

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Instituto de Investigación en Matemáticas Aplicadas y Sistemas

BIBLIOTECA
JUAN A. ESCALANTE H.
UNIDAD ACADÉMICA DE
LOS CICLOS PROFESIONAL
Y DE POSGRADO / CCH
U N A M

"ANÁLISIS DE ALGUNAS MEDIDAS DE PATRONES ESPACIALES"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

Esteban Walker Montufar

TORREON, COAH. 1979

*Maestría en
Estadística e
Investigación de
Operaciones*



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A SUSANA, ESTEBAN Y ULISES
CON TODO MI AMOR

A MIS PADRES
CON AGRADECIMIENTO

A MI ABUELA
CON CARÍÑO

Y A TODOS LOS QUE HAN
TENIDO INTERES EN MI
CARRERA

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Ignacio Méndez por su asesoramiento y su ayuda siem
pre desinteresada.

Al Ing. Sam López, por su cooperación en la parte computa-
cional.

Al Instituto Nacional de Investigaciones Agrícolas y en es
pecial a la Dirección del Centro de Investigaciones Agríco-
las del Norte por las facilidades otorgadas para la reali-
zación de este trabajo.

A la C. Paula Salas por el trabajo mecanográfico.

INTRODUCCION

Las grandes limitaciones y la creciente demanda en todas las áreas, ha obligado al hombre a estudiar más a fondo los fenómenos para tratar de optimizar el aprovechamiento de los escasos recursos. Es por esto que las ciencias tradicionalmente "no-matemáticas" (Biología, Psicología, Sociología, etc.) están haciendo un uso, cada vez mayor, de técnicas matemáticas que permitan un conocimiento más profundo de los procesos.

La ecología*, una ciencia que ha cobrado gran interés en la actualidad, es un caso clásico en el que las técnicas matemáticas y estadísticas están jugando un papel cada vez más importante.

Uno de los aspectos en ecología es el estudio de la disposición espacial (patrones espaciales) de los organismos. La medición de estos patrones espaciales se enfrenta principalmente a dos problemas:

- a) El efecto de la densidad
- b) El efecto del tamaño de cuadrante

Es por esto que tratando de superar estos problemas se han creado varias medidas. Algunas de ellas son útiles en ciertas circunstancias pero no en otras y esto ha causado confusión acerca del índice a usar en cada situación.

*Ciencia que estudia las relaciones entre los seres vivos y el medio ambiente

El objetivo principal de esta tesis es aclarar cuales son las condiciones en las que es recomendable usar cada índice. Para ello, se hace una revisión bibliográfica acerca del origen y las aplicaciones de cada índice y se simulan una serie de poblaciones con distintas distribuciones y grados de agregación para observar su comportamiento.

El trabajo está dirigido a estudiantes y profesionistas en bioestadística así como también a personas interesadas en ecología que tengan cierta inclinación hacia las matemáticas.

CONTENIDO

	Página
INTRODUCCION	
CAPITULO I - PATRONES ESPACIALES	1
1.1 Patrones espaciales y su importancia en eco- logía	1
1.2 Agregación	3
1.3 Métodos de conteos y de distancias	6
1.4 Efecto de densidad	9
1.5 Efecto del tamaño de cuadrante	11
CAPITULO II - MECANISMOS QUE GENERAN DISTRIBUCIONES DE CONTAGIO	15
2.1 Modelo colonial	16
2.2 Modelo de heterogeneidad	22
2.3 Procesos de nacimiento puro	25
2.4 Distribuciones con adición de ceros	27
2.5 Dificultad al determinar la distribución real	28
CAPITULO III - MEDIDAS DE AGREGACION	31
3.1 Cociente varianza-media	31
3.2 Parámetro K de la Binomial Negativa	34
3.3 Índice de Morisita	37
3.4 Índices de Lloyd	41

	Página
3.5 Técnica de Iwao	44
3.6 Ley de potencia de Taylor	52
CAPITULO IV - EFECTO DE DENSIDAD	56
4.1 Cociente varianza-media	57
4.2 K de la Binomial Negativa	60
4.3 Técnica de Iwao	62
CAPITULO V - EFECTO DEL TAMAÑO DE CUADRANTE	66
5.1 Cociente varianza-media	67
5.2 Índice γ	69
5.3 Técnica de Iwao	71
CAPITULO VI - SIMULACION DE PATRONES ESPACIALES	74
6.1 Método para la generación de va's	74
6.2 Generación de distribuciones generalizadas	75
6.3 Generación de distribuciones compuestas	76
6.4 Efecto de densidad	77
6.5 Efecto del tamaño de cuadrante	79
CAPITULO VII - RESUMEN Y CONCLUSIONES	93
7.1 Resumen	93
7.2 Conclusiones	97
BIBLIOGRAFIA	100
APENDICES	109

CAPITULO I
PATRONES ESPACIALES

1.1 Patrones Espaciales y su Importancia en Ecología

La disposición espacial de los miembros de una población, es el resultado de la acción de una infinidad de factores, tanto ambientales como inherentes a la misma población. Es por esto, que el estudio de los patrones espaciales es indispensable dentro de la ecología.

"Uno de los principales requisitos para entender a un organismo en el ecosistema es el conocimiento de sus patrones de distribución espacial (= dispersión). Estos patrones son manifestaciones de las características biológicas inherentes a las especies influenciadas por factores ambientales en un habitat dado, y, por ese hecho, reflejan la influencia de esos factores en el modo de vida del organismo" (Sevacherian y Stern, 1972).

"Todas las acciones de un animal dependen de su posición en el espacio; por ejemplo, no puede reproducirse o comer, a menos que esté cerca de la pareja o del alimento. Por lo tanto, la posición espacial de los animales es fundamental para el estudio de su ecología". (Lewis y Taylor, 1967, p. 85)

"Al ecólogo le interesa el patrón espacial de una población no solo para conocer la manera en que animales o

plantas aparecen en el espacio, sino por las sugerencias que ofrece acerca de los factores ambientales que son importantes para la existencia de dicha planta o animal en la naturaleza. En otras palabras, las preguntas del porqué y como se originó ese patrón son de primordial importancia para el ecólogo" (Stiteler, 1970, p. 2)

"El patrón de dispersión de una población, o sea, las posiciones de los individuos en el ambiente, en cualquier instante representa la culminación de una historia de nacimientos, muertes y movimientos. En poblaciones naturales es difícil definir con precisión las interacciones de la población, pero algunas veces la observación del patrón de dispersión de los individuos puede dar alguna luz sobre las características biológicas de las especies y las razones de los cambios en la densidad de la población pueden determinarse" (Poole, 1974, p. 101).

En el estudio de dinámica de poblaciones la medición de los patrones espaciales es de gran utilidad. "Por ejemplo, si un factor de mortalidad reduce el apiñamiento de un organismo estático, es una indicación de que este actúa más severamente en las altas densidades, o si la dispersión de una población se hace más regular, debe sospecharse una competencia más intensa" (Southwood, 1966, p. 24).

Desde el punto de vista estadístico, la disposición espacial es importante puesto que determina el esquema de

muestreo (Rojas, 1964), así como las transformaciones pertinentes para su análisis (Beall, 1942; Upholt, 1942; Anscombe, 1949; Iwao y Kuno, 1968).

1.2 Agregación

La agregación se puede definir como la tendencia de los organismos a formar grupos o colonias dentro de su habitat*.

