i} \neq \emptyset$, pues si no existiera $x \in X_n$ tal que $f_n(x) = x_i$ entonces $f_n(X_n)$ no sería ε-red en X para $\varepsilon < \text{mín}_{j \neq i}\{d_X(x_j, x_i)\}$.

Ahora consideremos las funciones $f_{n,i} = f_n|_{X_{n,i}}$. Como $f_{n,i}(X_{n,i}) = \{x_i\}$ entonces es una ε-red en $\{x_i\}$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Además como $\text{dis} f_n \to 0$, entonces $\text{dis}(f_{n,i}) \to 0$. Hemos encontrado entonces una sucesión de ε_n-isometrías con $\varepsilon_n \to 0$, de donde $X_{n,i} \to \{x_i\}$ y por la Proposición anterior, $\text{diam}(X_{n,i}) \to 0$.

Por otro lado, notemos que si $x \in X_{n,i}$ y $y \in X_{n,j}$ se tiene que $\varepsilon_n \geq \mathrm{dis}(f_n) \geq |d_{X_n}(x,y) - d_X(x_i,x_j)|$ de donde

$$-\varepsilon_n \leq d_{X_n}(x,y) - d_X(x_i,x_j) \leq \varepsilon_n$$

Pero entonces si tomamos el ínfimo sobre $x \in X_{n,i}$ y $y \in X_{n,j}$ tendremos para cada n que

$$-\varepsilon_n \leq d(X_{n,i}, X_{n,j}) - d_X(x_i,x_j) \leq \varepsilon_n$$

Luego, como $\varepsilon_n \to 0$ se sigue que $d_{X_n}(X_{n,i}, X_{n,j}) \to d_X(x_i,x_j)$.

□

En realidad los espacios finitos también se comportan de esta manera con la distancia de Lipschitz y la uniforme. Como veremos en la siguiente proposición, si nos restringimos a la clase de espacios métricos finitos de cardinalidad fija, la topología que generan estas distancias es la misma. por lo cual, las afirmaciones que hagamos acerca de la convergencia de estos espacios se respetará en cualquera de esas tres distancias.

Proposición 3.8. *Sea N un número natural fijo. La distancia de Lipschitz, la uniforme y la distancia de Gromov-Hausdorff determinan la misma topología en la clase de espacios métricos finitos de cardinalidad N.*

Demostración:
Sean τ_U, τ_L y τ_{GH} las topologías generadas por las distancias uniforme, de Lipschitz y de Gromov-Hausdorff respectivamente. Basta demostrar que

$$\tau_L \subset \tau_{GH} \subset \tau_U \subset \tau_L.$$

(i) Consideremos $V \in \tau_L$ y su complemento W. Ahora, sea $\{X_n\}$ una sucesión en W convergente en el sentido de Gromov-Hausdorff. Por la proposición 3.5, existe un conjunto finito X fijo y una sucesión de métricas d_n en X tales que (X, d_n) es isométrico a X_n y tal que $(X, d_n) \to (X/d, d)$ donde X/d será isométrico al límite de Gromov-Hausdorff de $\{X_n\}$. Como cada X_n es finito, tendremos que de hecho es homeomorfo a (X, d_n), para cada n. Luego basta tomar la sucesión de homeomorfismos $id_n : (X, d_n) \to (X/d, d)$ para comprobar la convergencia de X_n en el sentido de Lipschitz. Pero como W es cerrado en τ_L, entonces el límite de $\{X_n\}$ está en W. Luego W es cerrado en τ_{GH} por lo que $V \in \tau_{GH}$. De aquí que $\tau_L \subset \tau_{GH}$.

(ii) Sea $V \in \tau_{GH}$. Consideremos su complemento W, que es un cerrado. Tomemos una sucesión de espacios $\{X_n\}$ en W, tal que $X_n \rightarrow_{unif} X$. Por el Ejemplo 3.2, $X_n \rightarrow_{GH} X$. Luego X es punto de acumulación de W en τ_U. Esto prueba que todos los puntos de acumulación de W en τ_U lo son en τ_{GH}, pero como W es cerrado en τ_{GH}, entonces $X \in W$. Por lo tanto W es cerrado en τ_U. Luego $V \in \tau_U$. Esto es para cada V por lo que $\tau_{GH} \subset \tau_U$.

(iii) De forma análoga al inciso anterior, el Ejemplo 3.3 prueba que $\tau_U \subset \tau_L$.

□

La siguiente Observación, aunque muy sencilla en apariencia, muestra la importancia de los espacios finitos. Extenderemos la idea contenida en tal observación mediante el concepto de (ε, δ)-aproximación, es decir, reformularemos la convergencia de espacios métricos, en términos de sus subconjuntos finitos.

Observación 3.9. *Todo espacio métrico compacto X es límite de espacios finitos. Para demostrarlo, consideremos una sucesión de números positivos $\{\varepsilon_n\} \rightarrow 0$ y para cada n, elegimos en X una ε_n-red finita S_n, lo cual podemos hacer ya que X es compacto. Luego*

$$d_{GH}(X, S_n) \leq d_H(X, S_n) \leq \varepsilon_n$$

Por lo tanto $S_n \rightarrow_{GH} X$.

Definición 3.10. *Sean X y Y dos espacios métricos compactos y $\varepsilon, \delta > 0$. Diremos que X y Y son (ε, δ)-aproximaciones uno del otro si existen conjuntos finitos $X_0 = \{x_i\}_{i=1}^N$ y $Y_0 = \{y_i\}_{i=1}^N$ en X y Y respectivamente, tales que:*

(i) X_0 y Y_0 son ε-redes en X y Y respectivamente.

(ii) $|d_X(x_i, x_j) - d_Y(y_i, y_j)| < \delta$ para cada $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$.

En el caso en el que X y Y sean $(\varepsilon, \varepsilon)$-aproximaciones uno del otro simplemente diremos que son ε-aproximaciones.

Así como con las ε-isometrías, el concepto anterior induce un criterio para analizar la convergencia de sucesiones de espacios métricos. Gracias a la siguiente proposición, $\{X_n\} \rightarrow_{GH} X$ si y sólo si X_n y X son ε_n-aproximaciones uno del otro para cada n, donde $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Proposición 3.11. *Sean X y Y espacios métricos compactos. Luego:*

(i) Si Y es una (ε, δ)-aproximación de X, entonces $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon + \delta$.

(ii) Si $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, entonces Y es una 5ε aproximación de X.

