

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN



**“ESPECIFICACIÓN DE CURVAS FRACTALES QUE
LLENAN EL PLANO A TRAVÉS DE SISTEMAS L”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

P R E S E N T A:

ONATTA LECONA TINAJERO

ASESOR: M. en C. Javier Rosas Hernández

Naucalpán, Edo. de Méx.

MAYO, 2008



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi asesor, M. en C. Javier Rosas Hernández con cuya bonhomía, consejos y paciencia la elaboración de esta tesis pudo llegar a su fin.

A todos mis profesores, quienes a través de mis años de estudio han impregnado a mi espíritu de conocimiento y de afán de aprendizaje. En especial a los profesores Albertina, Lina, Silvia, Arturo Rojas, Ernesto Aguilar Rodríguez, Francisco Patiño, Ernesto Baltazar Martínez, Sara Camacho Cancino, Sandra Ortiz Mendoza, Virginia Haro Sánchez, Héctor Hernández Hernández, María del Carmen Villar Patiño, Jaime Ramírez Muñoz, Norma Hernández Hernández, Javier Rosas Hernández, Nora Cureño Peza, Jaime Vergara, Ángel López Gómez.

A la FES-Acatlán, Matemáticas Aplicadas y Computación.

A mis sinodales, Dr. Ángel López Gómez, Ing. Sandra Ortiz Mendoza, Lic. Christian Carlos Delgado Elizondo, Lic. Nasheli López Bautista por sus observaciones y la retroalimentación.

Agradecimientos

A mis padres, sin cuyo apoyo a lo largo de estos años, culminar esto que ya era un imperativo, hubiera sido una tarea mucho más ardua de lo que en realidad fue.

A ti padre, por haberme enseñado a obrar siempre con rectitud y nunca en detrimento de otros; por los incansables viajes que realizaste durante tanto tiempo para alimentar, vestir y alojar en un lugar seguro a los tuyos, por la infancia feliz.

A ti madre, por ser siempre esa damita tierna que conserva en su mirada la inocencia primigenia de un niño; por haberme enseñado a amar las Matemáticas desde que tuve razonamiento, por haberme hecho creer que en medio del cielo nocturno había una estrella única, exclusiva, toda para mí que estaba siempre presta a escuchar mis plegarias y cumplir mis anhelos.

A Paola, que no sólo ha sido para mí columna, amiga, otredad y todo eso que nos mantendrá unidas –yo creo– más allá de la vida material, sino que ha sido también estímulo, ejemplo, enseñanzas y coincidencias. Mi compañerita.

A Mauricio y Elías por ser luciérnagas en medio de la noche, alegría y orgullo. Porque mi espíritu, siempre, estando con ustedes resurge renovado, joven, ágil, brioso.

A José, porque mucho has tenido que ver con que me dé por inmiscuirme en vericuetos intelectuales; de ti aprendí el amor a la Filosofía. Te quiero mucho abuelo...

A Chabela, quien es hoy ya mariposa, vuela por los aires y escucho sus aleteos cuando merodea. Años atrás te perfilaste como un puente subtendido a través de océanos de aguas turbias, desde entonces tu presencia no ha cesado.

A la gente hermosa, llamada mis amigos, cuya evocación trae a mi mente a Dolores Castro diciendo: “Siempre he pensado que la amistad es una de las formas perfectas del amor”. A Paola Chantal Lecona Tinajero, Elsa Nohemí Gallegos Angulo, Lucero Laiz Ruiz, Carolina Ponce Anguiano, Fabiola Olmos, José Ulises Velásquez Gil, Angélica Domínguez Cruz, Jeaniffer Sainz Merino, Nohemí Reza Hernández, Ernesto Aguilar Rodríguez, Yanet Cortez Villegas, Javier Garduño Cimental, Azucena Álvarez Flores, Jorge Antonio García Galicia, Juan Adán García Ramírez, Silvestre Martínez Martínez, Fernando Guerrero Poblete.

A la familia Sainz Merino por su apoyo incondicional, a ti Edith, por tu nobleza no conmensurable; a Sonia Tinajero Rueda por tanto apoyo y enseñanzas, tías Betty y Mónica; a la familia Mora Carpio por su sempiterna disposición a ayudar: Martha, Samuel, Beto, Paco, Samuel, tíos Héctor y Julio.

A Arturo Federico Mora Carpio, por la serendipia de haber confluído al Zócalo capitalino en medio de la marisma electoral de 2006 que culminó en fraude. Habría que inventar un lenguaje nuevo para expresar la miríada de sentimientos que emergen desde el centro de mi alma a la tuya; aunque apelo a ese otro entendimiento –tácito entre nuestras almas– para decirte que me siento profundamente agradecida por haber conocido a alguien cuyo cosmos, antes para mí ignoto, ha resultado ser balsámico para mi existencia. Por tu mirada inquisitiva, por tu amor a Natura, por el modo disidente en el que vives la vida, por tu pensamiento marginal...

Mi reconocimiento a Georg Cantor, Karl Weierstrass, Richard Dedekind, Felix Hausdorff, Hermann Minkowski, Guiseppe Peano, David Hilbert, Gaston Julia, Fatou, Benoit Mandelbrot y a todos los hacedores de la Geometría fractal.

*Lo porvenir está fijo, somos nosotros
quienes estamos en movimiento
eternamente en el espacio infinito...*

Índice

Introducción	11
Justificación	11
Objetivo	13
Alcances	13
Presentación de los Capítulos	14
1. Fundamentos Matemáticos	16
1.1 Definición y propiedades distintivas de una curva fractal	18
1.1.1 Topología métrica. Nociones básicas	20
1.1.2 Transformaciones afines y de autosemejanza	38
1.1.3 Teoría de la medida y Dimensión fraccionaria	45
1.1.4 Un par de fractales famosos: el conjunto de Cantor y la curva de Von Koch	57
2. Curvas que llenan el plano y Sistemas L	67
2.1 Curvas que llenan el plano	69
2.1.1 Curva de Peano	70
2.2.2 Curva de Hilbert	76
2.2 Sistemas L	83
2.2.1 Gramáticas	83
2.2.2 El lenguaje Logo. Instrucciones básicas	90
2.2.3 Definición de Sistema L	94
2.2.4 Ejemplos: Serie Fibonacci, Curva de Koch, Curva de Peano y Curva de Hilbert	97

3. Dos curvas fractales que llenan el plano	107
3.1 Curva Dragón	108
3.1.1 Construcción	108
3.1.2 Propiedades básicas	113
3.1.3 Naturaleza fractal	118
3.2 Curva de McWorter	124
3.2.1 Construcción	125
3.2.2 Propiedades básicas	131
3.2.3 Naturaleza fractal	134
4. Especificación de la curva Dragón y de la curva de McWorter a través de Sistema L	138
4.1 Especificación de la Curva Dragón a través de un Sistema L	140
4.1.1 Especificación	140
4.1.2 Gramática asociada a la especificación	143
4.1.3 Algoritmo en lenguaje Logo	145
4.2 Especificación de la Curva de McWorter a través de un Sistema L	149
4.2.1 Especificación	149
4.2.2 Gramática asociada a la especificación	151
4.2.3 Algoritmo en lenguaje Logo	152
Conclusiones	156
Apéndice	162
Bibliografía	176

Tabla de símbolos

\mathbb{R} campo de los Números Reales

$f : A \rightarrow B$ función de A en B

$d(x, y)$ distancia entre los puntos x y y

(E, d) espacio métrico E dotado de la distancia d

$B(a, r)$ bola abierta de centro a y radio r

$B'(a, r)$ bola cerrada de centro a y radio r

$S(a, r)$ esfera de centro a y radio r

$(H(X), h)$ espacio métrico de Hausdorff

$L^n(A)$ medida dimensional de Lebesgue de un conjunto A

$H^t(A)$ medida de Hausdorff de un conjunto A

$\dim_H(A)$ dimensión de Hausdorff del conjunto A

$d(A)$ dimensión fractal o de Minkowski del conjunto A

$d_A(A)$ dimensión de homotecia o de autosemejanza del conjunto A

Σ, Π ó Θ conjunto finito y no vacío de símbolos o alfabeto

ω cadena de símbolos tomada de un alfabeto previamente definido

$|\omega|$ longitud de una cadena ω

ε ó λ cadena vacía

L_Θ lenguaje sobre un alfabeto Θ

L^n potencia n -ésima sobre un lenguaje L

Σ^* lenguaje universal sobre el alfabeto Σ

$G(N, T, P, S)$ gramática con símbolos no terminales N , símbolos terminales T , reglas de producción P y símbolo inicial o axioma S

d_k curva Dragón de k -ésima aproximación

m_k curva de McWorter de k-ésima aproximación

Índice de tablas

Tabla	Página
Tabla 1	19
Tabla 2	51
Tabla 3	56
Tabla 4	78
Tabla 5	91
Tabla 6	91
Tabla 7	99
Tabla 8	100
Tabla 9	103
Tabla 10	110
Tabla 11	111
Tabla 12	114 y 115
Tabla 13	115
Tabla 15	131
Tabla 16	131 y 132
Tabla 17	140 y 141
Tabla 18	141
Tabla A.1	165

Índice de figuras

Figura	Página
Figura 1	18
Figura 2	21
Figura 3	22
Figura 4	24
Figura 5	25
Figura 6	26
Figura 7	26
Figura 8	27
Figura 9	28
Figura 10	29
Figura 11	30
Figura 12	33
Figura 13	35
Figura 14	37
Figura 15	39
Figura 16	40
Figura 17	40
Figura 18	41
Figura 19	42
Figura 20	43
Figura 21	44
Figura 22	45
Figura 23	46
Figura 24	48
Figura 25	50
Figura 26	52
Figura 27	54
Figura 28	55
Figura 29	58
Figura 30	58
Figura 31	61
Figura 32	63
Figura 33	63
Figura 34	65
Figura 35	66
Figura 36	66
Figura 37	66
Figura 38	70
Figura 39	70
Figura 40	71
Figura 41	73
Figura 42	75
Figura 43	76
Figura 44	77

Figura 45	78
Figura 46	80
Figura 47	81
Figura 48	92
Figura 49	92
Figura 50	95
Figura 51	95
Figura 52	96
Figura 53	96
Figura 54	98
Figura 55	101
Figura 56	102
Figura 57	105
Figura 58	109
Figura 59	110
Figura 60	111
Figura 61	113
Figura 62	115
Figura 63	116
Figura 64	116
Figura 65	117
Figura 66	118
Figura 67	120
Figura 68	120
Figura 69	121
Figura 70	123
Figura 71	126
Figura 72	126
Figura 73	128
Figura 74	129
Figura 75	129
Figura 76	129
Figura 77	132
Figura 78	133
Figura 79	134
Figura 80	135
Figura 81	142
Figura 82	143
Figura 83	144
Figura 84	145
Figura 85	150
Figura 86	151
Figura 87	151
Figura 88	152
Figura 89	152
Figura A.1	164
Figura A.2	164
Figura A.3	166
Figura A.4	166
Figura C.1	172
Figura C.2	172
Curva de Chillones	175

El hombre, como dijeron los órficos, es también el hijo del cielo estrellado. El hombre, aunque tiene un cuerpo insignificante e impotente comparado con los grandes cuerpos del mundo astronómico, es capaz, sin embargo, de reflejar ese mundo, es capaz de viajar con la imaginación y el conocimiento científico a través de los enormes abismos del espacio y el tiempo... Pero no es sólo, o ni siquiera principalmente, por su conocimiento por lo que el hombre merece admiración. Los hombres han creado belleza, han tenido visiones extrañas que parecían el atisbo de un mundo maravilloso; han sido capaces de amor, de solidaridad con toda la raza humana, de grandes esperanzas para la humanidad en su conjunto.

Bertrand Russell, *Sociedad humana: ética y política*



Tránsito en espiral, Remedios Varo

INTRODUCCIÓN

➤ Justificación

He decidido elegir como tema de tesis uno que me permita plasmar en la misma los contenidos teóricos que fundamentan la especificación de ciertas curvas fractales a través de Sistemas L ¿Por qué esto es así? Bien, por principio de cuentas cuando comencé a navegar por Internet teniendo como motor para tal empresa la palabra fractal encontré una legión de páginas relacionadas al tema (como comúnmente sucede cuando se busca casi cualquier tema en Internet y los buscadores arrojan cientos de miles de páginas relacionadas). Después de esta inspección, caí en la cuenta de que la mayoría de las páginas encontradas tienen un contenido que se enfoca a diversos aspectos de los fractales, como lo son, algoritmos para su generación, sistemas que modelan (o componentes de alguno(s)), aplicaciones comunes, imágenes fractales por montones, gráficos por computador en los que algún o algunos de sus elementos fueron modelados utilizando fractales, etc. y, claro, los dos conceptos matemáticos fundamentales a partir de los que se define un fractal: dimensión y semejanza. Sin embargo, antepondría los siguientes inconvenientes:

1. Con un tratamiento matemático hartamente riguroso –lo cual es bellísimo-, pero sin un aterrizaje en ejemplos siempre necesario.
2. O en el otro extremo, con un tratamiento matemático superficial –sobre todo en páginas en español; salvo por los trabajos de carrera terminal o de tesis que circulan en formato PDF y que presentan un cuerpo teórico bastante profuso.
3. En idioma inglés (sin que ello signifique que este idioma obste a la investigación).

Ahora bien, en lo que respecta a las fuentes bibliográficas el panorama es más alentador ya que, efectivamente, hay varios libros publicados dedicados enteramente a los fractales y los hay de todos tipos, desde los muy teóricos, como el “Measure Topology & Fractal Geometry” de Gerald J. Edgar que es un libro que presenta -con todo el formalismo que esto exige- las dos disciplinas básicas sobre las que se erige la Geometría Fractal: teoría de la medida y la topología métrica; o el “Fractals Everywhere” de Barnsley que está lleno de aplicaciones, o el “Fractal Geometry” de Falconer que tiene un enfoque riguroso y al mismo tiempo experimental, o “Fractal Geometry & Nature” de Benoit B. Mandelbrot que es “La Biblia” del tema, o “Fractals for the Classroom” de Peitgen que hace un tratamiento bastante asequible o, tantos otros libros... y, aunque cualquier investigación o experimento que gire en torno al tema de los fractales encontrará sustento suficiente en la literatura citada no encuentro, sin embargo, suficientes fuentes en nuestro idioma cuyo tratamiento sea el de un libro de texto sobre fractales. Por supuesto que las fuentes las hay; las citaré a continuación:

1. A. Giraldo & M. A. Sastre, *Geometría Fractal. Aplicaciones y Algoritmos*, Fundación General de la Universidad Politécnica de Madrid, 2000.
2. Barrallo Calonge, Javier; *Geometría fractal*. Anaya, Madrid, 1993.
3. Braun Eliezer, *Caos, fractales y cosas raras*, FCE/SEP, México, 1996.
4. Guzmán, M. de; Martín, M. A.; Morán, M. y Reyes, M., *Estructuras fractales y aplicaciones*, Labor, Barcelona, 1993.

5. Monroy Olivares C., *Curvas fractales*, Alfaomega, México, D. F. 2002.
6. Talanquer, Vicente, *Fractus, fracta, fractal. Fractales de Laberintos y Espejos*. FCE/SEP, México, 1996 (1ª Ed.).
7. Wegner, Tim & Tyler, Bert; *El mundo de las fractales*. Anaya, Madrid, 1995.

Resulta, sin embargo que –aunque estas fuentes están en español- revisten ciertos inconvenientes. Por ejemplo, los libros publicados por el Fondo son dos libros bonitos que nos introducen en el mundo de los fractales y sea quizá, el libro de Talanquer, el que más descriptivo es en cuanto al aspecto teórico, pero –subrayo- *descriptivo -explicativo incluso-, pero no exhaustivo*, orientado a aplicaciones en el área de la Química y de los procesos DLA¹, es decir, con un enfoque ya muy concreto. El libro de Eliezer Braun es un libro completamente abocado a la divulgación de los fractales y, por lo mismo, está escrito para ser asequible a cualquier persona de modo que su tratamiento teórico no es todo lo riguroso que pueda esperarse; el libro de Monroy es un libro que es excelente por tratar de ser un libro de texto de Curvas fractales que expone en sus páginas el desarrollo histórico de esta disciplina, áreas de investigación más socorridas, algoritmos en lenguaje C, gráficos, ejemplos, etc. Sin embargo, el tratamiento matemático nos remite demasiado a sus propias fuentes justo cuando uno está ávido de hallar aquel libro que no te lleve a la fuente de la fuente para hallar y entender la demostración y/o el sustento de tal o cual teorema. El *inconveniente* con los otros libros es que son editados en España y es, hasta el momento, relativamente poco habitual hallarlos en cualquier librería de México; uno de ellos, *Estructuras Fractales y Aplicaciones*, es especialmente recomendado en más de un sitio web en español dedicado al tema. Sin embargo, este libro es muy difícil de conseguir por dos cosas: una, porque editorial Labor es una editorial que aquí en México ya no opera; dos, porque el libro está ya descatalogado. El libro ni siquiera figura en el catálogo de libros de la UNAM, no lo tienen el IPN, ni la UAM, ni el TEC de Monterrey ni el ITAM.

Ahora bien, es importante mencionar que, ciertamente, el idioma inglés es el idioma estándar para la publicación de *papers* y textos científicos y, en general, la globalización conlleva una universalización de este idioma. Cabe mencionar que en esta tesis no se pretende establecer una crítica a esta situación, por el contrario, se está perfectamente consciente de la importancia que reviste este idioma dentro del quehacer científico.

En cuanto a la literatura digital abocada al tema de los fractales que navega por Internet, cabe destacar los siguientes textos:

1. Derlinchán González, Daniel, *Generación gráfica de Fractales*, Proyecto de Fin de Carrera, Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática de Sevilla, 2004.
2. Mateos C. José, *Propiedades del conjunto de Cantor*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM.
3. Pérez Ortiz, Juan Antonio; *Codificación fractal de imágenes*, Memoria del proyecto para la obtención del título de Ingeniero en Informática, Universidad de Alicante, 1998.

¹ Diffusion-limited aggregation (Agregación por Difusión Limitada).

4. Rey Semó, José Manuel, *Geometría de medidas y Conjuntos Autosemejantes*, Tesis doctoral, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid. 1995.

Cada uno de los cuales aporta un tratamiento meticuloso y formal de algunos de los temas presentados en este trabajo de investigación mas, salvo por el texto de Juan Antonio Pérez Ortiz, hace falta que queden unificados en un solo texto digital los elementos teóricos fundamentales de la Geometría Fractal, que son la Teoría de la Medida y la Topología Métrica, amén de cualesquiera otros tópicos de la Geometría fractal como lo son, por citar alguno, los Sistemas L.

Por otro lado, esta tesis se dedicará, exclusivamente, a la presentación de curvas que llenan el plano –como las de Hilbert o de Peano- que tienen naturaleza fractal y que pueden ser especificadas con Sistemas L; es por ello que no se pretende abarcar todo el *background* matemático propio de la Geometría Fractal, sino sólo ciertos entes de la misma que son menesterosos para el tratamiento de curvas fractales que llenan el plano y requieren para su estudio conocimientos afines a las matemáticas y a las ciencias de la computación tales como gramáticas, sistemas L, geometría euclidiana y geometría fractal. Se ha buscado delimitar de esta manera los tópicos abordados en la misma a fin de lograr mayor profundidad y formalismo en el enfoque que es, precisamente, uno de los objetivos primarios de esta tesis, esto es, suministrar una fuente en español que aborde aspectos teóricos básicos de la geometría fractal y sea útil para estudiantes de las ciencias de la computación y áreas afines de habla hispana, teniendo como elemento integrador la descripción de las curvas fractales “Dragón de Heighway” y “McWorter’s pentigree” ya que éstas, en la actualidad, tienen amplia aplicación en el área de geometría computacional como, por ejemplo, en el modelado de plantas y otros organismos biológicos.

➤ **Objetivo**

Suministrar una fuente en español que aborde aspectos teóricos fundamentales de la geometría fractal con una aplicación a curvas fractales que llenan el plano y la especificación de las mismas a través de Sistemas L, ofreciendo una descripción completa de dichos modelos que incluya el algoritmo codificado en lenguaje de Programación Logo del Sistema L respectivo y que resulte de utilidad para estudiantes de licenciatura de Matemáticas Aplicadas y Computación y áreas afines.

➤ **Alcances**

Especificar las curvas fractales de Dragón y curva fractal de McWorter a través de un Sistema L ofreciendo algoritmos originales en lenguaje de programación Logo para dichas especificaciones y, simultáneamente, integrar en un solo texto los conocimientos teóricos básicos que subyacen a la Geometría Fractal teniendo presente que dichos conocimientos están ya dados y que, sin embargo, el tratamiento que se presenta en la tesis busca hacerlos accesibles a través de ejemplos prácticos claros, concisos y originales.

➤ **Presentación de los Capítulos**

El **capítulo I** de esta tesis está prácticamente destinado a introducir los conceptos matemáticos – con sus respectivos ejemplos- necesarios para la comprensión y manejo de curvas fractales desde la perspectiva que se aborda aquí, es decir, a partir de un sistema L. La idea es hacer asequible el

fundamento matemático de una curva fractal partiendo de los cimientos matemáticos de la geometría fractal, esto es, la topología métrica y la teoría de la medida; no se presentará de manera extensa el grueso de estas teorías matemáticas, sino sólo aquellos conceptos a partir de los cuales se erigen las dos características distintivas de un fractal: la autosemejanza y la dimensión fraccionaria.

Además, el breve esbozo que se hace de la topología métrica y de la teoría de la medida en la tesis permitirá entender a un objeto geométrico como un conjunto de puntos y, en general, como un conjunto de objetos matemáticos cuyo estudio es factible gracias a la teoría de conjuntos.

Como bien se enfatiza en las fuentes, el advenimiento de la teoría de conjuntos permitió construir –entre otros- el aparato matemático necesario para el estudio de las curvas fractales. Nunca –diría Hilbert- y nosotros con él, habremos de estar lo suficientemente agradecidos del idílico lugar que Georg Cantor creó para nosotros. En el caso de los conjuntos fractales, como se explica en el capítulo I, tenemos que se trata de conjuntos de puntos pertenecientes a un espacio métrico concreto conocido con el nombre de espacio métrico de Hausdorff. La importancia de conocer las cualidades que caracterizan a este espacio métrico radica en que las mismas se hacen extensivas a los conjuntos fractales, entendidos estos últimos como subconjuntos de un espacio métrico de Hausdorff, ceñidos a la noción de distancia definida para este espacio.

En el **capítulo II** se presentan dos curvas que llenan el plano, las de Peano y Hilbert, presentando la construcción heurística de las mismas –tomadas en su mayoría de libros de Geometría- su comportamiento fractal y una cosa importante que trae a colación un conocimiento fundamental del cálculo elemental: no todas las funciones continuas son diferenciables. La construcción geométrico-formal de estas curvas, así como la demostración de la no diferenciableidad de las mismas, se presenta en el Apéndice [SAGH94]. Se define, además, el concepto de gramática y, con éste, uno más importante para la definición de un sistema L, el de reglas de producción. Por el momento se adelanta que una gramática es una 4-tupla $G = \{N, T, P, S\}$ en la que cada uno de sus elementos son conjuntos; el conjunto P está constituido por reglas de producción a partir de las cuales se crean todas las estructuras sintácticas permitidas por la gramática. Un sistema L trabaja a través de reglas de producción, es decir, la sustitución sucesiva de las variables o no terminales (conjunto N) –si bien un Sistema L no maneja propiamente símbolos no terminales- por cadenas de símbolos que pertenecen al conjunto $(N \cup T)^*$ hasta llegar a un símbolo final $a \in T$; llegado a ese momento se habrá generado una curva fractal de algún orden (con orden nos referimos al número de iteraciones para generarla).

En este capítulo también se muestran las instrucciones básicas del lenguaje de programación Logo para generación de curvas ya que hay un vínculo interesante para entender cada una de las formas sentenciales -que constituyen al todo que es la curva generada- como la concatenación de diversas instrucciones Logo. Finalmente, se define un Sistema L y se presentan algunos ejemplos haciendo uso del conocimiento presentado al inicio del capítulo.

En el **capítulo III** se presentan las construcciones geométrica y lógica de las curvas Dragón y curva de McWorter, explicando con claridad cada uno de los pasos para su elaboración. Dichas construcciones son tomadas primordialmente de [EDGG1990], [MCWW87] y de [GARM86]. También se explican sus propiedades, esto es, las relaciones que guardan entre sí cada una de las partes que las constituyen y, finalmente, aquello por lo que se les considera curvas fractales. Se ofrece también una propuesta novedosa, la Flor de McWorter, que se obtiene componiendo cinco copias de la curva de McWorter.

Finalmente, en el **capítulo IV** se describe el modelo sobre el cual se presentan las curvas Dragón y de McWorter; lo que significa que se definirá paso a paso cómo -por medio de un sistema L- pueden construirse dichas curvas. Lo interesante en este punto es entender que el sistema L, contiene de manera codificada toda la información que se necesita para la construcción de la curva en cuestión. Se clasifican las gramáticas asociadas a cada Sistema L y, finalmente, se presentan sendos algoritmos codificados en lenguaje Logo junto con la creación de las pila resultantes de la ejecución de los mismos. Se destaca en este punto que, en particular, el algoritmo presentado para la generación de la curva Dragón es completamente original, esto es, de autoría propia y que es resultado inmediato de codificar en Logo el Sistema L que -dicho sea de paso- es también original para dicha curva. Sin embargo, no se descarta que algoritmo y Sistema L semejantes para la curva Dragón hayan sido ya propuestos por otros investigadores. El algoritmo propuesto para la curva de McWorter es también propio, si bien un Sistema L similar -quizá por su naturalidad- ha sido ya propuesto en otras fuentes sobre fractales.

Los capítulos más sustanciales de esta tesis son el I y el II, pero es imposible pasar de estos capítulos al IV sin el puente que en este caso constituye el III. Resulta posible a la intuición entender la construcción de las curvas Dragón y de McWorter casi sin pasar por el capítulo I, pero si se quiere encontrar el sustento matemático que subyace al entendimiento de toda curva fractal en el plano es indispensable retomar dicho capítulo. Concretamente, se tiene la finalidad -secundaria quizá- de animar a los estudiantes de las ciencias de la computación -de MAC sobretodo- a revisar el sustrato matemático de la Geometría fractal en particular y de la Geometría en general.

Finalmente, en el apartado "Conclusiones", se dan unos comentarios finales que pretenden dejar puerta abierta a todos aquellos estudiantes de las ciencias de la computación y, en particular, de la carrera Matemáticas Aplicadas y Computación que están interesados en las aplicaciones que brindan los modelos descritos y en las infinitas, utilidad y belleza, que subyacen en las matemáticas de las curvas fractales.

Capítulo 1



“El Alquimista”, Remedios Varo

Las ciudades y los trueques

Al entrar en el territorio que tiene por capital a Eutropia, el viajero no ve una ciudad sino muchas, de igual importancia y no disímiles entre sí, desparramadas en un vasto y ondulado altiplano. Eutropia no es sino todas esas ciudades al mismo tiempo; una sola está habitada, las otras vacías; y esto ocurre por turno. Diré ahora cómo. El día en que los habitantes de Eutropia se sienten abrumados de cansancio y nadie soporta más su trabajo, sus padres, su casa y su calle, las deudas, la gente a la que hay que saludar o que te saluda, entonces toda la ciudadanía decide trasladarse a la ciudad vecina que está ahí, esperándolos, vacía y como nueva, donde cada uno tomará otro trabajo, otra mujer, verá otros paisajes al abrir las ventanas, pasará las noches en otros pasatiempos, amistades, maledicencias. Así sus vidas se renuevan de mudanza en mudanza entre ciudades que por su exposición o su declive o sus cursos de agua o sus vientos se presentan cada una con algunas diferencias de las otras. Como sus respectivas sociedades están ordenadas sin grandes diferencias de riqueza o de autoridad, el paso de una función a otra se produce sin grandes sacudidas; la variedad está asegurada por la multiplicidad de las tareas, de modo que en el espacio de una vida es raro que alguien vuelva a un oficio que ya ha sido el suyo.

De este modo la ciudad repite su vida siempre igual, desplazándose hacia arriba y hacia abajo en su tablero de ajedrez vacío. Los habitantes vuelven a recitar las mismas escenas con actores cambiados. Repiten las mismas réplicas con acentos combinados de otra manera; abren alternadamente la boca en bostezos iguales. Sola entre todas las ciudades del imperio, Eutropia permanece idéntica a sí misma. Mercurio, dios de los volubles, a quien está consagrada la ciudad, cumplió este ambiguo milagro.

Ítalo Calvino, Las ciudades invisibles

1. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Como matemática aplicada, la geometría de Euclides es una buena aproximación dentro de un campo restringido. Suficientemente buena como para dibujar un plano de Madrid; deja de serlo para un mapa de España o Europa, o para la medida de las distancias atómicas y estelares. Como sistema de Matemáticas puras, sus proposiciones son verdaderas en el sentido más general. Es decir, tienen validez únicamente como proposiciones lógicas si han sido deducidas correctamente de los axiomas. Son, por lo tanto, posibles otras geometrías.

E. Kasner & J. Newman

1.1 Definición y propiedades distintivas de una curva fractal

Una curva en el plano es una sucesión de puntos que dibuja una trayectoria en el mismo y cuya representación funcional describe por completo a la curva en cuestión. Por ejemplo, la curva cónica llamada parábola, en su forma canónica, queda descrita de manera unívoca —si bien la describe una función inyectiva— por la regla funcional que asigna a cada elemento en el dominio de la función el cuadrado del mismo, su imagen. Matemáticamente, dicha relación se escribe así: $f(x) = x^2$, donde $f: R \rightarrow R$. Así, el conjunto de puntos (x, x^2) conforman el lugar geométrico llamado parábola y su trazado en el plano por los métodos tradicionales —el hacer corresponder a cada par ordenado (x, x^2) uno y sólo un punto en el plano y luego unir dichos puntos suavemente— dan un resultado visual conocido como parábola. Esta situación —común a los estudiantes de ciencias exactas— se comprenderá más cabalmente con la lectura de la tabla funcional siguiente a partir de su gráfica (Fig. 1) y, viceversa.

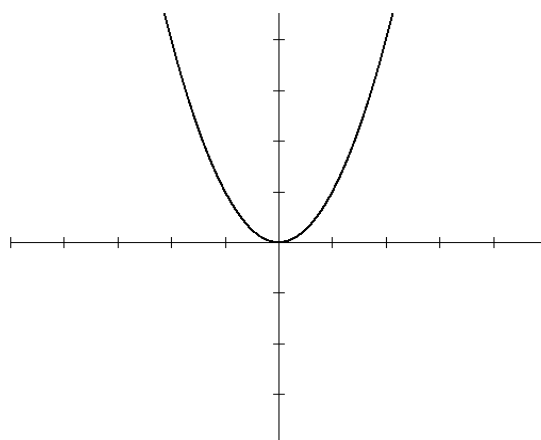


Figura 1

x	$y = f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Tabla No. 1

De cursos de cálculo elemental sabemos que esta curva es derivable, es decir, el límite de la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos de la curva es la pendiente de la recta tangente que pasa por un punto de la misma que es, al mismo tiempo, punto de intersección con la secante cuando la abscisa de uno de los puntos de la secante se aproxima a la abscisa del otro punto, es decir, cuando la secante gira hasta coincidir con la tangente. Dicho esto anterior, es posible definir a una curva como el límite de una sucesión de polígonos.

Una curva derivable en todos sus puntos del dominio es una curva continua y si, además, no ocurre que en alguno de sus máximos y mínimos locales no exista la primera derivada de la función, entonces la curva es una curva suave. Esto conduce –en contraste- a la existencia de curvas continuas que carecen de derivada. Por ejemplo, la curva $f(x) = |x|$ es una curva continua en todo R y, sin embargo, no diferenciable. Una prueba correcta de esto se halla en [FREH95, Págs. 157 y 158]. Pero no sólo la función $f(x) = |x|$ es un ejemplo ineludible de lo no diferenciable de ciertas curvas, hay otras curvas que inciden en este comportamiento; en particular, las curvas fractales, objeto de estudio de esta tesis, verifican este comportamiento.

De acuerdo a [EVEH85], el primer ejemplo publicado de manera categórica de una curva continua que no tenga tangentes y, por ende, no derivable en ninguno de sus puntos, fue dado por Karl Weierstrass. Posteriormente, el matemático sueco Helge von Koch entre 1903 y 1906 publicó un par de artículos para demostrar lo mismo construyendo una curva continua conocida como curva de Koch que carece de tangentes. A finales del siglo XIX y principios del XX se dieron a conocer muchas otras curvas continuas no derivables, entre las que se pueden mencionar las curvas de Peano, de Hilbert y de Sierpinski. De especial interés para nosotros lo son las curvas de Peano y de Hilbert, cuya construcción se presenta en el Capítulo 2, pues ejemplifican de manera contundente el concepto de curva continua que llena el plano como lo son precisamente, las curvas “Dragón de Heighway” (curva dragón) y “McWorter’s Pentigree” (que en español es traducible a “Pentagrado de McWorter”).

En un principio, el conocimiento de estas curvas tan inusuales, causó gran conmoción entre la comunidad matemática de manera que a algunos miembros de la misma les dio por llamarles “curvas patológicas” y así, por algún tiempo, todas estas curvas quedaron aglutinadas bajo tal mote; hasta que en 1977 con la publicación del ensayo “La Geometría Fractal de la Naturaleza” (The fractal geometry of nature) por el matemático francés de origen polaco Benoit B. Mandelbrot todo mundo, dentro de la comunidad científica, fue volcando paulatinamente su mirada nuevamente a estas curvas.

En su ensayo, Benoit B. Mandelbrot expone de manera elocuente el comportamiento fractal de diversas formas que permean la naturaleza, queriendo decir con el término *fractal*, esencialmente, algo que posee forma irregular, que es invariante bajo ciertos cambios de escala (fundamentalmente semejante a sí mismo si se mira con un zoom diferente cada vez) y que, tiene dimensión no entera: *Acuñé el término **fractal** a partir del adjetivo latino **fractus**. El verbo correspondiente es **frangere** que significa “romper en pedazos”. Es pues razonable ¡y nos viene de perlas! que además de fragmentado (como en fracción) **fractus** signifique también “irregular”, confluyendo ambos significados en el término **fragmento**.* [MADB83, Pág. 19] He aquí el sentido matemático que Mandelbrot confirió al término fractal: “Un fractal es por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente

mayor que su dimensión topológica” y, además, “...Propongo que las curvas cuya dimensión fractal sea mayor que su dimensión topológica 1 se llamen curvas fractales” [MADB83, Págs. 32 y 56]. Estas dos ideas, la de autosemejanza (semejanza a diferentes escalas, a diferente zoom) y la de dimensión de Hausdorff-Besicovitch (también conocida como dimensión fraccionaria) caracterizan por completo el concepto matemático de fractal. Sin embargo, abordar la comprensión de las mismas no es tarea simple y requiere un entendimiento mínimo de nociones emparentadas con topología métrica y teoría de la medida. En los apartados correspondientes a este capítulo se introducen dichos conceptos a fin de abordar más adelante y con los artilugios matemáticos mínimos necesarios el estudio de las curvas que conciernen a esta investigación, pues para las definiciones de autosemejanza y dimensión fractal, es necesario hacer uso de dicha terminología.

1.1.1 Topología métrica. Nociones básicas

Dicen que la distancia es el olvido...

Por lo regular, los trabajos de investigación dedicados a la geometría fractal comienzan su estudio introduciendo primero conjuntos fractales como el conjunto de Cantor o la curva de Von Koch u algún otro fractal clásico y después, haciendo las anotaciones pertinentes en relación a la teoría subyacente a dicho conjuntos. En esta tesis comenzaremos, por el contrario, introduciendo primero los conceptos matemáticos sobre los que se erige la geometría fractal para culminar con la presentación de diversos conjuntos fractales.

De manera que es necesario ser pacientes porque estos conceptos parecen ser en un principio sólo un caudal de definiciones inconexas, mas conforme vayamos avanzando en la introducción de los temas, dichos conceptos empezarán a cobrar sentido como partes fundamentales del todo teórico que es la geometría fractal.

Se definen también en esta sección algunos conceptos fundamentales de la topología métrica que nos permitirán entender con precisión la importancia del espacio métrico de Hausdorff \mathbb{H} (espacio al que pertenecen las curvas fractales) como un espacio en el que –bajo ciertas transformaciones- la estructura métrica del mismo permanece “inamovible”. Lo fundamental de estas definiciones es abstraer el concepto de proximidad entre puntos pues las transformaciones afines y, concretamente, las transformaciones de autosemejanza “respetan” dicha proximidad, sino por completo –como ocurre con las isometrías en el plano- sí dentro de cierto margen, esto es, a cierta escala. Las siguientes definiciones y/o teoremas con sus respectivos ejemplos son retomados en su mayoría de [BARM88], [MICF86], [ARMM87] y de [EDGG1990], si bien las soluciones que aquí se dan son mucho más exhaustivas.

La topología métrica tiene por objeto de estudio a los espacios métricos. Un espacio métrico está constituido por un conjunto de puntos E y por una función d que asigna a pares de puntos una métrica o distancia. Formalmente hablando y de acuerdo a [MICF86] tenemos:

Definición 1. Sea E un conjunto cualquiera. Se denomina distancia d , definida sobre E a toda aplicación de $E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que a la pareja de elementos $x, y \in E$ le asocia el número real no negativo $d(x, y)$, que verifique las condiciones siguientes:

a) Axioma de la Separación

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

b) Axioma de la Simetría

$$d(x, y) = d(y, x)$$

c) Desigualdad Triangular

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

✍

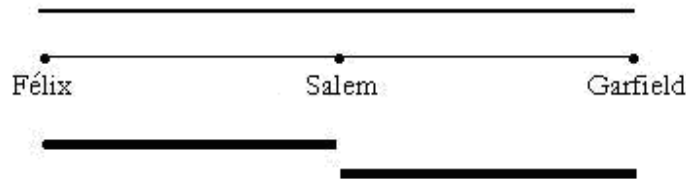
Es importante mencionar que para efectos de las curvas que se estudian en esta investigación tenemos que $E = \mathbb{R}^2$. Por otro lado, veamos qué significan cada una de las condiciones que restringen a la función distancia d . Bien, el axioma de la separación no hace sino asegurar que a dos puntos, los puntos x y y , por ejemplo, que ocupan el mismo lugar, uno “encima” del otro, no los separa ninguna distancia. Ésta es la noción que comúnmente se tiene del término distancia. El axioma de la simetría establece que dados dos puntos fijos en E llamémoslos Garfield y Salem, da lo mismo para Odi caminar de Garfield a Salem que de Salem a Garfield en caso de que así tenga que hacerlo a petición de los felinos. Pensemos ahora en un tercer punto al que podemos llamar Félix, entonces la desigualdad triangular afirma que la distancia que recorra Odi —partiendo de Félix— para llegar a Garfield será siempre menor o igual que la suma de las distancias recorridas que tuvo que transitar para llegar de Félix a Salem y luego de ahí a Garfield. Este ejemplo aunque, burdo, proporciona una manera simple de articular algo que a todas luces es evidente. La Fig. 2 nos ayuda a comprender mejor esto anterior.



Figura 2

Un caso interesante de la desigualdad triangular se da cuando se cumple la igualdad. Analicémoslo para $E = R$ con un ejemplo. Si Odi está con Félix y camina hacia Garfield primero (línea delgada), recorrerá la misma distancia que si camina primero hacia Salem y después hacia Garfield (línea gruesa) ya que Salem equidista de ambos sobre una misma recta. La Fig. 3, deja ver claramente esto anterior. Podemos entonces decir que:

$$d(\text{Félix}, \text{Garfield}) = d(\text{Félix}, \text{Salem}) + d(\text{Salem}, \text{Garfield})$$



$$d(\text{Félix}, \text{Garfield}) = d(\text{Félix}, \text{Salem}) + d(\text{Salem}, \text{Garfield})$$

Figura 3

Una distancia muy conocida y que satisface las tres condiciones de la definición 1 es la distancia euclídea en R^2 que no es otra sino aquella que se define a partir del teorema de Pitágoras y cuya ecuación está dada por:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \dots (A)$$

Si pensamos en E como en un espacio vectorial, entonces a esta distancia se le conoce como norma. Veamos cómo la distancia euclídea es una distancia en el sentido aquí definido.

Efectivamente, (A) satisface el primer axioma pues si $x = y$ tenemos que $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, esto es, $x_1 = y_1 \Leftrightarrow x_1 - y_1 = 0$ y $x_2 = y_2 \Leftrightarrow x_2 - y_2 = 0$ que, al sustituir en (A) da por resultado $d(x, y) = 0$. Ahora que si $d(x, y) = 0$, entonces el radicando es cero pues ningún otro número elevado al cuadrado es cero, y como el radicando está compuesto por dos sumandos cada uno de los cuales es un cuadrado, la única posibilidad para que estos sumandos se anulen es que $x_1 - y_1 = 0$ y $x_2 - y_2 = 0$. La condición b) es también verificada por la distancia euclídea puesto que:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = d(y, x) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

Y debido a que el cuadrado de un número –positivo o negativo- es siempre positivo. La desigualdad triangular significa para esta distancia que:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Esto es:

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}$$

La demostración de la desigualdad triangular no sólo en R^2 , sino, en general, en todo R^n requiere echar mano de la desigualdad de Cauchy – Schwarz. En [KREK85] y [TOP02] aparecen demostraciones para ambos casos de este axioma, mismas que nos permiten comprobar que, efectivamente, (R^2, d) es un espacio métrico.

Definición 2. A un conjunto E dotado de una distancia d se le designa con el nombre de espacio métrico y se le representa por (E, d) .

Los siguientes son ejemplos clásicos de espacios métricos.

1. La recta real R , junto con la distancia fundamental d_f definida como:

$$d_f : R \times R \rightarrow R_+ \text{ tal que:}$$

$$d(x, y) = |x - y|$$

es un espacio métrico.

2. (R^2, d_E) es el espacio euclídeo bidimensional y constituye un espacio métrico.

Vamos ahora a definir la noción de equivalencia métrica ya que resulta ser indispensable para comprender la equivalencia entre espacios métricos presentada en la definición 7.

Definición 3. Dos métricas d_1 y d_2 sobre un espacio E son equivalentes si existen constantes $0 < c_1 < c_2 < \infty$ tales que

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \forall (x, y) \in E \times E$$

O bien, si existen constantes $0 < e_1 < e_2 < \infty$ tales que

$$e_1 d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq e_2 d_2(x, y) \forall (x, y) \in E \times E$$

☞

Por ejemplo, si tenemos dos puntos, X de coordenadas $(1, 2)$; y Y de coordenadas $(3, 4)$ situados en el plano cartesiano como se muestra en la Fig. 4 tenemos que su distancia euclídea está dada por:

$$d(x, y) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{8} \approx 2.82843$$

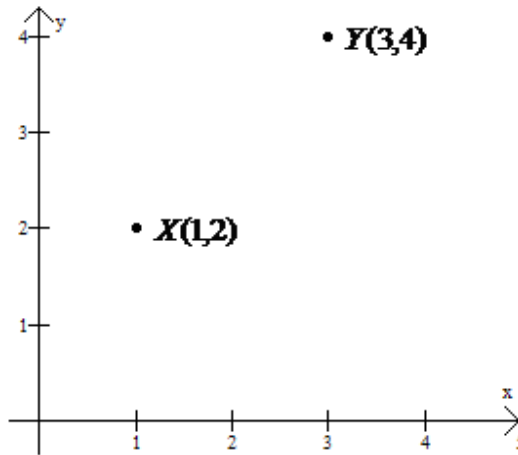


Figura 4

Ahora que si calculamos la distancia de estos dos puntos, pero utilizando la distancia que se define a continuación y que, de acuerdo a [BARM88] llamaremos distancia Manhattan:

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Tenemos que su distancia está dada por:

$$d(x, y) = |1 - 3| + |2 - 4| = 4$$

Si notamos por d_M a la distancia Manhattan y por d_E a la distancia euclídea tenemos que –si dichas métricas son equivalentes, de acuerdo a la definición 3- deben existir escalares c_1 y c_2 tales que:

$$c_1 d_M \leq d_E \leq c_2 d_M$$

o sea

$$c_1 4 \leq \sqrt{8} \leq c_2 4$$

Resolviendo para la primera parte de la inecuación vemos que esto es cierto para $c_1 = \sqrt{8}/4$ y, además, resulta evidente que la segunda parte de la desigualdad es cierta para cualquier $c_2 \geq \sqrt{8}/4$, por ejemplo, para $c_2 = 2$; aunque, en realidad, debe notarse que –de acuerdo a la definición- la restricción que impone que $c_2 > c_1$, no permitiría a c_2 ser igual a $\sqrt{8}/4$.

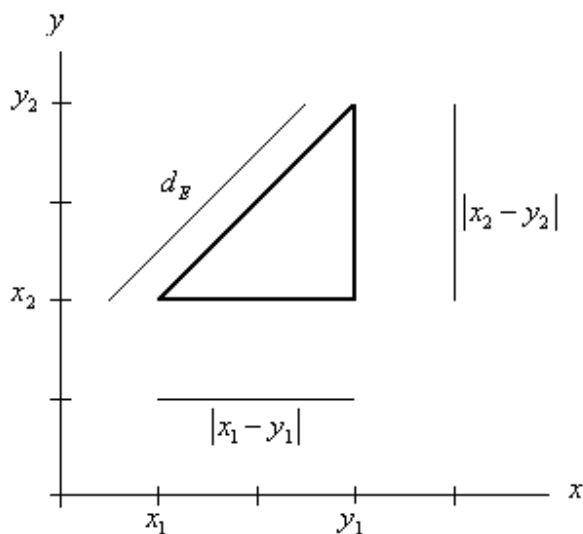


Figura 5

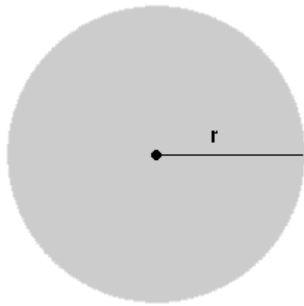
De manera general, tenemos que la desigualdad triangular (ver Fig. 5) nos asegura que $d_E \leq d_M$; esto es, que la distancia euclídea denotada por d_E (para distinguirla de la distancia Manhattan) de dos puntos en el plano es menor o igual que la distancia Manhattan d_M de los mismos. Por lo tanto, resulta obvio que $c_1 \leq 1$ pues, de otro modo, $d_E \geq d_M$ y podríamos también fijar a c_2 en 1 puesto que se sigue cumpliendo que $d_E \leq d_M$. La cuestión es comprender que la idea de distancias equivalentes entraña esta otra: *dos distancias son equivalentes si sugieren la misma noción de proximidad y/o lejanía entre puntos* [BARM88, Pág. 12] siempre y cuando refieran al mismo espacio métrico.

Definición 4. En el espacio euclídeo R^n , se llama bola abierta de centro a y de radio $r > 0$ al conjunto

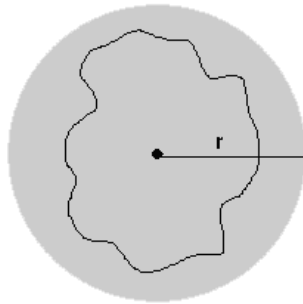
$$B(a, r) = \{x \in R^n \mid d(a, x) < r\}$$

✍

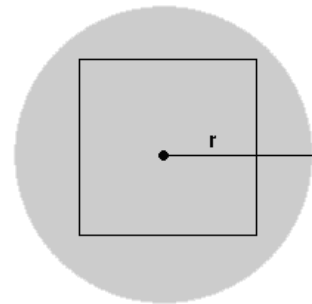
En la Fig. 6 se muestra gráficamente el concepto de bola abierta. Por otro lado, recordemos que al principio se aclaró que nuestro espacio métrico considerado sería R^2 y por tanto, $n = 2$. En general, R^n es un espacio métrico. De hecho, al espacio euclídeo n-dimensional junto con la noción de norma –distancia entre puntos– se le conoce como espacio de Hilbert.



Bola abierta



Bola abierta



Bola abierta

Figura 6

Definición 5. En el espacio euclídeo R^n , se llama bola cerrada de centro a y de radio $r > 0$ al conjunto

$$B'(a, r) = \{x \in R^n \mid d(a, x) \leq r\}$$

✍

En la Fig. 7 se muestra gráficamente el concepto de bola cerrada.

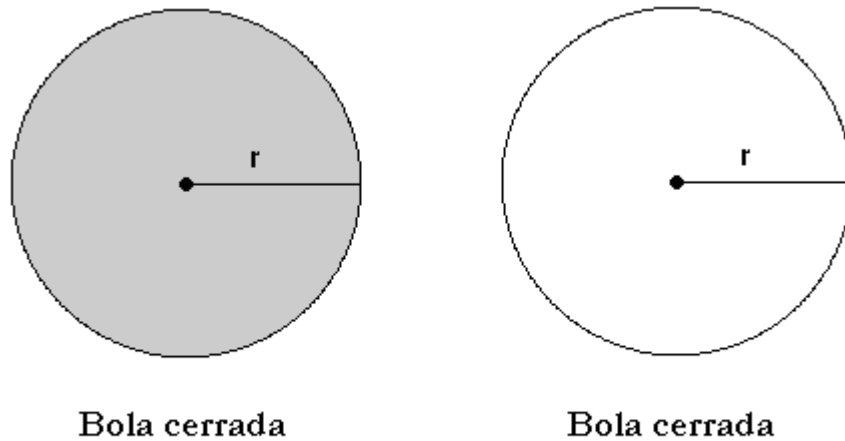
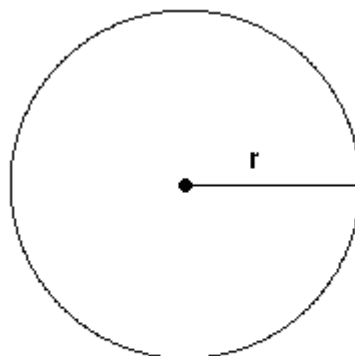


Figura 7

Definición 6. En el espacio euclídeo R^n , se llama esfera de centro a y de radio $r > 0$ al conjunto

$$S(a, r) = \{x \in R^n \mid d(a, x) = r\}$$

✍



Esfera

Figura 8

En los siguientes renglones se muestran ejemplos de bolas abiertas, cerradas y esferas en tres diferentes espacios métricos. Considérense los tres espacios métricos siguientes con sus correspondientes distancias:

1. El espacio métrico discreto definido por (R, d_z) con su métrica definida como sigue:

$$d_z(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y, \text{ llamada distancia discreta.} \end{cases}$$

En este caso las bolas abierta, cerrada y esfera de centro a y radio r dependerán de la longitud de r . Así :

a) Si la longitud de r verifica $r < 1$, las bolas abierta, cerrada y esfera son:

- $B(a, r) = \{a\}$

Porque si tomamos cualquier $x \neq a \Rightarrow d(x, a) = 1$ y entonces $x \notin B$ y por tanto, no habría bola cerrada.

- $B'(a, r) = \{a\}$

Porque $\forall x \neq a, d(a, x) = 1 \Rightarrow x$ se “sale” de la bola cerrada de radio $r < 1$.

- $S(a, r) = \emptyset$

Porque no hay ningún punto diferente de a cuya distancia discreta d_z a a sea igual a un número $r < 1$. Esto es, porque –por definición– $\forall x \neq a, d(a, x) = 1$ ó $d(a, x) = 0$.

b) Si la longitud de r verifica $r = 1$, las bolas abierta, cerrada y esfera son:

- $B(a, r) = \{a\}$

Porque sólo a pertenece a la bola cerrada B de radio $r = 1$, ya que $d(a, a) = 0$.

- $B'(a, r) = R$

Porque para $x \neq a$ y para $x = a$ tenemos que, sus respectivas distancias a a son $d(a, x) = 1$ y $d(a, x) = 0$ de modo que, acorde con la definición de este espacio métrico (constituido por todos aquellos puntos de la recta real que satisfacen la distancia discreta d_z) B' está compuesto por el espacio métrico discreto (R, d_z) ; que, en este caso, se denota por R .

- $S(a, r) = R - \{a\}$

Esto es así por el mismo argumento que para B' , además de que ha de tenerse en cuenta que $S = B' - B$.

c) Si la longitud de r verifica $r > 1$, las bolas abierta, cerrada y esfera son:

- $B(a, r) = R$

Porque $\forall x \neq a, d(a, x) = 1$ y para $x = a, d(a, x) = 0$; de modo que $\forall x$ que verifica la distancia que define a este espacio métrico, $x \in B$ que es una bola abierta de radio $r > 1$.

- $B'(a, r) = R$

Por exactamente la misma razón que $B = R$; máxime que una bola cerrada sí puede contener a su frontera.

- $S(a, r) = \emptyset$

Porque, dada la distancia definida para este espacio métrico, tenemos que $\neg \exists x \neq a$ tal que $d(a, x) = r > 1$.

2. El espacio métrico (\mathbb{R}, d_f) , es decir, la recta real con su respectiva distancia:

$$d_f(x, y) = |x - y|$$

En este e. m., la bola abierta de centro a y radio r es el intervalo abierto $(a - r, a + r)$ que no contiene a los puntos $a - r$ y $a + r$, esto es:

$$B = (a - r, a + r)$$

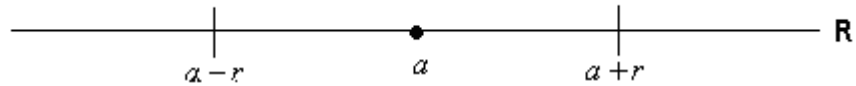


Figura 9

La bola cerrada de centro a y radio r es el intervalo cerrado $[a - r, a + r]$ que sí contiene a los puntos extremos del mismo. En símbolos:

$$B' = [a - r, a + r]$$

Y la esfera de centro a y radio r está compuesta sólo por los puntos extremos $a - r$ y $a + r$, esto es:

$$S = \{a - r, a + r\}$$

3. Y, finalmente el espacio métrico (\mathbb{R}^2, d_m) , en donde su distancia es la ya conocida distancia Manhattan. En este espacio métrico, la bola abierta de centro a y radio r está formada por todos los puntos interiores al cuadrado rotado 45° respecto a los ejes de la figura 10. En símbolos:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r\}$$

La bola cerrada $B'(a, r)$ está entonces formada por todos los puntos de este cuadrado, incluyendo los de los lados. Es decir:

$$B'(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \leq r\}$$

La esfera está formada por todos los puntos contenidos en los lados de este cuadrado. Matemáticamente:

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r\}$$

Que la bola abierta B , la bola cerrada B' y la esfera S constituyan sendas formas geométricas se comprende mejor con el siguiente análisis trigonométrico; para ello, es necesario remitirse a la Fig. 11.