El grado de agregación de una población está determinado principalmente por dos tipos de factores:

- I. Factores internos. Características propias de la especie tales como forma de reproducción o como protección. Estos factores influyen más fuertemente en poblaciones de organismos móviles como animales mayores y algunos insectos.
- II. Factores externos. Presiones ambientales debidas a la heterogeneidad del habitat en características tales como temperatura, humedad, disponibilidad de alimento, etc. Estos factores tienen mayor influencia sobre organismos inmóviles como plantas o con poca movilidad como larvas.

*El término "contagio" es usado por algunos autores, como sinónimo de agregación. Aunque como lo apunta Stiteler (1970) p. 13, contagio no solo describe el patrón espacial sino que implica que algún factor de contagio fue el causante de dicho patrón. Otro término usado en la literatura es el de "dispersión", no se usará en el presente trabajo porque el autor piensa que no se refiere claramente a la característica en estudio.

"Cuando las plantas se reproducen, ya sea vegetativamente o por semilla, hay una tendencia a concentrarse cerca de la planta que las originó. Algo parecido sucede con los animales que producen su descendencia en camadas y especialmente con las diversas especies que depositan masas de huevecillos las que producen una fuerte concentración de individuos en una pequeña área. Además, la mayoría de los animales muestran alguna tendencia a la congregación activa. Aún la atracción sexual que congrega a los animales en parejas es una desviación de las condiciones teóricas necesarias para producir una población aleatoriamente distribuída, mientras que los instintos sociales que inducen a formar parvas de aves, manadas de mamíferos y colonias de insectos sociales, se desvían tanto de procesos aleatorios que nadie esperaría que densidad de hormigas o venados exhibiera uniformidad dentro de una gran área" (Cole, 1946).

Por otro lado, si los miembros de una población tienen un comportamiento antisocial o competitivo, tenderán a distribuírse más uniformemente que en una situación de aleatoridad. Ejemplo de esta situación son los bosques, donde los árboles inhiben el crecimiento de otras plantas en el área circundante cubierta por su sombra.

Desde el punto de vista del nivel de agregación se pueden distinguir tres tipos de patrones. (Fig. 1)

- a) Aleatorio. Los individuos son indiferentes a la presencia de otros individuos. Se encuentran coleccionados aleatoriamente en el habitat.
- b) Agregado. Cuando los organismos se disponen en grupos, colonias, conglomerados, etc.
- c) Regular. La disposición es uniforme en todo el ha-bitat.

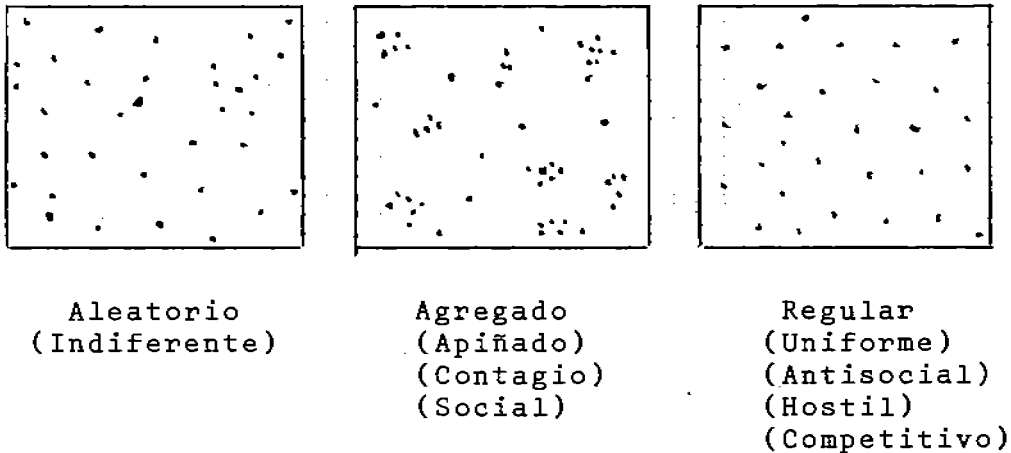


Figura 1. Patrones espaciales

En la naturaleza, rara vez los organismos siguen patrones aleatorios, una gran cantidad de ellos producen patrones agregados. La literatura al respecto es abundante. En insectos: Beall (1939); Bliss (1941); Beall (1942); Cole (1946); Anscombe (1949); Waters (1955, 1959); Waters y Henson (1959); Andrewartha (1961); Hartcourt (1961, 1963); Sevacherian y Stern (1972); Allen, González y

Gokhale (1972); Pieters y Sterling (1973); Kuehl y Fye (1972); Kogan, Ruesink y Mc Dowell (1974); Hill, et al, (1975); Hairston, Hill y Ritte (1971); Taylor (1961). En plantas: Archibald (1948); Evans (1953); David y Moore (1954); Greig Smith (1961).

1.3 Métodos de Conteos y de Distancias

"Los ecólogos se enfrentan con dos situaciones al estudiar patrones espaciales. La primera es cuando los individuos de una población están distribuidos en unidades discretas y bien definidas como por ejemplo, insectos en árboles, o aún en hojas, en este caso estas unidades proveen una base natural para definir patrones espaciales. En la segunda situación los individuos están distribuidos en un continuo, como por ejemplo, los árboles en un bosque" (Patil y Stiteler, 1974).

Para medir estos patrones, se han desarrollado dos tipos de índices; los que se basan en conteos dentro de cuadrantes, y los que se basan en distancias entre los individuos.

Para obtener un índice de conteos, es necesario construir en el área en estudio, cuadrantes y contar en estos cuadrantes el número de individuos observados. Por otra parte con las distancias medidas entre individuos o entre puntos e individuos, se construyen los índices de distancias.

Recientemente, se ha incrementado el estudio de esta última clase de índices, ésto motivado por el hecho de que, en el caso de un contínuo, el tamaño del cuadrante es arbitrario. Sin embargo, en muchos casos, el tipo de índice a usarse está determinado por la misma situación.

"Es fácil dar ejemplos de situaciones en las que unos u otros son difíciles o imposibles de obtener. Al estudiar artrópodos en el suelo, se puede extraer y contar los animales en un volumen dado de suelo (cuadrante) pero no sería factible en esta situación medir distancias. Por otro lado, en un bosque podría ser más fácil medir distancias de un punto a un árbol o de un árbol a otro que contar el número de árboles en un cuadrante elegido al azar". (Patil y Stiteler, 1974).

Varios índices basados en distancias han sido desarrollados por distintos ecólogos. Se puede encontrar información acerca de ellos en Southwood (1966); Pielou (1977); Bartlett (1971) y Poole (1974).

Como esta tesis tiene como objetivo principal la comparación de índices basados en conteos, de aquí en adelante se hablará simplemente de índices y se referirá a los basados en conteos.

Cuando se trazan cuadrantes del mismo tamaño sobre un área y se cuentan los organismos que aparecen en cada uno de esos cuadrantes, se puede construir una tabla de frecuen

cias que muestre el número de cuadrantes conteniendo 0, 1, 2, 3... individuos. A esta tabla se le llama distribución de frecuencias.

En la literatura existe confusión al usar el término "distribución". Algunos autores lo usan indistintamente para referirse a la distribución espacial y a la distribución de frecuencias. De aquí surge también la confusión en tre los términos agregación y contagio. Agregación se refiere a una característica de la distribución espacial y contagio se usa para denotar a las distribuciones de frecuencias en las que la varianza es mayor que la media, que surgen cuando se muestrea una distribución espacial agregada.