Demostración:

(i) Sean $X_0 = \{x_i\}_{i=1}^N$ y $Y_0 = \{y_i\}_{i=1}^N$ las ε-redes de la definición de (ε, δ)-aproximación. Ahora notemos que $\Re = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ es una correspondencia pues X_0 y Y_0 tienen la misma cardinalidad.
Luego, por la condición (ii) de (ε, δ)-aproximación, $\mathrm{dis}\Re \leq \delta$ y por el teorema 2.14, $d_{GH}(X_0, Y_0) \leq \frac{\delta}{2}$. Pero como X_0 y Y_0 son ε-redes

$$d_{GH}(X, X_0) \leq \varepsilon$$

y

$$d_{GH}(Y_0, Y) \leq \varepsilon.$$

Luego

$$\begin{aligned} d_{GH}(X, Y) &\leq d_{GH}(X, X_0) + d_{GH}(X_0, Y_0) + d_{GH}(Y_0, Y) \\ &\leq \varepsilon + \frac{\delta}{2} + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon + \frac{\delta}{2} \\ &< 2\varepsilon + \delta \end{aligned}$$

(ii) Por el corolario 2.17 existe una 2ε-isometría $f : X \to Y$. Ahora elijamos $X_0 = \{x_i\}_{i=1}^N$ una ε-red finita en X y sea $Y_0 = \{y_i = f(x_i)\}_{i=1}^N$.
Ahora, como f es 2ε-isometría,

$$|d_X(x_i, x_j) - d_Y(y_i, y_j)| \leq \mathrm{dis}(f) < 2\varepsilon < 5\varepsilon.$$

para toda $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$.
Veamos que Y_0 es una 5ε-red. Sea $y \in Y$. Como $f(X)$ es una 2ε-red en Y existe $x \in X$ tal que $d(y, f(x)) < 2\varepsilon$. Pero como X_0 es una ε-red en X, existe $x_i \in X_0$ tal que $d(x, x_i) \leq \varepsilon$. De aquí que

$$\begin{aligned} d(y, y_i) = d(y, f(x_i)) &\leq d(y, f(x)) + d(f(x), f(x_i)) \\ &\leq 2\varepsilon + d(x, x_i) + \mathrm{dis}(f) \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon \\ &= 5\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.12. *Sean X y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ espacios métricos compactos, entonces $X_n \to_{GH} X$ si y sólo si se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-red finita S en X y ε-redes S_n en cada X_n, tal que $S_n \to_{GH} S$. Más aún, dichas ε-redes pueden ser elegidas de tal forma que para n suficientemente grande S_n y S tengan la misma cardinalidad.*

Demostración:

(i) Supongamos que existen tales S y S_n para cada n. Demostraremos que $X_n \to_{GH} X$.
Observemos que X_n es una ε-aproximación de X para cada n suficientemente grande eligiendo las ε-redes como S_n y S (que tienen la misma cardinalidad) pues como $S_n \to_{GH} S$ por corolario 2.17, existen ε_n-isometrías $f_n : S_n \to S$, para alguna sucesión $\varepsilon_n \to 0$ tal que $\varepsilon_n < \varepsilon$, de donde

$$|d_{X_n}(x_i^n, x_j^n) - d_X(x_i, x_j)| \leq \mathrm{dis}(f_n) \leq \varepsilon_n < \varepsilon$$

(Aquí, x_i^n son los elementos de S_n y x_i los de S).
Entonces por la proposición anterior, $d_{GH}(X_n, X) < 3\varepsilon$. Luego haciendo $\varepsilon \to 0$ se tiene que $X_n \to_{GH} X$.

(ii) Supongamos ahora que $X_n \to_{GH} X$.
Tomemos en X una $\frac{\varepsilon}{2}$-red finita S y elijamos ε_n-isometrías $f_n : X \to X_n$ tales que $\varepsilon_n \to 0$. Definamos entonces $S_n = f_n(S)$. Ahora, si consideramos $\hat{f}_n : S \to S_n$ dadas por $\hat{f}_n = f_n|_S$ tenemos una sucesión de ε_n-isometrías con $\varepsilon_n \to 0$ de S en S_n. Entonces por el Corolario 2.17, $S_n \to_{GH} S$. Veamos ahora que S_n es una ε-red en X_n para n suficientemente grande.
Tomemos n de tal forma que $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, sea $y \in S_n$, entonces existe $x \in X$ tal que $y = f_n(x)$. Pero S es una $\frac{\varepsilon}{2}$-red en X, por lo que existe $x' \in S$ tal que $d(x, x') \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De aquí que

$$d(y, f(x')) \leq d(x, x') + \mathrm{dis}(f_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon_n \leq \varepsilon.$$

□

Hemos analizado la topología de Gromov-Hausdorff y ahora finalizaremos el capítulo como sigue. El siguiente teorema es una versión débil del celebrado Teorema de Precompacidad de Gromov. Este es quizás el teorema más importante de este trabajo. Recordemos que al estudiar cálculo o análisis, en muchas ocasiones es necesario encontrar sucesiones convergentes, ya sea de puntos, funciones, conjuntos, etc. Al estar trabajando con alguna sucesión en particular, la convergencia no tiene por qué suceder, y de hecho en general no lo hace, sin embargo hay algunos teoremas que garantizan la existencia de *subsucesiones* convergentes de estos objetos. Este tipo de teoremas son decisivos y facilitan de manera considerable el estudio pues nos liberan de la presión de trabajar con los objetos en cuestión por separado o de manera aislada; Ofrecen un enfoque *global*. El teorema de Gromov que hemos mencionado arriba, es un teorema de este tipo. Cuando una sucesión de espacios, o variedades, cumple ciertas condiciones, se puede asegurar la existencia de subsucesiones convergentes de las cuales ya hemos estudiado varias propiedades.

Definición 3.13. *Diremos que una clase de espacios métricos compactos $\mathcal{X}$ es uniformemente totalmente acotada si*

(i) *Existe una constante D tal que* $\operatorname{diam} X \leq D$ *para cada* $X \in \mathcal{X}$.

(ii) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N = N(\varepsilon)$ tal que cada $X \in \mathcal{X}$ contiene una ε-red con cardinalidad menor o igual a N.*

Teorema 3.14 (de Precompacidad)**.** *Toda clase de espacios métricos compactos $\mathcal{X}$ uniformemente totalmente acotada es pre-compacta en la topología de Gromov-Hausdorff. Esto es, toda sucesión de elementos de $\mathcal{X}$ contiene una subsucesión convergente.*

Demostración:

Sean D y $N(\varepsilon)$ como en la definición anterior. Definamos

$$\begin{aligned} N_1 &= N(1) \\ N_k &= N_{k-1} + N(1/k) \qquad k \geq 2. \end{aligned}$$

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos en $\mathcal{X}$. Ahora, para cada n, consideremos en X_n una unión de $1/k$-redes S_n en X_n para cada k natural.Digamos que $S_n = \{x_{i,n}\}_{i=1}^{\infty}$. Entonces S_n es un conjunto denso numerable en X_n cuyos primeros N_k puntos forman una $1/k$-red en X_n. Notemos

que $d(x_{i,n}, x_{j,n}) \leq D$ para toda i, j. Luego aplicando un proceso diagonal de Cantor, podemos extraer una subsucesión de $\{X_n\}$ en la que la sucesión $\{d(x_{i,n}, x_{j,n})\}_{n=1}^{\infty}$ converja para cualesquiera i, j. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la misma sucesión converge.
A continuación construiremos el espacio límite $\hat{X}$ de $\{X_n\}$. Para esto, elijamos un conjunto numerable $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y definamos en él la semimétrica

$$\hat{d}(x_i, x_j) = \lim_{n\to\infty} d(x_{i,n}, x_{j,n})$$

Consideremos ahora el espacio $X/\hat{d}$, y denotemos por $\hat{X}$ a su completación y $\hat{x}_i$ al elemento de X/d obtenido de x_i. Afirmamos que $X_n \to_{GH} \hat{X}$.