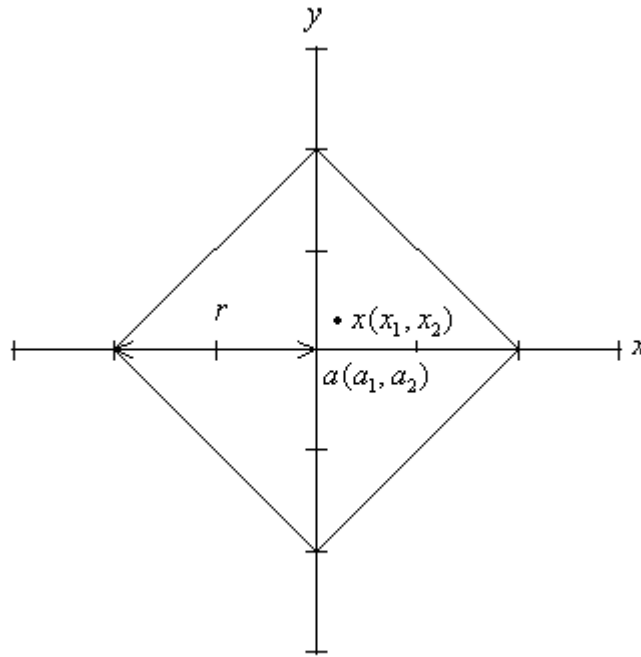


Figura 10

Empecemos con la esfera S . Para comprender que la esfera está dada por $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r\}$, conviene tomar en cuenta que todos los vértices de nuestro cuadrado girado satisfacen $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r$. Para comprobarlo, pensemos que el centro a de la esfera tiene por coordenadas $(a_1, a_2) = (0, 0)$ y que los puntos A, B, C y D correspondientes a los vértices de esta esfera tienen, por tanto, coordenadas $A(0, r)$, $C(0, -r)$, $B(-r, 0)$ y $D(r, 0)$, respectivamente. Entonces:

Para A :

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = r \Rightarrow$$

$$|0 - 0| + |r - 0| = r$$

$$|0| + |r| = r$$

$$r + 0 = r \Rightarrow \boxed{r = r}$$

Para B :

$$x_1 = -r \text{ y } x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$|-r - 0| + |0 - 0| = r$$

$$|-r| + 0 = r$$

$$r + 0 = r \Rightarrow \boxed{r = r}$$

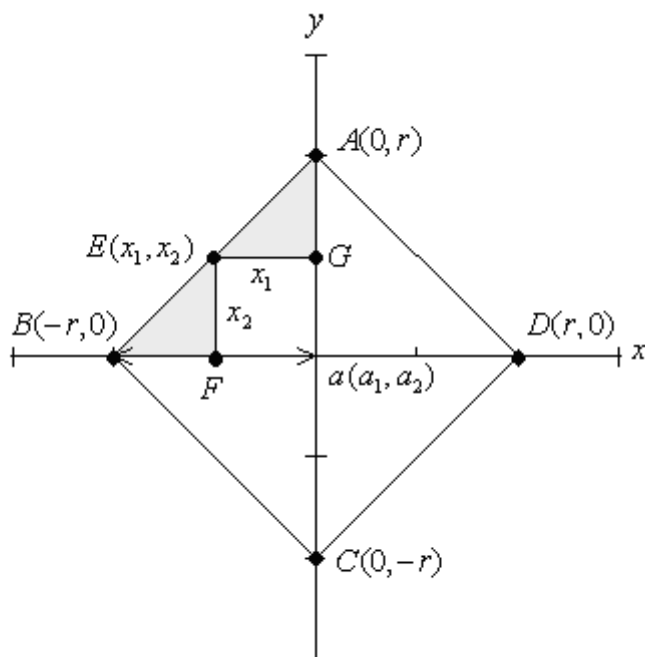


Figura 11

Para C :

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = -r \Rightarrow$$

$$|0 - 0| + |-r - 0| = r$$

$$0 + r = r \Rightarrow \boxed{r = r}$$

Para D :

$$x_1 = r \text{ y } x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$|r - 0| + |0 - 0| = r$$

$$|r| + 0 = r$$

$$r + 0 = r \Rightarrow \boxed{r = r}$$

Ahora bien, todos los puntos *no vértice* que se hallan en los lados del cuadrado girado, también pertenecen a S . Tómese por ejemplo cualquier punto que esté ubicado sobre una de las aristas de la Fig. 11. En esta figura hemos elegido al punto E en la arista que se encuentra en el segundo cuadrante del plano cartesiano sobre el que hemos localizado al rombo. Es claro que el punto E tiene por coordenadas (x_1, x_2) y que las coordenadas del centro de nuestra esfera son $(0, 0)$; es decir, coincide con el origen de nuestro sistema rectangular. Por otro lado, a fin de que las coordenadas de E satisfagan $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r$ su suma absoluta debe ser igual a r . Bien, como x_1 y x_2 son distancias no nos preocupamos “explícitamente” por la cuestión de los signos. Dicho de otra manera, las distancias x_1 y x_2 han de ser igual a r para que S , efectivamente, esté constituida de todos los puntos pertenecientes a los lados del cuadrado; y de hecho, lo son.

Si observamos la Fig. 11 vemos que tenemos dos triángulos rectángulos: $\triangle AGE$ y $\triangle EFB$; ahora bien, el lado EF del triángulo $\triangle EFB$ y el lado EG del triángulo $\triangle AGE$ tienen la siguiente particularidad $EG = x_1$ y $EF = x_2$ de modo que basta mostrar que EG y AG son iguales para concluir que $EG + EF = r$, o sea, $|x_1 - 0| + |x_2 - 0| = r$. Esta demostración es inmediata puesto

que los triángulos ΔAGE y ΔAOB (con O el punto que simboliza al origen del sistema rectangular de coordenadas) son homólogos y como ΔAOB tiene catetos de igual longitud (ambos r), es claro que ΔAGE también los tiene. $\therefore EF + EG = EF + AG = r$ y queda demostrado que

$$S(a, r) = \{x \in R^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r\}$$

Por otro lado, es obvio que la suma absoluta $|x_1 + x_2|$ de todas las coordenadas (y por tanto, $|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|$) es menor a r . Y, por tanto,

$$B'(a, r) = \{x \in R^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \leq r\}$$

está efectivamente constituida por todos los puntos dentro del cuadrado incluidos los de los lados y que lo mismo ocurre para

$$B(a, r) = \{x \in R^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r\}$$

Definición 7. Dos espacios métricos (E_1, d_1) y (E_2, d_2) son equivalentes si hay una función $f: E_1 \rightarrow E_2$ que sea inyectiva y sobreyectiva y, por tanto, invertible, tal que la distancia d_1' en E_1 definida por:

$$d_1'(x, y) = d_2(f(x), f(y))$$

es equivalente a d_1 .

✍

La definición anterior nos está diciendo claramente que la equivalencia métrica entre dos espacios se da si al mapear cualquier conjunto de puntos de, por ejemplo, el espacio E_1 al espacio E_2 resulta que la distancia d_2 entre las imágenes $f(x)$ y $f(y)$ de dos puntos $x, y \in E_1$ es equivalente a la distancia d_1 de x y y en E_1 antes de aplicar el mapeo f .

El siguiente ejemplo, nos aclarará mejor las definiciones 3 y 7.

Queremos saber si los espacios métricos $E_1 = [1, 2]$ y $E_2 = [0, 1]$ con sus respectivas métricas $d_1 = |x - y|$ que es la distancia euclídea en R^1 y $d_2 = 2 \cdot |x - y|$ son equivalentes.

Para responder a este cuestionamiento debemos primero haber notado que la definición VI implica que $d_1'(f(x), f(y)) = d_2 \circ h = d_1(f)$, es decir, que d_1' es el resultado de componer d_2 con f . Hagámoslo.

$$\begin{aligned} d_2 \circ h &= d_2(x-1) = 2 \cdot |(x-1) - (y-1)| \\ &= 2 \cdot |x-1-y+1| \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot |x - y|$$

Mas por el comentario que se hizo después de VI es claro que esta composición de funciones no es otra cosa que determinar cuál es la distancia d_2 entre las imágenes $f(x)$ y $f(y)$ de x y y en E_1 ; por lo que entonces hay que probar que $d_1' = d_2$. Ahora bien -y como se propuso en [BARM88]- utilizaremos la función o regla de correspondencia $f(x) = x - 1$ -que es inyectiva y suprayectiva- a fin de verificar que E_1 y E_2 con sus métricas definidas son espacios métricamente equivalentes, para ello basta con probar: 1) $d_1' = d_2$ y 2) $d_1' \approx d_1$.

1) $d_1' = d_2$ Esto se demostró al desarrollar la composición de las funciones $d_2 \circ h$.

2) $d_1' \approx d_1$ O, en otras palabras ¿existen c_1 y c_2 tales que $d_1' c_1 \leq d_1 \leq d_1' c_2$? Averigüémoslo:

$$c_1 2 \cdot |(x-1) - (y-1)| \leq |x - y| \leq c_2 2 \cdot |(x-1) - (y-1)|$$

Resolviendo la primera parte de la desigualdad:

$$2 \cdot |(x-1) - (y-1)| \leq |x - y|$$

$$c_1 2 \cdot |x-1 - y+1| \leq |x - y|$$

$$c_1 2 \cdot |x-1 - y+1| \leq |x - y|$$

$$c_1 \leq \frac{|x - y|}{2 \cdot |x - y|}, \text{ Dividiendo:}$$

$$c_1 \leq \frac{1}{2}$$

De manera análoga y resolviendo la segunda parte de la desigualdad tenemos que $c_2 \geq 1/2$ (aunque, forzosamente mayor a $1/2$ por definición).

Tomemos, en particular $c_1 = 1/4$, $c_2 = 1$ y dos puntos $x = 1.25$ y $y = 1.5$ de E_1 , tenemos que:

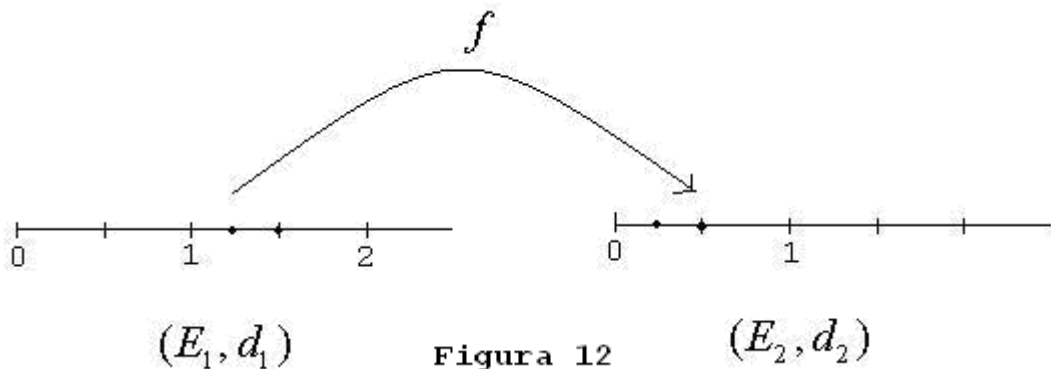
$$d_1 = |1.25 - 1.5| = 0.25,$$

$$f(x) = 1.25 - 1 = 0.25$$

$$f(y) = 1.5 - 1 = 0.5 \text{ y}$$

$$d_1' = d_2(f(x), f(y)) = 2 \cdot |0.25 - 0.5| = 0.5, \text{ esto es,}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)(0.5) \leq 0.25 \leq (1)(0.5)$$



Este ejemplo, más la definición 7, nos permiten comprender intuitivamente que cuando dos espacios métricos (E_1, d_1) y (E_2, d_2) son métricamente equivalentes, entonces, la distancia d_1 entre un par de puntos cualesquiera de E_1 oscila en un intervalo cuyos extremos son múltiplos constantes de la distancia d_2 entre las imágenes $f(x)$ de x y $f(y)$ de y mapeadas a E_2 por f . Para el ejemplo, los valores de d_1 oscilan en el intervalo $[0.125, 0.5]$.

Nos preguntamos en este punto, ¿qué importancia tiene la equivalencia entre espacios métricos dentro del estudio de los fractales? La respuesta, por el momento, no nos dice mucho; sin embargo, al entrar a la sección 1.1.2 que está destinada a introducir el concepto de transformaciones de autosemejanza entenderemos que son dichas transformaciones las que generan subespacios métricos equivalentes. Los conjuntos fractales pertenecen a un determinado espacio métrico (en la definición 20 se introduce dicho espacio). Para generarlos, se toma un subconjunto de dicho espacio métrico (un segmento recto, por ejemplo), luego mapeamos dicho segmento en otro tipo de subconjunto a través de una transformación de autosemejanza, después este último subconjunto vuelve a ser mapeado en otro subconjunto bajo otra transformación métrica y así, hasta obtener como proceso límite un conjunto fractal determinado. Pues bien, todos esos subconjuntos son subespacios métricamente equivalentes generados por transformaciones métricas conocidas como transformaciones de autosemejanza.

Definición 8. Si la función f de la definición 7 es una función biyectiva continua y si su inversa f^{-1} también es continua, estamos entonces ante un *homeomorfismo*.

✍

A las propiedades de un espacio que permanecen invariantes bajo un homeomorfismo se le llaman propiedades topológicas. Un homeomorfismo define espacios topológicamente equivalentes; podemos pensar en un homeomorfismo como en una deformación continua de una figura en otra sin hacer rasgaduras, esto es, de tal modo que si la figura en cuestión es de plastilina, es posible volver a la figura original por medio de una deformación continua e inversa a la primera; de ahí que sea menester que un homeomorfismo sea una aplicación biyectiva (a cada punto en el dominio sólo le corresponde su imagen y viceversa) y con inversa continua (para poder así, regresar a la figura original).

De manera análoga, uno puede pensar en la equivalencia entre espacios métricos como la que está definida por una deformación continua de un espacio en el otro sin que en ninguna parte haya compresiones, estiramientos arbitrariamente largos, pliegues o desgarramientos; dicha deformación es generada a través de alguna transformación métrica.

De este modo y de acuerdo a Michael F. Barnsley, la noción de invariancia métrica es más fuerte que la invariancia topológica –incluso cuando algunas características de los fractales permanecen invariantes bajo homeomorfismos- y es precisamente dicha invariancia (la invariancia métrica) la que interesa para el estudio de los fractales, ya que las transformaciones de autosemejanza –útiles para la creación de un fractal- definen espacios y subespacios métricamente equivalentes. En el apartado 1.1.2 se describe el mecanismo matemático que comúnmente se utiliza para crear figuras fractales; en esta investigación además de revisar dicho mecanismo se describe un mecanismo adicional conocido con el nombre de Sistemas L –como lo indica el título de esta tesis- útil también para la creación de fractales. Pero antes de ello y a fin de terminar de entender cuáles son las propiedades típicas del espacio métrico al que pertenecen los conjuntos fractales, definiremos a continuación algunos conceptos que enuncian dichas propiedades.

Definición 9. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico E se denomina sucesión de Cauchy si se verifica que para todo número real positivo ε , tan pequeño como se quiera, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m$ con $n > N$ y $m > N$.

✍

La consecuencia de esta definición es que si un conjunto de puntos en el plano es una sucesión de Cauchy, entonces conforme la secuencia avanza (a partir de cierto término en la misma) la distancia entre dichos puntos va disminuyendo.

Definición 10. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en un espacio métrico (E, d) se dice que converge a un punto $x \in E$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero $N > 0$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n > N$. Siendo así, al punto x se le conoce como límite de la sucesión que, en símbolos, se escribe así:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

✍

Consecuentemente, el límite x de toda sucesión convergente verifica lo siguiente:

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

que es una bola cerrada de centro x y radio $\varepsilon > 0$.

Toda secuencia convergente es una secuencia de Cauchy, pero el recíproco de este enunciado no necesariamente es cierto.

Definición 11. Un espacio métrico (E, d) es completo si cada secuencia de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en E , tiene un límite $x \in E$.

✍

Que un espacio métrico sea completo significa, intuitivamente, que no tiene hoyos ni/o fugas por las que los elementos que le son propios cesen temporalmente. Un espacio métrico es completo si, efectivamente, contiene a todos sus elementos. Un ejemplo clásico de un espacio métrico completo lo tenemos en (\mathbb{R}, d) -con d la distancia euclídea-; la demostración de esto requiere del Axioma del Supremo frecuentemente utilizado en Análisis Matemático y escapa a los fines de

esta tesis, sin embargo, puede encontrarse en [FREH95, Págs. 6 -8] y en [BARM88, Pág. 420].

Sea A un subconjunto del espacio métrico (E, d) e $I \subset \mathbb{N}$ un conjunto de índices enteros.

Definición 12. Una familia $\{P_i\}_{i \in I}$ de partes de E se denomina recubrimiento de A si:

$$A \subset \bigcup_i P_i$$

✍

La figura 13 ilustra esta definición.

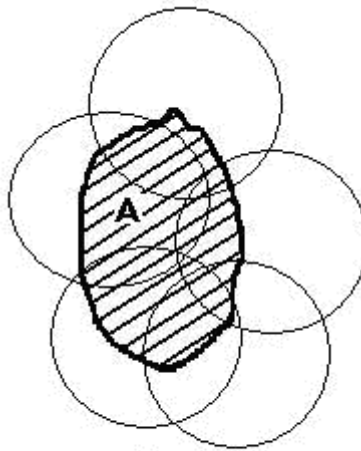


Figura 13

Algunas precisiones de esta última definición son:

1. Si la familia $\{P_i\}_{i \in I}$ tienen un número finito de partes, es decir, que el número de elementos de I es finito, se denomina **recubrimiento finito**.
2. Si $\forall i \in I$, P_i es un conjunto abierto¹ entonces se dice que la familia constituye un **recubrimiento abierto**.

Definición 13. Si cada uno de los miembros P_i de un recubrimiento $\{P_i\}$ de un espacio métrico (E, d) tienen por diámetro $|P_i|$ un número $\delta > 0$, entonces llamaremos a $\{P_i\}$ un **δ -recubrimiento**.

✍

¹ Se dice que la parte A de E es un conjunto abierto de éste, o simplemente un abierto si para todo punto de A , existe una bola abierta de centro el punto y contenida en A . Un conjunto es cerrado si su complemento C_A es abierto.

$\{P_i\}$ es un recubrimiento de E si $E \subset \bigcup_i P_i$, esto es, si E está contenido en la unión de todos los P_i que constituyen la familia $\{P_i\}$.

Definición 14 (Axioma de Borel-Lebesgue). Se dice que (E, d) es un espacio métrico compacto si de todo recubrimiento abierto de E se puede extraer un recubrimiento abierto finito de E .

✍

Una definición alternativa de compacto es la siguiente:

Definición 15. Se dice que un espacio métrico (E, d) es compacto si podemos seleccionar de cada sucesión de puntos p_1, p_2, p_3, \dots de este espacio una sucesión parcial convergente hacia un punto p de éste; esto es, si existe una sucesión de índices

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots$$

y un punto p tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{k_n} = p$$

✍

La compacidad es una propiedad topológica un tanto críptica, sin embargo, si se piensa en lo siguiente, la compacidad resulta una propiedad que tiene importantes consecuencias prácticas para, en particular, conjuntos fractales: que un conjunto sea compacto significa que siempre que tomemos un conjunto de puntos cualquiera –convergente hacia otro punto p – dentro de este espacio es posible tomar una lupa y observar otro subconjunto de puntos –subsucesión de los primeros– también convergente que, además, vista con una lupa nos permite tomar otra subsucesión de esta anterior y mirar que también converge hacia un punto p y así, *ad infinitum*. Además, debe añadirse que todo compacto es completo, cerrado y acotado; todos sus subconjuntos cerrados son también compactos y que tanto la intersección como la unión de compactos resultan en un compacto.

Definición 16. Sea (E, d) un espacio métrico completo. Entonces $H(E)$ denota al espacio cuyos puntos son los subconjuntos compactos de E que incluyen no sólo al subconjunto vacío \emptyset .

Nótese que los puntos de este espacio $H(E)$ ya no son sólo puntos en el sentido euclidiano, sino subconjuntos de puntos euclidianos de un espacio métrico compacto. Dichos subconjuntos pueden ser de cardinalidad unitaria (un solo punto), finita o infinita.

Definición 17. Sea (X, d) un espacio métrico completo, $x \in X$ y $B \in H(X)$, se define

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) \mid y \in B\}$$

en donde $d(x, B)$ denota la distancia del punto x al conjunto B .

✍

Definición 18. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sean $A, B \in H(X)$. Definimos la distancia:

$$d^*(A, B) = \max\{d(x, B) \mid x \in A\}$$

dicha distancia denota la distancia del conjunto $A \in H(X)$ al conjunto $B \in H(X)$.

✍

Definición 19. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces la distancia de Hausdorff entre puntos A y B en $H(X)$ está definida por

$$h(A, B) = \max\{d^*(A, B), d^*(B, A)\}$$

✍

Definición 20. El espacio métrico de Hausdorff es el espacio determinado por todos los puntos del espacio $H(X)$ y por la distancia de Hausdorff h . Se denota matemáticamente por $(H(X), h)$.

✍

De acuerdo a Michael F. Barnsley los objetos geométricos conocidos como fractales pertenecen al espacio métrico $(H(E), h)$ a dicho espacio se le conoce como espacio métrico de Hausdorff que es, esencialmente, un espacio métrico completo y compacto. La consecuencia más importante de esto —por su practicidad— recae en la compacidad de dicho espacio. La figura 14 ilustra mejor lo anterior; dicha figura nos muestra por pasos la construcción de un fractal llamado curva de Koch; cada una de las poligonales mostradas en la figura, corresponde a cada una de las iteraciones que, en el límite, generan a la curva. Como dicha curva pertenece a un espacio métrico compacto, $(H(X), h)$, es factible pensar que dichas poligonales constituyen una subsucesión de puntos de la última poligonal, k_7 , que es la sucesión (poligonal) hacia la que convergen todas las demás.

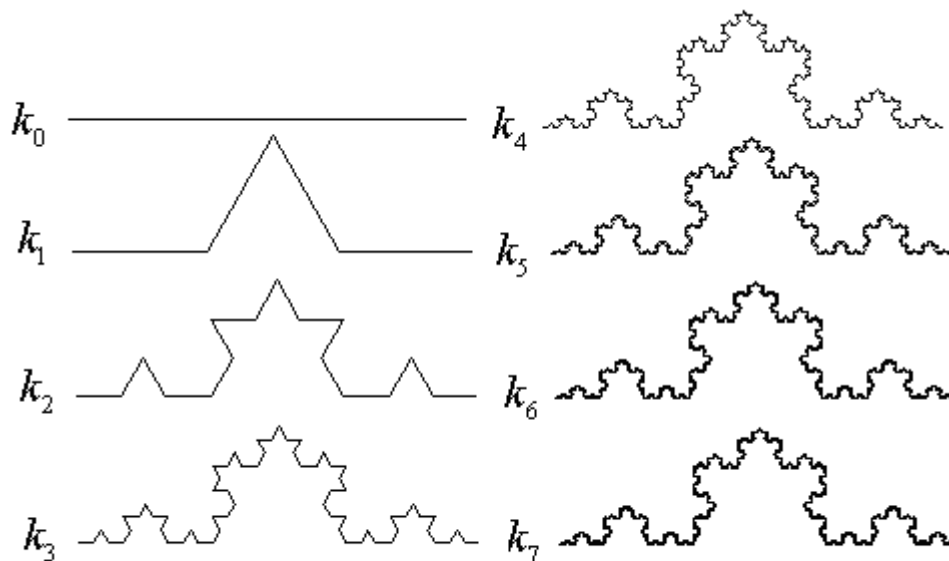


Figura 14

1.1.2 Transformaciones Afines y de Auto semejanza

También recuerdo bien claro el escenario del sueño que elaboré para este tipo: el gótico interior de una celda en algún monasterio, tan ancho como hasta donde alcance la vista, una de esas perspectivas sin fin que se producen entre dos espejos enfrentados.

Sylvia Plath, *Johnny Panic y la Biblia de los sueños*

Muchos fractales poseen la característica de ser auto semejantes y dicha característica —como se establecerá en esta sección— es el resultado de aplicar iterativamente ciertas transformaciones geométricas; de modo que en la construcción de todo objeto fractal aparece, intrínseca, la noción de transformación (función, mapeo, aplicación). Así, por ejemplo, para obtener al conjunto fractal llamado conjunto de Cantor (véase la Fig. 21 de la Pág. 44), no se hace sino mapear recursivamente los puntos de un segmento —segmento unidad para la primera iteración— en puntos de un nuevo segmento del que ha sido removido el tercio central del mismo. Las transformaciones que se utilizan para obtener objetos fractales, preservan —a diferentes escalas— la estructura métrica del conjunto original que, en jerga fractal, se conoce como generador; dichas transformaciones son llamadas transformaciones de semejanza: *Se dice que una estructura es estrictamente auto semejante o auto similar si ésta puede romperse en piezas arbitrariamente pequeñas, cada una de las cuales es una pequeña réplica de la estructura completa. Lo importante de esto es que dichas pequeñas piezas pueden, de hecho, ser obtenidas a partir de la estructura completa por medio de una transformación de semejanza [PEIH92, Pág. 230].*

A continuación, se esbozarán algunas de aquellas transformaciones que definen espacios métricamente equivalentes. Tenemos:

- i. Semejanzas (homotecias y contracciones); en donde una isometría es un caso especial de semejanza cuando $k = 1$
- ii. Transformaciones rígidas elementales: traslación, reflexión y rotación.
- iii. Transformaciones afines (la composición de una traslación con otra transformación rígida).

En particular, son de interés para este trabajo de tesis: 1) la clara definición de las transformaciones de semejanza y 2) la descripción de las transformaciones afines -que incluyen a las transformaciones de semejanza- ya que, en particular, son estas últimas las que se utilizan en geometría computacional para la generación de fractales. A continuación, se definen:

Definición 21. Una función $s : E_1 \rightarrow E_2$ es una transformación de semejanza o de similitud si existe una constante r tal que

$$d(s(x), s(y)) = rd(x, y)$$

$$\forall x, y \in E_1.$$

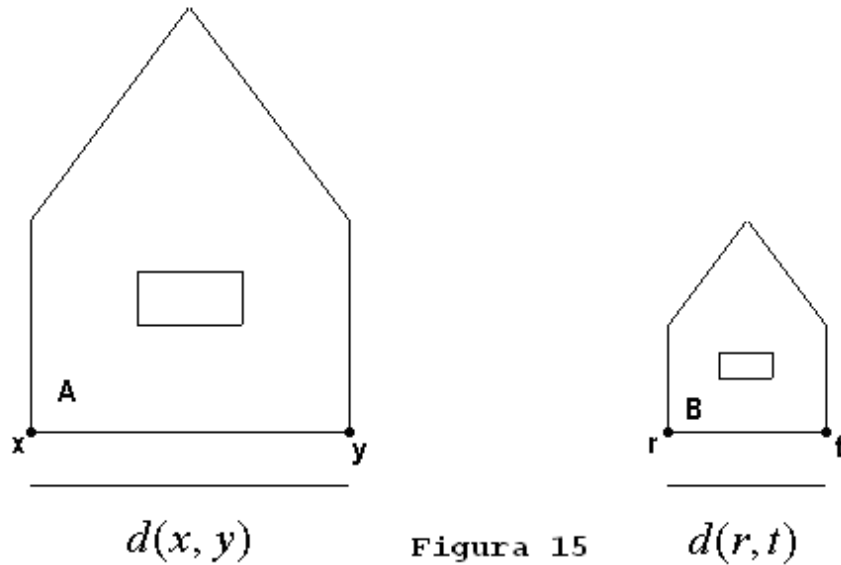
✍

A la constante r se le conoce como razón de la transformación y cuantifica qué tanto la figura original sobre la que opera la semejanza ha sido o bien reducida, o bien, dilatada. Una transformación de similitud mapea conjuntos en conjuntos que son geoméricamente similares. Además, se dice que dos espacios métricos son similares o semejantes si y sólo si existe una transformación de similitud de uno sobre el otro.

Es claro que $d(s(x), s(y)) = rd(x, y)$ significa, sencillamente, que la distancia entre las imágenes de dos puntos x y y bajo la función de semejanza s es r veces la distancia que hay entre x y y .

Es, además, una transformación que conserva las formas y las proporciones, pero que puede variar el tamaño, la posición y la orientación [AGUJ04].

Es importante señalar también que cuando en una semejanza $r < 1$, estamos ante una *función contractiva* que es la clase de funciones que, prácticamente, se utilizan no sólo para obtener cuerpos geométricos fractales, sino también para modelado basado en fractales.



$$d(x, y) = 2d(r, t)$$

La casita B es semejante a la casita A con razón de semejanza $r = 2$

Las transformaciones que hoy en día se utilizan en geometría computacional con mayor asiduidad para la generación de fractales son las transformaciones afines (autoafines para ser más exactos) estas transformaciones son el resultado de componer varias otras y, en concreto, decimos que una transformación afín en el plano es una composición de:

1. Una homotecia (dilatación –contracción- o alargamiento)
2. Una traslación y
3. Una rotación

1. Definición de Homotecia: Sea O un punto fijo del plano y k un número real distinto de cero. Por la homotecia $H(O, k)$ (o expansión o dilatación o alargamiento), indicamos la transformación de S sobre sí mismo que transporta a cada punto P del plano al P' del mismo, tal que $\overline{OP'} = k\overline{OP}$. El punto O se llama el centro de homotecia y k es la razón de homotecia (ver Fig. 16).

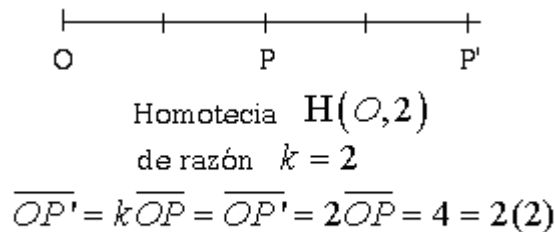
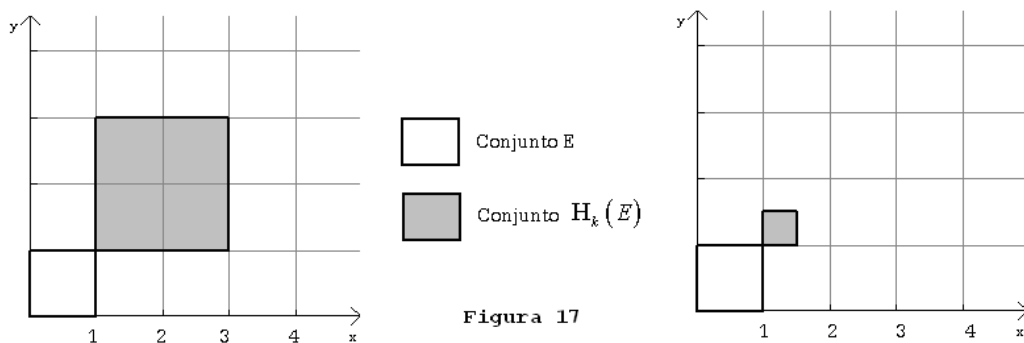


Figura 16

Introduciendo notación vectorial tenemos:

$H_k(x, y) = (kx, ky)$ donde $k \in R^+$ y en notación matricial:

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Homotecia de razón $k=2$ y centro de Homotecia $O=(1,1)$

Homotecia de razón $k=1/2$ y centro de Homotecia $O=(1,1)$

Una transformación de homotecia agranda o achica la figura sobre la que se aplica, dependiendo esto de si $k < 1$ o $k > 1$. Exceptuando el caso en el que $k = 1$, las distancias no se conservan.

2. Definición de Traslación: Una traslación en el plano por un vector fijo $\vec{a} \in R^2$ es la transformación $T: R^2 \rightarrow R^2$ que desplaza cada punto P una distancia igual a $\|\vec{a}\|$, en la dirección y con el sentido de \vec{a} :

$$T(P) = P + \vec{a}$$

y en notación matricial:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{a}$$

En la figura 18 se traslada el cuadrado de vértices $A, B, C, y D$ cuyos vectores de posición respectivos son $\vec{a} = (1,1)$, $\vec{b} = (1,2)$, $\vec{c} = (2,2)$ y $\vec{d} = (2,1)$ al cuadrado de contorno más grueso que se muestra en la figura 18; el vector de traslación está dado por $\vec{t} = (2,-3)$.

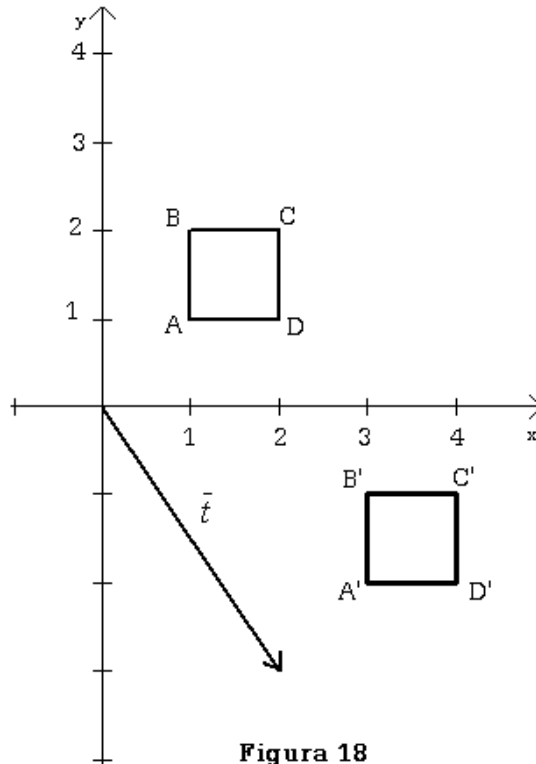


Figura 18

A fin de generar la traslación se realizaron las siguientes operaciones:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nótese cómo, por definición ocurre que $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \|\bar{t}\|$ y que, por supuesto, los vectores de posición asociados a los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ poseen las mismas dirección y sentido del vector \bar{t} .

3. Definición de Rotación: Sea O un punto fijo del plano y θ un determinado ángulo con sentido. Por la rotación $R(O, \theta)$, indicamos la transformación del conjunto E sobre sí mismo que lleva cada punto P del plano al punto P' del mismo tal que $OP' = OP$ y $\angle POP' = \theta$. El punto O se llama centro de la rotación, y θ es el ángulo de la rotación.

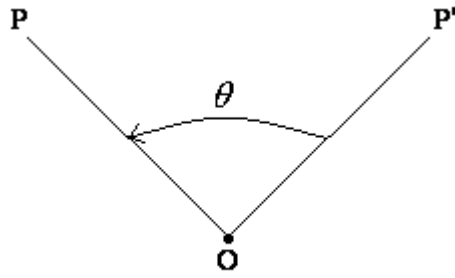


Figura 19

Ahora bien, para que no quede duda sobre la matriz de transformación de una rotación que rota puntos P del plano a puntos P' por θ , introducimos el sistema coordenado rectangular R^2 a modo de especificar el valor de las abscisas sobre el eje x y el valor de las ordenadas sobre el eje y en términos de nuestro sistema coordenado rectangular rotado por un ángulo θ . De la figura 20 y las relaciones que guardan sus elementos tenemos que:

Como se trata de un círculo unitario, $H = 1$ entonces:

Para el eje x_θ :

$$\cos \theta = \frac{CA}{1} \Rightarrow \cos \theta = x$$

$$\text{sen} \theta = \frac{CO}{1} \Rightarrow \text{sen} \theta = y$$

Y, por lo tanto, el vector correspondiente al eje x_θ del sistema coordenado rectangular R_θ^2 tiene por coordenadas $x_\theta = (\cos \theta, \text{sen} \theta)$.

Para el eje y_θ :

$$\text{sen} \theta = \frac{-CO}{1} \Rightarrow -\text{sen} \theta = x$$

$$\cos \theta = \frac{-CA}{1} \Rightarrow \cos \theta = y$$

Y, por lo tanto, el vector correspondiente al eje y_θ del sistema coordenado rectangular R_θ^2 tiene por coordenadas $y_\theta = (-\text{sen} \theta, \cos \theta)$.

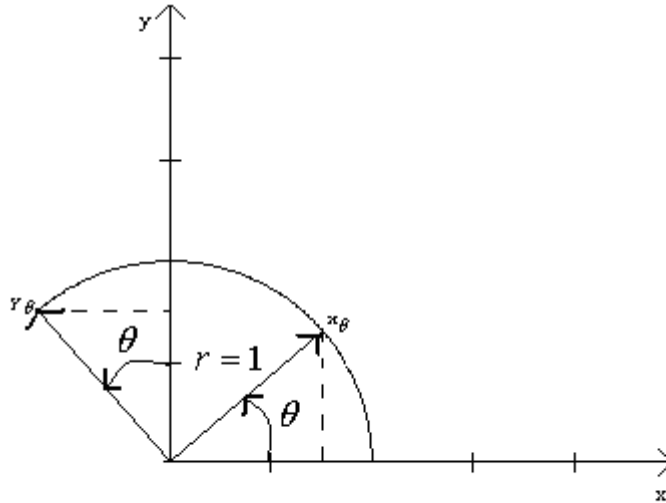


Figura 20

De modo que la matriz de rotación R está dada por:

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Estas tres transformaciones quedan unificadas en una sola transformación conocida como transformación afín. En R^2 este tipo de transformaciones se definen matricialmente de la siguiente forma:

$$s(x, y) = \begin{pmatrix} \pm r & 0 \\ 0 & \pm r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Donde, desde luego, r es la razón de la semejanza o factor de dilatación, $\begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ es la matriz de rotación y $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ el vector de traslación.

Definición 22. Un conjunto $E \in R^n$ es autosemejante si existe una colección f_1, f_2, \dots, f_n de semejanzas de R^n todas ellas con razones menores a la unidad (es decir, contractivas) tales que:

A) $E = \bigcup_{i=1}^n f_i(E)$

B) Para cierto t (no necesariamente entero) se tiene que $H^t(E) > 0$ y que $H^t(f_i(E) \cap f_j(E)) = 0$ si $i \neq j$.

✍

El inciso A) explica que el conjunto autosemejante es resultado de la unión de todas las partes $f_i(E)$. El inciso B) es de una complejidad bastante mayor y, muy someramente, indica que la intersección (partes en común) entre dos partes cualesquiera $f_i(E)$ y $f_j(E)$ del conjunto autosemejante en cuestión tiene una medida de Hausdorff² nula si dichas partes son diferentes o, dicho en otras palabras, que el *encimamiento* –partes en común– de dos partes disjuntas del conjunto total es despreciable.

La figura 21 nos muestra dos fractales que verifican la propiedad de autosemejanza. Del lado izquierdo aparece un conjunto fractal conocido como Conjunto de Cantor, nótese cómo cada parte C_k es similar a cualquiera otra de las partes salvo por un cambio de escala. La imagen de la derecha corresponde a un fractal natural, se trata del ramaje de un arbusto en el que una ramita cualquiera luce bastante similar al ramaje del arbusto en su conjunto.

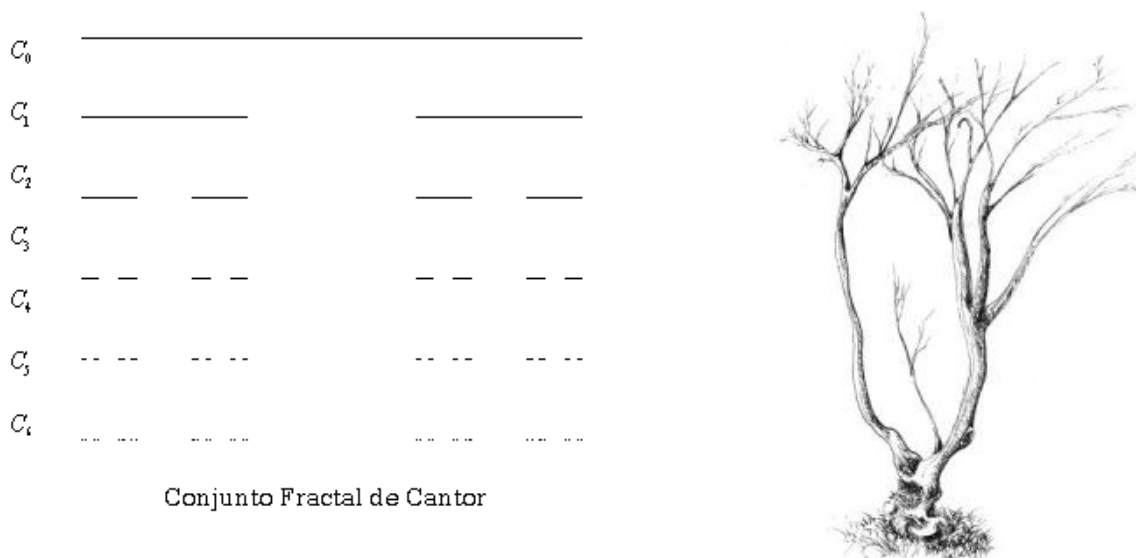


Figura 21

La mayoría de los objetos fractales poseen la particularidad de ser autosemejantes, pero no todos los objetos autosemejantes son fractales: sería un error suponer que si una estructura es autosemejante es, entonces, un fractal [PEIH92, Pág. 230]. La figura 22 ejemplifica esta última aseveración. Por otro lado, es importante saber que varios de los métodos que se utilizan hoy en día para obtener imágenes fractales se basan en la composición de transformaciones semejantes con traslaciones. Así, pueden obtenerse sofisticadas imágenes que no sólo constituyen en sí mismas fractales, sino que a partir de estas pueden emularse por computadora objetos que existen en la naturaleza. Las personas interesadas en generar gráficos por computador utilizan a menudo geometría fractal para obtener resultados más fieles; las imágenes que se obtienen con ellos son espectaculares, y se han desarrollado varios métodos para generarlas [KREK85, Pág. 405] ¿y cómo no hacerlo si, como apunta B. Mandelbrot, la geometría fractal es la geometría de la naturaleza?

² En el apartado 1.1.3 *Dimensión fraccionaria*, se define a detalle la medida de Hausdorff (definición 25), que no sólo es útil al momento de definir formalmente a un conjunto autosemejante, sino también como antesala para entender la dimensión fractal de un objeto que lo es.

**Este triángulo equilátero es
autosemejante, pero no es un fractal,
surge entonces la pregunta natural ¿qué
sí es un fractal?**

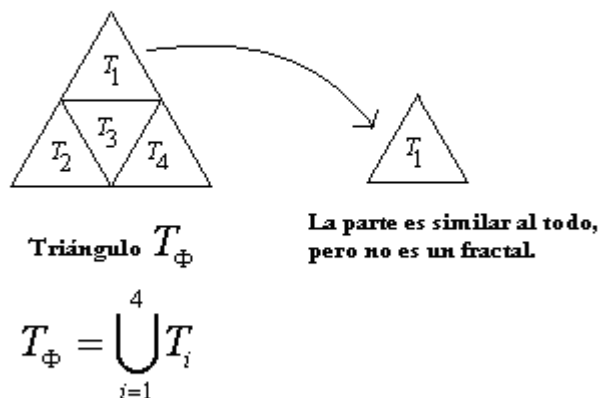


Figura 22

1.1.3 Teoría de la medida y Dimensión fraccionaria

... Una vez que se profundiza en la magia de los fractales, uno no sabe que admirar más, si las cascadas multicolor o la belleza de las matemáticas que las engendran.

Juan Antonio Pérez Ortiz

En general, la dimensión de un objeto está asociada al número de coordenadas necesarias para definirlo en algún sistema coordenado, por ejemplo, la superficie de una esfera queda definida perfectamente a través de su longitud, altitud y amplitud. De acuerdo a esto anterior, la dimensión se representa con un número entero; así, podemos hablar del espacio tridimensional R^3 para representar un cubo o del sistema coordenado rectangular R^2 del que nos servimos para graficar curvas que corresponden a ecuaciones. A continuación, se exponen definiciones de dimensión expresadas por diversos matemáticos:

“Decimos que el espacio es tridimensional porque las paredes de una prisión son bidimensionales.” [Hermann Weyl]

“En una curva sólo podemos movernos en una dirección, adelante o hacia atrás. En una superficie podemos ir adelante, atrás, a derecha e izquierda. En un volumen podemos movernos, además, hacia arriba, hacia abajo. La curva tiene una dimensión, la superficie tiene dos dimensiones y el volumen tiene tres dimensiones.” [K. Devlin]

“La dimensión es el número de coordenadas de un espacio geométrico. El plano tiene dos; el espacio euclídeo, tres; los espacios no euclídeos tienen tantas dimensiones como

se quiera. La dimensión de un espacio vectorial es el número máximo de vectores linealmente independientes.” [Diccionario Rioduero de Matemáticas]

“Solemos decir que vivimos en un espacio de tres dimensiones (norte-sur, este-oeste, arriba-abajo). Un plano tiene dos dimensiones, una línea recta tiene una dimensión y un punto tiene dimensión cero. Los matemáticos han concebido espacios que poseen cualquier número entero de dimensiones.” [Ian Stewart]

A esta idea de dimensión se le conoce como dimensión topológica y fue enunciada de forma inductiva por Henri Poincaré de la manera siguiente:

1. La dimensión del conjunto vacío es -1.
2. La dimensión del conjunto X en el punto p es $\leq n$, es decir

$$\dim_p X \leq n$$

si existen conjuntos abiertos arbitrariamente pequeños que contengan a p y tengan frontera, a lo sumo, $(n-1)$ -dimensional.

3. Un conjunto X que tiene dimensión $\leq n$ en todos sus puntos es, a lo sumo, de dimensión n :

$$\dim X \leq n$$

Además, suponemos que $\dim_p X = \infty$ si no se verifica el inciso 1 para ningún natural, y que $\dim X = \infty$ si no se verifica el inciso 2 para ningún n .

La dimensión del intervalo $[0-1]$ es 1, puesto que cada uno de sus puntos puede rodearse por un intervalo pequeño y, por tanto, por un conjunto cuya frontera consiste de dos puntos (o quizá de uno, si p es un extremo del intervalo) [KURK73]. En este caso, $X = [0-1]$ además si —como lo muestra la Fig. 23- tomamos el punto $p = 0.5$ dentro del intervalo, resulta posible trazar un conjunto abierto lo suficientemente pequeño como para que su frontera esté sólo constituida por puntos cuya dimensión, desde luego, es 0. De modo que la dimensión de los elementos de su frontera es 0, esto es, $n-1 = 0$ de donde tenemos que $n = 1-0$ o sea, $n = 1$ y por lo tanto, la dimensión de X en $p = 0.5$ es 1, esto es $\dim_{0.5} X \leq 1$; además, lo mismo ocurre con cualquier otro elemento de X (incluso si $p = 0$ ó $p = 1$). Por otro lado, como es claro que la dimensión de X no es 0 resulta entonces que $\dim X = 1$.

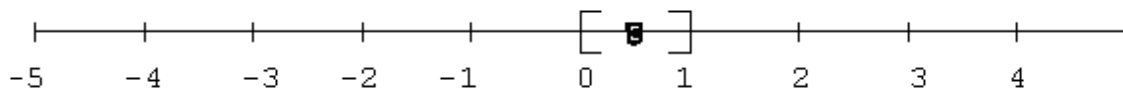


Figura 23

El problema con la dimensión topológica es que constituye un invariante topológico, esto es, si el objeto cuya dimensión topológica D es deformado por un homeomorfismo, su dimensión permanece invariante ya que sigue ocupando el mismo tipo de área, volumen o longitud bajo la

transformación que sufrió. Por ejemplo, un cuadrado es topológicamente equivalente a una circunferencia y pasar de una figura a otra modificará sus cualidades métricas y de forma, sin embargo, el área que ambas figuras encierran sigue siendo similar y, sobre todo, su dimensión permanece inamovible. Entre las curvas fractales, sin embargo, la situación es enteramente distinta ya que la dimensión fractal es un indicador que da cuenta del grado de irregularidad de un objeto fractal; además, dicha irregularidad propia de los conjuntos fractales es consecuencia de generarlos por medio no de homeomorfismos, sino de transformaciones de autosemejanza que, como se vio en la sección 1.1.2, son una clase especial de transformaciones métricas.

La dimensión que toma en cuenta el tipo de irregularidades de las curvas fractales es la dimensión de Hausdorff-Besicovich; es una definición de dimensión que toma en cuenta que el tamaño dimensional de una curva puede llegar a ser un número fraccionario y no necesariamente un número entero como la intuición podría determinarnos a pensar. Antes de definirla, sin embargo, se definirán conceptos asociados a Teoría de la Medida útiles para la comprensión de esta dimensión que, con mayor precisión, mide la densidad³ de cualquier curva fractal en R^2 o, dicho en otras palabras, que da mejor cuenta de qué tanto se distribuyen los puntos de una curva fractal a lo largo del plano, qué tanto lo llenan.

Definición 23. μ es una medida en R^n si asigna un número no negativo, posiblemente ∞ , a cada conjunto de R^n tal que

A) $\mu(\emptyset) = 0$

B) $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$

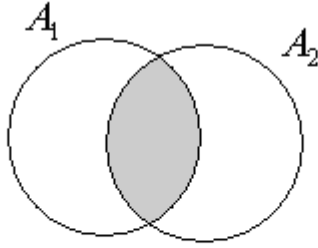
C) Si A_1, A_2, \dots es una secuencia contable o finita de conjuntos entonces $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

↙

En particular, el inciso C) de esta definición nos indica que la medida de la unión de varios conjuntos es, necesariamente, menor o igual que la suma de las medidas de cada conjunto ¿Por qué? Porque —como lo sugiere la figura 24— si dichos conjuntos no son disjuntos tendríamos que a la suma de los mismos habría todavía que restarles la medida de su intersección. Es decir,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_n) - [\mu(A_1) \cap \mu(A_2) \cap \dots \cap \mu(A_n)]$$

³ Se dice que el subconjunto A es denso en E si su adherencia \bar{A} verifica $\bar{A} = E$. A su vez, la adherencia de A , \bar{A} , está definida como el conjunto de puntos cuyos abiertos (conjuntos) tienen una intersección no vacía con A .



$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^2 A_i\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - [\mu(A_1) \cap \mu(A_2)]$$

Figura 24

Ya se traten de intervalos abiertos o cerrados, tenemos que la medida de un intervalo I de extremos a y b se define $\mu^1(a,b) = \mu^1[a,b] = b - a$. Por otro lado, si A es un conjunto constituido por la unión finita o contable de intervalos de este tipo, esto es, $A = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]$; tenemos entonces que la longitud de A es igual a la suma de las longitudes de los intervalos que componen a A , esto es, $\mu^1(A) = \sum (b_i - a_i)$.

Antes de continuar es necesario precisar lo siguiente:

Llamaremos celda a un intervalo acotado I en R . Una celda en R^n es el producto cartesiano de n celdas en R generalmente semiabiertas:

$$I = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_n, b_n] \text{ con } a_k \leq b_k \in R (1 \leq k \leq n)$$

Cuando una celda I en R^n sea el producto cartesiano de n celdas en R de la misma longitud, entonces I es un cubo. Un intervalo en R^n es el producto cartesiano de n intervalos en R .

Sea $A = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ un conjunto en R^n . Su volumen n -dimensional es el producto de las longitudes de sus intervalos (longitudes que ya se indicó cómo medir en el primer párrafo de esta página):

$$\text{vol}^n(A) = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$$

Si $n = 1$, $\text{vol}^1(A) = \text{longitud}(A)$; si $n = 2$, $\text{vol}^2(A) = \text{Área}(A)$ y, desde luego, si $n = 3$, $\text{vol}^3(A) = \text{Volumen}(A)$.

Definición 24. (Medida n -dimensional de Lebesgue).

$$L^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}^n(A_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

✍

Esta definición tan escueta de la medida de Lebesgue nos será bastante útil para definir la medida de Hausdorff de un conjunto ya que de los conceptos anteriores apreciamos que la medida n -dimensional de Lebesgue de un conjunto es entonces una extrapolación, para una clase de conjuntos más amplia, del volumen n -dimensional de un conjunto. ¿Qué nos está diciendo concretamente esta ecuación? Indica que debemos tomar al más pequeño o ínfimo (inf) de entre todos los A_i que contienen al conjunto A medido; dicha familia $\{A_i\}$ ínfima, que es la medida de Lebesgue de A , es ínfima en función de su volumen, es decir, se trata de la que reporta el menor volumen de entre las existentes. No olvidemos además que el subíndice n no es nada más un exponente que esté indicando elevar *vol* a la potencia que sugiere dicho exponente, sino que n hace también referencia a la dimensión topológica del espacio al que pertenece el conjunto A . Los textos [FALK90] y [EDGG90] presentan un tratamiento sobre Teoría de la Medida un tanto más profuso, sin embargo, lo hasta ahora expuesto es suficiente para entender las siguientes definiciones.

Definición 25. (Medida de Hausdorff). Sean $A \in R^n$ y $\delta > 0$. Llamaremos δ -recubrimiento⁴ del conjunto A a todos los U_i tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ y en donde, además, el diámetro $|U_i|$ de cada U_i es menor a δ . Tomemos el menor de los δ -recubrimientos de A de acuerdo a su tamaño t -dimensional y llamémoslo $H_{\delta}^t(A)$.

$$H_{\delta}^t(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t \mid \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } A \right\}$$

Esta última ecuación es bastante parecida a la ecuación que expresa la medida de Lebesgue de un conjunto, siendo t equivalente a la n de la medida de Lebesgue; sin embargo, hay dos diferencias fundamentales: 1) En lugar de tomar el volumen como la unidad fundamental de medida, se toma el diámetro $|U_i|$ de cada uno de los conjuntos que conforman a la familia $\{U_i\}$ que δ -recubre a A y 2) La definición de medida de Hausdorff no se limita a esta ecuación, sino que introduce el concepto de límite a fin de hacer de la misma una medida más flexible.

La medida de Hausdorff de un conjunto se define entonces como el límite de $H_{\delta}^t(A)$ cuando $\delta \rightarrow 0$, esto es:

$$H^t(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^t(A) = \sup_{\delta > 0} H_{\delta}^t(A)$$

✍

H_{δ}^t se conoce como la medida t -dimensional de Hausdorff e indica el tamaño del conjunto E (o un subconjunto de éste) omitiendo las irregularidades de dicho conjunto cuando las mismas son inferiores a δ . La Fig. 25 ha sido tomada de [FALK90] e ilustra más claramente el concepto de medida de Hausdorff, esta ilustración nos está mostrando un solo conjunto, F y dos posibles

⁴ Recordemos que en la sección 1.1.1, definición 12, se precisó el concepto de recubrimiento.

δ -recubrimientos. Se toman los diámetros de cada elemento en el δ -recubrimiento y se suman, se toma la suma ínfima de las ofrecidas por cada familia $\{U_i\}$, ese número es $H'_\delta(A)$. En resumen, para $t > 0$ la medida t -dimensional de Hausdorff en R^n se define como extensión natural de la definición de la medida de Lebesgue L^n [REYS95, Pág. 23], esto es, de entre todos los posibles δ -recubrimientos de A se toma el menor con la adición de que, al introducir el límite de $H'_\delta(A)$ cuando $\delta \rightarrow 0$, se está contemplando la posibilidad de que el resultado de esto, $H^t(A)$ o dimensión de Hausdorff, pueda ser un número no estero.