Pielou (1977), menciona que para evitar ambigüedad en la estadística ecológica es recomendable usar la palabra distribución en el sentido estadístico solamente. Una variable (número de organismos por cuadrante) tiene una distribución, mientras que un conjunto de organismos tiene un patrón espacial.

Para la mejor comprensión de qué patrones dar origen a qué distribuciones junto con los diferentes nombres con los que son referidos en la literatura, se construyó la Tabla 1.

Tabla 1

Patrón Espacial	Distribución	Relación $\sigma^2 - \mu$	Ejemplo
Agregado Colonial* Aglomerado**	Contagio Sobredispersa	$\sigma^2 > \mu$	Binomial Negativa Neyman Tipo A
Aleatorio Indiferente	Aleatoria	$\sigma^2 = \mu$	Poisson
Regular Uniforme	Contagio Negativo Bajo Dispersa	$\sigma^2 < \mu$	Binomial Positiva

*Trad. del Inglés: Clumped

**Trad. del Inglés: Clustered

1.4 Efecto de Densidad

Uno de los problemas a los que se enfrenta la medición de los patrones espaciales es el efecto de la densidad de individuos. Esto surge especialmente cuando se investigan cambios en el patrón espacial al cambiar la densidad.

Una propiedad deseable en un índice espacial es la indiferencia a la eliminación aleatoria de individuos.

Pielou (1977, p. 126) menciona: "Tomando en cuenta que el mayor número de muertes ocurrirán en las unidades más densamente pobladas, con el resultado de que las colonias estarán menos densas de como estuvieron antes, podríamos arguir que las muertes han reducido la agregación.

Por otro lado, el hecho de que los sobrevivientes se encuentren todavía en sus lugares originales y que el único cambio en la población ha sido la remoción de algunos individuos escogidos aleatoriamente conduce al argumento de usar una medida de agregación que no se vea afectada por muertes aleatorias. Las muertes aleatorias puede decirse que solo afectan la densidad media de la población, dejando constantes otros aspectos de su patrón espacial".

También Pielou analiza algunos índices y demuestra cuáles de ellos son independientes y cuales no a la remoción aleatoria de individuos.

Iwao y Kuno (1971) estudian la influencia de cambios aleatorios en la población (adición y remoción de individuos y colonias) sobre los índices α y β .

En un estudio encaminado a determinar el mejor índice para estudiar los cambios en patrones de oviposición al cambiar la densidad de insectos, Myers (1978) usa un modelo de simulación para comparar siete índices. Con un nivel de agregación constante, hace variar la densidad y la correlación con los valores de los índices.

En el Capítulo IV se aborda más ampliamente el problema.

1.5 Tamaño de Cuadrante

Cuando los organismos se distribuyen en un habitat discreto, es decir, formado por un conjunto de unidades discretas, la medición de los patrones espaciales se facilita por el hecho de que la definición de aleatorio, agregado y regular se puede hacer con precisión. El índice a usar, está determinado pues, por la definición adoptada.

El problema surge cuando el habitat es continuo*, en este caso la definición de aleatorio, agregado y regular depende del cuadrante, que es determinado arbitrariamente. "El tamaño y/o la forma del cuadrante, por ejemplo, afectará distintamente a cada índice y para hacer el problema más complejo, este efecto puede variar con el patrón espacial que se quiere estudiar" (Stiteler, 1970, p. 16).

Poole (1974), ilustra el problema del tamaño de cuadrante muy claramente. Si para medir la agregación de la población de la Figura 2, se usará el cuadrante B, se detectaría el alto nivel de agregación. Si se usara el cuadrante A, resultaría un patrón aleatorio, lo que sería erróneo.

*p. ej. plantas en una superficie de terreno o artrópodos en un volumen de suelo

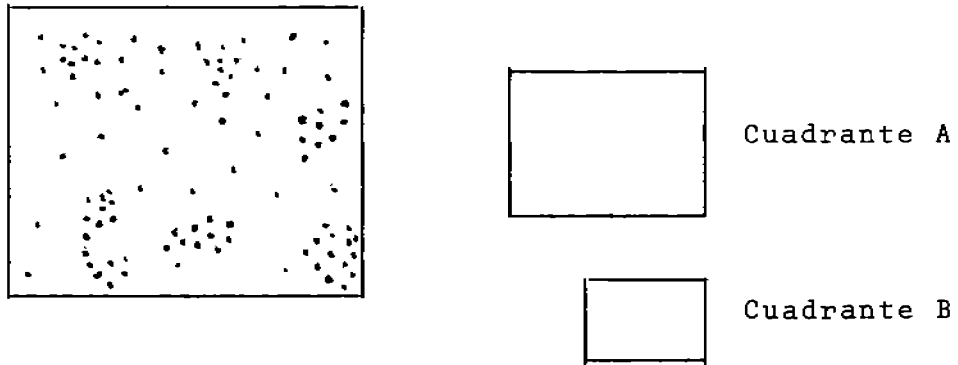


Figura 2. Efecto del tamaño de cuadrante al medir agregación. Un cuadrante de tamaño A indica un patrón aleatorio, aún cuando la población está claramente agregada

El efecto del tamaño de cuadrante sobre diversos índices, tanto en poblaciones reales como simuladas, ha sido estudiado por diversos autores. Archibald (1950) estudiando 16 especies distintas de plantas y usando dos tamaños de cuadrantes (20 cm^2 y 25 cm^2), interpreta el cambio que sufren los parámetros estimados de la distribución de Thomas.

Greig-Smith (1952), genera diversas poblaciones con varios métodos y con distintos grados de agregación. Usando 8 tamaños de cuadrante, calcula el cociente S^2/\bar{x} y concluye que, dependiendo de la naturaleza de la agregación, ésta se manifiesta a partir de un tamaño dado de cuadrante.

En 1975, Hill, et. al., estudiando el efecto del tamaño de la unidad de muestreo sobre insectos del algodón

ro, mencionan la alta correlación obtenida entre el tamaño del cuadrante y el parámetro K de la binomial negativa. Waters y Henson (1959) reportan haber encontrado este mismo hecho con insectos forestales.

Usando precisamente diferentes tamaños de cuadrante, Greig-Smith (1952) desarrolla un método para detectar patrones en plantas. El método consiste a grosso modo en dividir la suma de cuadrados total en porciones debidas a los bloques de diferente tamaño. Con ellos construye cuadrados medios y los grafica contra el tamaño del bloque, el área media de los conglomerados, se manifiesta en la gráfica en forma de picos. Aunque este método ha sido usado por varios ecólogos, especialmente en plantas (Kershaw, 1960), Pielou (1969, p. 105) menciona varias desventajas del mismo.

Iwao (1972) modifica su método original (Iwao, 1968) para aplicarlo cambiando el tamaño del cuadrante. Lo utiliza en varias poblaciones simuladas y en algunas reales. Propone además dos índices (τ y ρ) para medir correlación espacial entre cuadrantes contiguos.

Morisita en 1959 también usa su índice I_{δ} para detectar patrones espaciales cambiando el tamaño del cuadrante.

Una de las grandes desventajas de estos métodos, es la cantidad de información que requieren (conteos en varios tamaños de cuadrantes), es por eso que una de las

características buscadas en todo índice es la independencia del tamaño de cuadrante.