Para cada k natural, consideremos el conjunto

$$S^{(k)} = \{\hat{x}_i \ : \ 1 \leq i \leq N_k\} \subset \hat{X}.$$

Claramente dicho conjunto es una $(1/k)$-red en $\hat{X}$ y los conjuntos

$$S_n^{(k)} = \{x_{i,n} \ : \ 1 \leq i \leq N_k\}$$

son $(1/k)$-redes en los respectivos X_n. Luego, para cada $x_{i,n}$ existe $j \leq N_k$ tal que $d_{X_n}(x_{i,n}, x_{j,n}) \leq 1/k$. Como N_k no depende de n, para cada i natural fijo, existe $j \leq N_k$ tal que $d_{X_n}(x_{i,n}, x_{j,n}) \leq 1/k$ para un número infinito de índices n. Tomando el límite cuando $n \to \infty$, tenemos que para tal j, $d_{\hat{X}}(\hat{x}_i, \hat{x}_j) \leq 1/k$. Por lo tanto $S^{(n)}$ es una $(1/k)$-red en X/d y por lo tanto en $\hat{X}$. Como $\hat{X}$ es completo y por lo anterior totalmente acotado se sigue que es compacto.

Notemos que $S_n^{(k)} \to_{GH} S^{(k)}$ pues cada $S_n^{(k)}$ es un conjunto finito de cardinalidad N_k y las distancias en estos convergen uniformemente a la distancia en $S^{(k)}$. Luego, por la proposición 3.12 $X_n \to_{GH} \hat{X}$.

□

Algunos ejemplos que damos sin demostración, de clases precompactas son los siguientes.

Ejemplo 3.15. *(i)* ***Volumen y Radio de Inyectividad Acotados.*** *Para cada natural n y cualquier $r \in \mathbb{R}$, $V > 0$ la clase de variedades riemannianas de dimensión n tales que su volumen es menor o igual* *que V y radio de inyectividad mayor o igual que r, es precompacta. Recuerde el lector que el radio de inyectividad es el mayor de todos los radios, tales que la exponencial en el punto dado es un difeomorfismo.*

(ii) ***Diámetro y Curvatura Acotados.*** *Sean n un número natural, $\kappa \in \mathbb{R}$ y $D > 0$. La clase de variedades riemannianas de dimensión n con diámetro menor o igual a D y curvatura seccional mayor o igual que κ es precompacta.*

(iii) ***Teorema de Precompacidad de Gromov.*** *Sean un natural n y $D > 0$. La clase de variedades riemannianas compactas de dimensión fija n, diámetro menor o igual que D y curvatura de Ricci estrictamente mayor que $(1 - n)$ es precompacta.*

Capítulo 4

Convergencia de Espacios de Longitud

Hemos considerado hasta ahora los espacios métricos en abstracto, sin embargo algunos de los ejemplos más importantes en la geometría vienen de agregar estructuras más complejas a estos. Uno de éstos es el caso de las variedades, en las cuales se tiene una estructura métrica *intrínseca*, que puede o no venir de considerarlas como subespacios de algún espacio métrico. Este tipo de estructuras puede afectar la convergencia en el sentido de Gromov-Hausdorff como veremos, pero de forma inversa, dicha distancia, puede revelar información valiosa al ser combinada con la estructura de la variedad. Definiremos un tipo de espacios más general que llamamos *Espacios de Longitud*, en el cual básicamente, buscamos poder unir cada par de puntos por una curva adecuada cuya longitud sea precisamente la distancia entre los puntos que une. Este capítulo es una versión un tanto diferente de la sección 7.5 de [1]. En algunos casos solamente bosquejaremos o mencionaremos resultados contenidos dicha obra.

Definición 4.1. *Sea X un espacio y $\gamma : I \to X$ una función continua donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$. Diremos que tal función, es una curva o camino. Denotaremos a la familia de curvas en X por $\Gamma(X)$.*

Definición 4.2 (Estructura de Longitud)**.** *Una Estructura de Longitud en un espacio topológico X de Hausdorff, es una clase $A \subset \Gamma(X)$ que llamaremos la clase de curvas o caminos admisibles, junto con una función $L : A \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ llamada Longitud de curva, que satisfacen los siguientes axiomas:*

(i) *La clase A es cerrada bajo restricciones; Si $\gamma : [a,b] \to X$ es una curva admisible y $c, d \in [a,b]$ entonces $\gamma|_{[c,d]}$ también lo es.*

(ii) *A es cerrada bajo producto (concatenación) de curvas; Si $\gamma : [a,b] \to X$ es tal que $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ y $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$ son curvas admisibles, entonces también lo es γ, lo cual denotamos por $\gamma = \gamma_1 \bullet \gamma_2$ ó $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.*

(iii) *A es cerrada bajo, al menos, reparametrizaciones que sean difeomorfismos; Dada $\gamma : [a,b] \to X$ y un difeomorfismo $\varphi : [c,d] \to [a,b]$, la composición $\gamma \circ \varphi$ también es una curva admisible.*

(a) *La longitud de curva es aditiva; Para cada $c \in [a,b]$ se tiene que $L(\gamma|_{[a,b]}) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$.*

(b) *Si $\gamma : [a,b] \to X$ es una curva admisible, requerimos que la función $R : [a,b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ definida como $R(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$ para cada γ sea continua.*

(c) *La longitud es invariante bajo las reparametrizaciones de la condición (iii); $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$.*

(d) *La estructura de longitud es compatible con la topología de X en el siguiente sentido. Sean una vecindad U_x para $x \in X$ y $y \in X \setminus U_x$. Si $\gamma : [a,b] \to X$ es una curva admisible tal que $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$, entonces $L(\gamma) > 0$.*

Cuando un espacio X esté dotado de una estructura de longitud, diremos que X es un Espacio de Longitud.

Observación 4.3. *En general no es necesario que el espacio topológico de la definición sea de Hausdorff, sin embargo, al pedir esta condición la estructura de longitud es más razonable en el sentido de que no puede haber curvas con longitud cero que unan puntos distintos.*

La condición (iii) no sólo es deseable para facilitar los cálculos, sino que también es compatible con la operación usual del grupo fundamental, que recordamos en la proposición 4.16.

Podemos inducir una métrica, que llamaremos ***intrínseca****, al espacio dada por*

$$d_X(x,y) = \text{ínf}\{L(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \to X, \gamma \in A, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}.$$

El lector notará que en el ejemplo 1.10, hemos usado este hecho, e implícitamente, que las estructuras de Finsler, inducen estructuras de longitud. Mencionamos entonces que como ejemplos de la definición anterior tenemos a las estructuras inducidas por las de Finsler y las dadas por las métricas riemannianas. Esta métrica no necesariamente es finita pues la función L no tiene por qué ser acotada.

Notemos también que la condición (b) implica que la longitud de una curva trivial, es decir, tal que $\gamma(t) = p$ para cada t, es cero, ya que $R(a) = \lim_{t\to a} L(\gamma|_{[a,t]}) = 0$. Por lo general no tomaremos estas curvas en cuenta; casi siempre constituyen un obstáculo técnico en las demostraciones que involucran espacios de longitud. A menos que se diga explícitamente lo contrario, las curvas tomadas serán no triviales.

Si X es disconexo, no habrá curvas admisibles que unan puntos de distintas componentes. Aquí tomaremos espacios conexos a menos que se diga lo contrario.

Relacionaremos a continuación el concepto de espacio de longitud con la distancia de Gromov-Hausdorff. Si consideramos a la familia de espacios de longitud, veremos que forman una clase cerrada en la topología inducida por tal distancia. Sin embargo, con la definición que tenemos es muy claro qué tipo de curvas podemos tener en un espacio, pero no es muy claro qué tipo de espacios cumplen esto aunque tengamos un par de ejemplos. Notemos que si conocemos una métrica y pensamos que es intrínseca, ésta restringirá las posibles curvas que podemos tomar e inducirá una función de longitud de curva, en otras palabras, una métrica debe cumplir algunas condiciones para ser compatible con el concepto de estructura de longitud. Lo que llevaremos a cabo entonces, es dar tales condiciones, las cuales están en términos de los *ε-puntos intermedios*, que definimos como sigue.