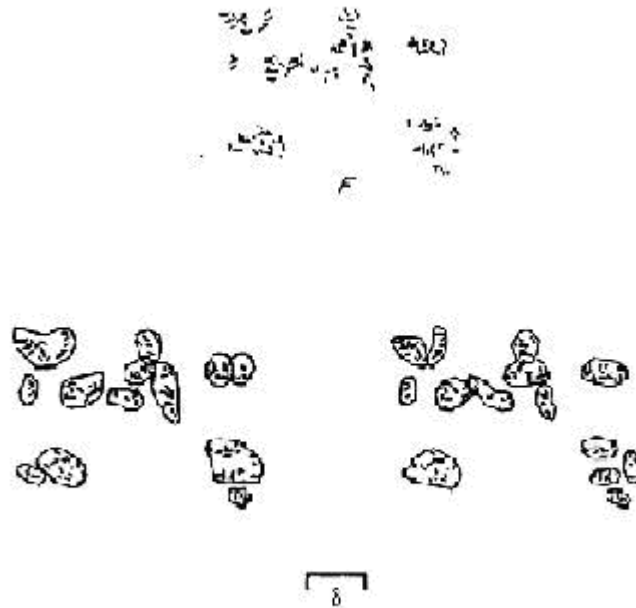


Figura 25

Definición 26. (Dimensión de Hausdorff). La dimensión de Hausdorff de un conjunto A , que denotaremos por $\dim_H(A)$, se define como:

$$\dim_H(A) = \sup \{t \mid H^t(A) = +\infty\} = \inf \{t \mid H^t(A) = 0\}$$

La dimensión de Hausdorff de un conjunto A es, entonces, el valor supremo que toma t cuando la medida de Hausdorff $H^t(A)$ de A tiende a $+\infty$. O, alternativamente, la dimensión de Hausdorff de A es también interpretada como el valor ínfimo que toma t cuando la medida de Hausdorff $H^t(A)$ de A tiende a 0. Si $H^t(A) = +\infty$ quiere decir que A abarca, por lo menos, todo el espacio t -dimensional que lo contiene; pero si $H^t(A) = 0$ quiere decir que A abarca una extensión despreciable del espacio t -dimensional que lo contiene. En ambos casos t es dicha dimensión y como no es común que t valga 0 y $+\infty$ llamaremos, entonces, dimensión de Hausdorff $\dim_H(A)$ de A , al valor que toma t cuando su medida de Hausdorff es finita y diferente de cero.

Concluimos diciendo que fueron los matemáticos Constantin Carathéodory en 1914 y, posteriormente Felix Hausdorff en 1919 -que retomó los trabajos de Carathéodory- quienes introdujeron los conceptos de medida y dimensión de Hausdorff; el quid de dichas investigaciones

radica en percibir que Carathéodory y Hausdorff⁵ fueron los primeros en proponer un concepto de dimensión mucho más amplio –lo suficiente- como para medir la densidad de un conjunto que se distribuye en el plano de manera no uniforme y que, por tanto, es imposible de dimensionar con arreglo a la usanza topológica que sólo considera dimensiones enteras, sino que es necesaria una medida dimensional mucho más amplia que incluya la posibilidad de dimensiones fraccionarias. Eso es lo que justamente hacen la dimensión de Hausdorff – Besicovitch, la dimensión de Minkowski, la dimensión de homotecia, la dimensión por conteo de cajas y otras dimensiones. En este apartado se presentan algunas con el objetivo de comprender por qué la dimensión de un objeto fractal es, por lo general, fraccionaria.

Para empezar, es importante señalar que, en la práctica, la dimensión de Hausdorff no se utiliza debido a que no es en lo absoluto fácil de computar. En cambio, se utilizan definiciones cercanas a la de Hausdorff –y por ésta inspiradas-, pero cuyos cálculos son mucho más fáciles. Las dimensiones que se utilizan con mayor asiduidad debido a la relativa facilidad de su implementación son:

1. Dimensión de homotecia o de autosemejanza
2. Dimensión del método por cajas o por conteo de cajas (*box-counting dimension*)

Estas son las dimensiones a las que comúnmente se apela para definir la dimensión de un objeto con comportamiento fractal, sea que se trate de una curva definida matemáticamente o de un objeto existente en la naturaleza que posea todos los atributos para considerársele un fractal. Se definirán ambas a continuación, además de la dimensión de Minkowski. Se comenta que en esta tesis sólo se trabajará con las dos primeras y, en concreto, en el siguiente apartado 1.1.4 se calculan dichas dimensiones para los fractales Curva de Koch y Conjunto de Cantor.

Empecemos con la denominada dimensión fractal o de Minkowski.

Definición 27. (Dimensión Fractal o de Minkowski). Sea E un subconjunto compacto y no vacío de R^n (o de un espacio métrico totalmente acotado). Para $\delta > 0$, sea $N_\delta(E)$ el menor número de conjuntos de diámetro, a lo sumo, δ que pueden cubrir a E . Obviamente, el número $N_\delta(E)$ crece en tanto δ decrece y no es arbitrario afirmar que $N_\delta(E)$ se comporta, aproximadamente – tal y como lo muestra la tabla 2-, como una potencia de $\frac{1}{\delta}$; esto es, podríamos esperar que existe un número entero positivo d tal que:

$$N_\delta(E) \approx \left(\frac{1}{\delta}\right)^d \text{ para } \delta \text{ cercano a } 0$$

d	δ	$N_\delta(E) = \left(\frac{1}{\delta}\right)^d$
1	0.01	$(1/\delta)^d = (1/0.01)^1 = 100$
2	0.001	$(1/\delta)^d = (1/0.001)^2 = 1\ 000\ 000$
3	0.0001	$(1/\delta)^d = (1/0.0001)^3 = 1 \times 10^{12}$

⁵ En el paper ya clásico de Felix Hausdorff intitulado "Dimension und äußeres Maß" aparecen en, forma primigenia, estos conceptos.

4	0.00001	$(1/\delta)^d = (1/0.00001)^4 = 1 \times 10^{20}$
5	0.000001	$(1/\delta)^d = (1/0.000001)^5 = 1 \times 10^{30}$

Tabla No. 2

Se asume que d es la dimensión de E puesto que satisface la ecuación anterior. Esto conduce – aplicando logaritmos en ambos lados de la última ecuación- a la siguiente definición:

$$\ln N_\delta(E) = \ln \left(\frac{1}{\delta} \right)^d$$

$$\ln N_\delta(E) = d \cdot \ln \left(\frac{1}{\delta} \right)$$

$$\ln N_\delta(E) = d [\ln(1) - \ln(\delta)]$$

Finalmente, haciendo operaciones,

$$d = \frac{\ln(N_\delta(E))}{-\ln(\delta)}$$

En donde d es la dimensión de Minkowski del conjunto E y puede también denotarse como $d(E)$.

Nótese cómo la dimensión de Minkowski queda definida a través de un δ -recubrimiento del conjunto cuya dimensión desea conocerse (recordemos que dentro de la definición 25 de la página 49 aparece la noción de δ -recubrimiento); δ es el diámetro máximo de los miembros del recubrimiento y $N_\delta(E)$ es la cantidad de miembros en el δ -recubrimiento, entendiéndose que se desea la menor cantidad posible de éstos a fin de evitar incluir en la medición, tanto como sea posible, regiones que no forman parte del objeto geométrico que está siendo medido. Lo que en esencia hace esta dimensión es medir para cada δ al conjunto correspondiente despreciando las irregularidades de tamaño menor a δ observando cómo se comporta la medición en la medida que $\delta \rightarrow 0$. Veámoslo con un ejemplo muy sencillo.

Sea el espacio métrico (R^2, d_E) y sea $a \in X$. Definimos al conjunto $A = \{a\}$ de modo que A consiste de un solo punto en el espacio dado. Es evidente que para $\delta > 0$, $N_\delta(A) = 1$. De donde se sigue necesariamente que $d(A) = 0$ ya que el logaritmo natural de 1 es igual a cero. Nótese también cómo la dimensión de Minkowski de este conjunto coincide con la dimensión topológica del mismo (un punto tiene dimensión 0) y esto se debe a que –como se apuntó párrafos anteriores- una dimensión que incluye la posibilidad de valores fraccionarios es más amplia que la dimensión topológica (o la medida de Lebesgue) que sólo consideran mediciones enteras; al ser el concepto de dimensión fraccionario mucho más amplio que el de dimensión topológica, implícito está el hecho de que funciona también para conjuntos con dimensión entera. La figura 26 termina por ilustrar la forma en que opera esta dimensión. La figura nos muestra los δ -recubrimientos con $\delta = 0.1$ -en el intervalo $[-4.5, -2.25]$ - de la curva cuya ecuación es $y = 2 + \frac{1}{2} \text{sen}(2x)$. A la forma que presenta la figura se le conoce como “Salchicha de Minkowski”.

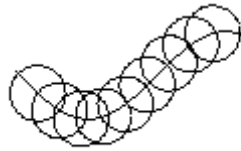


Figura 26

La elaboración de la figura 26 fue relativamente sencilla; primero probamos un poco con funciones sinusoidales utilizando el menú equation del paquete Winplot que permite, precisamente, graficar ecuaciones; por su forma, se eligió la función $y = 2 + \frac{1}{2} \text{sen}(2x)$, después escogimos de manera arbitraria el valor 0.1 para δ y, finalmente, para elaborar las bolas correspondientes a los $N_\delta(E)$ que constituyen el recubrimiento, se tomaron valores de x pertenecientes al intervalo $[-4.5, -2.25]$ y sus imágenes bajo $y = 2 + \frac{1}{2} \text{sen}(2x)$ como coordenadas de los centros de dichas bolas. Sabiendo además que el valor del radio de dichas bolas es igual a 0.05 fue fácil graficarlas valiéndonos nuevamente del paquete Winplot.

Definición 28. (Dimensión de Homotecia o de Autosemejanza). Ésta es la que más comúnmente aparece en los diversos medios de divulgación científica que tratan enteramente, o llegan a tratar, el tema de los fractales; así en [BRAE96], [TALV96] y en [PERJ02] y responde a la pregunta que plantea ¿qué número de objetos de tamaño m a escala r se necesitan para construir un objeto de tamaño M ? Por ejemplo, un segmento de longitud 10 tiene dimensión 1 y para cubrirlo necesitamos $5^1=5$ segmentos de longitud 2 (elegimos al 5 como base porque es el único número de segmentos de longitud 2, con exponente 1 (dimensión) que puede cubrir perfectamente a un segmento de longitud 10). Un cuadrado de lado 10 tiene superficie $10^2=100$ y para cubrirlo necesitamos $5^2=25$ cuadrados de longitud 2. Un cubo de arista 10 tiene volumen $10^3=1000$ y se requieren $5^3=125$ cubos de arista 2 para cubrirlo [PERJ02, Pág. 117]. Nótese que tanto la recta como el cuadrado y el cubo han sido reducidos dimensionalmente a una razón de escala $r = 1/5$. Además, el número de piezas n a escala r que se generan es igual al cociente M/m . De modo que las ecuaciones

$$5 = \left(\frac{10}{2}\right)^1, \quad 25 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 \quad \text{y} \quad 125 = \left(\frac{10}{2}\right)^3$$

sugieren que tanto para la recta, el cuadrado y el cubo se verifica la siguiente relación:

$$n = \left(\frac{M}{m}\right)^d$$

y, de manera equivalente, la ecuación:

$$n = \frac{1}{r^d}$$

que indica, en concreto, que cuando a un objeto de tamaño M se le cubre con n piezas de tamaño m a escala r del original, entonces se verifica una relación entre n y r modelada por la susodicha ecuación: *El punto que, sin embargo, es común a todas las estructuras estrictamente autosemejantes –fractales o no– es que existe una relación entre el factor de escala y el número de piezas escaladas entre las*

que es dividida la estructura [PEIH92, Pág. 231]. Como puede observarse, el número d es la dimensión, según sea el caso, del objeto de tamaño M .

Los matemáticos que tuvieron la suspicacia de hacer esta simple observación, la tuvieron también para postular que dicha relación debe seguir verificándose aun cuando se trate de objetos irregulares del tipo de los fractales. Trabajando sobre esta hipótesis e introduciendo logaritmos⁶ en la última ecuación tenemos que:

$$d = \frac{\ln(n)}{-\ln(r)}$$

A d se le conoce como dimensión de homotecia o autosemejanza y para distinguirla de la dimensión fractal propiamente dicha, la denotaremos por d_A .

En el apartado 1.1.4 se calcularán las dimensiones fractal y de autosemejanza de un par de fractales muy conocidos y se verá cómo, ambas coinciden; por lo que es evidente que la hipótesis que una vez sustentó a la dimensión de homotecia pasó de ser una simple suposición a una herramienta analítica asaz útil.

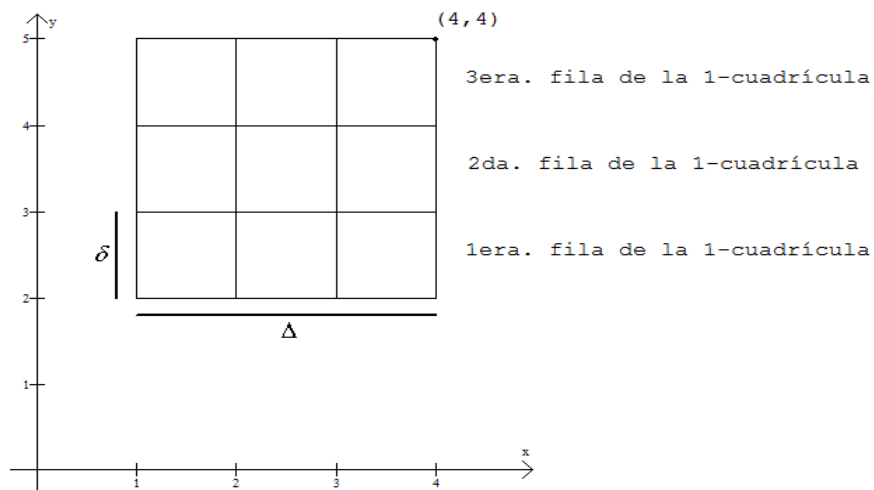


Figura 27

Definición 29. (Dimensión por Conteo de Cajas). Sea una colección de cubos que constituyen una δ -cuadrícula de R^n ; esto es, cubos de la forma:

$$(m_1\delta, (m_1+1)\delta) \times \dots \times (m_n\delta, (m_n+1)\delta)$$

donde m_1, \dots, m_n son enteros, véase la figura 27. Esta figura se ha obtenido con $\delta=1$. Las operaciones son:

Obtención de las coordenadas de los vértices de las cuadrículas de la 1era. Fila:

⁶ Se introducen logaritmos porque de cursos de álgebra sabemos que toda ecuación que tiene por incógnita al exponente de una cantidad, se resuelve aplicando logaritmos.

$$\begin{aligned}
&\triangleright m_1 = 1, & m_2 = 2 \\
&(m_1 + 1) = 2, & (m_2 + 1) = 3. \text{ Por lo que:} \\
&(m_1 \cdot 1, (m_1 + 1) \cdot 1) \times (m_2 \cdot 1, (m_2 + 1) \cdot 1) = (1, 2) \times (2, 3) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\} \\
&\triangleright m_1 = 2, & m_2 = 2 \\
&(m_1 + 1) = 3, & (m_2 + 1) = 3. \text{ Por lo que:} \\
&(m_1 \cdot 1, (m_1 + 1) \cdot 1) \times (m_2 \cdot 1, (m_2 + 1) \cdot 1) = (2, 3) \times (2, 3) = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \\
&\triangleright m_1 = 3, & m_2 = 2 \\
&(m_1 + 1) = 4, & (m_2 + 1) = 3. \text{ Por lo que:} \\
&(m_1 \cdot 1, (m_1 + 1) \cdot 1) \times (m_2 \cdot 1, (m_2 + 1) \cdot 1) = (3, 4) \times (2, 3) = \{(3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}
\end{aligned}$$

Obtención de las coordenadas de los vértices de las cuadrículas de la 2da. Fila:

$$\begin{aligned}
&\triangleright m_1 = 1, & m_2 = 3 \\
&(m_1 + 1) = 2, & (m_2 + 1) = 4. \text{ Por lo que:} \\
&(m_1 \cdot 1, (m_1 + 1) \cdot 1) \times (m_2 \cdot 1, (m_2 + 1) \cdot 1) = (1, 2) \times (3, 4) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} \\
&\triangleright m_1 = 2, & m_2 = 3 \\
&(m_1 + 1) = 3, & (m_2 + 1) = 4. \text{ Por lo que:} \\
&(m_1 \cdot 1, (m_1 + 1) \cdot 1) \times (m_2 \cdot 1, (m_2 + 1) \cdot 1) = (2, 3) \times (3, 4) = \{(2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\} \\
&\triangleright m_1 = 3, & m_2 = 3 \\
&(m_1 + 1) = 4, & (m_2 + 1) = 4. \text{ Por lo que:} \\
&(m_1 \cdot 1, (m_1 + 1) \cdot 1) \times (m_2 \cdot 1, (m_2 + 1) \cdot 1) = (3, 4) \times (3, 4) = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}
\end{aligned}$$

Obtención de las coordenadas de los vértices de las cuadrículas de la 3era. Fila:

$$\begin{aligned}
&\triangleright m_1 = 1, & m_2 = 4 \\
&(m_1 + 1) = 2, & (m_2 + 1) = 5. \text{ Por lo que:} \\
&(m_1 \cdot 1, (m_1 + 1) \cdot 1) \times (m_2 \cdot 1, (m_2 + 1) \cdot 1) = (1, 2) \times (4, 5) = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5)\} \\
&\triangleright m_1 = 2, & m_2 = 4 \\
&(m_1 + 1) = 3, & (m_2 + 1) = 5. \text{ Por lo que:} \\
&(m_1 \cdot 1, (m_1 + 1) \cdot 1) \times (m_2 \cdot 1, (m_2 + 1) \cdot 1) = (2, 3) \times (4, 5) = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\} \\
&\triangleright m_1 = 3, & m_2 = 4 \\
&(m_1 + 1) = 4, & (m_2 + 1) = 5. \text{ Por lo que:} \\
&(m_1 \cdot 1, (m_1 + 1) \cdot 1) \times (m_2 \cdot 1, (m_2 + 1) \cdot 1) = (3, 4) \times (4, 5) = \{(3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5)\}
\end{aligned}$$

Se cubre al objeto E con dicha cuadrícula y se busca, para mayor precisión, cubrirlo con δ -cuadrículas cada vez más finas de modo que la longitud δ de los lados de los cuadrados de la cuadrícula para la k -ésima cuadrícula sean cuadrados de longitud $\delta = \frac{1}{2^{k-1}}$, es decir, la mitad de la longitud asignada a los cuadrados de la cuadrícula anterior; simbolicemos ahora al número de cuadrados de la k -ésima δ -cuadrícula por $N_\delta(E)$ y remitámonos de inmediato a la figura 28.

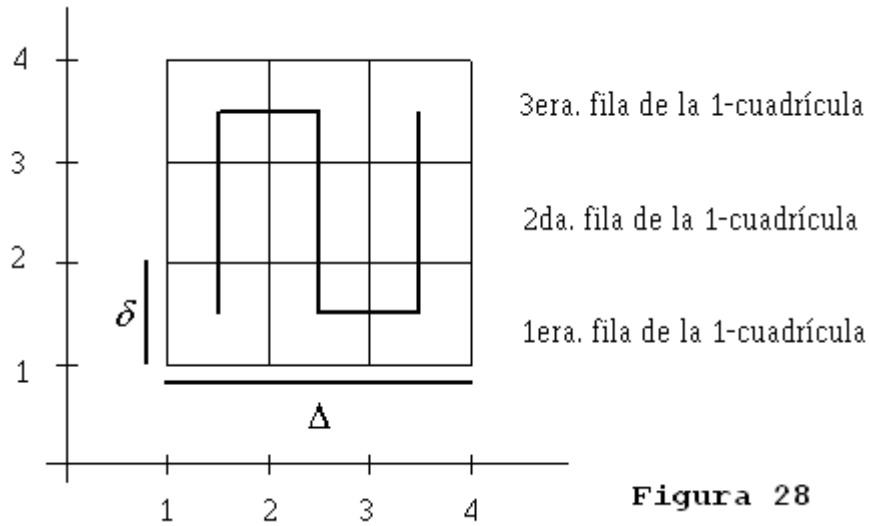


Figura 28

He aquí que mostramos al conjunto E cuya curva queda intersectada por la δ -cuadrícula, con $\delta = 1$ y lado de cuadrícula $\Delta = 3$, y en donde se observa cómo $N_\delta(E) = 9$. Podemos exigir un grado más de detalle en nuestra δ -cuadrícula a modo de lograr un valor de δ de 0.5 y, por ende, $N_\delta(E) = 36$; aún no conformes podemos pensar en un valor de δ de 0.25 con un respectivo valor de $N_\delta(E)$ de 144 y, así sucesivamente, hasta lograr el mayor detalle posible. Al tabular dichos valores –como en la tabla No. 3- es destacable cómo se verifica la siguiente relación:

$$N_\delta(E) \approx \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^d$$

d	Δ	δ	$N_\delta(E) \approx \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^d$
2	3	1	$(3/1)^2 = 9$
2	3	0.5	$(3/0.5)^2 = 36$
2	3	0.25	$(3/0.25)^2 = 144$

Tabla No. 3

Al despejar a d de la ecuación $N_\delta(E) \approx \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^d$ introduciendo logaritmos a ambos lados, estamos obteniendo la *dimensión por conteo de cajas* de un conjunto E determinado; denotaremos a dicho valor por d_B a fin de distinguir la dimensión fraccionaria obtenida a través de este método de la dimensión obtenida por los métodos presentados en las páginas 51 y 53; de modo que d_B queda definida por:

$$d_B = \left(\frac{\ln N_\delta(E)}{\ln \Delta - \ln \delta}\right)$$

Hemos hasta aquí introducido todos los principios matemáticos sobre los que descansa la definición de curva fractal, de modo que estamos en posibilidad de responder a la pregunta ¿qué es en sí una curva fractal?

Una curva fractal es un objeto geométrico que pertenece al espacio métrico de Hausdorff $(H(E), h)$ en donde, recuérdese, $E = R^2$; además, el espacio métrico de Hausdorff es un espacio que admite transformaciones métricas que preservan, a cierta escala, la forma y la métrica de los subconjuntos que son mapeados unos en otros; es también un espacio compacto y completo, gracias a lo cual, contiene a todos sus elementos y, lo más importante, toda transformación métrica sobre un subconjunto de $(H(E), h)$ converge, llegado el momento, en otro subconjunto de $(H(E), h)$ que, en terminología fractal se conoce como *atractor*. Por otro lado, la forma más inmediata de identificar a una curva fractal está relacionada con su dimensión la mayoría de las veces fraccionaria⁷ y con su estructura autosemejante, esto es, con la fascinante propiedad de repetirse, infinitamente, en cada una de sus partes.

1.1.4 Un par de fractales famosos: el conjunto de Cantor y la curva de Von Koch

La imaginación se cansa antes que la naturaleza...

Blaise Pascal

➤ Conjunto de Cantor

La belleza perdura para siempre. El polvo es temporal

Marianne Moore

El conjunto de Cantor emerge durante los albores del siglo XX como una de esas curvas que por mostrar propiedades contradictorias a lo topológicamente estudiado hasta esas fechas, eran motejadas de monstruos matemáticos. Fue ideado por el matemático alemán Georg Cantor y su construcción por pasos puramente geométricos es como sigue:

1. Elegimos un segmento unitario C_0 (al que llamaremos *iniciador*) y lo dividimos en tres partes iguales.

2. Removemos el tercio central del mismo, esto es, el intervalo abierto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; de modo

que como resultado obtenemos el conjunto C_1 constituido por la unión de los intervalos

$\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, esto es, $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Al conjunto C_1 en particular lo

llamaremos *generador*, pues a partir del mismo obtendremos copias —una por cada

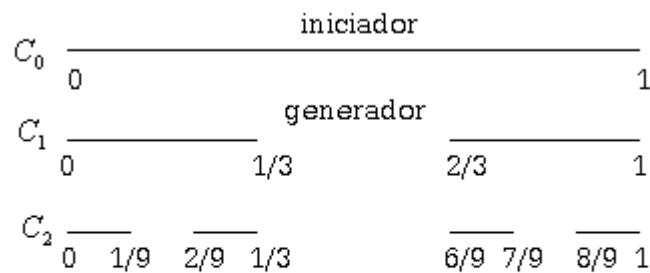
⁷ "Es en exceso simplista afirmar que un fractal es aquel conjunto con dimensión fraccionaria. Algunos fractales tiene dimensión entera, por lo que la afirmación es incluso errónea. Un fractal será cualquier conjunto cuya dimensión de Hausdorff sea mayor estrictamente que su dimensión topológica. Con ello, incluso la curva de Hilbert se consideraría fractal, ya que su dimensión de Hausdorff es 2 y su dimensión topológica es 1." [PERO98, Pág. 42].

intervalo que lo componen- de sí mismo reducidas a una escala de $\frac{1}{3}$; esto es, dividimos en tres partes iguales tanto al segmento cuyos puntos pertenecen al intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ como al segmento cuyos puntos pertenecen al segmento $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y, nuevamente, suprimimos el tercio central. Nos quedan entonces los intervalos: $\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ que constituyen al conjunto $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ y, así, indefinidamente (ver Fig. 29). C_2

3. El conjunto de Cantor equivale a la intersección, en el límite, de los conjuntos C_k generados de acuerdo al procedimiento del paso 2. Esto es, el conjunto de Cantor C , Fig. 30., queda definido por:

$$C = \bigcap \{C_k : k \in \mathbb{N}\}$$

Al revisar detenidamente la definición matemática del Conjunto de Cantor nos preguntamos ¿Por qué intersección y no unión? Porque el conjunto de Cantor es, por definición, únicamente ese conjunto de puntos distribuidos en R^2 que se obtienen después de varias iteraciones y no es, en cambio, todas las curvas C_k que anteceden a una aproximación obtenida conforme $k \rightarrow \infty$. Además de que al intersectar a todas las curvas C_k obtenemos los puntos dispersos en R^2 que conforman a dicho conjunto.



Primeras iteraciones para la construcción del
Conjunto de Cantor

Figura 29

Cabe señalar, a modo de anécdota, que Mandelbrot llamó a este conjunto *Polvo de Cantor*, debido a que, en el infinito, nos remite a la idea de una legión de puntos, casi intangibles, esparcidos en una hoja en blanco.

Nótese cómo en cada iteración se duplica el número de segmentos que componen a cada subconjunto C_k . El conjunto C_0 tiene 1 segmento o intervalo, el conjunto C_1 está constituido

por 2 segmentos o intervalos, el conjunto C_2 está conformado por 4 segmentos o intervalos, etc. De modo que, en general, el conjunto C_k consta de 2^k intervalos o segmentos.

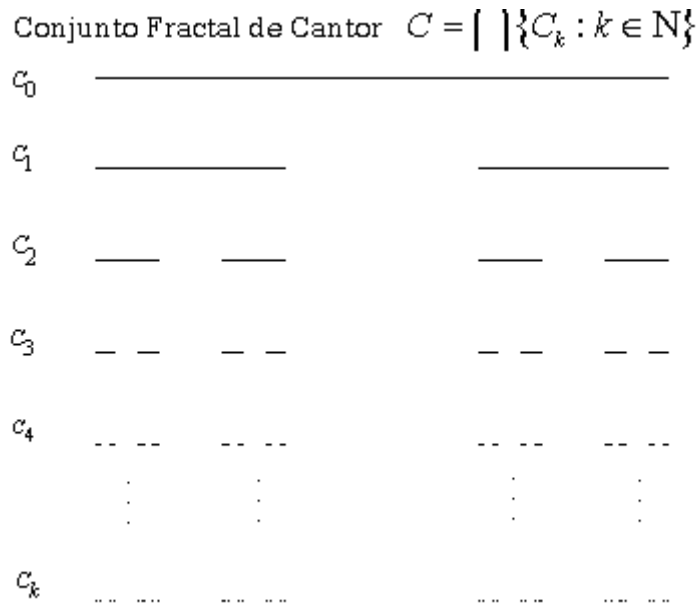


Figura 30

El Conjunto de Cantor así definido - pasos 1 a 3 de la Pág. 57- se construye de forma recursiva, de modo que para poder trazar al conjunto C_k es necesario conocer primero al conjunto C_{k-1} . Es, sin embargo, posible establecer una fórmula general que proporcione todos los intervalos tras cuya unión se obtiene al conjunto C_k . Para demostrarlo aquí apelaremos –aunque de modo menos formal- a los desarrollos que se encuentran pormenorizadamente en [PERJ02], [MATC97] y [EDGG90].

Empecemos primero por recordar que la definición de un número fraccionario –es decir, cualquier número $x \in [0,1]$ - en nuestro sistema de numeración decimal es como sigue:

$$x = a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + \dots \text{ con } a_i \in \{0,1,2,\dots,9\}$$

O, de modo abreviado:

$$x = \sum_{i=1}^q a_i \cdot 10^{-i}$$

en donde q expresa el número de dígitos de la cantidad fraccionaria. Veámoslo con un ejemplo. El número 0.423 queda expresado como sigue:

$$0.423 = 4 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$$

En general, un número $x \in [0,1]$ puede ser expresado, en cualquier base B , de la siguiente forma:

$$x = \sum_{i=1}^q a_i \cdot B^{-i} .$$

en donde los a_i pertenecen al alfabeto del sistema de numeración base B que se esté utilizando.

Por otro lado, para convertir una fracción dada en base 10 a una expresión en cualquier otra base B , se procede así:

1. Se multiplica al número fraccionario x por B .
2. Dicho resultado genera un número con una parte entera a_j y una parte fraccionaria G_j .
3. Si G_j es diferente de cero, se hace $x = G_j$, se incrementa j y se repite el paso 1.
4. Si el resultado del paso 1 genera un número con parte fraccionaria $G_j = 0$, el proceso finaliza o finaliza también si no se consigue $G_j = 0$, pero tenemos ya bastantes dígitos para nuestro número. El número que queremos expresar en base B está formado por el conjunto de los dígitos a_j , donde el subíndice j indica la posición que ocupa cada dígito en el número expresado en base B de modo que la primera parte entera que se obtuvo es el dígito más significativo y, el último, el menos significativo.

Si, por ejemplo, queremos representar al número $(0.6)_{10}$ en base $B = 3$ hacemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} 0.6 \times 3 = 1.8 & a_1 = 1 \\ 0.8 \times 3 = 2.4 & a_2 = 2 \\ 0.4 \times 3 = 1.2 & a_3 = 1 \\ 0.2 \times 3 = 0.6 & a_4 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos que $(0.6)_{10} = (0.1210)_3$. Vamos a comprobarlo:

$$\begin{aligned} (0.1210)_3 &= 1 \times 1/3 + 2 \times 1/3^2 + 1/3^3 + 0 \times 1/3^4 = 1/3 + 2/9 + 1/27 + 0 + \dots \\ &\approx 16/27 \approx 0.59 \approx 0.6 \end{aligned}$$

Lo que queremos hacer ahora es expresar los extremos de los intervalos del conjunto de Cantor en desarrollos en base $B = 3$ o sistema ternario. La figura 31 nos muestra los resultados obtenidos. Las operaciones son:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)_{10} &\approx 0.\overline{333} \approx (0.\overline{222})_3 \\ &= 0.333 \times 3 = 0.999 \\ &= 0.999 \times 3 = 2.997 \\ &= 0.997 \times 3 = 2.991 \\ &= 0.991 \times 3 = 2.973 \\ &= 0.973 \times 3 = 2.919 \end{aligned}$$

COMPROBACIÓN: $0.0222 = 0 \times 1/3 + 2 \times 1/9 + 2 \times 1/27 + \dots$
 $= 0 + 2/9 + 2/27 + \dots \approx 1/3$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)_{10} &\approx 0.\overline{666} \approx (0.\overline{1222})_3 \\ &= 0.666 \times 3 = 1.998 \\ &= 0.998 \times 3 = 2.994 \\ &= 0.994 \times 3 = 2.982 \\ &= 0.982 \times 3 = 2.946 \\ &= 0.946 \times 3 = 2.838 \end{aligned}$$

COMPROBACIÓN: $0.1222 = 1 \times 1/3 + 2 \times 1/9 + 2 \times 1/27 + \dots$
 $= 1/3 + 2/9 + 2/27 + \dots \approx 2/3$

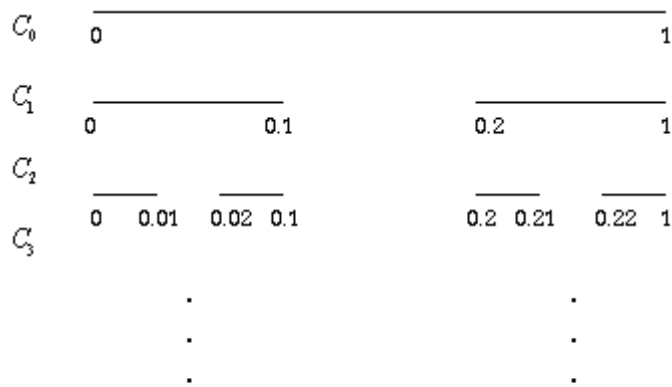
Ahora bien, estos resultados –de acuerdo a las comprobaciones correspondientes– resultan ser correctos. Sin embargo, existe una forma menos engorrosa y directa para obtenerlos apelando a que toda fracción $\frac{m}{n}$ equivale a determinar el cociente $n \overline{)m}$. Hagámoslo:

$\left(\frac{1}{3}\right)_{10} = 3 \overline{)1}$, y en base ternaria se expresa $\left(\frac{1}{10}\right)_3 = 10 \overline{)1}$ cuyo resultado es $\begin{array}{r} .1 \\ 10 \overline{) .10} \\ \underline{0} \end{array}$. Este número corresponde al punto extremo derecho del primer segmento izquierdo de la aproximación C_1 del conjunto de Cantor (ver figura 31).

$\left(\frac{2}{3}\right)_{10} = 3 \overline{)2}$, y en base ternaria se expresa $\left(\frac{2}{10}\right)_3 = 10 \overline{)2}$ cuyo resultado es $\begin{array}{r} .2 \\ 10 \overline{) .20} \\ \underline{0} \end{array}$. Este número corresponde al punto extremo izquierdo del segmento derecho de la aproximación C_1 del conjunto de Cantor (ver figura 31).

$\left(\frac{1}{9}\right)_{10} = 9 \overline{)1}$, y en base ternaria se expresa $\left(\frac{1}{100}\right)_3 = 100 \overline{)1}$ cuyo resultado es $\begin{array}{r} .011 \\ 100 \overline{) .100} \\ \underline{100} \end{array}$. Este número corresponde al punto extremo derecho del primer segmento izquierdo que compone a C_2 (ver figura 31).

$\left(\frac{2}{9}\right)_{10} = 9 \overline{)2}$, y en base ternaria se expresa $\left(\frac{2}{100}\right)_3 = 100 \overline{)2}$ cuyo resultado es $\begin{array}{r} .022 \\ 100 \overline{) .200} \\ \underline{200} \end{array}$. Este número corresponde al punto extremo izquierdo del segundo segmento, de izquierda a derecha, que compone a C_2 (ver figura 31), etc.



Expresión del Conjunto de Cantor en base ternaria

Figura 31

Todo número $x \in [0, 1]$ tiene una representación en sistema ternario que consta de una cadena infinita de 0, 1 y 2 después del punto. Conforme avanzamos en este procedimiento, notamos que vamos quitando los tercios medios que tienen algún 1 después del punto. Por ejemplo, en el primer paso, dividimos –como ya se sabe– al segmento unitario en tres partes iguales del que suprimimos el tercio central, es decir, al intervalo que contiene a los números cuya representación ternaria tienen un 1 inmediatamente después del punto. Como segundo paso tomamos los intervalos restantes, los dividimos en tres partes iguales y suprimimos nuevamente los tercios medios con lo que estamos quitando los intervalos que contienen a los números cuya expansión ternaria contienen un 1 en la segunda cifra después del punto. Si continuamos indefinidamente este proceso, habremos eliminado todos aquellos números fraccionarios que contienen 1 en alguna posición a la derecha del punto. Lo que, implícitamente significa que sólo quedarán los números fraccionarios cuyas cadenas están formadas por un punto con sólo los signos 0 y 2 a la derecha. Ver Fig. 31.

En [MATC97] que es una estupenda tesis de licenciatura de un egresado de la Facultad de Ciencias dedicada a caracterizar al conjunto de Cantor a través de sus propiedades topológicas, se propone la siguiente ecuación que define analíticamente a los conjuntos C_k que lo constituyen:

$$B_k = \bigcup_{k=0}^{2^{k-1}} \left[\frac{a_j}{3^k}, \frac{a_j + 1}{3^k} \right]$$

En donde a_j se define por $a_j = 2b_0 \cdot 3^0 + 2b_1 \cdot 3^1 + \dots + 2b_k \cdot 3^k$, lo que significa que para alguna $j \in \mathbb{N}$, se escribe ésta en su notación binaria y se transforman luego los unos en doses. Si, por ejemplo, $j = 3$, su notación binaria es $j = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1$ y $a_j = a_3 = 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 = 8$.

Hasta ahora hemos descrito el método geométrico para la generación del Conjunto de Cantor y, aunque visualmente se nos aparece como un conjunto fractal debido a la notable característica de autosemejanza que presenta –cada parte C_k del mismo es una copia a escala $\frac{1}{3}$ de C_{k-1} – es necesario determinar su dimensión y exponer con mayor firmeza su propiedad de conjunto autosemejante.

Comencemos por calcular, para este conjunto fractal, su dimensión de autosemejanza u homotecia. Tenemos sencillamente que responder ¿Cuántos piezas (lo que simbolizaremos por n) de tamaño m necesitamos para cubrir al conjunto de Cantor C_k de tamaño M si sabemos que dichas piezas miden $\frac{1}{3} = r$ del original? Es claro que necesitamos $n = 2$ piezas ya que de cada segmento constitutivo de alguna aproximación C_k , se generan dos segmentos más. Vasta determinar estos valores y sustituirlos en la ecuación de homotecia $d = \frac{\ln(n)}{-\ln(r)}$ para obtener:

$$d = \frac{\ln(2)}{-\ln(1/3)} \text{ y haciendo operaciones tenemos:}$$

$$d = \frac{\ln(2)}{-[\ln(1) - \ln(3)]}$$

$$d = \frac{\ln(2)}{-[0 - \ln(3)]}$$

$$d = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \text{ para obtener finalmente:}$$

$$d_A(C) = \frac{0.693}{1.1} = 0.63$$

De acuerdo a estos resultados y a la definición dada por Mandelbrot en [MANB97, Pág. 56] el conjunto de Cantor es un conjunto fractal.

Se trata también, en rigor, de un conjunto autosemejante pues se obtiene al aplicar iterativamente las transformaciones de semejanza (contractiva) $f_1(x) = \frac{1}{3}x$ y $f_2(x) = \frac{x+2}{3}$ de centros 0 y 1, respectivamente, y de razón $r = \frac{1}{3}$.

➤ Curva de Von Koch

La romántica incoherencia de las funciones continuas sin derivada dio la impresión a Hermite de que luchaba contra demonios escapados de algún infierno matemático.

Admírese, sin embargo, el caso de una de ellas, la famosa curva de Koch u

Homunculus. Todo arco de esta curva, por pequeño que se elija, es semejante a la curva entera, cuyo exquisito arabesco cincela de esta manera hasta el infinito sin traicionar su regularidad ¿Hay algo más clásico que esto?

Francois Le Lionnais

La curva de Von Koch es otro fractal bastante familiar, su creador fue el matemático sueco Helge Von Koch. Su construcción geométrica es simple –tómese en cuenta que el título del artículo en que su autor expone la construcción del mismo llevaba por nombre “Sobre una curva continua sin tangentes obtenida por una construcción elemental”-. Se toma un segmento unitario y se divide en

tres partes iguales de tal manera que se sustituye el tercio central por un triángulo equilátero sin base como se muestra en la siguiente figura (Fig. 32):

Primer paso hacia la construcción de la curva de Von Koch



Figura 32

Hecho esto, tomamos el último conjunto obtenido y repetimos el proceso en cada una de sus partes constituyentes (segmentos): seccionarlas en tres partes iguales y sustituir el segmento medio por sendos triángulos equiláteros sin base:



Figura 33

Se trata claramente de un conjunto autosemejante; además, la curva de Von Koch es el resultado de repetir, en el límite, el proceso anteriormente descrito.

A modo de ejemplo, vamos a indicar las transformaciones que tienen que aplicarse para obtener la curva de Koch de la segunda imagen de la figura 32; llamaremos, para esto, a dicha imagen K_0 (generador) y a su predecesora iniciador (imagen izquierda).

La primera transformación de semejanza es una homotecia de centro el origen y razón $r = \frac{1}{3}$, esto es:

$$H_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f_1$$

que mapea al segmento iniciador unitario en el segmento de intervalo $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Después, volvemos a aplicar esta misma homotecia, pero acompañada de una traslación de vector $\vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ a fin de obtener a partir del segmento iniciador el segmento de intervalo $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

$$H_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_2$$

En seguida se aplican sendas rotaciones sobre f_1 y f_2 a modo de lograr que las imágenes correspondientes (ver figura 34), generen los lados sin base del triángulo equilátero que suplantán al intervalo medio supreso del iniciador. Aplicamos primero, sobre f_1 , una rotación de ángulo $\theta = 60^\circ$ -recuérdese que todos los ángulos interiores de un triángulo equilátero suman 180° y que, por ser equilátero, cada uno vale 60° - seguida de una traslación de vector $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$f_3[f_1] = R_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \circ T_2 = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\text{sen} 60^\circ \\ \text{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = f_3$$

En relación a este última transformación comentamos que el valor $\frac{1}{\sqrt{12}}$ de la coordenada en y del vector de traslación \vec{t} se obtiene dividiendo al triángulo equilátero del tercio central en dos triángulos rectángulos y calculando con el Teorema de Pitágoras la longitud del segmento perpendicular al eje x que corresponde a la longitud de la coordenada y de t . Por otro lado, si – como se comentó– rotamos solamente a f_2 por un ángulo $\theta = 120^\circ$ ya no tendría que hacerse la traslación por $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ \sqrt{12} \end{pmatrix}$, debido a que f_2 quedaría automáticamente empalmado con f_4 (analizar figura 34).

Después, aplicamos sobre f_2 otra rotación, pero esta vez con $\theta = -60^\circ$ -aunque bien podría

bastar con $\theta = 120^\circ$ - seguida de una traslación de vector $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ \sqrt{12} \end{pmatrix}$:

$$f_4[f_2] = R_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \circ T_3 = \begin{pmatrix} \cos -60^\circ & -\text{sen} -60^\circ \\ \text{sen} -60^\circ & \cos -60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ \sqrt{12} \end{pmatrix} = f_4$$

La figura 34 ilumina mejor este último proceso:

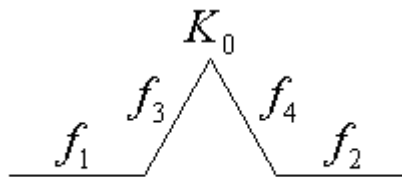


Figura 34

Geoméricamente, el conjunto de Von Koch en su primera iteración es la unión de estas cuatro autosemejanzas, esto es: $K_0 = f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup f_4$; por cuestiones de brevedad, bástenos este ejemplo para afirmar que hemos verificado que la curva de Von Koch es una curva autosemejante.

Finalmente, calcularemos la dimensión de Minkowski de este conjunto para verificar que, efectivamente, se trata de una curva fractal.

Antes de comenzar, sin embargo, haremos hincapié en el hecho de que la longitud de la curva es siempre igual a $\left(\frac{4}{3}\right)^{i+1}$. Del segmento iniciador generamos 4 segmentos de longitud $\frac{1}{3}$ de éste, a la unión de estos cuatro segmentos con la topología que muestra la segunda imagen de la figura 32 le llamamos K_0 ; luego, de cada segmento de K_0 obtenemos, nuevamente, 4 segmentos de longitud $\frac{1}{3}$ de los segmentos de K_0 y cuyo resultado puede apreciarse en la figura 33 que corresponde a K_1 y así, *ad infinitum*. Pensando inductivamente, podemos concluir que de un paso a otro en la generación de la curva de Koch —esto es de K_i a K_{i+1} — ocurre que cada segmento genera cuatro segmentos de longitud $\frac{1}{3}$ de los segmentos que componen a la curva anterior o, en otras palabras, ocurre que de un paso a otro el número de segmentos que componen a la curva se cuadruplica, mientras que la longitud de los mismos disminuye a un $\frac{1}{3}$ del anterior. Es por ello

que se afirma que la longitud de la curva en su i -ésima construcción está dada por $\left(\frac{4}{3}\right)^{i+1}$.

Retomemos ahora el principio sobre el que descansa el concepto de dimensión de Minkowski de un conjunto E dada por $d(E) = \frac{\ln(N_\delta(E))}{\ln(\delta)}$, según la cual $N_\delta(E)$ denota el menor número de conjuntos de diámetro δ que pueden recubrir a E .

Para el conjunto K_0 , el menor número de conjuntos $N_\delta(E)$ que pueden recubrirlo es 1, con diámetro $\delta = 1$ (véase figura 35).

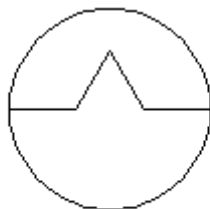


Figura 35

Para K_1 , $N_\delta(E) = 4$ con $\delta = \frac{1}{3}$ (véase figura 36)

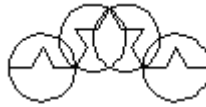


Figura 36

Para K_2 , $N_\delta(E) = 16$ con $\delta = \frac{1}{9}$ (véase figura 37)



Figura 37

Y, en general, para K_i , $N_\delta(E) = 4^i$ con $\delta = \frac{1}{3^i}$

Por lo que la dimensión de Minkowski de la curva de Koch K es:

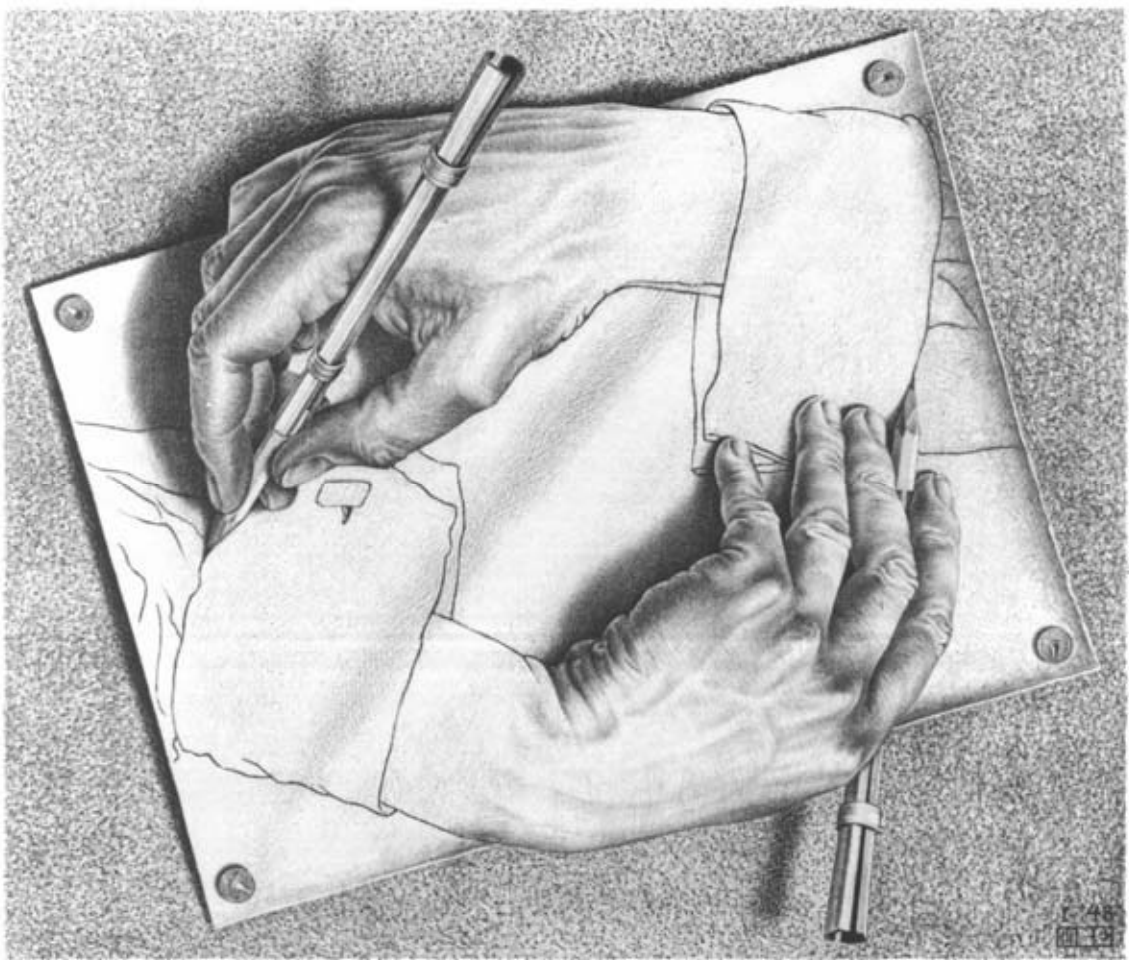
$$d(K) = \frac{\ln(4^i)}{-\ln\left(\frac{1}{3^i}\right)}$$

realizando operaciones tenemos:

$$= \frac{\ln(4^i)}{-\ln\left(\frac{1}{3^i}\right)} = \frac{i \ln(4)}{-[\ln 1 - \ln(3^i)]} = \frac{i \ln(4)}{-[0 - i \ln(3)]} = \frac{i \ln(4)}{i \ln(3)} \cong \frac{1.39}{1.1} \cong 1.26$$

Dado que la dimensión de Minkowski de la curva de Von Koch está dada por $d(K) \cong 1.26$ y que es posible generar esta curva como la unión de distintas transformaciones de autosemejanza, concluimos diciendo que se trata de una curva fractal.

Capítulo 2



“Drawing hands”, M. C. Escher

En efecto, la Biblioteca incluye todas las estructuras verbales, todas las variaciones que permiten los veinticinco símbolos ortográficos, pero no un solo disparate absoluto. Inútil observar que el mejor volumen de los muchos hexágonos que administro se titula *Trueno peinado*, y otro *El calambre de yeso* y otro *Axaxaxas mlö*. Esas proposiciones, a primera vista incoherentes, sin duda son capaces de una justificación criptográfica o alegórica; esa justificación es verbal y, *ex hypothesi*, ya figura en la Biblioteca. No puedo combinar unos caracteres

dhcmrlchtdj

que la divina Biblioteca no haya previsto y que en alguna de sus lenguas secretas no encierren un terrible sentido. Nadie puede articular una sílaba que no esté llena de ternuras y de temores; que no sea en alguno de esos lenguajes el nombre poderoso de un dios. Hablar es incurrir en tautologías. Esta epístola inútil y palabrera ya existe en uno de los treinta volúmenes de los cinco anaqueles de uno de los incontables hexágonos –y también su refutación. (Un número n de lenguajes posibles usa el mismo vocabulario; en algunos, el símbolo *biblioteca* admite la correcta definición «ubicuo y perdurable sistema de galerías hexagonales», pero *biblioteca* es «pan» o «pirámide» o cualquier otra cosa, y las siete palabras que la definen tienen otro valor. Tú, que me lees, ¿estás seguro de entender mi lenguaje?)

Jorge Luis Borges, *La Biblioteca de Babel*

2. CURVAS QUE LLENAN EL PLANO Y SISTEMAS L

2.1 Curvas que llenan el plano

Las matemáticas, lo mismo que la teología y que todas las creaciones libres de la mente, obedecen a las leyes inexorables de lo imaginario.

Gian-Carlo Rota

Hemos dicho al comienzo de esta tesis que una curva se define como el límite de una sucesión de polígonos y que una curva cuya dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica 1 es —en concordancia con Mandelbrot— una curva fractal. A continuación, presentamos dos curvas fractales que llenan el plano lo que, en términos más intuitivos, significa que estas curvas pasan por todos y cada uno de los puntos de una determinada área o porción del plano. Lo sorprendente de estas curvas —que en su momento, se consideraron verdaderos entes patológicos dentro del bestiario matemático— es que son generadas por un tipo de función cuya imagen contiene absolutamente todos los puntos de la región bidimensional que procrea. Este hecho, en su momento, rompía con el esquema intuitivo que llevaba a concebir a la *dimensión de X como el mínimo número de parámetros continuos necesarios para especificar cada punto de X* [ARMM87, Pág. 42].

Para las mentes matemáticas de aquellos años que no terminaban de familiarizarse del todo con la existencia de curvas continuas sin derivada, resultaba paradójico y altamente contrario al sentido común, la existencia de una curva continua, sin derivadas y con dimensión 2. Dieudonné, por ejemplo, llegó a afirmar [1975]: *algunos objetos matemáticos, como la curva de Peano, son totalmente anti intuitivos, . . . , extravagantes.*

Ahora bien, para comprender formalmente a qué nos referimos con curvas que llenan el plano, apelaremos a los siguientes conceptos:

Si f es una función de un subconjunto de E^m en E^n , entonces

$$f_*(A) = \{f(x) \in R(f) \mid x \in A \cap D(f)\} \text{ con } A \subseteq E^m. \quad f_*(A) \text{ es la imagen directa de } A \text{ bajo } f.$$

En donde $D(f)$ y $R(f)$ son, respectivamente, el dominio y el rango de f .

Sea $f[0,1] \rightarrow E^n$ una función continua, entonces la imagen $f_*[[1,0]]$ es una curva. A $f(0)$ se le llama punto inicial de la curva y $f(1)$ es su punto final. Si $f_*[[1,0]]$ además de ser continua llena una región del plano, entonces $f_*[[1,0]]$ es una **curva que llena el plano**. Esto puede también ser formalizado en términos de bolas abiertas de la siguiente manera:

Una curva continua $f[0,1] \rightarrow E^n$ con $n = 2$, es una **curva que llena el plano** sí y sólo si $f_*[[1,0]]$ contiene una bola abierta $B_r(x)$.

Veamos pues, la construcción de un par de éstas y entendamos, a partir de ese lugar, su importancia pues son, junto al polvo de Cantor, la curva de Koch, al triángulo de Sierpinski y otros fractales las criaturas que inspiraron en Mandelbrot y en otros matemáticos teóricos de la geometría fractal el sentar los cimientos de esta relativamente reciente rama de la Matemática que nos desafía a encontrar en la naturaleza las formas geométricas no tradicionales que, hasta ahora, habían permanecido *ocultas* a nuestra vista.

2.1.1 Curva de Peano

En general se piensa que el minimalismo se reduce a unas cuantas combinaciones de formas estándar: rectas, círculos, espirales y otras por el estilo. Pero no hace falta que sea así. Los fractales que se emplean en los modelos científicos son también muy simples (pues la ciencia fomenta la sencillez), y opino que muchos de ellos merecen ser considerados como una nueva forma de arte geométrico minimalista.

Benoit B. Mandelbrot

En 1890, el matemático italiano Giuseppe Peano ideó una curva continua que pasa por todos los puntos de una determinada región del plano; la construcción de esta curva es similar a la construcción de la curva de Koch y responde también al nombre de terágono (del griego τετραγώνος, “monstruo”, “criatura extraña” y γωνία “esquina” “ángulo”) ya que a partir de cada uno de los segmentos que la constituyen en cualquiera de sus etapas, se generan los segmentos de la próxima etapa: *De este modo, rompemos cada segmento, sustituyendo el iniciador por una curva dada cada vez más quebrada. Como estas curvas serán omnipresentes en este ensayo, permítaseme acuñar para designarlas el término terágono.* [MANB97, Pág. 61]. Para construirla, partimos de un segmento de longitud unitaria como el que se muestra en la figura 38 al que llamaremos iniciador. Luego, elaboramos 9 copias escaladas a 1/3 del iniciador y las unimos formando la poligonal que se muestra en la figura 39. Siendo ésta, la etapa 1 del proceso y la curva resultante, el conjunto generador del mismo. Como podemos notar, esta curva tiene dos puntos de auto intersección.