Stiteler (1970) demuestra que bajo ciertas condiciones algunos índices son independientes del tamaño del cuadrante. En el Capítulo V se discutirán las condiciones y los índices mencionados.

CAPITULO II

MECANISMOS QUE GENERAN DISTRIBUCIONES DE CONTAGIO

"Si dentro de un cuadrante los individuos están homogéneamente distribuídos, si conteos en cuadrantes no traslapados son independientes y si la probabilidad de encontrar más de un individuo en cada cuadrante es pequeña, la distribución resultante es Poisson. Es decir, la aleatoriedad y la distribución que ésta genera pueden ser descritas en términos de estas tres suposiciones. Por otro lado, la no-aleatoriedad puede ser originada en gran cantidad de formas.

La formulación del concepto de agregación afronta, por este hecho, varias dificultades tanto teóricas como prácticas. Desde el punto de vista teórico, muchos mecanismos aleatorios pueden ser propuestos para explicar la agregación. Pero esos distintos mecanismos pueden dar lugar a la misma distribución. Por lo tanto, un índice de agregación que sea un parámetro de la distribución resultante, puede no ser un buen indicador del mecanismo subyacente". (Gokhale, 1975)

Stiteler (1970) demuestra que los índices se comportan diferentemente dependiendo del mecanismo generador. En el Capítulo V se presenta este aspecto.

En este Capítulo se presentan algunos de los mecanismos que han demostrado más aplicabilidad así como las distribuciones que generan en cada caso.

2.1 Modelo Colonial

Suponga que el número X de individuos en un cuadrante se puede escribir como:

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$$

donde la variable aleatoria (v.a.) N es el número de colonias y Y_i son v.a. independientes idénticamente distribuidas que representan el tamaño de la colonia.

Sean $P_X(s)$, $P_N(s)$ y $P_Y(s)$ las funciones generatrices de probabilidad (fgp) de X, N y Y respectivamente, entonces se tiene que:

$$P_X(s) = P_N [P_Y(s)]^* \dots \dots \dots (1)$$

y por lo tanto:

$$\mu_X = \mu_N \mu_Y \qquad \sigma_X^2 = \mu_N \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 \sigma_N^2$$

esto se cumple para cualesquiera que sean las distribuciones de N y Y .

La expresión (1) muestra que X tiene una distribución "generalizada", (Feller, 1943; Johnson y Kotz, 1969, p.202; Pielou, 1977, p.118).

Si se denotan como D , D_1 y D_2 las distribuciones de X , N y Y respectivamente, se puede escribir simbólicamente:

$$D \sim D_1 \vee D_2$$

*Ver apéndice A

Y se dice que D es una distribución " D_1 generalizada". Se debe notar que el símbolo V no es simétrico, es decir, $D_1 \text{ V } D_2$ no es generalmente lo mismo que $D_2 \text{ V } D_1$.

En particular, las distribuciones tipo Poisson-generalizadas, han tenido una gran aplicación en ecología. A continuación se presentan algunas de las distribuciones Poisson-generalizadas más importantes.

2.1.1. Distribución Binomial Negativa

$$B. N. (K, p) \sim \text{Poisson} (-K \log p) \text{ V } \text{Log} (1-p)$$

esto es, la binomial negativa (BN) surge si el número de colonias por cuadrante se distribuye Poisson y el tamaño de ellas sigue la distribución logarítmica. Existen varias formas de representar esta distribución en el presente trabajo se usará la forma:

$$P \left[X = x \right] = \frac{\Gamma(x + K)}{\Gamma(K - 1)} p^K (1-p)^x \quad x = 0, 1, \dots$$

Esta distribución es la más usada por su simplicidad y por la fácil interpretación de sus parámetros (la "K" de la BN ha sido usada como medida de agregación por gran número de autores).

Su media y varianza son:

$$E(X) = \frac{kq}{p} \quad V(X) = \frac{kq}{p^2}$$

Acerca de esta distribución se pueden consultar; Anscombe, (1949-1950); Evans, (1953); Bliss y Fisher, (1953);

Waters (1955), (1959); Bliss, (1958); Bliss y Owen, (1958); Harcourt, (1961); Rojas, (1964); Southwood, (1966, p.25-30); Johnson y Kotz, (1969, cap. 5); Carrillo Liz, (1970); Gurland y Hinz, (1971); Kuehl y Fye, (1972); Sevacherian y Stern, (1972); Kogan, Ruesink y Mc Dowell, (1974); Pieters y Sterling, (1974) Poole, (1974, p.105); Pielou, (1977, p. 119). En casi todos se mencionan casos en los que la BN se ajusta satisfactoriamente para describir la distribución es pacial de ciertas especies.

2.1.2. Distribución Neyman Tipo A

"En la mayoría de las especies, tanto de animales como de plantas, el número de descendientes potenciales por individuo es bastante grande, mientras que la probabilidad de supervivencia es muy pequeña.

Suponiendo que los descendientes se desarrollen independientemente y que el número esperado de ellos no varíe demasiado entre familias, es razonable suponer que el número de descendientes por familia es Poisson". (Skellman, 1952).

La distribución Neyman tipo A surge cuando el número de colonias es Poisson y el tamaño de ellas también es Poisson i.e.

$$\text{Ney T A } (\lambda_1, \lambda_2) \sim \text{Poisson } (\lambda_1) \vee \text{Poisson}(\lambda_2)$$

La expresión de esta distribución es:

$$P \{ \bar{X} = x \} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_1} (\lambda_1^j / j!) e^{-j\lambda_2} [(j\lambda_2)^x / x!] \quad x > 0.$$

Esta distribución creada por Neyman (1939), también ha tenido gran aplicación. Para una media y varianza fijas, la Ney T A tiene mayor proporción de ceros y una asimetría menor que la B.N.

Su media y varianza son:

$$E(X) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad V(X) = \lambda_1 + \lambda_2 (1 + \lambda_2)$$

Desarrollos teóricos y aplicaciones de esta distribución se pueden encontrar en: Neyman, (1939); Upholt, (1942); Feller, (1943); Archibald, (1948); Anscombe (1950); Skellam, (1952); Evans, (1953); Bliss y Fisher, (1953); Johnson y Kotz, (1969 p.216); Stiteler, (1970 p.85).

2.1.3. Distribución Polya-Aeppli (Poisson geométrica)

Esta distribución se origina cuando el tamaño de las colonias sigue una distribución geométrica y el número de ellas una Poisson:

$$P.A. (\lambda, \theta) \sim \text{Poisson}(\lambda) \vee \text{Geom}(1-\theta)$$

La forma de esta distribución es:

$$P \{ \bar{X} = x \} = e^{-\lambda} \theta^x \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i+x-1}{x} [\lambda(1-\theta)]^i / i! \quad x \geq 0$$

Para una media y varianza fijas, esta distribución está entre la BN y la Ney T A tanto en la asimetría como en la proporción de ceros.

La media y varianza están dadas por:

$$E(X) = \frac{\lambda}{1-\theta} \quad V(X) = \frac{\lambda(1+\theta)}{(1-\theta)^2}$$

Esta distribución la menciona Polya, (1931); Anscombe (1950); Evans, (1953); Stiteler, (1970) p. 89.