Definición 4.4. *Dados $x, y \in X$ un espacio métrico, diremos que z es un ε-punto intermedio si*

(i) $|2d(x,z) - d(x,y)| \leq \varepsilon$

(ii) $|2d(y,z) - d(x,y)| \leq \varepsilon$

La condición que buscamos entonces es

Teorema 4.5. *Sea X un espacio métrico. Si para cada $x, y \in X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un ε-punto intermedio, entonces d es intrínseca.*

Bosquejo de la Demostración:

Basta probar que para cada dos puntos $x, y \in X$ existe una curva que los una, cuya longitud es $d(x, y)$. Construiremos tal curva $\gamma : [0, 1] \to X$ en el caso en que para cada par de puntos en X exista precisamente el punto medio. Para el caso de ε-puntos intermedios en general, basta modificar el argumento. Note el lector que los puntos medios son un caso particular de los ε-puntos intermedios. Lo hacemos así por simplicidad.
Hacemos $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Ahora consideremos todos los racionales diádicos en [0,1], $k/2^m$, para algunos naturales k y m. Por hipótesis entre x y y existe un punto medio al cual asignamos $\gamma(1/2)$. Entre x y $\gamma(1/2)$ también habrá un punto medio, al cual asignamos $\gamma(1/4)$ y de igual manera $\gamma(3/4)$ corresponderá al punto medio entre $\gamma(1/2)$ y y. De esta forma podemos asignar las imágenes de todos los racionales diádicos en $[0, 1]$. Observemos que para cada dos de estos racionales t_i, t_j se tiene que

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) = |t_i - t_j| d(x, y)$$

Por lo tanto, γ definida de esta forma es de Lipschitz. Por otro lado, como X es completo y el conjunto de los racionales diádicos es denso en $[0, 1]$, podemos extender γ continuamente a todo $[0, 1]$ a una curva y preservando la dilatación de γ. Luego $L(\gamma) = d(x, y)$.

$\square$

Teorema 4.6. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios de longitud, tal que $X_n \to_{GH} X$, donde X es un espacio métrico completo. Entonces X es un espacio de longitud.*

Demostración:
Por el teorema anterior basta probar que para cada $x, y \in X$ existe un ε-punto medio para cada $\varepsilon > 0$.
Como $X_n \to_{GH} X$, existe n tal que $d_{GH}(X_n, X) < \frac{\varepsilon}{10}$. Luego, por el teorema 2.14 existe una correspondencia $\Re$ con dis$\Re < \frac{\varepsilon}{5}$.
Ahora sean $\overline{x}, \overline{y} \in X_n$ tales que $(x, \overline{x}), (y, \overline{y}) \in \Re$. Como X_n es espacio de longitud, existe $\overline{z} \in X_n$ un $\frac{\varepsilon}{5}$-punto medio de $\overline{x}$ y $\overline{y}$.

Ahora, sea $z \in X$ tal que $(z, \overline{z}) \in \Re$. Entonces utilizando que z es $\frac{\varepsilon}{5}$ punto medio:

$$\begin{aligned}
\left|d(x,z) - \frac{1}{2}d(x,y)\right| &= |d(x,z) - d_n(\overline{x},\overline{z}) + d_n(\overline{x},\overline{z}) \\
&\quad -\frac{1}{2}d(x,y) + \frac{1}{2}d_n(\overline{x},\overline{y}) - \frac{1}{2}d_n(\overline{x},\overline{y})\Big| \\
&\leq |d(x,z) - d_n(\overline{x},\overline{z})| + \left|d_n(\overline{x},\overline{z}) - \frac{1}{2}d(x,y)\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{2}d_n(\overline{x},\overline{y}) - \frac{1}{2}d_n(\overline{x},\overline{y})\right| \\
&\leq \operatorname{dis}\Re + \left|d_n(\overline{x},\overline{z}) - \frac{1}{2}d(x,y)\right| + \frac{1}{2}\operatorname{dis}\Re \\
&\leq \left|d_n(\overline{x},\overline{z}) - \frac{1}{2}d(x,y)\right| + \frac{3}{2}\operatorname{dis}\Re \\
&< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $|2d(x,z) - d(x,y)| \leq \varepsilon$.
Intercambiando los papeles de x y y en las ecuaciones anteriores obtenemos también que $|2d(y,z) - d(x,y)| \leq \varepsilon$. Luego z es ε-punto medio de x y y. Como x y y fueron arbitrarios, X es espacio de longitud.

□

Las dos proposiciones que veremos a continuación, muestran algunos de los inconvenientes que se puede encontrar con los espacios de longitud. Por lo general la dimensión es un factor importante. De ahora en adelante se debe tener cuidado con este tipo de convergencia. Si una sucesión de espacios converge a otro, para que esta convergencia respete la estructura de longitud, las curvas de longitud mínima entre cada dos puntos deben converger también a la curva correspondiente en el límite para los puntos correspondientes.

Proposición 4.7.

1. *Sea X_n la esfera S^2 con un disco de radio $\frac{1}{n}$ removido para cada n. Entonces X_n converge a S^2. (Esto es considerando a X_n con sus métricas intrínsecas inducidas de $\mathbb{R}^3$).*

2. *Sea X_n obtenido de la misma forma a partir de la circunferencia S^1, entonces X_n no converge a S^1.*

Demostración:

(i) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $X_n \subset S^2$ como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ de tal forma que los discos que se remueven sean concéntricos. Es claro entonces que $S^2 \subset U_{1/n}(X_n)$ y por lo tanto X_n converge a S^2 como espacios métricos. Analicemos ahora la convergencia de las curvas de longitud mínima.

Dados $p, q \in X_n$ sean γ_n y γ las curvas de longitud mínima entre ellos en X_n y S^2 respectivamente. Si para n suficientemente grande γ no interseca al disco, como $X_n \subset S^2$ y ambos tienen la métrica inducida de $\mathbb{R}^3$ entonces γ_n coincide con γ.

Si por otro lado γ interseca al disco para toda n, entonces el centro r de los discos está contenido en γ. Afirmamos que cada γ_n está conformada por un arco de la frontera del disco y dos curvas de longitud mínima que denotaremos por $\widehat{ps}$ y $\widehat{qt}$ con s y t puntos en la frontera del disco. Observemos ahora que γ_n efectivamente corta al disco ya que de otra forma, por el caso anterior, γ_n coincidiría con γ. Es fácil ver que la curva de longitud mínima $\widehat{st}$ entre s y t es el arco de menor longitud contenido en la frontera del disco que hay entre ellos. Las fronteras de los discos convergen a r cuando $n \to \infty$. En particular $\widehat{st}$ converge a r. Por otro lado, $\widehat{ps} \to \widehat{pr}$ y $\widehat{qt} \to \widehat{qr}$ por el caso anterior. Luego $\gamma_n \to \gamma$.