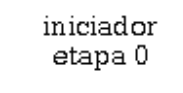


Figura 38

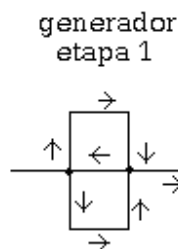




Figura 39

Después, tomamos de nuevo cada segmento de la curva de la etapa 1 y generamos 9 copias que, juntas, conformarán una poligonal igual a la curva generadora; cada una de estas 9 curvas se unirán de acuerdo al patrón indicado por el conjunto generador (nótese lo recursivo del proceso) con lo que obtendremos a la curva de la etapa 2 que, por cierto, contiene 32 puntos de auto intersección, $2 \times 9 = 18$ por cada terágono de la forma  y 14 más que se ven mejor si la dibujamos en papel usando un color diferente para cada nuevo ; lo mismo debe de hacerse con esta última curva y con cada una de las subsiguientes obtenidas tras realizar iterativamente el proceso que procrea a la curva generador. En el límite, la curva obtenida se conoce como Curva de Peano y su imagen visual es un cuadrado “lleno” (todo pintado de negro) de lado 1. En la figura 40 se muestran las curvas

correspondientes a las etapas 2, 3, 4 y 5; nótese cómo en la etapa 5 –si bien se debe en buena parte al pixelaje– estamos ya frente a una región llena del plano.

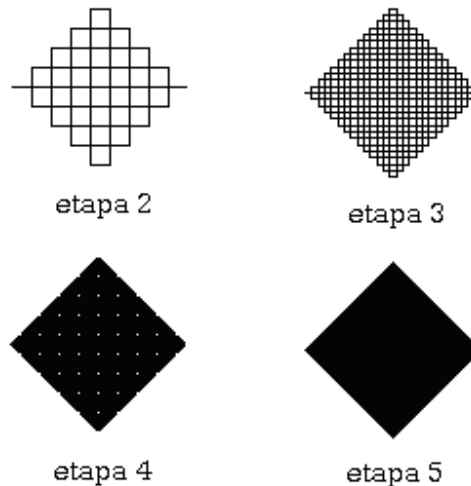


Figura 40

Las imágenes de la curva de Peano que aquí se presentan, se hicieron ex profeso para la tesis utilizando el lenguaje de programación Logo; si bien el algoritmo que elaboramos para tal efecto no aparece en [EDG98], es menester señalar que se hizo basándonos en el algoritmo que Gerald presenta en dicha fuente (página 19) para la graficación de la curva de Koch, con la adición de que me permito presentar la pila del proceso -con los respectivos stacks que se generan por cada nueva llamada recursiva al mismo- y explicar a detalle cómo funciona el algoritmo. He aquí el algoritmo:

Algoritmo 2.A

```

to Peano :etapas :taminic
  if :etapas = 0 [forward :taminic stop]
  Peano :etapas-1 :taminic/3
  left 90
  Peano :etapas-1 :taminic/3
  right 90
  Peano :etapas-1 :taminic/3
  right 90
  Peano :etapas-1 :taminic/3
  right 90
  Peano :etapas-1 :taminic/3
  left 90
  Peano :etapas-1 :taminic/3
  left 90
  Peano :etapas-1 :taminic/3
  left 90
  Peano :etapas-1 :taminic/3
  left 90
  Peano :etapas-1 :taminic/3
  right 90
  Peano :etapas-1 :taminic/3
end
  
```

Antes de mostrar la pila del proceso, es necesario comentar que `etapas` y `taminic` son dos variables cuyos valores se insertan desde la línea de comandos de la interfaz de logo; `etapas` indica el número de iteraciones que deseamos y `taminic` refiere a la longitud o tamaño del segmento iniciador; para nuestra prueba de escritorio supondremos que `etapas = 1` y `taminic = 90`. He aquí, la pila del proceso:

<p>✳ etapas = 0; taminic = 30; ¿etapas = 0? Sí, la tortuga avanza 30 pixeles, para, y regresa a donde fue invocado este subproceso (stack), es decir, al stack ⌛</p>
<p>📞 etapas = 0; taminic = 30; ¿etapas = 0? Sí, la tortuga avanza 30 pixeles, para, y regresa a donde fue invocado este subproceso (stack), es decir, al stack ⌛</p>
<p>👁 etapas = 0; taminic = 30; ¿etapas = 0? Sí, la tortuga avanza 30 pixeles, para, y regresa a donde fue invocado este subproceso (stack), es decir, al stack ⌛</p>
<p>🕒 etapas = 0; taminic = 30; ¿etapas = 0? Sí, la tortuga avanza 30 pixeles, para, y regresa a donde fue invocado este subproceso (stack), es decir, al stack ⌛</p>
<p>✍ etapas = 0; taminic = 30; ¿etapas = 0? Sí, la tortuga avanza 30 pixeles, para y regresa a donde fue invocado este subproceso (stack), es decir, al stack ⌛</p>
<p>📖 etapas = 0; taminic = 30; ¿etapas = 0? Sí, la tortuga avanza 30 pixeles para, y regresa a donde fue invocado este subproceso (stack), es decir, al stack ⌛</p>
<p>🌀 etapas = 0; taminic = 30; ¿etapas = 0? Sí, la tortuga avanza 30 pixeles para, y regresa a donde fue invocado este subproceso (stack), es decir, al stack ⌛</p>
<p>😊 etapas = 0; taminic = 30; ¿etapas = 0? Sí, la tortuga avanza 30 pixeles para, y regresa a donde fue invocado este subproceso (stack), es decir, al stack ⌛</p>
<p>🔴 etapas = 0; taminic = 30; ¿etapas = 0? Sí, entonces la tortuga avanza 30 pixeles, para, y el proceso regresa al punto en el que fue invocado este subproceso (stack), es decir, al stack ⌛</p>
<p>🕒 etapas = 1; taminic = 90; ¿etapas = 0? NO, entonces llamamos de nuevo al procedimiento con los respectivos parámetros: Peano :etapas :taminic/3 🟡 A [y sigue] left 90, la tortuga gira 90° a la izquierda Peano :etapas :taminic/3 😊 B [y sigue] right 90, la tortuga gira 90° a la derecha Peano :etapas :taminic/3 🌀 C [y sigue] right 90, la tortuga gira 90° a la derecha Peano :etapas :taminic/3 📖 D [y sigue] right 90, la tortuga gira 90° a la derecha Peano :etapas :taminic/3 ✍ E [y sigue] left 90, la tortuga gira 90° a la izquierda Peano :etapas :taminic/3 🕒 F [y sigue] left 90, la tortuga gira 90° a la izquierda Peano :etapas :taminic/3 👁 G [y sigue] left 90, la tortuga gira 90° a la izquierda Peano :etapas :taminic/3 📞 H [y sigue] right 90, la tortuga gira 90° a la derecha Peano :etapas :taminic/3 ✳ [y termina el proceso] end.</p>

Pila del Proceso

¿Cómo interpretar la pila? Se comenta primero que nada que en el apartado 2.2.3 se introducen las instrucciones básicas del lenguaje logo cuyas nociones se hacen necesarias a efecto de comprender los algoritmos que presentan en este capítulo.

Vamos antes de ello, sin embargo, a ofrecer la descripción del procedimiento recursivo cuya pila aparece en la página anterior; para ello, es recomendable hacer dos cosas: 1) notar que nuestro algoritmo (*ad hoc* con la construcción de la curva de Peano hasta ahora presentada) se trata de un algoritmo recursivo en donde `etapas = 0` es el caso base del mismo, es decir, la línea del algoritmo que incluye `etapas = 0` es ejecutada sólo si, efectivamente, `etapas = 0`; de otro modo, se ejecutan las 17 líneas restantes por cada invocación al procedimiento `Peano`. 2) la figura 41 ayuda bastante a ilustrar el comportamiento de la pila.

Bien, el primer stack frame de la pila es el que se encuentra en el primer nivel o piso (de abajo hacia arriba), en ese momento comienza a ejecutarse el programa con los valores iniciales para `etapas` y `taminic` que son 1 y 90, respectivamente; como no estamos en el caso base, entonces se ejecuta la siguiente línea del algoritmo consistente en invocar nuevamente al proceso `Peano`, se genera entonces el stack frame \odot^* en el que, al cumplirse el caso base, se ejecuta esa línea del proceso, misma que lleva a la tortuga a avanzar 30 pixeles, termina y regresa al stack frame inicial \otimes que es en donde comienza el proceso; entonces se ejecuta el renglón siguiente en el algoritmo, esto es, `left 90` (coincidente con la línea A del stack frame \otimes) y que lleva a la tortuga a girar un ángulo de 90 grados a la izquierda. A continuación se avanza al siguiente renglón y, otra vez, se invoca al procedimiento `Peano`, pero con los parámetros (0, 30) —como en la primera invocación—; al hacerlo, se crea el stack frame \odot y en éste ocurre exactamente lo mismo que en el stack frame \odot^* , esto es, la tortuga avanza 30 pixeles, termina y regresa al stack frame inicial \otimes ; ocurre entonces que seguimos en la línea B de este stack frame que corresponde al sexto renglón del algoritmo, `right 90`, o sea, la tortuga gira por un ángulo de 90° a la derecha.

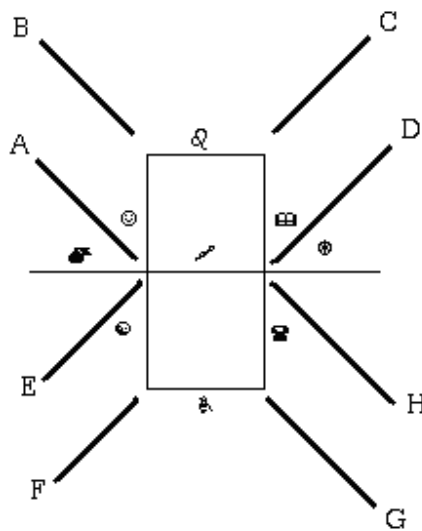


Figura 41

Volvemos nuevamente a invocar a nuestro procedimiento y, al hacerlo, generamos el stack frame \odot en donde, otra vez, la tortuga avanza un caminito de 30 pixeles; repetimos este procedimiento para los stacks frames \otimes , \odot , \odot^* , \otimes , \odot hasta llegar al stack frame \otimes , momento en el que el procedimiento regresa al stack frame inicial \otimes , se ejecuta la línea final `end` del algoritmo, y tenemos ya lista nuestra curva de Peano correspondiente a la segunda etapa. De esta manera, y sin aún poseer el conocimiento formal que esta construcción entraña, hemos dibujado a la curva de Peano haciendo uso de un Sistema Lindenmeyer o Sistema L. Al momento de introducir estos sistemas en la sección 2.1, se comprenderá cabalmente este último aserto.⁹

⁹ Agrego, a modo de recomendación que existe un estupendo libro, [CAMC98], cuyo tratamiento del tema de recursividad es muy completo y que, sea de paso, tiene por autora a una de las

Hasta ahora hemos explicado lo suficiente la construcción de la curva de Peano como para generarla a través de Logo, pero hay todavía más que observar en relación a la misma.

Básicamente, ¿es esta una curva fractal? Bien, en este punto nos permitiremos, primero que nada, citar a **[PEIH92, Pág. 111]** quien dice: *Si se contempla a la curva de Peano en la misma forma intuitiva en que se hace, por ejemplo, con la curva de Koch, notamos que cada una de las etapas de su construcción tiene similitud con la etapa precedente; pero si se mira la curva final (...), esencialmente estaremos mirando un cuadrado "lleno" que no es en lo absoluto similar a las curvas obtenidas en los primeros pasos de la construcción.*

Y finalmente, con miras a terminar de responder a este planteamiento, calculamos la dimensión fractal de esta curva y se verificará que puede obtenerse como una composición de funciones autosemejantes.

Tenemos que, para calcular la dimensión de homotecia de la curva los valores de n y r son $n=9$ y $r=1/3$, por lo que:

$$d = \frac{\ln(n)}{-\ln(r)} = \frac{\ln(9)}{-\ln(1/3)} = \frac{\ln(9)}{-[\ln 1 - \ln 3]} = \frac{2.2}{-[-0-1.1]} = \frac{2.2}{1.1} = 2$$

esto es,

$$d_A(\text{Curva de peano}) = 2$$

Con lo que, desde esta perspectiva, tenemos que la curva de Peano es una curva fractal.

Veamos ahora cómo la curva de Peano se obtiene también tras componer varias transformaciones autosemejantes, autoafines específicamente; de ser así, estaríamos verificando uno más de los rasgos que poseen las estructuras fractales.

Matemáticamente es posible establecer transformaciones del plano que a partir del segmento iniciador generen 9 segmentos reducidos a una escala de $r=1/3$ y que, componiendo dichas transformaciones, se obtenga al final a la curva de Peano. Pensemos, sin embargo, en lo exhaustivo del proceso ¿cuántas transformaciones afines deben de componerse para llegar a la última imagen de la figura 40? Mostraremos, por tanto, sólo un par de dichas transformaciones:

1. La transformación autoafín

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suponiendo que situamos al segmento iniciador de forma horizontal de modo que el extremo izquierdo del mismo coincida con el origen del sistema de coordenadas, la transformación anterior genera el mapeo que se ilustra en la figura 42:

maestras más notables de MAC y de quien aprendí, con grandes estímulo y entusiasmo, invaluable conocimiento durante mi formación universitaria.

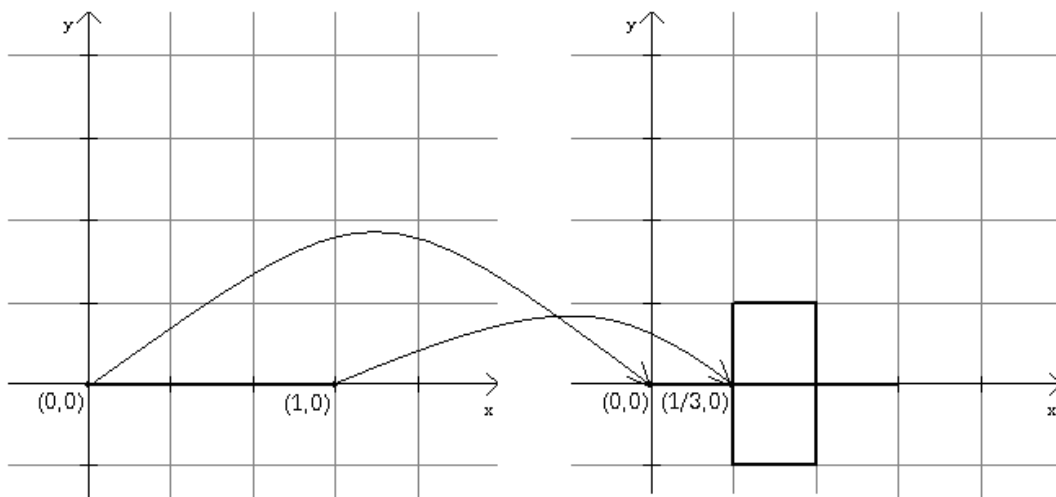


Figura 42

Ya que efectivamente, y a modo de ejemplo, aplicando w_1 en el punto $(1,0)$ obtenemos:

$$w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esta transformación aplicó al segmento $[1,0]$ en el segmento $[1/3,0]$. Si queremos ahora mapear al único segmento de la etapa 0 en el segundo segmento de la etapa 1, necesitamos:

1. Rotar 90° el segmento $\overline{01}$.
 2. Escalarlo a una razón $r = 1/3$ y
 3. Trasladarlo –después de las dos aplicaciones anteriores– por un vector de traslación $\vec{t} = (1/3, 0)$.
2. De modo que nuestra transformación autoafín es:

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\text{sen} 90^\circ \\ \text{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que genera:

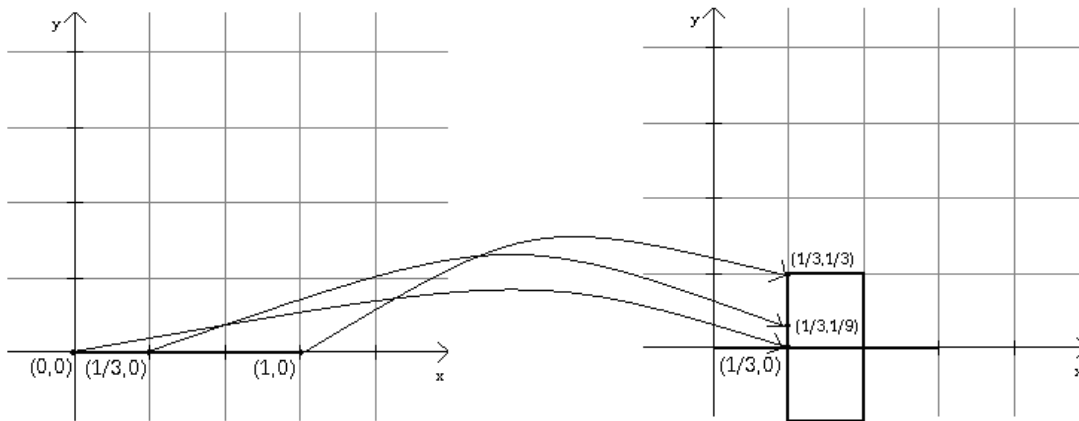


Figura 43

Y, en general, para obtener de cada segmento que configura a la curva de la k -ésima etapa una curva del tipo \square , se necesitan 9 transformaciones. La unión, en el límite, de todas las poligonales de la forma \square constituye la curva de Peano.

Para terminar, recomendamos ampliamente consultar [KURK73] en sus páginas 194 y 195, ya que allí se expone una construcción de la curva de Peano diferente a la presentada aquí y, más importante, se demuestra –atendiendo a criterios que se estudian en topología– que la sucesión infinita de funciones que engendran a esta curva es uniformemente convergente y que, por tanto, su función límite es continua y que dicha función es igual a la superficie delimitada por el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$. Se recomienda también remitirse al Apéndice A de esta tesis, en donde aparece la demostración de la continuidad y no diferenciabilidad de esta curva.

2.1.2 Curva de Hilbert

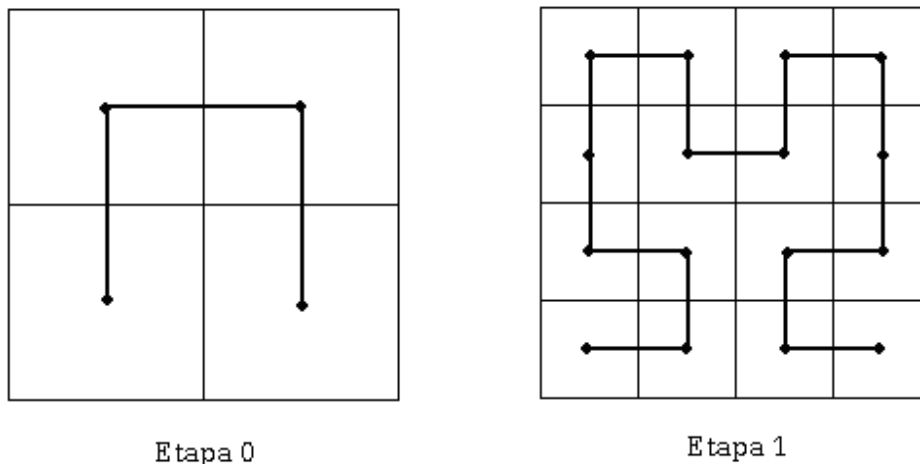
La imaginación es más importante que el conocimiento.

Albert Einstein

En 1891, un año después de que Peano diera a conocer la construcción de la curva que porta su nombre, David Hilbert publica en un texto intitulado “Mathematische Annalen” la existencia de otra curva que llena el plano sin el problema de tener infinitos puntos de autocontacto.

Para construir a esta curva, vamos a situarnos en un cuadrado unitario al que, imaginariamente, dividimos en 4 cuadrantes, luego marcamos –también imaginariamente– cuatro puntos en los respectivos centros de dichos cuadrantes para, luego, hacer pasar por los mismos una poligonal de la forma \square . Este paso y la poligonal obtenida constituyen la etapa 0 de la construcción. Llamaremos a \square iniciador o H_0 , indistintamente. Para llegar a la etapa 1 dividimos, a su vez, a cada uno de los cuatro cuadrantes, con los que ya contamos, en 4 cuadrantes y,

nuevamente, trazamos puntos imaginarios en los centros respectivos de estos nuevos 4 cuadrantes que serán también unidos por poligonales de la forma \square con la diferencia de que las poligonales de los cuadrantes inferiores son rotadas 90° a izquierda y derecha y, también, con la adición de que unimos nuestras 4 poligonales por sendos segmentos como se muestra en la figura 44; nótese también cómo –de un paso al siguiente– la longitud de los segmentos que constituyen a nuestra curva, se reducen a razón $r = 1/2$. Para las etapas sucesivas seguimos exactamente el mismo procedimiento de modo que, en el límite, la curva obtenida es la curva de Hilbert que, lo mismo que la de Peano, es una curva que llena una porción del plano (en este caso, la porción ocupada por el cuadrado unitario utilizado en la construcción).



Curva de Hilbert

Figura 44

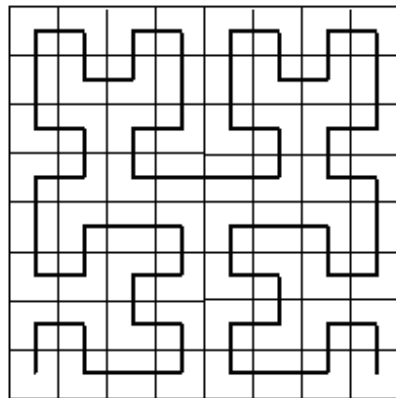
La curva de Hilbert, al igual que la curva de Peano posee la característica de que el procedimiento utilizado para su generación en cada etapa, es exactamente el mismo, con la situación de que se da una varianza de escala; por ejemplo, de una etapa a la otra, la longitud de los segmentos que componen al segmento iniciador disminuye y, por otro lado, el número de segmentos que componen a la curva, aumenta y, por ende, su longitud. Es este comportamiento lo que nos lleva a presumir que se trata de una curva fractal.

Hagamos un análisis de dicho comportamiento en cada una de sus etapas. A fin de simplificar, supondremos que deseamos que la longitud de cada uno de los segmentos que componen al segmento iniciador sea $long = 200$. Este análisis es útil si se quiere, por ejemplo, implementar un algoritmo en computadora para que cree a esta curva. Resumiremos estos puntos en la tabla No. 4:

Etapa	Longitud long del segmento "iniciador"	Longitud de cada segmento en la enésima etapa	No. de curvas "iniciador" por etapa
0	200	$= \frac{200}{2^0} = \frac{200}{1} = 200$	$4^0 = 1$
1	200	$= \frac{200}{2^1} = \frac{200}{2} = 100$	$4^1 = 4$
2	200	$= \frac{200}{2^2} = \frac{200}{4} = 50$	$4^2 = 16$

Etapa	Longitud <i>long</i> del segmento "iniciador"	Longitud de cada segmento en la <i>n</i> -ésima etapa	No. de curvas "iniciador" por etapa
3	200	$= \frac{200}{2^3} = \frac{200}{8} = 25$	$4^3 = 64$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
<i>n</i>	200	$= \frac{200}{2^n} = \frac{long}{2^{etapa}}$	4^n

Tabla No. 4: Comportamiento de la curva de Hilbert



Etapa 2



Etapa 9

Figura 45

Tenemos entonces que la longitud de los segmentos que componen a la curva disminuye a una razón $r = 1/2$ y que, además, dicha longitud depende de la longitud elegida para la curva iniciador y de la etapa de la curva en la que queremos situar nuestra construcción, esto es $longitud_segmento_{etapa}(long, etapa) = \frac{long}{2^{etapa}}$; ahora bien, si conocemos el número de segmentos por etapa y la longitud de los mismos, no resulta difícil deducir que la longitud total de la curva en la *k*-ésima etapa es $= 4^k \frac{long}{2^k}$, en donde *long* representa la longitud elegida para los segmentos componentes del segmento iniciador.

Con los datos anteriores, resulta posible intentar codificar el procedimiento para generar a esta curva utilizando algún lenguaje de programación. Ya que, al igual que la curva de Peano, su construcción es recursiva, es conveniente sacar provecho de ello e implementar un algoritmo recursivo. En este punto, nos permitimos anotar que cuando se trabaja con un procedimiento recursivo, es conveniente no sólo entender cómo trabaja la pila que se va construyendo conforme se ejecuta dicho procedimiento¹⁰, sino que —y esto quizá sea mucho más importante— es

¹⁰ En el corazón de la implementación de procedimientos recursivos se encuentra una pila (stack) en donde se almacenan los datos usados por cada llamada de un procedimiento que todavía no ha terminado. Esto es, todos los datos no globales (locales) están en una pila. La pila es dividida en marcos (stack frames), los cuales son bloques de localidades (registros) consecutivos. [CAMC98, Pág. 459 y 460]

necesario, al momento de buscar la solución del problema, definir todas las ecuaciones recursivas que lo determinan –si las hay- para incorporarlas después como partes del proceso de codificación.

El siguiente algoritmo está basado en el algoritmo que incluye MSWLogo en sus librerías para generar la curva de Hilbert, el problema con el algoritmo que ellos ofrecen es que en cada nueva etapa de la curva no se reducen los segmentos que la componen a una razón $r = 1/2$ como –de hecho, ocurre- y esto deriva en que si partimos de una misma longitud para la curva iniciador, la curva para la k -ésima etapa no ocupa la misma porción del plano que la que ocupa la curva de $(k-1)$ -ésima etapa, de modo que nunca llegará a llenar el plano. A fin de aniquilar este problema, introdujimos una exigua porción de código a través de un procedimiento que, si estuviéramos trabajando en C, sería algo así como la función main, ya que desde este procedimiento se invoca al procedimiento recursivo que hace el resto (invocarse una y otra vez a sí mismo hasta llegar al caso base). Con la añadidura de que en este presunto procedimiento tipo main se le pide a la máquina que calcule la longitud de los segmentos de la curva de la k -ésima etapa, de modo que cuando $k \rightarrow \infty$ –y de hecho, mucho antes (véase la etapa 9 en la figura 45)- obtendremos, en definitiva, una curva que llena el plano. Dicha porción de código añadido aparece dentro del procedimiento `hilbert` que aparece al inicio del programa. Se muestra a continuación el código y se muestra también la pila que se genera suponiendo que `etapas = 2` y `long = 100` y, de manera adicional, se recomienda observar la figura 46 de manera simultánea a la lectura de la pila que se genera con la ejecución del programa. La curva de Hilbert de la figura 46 aparece orientada tal y como sucede cuando el programa se ejecuta en Logo y la tortuga la dibuja en la pantalla.

Algoritmo 2.B

```
to hilbert :etapas :long
  make "long :long/power 2 :etapas-1
  hilbert_1 :etapas :long
end
```

```
to hilbert_d :etapas :long
  if :etapas=0 [stop]
  rt 90
  hilbert_1 :etapas - 1 :long
  fd :long
  lt 90
  hilbert_d :etapas - 1 :long
  fd :long
  hilbert_d :etapas - 1 :long
  lt 90
  fd :long
  hilbert_1 :etapas - 1 :long
  rt 90
end
```

```
to hilbert_1 :etapas :long
  if :etapas=0 [stop]
  lt 90
  hilbert_d :etapas - 1 :long
  fd :long
  rt 90
  hilbert_1 :etapas - 1 :long
  fd :long
  hilbert_1 :etapas - 1 :long
```

```

rt 90
fd :long
hilbert_d :etapas - 1 :long
lt 90
end

```

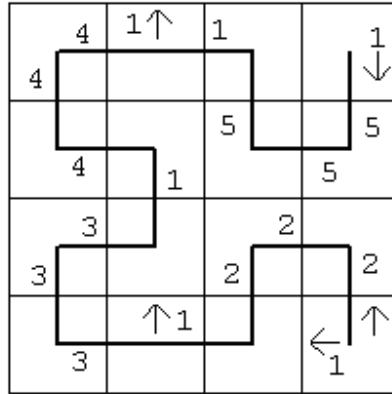


Figura 46

Las dos flechitas de la Fig. 46 indican dos ángulos: `lt 90` que aparece en el cuarto renglón del primer stack frame y `rt 90` que aparece en el primer renglón del segundo stack frame. Y la pila:

3.4 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 3	5.4 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 5
3.3 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 3	5.3 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 5
3.2 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 3	5.2 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 5
3.1 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 3	5.1 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 5
3 etapas=1, long=50, ζ etapas=0? NO, entonces lt 90 y hilbert_d :etapas-1 :long (3.1), fd 50 rt 90, hilbert_l :etapas-1 :long (3.2) fd 50 hilbert_l :etapas-1 :long (3.3) rt 90 fd 50, hilbert_d :etapas-1 :long (3.4) lt 90 y regresa a 1 .	5.1 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 5
2.4 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 2 .	5 Etapas=1, long=50, ζ etapas=0? NO, entonces rt 90 y hilbert_l :etapas-1 :long (5.1), fd 50 lt 90, hilbert_d :etapas-1 :long (5.2) fd 50 hilbert_d :etapas-1 :long (5.3) lt 90 fd 50, hilbert_l :etapas-1 :long (5.4) rt 90 y regresa a 1 .
2.3 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 2 .	4.4 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 4
2.2 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 2 .	4.3 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 4
2.1 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 2 .	4.2 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 4
2 Etapas=1, long=50, ζ etapas=0? NO, entonces rt 90 y hilbert_l :etapas-1 :long (2.1), fd 50 lt 90, hilbert_d :etapas-1 :long (2.2) fd 50 hilbert_d :etapas-1 :long (2.3) lt 90 fd 50, hilbert_l :etapas-1 :long (2.4) rt 90 y regresa a 1 .	4.1 Etapas=0, long=50, ζ etapas=0? Sí, entonces stop y regresa a 4
Etapas=2, long=100, long=long/ $2^{\text{etapas}-1}$ =long/2=50, hilbert_l :etapas :long (1) 1 etapas=2, long=50, ζ etapas=0? NO, entonces lt 90, hilbert_d :etapas-1 :long (2) fd 50, rt 90, hilbert_l :etapas-1 :long (3), fd 50 y hilbert_l :etapas-1 :long (4), rt 90 fd 50 y hilbert_d :etapas-1 :long (5), lt 90, end.	4 Etapas=1, long=50, ζ etapas=0? NO, entonces lt 90 y hilbert_d :etapas-1 :long (4.1), fd 50 rt 90, hilbert_l :etapas-1 :long (4.2) fd 50 hilbert_l :etapas-1 :long (4.3) rt 90 fd 50, hilbert_d :etapas-1 :long (4.4) lt 90 y regresa a 1 .
PILA 1	PILA 2 (Continuación PILA 1)

Hemos hasta aquí mostrado la construcción de la curva de Hilbert, aún nos falta verificar que se trata de una curva fractal. Para ello, calcularemos primeramente su dimensión fractal (dimensión de homotecia) y, posteriormente, veremos cómo es posible obtenerla a través de la aplicación iterativa de transformaciones autoafines.

Bien, calcularemos su dimensión de homotecia; tenemos que $n = 4$ y $r = 1/2$, entonces:

$$d_A = \frac{\ln(n)}{-\ln(r)} = \frac{\ln(4)}{-\ln(1/2)} = \frac{\ln(4)}{-[\ln(1) - \ln(2)]} = \frac{1.3863}{-[0 - 0.7]} = \frac{1.3863}{0.7} = 1.98 \approx 2$$

Por lo que podemos decir que d_A (curva de Hilbert) = 2 y se trata, entonces, de una curva fractal.

Ahora bien, lo mismo que con la curva de Peano, resulta evidente que –de una etapa a otra- la curva de Hilbert puede obtenerse como resultado de la unión de diversas transformaciones autoafines, en este caso, 4^k transformaciones por etapa. A continuación, se describirán únicamente las primeras 4 transformaciones autoafines para pasar de la curva de la etapa 0 a la curva de la etapa 1 suponiendo que las curvas se sitúen en el origen de un sistema coordenado rectangular. La figura 47 resultará útil para entender todo el proceso.

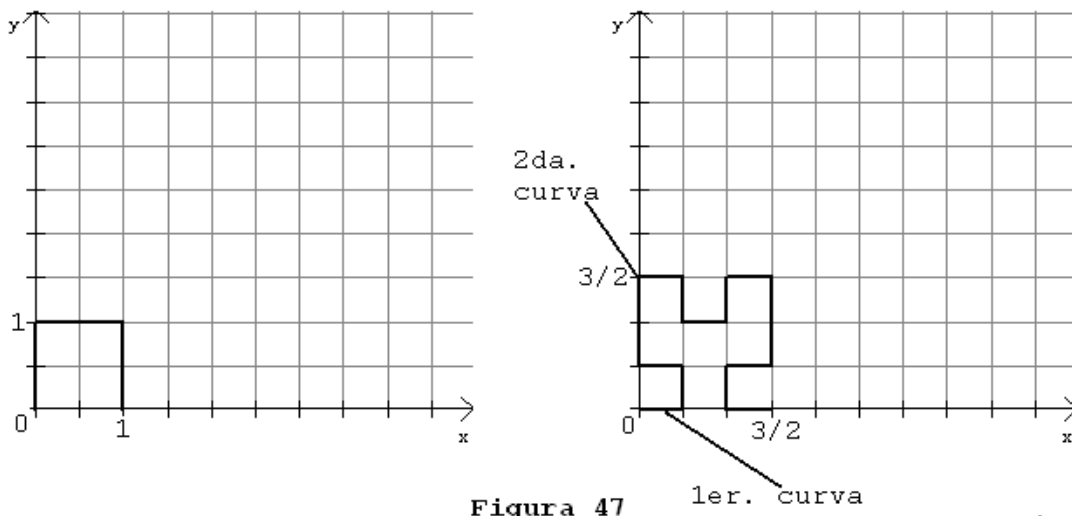


Figura 47

Bien, la primera transformación que presentaremos es aquella que mapea a la figura de la etapa 0, H_0 (lado izquierdo de la figura 47) en la primera curva similar (en sentido antihorario) de la curva de la etapa 1, H_1 . Para ello, es necesario aplicar las siguientes transformaciones:

1. Una transformación de semejanza que reduzca a H_0 a $1/2$ de su tamaño.
2. Rotar la figura anterior por un ángulo $\theta = -90^\circ$
3. Y, finalmente, trasladar por un vector $\vec{t} = (0, 1/2)$

Por lo que, la transformación autoafín requerida es:

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & -\text{sen}(-90^\circ) \\ \text{sen}(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Aplicaremos w en los 4 vértices de H_0 ; para simplificar los cálculos debe entenderse que

$$\begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & -\text{sen}(-90^\circ) \\ \text{sen}(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90 & -(-\text{sen}90) \\ -\text{sen}90 & \cos 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces:

*(0,0):

$$w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

*(0,1):

$$w \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

*(1,1):

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*(1,0):

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las otras tres transformaciones que mapean H_0 en las curvas \square segunda, tercera y cuarta de H_1 , respectivamente, son:

$$1) w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3) w \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\text{sen} 90^\circ \\ \text{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Concluimos diciendo entonces que la curva de Hilbert es, eminentemente, una curva fractal que llena el plano y que, muy a la usanza de todas estas rarezas matemáticas, carece también de derivadas. Este hecho fue demostrado por R. D. Misra en 1934 a partir de las curvas paramétricas $g(t)$ y $h(t)$, con $t \in [0,1]$; de modo que x y y -que representan las componentes de alguna coordenada (x,y) del plano- dependen funcionalmente de g y h de modo tal que cuando t varía en $[0,1]$, lo hacen también las coordenadas (x,y) a lo largo y ancho del cuadrado unitario en el que situamos originalmente la construcción de la curva de Hilbert; esto último puede verificarse en [EVEH85, Págs. 247 – 249] con mucho mayor detalle.¹¹

¹¹ O bien, puede consultarse el apéndice de esta tesis, que contiene construcciones formales de las curvas de Peano y Hilbert además de los argumentos que demuestran se trata de curvas sin derivada alguna; dichos desarrollos son retomados de [SAGH94].

2.2 Sistemas L

2.2.1 Gramáticas

No hay palabras para expresar la dulzura de sentir que existe todo un mundo del que el Yo se halla totalmente ausente.

Sofía Kowalevsky

Para entrar de lleno al tema que nos atañe, empezaremos introduciendo unos pocos conceptos básicos de teoría de lenguajes formales a fin de entender cabalmente el concepto de Gramática sobre el que, a su vez, se formaliza un Sistema L.

Llamaremos *alfabeto* a un conjunto finito y no vacío de símbolos. Un alfabeto puede ser el conjunto $\Sigma = \{0, 1\}$ que tiene dos símbolos, el 0 y el 1; o el conjunto constituido por todas las letras, mayúsculas y minúsculas, del alfabeto español esto es, $\Pi = \{a, b, c, \dots, z, A, B, C, \dots, Z\}$ o el conjunto de los diez dígitos del sistema de numeración indoarábica $\Theta = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, etc.

Una *cadena* en un alfabeto Θ es una n-ada ordenada de símbolos de dicho alfabeto, esto es, es una secuencia de símbolos tomados de Θ . Si Θ es el alfabeto español, $((h, o), l, a)$ es una cadena en Θ y, generalmente y a fin de simplificar, se escribe *hola*. Una cadena se designa también con los términos cuerda o palabra. Ejemplo de cadenas del alfabeto Σ , dado en líneas anteriores, son 0101 ó 111111 ó 000111, etc. El punto es que una cadena es una sucesión de caracteres (símbolos) de longitud variable tomados de un alfabeto previamente definido. La longitud de una cadena ω se denota por $|\omega|$.

Es conveniente señalar que existe una cadena —llamada cadena vacía— que carece de símbolos y que en el argot de la teoría de autómatas y lenguajes formales suele designarse por el símbolo ε o por el símbolo λ .

Se dice que la *concatenación* yw o $y \bullet w$ de las palabras y y w , con $y = \text{dio}$ y $w = \text{rama}$ consiste en anteponer y a w de modo tal que $yw = \text{diorama}$ y $wy = \text{ramadio}$.

Un conjunto de cadenas es un *lenguaje* de un alfabeto Θ sobre el que se construyen las cadenas. Así por ejemplo, si tenemos el alfabeto $\Theta = \{1\}$ podemos aglutinar a las cadenas 1, 11, 111 y 1111 en el lenguaje $L_\Theta = \{1, 11, 111, 1111\}$ se trata, pues, de un lenguaje finito.

Llamamos conjunto universal al conjunto de todas las cadenas que se forman con un determinado alfabeto. Así, por ejemplo, si nuestro alfabeto es $\Sigma = \{0, 1\}$ el lenguaje universal de este alfabeto se denota por Σ^* y se define así $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 00, 000, \dots, 1, 11, 111, \dots, 1010, \dots, 0101, \dots, 100, \dots, 0111, \dots\}$.

Los lenguajes, al ser conjuntos, admiten también las operaciones conocidas en teoría de conjuntos como lo son unión, intersección, diferencia, etc., además de una operación conocida como *concatenación* de lenguajes que no es otra cosa que el producto cartesiano definido entre el lenguaje L_1 y el lenguaje L_2 . De modo que si $L_1 = \{\text{ave, pez}\}$ y $L_2 = \{\text{gato, perro}\}$ la concatenación de L_1 con L_2 se define como

$L_1 \bullet L_2 = L_1 L_2 = \{\text{avegato, aveperro, pezgato, pezperro}\}$. Existe también una operación más conocida como potencia de lenguajes.

La potencia n -ésima de un lenguaje L sobre un alfabeto Θ se define:

$$L^n = \begin{cases} \{\epsilon\}, & \text{si } n = 0 \\ LL^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Véamoslo con un ejemplo. Supóngase que $L = \{11, 00\}$, y se nos pide calcular L^3 . Sabemos que $L^3 = LL^2$ y que $L^2 = LL^1$ y que $L^1 = L\epsilon$; resolviendo estas ecuaciones tenemos:

$$L^1 = L\epsilon = \{11, 00\}\epsilon = \{11\epsilon, 00\epsilon\} = \{11, 00\}$$

$$L^2 = LL^1 = \{11, 00\}\{11, 00\} = \{1111, 1100, 0011, 0000\}$$
 y, finalmente,

$$L^3 = LL^2 = \{11, 00\}\{1111, 1100, 0011, 0000\} = \{111111, 111100, 110011, 110000, 001111, 001100, 000011, 000000\}$$

$$\text{es decir, } L^3 = \{111111, 111100, 110011, 110000, 001111, 001100, 000011, 000000\}$$

Las otras operaciones de teoría de conjuntos se definen, para lenguajes, igual que para conjuntos.

Finalmente, definimos dos lenguajes especiales que se construyen sobre cualquier lenguaje:

1. Cerradura de Kleene o Cerradura de Estrella para un lenguaje L sobre un alfabeto Θ que se define:

$$L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$$

2. Cerradura positiva sobre un lenguaje L que se define:

$$L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$$

Obsérvese que $L^+ = L^* - \epsilon$.

Vamos a retomar el ejemplo que se dio al especificar potencia de un lenguaje para terminar de comprender estas dos últimas definiciones. Si $L = \{11, 00\}$, entonces

$$L^* = \{\epsilon, 11, 00, 1111, 1100, 0011, 0000, 111111, 111100, 110011, 110000, 001111, 001100, 000011, 000000, \dots\}$$

Y

$$L^+ = \{11, 00, 1111, 1100, 0011, 0000, 111111, 111100, 110011, 110000, 001111, 001100, 000011, 000000, \dots\}$$

Ahora bien, el problema fundamental de la teoría de lenguajes es decidir, dado un lenguaje, si una determinada cadena pertenece o no al mismo e, inversamente, listar todas las cadenas que pertenecen a un lenguaje; como esto

último no es siempre posible –ya que existen lenguajes no finitos- se pretende entonces encontrar alguna expresión que englobe a todas las posibles cadenas pertenecientes al susodicho lenguaje. Es en esta dirección que para especificar lenguajes, esto es, para indicar -si no todas sus palabras, sí por lo menos la forma de las mismas-, se utilizan con mayor generalidad los siguientes tipos de modelos abstractos: las expresiones regulares, los autómatas finitos deterministas, los autómatas finitos no deterministas, las gramáticas y, finalmente, las máquinas de Turing para lenguajes de mayor complejidad.

En este caso, nos situaremos en las gramáticas como especificadores de lenguajes. Una gramática es, entonces, un conjunto de reglas que permiten construir frases en un lenguaje de modo que sólo las cadenas que pueden construirse a partir de las reglas que constituyen una gramática pertenecen al lenguaje $L(G)$ generado por dicha gramática. El quid de una gramática es la especificación de un número no necesariamente finito de frases a partir de un conjunto finito de reglas (producciones).

Empecemos con ejemplos del habla ordinaria para definir después de manera formal el concepto de Gramática.

La oración *El gato mira la Luna* posee un sujeto y un predicado, a su vez, dicho sujeto se conforma de un artículo y de un sustantivo (y podría también contar con un adjetivo); el predicado posee un verbo y un objeto directo (y podría también poseer un adverbio circunstancial). En general, para oraciones de este tipo se tiene la estructura:

<sujeto><predicado>

Y el sujeto tiene la estructura:

<artículo><sustantivo><adjetivo>

Y el predicado tiene la estructura:

<verbo><objeto directo>

Si se nos pidiera, a partir de estas estructuras, generar la oración inicial, lo único que tendríamos que hacer es reescribir las componentes de la estructura inicial (<sujeto><predicado>) por sus respectivas estructuras (desde luego que esto es recursivo). Así, tendríamos la gramática

1. <oración> ::= <sustantivo><predicado>
2. <sujeto> ::= <artículo><sustantivo><adjetivo>
3. <predicado> ::= <verbo><objeto directo>
4. <artículo> ::= el | la | los | las
5. <sustantivo> ::= gato | perro | niño
6. <adjetivo> ::= feliz | solitario | inquieto | ϵ
7. <verbo> ::= mirar | sonreír | estudiar
8. <objeto directo> ::= la luna | al ave | la luna felizmente | al ave con curiosidad

El símbolo “::=” significa “se define como” y se utiliza a la usanza de la forma Backus – Naur (BNF) aunque en su lugar puede también utilizarse la flecha \rightarrow ; el hecho de que las componentes de la estructura de la oración estén encerradas entre los corchetes triangulares “<>” significa que cada componente puede ser sustituida por los elementos que aparecen en el lado derecho de las reglas de producción; las reglas de producción son las que aparecen numeradas del 1 al 8. El símbolo “|” se lee “o” y significa, por ejemplo, que un <artículo> –de acuerdo a esta gramática- puede ser el, la, los o las.

Esta gramática nos está indicando las reglas para generar oraciones del tipo de la inicial. Comencemos con la reescrituración:

<oración> => <sujeto><predicado>
 => <artículo><sustantivo><adjetivo><predicado>
 => <artículo><sustantivo><verbo><objeto directo>
 => el <sustantivo><verbo><objeto directo>
 => el gato <verbo><objeto directo>
 => el gato mira <objeto directo>
 => el gato mira la luna.

A la notación que se ilustra en el párrafo anterior se le llama derivación y las formas que aparecen del lado derecho reciben el nombre de formas sentenciales. Cada forma sentencial es obtenida a partir de la forma sentencial anterior aplicando alguna de las reglas de producción. La última forma sentencial, aquella en donde ya no es posible reescribir (hacer sustituciones) se llama frase o sentencia; en este caso se derivó la frase: El gato mira la Luna. Con esta gramática podríamos también construir, por ejemplo, el enunciado *el gato mira la Luna felizmente*.

Estamos en condiciones de definir una gramática formal. Una gramática formal es una 4-dupla $G = (N, T, P, S)$, donde:

N es un conjunto finito de símbolos no terminales.

T es un conjunto de símbolos terminales tal que $N \cap T = \emptyset$

P es el conjunto de las reglas de producción; trátase de un conjunto finito y

S es el símbolo inicial o axioma y verifica $S \notin (N \cup T)$

Una regla de producción o, llanamente, producción es un par ordenado de cadenas (α, β) que también puede escribirse $\alpha \rightarrow \beta$ en donde $\alpha \rightarrow \gamma A \rho$ con $A \in N$ en donde α, β y γ son subcadenas sobre $(N \cup T)$ y, dependiendo del tipo de gramática, puede ocurrir que β, γ y ρ sean cadenas vacías. Además, $\alpha \in (N \cup T)^+ \cup \{S\}$ y $\beta \in (N \cup T)^*$.

Una cadena $\omega \in (N \cup T)^*$ es una forma sentencial de una gramática si existe una derivación que, partiendo de S, genere ω . Una derivación gramatical de una frase consiste en ir reescribiendo las formas sentenciales, empezando por el símbolo inicial S, con arreglo a las diferentes producciones que constituyen a G.

Se dice que ω_k es derivable de ω_0 , lo cual se denota por $\omega_0 \Rightarrow^* \omega_k$, si $\omega_0 \Rightarrow \omega_1 \Rightarrow \omega_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \omega_k$, esto es, si ω_k puede derivarse de ω_0 en un número finito de pasos.

Veamos algunos ejemplos.

1. $G = (N, T, P, S)$

con $N = \{N, D\}$

$T = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ y

$P =$

{

1. $S \rightarrow D$

2. $D \rightarrow DN$

3. $D \rightarrow N$

4. $N \rightarrow 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9$

}

Derivemos un par de frases en esta gramática:

i. $S \xRightarrow{1} D \xRightarrow{2} DN \xRightarrow{3} N \xRightarrow{4} 9$

ii. $S \xRightarrow{1} D \xRightarrow{2} DN \xRightarrow{2} DNN \xRightarrow{2} DNNN \xRightarrow{3} NNNN \xRightarrow{4} 1521$

iii. $S \xRightarrow{1} D \xRightarrow{2} DN \xRightarrow{2} DNN \xRightarrow{3} NNN \xRightarrow{4} 326$

iv. $S \xRightarrow{1} D \xRightarrow{2} DN \xRightarrow{2} DNN \xRightarrow{2} DNNN \xRightarrow{2} DNNNN \xRightarrow{2} DNNNNN$

$\xRightarrow{2} DNNNNNN \xRightarrow{2} DNNNNNNN \xRightarrow{3} NNNNNNNN \xRightarrow{4} 21625318$

Resulta claro que deriva en cadenas o frases de enteros de tamaño arbitrario. El número que aparece en la parte superior del símbolo \Rightarrow indica el número de la regla de producción utilizada para pasar de la forma sentencial antecedente a la actual.

2. $G = (N, T, P, S)$

con $N = \{A\}$

$T = \{0,1\}$ y

$P =$

{

1. $S \rightarrow AA$

2. $A \rightarrow 00$

3. $A \rightarrow 11$

}

Derivemos un par de cadenas:

i. $S \xRightarrow{1} AA \xRightarrow{2} 00A \xRightarrow{2} 0000$

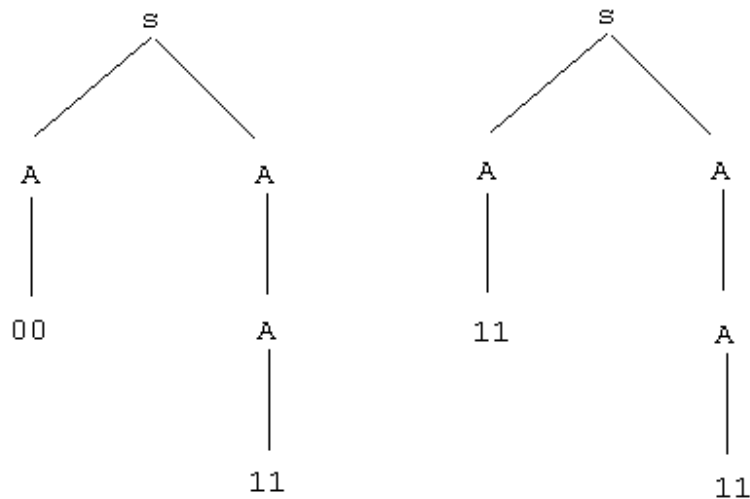
ii. $S \xRightarrow{1} AA \xRightarrow{2} 00A \xRightarrow{3} 0011$

iii. $S \xRightarrow{1} AA \xRightarrow{3} 11A \xRightarrow{3} 1111$

iv. $S \xRightarrow{1} AA \xRightarrow{3} 11A \xRightarrow{2} 1100$

De hecho, para esta gramática las únicas cadenas derivables son 0000, 0011, 1100 y 1111 por lo que $L(G) = \{0000, 0011, 1100, 1111\}$. Nótese cómo el conjunto T de una gramática coincide con los símbolos del alfabeto Θ sobre el que está construido el lenguaje.

Existe una forma bastante útil de mostrar el modo en que se deriva cierta cadena a partir de una gramática; dicha forma hace uso de los árboles de derivación o árboles sintácticos. El siguiente esquema, nos ayudará a ejemplificar su uso.



Árbol de derivación

El árbol de derivación gramatical de la izquierda genera la cadena 0011; mientras que el de la derecha, 1111. ¿Cómo funcionan estos árboles? Bien, por principio de cuentas el nodo raíz se etiqueta siempre con el axioma o símbolo de inicio, el resto de nodos se etiqueta con símbolos que pertenecen a $(N \cup T)$; cuando un nodo intermedio está etiquetado con algún símbolo no terminal sus nodos descendientes deben leerse, de izquierda a derecha, como una producción en la Gramática; sólo los nodos hoja (los que ya no tienen más descendientes) pueden estar etiquetados con la cadena vacía ϵ por supuesto que esto no quiere decir que todos los nodos hoja estarán etiquetados con el símbolo ϵ ; por lo regular, los nodos hoja están etiquetados con símbolos terminales. Los árboles resultan verdaderamente útiles sólo para gramáticas tipo 2 o tipo 3, pero ¿cuántos tipos de gramáticas se han clasificado? Veamos.

Gramáticas tipo 0 (No restringidas)

En estas gramáticas no hay restricción alguna en cuanto a la forma de la producción. Para una producción de la forma $\alpha \rightarrow \beta$, α puede estar conformada tanto de terminales como de no terminales excepto, claro, $\alpha = \epsilon$. Además, β , al igual que α puede contener tanto terminales como no terminales y, en oposición a α , β sí puede ser igual a la cadena vacía ϵ lo que significa que, de una forma sentencial a otra, puede desaparecer algún símbolo no terminal; a este tipo de gramáticas se les denomina gramáticas contraíbles y sólo las gramáticas tipo 0 son de esta naturaleza. Estas son, propiamente, las gramáticas de estructura de frase.

Gramáticas tipo 1 (Sensitivas al contexto)

Una gramática tipo 1 es aquella en la que el lado izquierdo de una producción tiene la forma $\delta\alpha\mu \rightarrow \alpha\beta\phi$ donde α es un símbolo no terminal y δ, μ, β, ϕ pueden ser terminales o no terminales. En las gramáticas sensitivas al contexto, las producciones nos indican restricciones al momento de reescribir una o más de sus formas sentenciales, esto es, se hace la sustitución para ciertas formas sentenciales sólo si algunas de las subcadenas, en concreto, si algún símbolo no terminal de las mismas, aparece acompañado de ciertas otras subcadenas.

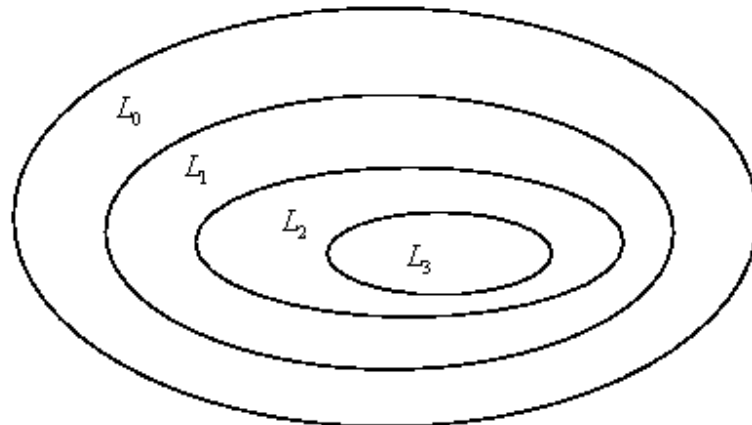
Gramáticas tipo 2 (Gramáticas libres del contexto)

Las producciones son de la forma $\alpha \rightarrow \beta$ donde α puede ser un símbolo no terminal o el símbolo inicial y $\beta \in (N \cup T)^*$.

Gramáticas tipo 3 (Gramáticas regulares)

Estas gramáticas se distinguen porque el lado derecho de sus producciones tiene, a lo más, dos símbolos, uno terminal y el otro no terminal.

A esta clasificación de gramáticas se le conoce como Jerarquía de Chomsky. El siguiente esquema, tomado de [BROJG99], ilustra el hecho de que el lenguaje generado por una gramática tipo 0 es el más general de los lenguajes y, por tanto, contiene los lenguajes generados por las gramáticas tipo 1, 2 y 3.