2.1.4 Distribución Poisson Binomial

Cuando el tamaño de las colonias sigue una distribución binomial da lugar a la Poisson binomial.

$$P.B. (n, p, \lambda) \sim \text{Poisson}^*(\lambda) \vee \text{Binomial} (n, p)$$

Como se puede notar, esta distribución depende de tres parámetros. Su expresión es:

$$P[\bar{X}=x] = e^{-\lambda} (p/q)^x \sum_{i \geq x/n} \binom{in}{x} (\lambda q^n)^i / i! \quad x \geq 0$$

Esta distribución la discute Skellman, (1952) y menciona que es apropiada cuando la competencia es fuerte dentro de colonias compactas de individuos con requerimientos ambientales similares.

La media y varianza en términos de los parámetros son:

$$E(X) = \lambda np \quad V(X) = \lambda np (np+q)$$

Esta distribución ha sido menos usada que las anteriores sobre todo por la dificultad de cálculo, sin embargo en la actualidad con el empleo de la computadora se ha incrementado su uso. Una aplicación en entomología puede en-

contrarse en Mc Guire, Brindley y Bancroft (1957). Johnson y Kotz (1969, p.197) también la presentan.

2.1.5. Distribución Poisson-Pascal

Esta distribución surge cuando el tamaño de las colonias es una v.a. BN, i.e.

$$\text{Poi-Pas } (K,p,\lambda) \sim \text{Poisson } (\lambda) \vee \text{BN } (K,p)$$

Su expresión es:

$$P[\bar{X}=x] = e^{-\lambda}(1-p)^x \sum_{i \geq 1/K} \binom{iK+x-1}{x} (\lambda p^K)^i / i! \quad x \geq 0.$$

Esta distribución también es llamada Polya-Aeppli generalizada, puesto que Polya-Aeppli es un caso particular de ella cuando $K=1$. Es discutida también por Skellam, (1952) y Johnson y Kotz, (1969)

Su media y varianza son:

$$E(X) = \lambda Kq/p \quad V(X) = \lambda Kq(Kq+1)/p^2$$

2.1.6 Distribución de Thomas

Esta distribución es parecida a Ney T A con la diferencia que supone que el generador (planta o insecto) de una colonia no desaparece, es decir, hay superposición de generaciones.

$$\text{Thomas } (\lambda_1, \lambda_2) \sim \text{Poisson } (\lambda_1) \vee \{\text{Poisson } (\lambda_2) + 1\}$$

La forma de esta distribución es:

$$P(X=x) = e^{-\lambda_1} \sum_{i=0}^x \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-i\lambda_2} (\lambda_2 i)^{x-i} / (x-i)! \quad x \geq 0.$$

Thomas (1949) la propone como modelo para la distribución del número de plantas de una especie dada en cuadrantes colocados al azar.

Archibald (1950) ajusta esta distribución a conteos de plantas y hace una interesante interpretación de los parámetros estimados al cambiar el tamaño del cuadrante. La media y varianza de esta distribución son:

$$E(X) = \lambda_1 (\lambda_2 + 1) \quad V(X) = \lambda_1 (\lambda_2^2 + 3\lambda_2 + 1)$$

Más referencias sobre esta distribución son: Anscombe (1950); Skellman, (1952) y Johnson y Kotz (1969, p. 209).

2.2 Modelo de Heterogeneidad

Suponga que la región sobre la cual esta dispersa la población no es homogénea, en cuanto a disponibilidad de nutrientes y otros aspectos ecológicos, es decir, que el número esperado de individuos varía de cuadrante a cuadrante. Esto implica que la distribución del número de individuos por cuadrante depende de un parámetro determinado por la región en que este se localiza y dada la heterogeneidad este parámetro es a su vez una v.a.

Si la densidad del parámetro mencionado es $f(\cdot)$, la distribución marginal del número de individuos en un cuadrante es:

$$P(X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X=x|y) f(y) dy$$

la cual es conocida como una "mezcla" en estadística aunque cuando se trabajan distribuciones discretas, son más comúnmente llamadas "compuestas".

Feller, (1943) hace los primeros desarrollos sistemáticos sobre estas distribuciones. Skellman (1952) también hace mención a ellas. Johnson y Kotz, (1969, p.183) presentan un buen número de las distribuciones compuestas más conocidas.

Sea D la distribución del número real de individuos en un cuadrante, D_1 la distribución del número de individuos en un cuadrante (sin tomar en cuenta la región) y D_2 la distribución del parámetro que varía según la región, entonces se puede escribir

$$D \sim D_1 \underset{\theta}{\wedge} D_2$$

donde θ es el conjunto de parámetros que varían según la región.

A la distribución D se le llama " D_1 compuesta".

2.2.1. Binomial Negativa

Si el número de individuos en un cuadrante tomado al azar es Poisson (λ) donde λ varía según una gamma ($K, p/1-p$), entonces X se distribuye B.N. (k, p) i.e.

$$B.N. (K, p) \sim \text{Poisson} (\lambda) \underset{\lambda}{\wedge} \text{Gamma} (K, p/1-p)$$

2.2.2. Neyman Tipo A

El número de individuos es Poisson ($c\lambda_2$) donde c es, a su vez, v.a. Poisson (λ_1).

$$\text{Ney T A } (\lambda_1, \lambda_2) \sim \text{Poisson } (c\lambda_2) \underset{c}{\wedge} \text{Poisson } (\lambda_1)$$

Como se puede ver, tanto la BN como Ney T A son, a la vez, Poisson compuestas y Poisson generalizadas.

2.2.3. Polya-Aeppli

Surge como distribución compuesta cuando $X \sim \text{Pascal } (c, 1-\theta)$ y $c \sim \text{Poisson } (\lambda)$ i.e.

$$\text{P A } (\lambda, \theta) \sim \text{Pascal } (c, 1-\theta) \underset{c}{\wedge} \text{Poisson } (\lambda)$$

2.2.4. Poisson Binomial

$$\text{P B } (n, p, \lambda) \sim \text{Binomial } (cn, p) \underset{c}{\wedge} \text{Poisson } (\lambda)$$

2.2.5. Poisson-Pascal

Esta distribución se puede escribir simbólicamente como:

$$\text{Poi-Pas } (K, p, \lambda) \sim \text{BN } (cK, p) \underset{c}{\wedge} \text{Poisson } (\lambda)$$

Puesto que la BN es, a su vez, compuesta y generalizada, la expresión anterior resulta:

$$\text{Poi-Pas } (K, p, \lambda) \sim \{ \text{Poisson } (-cK \log p) \vee \text{Log } (1-p) \} \underset{c}{\wedge} \text{Poisson } (\lambda).$$

2.2.6. Thomas

No es estrictamente una distribución compuesta, sin em
bargo, se asemeja mucho a una.

$$\text{Thomas } (\lambda_1, \lambda_2) \sim \{c + \text{Poisson}(c\lambda_2)\} \wedge \text{Poisson}(\lambda_1)$$

c

2.3. Procesos de Nacimiento Puro

Suponga que la población en estudio se haya dispersa a través de unidades discretas dentro del habitat o, en el caso de un continuo, suponga que se divide en cuadrantes de igual tamaño, entonces varios tipos de procesos estocásticos pueden usarse como modelos de patrones espaciales, sin embar
go solo se tratará el proceso de nacimiento-puro.

Este proceso supone que la probabilidad de un nuevo individuo (ya sea que nazca o que caiga) en un cuadrante o uni
dad durante un período de tiempo $(t, t+h)$, depende del número x de individuos ocupantes en ese instante. Esta probabilidad está dada por $\lambda_x h + o(h)$.