(ii) Sean p_n y q_n los extremos de X_n. Encajamos a X_n en S^1 y consideramos en este último la curva de longitud mínima γ que une a p_n con q_n. Para n suficientemente grande tal curva interseca a la bola que se remueve para obtener a X_n. Por otro lado $L(\gamma) \to 0$ en S^1. Luego $\{X_n\}$ no puede converger a S^1 pues las longitudes de las curvas de longitud mínima entre p_n y q_n no tienden a cero.

$\square$

Proposición 4.8. *1. Sea X un segmento de recta en $\mathbb{R}^3$ y sea X_n la frontera de $U_{1/n}(X_n)$ con la métrica intrínseca inducida de $\mathbb{R}^3$. Entonces $X_n \to_{GH} X$ cuando $n \to \infty$.*

2. *Sea X un disco plano en $\mathbb{R}^3$ y sea X_n la frontera de $U_{1/n}(X_n)$ tomada con la métrica intrínseca inducida de $\mathbb{R}^3$ como en la figura 4.1. Entonces $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en el sentido de Gromov-Hausdorff pero no es isométrico a X.*

Demostración:

(i) Claramente la convergencia como espacios métricos se da. Para analizar la convergencia de las curvas de longitud mínima, consideremos dos sucesiones de punos $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ con $p_n, q_n \in X_n$ y sea γ_n la curva de longitud mínima entre ellos. Supongamos que tales sucesiones convergen respectivamente a p y q en X. Notemos que cada X_n consta de dos semiesferas y un cilindro, como se aprecia en la figura 4.1. Distinguimos esencialmente cuatro casos.

   (a) Si p_n y q_n están en el cilindro y en una circunferencia perpendicular a X para toda n, entonces $p = q$, por lo que $L(\gamma_n) \to 0$.

   (b) Si p_n y q_n están en el cilindro pero no sobre alguna circunferencia ortogonal a X, entonces la proyección ortogonal de γ_n sobre X es inyectiva. Por lo tanto γ_n converge al segmento de recta entre p y q.

   (c) Si p_n está en una de las semiesferas y q_n está en el cilindro para toda n. Sea s_n el punto donde corta γ_n corta a la frontera de la semiesfera. Si denotamos por r al extremo correspondiente a la semiesfera donde están los p_n tendremos que $s_n \to r$. Utilizando el caso anterior, tendremos que $\widehat{p_n s_n} \to r$ y que $\widehat{s_n q_n} \to sq$.

   (d) Este caso se reduce al caso anterior aplicándolo para cada semiesfera.

(ii) Es claro que $X_n \to_{GH} X$ como espacios métricos pues $d_H(X_n, X) = 1/n \to 0$. Sin embargo la convergencia no se da como espacios de longitud. Consideremos r el centro del disco y sean p_n y q_n las proyecciones de dicho punto en dirección ortogonal al disco sobre X_n. Cuando $n \to \infty$ tanto p_n como q_n convergen a r en la distancia de Hausdorff en $\mathbb{R}^3$. Por otro lado, cualquier curva admisible entre p_n y q_n tiene longitud al menos $2R > 0$, donde R es el radio de X. Luego, la convergencia como espacios de longitud no se da, ya que la longitud de dichas curvas tendría que tender a cero.

□

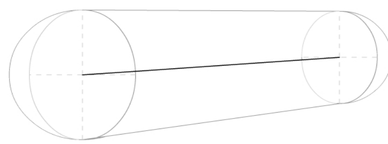

Figura 4.1: Segmento con las fronteras de sus $1/n$-vecindades.

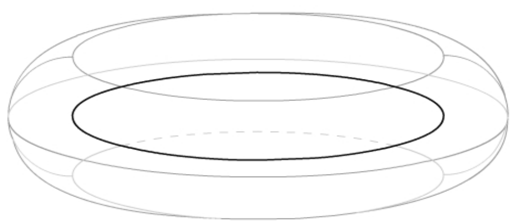

Figura 4.2: Disco plano con las fronteras de sus $1/n$ vecindades.

Así como en el capítulo anterior prestamos especial atención al caso de los espacios métricos finitos, aquí consideraremos en su lugar a las *Gráficas Métricas* o simplemente Gráficas.

Definición 4.9. *Una gráfica (métrica) es una unión disjunta, no necesariamente finita, de intervalos, llamados aristas,* $\{E_i\}$ *y un conjunto de puntos* $\{v_i\}$*, que llamaremos el conjunto de vértices, junto con una relación de equivalencia definida en la unión de* $\{v_i\}$ *y el conjunto de los extremos de los intervalos* $\{E_i\}$*. En otras palabras, una gráfica métrica es una gráfica en la* *cuál la distancia entre dos puntos que están contenidos en la misma arista, es simplemente su distancia en el intervalo correspondiente. Si los puntos están en distintas aristas, tomamos los posibles caminos para ir de uno a otro, tomamos el camino con el mínimo de las longitudes y sumamos las distancias que hay entre los vértices que toca tal camino.*

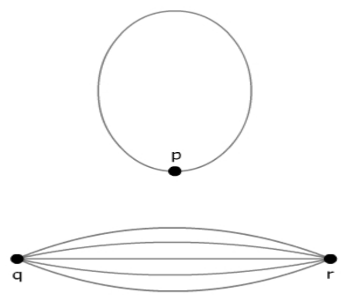

Figura 4.3: Ejemplos de Gráficas.

En la figura 4.3, se muestran algunos ejemplos de gráficas. En general es mucho más fácil trabajar con gráficas en las cuales no ocurran las situaciones mostradas en la figura, es decir, en las cuales no haya vértices unidos por más de una arista, ni aristas que unan a un vértice consigo mismo. Este obstáculo puede ser removido de la siguiente forma. En el primer caso de la figura, basta agregar dos vértices en la arista con lo cual tendremos tres aristas ninguna de las cuales une a un punto consigo mismo. Ahora basta definir la longitud de dos de las aristas que quedan como cero, y la de la restante como la longitud de la arista original. Para el segundo caso de la figura, agregamos un vértice por arista y de forma similar definimos las longitudes de algunas de las nuevas aristas como cero, y de las restantes como las longitudes originales.

La siguiente proposición es el análogo de la Observación 3.9 para espacios de longitud.

Proposición 4.10. *Todo espacio de longitud compacto X es límite de Gromov-Hausdorff de gráficas métricas finitas.*

Demostración:

Sean $\varepsilon, \delta > 0$ tales que $\delta < \varepsilon$ y $\delta < \varepsilon^2/4\text{diam}(X)$ y S una δ-red finita en X. Construiremos una gráfica G de la siguiente forma:

(i) El conjunto de vértices de G es S.

(ii) $x, y \in S$ estarán conectados por una arista si y sólo si $d(x, y) < \varepsilon$ y elegimos la longitud de la arista es igual a $d(x, y)$.

Si consideremos a S tanto como subconjunto de X como de G claramente es una ε-red en ambos. Además $d_G(x, y) \geq d(x, y)$. Veamos que G es una ε-aproximación de X.