Esquema 1

Antes de concluir, haremos hincapié en una característica de las Gramáticas que, por la naturaleza recursiva de los fractales, resulta bastante oportuna, se trata de la recursión. Se dice que una gramática es *recursiva*, si en cualquiera de sus producciones, el símbolo no terminal que aparece en el antecedente o parte izquierda de la producción aparece también en el consecuente o parte derecha de la producción, ya sea como símbolo único o acompañado de algunos otros; *id est*, decimos que una gramática es *recursiva* en β con $\beta \in N$, si \exists una producción P_i tal que $\beta \rightarrow \delta\beta\gamma$. Este rasgo, permitirá que ese símbolo no terminal pueda ser reescrito por sí mismo una cantidad indefinida de veces y coincide, como ya se dijo, con la propiedad recursiva de los fractales que será útil al momento de implementarlos con Sistemas L. Tómese la siguiente gramática como un ejemplo de gramática recursiva.

$$G = (N, T, P, I)$$

$$\text{con } N = \{A\}$$

$$T = \{a, b\} \text{ y}$$

$$P =$$

$$\{$$

1. $I \rightarrow aA$
2. $I \rightarrow aI$
3. $A \rightarrow ab$

$$\}$$

El tema de las gramáticas es bastante más vasto, sin embargo, se han plasmado aquí únicamente los conceptos mínimos necesarios para poder definir al final de este capítulo el concepto de Sistema L. Finalmente y con miras a contextualizar, se comenta que los trabajos en teoría de lenguajes vinculados con gramáticas fueron posibles gracias al establecimiento de las gramáticas de estructura de frase propuestas por Noam Chomsky en 1957 quien, indiscutiblemente, es un genio intelectual de nuestros tiempos; sin embargo, sería injusto omitir los nombres de otros lingüistas que divulgaron con ahínco didáctico las ventajas y simplicidad de utilizar gramáticas estructurales en oposición a la gramática tradicional. Nombres como el del venezolano Andrés Bello quien en el XIX difundió estas ideas en Latinoamérica son imprescindibles. El concepto de gramática como un agregado de estructuras que generan un lenguaje es una idea que permeó de inmediato en los ámbitos lingüísticos contemporáneos y es hoy en día una forma asaz arraigada de enseñar lenguas. Sin embargo, lo que particularmente cabría preguntarse es ¿sospecharían estos hombres que sus estudios formarían parte de una geometría otrora inescrutable?

2.2.2 El lenguaje Logo. Instrucciones básicas

- ¿Ya has visto a la Falsa tortuga?
- No –dijo Alicia-. Ni siquiera sé lo que es.
- Es de lo que se hace la sopa de Falsa Tortuga –dijo la Reina.
- Nunca la he visto ni he oído hablar de ella –dijo Alicia.
- Ven, entonces –dijo la Reina-, y te contará su historia.

Alicia en el país de las maravillas, Lewis Carroll

Como se verá después de esta sección, un sistema L contiene un conjunto de instrucciones que especifican en pocas líneas todo el detalle de una determinada construcción geométrica. Los comandos de trazado del lenguaje de programación Logo ofrecen una manera natural de especificar dichas instrucciones y es por ello que se esbozan aquí, concisamente, dichos comandos además de los esenciales para la programación con este lenguaje. Estos comandos son útiles para el modelado de un sistema L, de hecho, en la literatura existente sobre Sistemas L, dichos comandos de trazado reciben el nombre de “trazos tipo tortuga” o “turtle graphics”. Daremos una breve reseña histórica de Logo y, a continuación, la descripción de los comando de tortuga.

El lenguaje de programación Logo surge como parte del trabajo de un grupo de investigadores del MIT (Massachusetts Institute of Technology) encargado del Laboratorio de Inteligencia Artificial del mismo. Entre sus miembros se encontraban Seymour Papert, Wallace Feurzeig y D. Bobrow que son co-creadores de Logo.

Logo es un dialecto del lenguaje LISP que, en adición a este último, incorpora la filosofía constructivista de enseñanza destinada a que sea el propio educando el que construya los cimientos y el edificio completo del conocimiento que adquiere: *El constructivismo ve al conocimiento como creación de los aprendices en sus propias mentes mediante la interacción con otra gente y con el mundo a su alrededor. Esta teoría está asociada más cercanamente con Jean Piaget, el psicólogo suizo, quien dedicó décadas estudiando y documentando el proceso de aprendizaje de niños pequeños [5] y*

[6], es debido a esto que Logo fue concebido con miras a facilitar el aprendizaje, de allí que sea también utilizado por niños y que tanto en escuelas primarias como en proyectos de Informática Educativa sea Logo el lenguaje preferido para la enseñanza.

Logo es, en esencia, un lenguaje orientado a Geometría, sin embargo es útil para aplicaciones en ciencia, robótica, simulaciones, música, etc. Su principal cualidad es su flexibilidad, ello permite que al mismo tiempo que es aprendido por niños de educación primaria, sea también potente para aplicaciones complejas creadas por programadores expertos.

La característica más distintiva de Logo es su Tortuga; la Tortuga de Logo no es otra cosa que un cursor gráfico que es manipulado de diversas formas a fin de que trace en la interfaz gráfica el dibujo deseado; para manipular a la tortuga es necesario conocer los movimientos básicos que ésta puede realizar y los comandos asociados a dichos movimientos. La tabla No. 5 los resume:

Comando en Logo	Sintaxis	Forma abreviada
Avanzar	forward	fd
Retroceder	back	bk
Girar Izquierda	left	lt
Girar Derecha	right	rt

Tabla No. 5

Cada uno de estos comandos va acompañado de un argumento que le indica a la tortuga cuántos pixeles avanzar y/o retroceder y hacia qué dirección moverse. Así:

Instrucción	Significado
fd 100	La tortuga avanza 100 pixeles hacia delante.
rt 90	La tortuga gira por un ángulo de 90° hacia la derecha.
bk 120	La tortuga retrocede 120 pixeles.
lt 45	La tortuga gira un ángulo de 45° a la izquierda.

Tabla No. 6

La interfaz de Logo se subdivide en una interfaz gráfica, por un lado, en cuyo origen aparece la tortuga; por el otro lado, en una interfaz de línea de comandos desde donde se teclean las instrucciones.

Para trabajar en Logo es conveniente tener presente que la pantalla de la interfaz gráfica equivale al plano cartesiano. Cuando la tortuga se encuentra en el origen de la pantalla –coordenada (0,0)- se dice que se halla en la posición `home`. En las versiones más recientes de Logo –como ocurre con MSWLogo- la tortuga se simboliza por un pequeño triángulo cuyo centro de la base coincide con el origen del plano y el vértice opuesto apunta hacia la trayectoria que ha de efectuar una vez que le sea indicada. Suponiendo que la tortuga se halle efectivamente en la posición `home`, la tortuga en la interfaz gráfica de logo mostraría los desplazamientos de las figuras 48 y 49 para la siguiente sucesión de comandos:

```
home
forward 50
left 90
forward 50
```

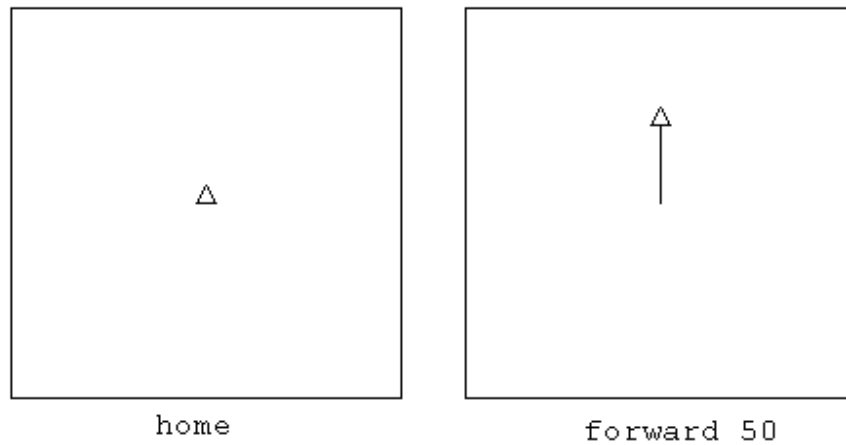


Figura 48

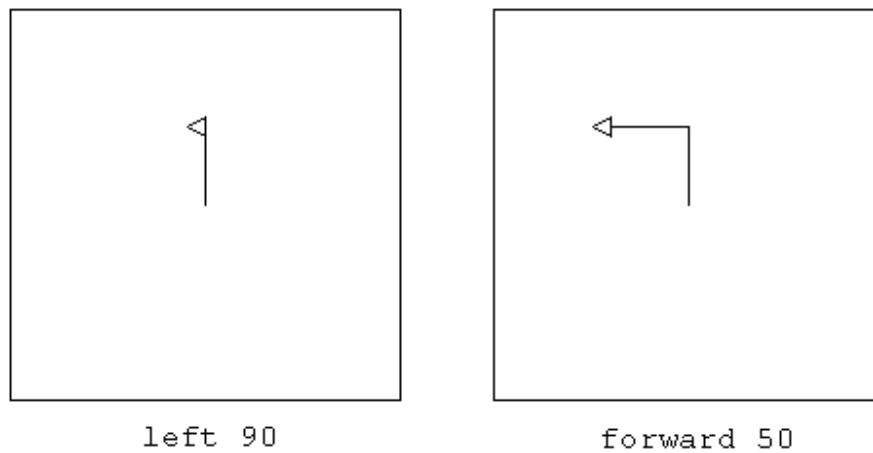


Figura 49

Las instrucciones hasta aquí vistas son sólo comandos de trazado básicos de Logo; el lenguaje ofrece, además, otros comandos cuya utilización es sobre todo conveniente para el modo edición en el que es posible ya definir procedimientos. A continuación se comentan sólo los esenciales.

Todo procedimiento en Logo se encierra entre los términos `to` y `end`. Si, por ejemplo, definimos el procedimiento `traza` que hace que la tortuga trace una recta de 50 pixeles partiendo de `home` tendríamos:

```
to traza
  fd 50
end
```

Para que este procedimiento entre en acción basta con teclear el nombre del mismo en la línea de comandos seguido de un `enter` o del botón `execute`.

Logo también trabaja con ciclos, para tal efecto se cuenta con el comando `repeat`. El procedimiento `cuadrado`, contiene un ciclo `repeat` que nos permite trazar un cuadrado de 200 pixeles de lado. Veamos:

```
to cuadrado
  repeat 4[fd 200 lt 90]
end
```

El número que precede al texto encerrado entre corchetes indica cuántas veces se repetirá dicho texto; en este caso, 4 veces.

Para definir una variable en Logo se utiliza el comando `make`, seguido de un espacio, el nombre de la variable, otro espacio y luego el valor de la misma. La sintaxis es:

```
make "nombre_variable valor_variable
```

Para acceder al valor de una variable basta con anteponerle el símbolo “:”. Con la sintaxis:

```
:nombre_variable
```

En nuestro procedimiento cuadrado podemos establecer la longitud de los lados del mismo, introduciendo una variable, `lado`. Así:

```
to cuadrado
  make "lado 200
  repeat 4[fd :lado lt 90]
end
```

Este procedimiento opera justamente igual que el anterior. Ahora bien, si deseamos hacer realmente variable la longitud de los lados del cuadrado de modo tal que sea el usuario quien elija dicho valor, será suficiente con asignar, desde teclado, el valor de la variable `lado`; para ello es necesario añadir a la primera línea del procedimiento el nombre de la variable precedido por el signo de dos puntos, esto es, por “:”, es decir:

```
to cuadrado :lado
  repeat 4[fd :lado lt 90]
end
```

Como se está añadiendo el valor de “lado” desde la línea de comandos, ya no es necesario declarar la variable con `make` dentro del procedimiento. Si se desea que la longitud de los lados del cuadrado sea de 250 pixeles tendríamos que teclear desde línea de comandos:

```
cuadrado 250
```

Otro de los comandos en Logo, esencial para la tarea de programar, es el comando `if` que nos permite hacer bifurcaciones dentro del programa. El comando `if` tiene la siguiente sintaxis:

```
if condición [sentencia que se ejecuta si condición es verdadera]
```

Supongamos que en la última versión del procediendo `cuadrado` condicionamos al usuario a que la longitud de los lados del mismo sea menor a 400 pixeles a modo de que el mismo sea siempre visible dentro de la pantalla gráfica, tendríamos entonces:

```
to cuadrado :lado
  make "letrero "Muy_largo...
  if :lado > 400 [print :letrero]
  repeat 4[fd :lado lt 90]
end
```

Para poder comenzar a realizar gráficos en Logo es suficiente con la introducción que se ha dado aquí. Por lo general, muchas de las versiones de Logo incluyen un tutorial que dilucida de manera muy clara dudas que se

tengan en relación a este lenguaje. Sin embargo, en el Apéndice B de esta tesis se presentan algunos operadores matemáticos de Logo útiles para la programación de diversos problemas geométricos.

2.2.3 Definición de Sistema L

En la unidad original del ser primero,
está contenida la causa secundaria de
todos los seres, así como el germen
de su inevitable destrucción.

Edgar Allan Poe, *Eureka*

Un Sistema L es un sistema basado en las gramáticas de estructura de frase propuestas por Noam Chomsky y difiere de estas últimas, esencialmente, en el modo en el que son aplicadas las producciones; se les conoce como Sistemas L en honor al biólogo Aristid Lindenmeyer quien en 1968 los utilizó por primera vez para modelar el crecimiento de ciertos organismos biológicos. En los últimos años, y debido a la analogía que presentan las formas sentenciales de estos sistemas con los comandos de trazado de lenguaje Logo (y, en general, con los trazos tipo tortuga) –que, entre otras cosas, permite graficar curvas fractales-, los Sistemas L son utilizados para generar también dichas curvas. Además, entre los rasgos en común que se conservan entre un Sistema L y una Gramática, se encuentra el de recursividad, rasgo también inherente a un fractal.

Profundicemos un poco más en las diferencias entre gramáticas y Sistemas L. Para empezar, no se definen claramente los símbolos terminales de los no terminales ya que, por el origen de estos sistemas, una regla de reescritura o producción indica el paso evolutivo de una etapa del organismo vivo a otra; por ejemplo, si se modela el crecimiento de una amiba, la última regla de producción puede asignar al símbolo a –que simboliza el último estadio evolutivo de la amiba– la cadena vacía ϵ , en donde la misma representa la muerte de la amiba. La otra diferencia sustancial radica en la forma en que se aplican las producciones; en una gramática, la producción de una forma sentencial en otra modifica uno y sólo un símbolo del alfabeto; mientras que en los Sistemas L, de una forma sentencial a otra, puede reescribirse más de un símbolo. Así, la gramática

$$G = (N, T, P, S)$$

con $N = \{A\}$ y

$$T = \{0,1\}$$

$P =$

{

$$1. S \rightarrow AA$$

$$2. A \rightarrow 00$$

$$3. A \rightarrow 11$$

}

Generaría la cadena 0011 en tres pasos: $S \xRightarrow{1} AA \xRightarrow{2} 00A \xRightarrow{3} 0011$ (recuérdese que los números sobre los símbolos \Rightarrow indican únicamente el número de la producción que se aplicó) y cuyo árbol de derivación se ilustra en la figura 50.

Mientras que con un Sistema L, esta misma cadena se genera en dos pasos: $S \xrightarrow{1} AA \xrightarrow{2,3} 0011$; el árbol de derivación para la producción de esta cadena se muestra en la figura 51.

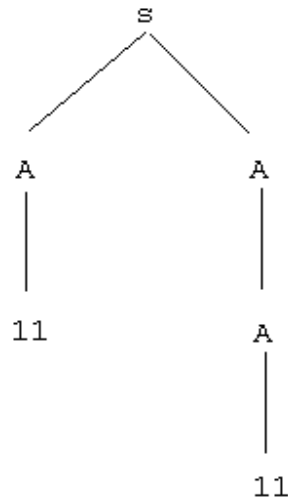


Figura 50

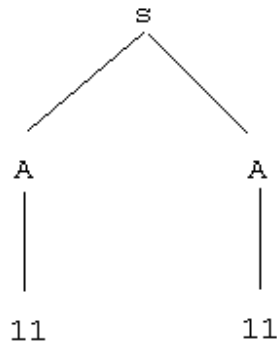


Figura 51

Definimos formalmente un Sistema L como una representación formal que consta de los siguientes elementos:

1. Un conjunto finito de símbolos Σ llamado *alfabeto*.
2. Un símbolo iniciador o, más comúnmente, *axioma* constituido por una cadena $\alpha \in \Sigma^+$.
3. Un conjunto de reglas de reescritura o *producciones* P , en donde cada *producción* ρ mapea un símbolo $a \in \Sigma$ en una cadena $\omega \in \Sigma^*$ que en notación funcional se denota como:

$$\rho: a \rightarrow \omega$$

Existen, además, diversas categorías dentro de los Sistemas L. Así, tenemos:

➤ **Sistemas 0L:**

Los sistemas 0L representan el grado 1 de simpleza dentro de la jerarquía de los Sistemas L pues se trata de sistemas de libre contexto; el 0 precediendo a la L refiere al término “0-interacciones” que alude a la ausencia de interacción de un organismo biológico con otro; por ejemplo, si el organismo no se ha apareado con otro de su misma especie, esto se traduce en una ausencia de interacción sexual con otro organismo y eso, llanamente, conduce a la aplicación de cierta regla de reescritura que modela la siguiente etapa en la vida de dicho organismo. En estos sistemas aparecen únicamente reglas del tipo $a \rightarrow \omega$ en concordancia con las gramáticas tipo 2.

➤ **Sistemas D0L (0L determinísticos):**

Los sistemas D0L además de ser de libre contexto, son también sistemas determinísticos lo que, en términos prácticos, significa que existe una sola regla de reescritura para determinado símbolo; esta situación es análoga al comportamiento de un AFD (Autómata Finito Determinista) en los que la función de transición de cada símbolo del alfabeto es verdaderamente una función, esto es, asigna una sola transición para cada símbolo del alfabeto. La ilustración 52 especifica el comportamiento de cualquier producción dentro de estos sistemas. Dicha ilustración es un diagrama de transición e indica que si nuestra cadena (forma sentencial o, quizá, organismo) se encuentra en la i -ésima etapa de su construcción o desarrollo se aplicará exclusivamente la producción ρ_i para $a \in \Sigma$. En el

Apéndice C de esta tesis se ahonda de forma sucinta sobre las máquinas teóricas conocidas como Autómatas Finitos Deterministas y Autómatas Finitos No Deterministas, conocimiento útil para comprender mejor el desempeño del diagrama de transición de la ilustración 52.

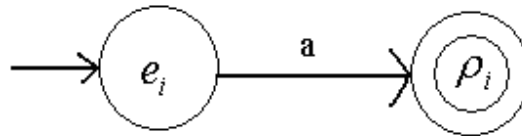


Figura 52

➤ **Sistemas OL estocásticos:**

Para este tipo de sistemas, a diferencia de los DOL, se presenta más de una producción para un determinado símbolo, de tal manera que la ocurrencia de una producción u otra viene asociada a una probabilidad. Estos sistemas se definen entonces como una 4-dupla $(\Sigma, \alpha, P, \varphi)$ en donde φ es la distribución de probabilidad que asigna distintas probabilidades de ocurrencia a cada una de las producciones. Este tipo de sistemas también tienen su símil dentro de las máquinas de estado finito, se trata de los AFND (Autómata Finito No Determinista) cuyo conjunto de posibles transiciones admite más de una transición para un determinado símbolo; la figura 53 muestra dicho comportamiento que en contraste con el diagrama de transición anterior exhibe cómo, dentro de estos sistemas hay, por lo menos, dos producciones para un mismo símbolo.

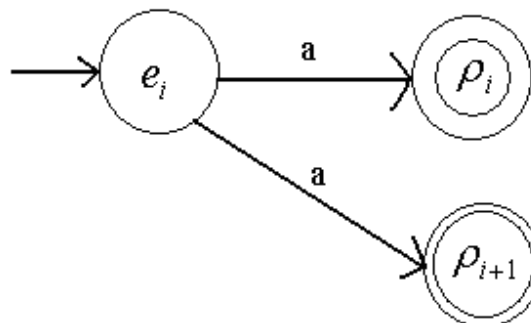


Figura 53

➤ **Sistemas L paramétricos:**

Un problema que presentan los Sistemas L en los que se manejan instrucciones tipo tortuga, radica en que la longitud de los segmentos subsiguientes al segmento iniciador son siempre múltiplos del mismo; para solucionar esta limitante, se adiciona un elemento más al Sistema L consistente en un conjunto de parámetros formales que permiten variar la longitud de los segmentos no iniciales y que pueden ser expresiones lógicas y/o aritméticas; la sintaxis de una regla de producción es del tipo $\omega(x, y): c \rightarrow \omega(X, Y)$ en donde la cadena antes de los dos puntos es el módulo formal predecesor de la producción, la c simboliza una condición e Y y X son expresiones aritméticas o lógicas. Asimismo, las cadenas paramétricas consisten en un conjunto de módulos con símbolos que representan parámetros propios del sistema

Existen otros tipos de Sistemas L como los sistemas TL –la T refiere a las tablas de decisión que se utilizan- y los sistemas IL –IL significa Sistemas L de contexto sensitivo- que fueron ideados, ex profeso, para modelar

comportamientos muy definidos de ciertos organismos biológicos. En [CERR02], que tiene un enfoque biologicista, se ofrece la descripción de este tipo de sistemas.

Hasta este momento resulta notable la potencialidad que ofrece un Sistema L pues, como mencionamos en la introducción, contiene de forma codificada toda la información necesaria no sólo para el crecimiento de un organismo vivo, sino –y más importante para los fines de esta tesis-, para la construcción de alguna curva fractal del tipo de las estudiadas aquí, esto es, para la construcción de teragones y curvas que llenan el plano. La utilidad de este tipo de representaciones formales para la construcción de fractales radica en la posibilidad que brindan para definir, de manera recursiva, ciertas “partes” del objeto fractal que se está elaborando. Veamos algunos ejemplos.

2.2.4 Ejemplos: Serie Fibonacci, Curva de Koch, Curva de Hilbert y Curva de Peano

Que tú llegues del cielo o el infierno, ¿qué importa?
Belleza, inmenso monstruo, pavoroso e ingenuo,
Si tu mirar, tu pie, tu risa, me abren las puertas
De un infinito que amo y nunca conocí.

Himno a la Belleza, Charles Baudelaire

➤ Sistema L de la Serie Fibonacci

Leonardo de Pisa, apodado Fibonacci¹² por Guillaume Libri, escribió hacia el año 1202 un libro titulado *Liber Abaci* que abarca diversos temas importantes de aquella época como el relacionado a resolver operaciones aritméticas con números indoarábicos. El libro contiene, además, muchos otros problemas entre los que destaca el asociado con el surgimiento de la serie Fibonacci.

Si se elige este Sistema L como primer ejemplo, se debe a la sorprendente coincidencia que se da entre las cadenas generadas por las reglas de producción del sistema con los términos de la serie Fibonacci y, más aún, a que ¡la serie de números Fibonacci es el resultado de la solución que dio Leonardo de Pisa a un problema relacionado con crecimiento poblacional de conejos! He aquí el planteamiento:

- 1) Se tiene una pareja de conejos (macho y hembra) de un mes de edad que madurará a partir de los dos meses de edad.
- 2) Cada mes, a partir del segundo, nace una nueva pareja de conejos.
- 3) Toda pareja de conejos podrá reproducirse a partir del momento en que alcanza su madurez (a los dos meses, como la primera).
- 4) Ninguna de las parejas puede morir.

La pregunta es, ¿cuántas parejas de conejos habrá al principio de cada mes? Analizando la situación podemos resolver esta pregunta. Durante el primer mes tendremos sólo 1 pareja de conejos (la pareja joven de la que descenden todos los demás), en el segundo mes seguiremos teniendo, nuevamente, 1 sola pareja (ya que es a partir del segundo mes que madura la pareja); en el tercer mes la cosa ya cambia y tenemos 2 parejas –la primera y los hijos que acaban de tener-; durante el tercer mes sumamos una pareja más al número de parejas del mes anterior porque cada mes a partir del segundo nace, religiosamente, otra pareja de conejos; entonces en el tercer mes tenemos 3 parejas de conejos. En el cuarto mes tenemos: la pareja inicial + la primera pareja que tuvieron en el

¹² Fibonacci quiere decir “hijo de la bondad”. Sin embargo, Fibonacci es la contracción de “hijo de Bonacci” (figlio di Bonacci) que es el nombre del padre de Fibonacci.

segundo mes + la segunda pareja del tercer mes + la tercer pareja del cuarto mes + la primer pareja de la pareja que tuvieron en el segundo mes = 5 parejas, esto es, se tienen 2 parejas más que las del tercer mes. En el quinto mes, se tendrán las 5 parejas que se tenían hasta el cuarto mes más 3 parejas: la cuarta pareja del quinto mes + la segunda pareja de la pareja que tuvieron en el segundo mes + la primer pareja de la pareja que tuvieron en el tercer mes. De modo que en el quinto mes se tienen ya 8 parejas. Si representamos esto con un diagrama de árbol (ver Fig. 54), de manera que cc simboliza a las parejas jóvenes de conejos y CC simboliza a las parejas que han alcanzado ya la madurez, tenemos entonces que a partir de la estructura de árbol resulta notable que el número de parejas de conejos es igual a 1 para los primeros dos meses, para el tercer mes sumamos las parejas anteriores y obtenemos 2 parejas; para el cuarto, sumamos el número de parejas de los meses que le preceden y así sucesivamente. Tomando cada uno de los números que representa el número de conejos al inicio de cada mes, se obtiene la sucesión de números de Fibonacci, esto es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., esto es:
cc, cc, CCcc, CCcccc, CCccccCCcc, CCccccCCccCCcccc, ...

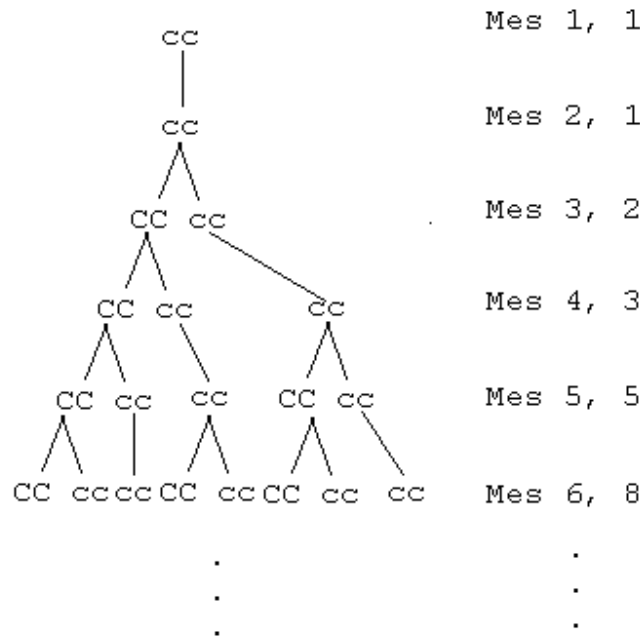


Figura 54

De modo que la definición de esta serie, junto con la relación de recurrencia que la genera, está dada por:

$$f_1 = 1, f_2 = 1 \text{ y } f_{k+1} = f_{k-1} + f_k, \text{ para } n \geq 2$$

El árbol, además, presenta las *regularidades* que se explican a continuación:

- A partir del tercer nivel del árbol ocurre que si al tomar un tramo cualquiera de alguna trayectoria del mismo tenemos dos nodos consecutivos de dicha trayectoria etiquetados con los símbolos cc, entonces uno de los nodos siguientes de dicha trayectoria aparecerá etiquetado con los símbolos CC.

- Un nodo etiquetado con los símbolos CC siempre tiene dos hijos por descendencia, representados por los nodos con etiquetas cc y CC.

Resulta posible implementar un Sistema L para la serie de Fibonacci, dicho sistema se define como un Sistema L (V, α, P) en donde:

$$V = \{cc, CC\}$$

$$\alpha = cc \text{ y}$$

$$P =$$

{

$$P_1 : cc \rightarrow CC$$

$$P_2 : CC \rightarrow CCcc$$

}

Generemos las primero 4 cadenas de la serie para verificar que este Sistema L, efectivamente, genera la serie Fibonacci:

Cadena 1.

$$\alpha \Rightarrow cc$$

Cadena 2.

$$\alpha \Rightarrow cc \xrightarrow{1} CC$$

Cadena 3.

$$\alpha \Rightarrow cc \xrightarrow{1} CC \xrightarrow{2} CCcc$$

Cadena 4.

$$\alpha \Rightarrow cc \xrightarrow{1} CC \xrightarrow{2} CCcc \xrightarrow{2} CCcccc \xrightarrow{1} CCccccCC \xrightarrow{2} CCccccCCcc$$

Si contamos el número de símbolos del alfabeto que aparece en cada cadena obtenida, obtenemos cada uno de los términos de la serie Fibonacci:

Cadenas	No. de símbolos
cc	1
CC	1
CCcc	2
CCcccc	3
CCccccCCcc	5
CCccccCCccCCcccc	8
CCccccCCccCCccccCCccccCCcc	13
...	...

Tabla No. 7

Finalmente comentamos que de acuerdo con Eliezer Braun [BRAE96, Págs. 67-74] la serie de Fibonacci es autosimilar porque es posible aplicar a cada uno de sus miembros ciertas operaciones aritméticas (en particular, multiplicarlos por 1.6 y el resultado redondearlo a 2) y obtener nuevamente a dicha serie. Ésta serie es en sí, uno de los entes matemáticos mejor ponderados debido a los asombrosos misterios que guarda, entre ellos, estar emparentada con la ecuación del arte, esto es, con la ecuación cuya solución es el número dorado y, extraordinariamente, tener también relación con la espiral logarítmica. Existe incluso la *Fibonacci Association of America* cuyos resultados son publicados trimestralmente en la revista *Fibonacci Quarterly*.

➤ **Sistema L de la curva de Von Koch**

Hasta este momento se conoce a detalle la construcción de la curva de Koch presentada en el apartado 1.3.2, por lo que el Sistema L que la representa es, relativamente, sencillo de explicar.

El Sistema L de la curva de Koch está dado por (V, α, P) , en donde:

$$\begin{aligned}
 V &= \{L, +, -\} \\
 \alpha &= L \text{ y} \\
 P &= \\
 \{ \\
 P_1 &: L \rightarrow L + L - -L + L \\
 P_2 &: + \rightarrow + \\
 P_3 &: - \rightarrow - \\
 \}
 \end{aligned}$$

Expliquemos estos valores.

L representa la longitud original del segmento iniciador de la curva, de modo que –se entiende- cada vez que se aplica la producción P_1 , L disminuye a 1/3 parte de su longitud. Los signos “+” y “-” simbolizan una rotación en el plano por un ángulo θ , en este caso $\theta = 60^\circ$. El signo “+” equivale a un ángulo positivo y el signo “-” a un ángulo negativo.

En la tabla No. 8, se muestra el equivalente en instrucciones Logo, de los símbolos pertenecientes al alfabeto de este Sistema L:

Símbolo del alfabeto	Instrucción Logo equivalente
L	forward
+	left
-	right

Tabla No. 8

Ahora bien, para generar las etapas 0, 1 y 2 de esta curva utilizando el Sistema L asociado tenemos que derivar diversas cadenas. Así:

La etapa 0, correspondiente al segmento iniciador, está dada por el axioma L de nuestro sistema que indica el trazo de un segmento de longitud L. La curva de la etapa 1, se genera con la cadena $L + L - -L + L$ resultado de la siguiente derivación:

$$\alpha \Rightarrow L \xrightarrow{1} L+L--L+L$$

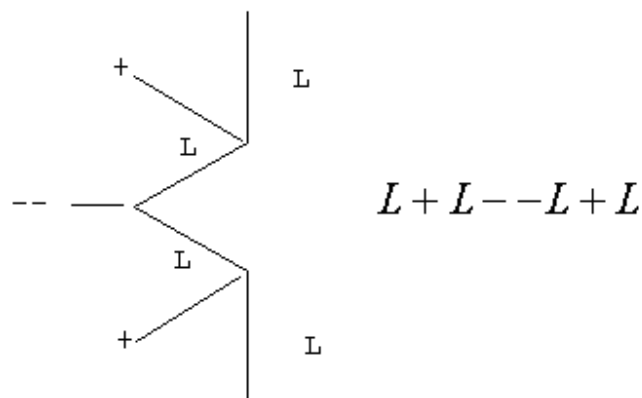


Figura 55

La tortuga de Logo daría la siguiente lectura a esta cadena (véase figura 55): Trazar un segmento de un tercio de longitud del segmento anterior -por tratarse de una producción P_1 - girar por un ángulo de 60° a la izquierda, luego, volver a trazar un segmento de $1/3$ de longitud del anterior, girar dos ángulos hacia la derecha de 60° , trazar un nuevo segmento de $1/3$ de longitud del anterior, girar un ángulo negativo (a la derecha) de 60° y, finalmente, volver a trazar un segmento de longitud $1/3$ del anterior.

La curva de la etapa 2, se genera con la cadena $L+L--L+L+L+L--L+L--L+L--L+L+L+L--L+L$ que, así mismo, tiene por derivación:

$$\alpha \Rightarrow L \xrightarrow{1} L+L--L+L \xrightarrow{1,2} L+L--L+L+L+L--L+L--L+L--L+L+L+L--L+L$$

La curva de la etapa 3 tiene la siguiente derivación, siendo la última forma sentencial producida, la cadena que la genera; nótese que los símbolos [y] que aparecen en la tercera y última forma sentencial producidas no forman parte del Sistema L al no pertenecer a su alfabeto, sino que sólo fueron colocados para hacer menos confusa la derivación; al retirar dichos símbolos de la última forma sentencial estaremos obteniendo la cadena que indica cómo generar la curva de la tercera etapa en la construcción de la curva de Koch:

$$\begin{aligned} \alpha \Rightarrow L \xrightarrow{1} L+L--L+L \xrightarrow{1,2} [L+L--L+L]+[L+L--L+L]-[L+L--L+L]+[L+L--L+L] \\ \xrightarrow{1,2} [L+L--L+L+L+L--L+L--L+L--L+L+L+L--L+L]+[L+L--L+L+L+L--L+L+L+L--L+L] \\ -[L+L--L+L+L+L--L+L]-[L+L--L+L+L+L--L+L] \\ -[L+L--L+L+L+L--L+L]+[L+L--L+L+L+L--L+L] \\ -[L+L--L+L+L+L--L+L] \end{aligned}$$

➤ **Sistema L de la curva de Peano**

Hemos visto ya que el proceso que engendra a la curva de Peano es también un proceso que se repite a sí mismo varias veces variando únicamente, a escala, ciertos valores fundamentales de la construcción; se trata entonces también de un procedimiento recursivo que, por ende, es factible de ser formalizado por medio de un Sistema L que se define como la terna (V, α, P) con:

$$\begin{aligned}
V &= \{L, +, -\} \\
\alpha &= L \text{ y} \\
P &= \\
\{ \\
P_1 &: L \rightarrow L+L-L-L-L+L+L+L-L \\
P_2 &: + \rightarrow + \\
P_3 &: - \rightarrow - \\
\}
\end{aligned}$$

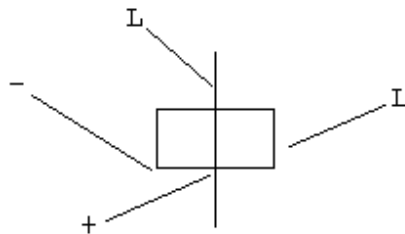
El Sistema L propuesto para la curva de Peano es similar al que genera la curva de Koch; ello se debe, a que se trata de teragones que reemplazan, recursivamente en cualquiera de sus etapas, cualesquiera de sus segmentos por la curva generador. Es por lo tanto lógico que los símbolos del alfabeto para la curva de Peano tienen la misma interpretación que para la de Koch, con la salvedad de que, cuando se efectúe un giro indicado por el símbolo + o por el símbolo -, el valor del ángulo para dicho giro estará dado por $\theta = 90^\circ$. Por supuesto que, si se aplica en una misma derivación, más de una vez la producción P_1 , el segmento L irá disminuyendo en una tercera parte de la longitud que tenía en la forma sentencial anterior y que, a partir de la primera vez que se aplica P_1 , L se reduce en una tercera parte. Además, el equivalente en instrucciones Logo para este Sistema L es exactamente el mismo que para la curva de Koch. Produzcamos pues, sólo algunas derivaciones correspondientes a las curvas de las etapas 0 y 1:

Curva etapa 0:

$\alpha \Rightarrow L$, cuya instrucción en Logo está dada por `forward L` (donde L tiene la longitud determinada por el usuario).

Curva etapa 1:

$$\alpha \Rightarrow L \xrightarrow{1} L+L-L-L-L+L+L+L-L$$



$$L + L - L - L - L + L + L + L - L$$

Figura 56

En donde el equivalente en Logo de la cadena $L+L-L-L-L+L+L+L-L$ es:

Cadena ↓	Instrucción símil en Logo	Descripción
L	forward L/3	La tortuga traza un segmento de 1/3 de longitud de L
+	left 90	La tortuga gira 90° a la izquierda
L	forward L/3	La tortuga traza un segmento de 1/3 de longitud de L
-	right 90	La tortuga gira 90° a la derecha
L	forward L/3	La tortuga traza un segmento de 1/3 de longitud de L
-	right 90	La tortuga gira 90° a la derecha
L	forward L/3	La tortuga traza un segmento de 1/3 de longitud de L
-	right 90	La tortuga gira 90° a la derecha
L	forward L/3	La tortuga traza un segmento de 1/3 de longitud de L
+	left 90	La tortuga gira 90° a la izquierda
L	forward L/3	La tortuga traza un segmento de 1/3 de longitud de L
+	left 90	La tortuga gira 90° a la izquierda
L	forward L/3	La tortuga traza un segmento de 1/3 de longitud de L
+	left 90	La tortuga gira 90° a la izquierda
L	forward L/3	La tortuga traza un segmento de 1/3 de longitud de L
-	right 90	La tortuga gira 90° a la derecha
L	forward L/3	La tortuga traza un segmento de 1/3 de longitud de L

Tabla No. 9

➤ **Sistema L de la curva de Hilbert**

Como último ejemplo, enunciaremos el Sistema L asociado a la curva de Hilbert que consiste en una terna (V, α, P) en donde:

$$V = \{I, D, L, +, -\}$$

$$\alpha = D \text{ y}$$

$$\begin{aligned}
& P = \\
& \{ \\
& P_1 : I \rightarrow +DL - ILI - LD + \\
& P_2 : D \rightarrow -IL + DLD + LI - \\
& P_3 : I \rightarrow \varepsilon \\
& P_4 : D \rightarrow \varepsilon \\
& P_5 : + \rightarrow + \\
& P_6 : - \rightarrow - \\
& \}
\end{aligned}$$

La exégesis de los elementos del alfabeto de este sistema es absolutamente análoga a la de los teragones de Koch y de Peano. L sigue siendo la longitud con la que “arranca” la curva iniciador y los símbolos “+” y “-” indican ángulos positivo y negativo, respectivamente, con $\theta = 90^\circ$; en este caso, los símbolos I y D son los que permiten crear recursividad y su reescritura coincide con el tipo de curva iniciador que sigue en la construcción del gráfico; en donde se tiene, además, dos tipos de curva iniciador, curva iniciador izquierda y curva iniciador derecha. Llamaremos curva iniciador izquierda a la curva iniciador siguiente cuyo giro de tortuga, después de haber trazado el primer segmento de la misma, es hacia la izquierda y llamaremos curva iniciador derecha a la curva iniciador siguiente cuyo giro de tortuga, después de haber trazado el primer segmento de la misma, es hacia la derecha; de hecho, esta convención fue utilizada en el código en Logo que aparece en el capítulo 1 para generar, por computadora, el gráfico asociado a esta curva. Después de aplicarse por primera vez las producciones I y D, la longitud del segmento L decrece en una razón $r = 1/2$.

Bien, para generar la curva de Hilbert de la etapa 0, basta con las siguientes derivaciones:

$$\alpha \Rightarrow I \xRightarrow{1} +DL - ILI - LD + \xRightarrow{3,4} +\varepsilon L - \varepsilon L \varepsilon - L \varepsilon + \Rightarrow +L - L - L +$$

En donde, el equivalente en Logo de esta cadena es:

```

lt 90
fd L
rt 90
fd L
rt 90
fd L
lt 90

```

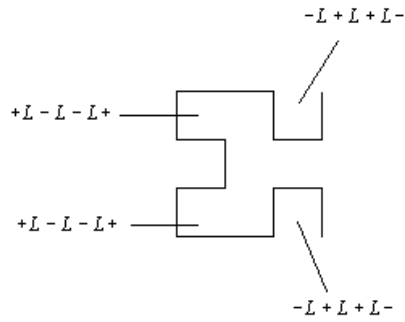
La derivación gramatical que genera la curva de la etapa 1 es (Fig. 57):

$$\begin{aligned}
\alpha \Rightarrow I & \xRightarrow{1} +DL - ILI - LD + \xRightarrow{1,2,5,6} +[-IL + DLD + LI -]L - [+DL - ILI - LD +] \\
& L[+DL - ILI - LD +] - L[-IL + DLD + LI -] \xRightarrow{4,5} +[-\varepsilon L + \varepsilon L \varepsilon + L \varepsilon -]L \\
& - [+ \varepsilon L - \varepsilon L \varepsilon - L \varepsilon +]L [+ \varepsilon L - \varepsilon L \varepsilon - L \varepsilon +] - L[-\varepsilon L + \varepsilon L \varepsilon + L \varepsilon -] + \Rightarrow \\
& +[-L + L + L -]L - [+L - L - L +]L [+L - L - L +] - L[-L + L + L -] +
\end{aligned}$$

Por supuesto que los corchetes cuadrados no forman parte del alfabeto y sólo se han puesto para mayor claridad. La cadena es:

$+ - L + L + L - L - + L - L - L + L + L - L - L + - L - L + L + L - +$

Sistema I de la curva de Hilbert



$+ - L + L + L - L - + L - L - L + L + L - L - L + - L - L + L + L - +$

Figura 57

Y su correspondiente código en Logo es:

lt 90

rt 90

fd 30

lt 90

fd 30

lt 90

fd 30

rt 90

fd 30

rt 90

lt 90

fd 30

rt 90

fd 30

rt 90

fd 30

lt 90

fd 30

lt 90

fd 30

rt 90

fd 30

rt 90

fd 30

lt 90

rt 90

fd 30

rt 90

fd 30

lt 90
fd 30
lt 90
fd 30
rt 90

Nótese cómo el Algoritmo 2.B en Logo que aparece en el capítulo 2 de esta tesis para la obtención del gráfico de la curva de Hilbert, hace exactamente lo que indica el Sistema L aquí mostrado. Desde luego que el código es compacto porque –aprovechando el carácter recursivo de esta curva- se utiliza un código que invoca una y otra vez, *id est*, recursivamente, a las funciones que generan las curvas iniciador derecha e izquierda. Basta con mirar la pila que analiza el código para entender esto.

Se culmina este capítulo comentando que se eligió trabajar con curvas fractales que llenan el plano por dos motivaciones; la primera está relacionada con la delimitación del tema elegido, ya que durante el período de investigación para la elección de tema fue notable: A) que estas curvas eran un tipo de fractales muy interesantes a los que sólo se les dedicaba una parte relativamente corta en relación con otros subtemas y B) estas curvas tienen aplicaciones prácticas muy concretas, como por ejemplo, en modelado computacional, en procesos de dithering, en el diseño de antenas, en el mapeo computacional de arrays lineales a estructuras de 2 y 3 dimensiones, en procesos de indexado en bases de datos, en computación en paralelo, etc. Todo esto le daba a la tesis una justificación adicional –si bien, no es la justificación primordial por la que se optó por este tema.

La segunda motivación está relacionada con la posibilidad de presentar la descripción de estas curvas haciendo uso no del tradicional modelo de transformaciones de autosemejanza, sino de un modelo novedoso, llamado Sistemas L en el que, además, se aplican conceptos fundamentales de las Matemáticas Aplicadas y la Computación.

Capítulo 3

Érase una vez un músico que se llamaba Meyn y tocaba maravillosamente la trompeta.

Érase una vez un vendedor de juguetes que se llamaba Markus y vendía unos tambores de hojalata esmaltados en rojo y blanco.



Érase una vez un músico que se llamaba Meyn y que tenía cuatro gatos, uno de los cuales se llamaba Bismarck.

Érase una vez un tambor que se llamaba Óscar y dependía del vendedor de juguetes.

Érase una vez un músico que se llamaba Meyn y mató a sus cuatro gatos con el atizador.

Érase una vez un relojero que se llamaba Laubschad y era miembro de la Sociedad Protectora de Animales.

Érase una vez un tambor que se llamaba Oscar y le quitaron a su vendedor de juguetes.

Érase una vez un vendedor de juguetes que se llamaba Markus y se llevó consigo todos los juguetes de este mundo.

Érase una vez un músico que se llamaba Meyn y, si no ha muerto ha de seguir viviendo todavía y tocando de nuevo maravillosamente la trompeta.

El Tambor de Hojalata, Günter Grass.

3. DOS CURVAS FRACTALES QUE LLENAN EL PLANO

3.1 Curva Dragón

Una y otra vez Crisófilax pedía la libertad;
y su alimentación resultaba demasiado costosa,
ya que continuaba creciendo, pues los dragones
lo hacen a lo largo de toda su vida, lo mismo
que los árboles.

Egidio el granjero de Ham, J. R. R. Tolkien

La primera aparición de la curva “dragón de Heighway” —que de aquí en adelante llamaremos curva dragón- se remonta al año de 1967, al aparecer en la portada de un libro sobre Teoría de Grupos escrito por el físico, recién graduado de la Universidad de California en Irving, William G. Harter y cuyo libro preparó ex profeso para ser presentado como parte de una serie de ponencias que sobre el tema de los grupos había organizado la N.A.S.A. La curva que aparecía en susodicha portada, sin embargo, era creación del físico John E. Heighway de la misma Universidad y de acuerdo a [SAGH94, Pág. 62] dicha curva fue bautizada por el mismo Heighway como “curva dragón”. Aunque Martin Gardner difiere en este punto pues, en su libro [GARM86, Pág. 34], refiere fue nombrada así por William G. Harter quien, posteriormente y en colaboración con Heighway y otro físico de la N.A.S.A., Bruce A. Banks, habría de estudiar más a fondo el comportamiento de este ente geométrico.

La primera publicación que expone formalmente la construcción y comportamiento de esta curva, y en este aserto cabe señalar que se sigue a [EDGG90, Pág. 33], aparece bajo el título de “Number Representations and Dragon Curves” bajo la autoría de Donald E. Knuth y Chandler Davis, en el año de 1971 en la revista *Recreational Math* 3.

Es en fechas recientes —como lo muestran las fuentes mismas de esta investigación- que curvas de este tipo han sido retomadas para su estudio debido a tres cosas importantes: **1)** Como parte del modelado que se necesita en una de las vertientes más socorridas de las Matemáticas Aplicadas y de las Ciencias de la Computación, esto es, la Graficación por Computadora **2)** Debido a las relaciones —que se apetecen lúdicas- que mantiene esta curva con otros constructos de las Matemáticas y que resultan ser fértil caldo de cultivo para aquellos que se muestren interesados en experimentar bajo el cobijo de esta Ciencia y, finalmente, **3)** Por el eminente linaje fractal de las curvas llamadas teragones, cuya edificación —señalada en el capítulo 1- tiene un verificando más en la curva dragón.

En este capítulo, se presenta la construcción, propiedades matemáticas relevantes y naturaleza fractal tanto de la curva dragón como del *pentagrado de McWorter* (McWorter’s Pentigree).

3.1.1 Construcción

Construcción geométrica

La construcción de esta curva por pasos puramente geométricos es como se expone a continuación:

1. Tomamos un segmento de recta $[0,1]$ como iniciador y lo denotamos por d_0 .
2. La curva iniciador d_0 es reemplazada con dos segmentos que coincidan ortogonalmente, esto es, se reemplaza por segmentos que se crucen en un ángulo de 90° , de cuya situación se colige que la longitud de los nuevos segmentos está dada por $1/\sqrt{2}$. A la construcción así obtenida la llamamos d_1 . Ahora bien, es importante aquí hacer la siguiente precisión; los nuevos dos segmentos pueden ir cargados hacia la izquierda o hacia la derecha, es indistinto. Sin embargo, no es indistinto no tener claro a qué le llamamos cargado hacia la izquierda y a qué le llamamos cargado hacia la derecha. Bien, ubicaremos derecha e izquierda tomando como punto de referencia o punto de apoyo a la curva misma (Ver Fig. 58), dependiendo esto de si se decide recorrer la curva empezando desde el punto 0 al punto 1 $[\uparrow]$ o si se decide recorrerla empezando de manera inversa, es decir, desde el punto extremo 1 al punto extremo 0 $[\downarrow]$. En particular, elegimos –para toda etapa de la construcción– empezar el recorrido partiendo desde el punto final más bajo (0), es decir, el recorrido $[\uparrow]$ y cargamos hacia la derecha los dos nuevos segmentos.

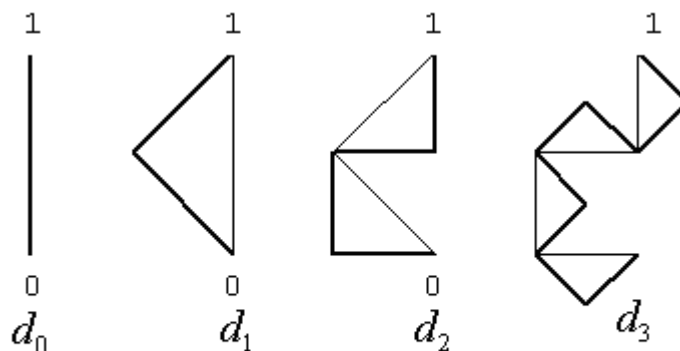


Figura 58

3. Para generar la curva dragón de orden 2, d_2 , tomamos cada uno de los segmentos que componen a d_1 y repetimos el procedimiento anteriormente señalado consistente en reemplazar a cada uno de dichos segmentos por sendos segmentos de longitud $1/\sqrt{2}$ de los segmentos en d_1 y, nuevamente, coincidentes en un ángulo de 90° . Como se señaló, partimos del punto final más bajo cargando el primer par de segmentos hacia la izquierda, el siguiente hacia la derecha y así, alternadamente.
4. La curva dragón d es el resultado de aplicar en el límite este procedimiento.

Para terminar de comprender este procedimiento deben hacerse solamente las siguientes observaciones. La primera es que para cualquier etapa o aproximación k de la curva dragón, tenemos que el polígono construido comienza en 0 y termina en 1. La segunda observación es relativa al gráfico presentado en la figura 58, y consiste en indicar que la poligonal más gruesa en la figura es la curva dragón de orden k .

Tras varias iteraciones, la curva dragón muestra la forma que se presenta en la figura 59.



Figura 59

Construcción binaria

Es posible describir una curva dragón de cualquier orden u aproximación, haciendo corresponder a cualquiera de dichas curvas una cadena ω o sucesión de símbolos binarios (alfabeto $\Theta = \{0,1\}$) en la que el 1 simboliza un giro hacia la derecha y el 0, un giro hacia la izquierda (Ver Fig. 60). Nuevamente para esta construcción elegimos el recorrido $[\uparrow]$ de la curva. Tenemos entonces:

Aproximación d_k	Representación binaria ω
d_0	ε
d_1	1
d_2	110
d_3	1101100
d_4	1101100 1 1100100
d_5	1101100 1 1100100 1 1101100 0 1100100
.	.
.	.
.	.

Tabla No. 10

Analizando esta construcción encontramos que el número de giros (y, por tanto, el número de bits en la cadena, ya que cada bit simboliza un giro) depende del orden k de la curva en cuestión. Por ejemplo, la cadena binaria ω que representa la aproximación d_1 tiene un solo bit, esto es, $1 = 2^1 - 1$; la aproximación d_2 tiene una cadena ω asociada con $3 = 2^2 - 1$ bits; la aproximación d_3 tiene por representación una cadena binaria con $7 = 2^3 - 1$ bits y así, sucesivamente. Ahora bien, el número de símbolos o bits en la cadena es la longitud $|\omega|$ de la misma, por lo que concluimos este breve análisis diciendo que la longitud de la cadena binaria que simboliza la

construcción de la curva dragón de la k-ésima etapa, cuya notación será $|\omega[d_k]|$, es igual al número $|\omega[d_k]| = 2^k - 1$. Para mayor claridad, se resumen estos datos en la tabla No. 11.

Aproximación d_k	Longitud $ \omega[d_k] $ de la cadena asociada a la construcción del polígono d_k
d_0	$ \omega[d_0] = \varepsilon$
d_1	$ \omega[d_1] = 1 = 2^1 - 1$
d_2	$ \omega[d_2] = 3 = 2^2 - 1$
d_3	$ \omega[d_3] = 7 = 2^3 - 1$
\cdot	\cdot
\cdot	\cdot
\cdot	\cdot
d_k	$ \omega[d_k] = 2^k - 1$

Tabla No. 11

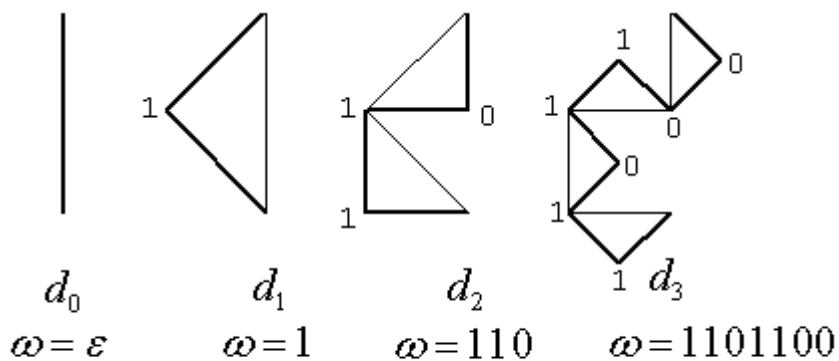


Figura 60

Bien, hay algo más en relación a esta construcción, se trata de la posibilidad de formular la representación ω de la curva de la k-ésima etapa en términos de la cadena ω correspondiente a la curva de la (k-1)-ésima etapa, esto es, recursivamente. Así, para construir la cadena de la k-ésima etapa, tomamos la cadena de la (k-1)-ésima etapa y la escribimos tal cual, añadimos un 1 del lado derecho de la cadena ya escrita y, finalmente (a la derecha del 1), añadimos nuevamente la cadena de la etapa anterior sólo que con el bit central invertido (si es 1 cambia a 0 y viceversa). Véase:

$$\omega_1 = 1$$

$$\omega_2 = \underbrace{1}_{\text{cadena anterior}} \quad \underbrace{1}_{\text{1 añadido}} \quad \underbrace{0}_{\text{cadena anterior con bit central invertido}}$$

$$\omega_3 = \underbrace{110}_{\text{cadena anterior}} \quad \underbrace{1}_{\text{1 añadido}} \quad \underbrace{100}_{\text{cadena anterior con bit central invertido}}$$

$$\omega_4 = \underbrace{1101100}_{\text{cadena anterior}} \quad \underbrace{1}_{\text{1 añadido}} \quad \underbrace{1100100}_{\text{cadena anterior con bit central invertido}}$$

Si usamos la notación ω_k para denotar la construcción de la k-ésima aproximación, ω_{k-1} para denotar la construcción de la (k-1)-aproximación, ω_k' para denotar a la cadena de la k-ésima etapa con el bit central invertido y, en consecuencia, ω_{k-1}' para la cadena de la curva anterior con esta última característica, puede establecerse este procedimiento recursivo con la siguiente fórmula:

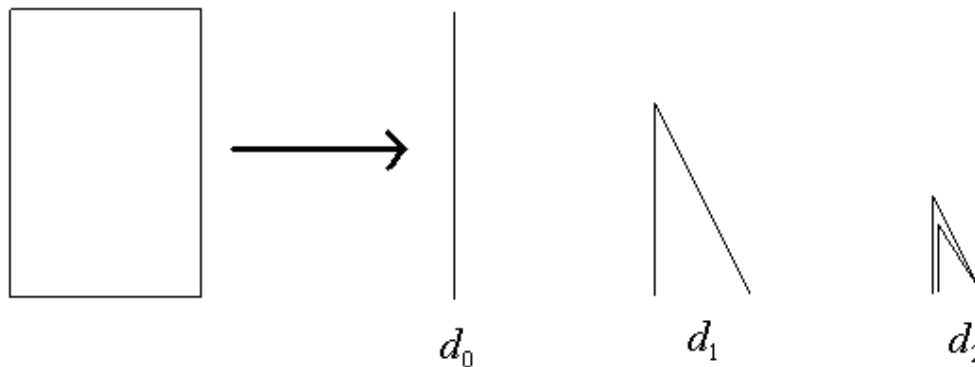
$$\begin{aligned} \omega_0 &= \varepsilon \\ \omega_k &= \omega_{k-1} 1 \omega_{k-1}' \end{aligned}$$

Que en términos llanos, nos indica que el 1 añadido a la derecha de la primera parte de la cadena de la aproximación k-1, se convertirá en un 0 en la segunda parte de la cadena de la aproximación k.