La probabilidad de otro nuevo individuo en ese mismo pe
ríodo es $o(h)$.

El número de individuos presentes en un cuadrante dado dependerá del tiempo de observación, sea $P_x(t)$ la probabili
dad de tener x individuos al tiempo t . Bajo estas suposicio
nes, $P_x(t)$ se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t)$$

$$P'_x(t) = -\lambda_x P_x(t) + \lambda_{x-1} P_{x-1}(t)$$

usando las condiciones: $P_0(0)=1$ y $P_x(0)=0$ para $x \geq 1$

La solución a estas ecuaciones ha sido dada por varios autores; bajo varias condiciones. En particular, es interesante el caso en el que λ es función lineal del número de individuos en el cuadrante ($\lambda_x = \alpha + \beta x$). Las constantes α y β se pueden interpretar como la atracción intrínseca del cuadrante y la atracción de los individuos, respectivamente. Si $\beta = 0$, la probabilidad de un nuevo ocupante no depende del número ya presente en el cuadrante. Este proceso debe generar un patrón aleatorio. Si $\beta > 0$ entonces un cuadrante es más atractivo para un candidato al aumentar el número de sus ocupantes. De esta manera, se genera un patrón agregado. Por último, si $\beta < 0$, la probabilidad de un nuevo miembro disminuye al incrementarse el número de los ocupantes de un cuadrante; esto debe dar lugar a un patrón regular.

Las soluciones obtenidas en cada caso son*:

i) $\beta = 0$

$$P_x(t) = e^{-\alpha t} (\alpha t)^x / x! \quad x = 0, 1, \dots$$

Poisson con parámetro αt .

ii) $\beta > 0$

$$P_x(t) = \frac{\Gamma(K+x)}{x! \Gamma(K)} p^K (1-p)^x \quad x = 0, 1, \dots$$

BN con $K = \alpha/\beta$ y $p = e^{-\beta t}$

iii) $\beta < 0$

$$P_x(t) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, \dots$$

binomial con $n = -\alpha/\beta$ y $p = 1 - e^{\beta t}$

2.4 Distribuciones con Adición de Ceros

En algunas situaciones, cierto número de cuadrantes son inhabitables por diversas razones, mientras que en los restantes la población se distribuye aleatoriamente. La distribución resultante es Poisson con adición de ceros.

Suponga que una proporción p de cuadrantes es inhabitable, entonces:

$$P\{X=0\} = p + (1-p) e^{-\lambda}$$

$$P\{X=x\} = (1-p) e^{-\lambda} \lambda^x / x! \quad x = 1, 2, \dots$$

$$\text{con } E(X) = \lambda(1-p) \quad \text{y} \quad V(X) = \lambda(1 + p\lambda)(1-p)$$

Es posible combinar el concepto de cuadrantes inhabitables con el de contagio o regularidad, estos surgidos a partir de otras consideraciones. Así, por ejemplo, además de cierta proporción de cuadrantes inhabitables, el sistema puede estar sujeto a heterogeneidad en los restantes. La distribución resultante tiene contagio producido por las dos causas.

Johnson y Kotz (1969, p.204) trabajan algunas distribuciones de esta clase y proporcionan bibliografía al respecto.

2.5 Dificultad para Determinar la Distribución Teórica

Al analizar datos correspondientes a patrones agregados, surge cierto problema para determinar la distribución teórica que sea un modelo adecuado para describir dichos datos, una de las causas principales es la gran similitud que existe entre ellas.

"Por otro lado, se tienen problemas al aplicar la prueba de Ji- cuadrada para bondad de ajuste. En primer lugar, usualmente es necesario agrupar algunas frecuencias, sobre todo en la cola de la distribución, de manera que la aproximación a la Ji- cuadrada sea válida. En segundo lugar, la distribución asintótica del estadístico Ji- cuadrado de Pearson no es Ji-cuadrada cuando los parámetros involucrados son estimados por máxima verosimilitud u otros métodos eficientes basados en datos no agrupados". (Gurland y Hinz, 1971)

Anscombe (1950) discute algunas diferencias entre distribuciones de contagio, concluye que para algunos valores de los parámetros, las distribuciones analizadas son prácticamente indistinguibles.

Propone, además dos estadísticas (T y U) para probar la bondad de ajuste. El estadístico T es la diferencia entre el tercer momento muestral y su valor esperado estimado a partir de los primeros dos momentos muestrales. U es la diferencia entre el estimador de varianza y su valor esperado calculado a partir del estimador de la media y la proporción observada de ceros. Evans (1953) menciona: "Un valor positivo de cualquiera de los dos estadísticos indica que una distribución más asimétrica daría un mejor ajuste, mientras que valores negativos sugieren una distribución menos asimétrica. La sensibilidad relativa de los dos estadísticos al probar bondad de ajuste depende de los valores de los parámetros de la distribución real. En general, cuando la media es pequeña para un tamaño de muestreado, ninguna discriminación apreciable es posible entre distribuciones alternativas".

Evans (op.cit.) ajusta las distribuciones N.B., Ney T A y Polya-Aeppli a conteos de plantas e insectos y observa que en algunos casos la Ji-cuadrada no discrimina entre ellas y en varios casos tampoco lo hacen los estadísticos T y U.

David y Moore (1954) después de mencionar algunos problemas para ajustar distribuciones Poisson-compuestas apuntan:

"La dificultad para decidir el tipo apropiado de distribución Poisson-compuesta a usar, dá lugar a la pregunta de si es necesario ajustar alguna distribución. Dado que la hipótesis de una Poisson se ha rechazado, generalmente se desea, como alternativa, establecer el número medio de plantas en el campo y también alguna medida de "agregación" o "contagio".

En el capítulo siguiente se discuten varios índices o medidas de agregación que son independientes de la distribución.

CAPITULO III
MEDIDAS DE AGREGACION

3.1 Cociente Varianza-Media

"La propiedad que define a las distribuciones de contagio discretas es que la varianza excede a la media, mientras que para la Poisson la media y la varianza son iguales. Esto sugiere inmediatamente el uso del cociente varianza-media (σ^2/μ) como medida de agregación". (Pielou, 1977, p. 124).

"Tal vez dé más luz pensar en $\omega (= \sigma^2/\mu)$ como el cociente de dos varianzas. Dado que $E(X)$ es la densidad promedio por cuadrante, es claro que es el mismo que el parámetro que se hubiera obtenido para la distribución Poisson si la misma población estuviera aleatoriamente distribuida. Dicho de otra manera, estamos comparando la varianza de la población en cuestión contra la varianza de una distribución aleatoria con la misma densidad". (Stiteler, 1970, p. 23).

Probablemente fué Student (1919) el primero en aplicar el índice de dispersión ($(n-1) s^2/\bar{x}$) al problema de medir patrones espaciales. Posteriormente, Clapham (1936) calculó el cociente varianza-media (que él llamó "varianza relativa") para 44 especies de zacates y encontró que, excepto en dos casos, este cociente siempre era mayor que uno.

David y Moore (1954) proponen el índice $I = s^2/\bar{x} - 1$ para medir agregación y presentan el procedimiento para comparar estadísticamente dos niveles de agregación.