Sea γ un camino más corto entre x y y. Queremos elegir n puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre γ que lo dividan en caminos de longitudes menores a $\varepsilon/2$. Para esto basta que

$$n + 1 \leq \frac{2L(\gamma)}{\varepsilon}$$

donde $L(\gamma)$ es la longitud de γ. Ahora, sean $y_i \in S$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que $d(x_i, y_i) \leq \delta$ y definimos $x_0 = y_0 = x$ y $x_{n+1} = y_{n+1} = y$. Entonces

$$\begin{aligned}
d(y_i, y_{i+1}) &\leq d(y_i, x_i) + d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, y_{i+1}) \\
&\leq \delta + d(x_i, x_{i+1}) + \delta \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2\text{diam}(X)}
\end{aligned}$$

Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$. Además, si ε es suficientemente pequeño, $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2\text{diam}(X)} < \varepsilon$. Pero entonces y_i y y_{i+1} están conectados por una arista si $\delta < \varepsilon/4$. Luego

$$\begin{aligned}
d_G(x, y) &\leq \sum_{i=0}^{n} d_G(y_i, y_{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} d(y_i, y_{i+1}) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} (d(x_i, x_{i+1}) + 2\delta) \\
&= d(x, y) + \delta(n + 1)
\end{aligned}$$

Pero como $n+1 \leq \frac{2L(\gamma)}{\varepsilon} \leq 2\frac{\mathrm{diam}(X)}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} d_G(x,y) &\leq d(x,y) + \delta\left(\frac{4\mathrm{diam}(X)}{\varepsilon}\right) \\ &< d(x,y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, hemos construido una gráfica que es una ε-aproximación de X. Luego haciendo $\varepsilon \to 0$ se tiene el resultado buscado.

□

Aunque la proposición anterior ya es muy útil en su forma actual podemos hacerla un poco más fuerte como enunciaremos a continuación. No demostraremos dicha proposición, sin embargo la prueba se sigue del lema 2.2 de [6] pág. 950.

Proposición 4.11. *Todo espacio de longitud compacto X puede ser representado como límite de gráficas métricas finitas isométricamente encajadas en X; Esto es, de gráficas topológicas encajadas en X, equipadas con la métrica inducida.*

En general es muy incómodo no tener la tan deseable continuidad de las ε-isometrías, sin embargo, como probaremos si pedimos una condición al espacio límite, podemos lograr encontrar sucesiones de ε-isometrías continuas de cada espacio de la sucesión en el límite. Desafortunadamente encontrarlas en el otro sentido es considerablemente más difícil. Las condiciones conocidas más sencillas para garantizar su existencia involucran teoría de grado, una noción de topología diferencial, que desgraciadamente se aleja del objetivo de este trabajo. Para un tratado detallado, que incluye teoremas de suficiencia para la existencia de ε-isometrías continuas del límite en cada uno de los espacios de la sucesión, el lector puede servirse consultar [6].

La condición que pediremos, es la de ser retracto de vecindad de un espacio euclidiano, la cuál es una noción topológica que se utiliza para extender continuamente a la función identidad. El camino que seguiremos entonces será, por medio de este concepto, aproximar las ε-isometrías por funciones continuas que extenderemos adecuadamente.

Definición 4.12. *Un espacio métrico X es un retracto de vecindad de un espacio euclidiano si para cada subespacio cerrado B de otro espacio métrico Y y para cada función continua $f : B \to X$ existe una vecindad U de B y una extensión continua $g : U \to X$ de f.*

Inmediatamente podemos probar el lema siguiente de manera muy sencilla. Sin embargo, éste nos permitirá probar el teorema tan bello que le sigue.

Lema 4.13. *Supongamos que X es un retracto de vecindad de un espacio euclidiano, Y un espacio métrico e $i : X \to Y$ es un encaje tal que $i(X)$ es cerrado en Y. Entonces existen una vecindad U de $i(X)$ y una retracción $r : U \to i(X)$, es decir una extensión continua de la identidad en $i(X)$ a U.*

Demostración:
Consideremos $i^{-1} : i(X) \to X$. Como X es retracto de vecindad de un espacio euclidiano existe una vecindad U de $i(X)$ y una extensión $g : U \to X$ de i^{-1}. Luego, la retracción deseada es $i \circ g$. □

Teorema 4.14. *Sea $\{X_k\}$ una sucesión de espacios métricos compactos y X un espacio métrico compacto tales que $X_k \to_{GH} X$. Supongamos que X es homeomorfo a un retracto de vecindad de un espacio euclidiano. Entonces existe una sucesión de ε_k-isometrías continuas $\{\phi_k : X_k \to X\}$.*

Demostración:
Sea $i : X \to \mathbb{R}^n$ un encaje, $U \subset \mathbb{R}^n$ una vecindad de $i(X)$ y $\rho : U \to i(X)$ una retracción la cual existe por el lema anterior ya que como X es compacto y $\mathbb{R}^n$ es de Hausdorff entonces $i(X)$ es cerrado. Consideremos ahora una sucesión de δ_k isometrías $f_k : X_k \to X$ y definamos la sucesión de números positivos $\{\varepsilon_k\}$ donde

$$\varepsilon_k = E(f_k) := \text{ínf}\{\varepsilon > 0 \mid f_k \ \text{ es } \varepsilon - \text{isometria}\}$$

Ahora, sea S_k una ε_k-red finita en X_k y definamos para cada k, $i_k : X_k \to \mathbb{R}^n$ como

$$i_k(x) = \frac{\sum_{y \in S_k} w_k\,(d(x,y))\, i(f_k(y))}{\sum_{y \in S_k} w_k\,(d(x,y))}$$

donde $w_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua arbitraria y positiva en $[0, 2\varepsilon_k)$ y cero en $[2\varepsilon_k, \infty)$. Claramente i_k está bien definida, y es continua. Ahora sea $x \in X_k$ arbitrario. Si $y \in S_k$ es tal que $w_k(d(x,y)) > 0$ entonces como f_k es ε_k-isometría $|d(f_k(x), f_k(y)) - d(x,y)| \leq \varepsilon_k$ de donde $d(f_k(x), f_k(y)) \leq \varepsilon_k + d(x,y)$ pero como $w_k(d(x,y)) > 0$ entonces $d(x,y) < 2\varepsilon_k$. Luego $d(f_k(x), f_k(y)) < 3\varepsilon_k$. Ahora

$$\begin{aligned}
\|i_k(x) - i(f_k(x))\| &= \left\| \frac{\sum_{y\in S_k} w_k\,(d(x,y))\, i(f_k(y))}{\sum_{y\in S_k} w_k\,(d(x,y))} - i(f_k(x)) \right\| \\
&= \left\| \frac{\sum_{y\in S_k} w_k(d(x,y))\,[i(f_k(y) - i(f_k(x))]}{\sum_{y\in S_k} w_k(d(x,y))} \right\| \\
&\leq \frac{\sum_{y\in S_k} w_k(d(x,y))\,\|i(f_k(y) - i(f_k(x))\|}{\sum_{y\in S_k} w_k(d(x,y))}
\end{aligned}$$

pero por la observación anterior

$$\|i(f_k(y)) - i(f_k(x))\| \leq \sup_{y'\in U_{3\varepsilon_k}(f_k(x))} \|i(y') - i(f_k(x))\|$$

Así que

$$\frac{\sum_{y\in S_k} w_k(d(x,y))\,\|i(f_k(y) - i(f_k(x))\|}{\sum_{y\in S_k} w_k(d(x,y))} \quad \leq \quad \sup_{y'\in U_{3\varepsilon_k}(f_k(x))} \|i(y') - i(f_k(x))\|$$