Construcción por hoja de papel

La construcción por hoja de papel es la construcción original propuesta por John E. Heighway y tiene por pasos los siguientes (ver Fig. 61):

1. Tomamos una hoja de papel de modo que el borde vertical de uno de sus lados verticales constituye d_0 .
2. Doblamos verticalmente por la mitad, de modo que los contornos de los dobleces constituyen d_1 .
3. Hacemos un segundo doblez, también en vertical, de modo que los contornos verticales de la hoja inicial dos veces ya doblada, representan d_2 .
4. Hacemos un tercer doblez para obtener un dragón de orden 3.
5. En general, n dobleces generarán un dragón de orden n, siendo –para efectos prácticos– limitado el número de dobleces posible y supeditado a la física del papel: *este procedimiento se repite tantas veces como se quiera, o más bien tantas veces como se pueda, porque rápidamente se alcanza un punto en el que la resistencia del papel es superior a la fuerza de plegamiento que resulta posible aplicarle* [MONO02, Pág. 175].



Al deshacer los k dobleces, se obtiene una curva dragón de orden k . A fin de tener una visualización más real, es conveniente ajustar las "esquinas" con arreglo a un ángulo de 90° .

Figura 61

3.1.2 Propiedades básicas

Conocidas ya diferentes formas de construir la curva dragón, resulta conveniente revisar algunas de sus propiedades, ya que las mismas nos permitirán deducir con mayor facilidad la naturaleza fractal de esta curva y, de así desearse, establecer un algoritmo computacional.

Empezaremos con la longitud de la curva dragón. Como, de hecho, al enunciar su construcción se enuncia también que la longitud de los segmentos rectos que la componen van decreciendo a una razón de $r = 1/\sqrt{2}$, resulta relativamente sencillo determinar la longitud total de la curva en sus diferentes etapas sabiendo primero 1) La longitud de los segmentos rectos que en cada etapa la componen y, después, 2) El número de dichos segmentos por etapa; la tabla No. 12 muestra los datos concernientes al primer punto:

Curva dragón d_k	Longitud L_k
d_0	$L_0 = 1$
d_1	$L_1 = 1/\sqrt{2}$
d_2	$L_2 = (1/\sqrt{2})(1/\sqrt{2}) = 1/2$
d_3	$L_3 = (1/\sqrt{2})(1/2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
d_4	$L_4 = (1/\sqrt{2})\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$
d_5	$L_5 = (1/\sqrt{2})(1/4) = \frac{1}{4\sqrt{2}}$
d_6	$L_6 = (1/\sqrt{2})\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = 1/8$

Curva dragón d_k	Longitud L_k
· · ·	· · ·
d_k	$L_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$

Tabla No. 12

Ahora bien, el número de segmentos rectos que componen a la curva en cada etapa están dados por la fórmula que se deduce de cada una de las filas de la tabla No. 13:

Aproximación k-ésima	Número de segmentos
d_0	1
d_1	2
d_2	4
d_3	8
· · ·	· · ·
d_k	2^k

Tabla No. 13

Por lo que, concluimos que la longitud de la curva dragón está dada por la ecuación:

$$L[d_k] = 2^k \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$$

que introduciendo límites resulta en:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L[d_k] = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \infty$$

Resultado que se ajusta perfectamente bien al hecho de que esta curva llena el plano y que, por tanto, resulta no posible -en un momento dado- determinar su longitud ya que en el límite llena el plano o, en otras palabras, la longitud de la misma se vuelve inconmensurable.

Tomaremos ahora las ilustraciones que corresponden a d_2 y d_3 (ver figura 62). De las mismas, colegimos lo siguiente:

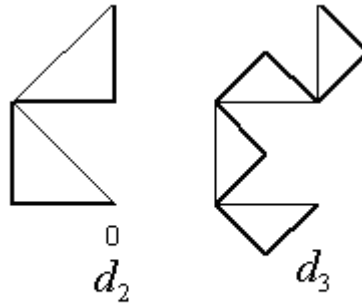


Figura 62

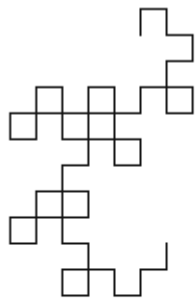
1. Las líneas más delgadas en d_3 se corresponden con cada uno de los segmentos rectos que conforman d_2 .
2. Las líneas más delgadas en d_3 constituyen lados de cuadrados incompletos de cuyos lados “nace” un par de segmentos nuevos (líneas más gruesas) formando 90° ; los segmentos recién nacidos son los segmentos constitutivos de d_3 . En d_3 tenemos sólo dos de estos cuadrados incompletos.
3. Si tomamos de d_3 uno cualquiera de estos cuadrados de línea delgada, tenemos un patrón muy claro que consiste en que si de un lado de dicho cuadrado el nuevo par de segmentos “nace” hacia fuera, entonces en el lado adyacente, “nace” hacia adentro. Y en general, este comportamiento se hace extensivo para toda la curva de modo que los nuevos pares se alternan entre “nacer” hacia adentro y “nacer” hacia fuera.
4. Esto ocurre siempre entre dos cualesquiera aproximaciones d_k y d_{k+1} de la curva dragón, debido a que este comportamiento emana y es inherente a la construcción de la misma.

De estos cuatro puntos anteriores y del hecho de que entre dos segmentos adyacentes cualesquiera de una determinada aproximación d_k se yergue un ángulo de 90° , se concluye que si dos segmentos rectos en la siguiente aproximación, d_{k+1} , se encuentran en un mismo punto, no habrán, sin embargo, de atravesarse; esto es, la curva dragón no se atraviesa nunca a sí misma en ninguna de las etapas de su construcción.

Veremos ahora cómo, efectivamente, se trata de una curva que llena el plano, para ello apelaremos nuevamente a los cuadrados –pero esta vez no de línea delgada- y su comportamiento de una iteración a otra.

Es necesario nuevamente remitirse a la figura 58 y observar –como por ejemplo, ocurre en d_6 , figura 63- que la curva dragón está compuesta, en algunas de sus aproximaciones, por segmentos rectos y por cuadrillos, dichos cuadrillos son los cuadrados de línea no delgada en los que ha de fijarse en este momento la atención. Volvamos a la figura 58 y notemos cómo en d_1 aparece por primera vez uno de estos cuadrados de línea no delgada, sólo que aparece incompleto es -ad hoc con la terminología que se utilizó para concluir que la curva dragón no se corta a sí misma-, un

cuadrado de línea gruesa incompleto, un semicadrado de línea gruesa. Pues bien, este cuadrado de línea gruesa aparece nuevamente en d_3 , sólo que seccionado en 4 partes iguales, dos de las cuales forman parte de d_3 ; dichos cuadrados son los dos primeros semicadrados gruesos que aparecen recorriendo d_3 en $[\uparrow]$, y si los rodeamos con el mínimo cuadrado que los contenga a ambos, estaremos obteniendo –completo- al semicadrado de línea gruesa en d_1 . Aparece d_2 también dividido en 4 partes en d_4 .



dragón orden 6

Figura 63

En etapas más avanzadas, este patrón vuelve a manifestarse. Por ejemplo, si tomamos los dragones d_6 y d_8 (véase figura 64) y tomamos luego un cuadrado –esta vez completo- en d_6 , vemos cómo dicho cuadrado aparece dividido en cuatro cuadrados congruentes, todos de longitud de la lado $L_8 = (1/\sqrt{2})\left(\frac{1}{8\sqrt{2}}\right) = 1/16$. En general, un cuadrado en d_k aparece dividido en cuatro partes congruentes en d_{k+2} .

Ahora bien, tomaremos un cuadrado en d_8 junto con los cuatro cuadrados adyacentes que le circundan; esta configuración de cruz aparece, por lo menos una vez, en cualquier curva dragón a partir de $K = 8$ (visualmente es indiscutible, la figura 65 nos ayuda a comprender esto).

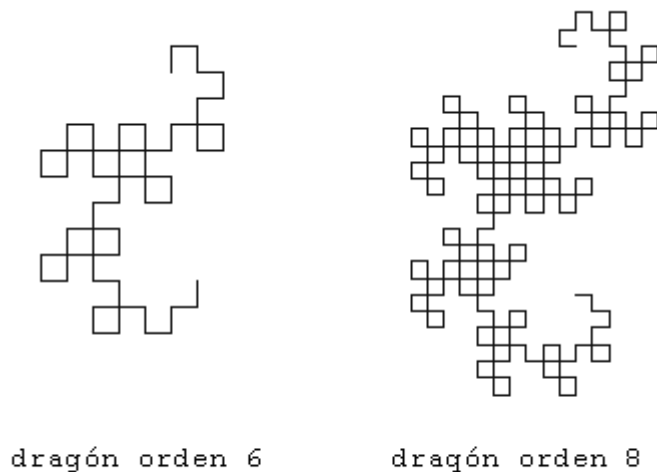


Figura 64

La configuración de cruz aparece en la figura 65. Ahora bien, denotaremos por c_k al cuadrado que aparece en el centro de alguna configuración de cruz tomada de d_k .

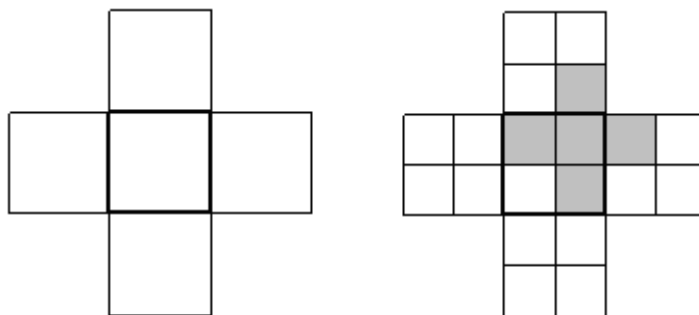
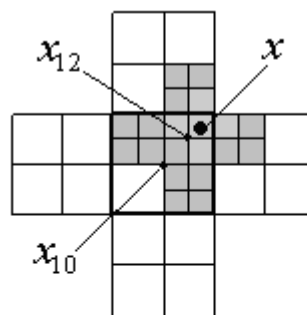


Figura 65

A partir de este momento seguimos un poco el desarrollo que aparece en [SAGH94, Pág. 164]. La idea es ir tomando cada c_k a partir de d_8 ; empezamos entonces con c_8 que vuelve a aparecer en d_{10} , pero ya dividido en cuatro partes congruentes. Cada subcuadrado de c_8 en d_{10} es centro de una configuración de cruz, cada uno de estos subcuadrados centrales aparecerán particionados en cuatro partes congruentes en d_{12} y serán también centros de distintas configuraciones de cruz, esto ocurre indefinidamente.

Consideremos ahora un punto $x \in c_8$, dicho punto pertenece también a un cuadrado central de alguna de las configuraciones de cruz de d_{10} , llamemos c_{10} a dicho cuadrado y llamemos x_{10} a uno cualquiera de los puntos pertenecientes a la vecindad de c_{10} . Como c_{10} aparece en d_{12} dividido en cuatro partes iguales -cada una de cuyas partes es centro de alguna configuración de cruz-, resulta entonces que x se localiza en alguno de dichos cuadrados, llamémoslo c_{12} y denotemos con x_{12} a cualquier punto perteneciente a la vecindad de c_{12} (mírese la figura 66). Ahora c_{12} aparece dividido en cuatro partes iguales en d_{14} , en una (o tal vez en más) de dichas

partes se ubica x , llamémosla c_{14} y denotemos con x_{14} a todos los puntos que se hallan en la vecindad de c_{14} . Este proceso, por construcción, se continúa indefinidamente y como es inherente a todo punto $x \in c_8$, resulta entonces que todo x_j perteneciente a la vecindad de c_j converge en algún $x \in c_8$ lo que significa que, por lo menos el área comprendida en c_8 es una región de la curva dragón que llena el plano (recuérdese además que la curva dragón pertenece a un espacio métrico completo y compacto que, por lo tanto, contiene infinitos puntos que convergen a uno o más puntos en dicho espacio). Es decir, $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x \in c_8 \subseteq d$, en donde d o conjunto atractor es la curva dragón, pero no sólo eso, sino que también c_8 contiene una bola abierta con centro algún punto en c_8 y radio $r < 1/16$ con lo que y de acuerdo a la definición de curva que llena el espacio dada en la 69 del capítulo 2, la curva dragón es, efectivamente, una curva que llena el espacio bidimensional.



$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x$$

Figura 66

Antes de pasar al siguiente apartado cabe hacer la siguiente aclaración en torno a la demostración que acaba de presentarse. Debe tenerse en cuenta que los cuadrados de línea no delgada de la etapa k que aparecen divididos en cuatro partes congruentes en la etapa $k+2$, aparecen ligeramente trasladados antes de la etapa 6, sin embargo, a partir de la etapa 6 dicho desplazamiento es irrelevante porque el dragón ha crecido ya de tal forma que hay suficientes subcuadrados capaces de sustituir los subcuadrados que en la etapa actual hayan quedado desplazados debido a la traslación mencionada.

3.1.3 Naturaleza fractal

El comportamiento visual de la curva dragón y el sentido común de quien la observe parecen indicar que se trata de un objeto fractal, pero no sólo eso, posee además tres características que aparecen de forma constante en cualquier fractal:

- i. Autosemejanza (palpable desde un nivel visual)
- ii. Recursión (cuyas ecuaciones de recurrencia resultan, tras su construcción binaria, bastante naturales) y, finalmente

iii. Dimensión fractal

El punto iii está aún por probarse y es precisamente parte de lo que se tratará en esta sección. De forma similar, se verificará también la posibilidad de construir una curva dragón haciendo uso de transformaciones autoafines, esto es, se verificará que efectivamente se trata de un objeto autosemejante.

Vamos primero a calcular la dimensión de homotecia de este terágono. Es claro que de una iteración a otra en la construcción de esta curva, obtenemos dos copias iguales escaladas en un factor $r = 1/\sqrt{2}$; de modo que $n = 2$ y $r = 1/\sqrt{2}$, así, la dimensión de homotecia d_A de este objeto fractal está dada por:

$$\begin{aligned} d_A(d) &= \frac{\ln(n)}{-\ln(r)} = \frac{\ln(2)}{-\ln(1/\sqrt{2})} = \frac{\ln(2)}{-[\ln(1) - \ln(\sqrt{2})]} = \frac{\ln(2)}{-[0 - \ln(\sqrt{2})]} = \frac{\ln(2)}{-[-\ln(\sqrt{2})]} = \\ &= \frac{\ln(2)}{\ln(\sqrt{2})} = \frac{0.693}{0.347} = 1.997 \cong 2 \end{aligned}$$

Y más brevemente,

$$d_A(d) = 2$$

Se tiene entonces que la dimensión fractal, 2 de la curva dragón es mayor que su dimensión topológica 1 y que es, desde el punto de vista dimensional, una curva fractal. Pero hay algo más que señalar en relación a la dimensión de esta curva y es que la dimensión nos está indicando que se trata de un objeto bidimensional, esto es, un objeto que llena alguna porción del espacio —y, en concreto— una curva fractal que llena el plano. Por lo que, se puede concluir este punto diciendo que al calcular la dimensión fractal de la curva dragón se termina por corroborar —en adición al análisis dado en las páginas 116 y a 117— que se trata de una curva que ocupa por completo una región bidimensional.

Con miras a terminar de establecer que se trata de un objeto de naturaleza fractal, se identifican algunas transformaciones autoafines que definen a esta curva, indiscutiblemente, como una curva fractal.

A fin de obtener dichas transformaciones, se hace la convención de hacer coincidir verticalmente —con el extremo 0 de d_0 coincidiendo con el origen— a d_0 con el origen $(0,0)$ del sistema de coordenadas rectangulares R^2 , véase la figura 67.

La primera transformación T_1 —que mapea d_0 en d_1 — es igual a la unión de dos transformaciones, la primera mapea d_0 en el segmento de pendiente negativa que conforma a d_1 y la segunda mapea d_0 en el segmento de pendiente positiva que conforma a d_1 (véase figura 68). Además, la primera transformación T_1 , es resultado de componer las dos transformaciones siguientes:

1. La transformación de semejanza $S_{1/\sqrt{2}}$ que reduce el segmento d_0 a $1/\sqrt{2}$ de su tamaño y que matricialmente tiene la forma:

$$S_{1/\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} y$$

2. La transformación de rotación $R_{\theta=45^\circ}$ que rota el segmento ya reducido -mediante la transformación anterior- por un ángulo $\theta = \pi/4$ ó $\theta = 45^\circ$ con y como eje de rotación, esto es:

$$R_{\theta=45^\circ} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\text{sen}(45^\circ) \\ \text{sen}(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix}$$

Es decir, la transformación autoafín:

$$T_1(d_0) = (R_{\theta=45^\circ}(S_{1/\sqrt{2}}))$$

Cuya forma matricial es:

$$T_1(d_0) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\text{sen}(45^\circ) \\ \text{sen}(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ con } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d_0$$

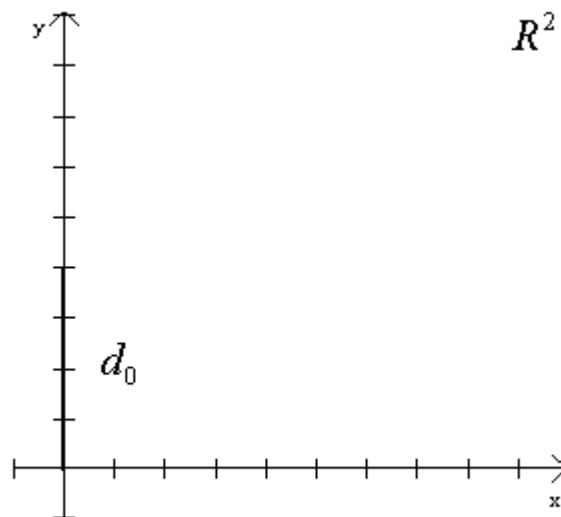


Figura 67

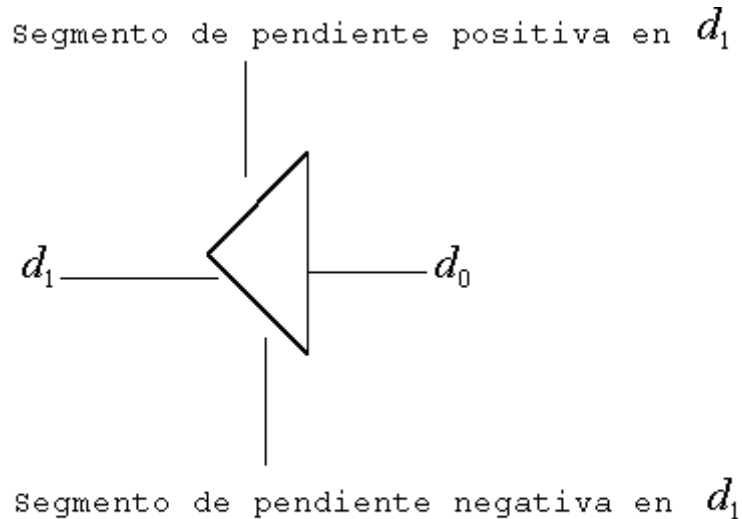


Figura 68

Apliquemos T_1 en dos puntos cualesquiera de d_0 ; elegimos los puntos de coordenadas $(0,1)$ y $(0,1/2)$. Recuérdese que $-y$ a fin de simplificar operaciones-:

$$\begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\text{sen}(45^\circ) \\ \text{sen}(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos:

$$T_1 \begin{bmatrix} (0) \\ (1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0) \\ (1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0) \\ (1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

y

$$T_1 \begin{bmatrix} (0) \\ (1/2) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0) \\ (1/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0) \\ (1/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

En la figura 69, pueden observarse las imágenes de $(0,1)$ y de $(0,1/2)$ bajo T_1 ; están señaladas con un punto oscuro grueso.

Ahora bien, la segunda transformación T_2 , es también composición de, a su vez, otras transformaciones. Así, las transformaciones necesarias para pasar de d_0 al segmento en d_1 de pendiente positiva son:

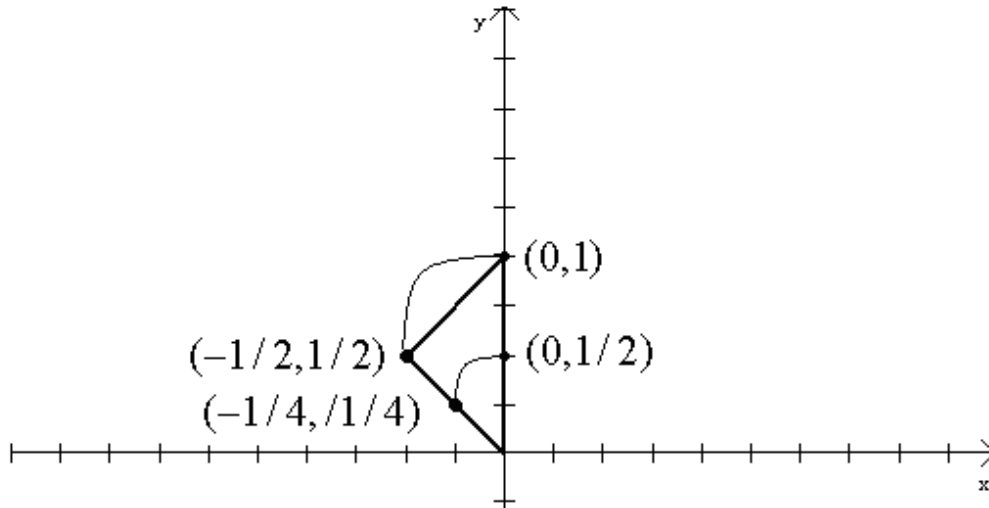


Figura 69

1. La transformación que reduce d_0 a una longitud de $1/\sqrt{2}$ y que en su forma matricial se expresa como:

$$S_{1/\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

De modo que $S_{1/\sqrt{2}}(d_0)$ es el resultado de aplicar $S_{1/\sqrt{2}}$ en cada punto de d_0 .

2. La transformación que rota d_0 un ángulo de 135° ; matricialmente:

$$R_{\theta=135^\circ} = \begin{pmatrix} \cos(135^\circ) & -\text{sen}(135^\circ) \\ \text{sen}(135^\circ) & \cos(135^\circ) \end{pmatrix}$$

De modo que $R_{\theta=135^\circ}(S_{1/\sqrt{2}}(d_0))$ es el resultado de aplicar $R_{\theta=135^\circ}$ cada punto de $S_{1/\sqrt{2}}(d_0)$.

3. Y, finalmente, dos traslaciones; la primera traslación está expresada por el vector de

traslación $\bar{t}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ y “empuja” el segmento $R_{\theta=135^\circ}(S_{1/\sqrt{2}}(d_0))$ en dirección \nearrow , y la

segunda traslación está expresada por el vector $\bar{t}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ y “empuja” a

$\bar{t}_1(R_{\theta=135^\circ}(S_{1/\sqrt{2}}(d_0)))$ en dirección \nwarrow ; estas dos traslaciones pueden expresarse en una

sola por medio de $\bar{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De modo que T_2 es la composición de estas cuatro transformaciones que, de forma análoga, generan la transformación de autoafinidad:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(135^\circ) & -\text{sen}(135^\circ) \\ \text{sen}(135^\circ) & \cos(135^\circ) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La figura 70 ilustra, paso por paso, el resultado de componer estas transformaciones.

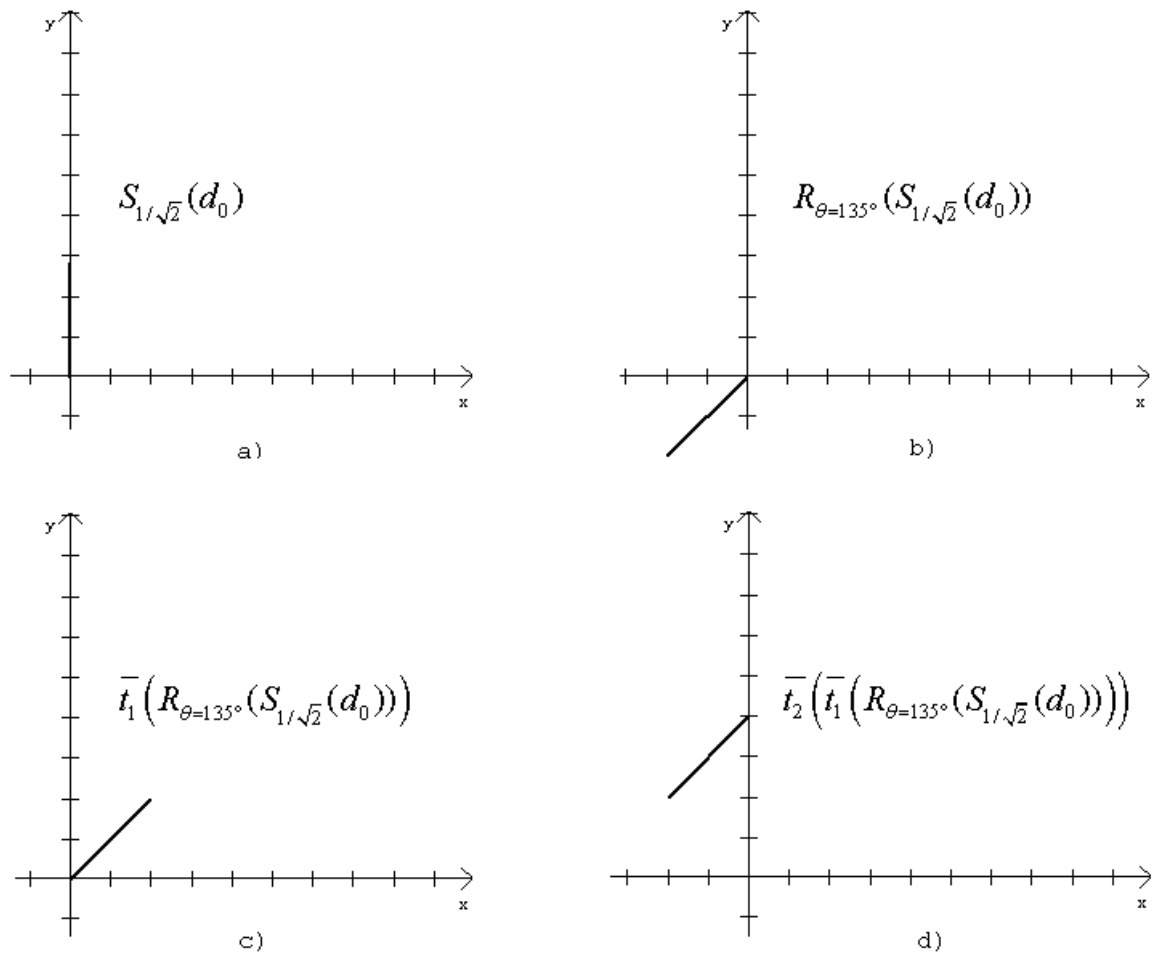


Figura 70

Tenemos entonces que d_1 es el resultado de la unión de T_1 y T_2 , esto es $T_1 \cup T_2$. Más formalmente,

$$d_1 = T_1(d_0) \cup T_2(d_0)$$

Las mismas transformaciones que se aplicaron sobre d_0 , han de ser aplicadas sobre cada uno de los dos segmentos rectos que conforman a d_1 , a fin de obtener d_2 , esto es

$$d_2 = T_1(d_1) \cup T_2(d_1) = T_1(T_1(d_0) \cup T_2(d_0)) \cup T_2(T_1(d_0) \cup T_2(d_0))$$

Similarmente, dichas transformaciones han de aplicarse sobre cada uno de los cuatro segmentos rectos de d_2 a modo de obtener d_3 , es decir,

$$d_3 = T_1(T_1(T_1(d_0) \cup T_2(d_0)) \cup T_2(T_1(d_0) \cup T_2(d_0))) \cup T_2(T_1(T_1(d_0) \cup T_2(d_0)) \cup T_2(T_1(d_0) \cup T_2(d_0)))$$

Y, en general,

$$d_k = T_1(d_{k-1}) \cup T_2(d_{k-2})$$

Cuando $k \rightarrow \infty$, d_k es la curva dragón, en símbolos:

$$d = \lim_{k \rightarrow \infty} d_k$$

En donde d , es llamado *conjunto atractor invariante* o, simplemente, *atractor*.

Cabe hacer aquí la siguiente precisión histórica, al conjunto de funciones autosemejantes que generan un conjunto fractal se le conoce también como Sistema de Funciones Iteradas (SFI) que fueron así nombradas por Michael F. Barnsley en [BARM88], ya que en dicho texto establece un método de generación de fractales basado en los sistemas de funciones iteradas que no es más que la aplicación iterativa de un conjunto o sistema de funciones autosemejantes o autoafines que, de manera básica, generan todo el fractal. En cada uno de los ejemplos de curvas fractales que se han manejado en esta investigación, se aprecia el uso de estos sistemas de manera una tanto más ilustrativa que formal. Cabe añadir que ya Hutchinson en su texto *“Fractals & Self Similarity”* había utilizado este método, constriñéndolo solamente a funciones contractivas; Barnsley expande este horizonte de creación apelando al uso de no sólo funciones contractivas, sino de cualquier función autoafín. Indagando también en otros textos se encontró una referencia más en el libro *“Space-Filling Curves”* escrito por Hans Sagan quien afirma: *A fin de dar el crédito a quien lo merece, déjesenos puntualizar que W. Wunderlich en un paper de 1954 [“Irregular Curves and Functional Equations”] que aparentemente atrajo poca atención, había utilizado ya el proceso de transformaciones de auto semejanza para generar la curva de Von Koch, la carpeta de Sierpinski, la curva de Hilbert y la curva de Sierpinski-Knopp. En el mismo paper, Wunderlich utilizó transformaciones afines para generar la curva de Steinitz, la curva de Bolzano-Kowalewski y la curva de Rham [SAGH94, Pág. 149]. Finalmente se comenta que, más allá de intentar reivindicar al primer matemático en proponer el uso de transformaciones de semejanza para construir fractales, resulta ineludible que los conjuntos fractales, al ser conjuntos auto semejantes, son factibles de ser elaborados a través de dicho método y que lo mismo ocurre para la curva de McWorter que se presenta en el siguiente párrafo.*

3.2 Curva de McWorter

Tú puedes descubrir dragones enteramente nuevos por accidente. Simplemente introduce cualquier código genético e intérprete que vengan a tu mente. El dragón resultante será una desgarrada serpiente, una criatura torpe tropezando eternamente sobre sí misma, o algo bien lindo.

William A. McWorter Jr.

La curva que aquí se presenta es una curva que llena sólo parcialmente el plano y que posee todas las características de los teragones referidos por Mandelbrot [MANB97, Pág. 61], mismos que han sido introducidos aquí para su estudio en la **página 70** coincidiendo con el hecho de que algunos de ellos llenan regiones del plano. Es menester señalar que hemos elegido esta curva como parte de la investigación aquí realizada por dos motivos, el primero es que esta curva puede perfectamente modelarse a través de un Sistema L porque, en su origen, fue pensada en términos de organismos biológicos como los que estudiaba Aristid Lindenmayer; la segunda motivación tiene que ver con la posibilidad de comprender, tomando como referente su dimensión, qué significa que esta curva casi logra llenar por completo una región bidimensional.

La primera aparición de la curva de McWorter data del año de 1987 cuando William A. McWorter Jr. publica sus resultados –en colaboración con Jane Tezelaar- en la revista Byte. Dichos resultados no eran más que una serie de convenciones, construcciones y algoritmos teniendo por leitmotiv principal a los llamados dragones. En este sentido, McWorter es mucho más expansivo pues utiliza el término *dragón* para referirse a toda una gama de curvas que incluyen curvas que llenan el plano, curvas fractales y todo tipo de criaturas irregulares. Lo curioso de este artículo es que a pesar de constituir la fuente más fidedigna para la construcción de la curva de McWorter, toma a la curva dragón como la curva sustantiva que ejemplifica la utilización del modelo allí presentado. De modo que la curva de McWorter aparece allí sólo como uno más de los dragones que pueden crearse variando los parámetros fundamentales en que se basa la construcción de todo dragón; es así que William A. McWorter nos presenta en su artículo –entre otras cosas- dos páginas atiborradas de tablas de datos que, junto con un algoritmo en lenguaje Basic, nos permitirán obtener el gráfico del dragón correspondiente. No es sino hasta más recientemente que esta construcción un tanto difusa de la curva de McWorter se clarifica gracias al primer análisis publicado que Edgar Gerald hace de este terágono [EDGG90, Pág. 34], permitiéndonos con ello apelar también a la construcción geométrica de la misma. Más recientemente, William A. McWorter publica en su página Web [10] la construcción de esta curva y de otros fractales, así como un enfoque de los mismos basado en Sistemas L. Es a partir de esta información recabada –que es todavía bastante sucinta- que se presenta en este capítulo la construcción de esta curva, algunas propiedades y aquellas características que la convierten en un fractal.

Sobre la génesis de esta curva sólo puede agregarse que –según el propio McWorter- fue descubierta por él de manera accidental y que su nombre, “Pentigree”, responde al hecho de que después de algunas pocas iteraciones nos recuerda levemente un collar de filigranas unidas por finos hilos: los segmentos rectos que la componen: *...ésta presenta un patrón de filigrana que eventualmente la convierte en un verdadero fractal [MCWW87, Pág. 134]*. A esta respecto Gerald señala: “Pentigree” is from “pentagon-filligree” [EDGG90, Pág. 34] o, en otras palabras, el término “Pentigree” viene de la combinación de los términos pentágono y filigrana y, si bien se sugirió al inicio de esta investigación que esto podría ser traducido como “Pentagrado”, a fin de no caer en excesos nos referiremos a ella simplemente como Curva de McWorter.

3.2.1 Construcción

Construcción geométrica

Como ocurre con todos los teragones, la primera aproximación en la construcción de esta curva comienza con un segmento recto de longitud unitaria al que llamaremos segmento iniciador y que simbolizaremos con M_0 . Después, el segmento iniciador es reemplazado por una poligonal que

se obtiene –haciendo coincidir con el origen de R^2 a este segmento- de la siguiente manera (véase figura 71).

Partiendo del extremo 0 del iniciador se traza un segmento recto de longitud σ con una inclinación por un ángulo $\phi = 36^\circ$, desde el punto final de este segmento se traza otro segmento recto inclinado por un ángulo $2\phi = 72^\circ$ y de longitud también σ ; después se realiza un giro hacia la derecha por un ángulo de $4\phi = 144^\circ$ dibujándose otro segmento de longitud σ . Los tres segmentos restantes, también de longitud σ se obtienen por un giro a la derecha de 72° , seguido por dos giros a la izquierda de 72° . Es notable cómo –al igual que la curva dragón- el punto final del último segmento coincide con el punto extremo del segmento $[0,1]$ que ubicado en el plano cartesiano tiene por coordenadas $(1,0)$. La poligonal así obtenida es la aproximación M_1 de la curva de McWorter y es el segmento generador.

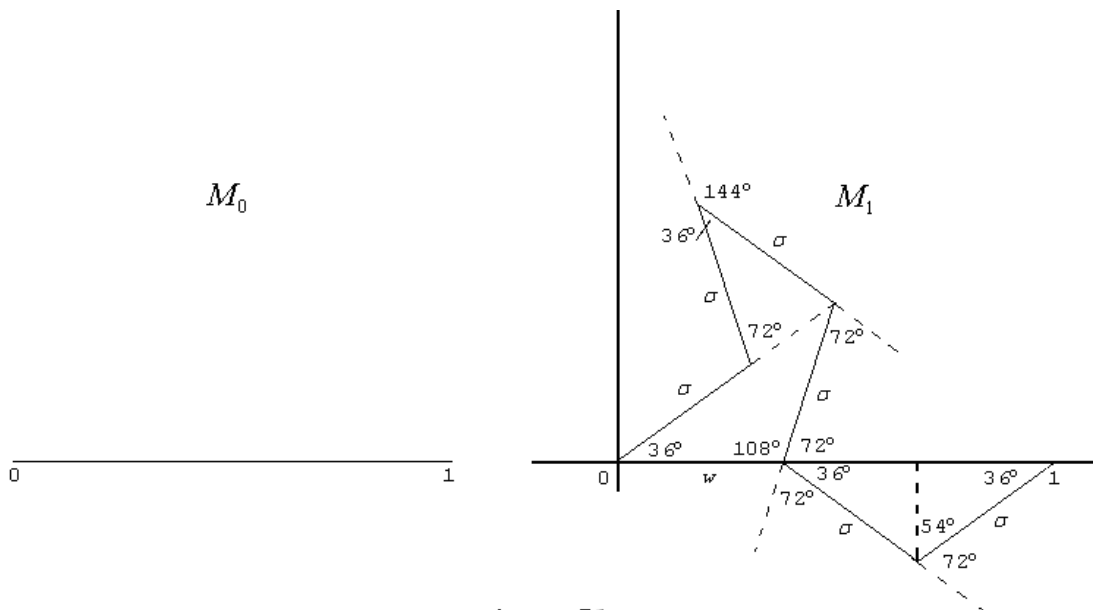


Figura 71

Para obtener M_2 , se toman cada uno de los segmentos que componen a M_1 y se aplica sobre cada uno de ellos el procedimiento anteriormente descrito; después, se hace lo mismo con todos los segmentos de M_2 y así, sucesivamente; en el límite, la curva obtenida es la curva de McWorter.

La figura 72 nos muestra varias aproximaciones de la curva de McWorter.

Dado que para poder generar la curva de McWorter utilizando transformaciones de autosemejanza o, más precisamente, dado que para generar a esta curva como conjunto atractor invariante tras la aplicación iterativa de un conjunto de funciones, es necesario calcular el valor de σ de cada uno de los segmentos que la componen en alguna de sus etapas, volveremos nuestra atención a la imagen de la derecha de la figura 71, redibujándola en la figura 73 y a partir de ciertas relaciones que se dan en la figura, calcularemos el valor de σ .

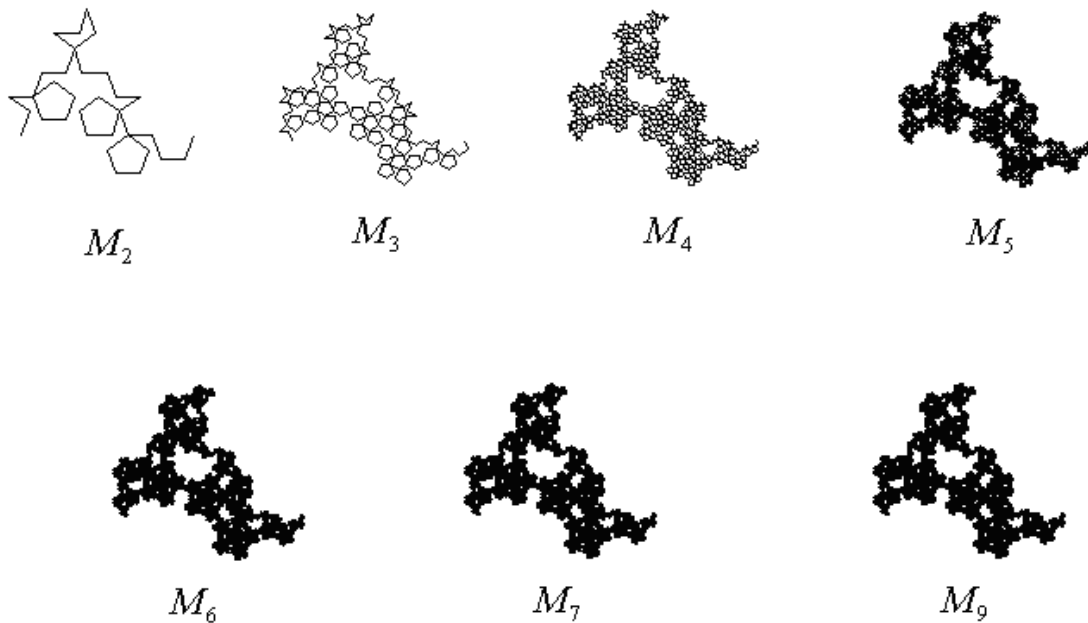


Figura 72

Partiremos del hecho elemental de que el segmento horizontal –al que llamaremos w - que parte del origen hasta el punto en el que la curva corta al eje x , tiene necesariamente longitud σ , puesto que es uno de los lados del triángulo isósceles cuyos dos de sus ángulos valen 36° y que por la Ley de los Senos verifica la siguiente relación:

$$\frac{\sigma}{\text{sen}36^\circ} = \frac{w}{\text{sen}36^\circ} \text{ de donde se tiene:}$$

$$\text{sen}36^\circ \frac{\sigma}{\text{sen}36^\circ} = w, \text{ esto es, } w = \sigma$$

Ahora bien, la suma de $w = \sigma$ más los segmentos x e y es igual a 1, puesto que son partes complementarias del segmento iniciador sobre el que se erige la construcción de M_1 . Matemáticamente esto se expresa así:

$$\sigma + x + y = 1 \quad \dots\dots (A)$$

Si consideremos ahora el triángulo isósceles que está por debajo del eje positivo de las x , encontramos ciertas las siguientes proposiciones dado que de éste se desprenden dos triángulos rectángulos:

$x = y$ y , además:

$$\frac{x}{\sigma} = \text{sen}54^\circ \text{ y } \frac{y}{\sigma} = \text{sen}54^\circ, \text{ por lo que:}$$

$$x = \sigma \text{sen}54^\circ = y \text{ que, sustituyendo en la expresión (A):}$$

$\sigma + \sigma \text{sen}54^\circ + \sigma \text{sen}54^\circ = 1$, resolviendo esta ecuación para σ tenemos:

$$\sigma + 2\sigma \text{sen}54^\circ = 1$$

$$\sigma[1 + 2\text{sen}54^\circ] = 1$$

$$\therefore \sigma = \frac{1}{1 + 2\text{sen}54^\circ}$$

Realizando operaciones:

$$\sigma = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{1}{1 + 1\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{2}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

Por lo que concluimos que:

$$\sigma = \frac{2}{3 + \sqrt{5}}$$

Construcción tipo McWorter

La construcción que a continuación se muestra está basada en la propuesta que ofreció William A. McWorter en el artículo "Creating Fractals" [MCWW87] para la elaboración de teragones. Se trata de un enfoque biologicista que es presentado por Mcworter utilizando como ejemplo únicamente a la curva Dragón; retomamos aquí dicho modelo y lo aplicamos de forma novedosa para la curva de McWorter. Para comprender cabalmente esta construcción es necesario tener presente la definición que propone William A. McWorter para un dragón, a saber: *Un dragón se define como un organismo de células acomodadas de acuerdo a un código genético. Dicho dragón comienza su vida siendo una sola célula y, después, a través de una división celular diaria, crece hasta convertirse en una criatura con silueta y carácter gobernados por el ADN de su código genético* [MCWW87, Pág. 124].

Desde esta perspectiva, la curva de McWorter está compuesta de una sola célula al momento de nacer (día cero), esto es, la curva iniciador; al siguiente día (día uno) esta célula se divide dando origen a seis células más, es decir, los seis segmentos que unidos tienen la forma de la poligonal de la curva generador con exactamente la construcción que se indicó geoméricamente; el día dos, está compuesto por 36 células que nacieron, por división celular, de cada una de las seis células del día uno; este patrón continúa indefinidamente de manera que cada día en la vida de la curva de McWorter se corresponde con una de las aproximaciones geométricas que convergen en la misma (véase figura 74).

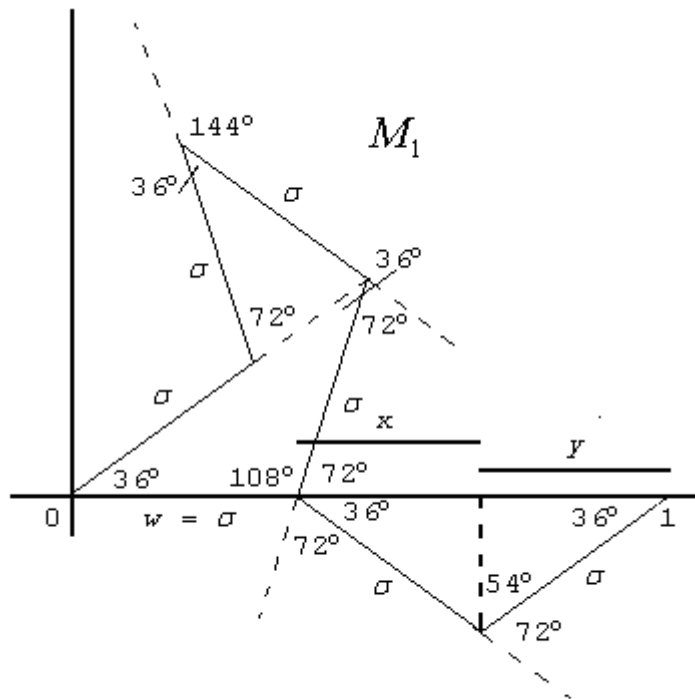


Figura 73

Ahora bien, de acuerdo a McWorter, cada que se recorre la curva en uno cualquiera de sus días, se le recorre siguiendo distintas direcciones, en particular, cinco direcciones [Este (E), Norte (N), Oeste (O), Sur (S) y Suroeste (SO)]. Para establecer hacia qué punto se sitúan cada una de estas direcciones, convenimos en comenzar el recorrido desde el lado izquierdo, de tal suerte que si la tortuga de Logo empezara el recorrido, la dirección Este (E) se localizaría justo al frente de ella, la dirección Norte (N) se ubica entonces sobre la dirección Este (E) en sentido antihorario, el Oeste (O) frente al Este (E) y el Sur (S) debajo del Norte (N). Agregamos una dirección más —que se utilizará durante el recorrido—, la dirección Suroeste (SO) que es hacia la que apunta el cuarto segmento de la curva generador.

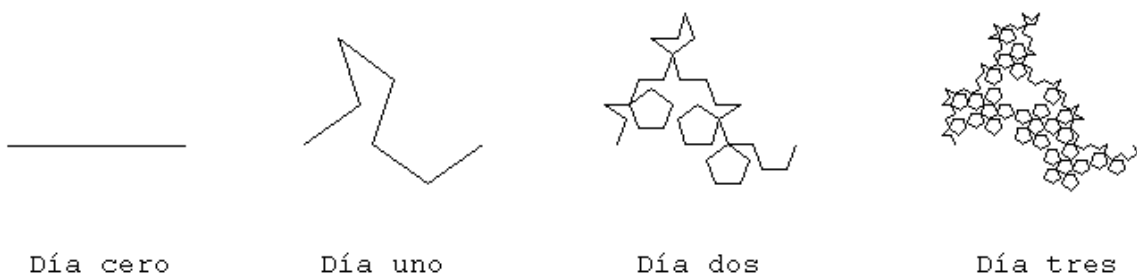


Figura 74

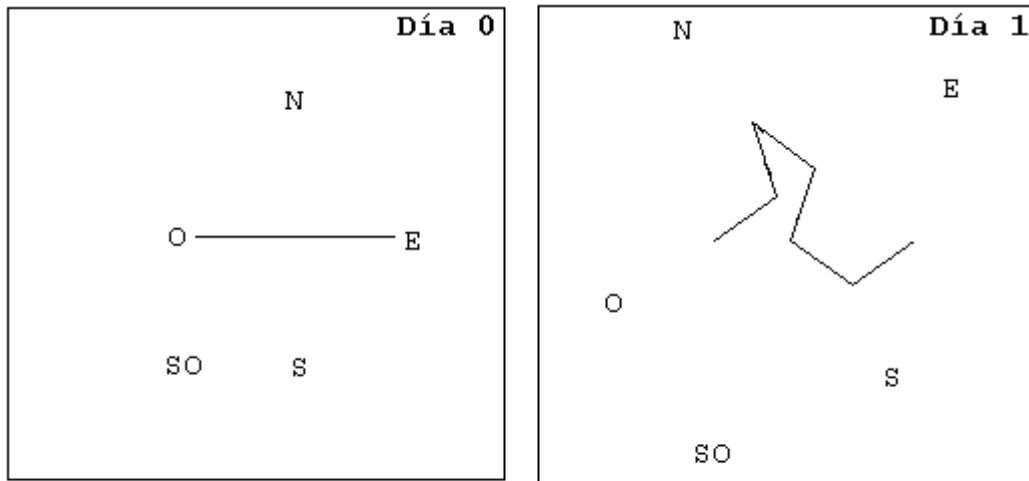


Figura 75

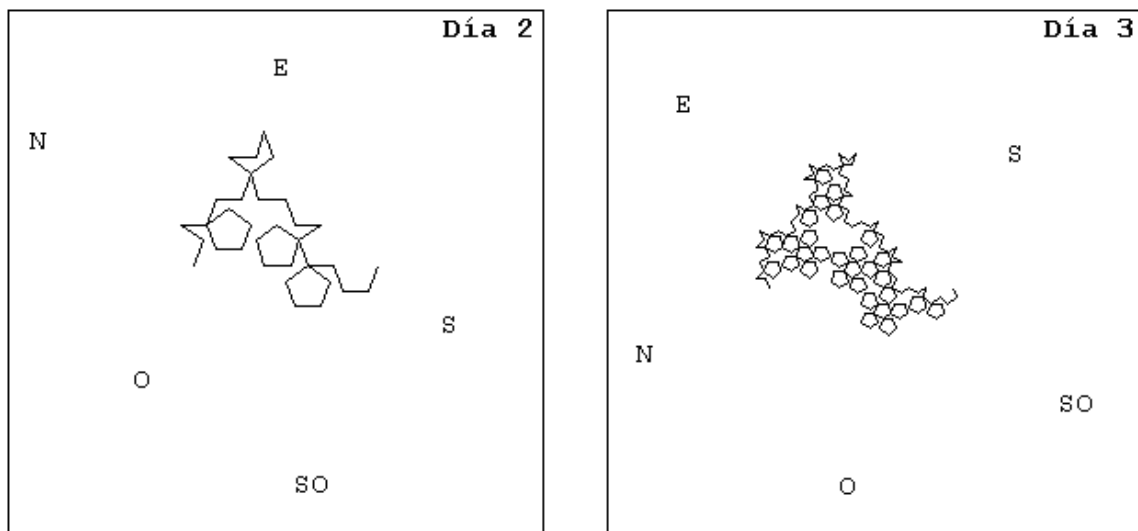


Figura 76

En la figura 75, aparecen las curvas de los días cero y uno para ilustrar en dónde exactamente se localizan cada una de las cinco direcciones hacia las que se viaja una vez que se recorren partiendo del lado izquierdo.

En la figura 76 aparecen las orientaciones de las cinco direcciones de recorrido para las curvas de los días dos y tres.

A partir de las figuras 75 y 76 y retomando el modelo propuesto por McWorter, tenemos que se realizan los siguientes recorridos:

El día cero se viaja sólo hacia el Este, es decir:

Día 0: E

El día uno se viaja primero en dirección Este, luego hacia el Norte, después hacia el Sur, posteriormente hacia el Suroeste, luego se avanza en dirección Sur y, finalmente, hacia el Este, es decir:

Día 1: E N S SO S E

Durante el segundo día de la vida del terágono, se viaja hacia las siguientes direcciones:

Día 2: E N S SO S E, N O E S E N, S E SO O SO S, SO S O N O SO, S E SO O SO S

Durante el día tres:

Día 3: E N S SO S E, N O E S E N, S E SO O SO S, SO S O N O SO, S E SO O SO S, E N S SO S E, N O E S E N, O SO N E N O, ...

Si se observan con cuidado las direcciones “visitadas” en los recorridos de cada día, se notará que aparecen los siguientes patrones:

E N S SO S E, N O E S E N, S E SO O SO S, SO S O N O SO, O SO N E N O y, de hecho, son los únicos patrones, ya que a partir del día tres aparece ya la curva generador –varias veces- orientada en las únicas cinco formas posibles (esas cinco formas, si observa el gráfico de la curva del día o etapa tres, Fig. 76, dan la ilusión de un pentágono). De manera que estamos ante un procedimiento recursivo que, como tal, nos permite generar -haciendo uso de estos cinco patrones- cualquier curva de cualquier día a partir de la curva del día anterior. Este procedimiento recursivo queda descrito por su código genético o ADN que nos indica cómo debe de reescribirse cada símbolo (E, N, O, S, SO) de una división celular a otra, esto es, de una aproximación o etapa a la aproximación o etapa siguiente. Este código genético o ADN tiene por reglas de reescritura:

$$\left. \begin{array}{l} E \rightarrow E N S SO S E \\ N \rightarrow N O E S E N \\ O \rightarrow O SO N E N O \\ S \rightarrow S E SO O SO S \\ SO \rightarrow SO S O N O SO \end{array} \right\} \text{Código genético ó ADN}$$

Así, si tomamos, por ejemplo, la cadena que describe el recorrido con respectivas direcciones para la curva del día uno y reemplazamos cada símbolo por las cadenas de reescritura del ADN asociado tendríamos:

Reescribiendo E (se reescribe de izq. a der.): [E N S SO S E] = E N S SO S E [N S SO S E].

Reescribiendo N: = E N S SO S E N O E S E N [S SO S E].

Reescribiendo S: = E N S SO S E N O E S E N S E SO O SO S [SO S E].

Reescribiendo SO: = E N S SO S E N O E S E N S E SO O SO S SO S O N O SO [S E].

Reescribiendo nuevamente S: = E N S SO S E N O E S E N S E SO O SO S SO S O N O SO S E SO O SO S [E].

Reescribiendo, finalmente, la última E: = E N S SO S E N O E S E N S E SO O SO S SO S O N O SO S E SO O SO S E N S SO S E [].

Así, tenemos que efectivamente la cadena que describe la división celular del segundo día está dada por: E N S SO S E N O E S E N S E SO O SO S SO S O N O SO S E SO O SO S E N S SO S E.

Es pues notable que tomando la cadena de símbolos correspondiente al día k y el ADN de esta curva, es posible obtener la curva del $(k-1)$ -ésimo día.