Gart (1970) usa otro argumento para derivar el coeficiente de varianza-media como índice de agregación. Usa la relación $\lambda = ip(i)/p(i-1)$, $i=1,2,\dots$ de la Poisson. Si se denota f_i la frecuencia observada de la i -ésima clase, se obtiene el conjunto de estimadores $\hat{\lambda}_i = if_i/f_{i-1}$. Gart expresa el mejor estimador $\hat{\lambda}$ como una suma ponderada de las $\hat{\lambda}_i$.

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \hat{\lambda}_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i}$$

donde $\omega_i = f_{i-1}$

Si se grafica $\hat{\lambda}_i$ contra i se debe obtener una línea recta horizontal. Se puede demostrar* que $ip(i)/p(i-1)$ también es función lineal de i para las distribuciones BN y binomial pero con pendientes positiva y negativa respectivamente. De este modo, la pendiente de la recta de regresión puede ser un indicador del tipo de patrón espacial.

El estimador de mínimos cuadrados ponderados del coeeficiente de regresión es:

$$b = \frac{\sum \omega_i (i - \bar{i}_w) (\hat{\lambda}_i - \bar{\lambda}_w)}{\sum \omega_i (i - \bar{i}_w)^2}$$

*Ver Apéndice C

donde $\bar{i}_\omega = \sum i \omega_i / \sum \omega_i$ y $\hat{\lambda}_\omega = \sum \omega_i \hat{\lambda}_i / \sum \omega_i$

Ahora si $\omega_i = f_{i-1}$ esta expresión se reduce a:

$$b = 1 - \frac{n}{n-1} \frac{\bar{x}}{s^2}$$

es claro que si $\frac{\bar{x}}{s^2} < 1$ ($\frac{s^2}{\bar{x}} > 1$), entonces $b > 0$ y se tiene agregación por otro lado si $\frac{\bar{x}}{s^2} > 1$ ($\frac{s^2}{\bar{x}} < 1$), entonces $b < 0$ y el patrón es regular, finalmente $\frac{\bar{x}}{s^2} = 1$ implica $b = 0$ sugiriendo un patrón aleatorio.

Kuehl y Fye (1972) usan el cociente varianza-media para analizar el patrón espacial de insectos en algodón-ro.

Estudiando la distribución espacial de la chinche *lygus* (Hemiptera: Miridae), Sevacherian y Stern (1972), aplican el índice $s^2/\bar{x} - 1$ para comparar el nivel de agregación del insecto a diversas horas del día.

Myers (1978) en su trabajo de simulación reporta una débil correlación entre densidad y el cociente varianza-media aunque fue el que mejor detectó el índice de agregación en la población simulada.

En los Capítulos IV y V se discutirán algunas propiedades de esta medida de agregación.

3.2 Parámetro K de la BN

La distribución binomial negativa es, sin duda, la más usada para describir patrones agregados. El hecho de que cuando $K \rightarrow \infty$ la BN converge a la Poisson y cuando $K \rightarrow 0$ converge a la logarítmica, ha sugerido a K como una medida de agregación, con valores que varían, desde cero cuando la agregación es extrema, hasta infinito que define un patrón completamente aleatorio.

Existen varios métodos para la estimación de K (Bliss y Fisher, 1953), su eficiencia dependiendo del valor de K (Anscombe, 1949, 1950).

Uno de los factores causantes de la gran popularidad de K como índice de agregación es el hecho empírico de que este parámetro es una característica intrínseca de la especie, Anscombe (1949) apunta:

"Si tenemos varios conjuntos de conteos en la misma especie de insecto, procedentes de distintos distritos o de distintos tratamientos, podemos encontrar que m (media) varía entre conjuntos, pero K permanece aproximadamente constante. Para analizar tales datos estadísticamente, necesitamos obtener un estimador combinado de K a partir de todos los conjuntos de conteos y estimar m separadamente para cada conjunto. Existe cierta evidencia en el sentido de que K depende de la capacidad intrínseca de las especies a reproducirse, mientras que m depende de factores

externos. Tratar de ajustar distribuciones BN con un valor común de K a conjuntos de conteos de las mismas especies es, por lo tanto, un procedimiento razonable".

Se han desarrollado varias formas para calcular una K común a partir de varios conjuntos de conteos (Anscombe, 1949, 1950; Bliss y Fisher, 1953; Bliss y Owen, 1958).

Waters (1959) hace una amplia exposición sobre este índice, presenta un ejemplo muy ilustrativo y presenta también los rangos empíricos de K para diversas especies.

Al ajustar la BN a conteos de insectos forestales, Waters y Henson (1959), tomaron cinco tamaños de unidad observacional y observaron correlación entre el estimador de K y la media por unidad. Este mismo hecho es registrado por Harcourt (1961) así como también el aumento de K a través de las distintas etapas de desarrollo de P. rapae, esto explicado por la mayor movilidad de los adultos. Así mismo transforma los datos para análisis de varianza.

El mismo Harcourt (1963) reporta 82 conteos en seis etapas en el desarrollo del pulgón de la papa (Leptimotarsa decemlineata). Grafica las varianzas contra las medias y observa que los valores se acercan a la línea $s^2 = \bar{x} + \bar{x}^2/K$ con una K común obtenida mediante alguno de los procedimientos mencionados. Sin embargo, también menciona que el uso de una K común no es del todo satisfactorio en ese caso. Apunta: "Desafortunadamente, K es inestable y,

como en este caso, se incrementa con \bar{x} ". Recomienda estratificar los datos para mejorar la estimación.

Pieters y Sterling (1974) estudiando antrópodos en algodónero reportan también el hecho observado por Harcourt en cuanto al aumento de K al pasar de etapas tempranas de desarrollo a etapas adultas.

En el estudio de Myers (1978) el parámetro K (estimado por máxima verosimilitud) resultó altamente correlacionado (.49) con la densidad.

Para salvar el problema de la correlación alta entre K y la densidad debido a la falta de ajuste con la BN (ver Capítulo IV), Kuno (1968) propone el índice $\gamma = (\sigma^2 - \mu) / \mu^2$ * como medida de agregación sin importar la distribución que sigan las observaciones. Este índice es el recíproco de K obtenido al expresar la varianza de la BN como $\sigma^2 = \mu + \mu^2 / K$. Kuno interpreta a γ como el coeficiente de variación al cuadrado menos $1/\mu$, que es el valor del coeficiente de variación al cuadrado de una Poisson. Así, γ es cero para un patrón aleatorio, mayor que cero para uno agregado y menor que cero para uno regular.

En el Capítulo IV y V se discute la conveniencia de usar γ y no K como medida de agregación.

*Estimado por $\gamma = (s^2 - \bar{x}) / \bar{x}^2$

3.3 Índice de Morisita

Buscando un índice que no fuera afectado por cambios en el tamaño del cuadrante, Morisita (1959) desarrolla el índice que lleva su nombre. Morisita parte del supuesto de que la población en estudio consiste en un mosaico formado por subáreas grandes (con relación al tamaño de cuadrante) dentro de los cuales el patrón es aleatorio.

Para entender el origen de este índice, es necesario mencionar primero el concepto de "diversidad" y el método de Simpson (1949) para medirlo.