De las desigualdades anteriores tenemos que

$$\|i_k(x) - i(f_k(x))\| \leq \sup_{y'\in U_{3\varepsilon_k}(f_k(x))} \|i(y') - i(f_k(x))\|$$

y por lo tanto

$$\sup_{x\in X_k} \|i_k(x) - i(f_k(x))\| \leq \sup_{x\in X_k} \sup_{y'\in U_{3\varepsilon_k}(f_k(x))} \|i(y') - i(f_k(x))\|$$

pero como i es uniformemente continua por ser continua con dominio compacto, el término de la derecha de la desigualdad anterior tiende a cero cuando $k \to \infty$. Luego

$$\sup_{x\in X_k} \|i_k(x) - i(f_k(x))\| \to 0.$$

Ahora, para k suficientemente grande definimos $\varphi_k = i^{-1} \circ \rho \circ i_k : X_k \to X$. En ese caso el siguiente diagrama tiene sentido y conmuta.

$$\begin{tikzcd}
X_k \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[ddr, "i_k"'] & X \\
& i(X) \arrow[u, "i^{-1}"'] \\
& U \arrow[u, "\rho"]
\end{tikzcd}$$

Notemos que φ_k es continua. Además, podemos escribir $f_k = i^{-1} \circ \rho \circ (i \circ f_k)$ de modo que para cada $x \in X_k$, $d(\varphi_k(x), f_k(x)) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Notemos que esto obliga a que $\varphi_k(X_k)$ sea ε_k-red en X. Más aún $E(\varphi_k) \to 0$. Para las primeras k que no cumplen la condición del diagrama, basta definirlas como cualquier función continua tal que $\varphi_k(X_k)$ sea red en X.

$\square$

En particular el teorema anterior nos garantiza la existencia de ε-isometrías continuas para algunos espacios tan conocidos como importantes. La esfera S^n, el toro n-dimensional $S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ y cualquier espacio homeomorfo a alguno de estos, es un retracto de vecindad de un espacio euclidiano. En consecuencia, el teorema 4.10 aplica. Las pruebas de estos hechos son sencillas y el lector puede consultarlas en [10] pág. 29.

Finalizamos el capítulo con un hecho que relaciona el grupo fundamental con la convergencia de Gromov-Hausdorff.

Proposición 4.15. *Sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios de longitud compactos tal que $X_n \to_{GH} X$ donde X es localmente simplemente conexo y $\{f_n : X_n \to X\}$ una sucesión de ε_n-isometrías continuas. Entonces para n suficientemente grande f_n induce un epimorfismo entre los grupos fundamentales. En particular, si X_n son simplemente conexos, también lo es X.*

Demostración:

Consideremos puntos $b_n \in X_n$ para cada n y sean $\overline{b_n} = f_n(b_n) \in X$. Definamos $\phi_n : \pi_1(X_n, b_n) \to \pi_1(X, \overline{b_n})$ como

$$\phi_n([\alpha]) = [f_n \circ \alpha]$$

Primero veamos que ϕ_n está bien definida. Sean α y β curvas cerradas simples y continuas basadas en b_n tales que $[\alpha] = [\beta]$. Notemos que entonces existe una homotopía continua

$$H : S^1 \times I \to X_n$$
$$H(x,t) = H_t(x)$$

tal que

$$\begin{aligned} H(x,0) &= H_0(x) = & \alpha(x) \\ H(x,1) &= H_1(x) = & \beta(x) \end{aligned}$$

Consideremos ahora $\overline{H} : S^1 \times I \to X$ dada por

$$\overline{H}(x,t) = f_n(H_t(x))$$

Tenemos entonces que $\overline{H}$ es continua pues es composición de funciones continuas y

$$\begin{aligned} \overline{H}(x,0) &= f_n \circ \alpha \\ \overline{H}(x,1) &= f_n \circ \beta \end{aligned}$$

Luego $\phi_n(\alpha) = \phi_n(\beta)$.

Recordamos al lector que aquí consideramos el producto usual para el grupo fundamental, es decir
$$[f][g] = [f \bullet g] = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ g(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

y es un resultado clásico de topología que la función ϕ_n como la hemos definido, determina un morfismo de grupos, como puede ver en [2] pag. 270.

Para ver que para n suficientemente grande, ϕ_n es suprayectiva, tomemos $[\beta] \in \pi_1(X, \overline{b_n})$ y sea $\{z_i\}_{i=1}^N$ una ε-red finita en β, con $\varepsilon < \varepsilon_n$. Esto lo hacemos de tal forma que si $z_i = \beta(t_i)$ y $z_j = \beta(t_j)$ son tales que $t_i < t_j$ entonces $i < j$. Ahora, como f_n es ε_n-isometría, entonces existen N puntos $\{y_i\}_{i=1}^N$ en X tales que
$$d_X(y_i, z_i) \le \varepsilon_n$$

Ahora, sea $x_i \in f_n^{-1}(y_i)$ para cada i y por otro lado, consideremos α una curva en X_n que pase por b_n dada de la siguiente forma:

(i) Como X_n es espacio de longitud, existe una curva de longitud mínima entre x_i y x_{i+1} digamos γ_i para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$.

(ii) Existe una curva de longitud mínima γ_N que une x_N con b_n.

(iii) De igual forma, para b_n y x_1 existe una curva de longitud mínima γ_{N+1}.

(iv) Definimos entonces $\alpha = \bigcup_{i=1}^{N+1} \gamma_i$.

Ahora tomemos la clase de α, $[\alpha] \in \pi_1(X_n, b_n)$ y sea $\overline{\beta} = \phi_n(\alpha)$. Observemos que $d_H(\overline{\beta}, \beta) \leq \varepsilon_n$. Luego, si n es suficientemente grande, como X es localmente simplemente conexo entonces $\overline{\beta}$ y β son homótopas, de donde

$$[\overline{\beta}] = [\beta].$$

Luego

$$\phi_n([\alpha]) = [\beta].$$

En particular, si cada X_n es simplemente conexo, o si lo son, para cada n a partir de alguna fija, tendremos que $\pi_1(X_n, b_n) = \{[e]\}$ el grupo trivial. Pero para cada $[\beta] \in \pi_1(X, \overline{b_n})$ tenemos que $[\beta] = \phi_n([e])$ y como ϕ_n es morfismo de grupos, $[\beta] = [e]$. Luego X es simplemente conexo.

$\square$

Capítulo 5

Aplicaciones

Expondremos ahora un par de aplicaciones bastante sorprendentes de la teoría de Gromov-Hausdorff y algunas observaciones al respecto. La mayoría del material que presentaremos a continuación requiere de teoría más avanzada para su demostración, sin embargo, estamos en posición de bosquejar algunas pruebas relevantes. Las afirmaciones de este capítulo se adentran en aspectos más profundos de la geometría diferencial y hacen aparente el alcance de la teoría que hemos desarrollado hasta el momento. Estas aplicaciones se conocen como el *Teorema de Finitud* y *Teoremas de Pinching*. Necesitamos una proposición que daremos a continuación, sin demostración. Para consultar la misma, el lector puede referirse a [4].

Proposición 5.1 (Gromov, Peters, Greenewu)**.** *Sea* $\{M_i\}$ *una sucesión de variedades riemannianas compactas de dimensión* n*, tales que* $\operatorname{diam}(M) \leq D$, $|K_{M_i}| \leq 1$ *y* $\operatorname{vol}(M) > v$ *y* X *un espacio métrico compacto tal que* $M_i \to_{GH} X$*. Entonces* X *es una variedad riemanniana y* X *y* M_i *son difeomorfos para* i *suficientemente grande.*

Comencemos ahora con los teoremas de Pinching.