3.2.2 Propiedades básicas

Comenzaremos por determinar el número de segmentos rectos que posee la curva de McWorter en su aproximación k -ésima. Resumimos esta información en la siguiente tabla:

k	No. de segmentos
0	$6^0 = 1$
1	$6^1 = 6$
2	$6^2 = 36$
3	$6^3 = 216$
·	·
·	·
·	·
k	6^k

Tabla No. 15

Por otro lado, la longitud de los segmentos rectos que componen a la curva de McWorter en la k -ésima etapa está dado por la fórmula $L_k = \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^k$ que se obtiene inductivamente tras la lectura de la siguiente tabla de datos:

Curva de McWorter M_k	Longitud L_k
M_0	$L_0 = 1$
M_1	$L_1 = \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^1 = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$
M_2	$L_2 = \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^2$
M_3	$L_3 = \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^3$
·	·
·	·
·	·
M_k	$L_k = \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^k$

Tabla No. 16

Por lo tanto, la longitud de la curva de McWorter para la k -ésima etapa o aproximación está dada por:

$$L[M_k] = 6^k \left(\frac{2}{3 + \sqrt{5}} \right)^k$$

Otra propiedad destacable de la curva de McWorter consiste en que si se grafican continuamente cinco copias de la misma, iniciando la última copia en el punto en el que concluyó la anterior tras un giro de 72° hacia la izquierda, obtenemos un objeto fractal que posee cinco simetrías rotacionales del plano; esto es, podemos rotar cinco veces sobre sí mismo dicho objeto por un ángulo de 72° permaneciendo invariante la apariencia del mismo. La figura 77 nos muestra el objeto fractal obtenido con cinco copias de la curva de McWorter para las aproximaciones $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$ y $k = 5$.

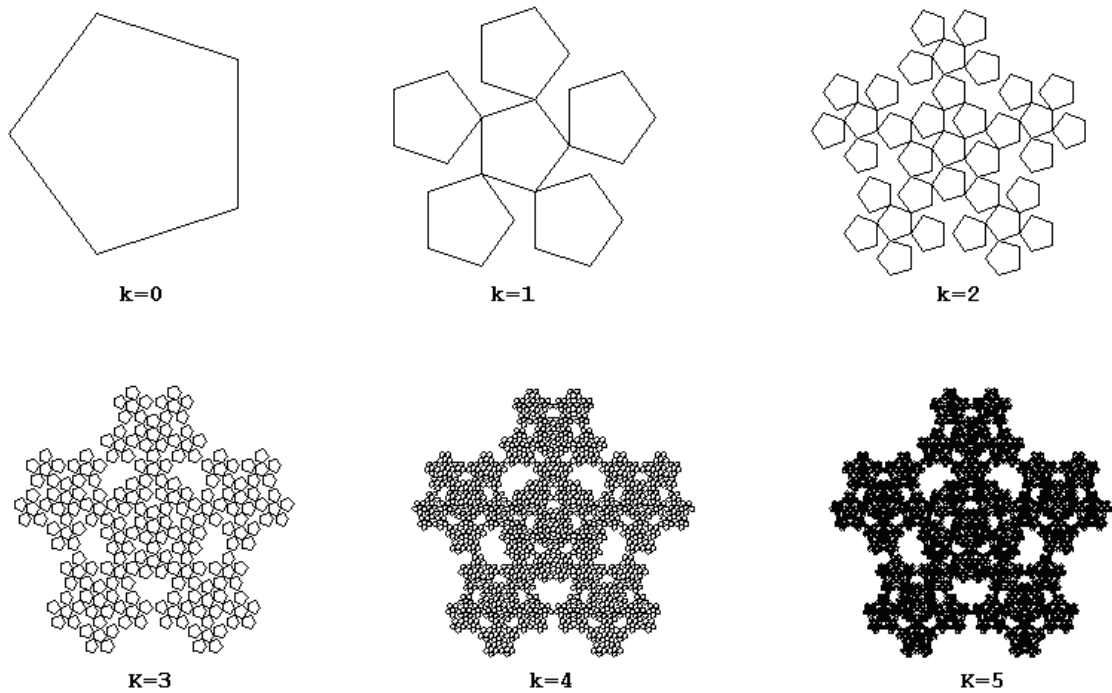


Figura 77

A esta forma de la curva de McWorter, Edgar Gerald la llama “Curva de McWorter extendida” y guarda un gran parecido con el “Pentágono de Dürero” (ver figura 78, tomada de [11]). La construcción del “Pentágono de Dürero”, aparece en la obra “Manual de Pintura” escrita por el pintor alemán Alberto Dürero en el año de 1525. Para obtenerlo, basta con tomar un pentágono regular y construir sobre cada uno de sus lados pentágonos cuya longitud de lado sea igual a la longitud de los lados sobre los que se están construyendo y repetir este proceso tantas veces como se desee. Un primer esbozo de esta construcción lo presenta Dürero en [DURA87, Págs. 92 y 93] y dice: *Se puede también hacer, partiendo de los pentágonos, cinco rosas que estén todas unidas y después, hacer otras cinco y unirlas a las anteriores, y continuar así enseguida y llenar los espacios que queden entre éstas con los accesorios que se quiera.*

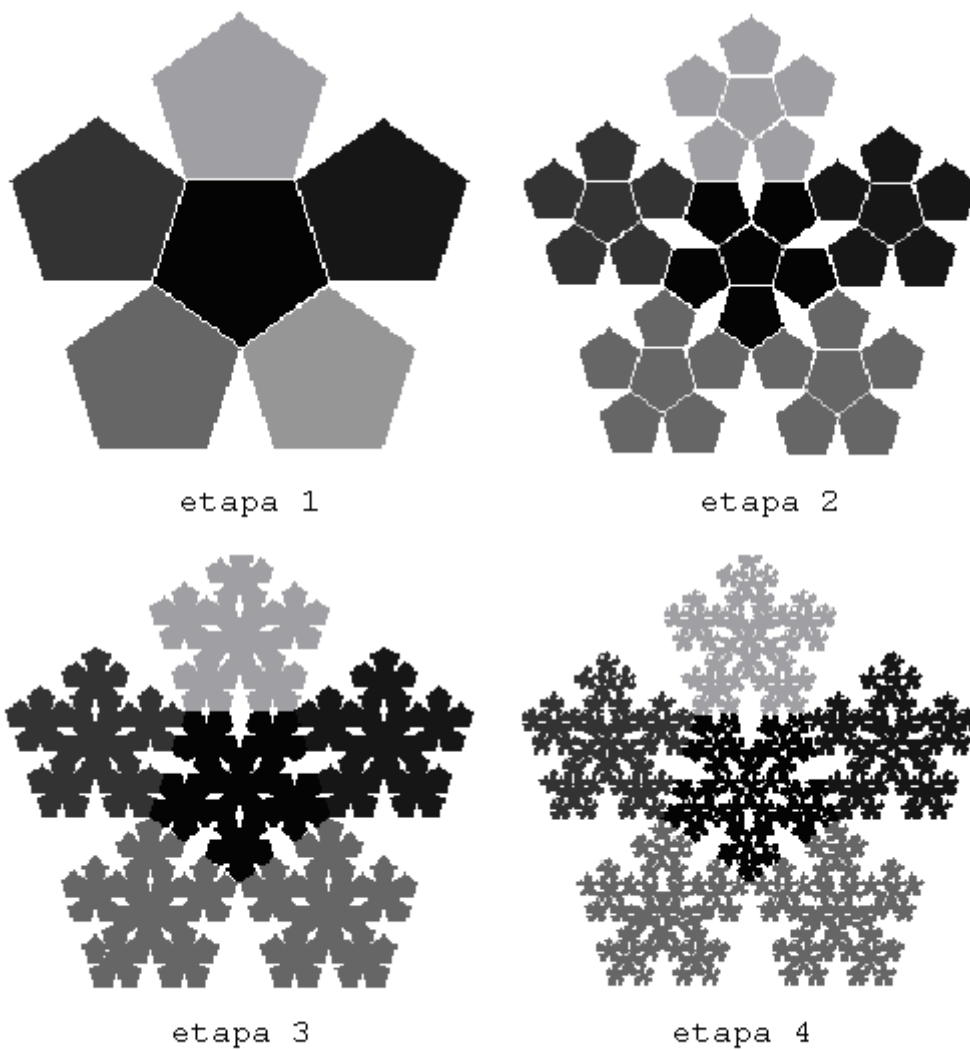


Figura 78

De hecho, la figura que así describe Durero es muy próxima a la ilustración de la etapa 2 de la figura 77, con la pequeña variante de contar con un pentágono menos.

Si, por otro lado, se experimenta un poco con la curva de McWorter se obtiene el fractal que aparece en la figura 79 y que resulta si, en lugar de unir las copias girando 72° a la izquierda al final de cada copia, giramos al final de cada copia 72° hacia la derecha; este fractal posee también cinco simetrías rotacionales. La figura obtenida no se encuentra en la literatura relacionada con esta tesis y como semeja una flor, proponemos para la misma el nombre de “Flor de McWorter”.

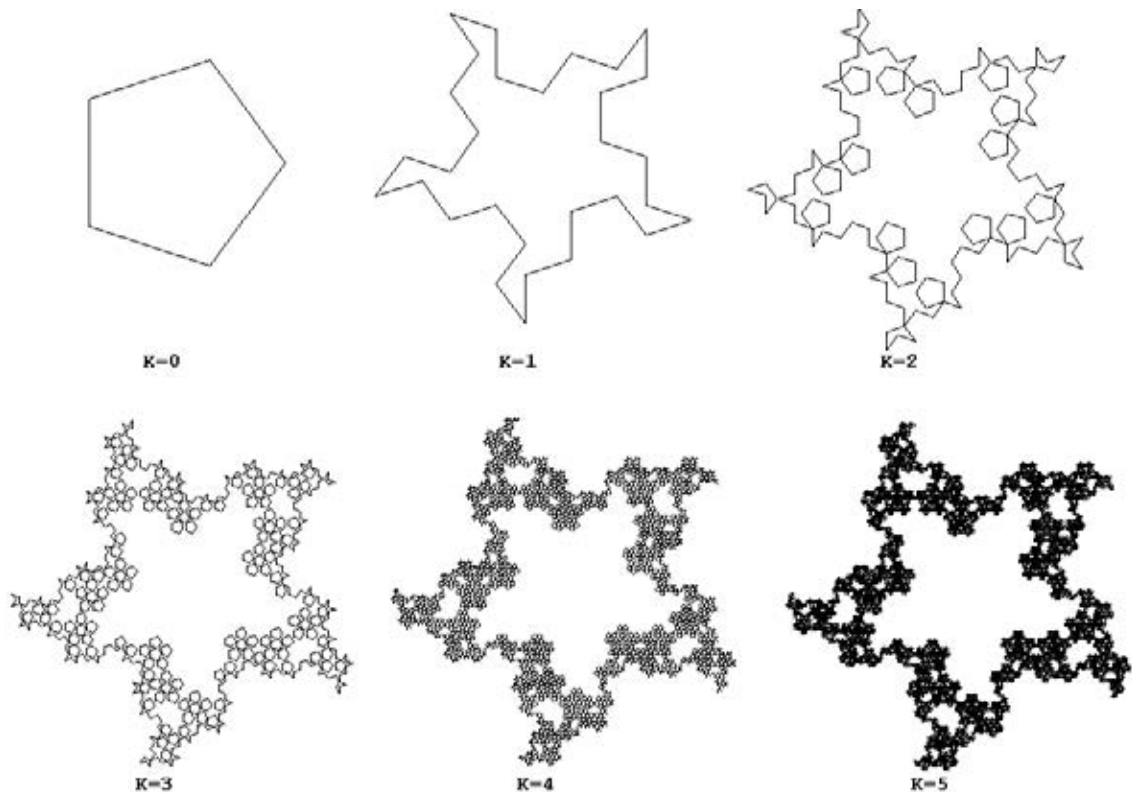


Figura 79

Volviendo a la curva de McWorter, tenemos que –como afirma el propio McWorter- salvo por los pequeños hoyos que presenta su estructura, se trata de una curva que llena parcialmente el plano, mas no una región completa del mismo; la curva de la aproximación M_9 de la figura 72 nos permite apreciar plenamente esto último sin apelar a una demostración analítica que frente a la dimensión fractal de esta curva (y por ende, fraccionaria), resulta ser –si bien no despreciable- sí redundante.

3.2.3 Naturaleza fractal

Tal y como se ha venido haciendo con las curvas fractales presentadas a lo largo de esta investigación, calcularemos la dimensión de homotecia de esta curva y determinaremos las transformaciones del plano autosemejantes, necesarias para generar la nueva curva que reemplaza cada uno de los seis segmentos que componen a la curva generador.

Para determinar la dimensión de homotecia de esta curva fractal, necesitamos conocer el número de copias n que a escala r obtenemos a partir de la aproximación k para obtener la aproximación $k+1$. Sabemos por la construcción de la curva de McWorter que esos números son, en este caso, $n=6$ y $r = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$. Por lo que la dimensión de homotecia de la curva de McWorter M está dada por:

$$d_A(M) = \frac{\ln(n)}{-\ln(r)} = \frac{\ln(6)}{-\ln\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)} = \frac{\ln(6)}{-[\ln(2) - \ln(3+\sqrt{5})]} = \frac{\ln(6)}{-[\ln(2) - \ln(5.236068)]}$$

$$= \frac{1.791759}{-[-0.693147 - 1.655571]} = \frac{1.791759}{-[-0.962424]} = \frac{1.791759}{0.962424} = 1.861714\dots$$

Y más brevemente, $d_A(M) = 1.861714\dots$ que es un número cercano a 2, lo que significa que esta curva está más cerca de ser un objeto bidimensional que un objeto unidimensional. Sin embargo, como se mencionó en la página 134, los hoyos que, conforme $k \rightarrow \infty$, disminuyen su tamaño sin nunca desaparecer, son los responsables de que esta curva no llene por completo el plano, sino sólo parcialmente.

Determinaremos ahora las transformaciones autoafines que permiten obtener este fractal. Partiremos de la curva iniciador y desde ella determinaremos las transformaciones que la mapean en cada uno de los seis segmentos que componen a la curva generador. En la figura 80 aparecen la curva generador y varios triángulos rectángulos que fueron útiles para determinar las coordenadas de los vértices de la curva, ya que los vectores de traslación que se utilizan en las transformaciones autoafines que aquí se proponen, no son sino vectores de posición de dichos puntos. Ordenamos los segmentos de esta curva en 1ero, 2do, etc., a partir de un recorrido en sentido horario, de modo que el 1er segmento es el que parte del origen y el último aquel cuyo extremo coincide con la coordenada (1,0).

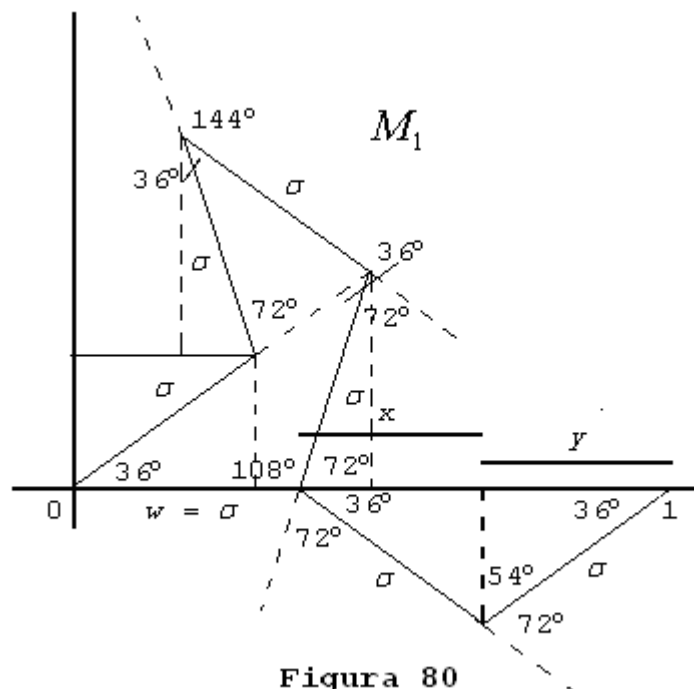


Figura 80

Para obtener el primer segmento es necesario:

1. Reducir el segmento iniciador a una razón $r = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$.
2. Rotar el segmento ya reducido por un ángulo de 36° .

Estas dos transformaciones se expresan matemáticamente de la siguiente manera:

$$T_1(M_0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3+\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3+\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(36^\circ) & -\text{sen}(36^\circ) \\ \text{sen}(36^\circ) & \cos(36^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La transformación autoafín que genera el segundo segmento a partir del segmento M_0 es:

$$T_2(T_1(M_0)) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3+\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3+\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(117^\circ) & -\text{sen}(117^\circ) \\ \text{sen}(117^\circ) & \cos(117^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma \cos 36^\circ \\ \sigma \cos 54^\circ \end{pmatrix}$$

Las cuatro transformaciones restantes para los segmentos tercero, cuarto, quinto y sexto son:

$$T_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3+\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3+\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-36^\circ) & -\text{sen}(-36^\circ) \\ \text{sen}(-36^\circ) & \cos(-36^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma \cos 36^\circ - \sigma \cos 63^\circ \\ \sigma \text{sen} 36^\circ + \sigma \text{sen} 63^\circ \end{pmatrix}$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3+\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3+\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(72^\circ) & -\text{sen}(72^\circ) \\ \text{sen}(72^\circ) & \cos(72^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3+\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_5 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3+\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3+\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-36^\circ) & -\text{sen}(-36^\circ) \\ \text{sen}(-36^\circ) & \cos(-36^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3+\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y, finalmente,

$$T_6 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3+\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3+\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(36^\circ) & -\text{sen}(36^\circ) \\ \text{sen}(36^\circ) & \cos(36^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma + \sigma \text{sen} 54^\circ \\ \sigma \cos 54^\circ \end{pmatrix}$$

Donde, como se calculó en la página 127, se tiene que $\sigma = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$.

En general, basta con aplicar estas seis transformaciones sobre cada uno de los segmentos que componen a la curva de la etapa k para obtener la curva de la etapa $k+1$, es decir, estas seis transformaciones constituyen el Sistema de Funciones Iteradas (SFI) que genera, en el límite, a la curva de McWorter.

Capítulo 4



Melancolía I, Alberto Durero

Meditación en el umbral

No, no es la solución
tirarse bajo un tren como la Ana de Tolstoi
ni apurar el arsénico de Madame Bovary
ni aguardar en los páramos de Ávila la visita
del ángel con venablo
antes de liarse el manto a la cabeza
y comenzar a actuar.

Ni concluir las leyes geométricas, contando
las vigas de la celda de castigo
como lo hizo Sor Juana. No es la solución
escribir, mientras llegan las visitas,
en la sala de estar de la familia Austen
ni encerrarse en el ático
de alguna residencia de la Nueva Inglaterra
y soñar, con la Biblia de los Dickinson,
debajo de una almohada de soltera.

Debe haber otro modo que no se llame Safo
ni Mesalina ni María Egipciaca
ni Magdalena ni Clemencia Isaura.

Otro modo de ser humano y libre.

Otro modo de ser.

Rosario Castellanos

4. ESPECIFICACIÓN DE LA CURVA DRAGÓN Y DE LA CURVA DE McWORTER A TRAVÉS DE UN SISTEMA L

4.1 Especificación de la curva Dragón a través de un Sistema L

13:26. Restate my assumptions:

1. Mathematics is the language of nature.
2. Everything around us can be represented and understood through numbers.
3. If you graph the numbers of any system, patterns emerge. Therefore, there are patterns everywhere in nature.

Maximilian Cohen en “ π , el orden del caos”

4.1.1 Especificación

Con el objetivo de especificar la curva dragón a través de un Sistema L de manera que sea perfectamente entendible dicha especificación vamos a ir desenlazando poco a poco, y en base a lo expuesto en el capítulo 3, el comportamiento de dicha curva; para ello, tengamos muy claro que necesitamos establecer a través de una fórmula o patrón recursivo la sucesión y dirección de los giros –a izquierda o derecha- que se efectúan en la construcción de la curva. Si utilizamos la construcción $[\uparrow]$ tenemos entonces que:

La aproximación d_0 , por tratarse del segmento iniciador, no requiere de ningún giro.

La aproximación d_1 exige un giro de 90° hacia la derecha.

La aproximación d_2 exige, primero, un giro a la derecha, otro más a la derecha y un último giro hacia la izquierda.

Para simplificar, apelaremos a la construcción binaria propuesta para esta curva, ya que nos indica –para cada iteración- la dirección de los giros; recuérdese de la sección 3.1 del capítulo 3 página 110 que, de hecho, si simbolizamos un giro hacia la derecha con el dígito binario 1 y un giro hacia la izquierda con 0, tenemos:

Aproximación d_k	Representación binaria ω
d_0	ε
d_1	1
d_2	110
d_3	1101100
d_4	1101100 1 1100100
d_5	1101100 1 1100100 1 1101100 0 1100100

·	·
·	·
·	·

Tabla No. 17

Ahora bien, a fin de ser congruentes con la notación aquí implementada para los Sistemas L, vamos a reetiquetar los giros a la derecha con el símbolo + y los giros a la izquierda con el símbolo -. Entonces la tabla anterior se convierte en:

Aproximación d_k	Representación binaria ω
d_0	ϵ
d_1	+
d_2	++-
d_3	++-+-
d_4	++-+- + +-+-
d_5	++-+- + +-+- + +-+- + +-+-
·	·
·	·
·	·

Tabla No. 18

Si trasladamos esto a una estructura arborescente, buscando encontrar de forma más sencilla el patrón recursivo, tenemos lo que se muestra en la figura 81. En donde notamos cómo, cuando del símbolo + salen tres hijos, entonces éste es reescrito por el patrón ++-; y cuando sale un hijo, éste es reescrito por sí mismo, es decir, por el símbolo +. Por otro lado, se ve también un patrón para el símbolo -, consistente en que cuando del símbolo - nacen tres hijos, entonces éste es reescrito por la sucesión +-; en tanto que cuando, de manera análoga que para el símbolo +, nace un solo hijo, entonces es reescrito por sí mismo, esto es, por el símbolo -. Este comportamiento nos lleva a afirmar que, por lo menos, contamos ya con dos símbolos para el alfabeto de nuestro Sistema L, los símbolos + y -.

De las especificaciones para curvas fractales a través de Sistemas L vistas a modo de ejemplo en el capítulo 2, sabemos que se necesita un símbolo para representar cualquier segmento recto que compone a la k -ésima aproximación; en este caso, utilizaremos el símbolo S . Entonces, la estructura arborescente de la figura 81 se transforma en la estructura arborescente de la figura 82, que nos muestra ya las sustituciones que se hacen para pasar de la etapa actual de la curva a la etapa siguiente. La única diferencia entre esta estructura y la anterior, radica en el símbolo S que etiqueta al nodo raíz y que aparece también en los subsecuentes nodos; este último árbol tiene un nivel más, pues incluye ya al símbolo inicial S como nodo raíz que si bien no contiene un giro –por tratarse del símbolo que representa la curva iniciador- sí nos permite entender de manera total la construcción de la curva en tanto un Sistema L, pues contiene ya los dos elementos fundamentales consustanciales a la topología de la curva dragón: segmentos rectos y ángulos positivos y negativos.

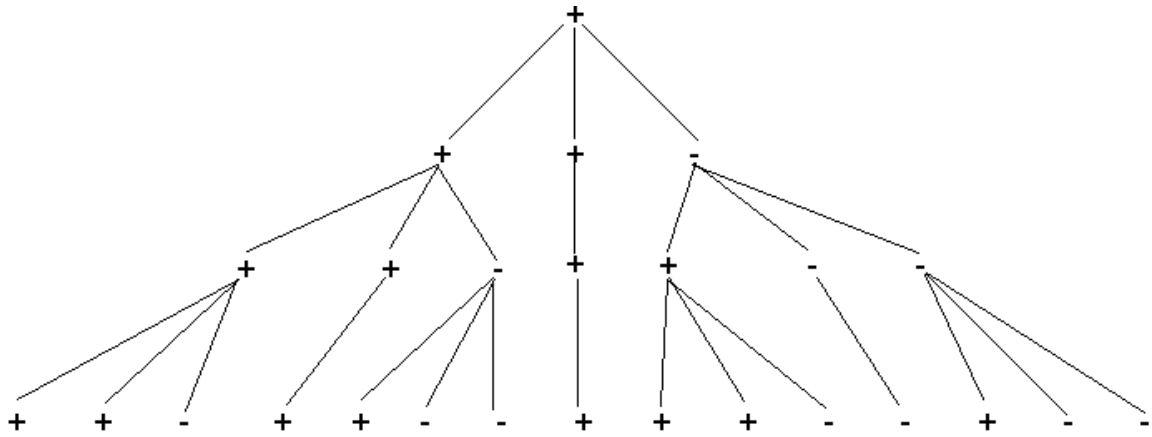


Figura 81

El siguiente ejemplo, aclarará la estructura de árbol correspondiente a la figura 82 y nos permitirá terminar de establecer por completo la recursividad inherente a la curva dragón. Para generar la curva dragón de orden 2 con arreglo a esta estructura arborescente, tendríamos que hacer los siguientes reemplazos:

$S \Rightarrow S + S \Rightarrow S + S + S - S$ la última cadena generada nos indica: trazar segmento, girar a la derecha, trazar segmento, girar otra vez a la derecha, trazar segmento, girar a la izquierda y, finalmente, volver a trazar segmento. Nótese cómo los símbolos de giro que intervienen en esta cadena son tres: $++-$ que —en ese orden— coinciden con la cadena binaria $\omega = 110$ que se utilizó para representar al dragón de orden 2 de acuerdo a su construcción binaria.

Además, este árbol conserva el relevo de los símbolos $+$ y $-$, es decir, los mismos reemplazos que verificó el árbol anterior; nos permite también aseverar de forma categórica que el símbolo S o bien, es reemplazado por el patrón $S + S$ o bien, por el patrón $S - S$, que es “casi” lo mismo salvo, por supuesto, que —dependiendo del símbolo para el ángulo— se hace un giro hacia la derecha o un giro hacia la izquierda. En el primer caso, el giro es hacia la derecha y entonces convertimos $S + S$ en $I + D$; en el segundo caso, el giro es hacia la izquierda y convertimos $S - S$ en $I - D$. La decisión ligada a estas conversiones se deduce del árbol mismo que nos indica —reiterando— que S puede tomar uno de dos valores. Es, por lo tanto, necesario utilizar no ya un símbolo —en este caso S —, sino dos símbolos, I y D (de izquierda y derecha).

Conocemos ya el mecanismo para reemplazo de símbolos y sabemos también que nuestro alfabeto cuenta con cuatro símbolos; los símbolos $I, D, +$ y $-$. Se propone, por lo tanto, el siguiente Sistema L para la curva dragón:

Alfabeto: $\Sigma = \{I, D, +, -\}$

Axioma: $\alpha = I$ y

Reglas de Producción:

$P = \{$

$P_1 : I \rightarrow I + D$

$P_2 : D \rightarrow I - D$

$P_3 : + \rightarrow +$

$P_4 : - \rightarrow -\}$

En donde:

$I, D \equiv \text{Segmentos de longitud } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$+, - \equiv \text{Giros a izquierda y derecha, respectivamente, por un ángulo } \theta = 90^\circ.$

En este caso, k indica el número de veces que se reescribe un símbolo determinado, utilizando una misma regla, desde el inicio de la derivación. Dicho símbolo se elige de manera arbitraria como contador para k y $k = 0$ cuando nos situamos en el símbolo inicial o axioma.

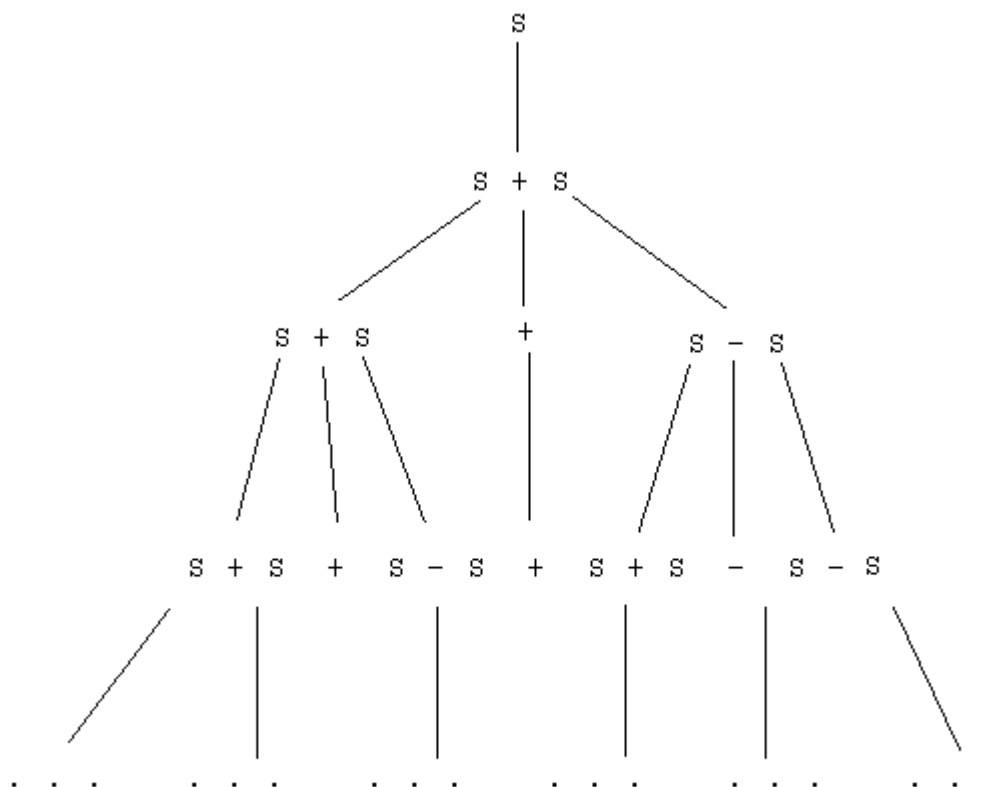


Figura 82

4.1.2 Gramática asociada a la especificación

En esta sección vamos únicamente a determinar el tipo de gramática asociada al Sistema L que, a su vez, describe a la curva dragón. Asimismo, utilizaremos árboles de derivación gramatical para ilustrar la forma en que se van generando distintas aproximaciones d_k de la curva.

De acuerdo a la jerarquía de lenguajes propuesta por Chomsky que se discutió en el capítulo 2 páginas 88 y 89, la gramática asociada a la especificación a través de un Sistema L de la curva dragón dada en la sección anterior es una gramática tipo 3 o de libre contexto pues para reemplazar un símbolo, de acuerdo a la regla de reescritura correspondiente, por un conjunto de uno o más símbolos no es necesario que dicho símbolo se encuentre entre otro grupo de símbolos determinado. Esto es, basta con tomar el símbolo y sustituirlo por los nuevos símbolos indicados por las reglas de reescritura sin que sea importante si a su alrededor tiene un símbolo $+$, un símbolo $-$, un símbolo I o un símbolo D .

Se trata además de una gramática de tipo recursivo, ya que sus reglas de producción son de la forma $\beta \rightarrow \delta\beta\gamma$.

Para la regla de producción P_1 , β vale I , $\delta = \varepsilon$ y $\gamma = +D$

Para la regla de producción P_2 , β vale D , $\delta = I-$ y $\gamma = \varepsilon$

Para la regla de producción P_3 , β vale $+$, $\delta = \varepsilon$ y $\gamma = \varepsilon$

Para la regla de producción P_4 , β vale $-$, $\delta = \varepsilon$ y $\gamma = \varepsilon$

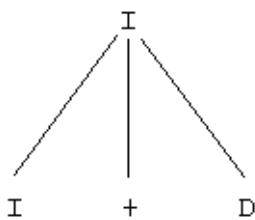
Utilicemos este Sistema L para construir diversas aproximaciones de esta curva:

Para la aproximación d_0 , no se requiere la aplicación de las producciones o reglas de reescritura, se trata del segmento iniciador e indudablemente coincide con el axioma I . Como en este caso, $k = 0$, entonces I tiene longitud igual a la unidad.

La derivación siguiente, genera la aproximación d_1 :

Iniciamos con el axioma I y tomamos a este símbolo y el número de sustituciones hechas sobre el mismo de acuerdo a la regla P_1 para contar el valor de k .

$I \xRightarrow{P_1} I + D$, como se hizo un solo reemplazo de I , a partir de P_1 , entonces $k = 1$ y las longitudes tanto de I como de D son $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1$ e $I + D$ significa: trazar un segmento I de longitud $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1$, girar por un ángulo $\theta = 90^\circ$ hacia la derecha y, finalmente, trazar un segmento D de longitud $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1$. La figura obtenida y el árbol gramatical de esta derivación se muestran en la figura 83.



Árbol gramatical asociado a la aproximación d_1



Primera aproximación de la curva dragón

Figura 83

La aproximación d_2 , se obtiene así (los paréntesis se han puesto sólo para dar mayor claridad a la derivación):

$I \xRightarrow{P_1} I + D \xRightarrow{P_1, P_2} (I + D) + (I - D) = I + D + I - D$, como se utilizó 2 veces P_1 para reescribir I , entonces $k = 2$, tanto I como D poseen longitud $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. Y el significado de la frase sentencial obtenida es: trazar

un segmento I de longitud $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$, dar un giro de 90° hacia la derecha, trazar un segmento D de longitud $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$, dar otro giro de 90° hacia la derecha, trazar un segmento I de longitud $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$, dar un giro de 90° hacia la izquierda y, finalmente, trazar un segmento D de longitud $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. La figura obtenida y el árbol gramatical de esta derivación se muestran en la figura 84.

Como último ejemplo, obtendremos la derivación para la aproximación d_3 :

$$\begin{aligned}
 I &\stackrel{P_1}{\Rightarrow} I + D \stackrel{P_1, P_2, P_3, P_4}{\Rightarrow} (I + D) + (I - D) \stackrel{P_1, P_2, P_3, P_4}{\Rightarrow} ((I + D) + (I - D)) + ((I + D) - (I - D)) \\
 &= I + D + I - D + I + D - I - D
 \end{aligned}$$

La lectura de la frase sentencial obtenida es similar a la lectura de las frases sentenciales anteriores y el resultado es la curva dragón de orden 3 (Figura 58)

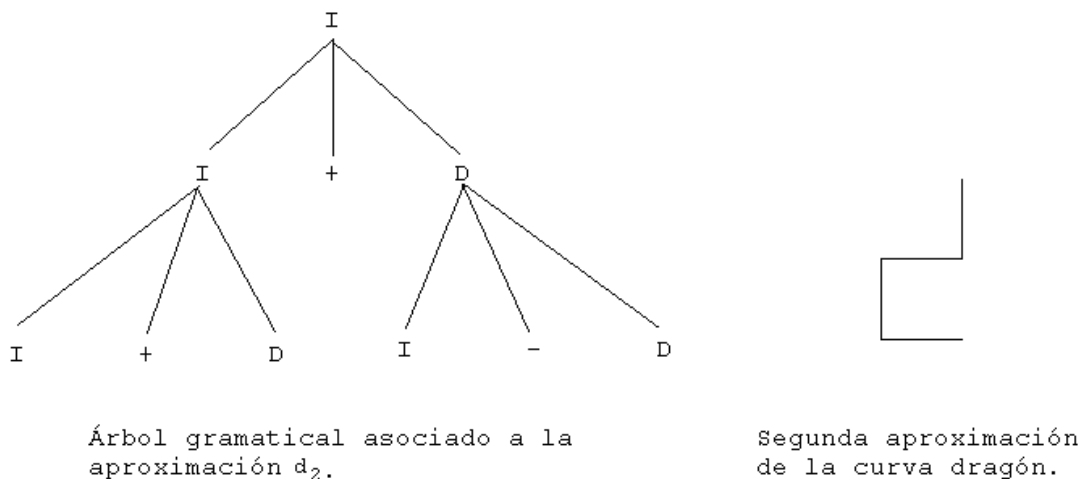


Figura 84

4.1.3 Algoritmo en lenguaje Logo

No sólo de manera intuitiva, sino que también a través del análisis del comportamiento de las pilas de recursión que se crean cuando se ejecuta cualquiera de los programas en Logo de los ejemplos del capítulo 2, resulta evidente que el símbolo I y el símbolo D equivalen –si intentamos diseñar también un algoritmo en lenguaje de programación Logo para este Sistema L- a una invocación recursiva dentro del mismo. De forma análoga, los símbolos $+$ y $-$ corresponden a las instrucciones `rt 90` y `lt 90`, respectivamente. Es necesario además que el programa calcule el valor de los segmentos D e I que componen a la curva de la etapa deseada; por el análisis hecho en el capítulo 3, sabemos que dichas longitudes dependen de la etapa k de la aproximación lo cual se expresa matemáticamente como $\left(1/\sqrt{2}\right)^k$. Sumando estos datos a lo expuesto en los últimos dos capítulos, se obtiene el siguiente código en lenguaje de programación Logo que nos permite obtener un gráfico computacional de esta curva.

Algoritmo 4.A

```
to dragon :tam :etapas
  make "factor power (1/sqrt 2 ) :etapas
  make "tamaño :tam*:factor
  dragon_i :tamaño :etapas
end

to dragon_d :tamaño :etapas
  if :etapas = 0 [forward :tamaño stop]
  dragon_i :tamaño :etapas-1
  lt 90
  dragon_d :tamaño :etapas-1
end

to dragon_i :tamaño :etapas
  if :etapas = 0 [forward :tamaño stop]
  dragon_i :tamaño :etapas-1
  rt 90
  dragon_d :tamaño :etapas-1
end
```

La función `dragon` es la función principal del programa, en ésta –básicamente- se hacen dos cosas: calcular el valor de la longitud de los segmentos que componen a la curva de la *k-ésima* etapa a través de las instrucciones `make "factor power (1/sqrt 2) :etapas` y `make "tamaño :tam*:factor` e invocar las funciones `dragon_i` y `dragon_d` a través de la línea `dragon_i :tamaño :etapas`. Las funciones `dragon_i` y `dragon_d` son equivalentes, por su funcionamiento, a los símbolos *I* y *D*, respectivamente; de hecho, son la codificación de dichos símbolos.

El caso base de los procedimientos recursivos `dragon_i` y `dragon_d` se da, por supuesto, cuando `etapas = 0`, cuando ello ocurre la tortuga de Logo dibuja a través de la instrucción `forward :tamaño` un segmento de longitud igual a `tamaño` y, en seguida, a través del comando `stop` hace una parada en la ejecución del programa regresando al stack frame anterior desde donde se invocó ya sea al procedimiento `dragon_i` o al procedimiento `dragon_d`.

Con el objetivo de que el funcionamiento de este programa sea totalmente claro, vamos a ilustrar el comportamiento del mismo mostrando la pila que se crea cada vez que es ejecutado, suponiendo los valores iniciales `etapas = 2` y `tam = 100`.

Lo primero que debe suceder para que corra el programa, es teclear desde línea de comandos la instrucción: `dragon 100 2`.

Esto nos permite invocar la función principal `dragon` para los parámetros `tam = 100` y `etapas = 2`; en ese momento comienza la ejecución de este procedimiento asignando a la variable `factor` el valor $(1/\sqrt{2})^{\text{etapas}}$ y como `etapas = 2` entonces `factor = (1/\sqrt{2})^2 = 0.5`. Después, tomamos de la longitud de `tam` la fracción indicada por `factor`, es decir, calculamos la longitud de los segmentos que conforman a la curva; esto se hace con la instrucción `make "tamaño :tam*:factor` que equivale a $\text{tamaño} = (\text{tam}) \left((1/\sqrt{2})^2 \right) = (100)(0.5) = 50$ y en seguida, se invoca a la función `dragon_i` a través de la instrucción `dragon_i :tamaño :etapas`, a partir de este momento, mostramos la ejecución subsiguiente del programa en la pila ya referida:

<p>7 tamaño=50, etapas=0, ¿etapas=0? Sí, entonces se ejecuta <code>forward=50</code> con lo que la tortuga de Logo dibuja un segmento de 50 pixeles de largo, el comando <code>stop</code> detiene la ejecución del programa y regresa a 5</p>
<p>6 tamaño=50, etapas=0, ¿etapas=0? Sí, entonces se ejecuta <code>forward=50</code> con lo que la</p>

tortuga de Logo dibuja un segmento de 50 pixeles de largo, para la ejecución con el comando <code>stop</code> y regresa a 5
5 tamaño=50, etapas=1, ¿etapas=0? NO, entonces <code>dragon_i :tamaño :etapas-1</code> 6 [continúa] <code>rt 90</code> y <code>dragon_d :tamaño :etapas-1</code> 7 [continúa] finaliza (<code>end</code>) y devuelve el control del programa a 1
4 tamaño=50, etapas=0, ¿etapas=0? SÍ, entonces la tortuga de Logo traza por medio de <code>forward :tamaño</code> un segmento de longitud 50 pixeles, se interrumpe la ejecución por el comando <code>stop</code> y el control del programa regresa a 2
3 tamaño=50, etapas=0, ¿etapas=0? SÍ, entonces la tortuga traza un segmento de longitud tamaño=50 por medio de la instrucción <code>forward :tamaño</code> y, por el comando <code>stop</code> , regresa al stack frame 2 que es donde fue invocado este procedimiento.
2 tamaño=50, etapas=1, ¿etapas=0? NO entonces <code>dragon_i :tamaño :etapas-1</code> 3 [continúa] <code>rt 90</code> y <code>dragon_d :tamaño :etapas-1</code> 4 finaliza (<code>end</code>) y regresa a 1
<code>dragon_i :tamaño :etapas</code> 1 1 tamaño=50, etapas=2, ¿etapas=0? NO entonces <code>dragon_i :tamaño :etapas-1</code> 2 [continúa] <code>rt 90</code> y <code>dragon_d :tamaño :etapas-1</code> 5 [continúa] y finaliza (<code>end</code>).
Pila del Proceso

Si recordamos que en una estructura de datos llamada pila el elemento en el tope de la misma es el primero en salir –comportamiento FIFO-, la pila se explica casi por sí sola. Por ejemplo, en el primer stack frame, que es el que corresponde al fondo de la pila, aparece la instrucción `dragon_i :tamaño :etapas` que a su vez corresponde a la primera invocación a este procedimiento que se hace desde la función principal `dragon`, dicha invocación hace notar que este stack frame, el 1, se crea al momento de dicha llamada; en ese momento los valores de `tamaño` y `etapas` son, respectivamente, 50 y 2. Se comienza a ejecutar entonces el procedimiento `dragon_i` con dichos valores en sus parámetros; la primera línea a ejecutarse – como lo muestra el stack- es la condicional `if` que pregunta si `etapas` vale cero; como no es así, se invoca nuevamente al procedimiento `dragon_i`. Esta segunda invocación aparece seguida de un 2 en negritas, lo que nos indica que debemos dirigirnos al stack frame etiquetado con el símbolo 2. En esta segunda invocación a `dragon_i`, `tamaño` sigue valiendo 50 y `etapas` decrementó a 1, como después de verificar el condicional `if` nos damos otra vez cuenta de que `etapas` aún no vale 0, entonces ejecutamos la siguiente línea de `dragon_i` que es una tercera llamada recursiva a `dragon_i`; en el stack frame, después de esta tercera llamada aparece en negritas el número 3 que nos remite, precisamente, al stack frame del tercer nivel. Aquí `etapas` ya vale 0 y, por ende, después de evaluar el condicional `if` y verificar que la sentencia que valora es verdadera, la instrucción a ejecutarse es `forward 50` que es la responsable de que la tortuga de Logo camine sus primeros 50 pixeles de forma lineal; el programa entonces para debido al `stop` que acompaña a la instrucción `forward 50`. La ejecución del programa vuelve entonces al stack frame 2 y continúa hasta acabar. En general, debe hacerse esta misma lectura para lo que resta de la pila. El stack frame 5 es el que, finalmente, nos devuelve al stack frame 1, que es el último en liberar su ejecución.

Lo mismo que con los códigos para las curvas anteriores, basta con capturar el código de la curva dragón en el editor de Logo y teclear desde línea de comandos el nombre de la función con que inicia la ejecución del programa (en este caso, `dragon`), seguido de los valores para `tam`, `etapas` y de la instrucción `execute` o de un `enter`; esta sencilla operación nos permite visualizar en la pantalla gráfica de Logo la aproximación a la curva dragón deseada. Así, si tecleamos:

`dragon 100 0` visualizamos:



dragon 100 1 visualizamos:

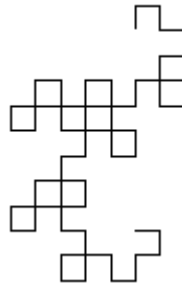


dragon 100 2 visualizamos:



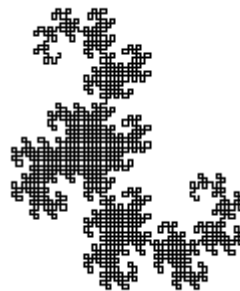
....

dragon 100 6 visualizamos:



...

dragon 100 11 visualizamos:



4.2 Especificación de la Curva de McWorter a través de un Sistema L

“... podemos decir que la geometría fractal está constituida por una infinidad de elementos cada uno de los cuales representa una transformación geométrica completa y única.

Como los símbolos gráficos del chino y el japonés, cada algoritmo fractal funciona como un ideograma que transmite un mensaje global característico.”

Fractus, fracta, fractal, Vicente Talanquer

4.2.1 Especificación

El comportamiento de la curva de McWorter, en tanto terágono, es similar al de la curva de Peano y al de la curva de Von Koch en el sentido de que cada uno de sus segmentos son siempre reemplazados, de una etapa a la siguiente, por una misma poligonal llamada generador que iterativamente converge en la curva de McWorter. Dicha poligonal generador entraña el patrón de reemplazo y, en este caso, resulta de gran utilidad para especificar el Sistema L de esta curva. Remitiéndonos a la figura 80 del capítulo 3, vemos que los ángulos para pasar de un segmento al siguiente de la curva generador son todos múltiplos constantes de 36° ; así, $72^\circ = 2(36^\circ)$ y $144^\circ = 4(36^\circ)$. Por tanto, utilizaremos como ángulo de giro para el Sistema L propuesto para esta curva, al ángulo $\theta = 36^\circ$. Codifiquemos ahora -y con miras a definir el Sistema L buscado- la construcción de la curva generador utilizando símbolos de algún alfabeto Σ que contiene únicamente los signos del Sistema L de la curva de McWorter. El estudio hecho hasta ahora de esta curva nos lleva a asentar enfáticamente que $\Sigma = \{L, +, -\}$, en donde L re presenta un segmento de longitud $\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^k$. He aquí la codificación para la construcción de la curva generador $-L--L++++L++L--L--L$ cuya semántica es: Dar un giro de 36° hacia la izquierda (ángulo positivo), trazar enseguida un segmento recto de longitud $\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^k$ seguido de dos giros de 36° hacia la izquierda; trazar nuevamente un segmento recto de longitud $\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^k$ y, en seguida, cuatro ángulos negativos (giros hacia la derecha) de 36° , volver a trazar un segmento recto de la longitud ya indicada seguido por dos giros a la derecha por un ángulo de 36° . Trazar otra vez un segmento recto de longitud $\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^k$ y, después, dos giros hacia la izquierda por un ángulo de 36° y nuevamente un segmento recto de longitud $\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^k$ seguido de dos giros hacia la izquierda de 36° y, finalmente, un último segmento recto de longitud $\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^k$. En apariencia, ésta es la cadena básica sobre la que se erige toda la curva de McWorter si es reescrita una y otra vez, sin embargo, si somos perspicaces y nos adelantemos un poco en la sustitución sucesiva de los símbolos L por dicha cadena tomando en cuenta la geometría del conjunto generador, notamos que haría falta agregar al final de la cadena un símbolo $+$ ¿por qué? porque los dos últimos giros de 36° hacia la izquierda dejan inclinado por una pendiente de dicha magnitud al último segmento L dibujado, ésto es, queda inclinado por un ángulo positivo de 36° , teniendo así la misma inclinación que el primer segmento L trazado que compone a la curva generador y como es este primer segmento el que será tomado para ser sustituido por el patrón $-L--L++++L++L--L--L$, es entonces conveniente agregar de una vez (al final y no al inicio) el símbolo $+$ que vuelve a dejar inclinada horizontalmente la dirección inicial con la que ha de comenzarse el trazado de la curva generador (ver figura 85). De esta simple observación y de las notas con que inicia este apartado, concluimos que el Sistema L de la curva de McWorter se define como:

Alfabeto : $\Sigma = \{L, +, -\}$

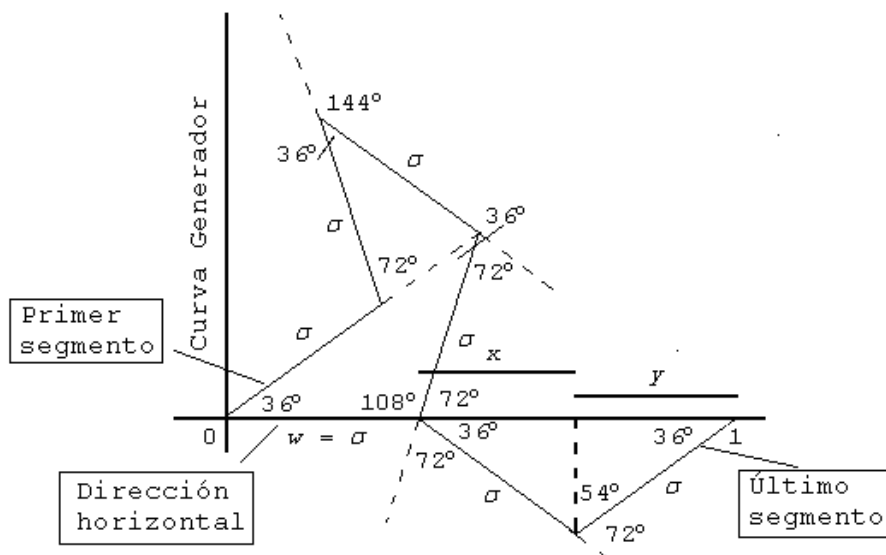
Axioma : $\alpha = L$

Reglas de Producción:

$P = \{P_1 : L \rightarrow -L--L++++L++L--L--L+\}$

$P_2 : + \rightarrow +$

$P_3 : - \rightarrow -\}$



El último símbolo + añadido a la cadena que contiene de forma codificada la construcción de la curva generador, establece que la dirección de inicio de la sustitución siguiente coincide con la de una recta horizontal. Esto permite que al tomarse el 1er. segmento de la curva generador para reemplazarlo por una poligonal de la misma forma, la dirección coincida con la de dicho segmento, de modo que no sea deformado por el patrón que debe seguir nuestra curva.

Figura 85

Demostraremos ahora únicamente la primera derivación –de la etapa 0 a la etapa 1- por cuestiones de espacio; es sin embargo, muy claro que el símbolo L es reescrito por el patrón $-L--L++++L++L--L--L+$. Véase la figura 86.

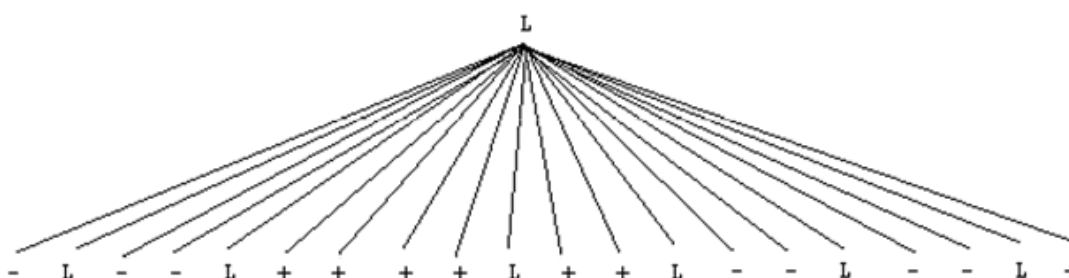


Figura 86

4.2.2 Gramática asociada a la especificación

Estamos indudablemente –igual que con la curva dragón- frente a una gramática libre de contexto o de tipo 3 de acuerdo a la Jerarquía propuesta por Noam Chomsky ya que contamos con un solo símbolo de reescritura, L , que no necesita estar rodeado por algún otro símbolo en particular -perteneciente también a Σ - para ser reemplazado –según las reglas de producción- por un nuevo conjunto de símbolos.

Se trata también de una gramática que contiene reglas de producción recursivas del tipo $\beta \rightarrow \delta\beta\gamma$ y, por ende, de una gramática recursiva. En este caso, los símbolos β , δ y γ corresponden a:

Para la producción P_1 , $\beta=L$ y δ y γ valen alternativamente concatenaciones de los símbolos + y - de magnitud, a lo más, 4.

Para la producción P_2 , $\beta=+$ y δ y γ simbolizan la cadena vacía ϵ .

Para la producción P_3 , $\beta=-$ y δ y γ simbolizan la cadena vacía ϵ .

Generemos ahora unas cuantas aproximaciones de esta curva tomando como punto de apoyo el Sistema L que se acaba de proponer. Debe tomarse en cuenta que, igual que con la curva dragón, k indica el número de veces que se reescribe un símbolo determinado, utilizando una misma regla, desde el inicio de la derivación. Dicho símbolo se elige de manera arbitraria como contador para k y $k=0$ cuando nos situamos en el símbolo inicial o axioma.

Así, la curva d_0 coincide con el símbolo inicial o axioma L , y visualmente corresponde a la imagen 87:



Figura 87

La derivación para la obtención de la aproximación d_1 es $L \xrightarrow{P_1} L--L++++L++L--L--L+$, visualmente coincide con la curva de la figura 88:



Figura 88

La aproximación d_2 se deriva así y corresponde a la figura 89:

$$L \xrightarrow{P_1} L--L++++L++L--L--L+ \xrightarrow{P_1, P_2, P_3} -(-L--L++++L++L--L--L+)--$$

$$(-L--L++++L++L--L--L+)+++(-L--L++++L++L--L--L+)++$$

$$(-L--L++++L++L--L--L+)--(-L--L++++L++L--L--L+)--$$

$$(-L--L++++L++L--L--L+)+=-L--L++++L++L--L--L+$$

$$---L--L++++L++L--L--L++++-L--L++++L++L--L--L++++$$

$$-L--L++++L++L--L--L+---L--L++++L++L--L--L+---L--L$$

$$++++L++L--L--L++$$

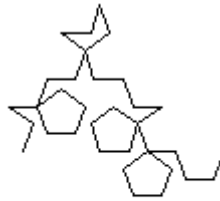


Figura 89

En general, la curva de McWorter de orden k corresponde a la frase sentencial obtenida a partir de su Sistema L después de k sustituciones.

4.2.3 Algoritmo en Lenguaje Logo

Estamos listos para codificar en Lenguaje de programación Logo el Sistema L para la curva de McWorter. Dado que a lo largo de esta investigación se han venido implementando todos los algoritmos con este lenguaje, podemos decir –no sin cierta autoridad- que se tiene ya la experiencia necesaria para realizar esta traslación simbólica. Sabemos ya que el símbolo L de la producción P_1 se corresponde con una llamada a la función recursiva que genera a la curva; sabemos también que los símbolos $+$ y $-$ equivalen, respectivamente, a un $rt\ 36$ y a un $lt\ 36$, lo único entonces que hace falta es calcular, dentro una función principal que invocará a la función recursiva, el valor de los segmentos rectos que componen a la curva en función del tamaño del segmento iniciador deseado y de la aproximación que se desea graficar. Este cálculo resulta en realidad ser poco engorro, pues –de hecho- ya se realizó en el capítulo 3 cuando se analizaron las propiedades más importantes de esta curva y corresponde a la ya conocida ecuación $\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^k$. Todo lo que hace falta es, entonces, traducir esto a lenguaje de computadora, en este caso, uno de alto nivel, Logo.