Teorema 5.2. *Para cada* $n, D, v > 0$ *existe* $\varepsilon = \varepsilon(n, D, v) > 0$ *tal que si* M *es una variedad riemanniana de dimensión* n *que satisface:*

(i) $\sigma + \varepsilon \geq K_M \geq \sigma - \varepsilon$

(ii) $\operatorname{Vol}(M) \geq v$

(iii) $\text{diam}(M) \leq D$,

Entonces M admite una métrica riemanniana g_0 tal que $K_{(M,g_0)} \equiv \sigma$. Aquí $\sigma = 1, -1$ o 0, K_M es la curvatura seccional de M, $K_{(M,g_0)}$ es la curvatura seccional de M respecto a g_0.

Bosquejo de la Demostración:

Supongamos que el teorema es falso y consideremos la sucesión $\{\varepsilon_i\}$ con $\varepsilon_i = \frac{1}{i}$. Entonces existe una sucesión de variedades riemannianas $\{M_i\}$ tal que M_i no admite una métrica g_0 tal que $K_{(M,g_0)} \equiv \sigma$ pero satisface (i), (ii) y (iii)'

$$\sigma + \frac{1}{i} \geq K_{M_i} \geq \sigma - \frac{1}{i}$$

Mencionamos en el capítulo anterior que la clase de variedades de dimensión n fija, y diámetro y curvatura seccional acotados uniformemente es precompacta en la topología de Gromov-Hausdorff, por lo que ahora extraemos una subsucesión de $\{M_i\}$ convergente. Sin pérdida de generalidad consideremos que $\{M_i\}$ misma es tal sucesión y denotemos por M_∞ al límite. La proposición 5.1 implica que M_∞ es una variedad riemanniana. Ahora consideremos $p \in M_\infty$ y elijamos para cada i, $p_i \in M_i$ de tal forma que $p_i \to p$. Definamos ahora $I_p : B_r(p, M_\infty) \to B_r(p, M_\infty)$ como $I_p(\exp_p(v)) = \exp_p(-v)$ y para cada i definamos I_{p_i} de manera análoga. Por la condición (iii)' sobre la curvatura de cada M_i, I_{p_i} tiende cada vez más a ser una isometría. Se sigue que I_p lo es. Intuitivamente, esto obliga a que M_∞ tenga curvatura seccional constante σ.

La prueba detallada del teorema anterior requiere herramientas más sofisticadas que las desarrolladas aquí, pero los detalles pueden consultarse en [4] pág. 197. Podemos darnos cuenta sin embargo de que la clave de la demostración anterior, recae sobre el teorema de precompacidad. A continuación haremos algunas observaciones. El teorema anterior generaliza o extiende varios teoremas importantes, como veremos.

Observación 5.3. *Caso $\sigma = -1$.*

Gromov demostró que si $-1 \leq K_M < 0$ y $\dim(M) = n$ entonces $\text{Vol}(M) > v(n)$, por lo que en este caso, la condición (ii) del teorema se satisface automáticamente. Este caso fue considerado por Gromov en [9].

Observación 5.4. *Caso* $\sigma = 1$

En este caso, el teorema 5.1, es una versión del Teorema Diferencial de la Esfera, demostrado por Brendle y Schoen [5] que enunciamos a continuación:

Teorema 5.5. *Sea* M *una variedad riemanniana compacta de dimensión* $n \geq 4$ *tal que*

$$\frac{1}{4} \leq K_M \leq 1.$$

Entonces M *admite una métrica de curvatura constante.*

Observación 5.6. *Caso* $\sigma = 0$

Como se menciona en [4] pág. 199, las hipótesis (i), (ii) y (iii) del teorema, son necesarias en este caso, pues existen contraejemplos al teorema removiendo cualquiera de ellas. Por ejemplo, si quitamos (i), se sabe que hay una clase de variedades casi planas, es decir aquellas tales que para cada $\varepsilon < 0$ admiten una métrica riemanniana g_ε tal que $\mathrm{diam}(M, g_\varepsilon) \leq 1$ y $|K_{g_\varepsilon}| < \varepsilon$, que son un contraejemplo.

En general, al aplicar argumentos de convergencia de Gromov-Hausdorff se puede extender varios resultados del tipo del teorema 5.2. Mostramos el siguiente resultado debido a Otsu, Shiohama y Yamaguchi, que presenta una de las conclusiones más fuertes de su tipo. Este resultado fue extraído de la tabla presentada en [4] pág. 201.

Teorema 5.7. *Sea* M *una variedad riemanniana de dimensión* n *que cumple las siguientes condiciones:*

(i) $\mathrm{Ricci} \geq n - 1$

(ii) $\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{2}$

(ii) $K_M \geq -K_M^2$

(iii) $\mathrm{vol}(M) \geq \frac{1}{2}\mathrm{vol}(S^n) - \varepsilon$

(iv) $\varepsilon = \varepsilon(n, K)$

Entonces M *es homeomorfa a* $\mathbb{R}P^2$ *el proyectivo de dimensión 2.*

La siguiente aplicación se sigue casi directamente de lo que hemos hecho en los capítulos anteriores, pero su conclusión es bastante sorprendente. Este Teorema de Finitud se debe a Cheeger y Peters.

Teorema 5.8. *Sean $n, D, v > 0$ y M una variedad riemanniana compacta de dimensión n tal que*

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(M) &\leq D \\ |K_M| &\leq 1 \\ \operatorname{Vol}(M) &> v \end{aligned}$$

Entonces el número de clases de difeomorfismo de variedades que cumplen las condiciones anteriores es finito.

Bosquejo de la Demostración:

Sean M y N variedades que cumplen las hipótesis anteriores. Por la proposición 5.1 existe $\varepsilon = \varepsilon(n, D, v)$ tal que si $d_H(M, N) < \varepsilon$ entonces M y N son difeomorfas. Por otro lado, en la sección anterior vimos que la clase de variedades dimensión n fija, y diámetro y curvatura seccional acotados uniformemente es precompacta en la topología de Gromov-Hausdorff y por lo tanto es totalmente acotada. Así existe un número finito de variedades $M_1, M_2, \ldots, M_k$ tales que para cualquier M, $d_H(M, M_i) < \varepsilon$ para alguna i, $1 \leq i \leq k$. Pero entonces M es difeomorfa a M_i, de donde el número de clases de variedades difeomorfas entre sí, que cumplen las condiciones del teorema, es menor o igual a k.

$\square$

Bibliografía

[1] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*. Graduate Studies in Mathematics, 2000.

[2] W. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 2003.

[3] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Birkhäuser, 1999.

[4] K. Fukaya, *Hausdorff Convergence of Riemannian Manifolds and Its Applications*. Advanced Studies in Pure Mathematics 18-I, 1990. Recent Topics in Differential and Analytic Geometry. pp.143-238.

[5] S. Brendle, R. Schoen, *Manifolds with 1/4-pinched Curvature Space Forms*.

[6] S. V. Ivanov, *Gromov-Hausdorff Convergence and Volumes of Manifolds*. St. Petersburg Math Journal Vol. 9, 1998 No. 5.

[7] C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*. Dekker, Pure and Applied Mathematics, 1977.

[8] B. Demir, A. Deniz, Ş. Koçak, *Stability of Graphs*, 2009.

[9] M. Gromov, *Manifolds of Negative Curvature.* Journal of Differential Geometry Vol. 13, 1978, pp.223-230.

[10] A. S. Schwarz, *Topology for Physicists.* Spriniger-Verlag, 1994, pp. 26-30.