De este modo, nos permitimos proponer el siguiente programa en Logo para la generación gráfica de esta curva; el programa corre cuando tecleamos en línea de comandos la palabra `mcworter` seguida de los valores que se deseen asignar a las variables `etapas` y `tamaño` y de un enter:

Algoritmo 4.B

```
to mcworter :etapas :tamaño
  make "factor power (2/(3 + sqrt 5)) :etapas
  make "tamaño :tam*:factor
  penta :etapas :tamaño
end

to penta :etapas :tamaño
  if :etapas = 0 [forward :tamaño stop]
  lt 36
  penta :etapas-1 :tamaño
  repeat 2[lt 36]
  penta :etapas-1 :tamaño
  repeat 4[rt 36]
  penta :etapas-1 :tamaño
  repeat 2[rt 36]
  penta :etapas-1 :tamaño
  repeat 2[lt 36]
  penta :etapas-1 :tamaño
  repeat 2[lt 36]
  penta :etapas-1 :tamaño
  rt 36
```

end

Expliquemos. Al igual que con los otros programas, contamos con un programa principal –en este caso, llamado `mcworter`- en el que calculamos el valor de la longitud de los segmentos que componen a la curva de la k -ésima etapa; en concreto, esto se logra con la instrucción `make "factor power (2/(3 + sqrt 5)) :etapas` que equivale a $factor = \left(\frac{2}{3 + \sqrt{5}}\right)^{etapas}$ en donde, por supuesto, `etapas` es una variable que se introduce desde línea de comandos y corresponde a la aproximación deseada para la curva, esto es, a la variable k . En la siguiente línea del programa, la instrucción `make "tamaño :tam*factor` permite tomar de la variable `tam` la fracción indicada por `factor` y, con ello, determinar el tamaño de los segmentos. En seguida, se invoca por primera vez a la función recursiva `penta` por medio de la instrucción `penta :etapas :tamaño`. El valor de los parámetros formales que acompañan a `penta` depende del valor inicial elegido tanto para `etapas` como para `tam`.

Supongamos que elegimos para `etapas` el valor de 1 y para `tam` el valor de 100, mostramos entonces el comportamiento de la corrida del programa en el siguiente stack recursivo:

`etapas = 1` y `tamaño = 100`, entonces

$factor = \left(\frac{2}{3 + \sqrt{5}}\right)^1 = \left(\frac{2}{3 + \sqrt{5}}\right)$ y $tamaño = tam \cdot factor = 100 \cdot \left(\frac{2}{3 + \sqrt{5}}\right) = \frac{200}{3 + \sqrt{5}}$ se invoca por primera vez a la función `penta` con `penta :etapas :tamaño (1)` y comienza a generarse la pila recursiva:

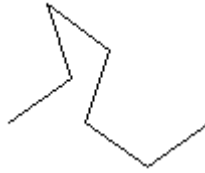
(7) <code>etapas=0</code> , <code>tamaño=200/(3+√5)</code> , ¿ <code>etapas=0?</code> SÍ, entonces <code>fd :tamaño=200/(3+√5)</code> termina y retorna finalmente a (1).
(6) <code>etapas=0</code> , <code>tamaño=200/(3+√5)</code> , ¿ <code>etapas=0?</code> SÍ, entonces <code>fd :tamaño=200/(3+√5)</code> termina y regresa a (1).
(5) <code>etapas=0</code> , <code>tamaño=200/(3+√5)</code> , ¿ <code>etapas=0?</code> SÍ, entonces <code>fd :tamaño=200/(3+√5)</code> termina y regresa a (1).
(4) <code>etapas=0</code> , <code>tamaño=200/(3+√5)</code> , ¿ <code>etapas=0?</code> SÍ, entonces <code>fd :tamaño=200/(3+√5)</code> termina y regresa a (1).
(3) <code>etapas=0</code> , <code>tamaño=200/(3+√5)</code> , ¿ <code>etapas=0?</code> SÍ, entonces <code>fd :tamaño=200/(3+√5)</code> termina y regresa a (1).
(2) <code>etapas=0</code> , <code>tamaño=200/(3+√5)</code> , ¿ <code>etapas=0?</code> SÍ, entonces <code>fd :tamaño=200/(3+√5)</code> termina y regresa a (1).
(1) <code>etapas=1</code> , <code>tamaño=200/(3+√5)</code> , ¿ <code>etapas=0?</code> NO, entonces <code>lt 36</code> y <code>penta :etapas-1, :tamaño (2)</code> <code>repeat 2[lt 36]</code> y <code>penta :etapas-1, :tamaño (3)</code> y <code>repeat 4[rt 36]</code> y <code>penta :etapas-1, :tamaño (4)</code> y <code>repeat 2[rt 36]</code> y <code>penta :etapas-1, :tamaño (5)</code> y <code>repeat 2[lt 36]</code> y <code>penta :etapas-1, :tamaño (6)</code> y <code>repeat 2[lt 36]</code> y <code>penta :etapas-1, :tamaño (7)</code> y <code>rt 36</code> , termina (<code>end</code>) y regresa al programa principal pues allí fue invocada por 1era. vez esta función. La siguiente línea a ejecutarse en <code>mcworter</code> es <code>end</code> y, por tanto, termina la ejecución del programa.

Pila del Proceso

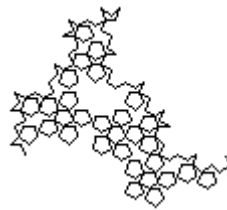
Finalmente, se comenta que para poder visualizar el resultado de esta corrida desde el editor gráfico de Logo basta hacer dos cosas: 1) capturar en el editor de Logo el programa para esta curva y 2) teclear en línea de comandos las instrucciones: `mcworter 1 100`, seguidas de un click en el botón `execute` o de un inocuo enter. El resultado es ya conocido:

```
mcworter 0 100
```

mcworder 1 100



mcworder 3 100



mcworder 4 100



mcworder 6 100



Conclusiones



“La Escuela de Atenas”, Rafael Sanzio

LOS INMORTALES

Hasta nosotros sube de los confines
del mundo el anhelo febril de la vida:
con el lujo la miseria confundida,
vaho sangriento de mil fúnebres festines,
espasmos de deleite, afanes, espantos,
manos de criminales, de usureros, de santos;
la humanidad con sus ansias y temores,
a la vez que sus cálidos y pútridos olores,
transpira santidades y pasiones groseras,
se devora ella misma y devuelve después lo tragado,
incuba nobles artes y bélicas quimeras,
y adorna de ilusión la casa en llamas del pecado;
se retuerce y consume y degrada
en los goces de feria de su mundo infantil,
a todos les resurge radiante y renovada,
y al final se les trueca en polvo vil.
Nosotros, en cambio, vivimos las frías
mansiones del éter cuajado de mil claridades,
sin horas ni días,
sin sexos ni edades.

Y sus pecados y sus pasiones
y hasta sus crímenes nos son distracciones,
igual y único es para nosotros el menor momento.
Viendo silenciosos sus pobres vidas inquietas,
mirando en silencio girar los planetas,
gozamos del gélido invierno espacial.
Al dragón celeste nos une amistad perdurable;
es nuestra existencia serena, inmutable,
nuestra eterna risa, serena y astral.

Hermann Hesse

CONCLUSIONES

Es verdad que un matemático
que no tenga algo de poeta
nunca será un matemático perfecto.

Karl Weierstrass

Dividiré este último apartado llamado Conclusiones en tres partes: Comentarios, Líneas de investigación y Conclusiones, en ese orden.

Comentarios

1. ¿Por qué elegí como prelude para lo que son mis conclusiones sobre este trabajo de investigación un epígrafe que nos remite a un pensamiento de Karl Weierstrass? ¿Porque fue el primer matemático en proponer públicamente la existencia de una función continua sin derivadas? Posiblemente también por eso, pero sobre todo -y en ello radica la principal aportación que me es posible dar como conclusión a este trabajo-, porque un matemático debe ser también un poeta. Con esto no me refiero exactamente al sentido clásico del término poeta (si bien existe un horda de matemáticos que hacen salir de sus melancólicos bolígrafos hermosas construcciones líricas), sino al origen filológico de dicho vocablo, a saber, creador. Sí, el poeta es un creador –proviene del término griego *Ποιητής* que significa justamente eso, *poietés*-, crea y construye mundos completamente alternos a través de su lírica, erige universos en un acto de creación análogo al de dioses mitológicos o no. El matemático y, en concreto, el matemático aplicado debe aspirar también a genuinos actos de creación. Si, por ejemplo, mi perfil fuera el de una matemática pura me diría –como muchas veces lo he hecho- no basta con aprender matemáticas, hay que también crearlas. Pues bien, el matemático aplicado ha de aspirar a crear teniendo como herramientas principales dos objetos: matemáticas y algoritmos computacionales. No ha de bastar con combatir viejos problemas planteados proponiendo nuevas soluciones o formas de abordarles, como por ejemplo ocurre cuando en tercer y/o cuarto semestre se nos pide programar el problema de las “Torres de Hanoi” o el problema de “Las ocho reinas” en algún lenguaje como C; por supuesto que es esencial combatir este tipo de problemas, pero dicho combate debe ser visto como ese paso intermedio que nos permita después reorientar nuestras aspiraciones. Las matemáticas aplicadas deben ser, entonces, en una segunda lectura, matemáticas experimentales; un *topos*, un lugar, ese laboratorio que nos permita crear a través de experimentos -unas veces fallidos otras no tanto- toda suerte de entes de factura matemática. Pero ¿por qué me permito yo, todavía una incipiente aprendiz, imprimirle un deber al quehacer de la matemática aplicada? Pues, porque si bien no soy poseedora de la autoridad moral para dicha encomienda, lo cierto es que a través del trabajo e investigación realizados para la elaboración de esta tesis pude percatarme de lo apremiante de dicho deber, pero –y este es lo más relevante- pude hacer eso que se debe hacer, ésto es, experimentar. En mi muy particular caso, logré dicha experimentación a través de la investigación que, en este caso, tomé como leitmotiv para la tesis. El resultado de dichos experimentos han sido cristalizados no sólo a través de las primigenias propuestas que quedan sentadas en la investigación de los últimos dos capítulos, sino también en el Apéndice, en donde presento una curva fractal de creación propia y el algoritmo correspondiente en Logo que fue resultado casual de intentar experimentar un poco con el Algoritmo para la curva de Hilbert; pongo por nombre a ese hallazgo “curva de Chillones” y, estoy segura que será objeto de nuevas pesquisas que espero poder realizar pronto; la “curva de Chillones” guarda gran parecido con otros objetos fractales que podemos mirar en las láminas que contienen varios de los libros aquí utilizados; por ejemplo, en la obra clásica de Mandelbrot, en el libro de Barnsley, etc. La curva de Chillones resulta ser, a simple vista, un objeto fractal, pero no me atrevo a afirmarlo enfáticamente porque falta todavía

caracterizarla matemáticamente ya que se trata de un descubrimiento de origen algorítmico. Justo a colación de esto, llegan a mi mente todas esas imágenes de fractales coloridos que pululan por más de un sitio web y que constituyen propuestas enteramente originales por parte de sus creadores y, si bien –lo mismo que la curva de Chillones- resultan ser aportaciones nimias para la ciencia, no por ello podemos dejar de lado la importancia en geometría fractal de crear nuevos y más sofisticados fractales. Ello mismo preconizaba William Alexander McWorter en su artículo “Creating Fractals” y mi percepción es que –de hecho- ésta es la tendencia.

2. Cuando inicié la tesis, el objetivo primario no era ofrecer algoritmos en Logo de los modelos propuestos, sino que la investigación fue llevándome poco a poco hacia ese objetivo. En realidad, fueron dos hechos sin aparente conexión alguna –pero que ocurrieron casi en simultáneo- los que terminaron por persuadirme de la importancia de ofrecer algoritmos propios utilizando el lenguaje Logo: **1)** El haber trabajado durante casi dos años con niños de primaria como maestra de cómputo, ya que más allá de lo enriquecedor que fue para mí exponer mi espíritu a tan hermosas criaturas y mucho más allá aún de lo poco significativo a nivel curricular e intelectual que, en apariencia, es el trabajo como profesor de cómputo a un nivel tan elemental como es la escuela primaria, más allá –de ello- retomando el hilo conductor; fue allí, en ese trabajo en donde por primera vez supe de este lenguaje y en donde tuve mi primer encuentro con el mismo, ya que a los niños de 5° y 6° se les enseñaba a programar en Logo algunos problemas elementales de Geometría euclidiana y **2)** Descubrir con bastante sorpresa que Gerald A. Edgar utilizaba este mismo lenguaje en [EDGG90] y que resultó ser una de las fuentes fundamentales para mi investigación. Fue tanto más sorprendente cuanto que me parecía no poco interesante que, por un lado, resultaba posible utilizar Logo como lenguaje para enseñar a niños –en ese momento ya estaba trabajando en la primaria- y, por el otro, era también posible que un matemático que se dedicaba a la investigación de áreas teóricas de la geometría fractal como topología métrica y teoría de la medida, lo utilizara para programar curvas fractales en un libro de texto de nivel universitario.

Líneas de Investigación

1. Hoy día, una de las áreas más socorridas de las Matemáticas Aplicadas y de la Computación es la geometría computacional o graficación por computadora, en particular, en mi formación como estudiante de MAC tuve la oportunidad de llevar como materia optativa la asignatura de graficación por computadora y, me parece que, en cierto sentido, el nuevo plan de estudios toma bastante en cuenta dicha orientación a través de especialidades como la de modelado computacional. La materia es en sí, muy fértil y muy bonita y, en la carrera, se tomaba como punto de partida al Lenguaje C y a las librerías conocidas como OpenGL, es justo en este sentido que me parece muy conveniente reorientar la investigación aquí presentada; creo que sería bastante enriquecedor poder migrar de un lenguaje más sencillo como lo es Logo a un lenguaje poderoso como lo es C e intentarlo ya no sólo haciendo uso de las posibilidades gráficas que el propio C provee, sino también de las librerías OpenGL. Me parece que en una segunda etapa de esta investigación resultaría conveniente ya no graficar con Logo, sino con C y OpenGL y hacerlo de modo que el programador mismo cree el entorno gráfico. De hecho, hay gentes que ya están haciendo algo similar; en particular, me topé en Internet con un documento en PDF en el que unos estudiantes españoles hicieron su trabajo terminal de carrera utilizando OpenGL y C y que consistía en hacer un Logo tridimensional, con todo y tortuga.

2. Sería también muy interesante comparar la complejidad algorítmica de un fractal descrito por un Sistema de Funciones Iteradas contra la complejidad algorítmica de un fractal descrito por medio de un Sistema L. En general, como pudo constatarse en esta investigación- los Sistemas L se

programan por medio de funciones recursivas (lo cual es inherente a la naturaleza recursiva misma de los fractales) y, de mis clases de Estructura de Datos puedo suponer que la complejidad algorítmica de un Sistema L programado es bastante eficiente como para optar por dicho modelo, sin que ello signifique, a priori, desdeñar los modelos de Funciones Iteradas.

3. Sería también interesante que el programa de MAC, a través de una investigación que bien pudiera ser hecha por un propio egresado de MAC como tesis o tesina, reconsiderara la posibilidad de volver a incluir la materia de Teoría de la Computación no como optativa, sino como materia obligatoria. Sé que esta recomendación no es del todo sencilla, sobre todo si se reconoce que el último plan de estudios aprobado (el de 2005) tiene bastantes aciertos en su conformación. Esta sugerencia, no obstante, es también resultado de este trabajo, ya que al ir recabando información para la hechura de esta tesis, pude percatarme de que en varias universidades —en particular españolas y argentinas— se ofrecen materias como “Sistemas de Reescritura” que incluye temas afines a la teoría de computación y lenguajes formales como teoría de autómatas, gramáticas y sistemas L y que están orientadas hacia el área de computación gráfica.

Conclusiones

1. Si bien es posible crear a través de un lenguaje más potente un entorno gráfico capaz de emular el trabajo de Logo, los Sistemas L son naturalmente programables a través de este lenguaje. Por otro lado, me parece recomendable para aquellas personas que están iniciando su trabajo con fractales y Sistemas L empezar con Logo ya que ello les permitirá enfocarse por completo en los algoritmos sin tener que preocuparse demasiado por los detalles del entorno gráfico. En lo personal considero que esta decisión, en términos de geometría computacional no es la más óptima, pero en términos de algoritmia pura resultó —para los fines de esta tesis— bastante conveniente.

2. Al final del capítulo 2 se comentó el por qué se decidió trabajar con curvas fractales que llenan el plano y, si bien la motivación principal es de orden epistemológico —de investigación para ser precisos— se dejó también asentado que las curvas fractales que llenan el plano tienen un potencial campo de aplicación en diversas áreas de la ciencia; se espera, pues, que este trabajo sirva de introducción y de guía para aquellos que aspiren o necesiten resolver problemas prácticos a través de las curvas aquí estudiadas.

3. Como se mencionó en el capítulo 1, la geometría fractal es aquella geometría que describe con cercana precisión diversos fenómenos naturales. Pero la geometría fractal constituye también un campo formal de conocimientos que aglutina variados conjuntos fractales entre los que se encuentran las curvas que llenan el plano, curvas que —junto a otros fractales— le confieren a la ciencia de un conjunto de herramientas valiosas para la investigación.

4. Se ha hecho uso en esta investigación de diversas vertientes que ofrece la licenciatura en MAC; como lo son la teoría de autómatas y lenguajes formales, el análisis matemático, la geometría analítica, las transformaciones rígidas, la programación, las estructuras de datos, etc. Es por ello que afirmo: no limitar la Matemática Aplicada a las aplicaciones, respaldarlas siempre por el bagaje matemático teórico que nos permite tener una comprensión profunda del tema tratado. La carrera nos da esa posibilidad, no echarla en saco roto.

5. La “curva de Chillones” es resultado de un accidente que —de no haberlo sido— habría cristalizado en un algoritmo alternativo para la generación de la “curva de Hilbert”. La idea era hacer un algoritmo para esta última tomando como “primitiva” la curva iniciador de la misma que

tiene forma de arco; a fin de lograr esto anterior, se agregaron los procedimientos `inic`, `inic_d` e `inic_l` que dibujan dichos arcos cada vez que son invocados y que, posteriormente, devuelven el control del programa a los procedimientos `lado_i` y `lado_d`. Los procedimientos `lado_i` y `lado_d` se comportan exactamente igual a los procedimientos `hilbert_d` y `hilbert_l` del algoritmo para la curva de Hilbert aquí presentado, salvo por la instrucción `fd :lon` que es sustituida alternativamente por las instrucciones `inic :lon`, `inic_d :lon` o `inic_l :lon` en diversas líneas del programa. El resultado fue, no la “curva de Hilbert”, sino la “curva de Chillones” cuyo gráfico se presenta en el Apéndice D después de 9 iteraciones sobre el editor gráfico de MSWLogo. Es factible decir entonces que la experimentación con curvas fractales se logra con una simple variación de los parámetros en programas preexistentes que dibujen alguna curva fractal o también, añadiendo código al mismo; desde luego que es conveniente que dicho código añadido entrañe un patrón o regularidad fractal.

6. La geometría fractal es propiamente dicha la geometría de los fractales y, sin embargo, estudiando curvas como las aquí presentadas es innegable que el estudio de la geometría fractal se hace por y desde la geometría euclidiana –por ejemplo, los axiomas que satisfacen toda noción de distancia, se tratan desde un punto de vista euclidiano-, luego entonces, a pesar de que las formas de la geometría euclidiana no se corresponden con las formas salvajes de la naturaleza es menester, sin embargo, echar mano de la geometría euclidiana para abordar la geometría fractal. En ese sentido, la geometría fractal no es un sistema axiomático “completo” –entrecomillo esta palabra porque, de acuerdo a Gödel, ningún sistema lo es- en el sentido en el que sí lo son las geometrías no euclidianas que parten de axiomas alternativos a los axiomas de Euclides –concretamente al 5to. Postulado- y que a partir de ese nuevo conjunto de axiomas se construye todo el edificio teórico de dichas geometrías.

7. Ver a una investigación no como un *telos*, no como una finalidad en sí misma, toda investigación, más allá de cumplir un objetivo (de titulación, de obtención de grado, de calificación, de genuino afán de conocimiento) es siempre el umbral para otra investigación.

8. Ningún conocimiento, por sofisticado que sea, debe limitarse a su carácter utilitario. Las más grandes mentes han creado perfección en hermosas demostraciones, belleza en gráficos coloridos, pero ello no es nada comparado con la oportunidad de hacer feliz a un niño, mitigar el dolor de un enfermo, entablar un diálogo sincero con un anciano. No debemos olvidarnos, como universitarios, de nuestra formación humanista. Volvamos a las calles y al diálogo, a la conquista de un mundo menos atormentado. El poeta renacentista John Donne exclamó: *Ningún hombre es una isla entera por sí mismo. Cada hombre es una pieza del continente, una parte del todo.*

Apéndice



“Newton”, William Blake

APÉNDICE A.

Construcción Formal y No diferenciabilidad de las Curvas de Hilbert y de Peano

Condición de Continuidad

Una función f es continua en un punto $a \in R$ si y sólo si $\forall \xi > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \xi$$

[FREH95, Pág. 101]

Condición de No diferenciabilidad

Sea $f : I \rightarrow R$. Si hay dos secuencias $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ con $0 < a_n \leq t < b_n < 1$ y $\{a_n\} \rightarrow t, \{b_n\} \rightarrow t$, tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(f(a_n) - f(b_n))}{(a_n - b_n)}$$

no existe, entonces f es no diferenciable en t .

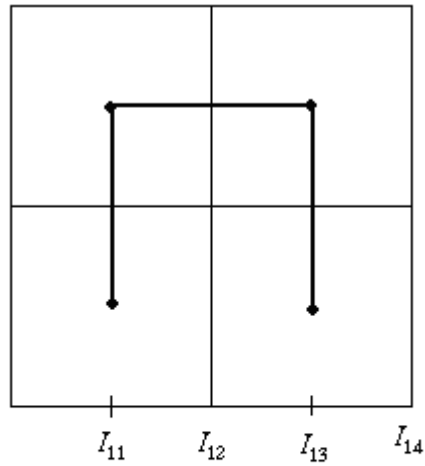
[SAGH94, Pág. 174]

Construcción formal de la curva de Hilbert

Vamos a definir un mapeo $I \xrightarrow{f} R^2$ como sigue. Tenemos un parámetro t que varía en el intervalo cerrado $I = [0, 1]$ y, en función de la variación de este parámetro, tenemos el punto p de coordenadas (x, y) que varía dentro de un cuadrado de lados unitarios. De modo que las coordenadas de p pueden reescribirse cómo $(g(t), h(t))$.

La función f define las coordenadas funcionales de p , $f = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ de la siguiente manera.

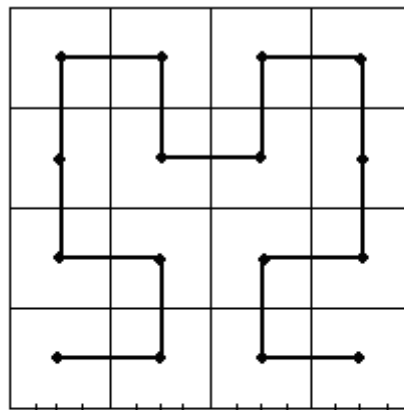
Dividimos al intervalo $I = [0, 1]$ en cuatro subintervalos $I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{14}$ (en donde el primer subíndice indica la etapa de la construcción y el segundo, el número de subintervalo) y el cuadrado unitario en cuatro subcuadrados $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$ (véase la figura A.1) de tal manera que se unen los centros de estos subcuadrados por segmentos que conforman a la poligonal P_1 que tiene forma de n . Esto se logra mapeando I_{11} en el segmento que va, en sentido horario, del subcuadrado c_{11} al subcuadrado c_{12} ; I_{12} -después de una semejanza con $r=2$ - en el segmento con forma de escuadra que tiene por vértice el centro de c_{12} ; I_{13} -después de una semejanza con $r=2$ - en el segmento con forma de escuadra que tiene por vértice el centro de c_{13} y, finalmente, I_{14} en el segmento que va, en sentido horario, del subcuadrado c_{13} al subcuadrado c_{14} . Esta poligonal P_1 constituye la primera aproximación a la curva de Hilbert y las coordenadas de la misma se representan por $(g_1(t), h_1(t))$. Obsérvese, además, que subintervalos adyacentes son mapeados en segmentos adyacentes de la curva generador.



Etapa 0
Curva de Hilbert

Figura A.1

Se vuelven a dividir los subintervalos $I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{14}$ en cuatro subintervalos congruentes de modo que cada subintervalo es ahora mapeado –por métodos análogos a los descritos en el paso anterior– en poligonales pertenecientes a los nuevos cuatro subcuadrados en que ahora son divididos los subcuadrados $c_{01}, c_{02}, c_{03}, c_{04}$; la unión de dichos segmentos forman la segunda aproximación P_2 a la curva de Hilbert que es mostrada en la figura A.2; de modo que las coordenadas de P_2 se simbolizan por $(g_2(t), h_2(t))$.



Etapa 1
Curva de Hilbert

Figura A.2

La construcción continúa de esta forma, de suerte que, en el infinito, la curva de Hilbert es la expresada paramétricamente por

$$x = g(t), y = h(t),$$

y

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t), y = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t)$$

Entonces la curva de Hilbert, se define por:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n, P \subseteq R^2$$

Nótese cómo, el número de subintervalos de una etapa a otra sigue el patrón:

Etapa n	Número de subintervalos
0	$1 = 4^0$
1	$4 = 4^1$
2	$16 = 4^2$
n	4^n

Tabla A.1

Pero 4^n puede también escribirse cómo 2^{2n} , ya que $2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$, entonces las longitudes de los subintervalos de cada etapa están dadas por $\frac{1}{2^{2n}}$.

Continuidad de la curva de Hilbert

Sean $t_1, t_2 \in I_{nm}$ dos puntos cuya distancia verifica $|t_1 - t_2| < \frac{1}{2^{2n}}$; el intervalo que tiene por extremos a t_1 y t_2 se traslapa, cuando mucho, con dos subintervalos consecutivos (ver figura A.3) y las imágenes de t_1 y t_2 yacen, en el peor de los casos, en dos segmentos consecutivos de P_n , cada uno de los cuales tiene longitud $\frac{1}{2^n}$. La distancia máxima que puede haber entre t_1 y t_2 bajo f se da cuando dichas imágenes corresponden a los puntos de coordenadas, $(g_n(t_1), h_n(t_1))$ y $(g_n(t_2), h_n(t_2))$, respectivamente, como muestra la figura A.4. Dicha distancia es, desde luego, $|f_n(t_1) - f_n(t_2)|$ y, de acuerdo a la figura A.4 vale:

$$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)^2 + \left(\frac{2}{2^{4n}}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2^{4n}}} = \frac{\sqrt{5}}{2^{4n/2}} = \frac{\sqrt{5}}{2^{2n}}$$

¹ Esta longitud tiene dicha medida debido a que cuando los subintervalos $I_{nm}, I_{nm}, I_{nm}, I_{nm}$ se mapean en los segmentos rectos que componen a la curva generador, se duplica la

longitud de los mismos, de tal suerte que los segmentos rectos ya no valen $\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4^n}$ o

la cuarta parte del segmento I , sino exactamente la mitad, esto es, $\frac{1}{2^n}$

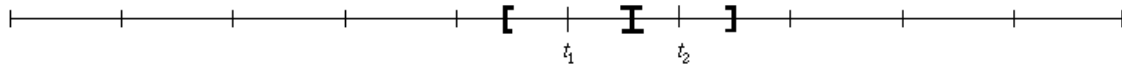


Figura A.3

Por lo tanto, $\forall \xi > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$|t_1 - t_2| < \frac{1}{2^{2n}} \Rightarrow |f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \frac{\sqrt{5}}{2^{2n}}$$

Lo que demuestra que la curva de Hilbert es una curva continua.

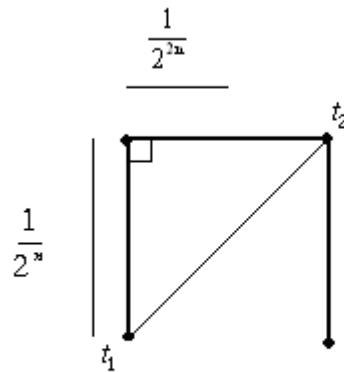


Figura A.4

No diferenciabilidad de la Curva de Hilbert

Para $n \geq 3$ y para $t \in I$ elíjase $t_k \in I$ tal que $|t - t_k| \leq \frac{10}{2^{2n}}$. Antes de continuar se comenta que se toma el valor $n \geq 3$ porque, si n es menor a 3, entonces al tomar 10 subintervalos de longitud $\frac{1}{2^{2n}}$ excederíamos la longitud unitaria de I . Ahora bien, las imágenes de t y t_k bajo f están

separadas por, por lo menos, un segmento de longitud $\frac{1}{2^n}$; de modo que $|f_n(t) - f_n(t_k)| \geq \frac{1}{2^n}$ y,

por lo tanto, $\frac{|f_n(t) - f_n(t_k)|}{|t - t_k|} = \frac{(1)(2^{2n})}{(10)(2^n)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2^{2n}}{2^n} = \frac{1}{10} \cdot 2^{2n-n} = \frac{2^n}{10}$. Por consiguiente,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n(t) - f_n(t_k)|}{|t - t_k|}$ no existe, ya que $\frac{2^n}{10} \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$. Es la curva de Hilbert, por tanto, una curva continua no diferenciable.

Construcción formal de la curva de Peano

Para construir formalmente esta curva definimos un mapeo $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ que funciona de la misma manera que la función definida para la curva de Hilbert.

Dividimos al intervalo $I = [0,1]$ en nueve subintervalos $I_{01}, I_{02}, I_{03}, I_{04}, I_{05}, I_{06}, I_{07}, I_{08}, I_{09}$ (en donde el primer subíndice indica la etapa de la construcción y el segundo, el número de subintervalo) y el cuadrado unitario de la figura A.5 (basada en figura presentada en www.dma.fi.upm.es) en nueve subcuadrados congruentes a los que llamaremos cuadrados de primera aproximación. Mapeamos cada uno de los segmentos $I_{01}, I_{02}, I_{03}, I_{04}, I_{05}, I_{06}, I_{07}, I_{08}, I_{09}$ en cada una de las 9 diagonales inscritas en los cuadrados de primera aproximación como lo muestra la figura A.5.

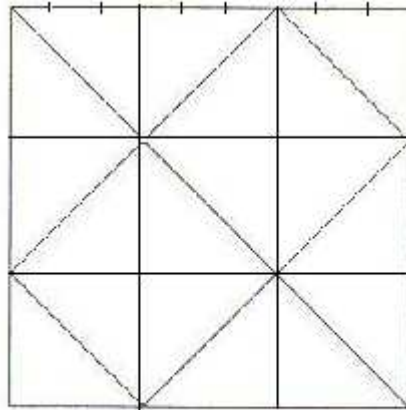


Figura A.5

Dichas diagonales con la orientación ya conocida, conforman la curva de Peano de la primera etapa y miden $\frac{1}{3^n}$, o sea, una tercera parte de –en este caso- el intervalo $I = [0,1]$. Dividimos ahora a cada uno de los subintervalos $I_{01}, I_{02}, I_{03}, I_{04}, I_{05}, I_{06}, I_{07}, I_{08}, I_{09}$ en otros nueve subintervalos y dividimos también a cada uno de los cuadrados de primera aproximación en nueve cuadrados congruentes a los que llamaremos de segunda aproximación. Cada subintervalo está ahora dividido en nueve partes congruentes, cada una de las cuales es mapeada en cada una de las nueve diagonales inscritas en cada uno de los cuadrados de segunda aproximación. Esas nueve diagonales poseen la misma forma que la curva generador original y se van construyendo en el recorrido de orientación ya conocido para la curva generador de la curva de Peano. Se dividen, nuevamente, cada uno de los nueve subsegmentos $[(k-1)/9, k/9]$ con $k = 1, 2, \dots, 9$ en tres partes iguales como en los pasos anteriores. Esto define una función f que transforma el intervalo $I = [0,1]$ continuamente en el arco poligonal formado por 9^n segmentos que, en el infinito, constituyen a la curva de Peano.

Continuidad de la curva de Peano

Sean $t_1, t_2 \in I_{nm}$ dos puntos cuya distancia verifica $|t_1 - t_2| < \frac{1}{9^n}$ ó bien, $|t_1 - t_2| < \frac{1}{3^{3n}}$ (porque $3^{3n} = 9^n$); la distancia máxima que puede haber entre las imágenes de t_1 y t_2 se da cuando dichas imágenes se encuentran situadas en los puntos marcados en la figura A.6, dicha distancia –cuya notación es $|f_n(t_1) - f_n(t_2)|$ – corresponde a la longitud de las diagonales de los cuadrados de n -ésima aproximación en que están inscritas las poligonales que tienen la forma de la curva generador, esto es:

$$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \sqrt{\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 + \left(\frac{1}{3^n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}}} = \sqrt{\frac{2}{9^{2n}}} = \frac{\sqrt{2}}{9^{(2n)/2}} = \frac{\sqrt{2}}{9^n}$$

Concluimos entonces diciendo que la curva de Peano es una curva continua ya que

$$\forall \xi > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } |t_1 - t_2| < \frac{1}{3^n} \Rightarrow |f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \frac{\sqrt{2}}{9^n}$$

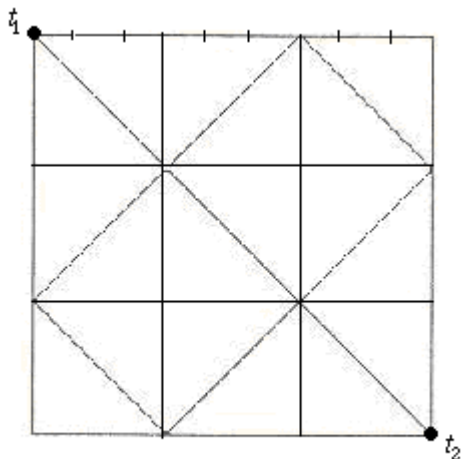


Figura A.6

No diferenciabilidad de la curva de Peano

Para $n \geq 2$ y para $t \in I$ elíjase $t_k \in I$ tal que $|t - t_k| \leq \frac{4}{3^{3n}}$. El valor $n \geq 2$ porque, si n es menor a 2, entonces al tomar 4 subintervalos de longitud $\frac{1}{9^n} = \frac{1}{3^{3n}}$ excederíamos la longitud unitaria de I . Ahora bien, las imágenes de t y t_k bajo f están separadas por, por lo menos, un segmento de longitud $\frac{1}{3^n}$; de modo que $|f_n(t) - f_n(t_k)| \geq \frac{1}{3^n}$ y, por lo tanto, $\frac{|f_n(t) - f_n(t_k)|}{|t - t_k|} = \frac{(1)(3^{2n})}{(4)(3^n)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^{2n}}{3^n} = \frac{1}{4} \cdot 3^{2n-n} = \frac{3^n}{4}$. Por consiguiente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n(t) - f_n(t_k)|}{|t - t_k|}$ no existe, ya que $\frac{3^n}{4} \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$. Es la curva de Peano, por tanto, una curva continua no diferenciable.

APÉNDICE B

Comandos básicos matemáticos de Logo

ABS

Muestra el valor absoluto (magnitud) de sus entradas.

Sintaxis:

```
abs num
```

Donde `num` es el número cuyo valor absoluto ha de ser arrojado

POWER

El resultado es la potencia de un número multiplicado por sí mismo n número de veces.

Sintaxis:

```
power num1 num2
```

Donde `num1` es la base y `num2` el exponente al que se eleva `num1`.

SQRT

Despliega la raíz cuadrada de su valor de entrada, el cual debe ser un número no negativo.

Sintaxis:

```
sqrt num
```

Donde `num` es el número cuya raíz cuadrada se calculará con la instrucción `sqrt`.

SUM

Arroja la suma de sus valores de entrada.

Sintaxis:

```
SUM num1 num2
```

Donde `num1` y `num2` son los sumandos.

PRODUCT

Arroja el producto de sus valores de entrada o factores.

Sintaxis:

num1 * num2

MINUS

Arroja el negativo de su entrada.

Sintaxis:

Minus num

Así, la instrucción `minus 5` arrojaría por resultado -5.

DIFFERENCE

Arroja la diferencia de sus números de entrada.

Sintaxis:

num1 - num2

Donde `num1` es el minuendo y `num2` el sustraendo.

QUOTIENT

El valor resultante es el cociente de sus valores de entrada.

Sintaxis:

num1 / num2

Donde `num1` es el dividendo y `num2` el divisor.

REMAINDER

Arroja el residuo que resulta de dividir `num1` entre `num2`.

Sintaxis:

remainder num1 num2

APÉNDICE C

Concepto de Autómata

Un autómata es una máquina teórica que, entre otras cosas, puede determinar qué cadenas pertenecen a un determinado lenguaje. Existen autómatas finitos deterministas (AFD), autómatas finitos no deterministas (AFND), autómatas de pila y máquinas de Turing, siendo esta última una clase más general de autómata y, por tanto, más potente en tanto aceptador de lenguaje. Sabemos, por lo visto en el Capítulo 2, que una gramática es también un método formal para generar todas las cadenas que pertenecen a un determinado lenguaje de modo que es posible –lo mismo que con un autómata– tomar una cadena y analizar si es derivable desde una determinada gramática para finalmente concluir si pertenece o no a un determinado lenguaje. Esto nos lleva a intuir que hay una cierta equivalencia entre gramáticas, autómatas y lenguajes, y que si existe una gramática que genera cierto lenguaje es tal vez muy posible que haya un autómata que procese a ese mismo lenguaje. Cuando en el capítulo 2 se detalló brevemente sobre el modo en que puede clasificarse a los Sistemas L (que tienen una definición formal muy similar a la de una gramática) se comentó que los Sistemas L determinísticos operaban de manera parecida a un AFD y se mostró un diagrama de transición –que es un modelo gráfico de un autómata– que ilustraba esto. Pues bien, a fin de que no haya dudas sobre el concepto de autómata y el diagrama de transición allí presentados, definiremos en este apéndice conceptos básicos de teoría de autómatas y las dos categorías básicas, AFD y AFND.

Un autómata finito determinista o AFD se define formalmente como una quintupla $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ donde:

Σ : Alfabeto finito de entrada.

Q : Conjunto finito de estados.

δ : Función de transición $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$, que asigna, cuando el autómata recibe como entrada un par ordenado (estado actual, símbolo), el estado siguiente hacia el que transita el autómata. De modo que la notación $\delta(p, x) = q$ equivale a afirmar que la máquina o autómata finito puede pasar de un estado p a un estado q al leer el símbolo x .

s : Estado inicial a partir del cual el autómata inicia sus transiciones; dicho estado provee información acerca de las condiciones en que se encuentra el autómata al momento de iniciar su trabajo.

F : Es el conjunto de estados conocidos como de aceptación y que indican el momento en que el autómata puede concluir su funcionamiento.

Por otro lado, llamaremos diagrama de transiciones a la representación gráfica que ilustra el comportamiento de la máquina.

Veámoslo con un ejemplo. El siguiente diagrama de transiciones, figura C.1, ilustra el comportamiento de un AFD que acepta cadenas cuyo primer símbolo es un guión bajo, seguido de un número arbitrario de letras y/o dígitos y que debe finalizar siempre con el símbolo \$.

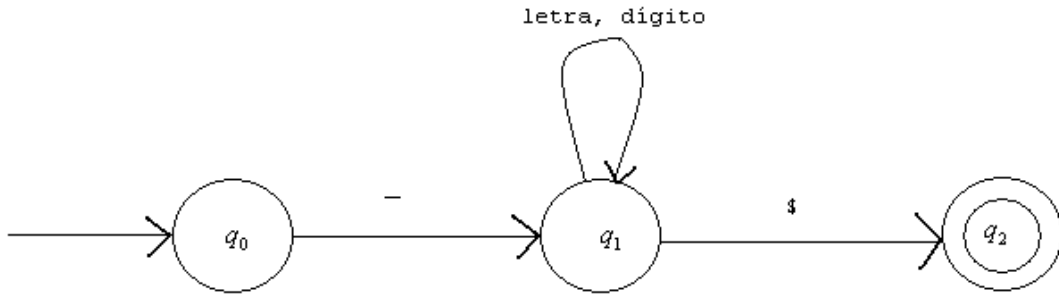


Figura C.1

Si modificamos el diagrama de transición anterior como aparece en la figura C.2 estamos ya no frente a un AFD, sino a un AFND, ¿Cuál es la diferencia esencial? que el primer diagrama asigna uno y sólo un estado siguiente, dado cierto símbolo de entrada y que el segundo diagrama – correspondiente a un AFND- puede asignar más de un estado siguiente al recibir la misma entrada; de modo que un AFND hace sus asignaciones ya no a través de una función de transición, sino de un mecanismo mucho más flexible, lo suficiente, como para introducir no determinismo en el comportamiento del autómata.

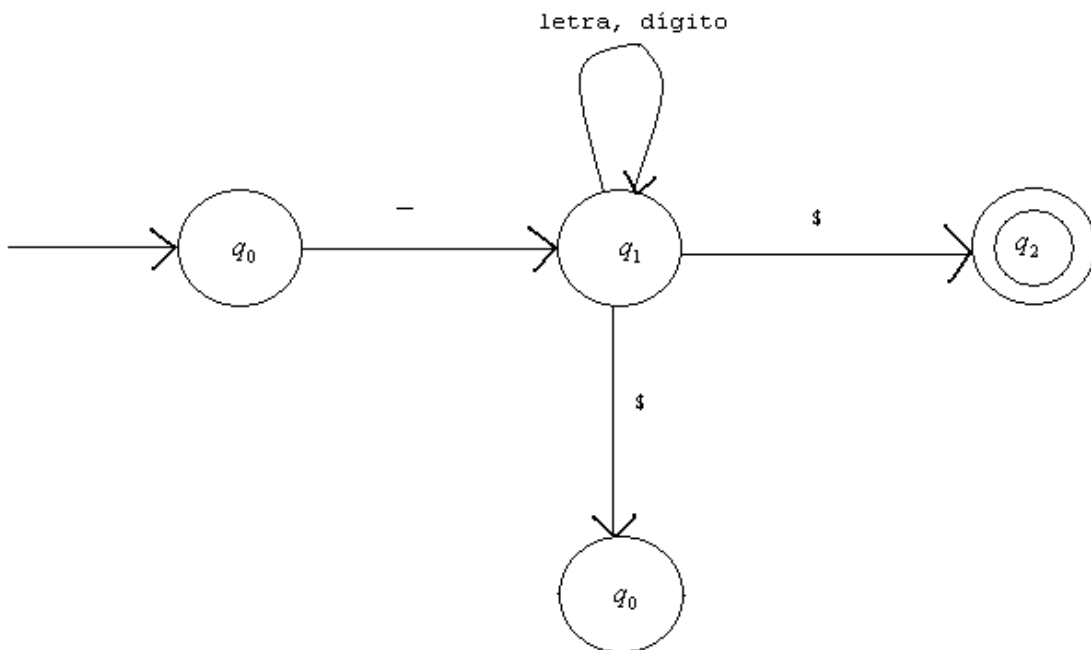


Figura C.2

Formalmente, un AFND se define como una quintupla $M = (Q, \Sigma, \rho, s, F)$, donde:

Σ : Alfabeto finito de entrada.

Q : Conjunto finito de estados.

ρ : Un subconjunto de $Q \times \Sigma \times Q$, de tal manera que la tupla (p, x, q) está en ρ si y sólo es posible pasar del estado p al q al leer el símbolo x .

s : Estado inicial a partir del cual el autómata inicia sus transiciones; dicho estado provee información acerca de las condiciones en que se encuentra el autómata al momento de iniciar su trabajo.

F : Es el conjunto de estados conocidos como de aceptación y que indican el momento en que el autómata puede concluir su funcionamiento.

APÉNDICE D

Curva de Chillones

```
to chillones :pasos :tam
  make "lon :tam/power 2 :pasos
  if :pasos = 0 [inic :lon stop]
  lado_i :pasos :lon
end
```

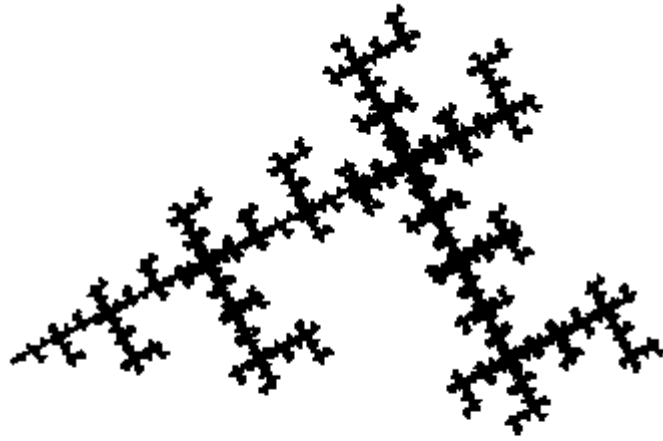
```
to lado_i :pasos :lon
  if :pasos = 0 [inic :lon stop]
  lado_i :pasos-1 :lon
  inic_i :lon
  rt 90
  fd :lon
  lado_d :pasos-1 :lon
  inic_d :lon
  lt 90
  fd :lon
  lt 90
  lado_d :pasos-1 :lon
  inic_d :lon
  fd :lon
  rt 90
  lado_i :pasos-1 :lon
  inic_i :lon
  lt 90
end
```

```
to lado_d :pasos :lon
  if :pasos = 0 [inic :lon stop]
  lado_d :pasos-1 :lon
  inic_d :lon
  lt 90
  fd :lon
  lado_i :pasos-1 :lon
  inic_i :lon
  rt 90
  fd :lon
  rt 90
  lado_i :pasos-1 :lon
  inic_i :lon
  fd :lon
  lt 90
  lado_d :pasos-1 :lon
  inic_d :lon
  rt 90
end
```

```
to inic :lon
  repeat 2[fd :lon rt 90]
  fd :lon
end
```

```
to inic_d :lon
  repeat 2[fd :lon rt 90]
  fd :lon
```

```
end  
to inic_i :lon  
  repeat 2[fd :lon lt 90]  
  fd :lon  
end
```



Curva de Chillones

Bibliografía

Los libros eran pocos, pero para mí eran todos los libros, y sólo muchos años más tarde he vuelto a saber que, efectivamente, eran todos los libros, porque lo que lee uno después de la adolescencia es ya siempre repetición de lo leído (se lee siempre el mismo libro, como se escribe el mismo libro; el que uno quiere leer y escribir, nuestro libro) y porque no hay manera de que un libro leído más tarde pueda poseernos como nos poseyó aquél, como nos poseyeron aquellos.

Las Ninfas, Francisco Umbral



“Sapos bibliófilos” Francisco Toledo

Bibliografía

1. [AGUJ04] Aguirre, Julián, *Curvas Fractales*, publicado en [1].
2. [AMOJ05] Amor, José Alfredo, *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, Facultad de Ciencias, *Las prensas de Ciencias*, UNAM, 2005.
3. [ARMM87] Armstrong, M. A., *Topología Básica*, Ed. Reverté, España, 1987.
4. [BARM88] Barnsley, M. F., *Fractals Everywhere*. *Academic Press*, San Diego, 1988.
5. [BRAE96] Braun Eliezer, *Caos, fractales y cosas raras*, FCE/SEP, México, 1996.
6. [BROJG99] Brookshear J. Glenn, *Teoría de la Computación. Lenguajes Formales, autómatas y complejidad* Ed. Pearson, México, 1999.
7. [CAMC98] Camacho Cancino Sara, *Análisis de Algoritmos*, UNAM, ENEP Acatlán, 1998.
8. [CERR02] Cervantes Sandoval, Armando, Rodríguez Pagaza, Y. Landois P., *Linsis: Sistemas Lindenmayer y Gramáticas Formales, una opción para modelar vegetales.*, Comunicaciones en Socioeconomía Estadística e Informática, Vol. 6, Núm. 2, Págs. 51 – 135, 2002. Publicado en [10].
9. [CHAL04] Chamizo Lorente, Fernando, *Topología. La topología de segundo no es tan difícil*, notas, U. A. M, 2da. Ed. 2004.
10. [EDG98] Edgar Gerald; *Integral, probability & fractal measures*, Springer – Verlag, New York, 1998. Artículo publicado electrónicamente el 27 de Junio de 2000 dentro del Boletín *New Series* de la *American Mathematical Society*. Volumen 27 No. 4 Págs. 481 - 498
11. [EDGG90] Edgar Gerald. A., *Measure, topology and fractal geometry*, (1era. Edición). Springer-Verlag, 1990.
12. [EVEH85] Eves Howard, *Estudio de las Geometrías Vols. I y II*, Ed. UTEHA, México, 1985.
13. [DERG04] Derlinchán González, Daniel, *Generación gráfica de Fractales*, Proyecto de Fin de Carrera, Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática de Sevilla, 2004.
14. [DURA87] Durero, Alberto, *Instituciones de Geometría*, UNAM, México, 1987.
15. [FALK90] Falconer, K. J., *Fractal Geometry*, Wiley, New York, 1990.
16. [FOLV96] Foley J., Van Dam, Feiner, Hughes, Phillips, *Introducción a la graficación por computador*, Ed. Addison-Wesley, 1996.

17. [FREH95] Freyhoffer Hugo I., Maturana, *Cálculo I*, Ed. Universidad Católica de Chile, Chile, 1995.
18. [GARM86] Gardner, Martin, *Festival mágico-matemático*, Alianza editorial, Madrid, 1986.
19. [IVOC] Ivorra C. Carlos, *Análisis Matemático*, publicado en [2].
20. [KELD95] Kelly Dean, *Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales*, Ed. Prentice Hall, México, 1995.
21. [KASE87] Kasner E., Newman J., *Matemáticas e Imaginación (II)*, Salvat, Barcelona España, 1967 (Ruth C. Newman), 1987 (Salvat).
22. [KREK85] Kreider, Kuller, Ostberg. *Introducción al Análisis lineal*. Vol. I. Ed. Fondo Educativo Interamericano, 1985.
23. [KURK73] Kuratowski, Kazimierz, *Introducción a la Teoría de Conjuntos y a la Topología*, Editorial Vicens-Vives, España, 1973.
24. [LEMK95] Lemone, Karen, *Fundamentos de Compiladores. Cómo traducir al lenguaje de computadora*. Compañía editorial continental, México, 1995.
25. [LIPS70] Lipschutz, Seymour, *Teoría y Problemas de Topología General*, Ed. McGraw Hill, México, 1970.
26. [LOPG98] López García Jeannet, *La dimensión de autosimilaridad y la dimensión de Hausdorff – Besicovitch*, Tesis de licenciatura, FES Acatlán, UNAM, México, 1998.
27. [MCWW87] McWorter William A. & Morril Tazelaar Jane, *Creating Fractals*, BYTE. The small system journal, Vol. 12, No. 9, August, 1987, McGraw Hill publication.
28. [MANB97] Mandelbrot, B. B., *La Geometría Fractal de la Naturaleza*, Tusquets Editores. Colección *Metatemas. Libros para pensar la ciencia*. Barcelona, 1997 (1era. edición en español con respecto a la original en inglés en 1983).
29. [MATC97] Mateos C. José, *Propiedades del conjunto de Cantor*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1997.
30. [MICF86] Michavila Francisco, *Fundamentos del Cálculo numérico I: topología métrica*, Ed. Reverté, España, 1986.
31. [MONO02] Monroy Olivares C., *Curvas fractales*, Alfaomega, México, D. F. 2002.
32. [PEIH92] Peitgen H. O., Jürgens H., Saupe, D., *Fractals for the Classroom*, Springer Verlag, New York, 1992.
33. [PERJ02] Pérez Juan A., *Galería Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2002.
34. [PERO98] Pérez Ortiz, Juan Antonio; *Codificación fractal de imágenes*, Memoria del proyecto para la obtención del título de Ingeniero en Informática, Universidad de Alicante, 1998.

35. [PRUP96] Prusinkiewicz P., Lindenmayer A., *The Algorithmic beauty of Plants*, Springer Verlag, New York, 1996
36. [RAMG98] Ramírez Galarza, Ana Irene, *Geometría Analítica*, Ed. Facultad de Ciencias, *Las prensas de Ciencias*, UNAM, 1998.
37. [RAMGSA00] Ramírez Galarza Ana. I., Sienna L. G. *Invitación a las geometrías no euclidianas*, UNAM, México, 2000 (1ª Ed.).
38. [REYS95] Rey Semó, José Manuel, *Geometría de medidas y Conjuntos Autosemejantes*, Tesis doctoral, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid. 1995. Publicado en [9].
39. [SAGH94] Sagan Hans, *Space-Filling Curves*, Springer Verlag, New York, 1994.
40. [STEI98] Stewart Ian, *De aquí al infinito. Las Matemáticas de hoy*, Ed. Crítica, Barcelona, 1998.
41. [TALV96] Talanquer, Vicente, *Fractus, fracta, fractal. Fractales de Laberintos y Espejos*. FCE/SEP, México, 1996 (1ª Ed.).
42. [VISG98] Viso Gurovich Elisa, *Notas para el curso Teoría de la Computación. Autómatas y Lenguajes Formales*, en Vínculos Matemáticos No. 23, Facultad de Ciencias, UNAM, 1998.
43. [WATM87] Watt, Molly, *¡Bienvenido al mundo del Logo! 1 y 2*, Ed. McGraw Hill, 1987.

Consulta en Internet

[1] <http://sierpes.cs.us.es/~fsancho/PFC/ficheros/Fractal%20Time.pdf>. Consulta: Diciembre 2006, actualización: Septiembre de 2004.

[2] <http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Analisis.pdf>. Consulta: Mayo 2007, actualización: 3 de Enero de 2008.

[3] <http://132.248.28.115/NotasVarias/Cantor.pdf>. Consulta: Diciembre 2006, publicado: 6 de Septiembre de 2005.

[4] <http://www.dlsi.ua.es/~japerez/pub/pdf/mastertesi1998.pdf>. Consulta: Enero 2007, última consulta: Enero 2007.

[5] <http://www.educomp.esc.edu.ar/log01002.htm>. Consulta: Septiembre 2007.

[6] <http://mondragon.angeltowns.net/paradiso/HistoriaLogo.html>. Consulta: Septiembre 2007, actualización: Septiembre de 2007.

[7] <http://compilers.cs.ucla.edu/fernando/publications/papers/linf.pdf>. Consulta: Octubre 2007. actualización: Febrero 2008.

[8] <http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifs/pentagon/Durer.htm>. Consulta: Octubre 2007, última modificación: 5 de Mayo de 2006.

[9] http://www.dm.uba.ar/materias/optativas/geometria_fractal/2006/1/Fractales/2.pdf. Consulta: Junio 2007.

[10] <http://www.cem.colpos.mx/csei/pdf/0206022002.pdf>. Consulta: Agosto 2007, última actualización: Febrero de 2008.