Suponga una colección de N objetos de n diferentes clases, de los cuales n_1 son de la primera clase, n_2 de la segunda y así sucesivamente, claramente $\sum n_i = N$. Si dos objetos se extraen al azar y sin reemplazo de toda la colección, la probabilidad de que ambos sean de la misma clase es:

$$\frac{\sum n_i (n_i - 1)}{N (N - 1)}$$

Parece razonable decir que la diversidad de la colección es grande si esta probabilidad es baja y moderada si esta es alta. Ahora suponga que se cuentan los individuos de cierta población contenidos en n cuadrantes tomados al azar y que se etiquetan para saber de que cuadrante provienen. Sean x_i individuos pertenecientes al i -ésimo cuadrante ($i = 1, 2, \dots, n$, $\sum x_i = N$). La probabilidad de que dos

individuos tomados al azar (del total N) pertenezcan al mismo cuadrante es:

$$\delta = \frac{\sum x_i (x_i - 1)}{N(N-1)}$$

Si los individuos están apiñados en un número relativamente pequeño de cuadrantes, esto es, si están agregados, δ será grande; por el contrario, si los individuos están más o menos repartidos uniformemente entre los n cuadrantes, δ será pequeña.

Considere el valor esperado de δ al muestrear una población con patrón de tipo mosaico, en este caso, si X_1, X_2, \dots, X_n son el número de individuos en n cuadrantes tomados al azar, entonces las X_i son independientes y tienen distribución Poisson con parámetro λ_i . Así se tiene

$$\begin{aligned} E(\delta) &= E \left\{ \frac{\sum X_i (X_i - 1)}{N(N-1)} \right\} \\ &= E_N \left\{ E \left[\frac{\sum X_i (X_i - 1)}{N(N-1)} \mid N \right] \right\} \\ &= E_N \left\{ \frac{\sum \lambda_i^2}{N(N-1)} \right\} \\ &= \frac{\sum \lambda_i^2}{(\sum \lambda_i)^2} \end{aligned}$$

Si el patrón es aleatorio, se tiene $\lambda_i = \lambda$ y por lo tanto:

$$E(\delta) = \frac{n \lambda^2}{n^2 \lambda^2} = \frac{1}{n}$$

*Stiteler (1970) p. 66

El índice de Morisita se define como:

$$I_{\delta} = n\delta = n \frac{\sum x_i(x_i-1)}{N(N-1)}$$

donde x_i es el número de individuos en el i -ésimo cuadrante y $N = \sum x_i$. De manera, que si la población muestreada tiene un patrón aleatorio el valor de I_{δ} será uno, si es agregado $I_{\delta} > 1$ y si es regular $I_{\delta} < 1$.

La prueba de que I_{δ} no es afectado por el tamaño del cuadrante es como sigue:

Suponga que existen s subáreas, r_i cuadrantes en la i -ésima subárea y t_i es el total de individuos en esa misma subárea. Entonces el total de cuadrantes es $n = \sum_i r_i$ y el total de individuos es $t = \sum_i t_i$.

Sea x_{ij} el número de individuos en el j -ésimo cuadrante de la subárea i -ésima. Entonces $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ir_i}$ son v.a.i.i.d Poisson (λ_i) y

$$\begin{aligned} E(I_{\delta}) &= n E(\delta) \\ &= n \frac{\sum r_i \lambda_i^2}{(\sum r_i \lambda_i)^2} \quad * \end{aligned}$$

Si multiplicamos el tamaño del cuadrante por m , el número de cuadrantes en una subárea cambia a $r'_i = r_i/m$ y el parámetro de la Poisson, cambia a $\lambda'_i = m\lambda_i$, por lo tanto:

*Ver Apéndice D

$$\begin{aligned}
 E(I'_\delta) &= \frac{n}{m} E(\delta') \\
 &= \frac{n}{m} \frac{m \sum_i r_i \lambda_i^2}{\left(\sum_i r_i \lambda_i\right)^2} *
 \end{aligned}$$

Sin embargo, el suponer, sin evidencia, que un patrón es del tipo mosaico es usualmente injustificado. Un procedimiento para verificar esta suposición es muestrear la población repetidamente usando cuadrantes de distintos tamaños y observar si I_δ permanece constante, sobre todo en los cuadrantes de menor tamaño.

"Note que bajo la suposición de que cada cuadrante se encuentra totalmente contenido en una subárea donde los individuos siguen un patrón aleatorio, un cambio en el tamaño del cuadrante en un múltiplo constante es equivalente a un cambio en la densidad de la población en el mismo múltiplo. Esto es claro dado que el número de individuos en un cuadrante tendrá una distribución Poisson con parámetro igual a la densidad - por - unidad veces el área del cuadrante". (Stiteler, 1970, p. 69).

Aún cuando Morisita creó su índice motivado por conceptos biológicos y estadísticos distintos, I_δ y el índice γ introducido en la sección anterior y basado en la K de la BN, están íntimamente ligados. i.e.

$$I_\delta = \frac{N}{N-1} (\gamma+1)$$

*Ver Apéndice D

Si N es grande, se puede escribir

$$I_{\delta} = \gamma + 1$$

es obvio entonces, que I_{δ} tiene las mismas propiedades que γ .

En 1964, Morisita aplica su índice para comparar agregación dentro y entre grupos. Hairston, Hill y Ritte (1971) analizan artrópodos en el suelo usando cuadrantes de diferentes tamaños y observando el comportamiento de I_{δ} a través de ellos. Pieters y Sterling (1974) utilizan tanto la K de BN como I_{δ} para medir agregación en artrópodos del algodón y reportan una alta concordancia entre ellos. En el estudio de Myers (1978) el índice I_{δ} resulta correlacionado negativamente (-.31) con densidad y positivamente con agregación (.74).

3.4 Índices de Lloyd

Lloyd (1967) propone un índice para medir el grado de "apiñamiento" de los miembros de una población. Define "apiñamiento medio"[#] como el número medio por individuos de otros individuos en el mismo cuadrante. Se puede pensar en esos otros individuos como co-ocupantes, con el primer individuo, del mismo cuadrante.

El apiñamiento medio $\bar{\mu}^*$ es un promedio sobre individuos en vez de sobre cuadrantes. Para calcularlo se cuentan, -

[#]Traducción del inglés: Mean crowding

para cada uno de los N individuos, el número x_i de otros individuos que están localizados en el mismo cuadrante. ($i = 1, 2, \dots, N$).

Entonces se tiene:

$$\mu^* = \frac{N}{\sum_{i=1}^N} x_i / N$$

esta expresión usualmente se escribe en términos del número de individuos por cuadrante como:

$$\mu^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n} X_i (X_i - 1) / \sum_{i=1}^n X_i$$

donde n es el número de cuadrantes y X_i es el número de individuos en el i -ésimo cuadrante.

En términos de media y varianza de X , la fórmula es:

$$\mu^* = \mu + \left(\frac{\sigma^2}{\mu} - 1 \right)$$

en otras palabras, el apiñamiento medio es igual a la densidad media más la cantidad por la cual el cociente varianza media excede a la unidad. En un patrón aleatorio se cumple $\mu^* = \mu$.

La estimación de μ^* presenta algunos problemas, dado que el apiñamiento medio está promediado entre individuos y generalmente se cuenta con una muestra aleatoria de cuadrantes, esto hace que el estimador

$$\frac{s^2}{\bar{x}} = \bar{x} + (s^2/\bar{x} - 1)$$

sea sesgado.

Lloyd propone otro índice que llama "abigarramiento"[#] el cual es simplemente el cociente $\frac{\bar{\mu}^*}{\mu}$. Aunque Lloyd no lo visualizó así, este índice tiene la ventaja de no ser afectado por la remoción aleatoria de individuos. Esta cuestión se tratará en el Capítulo IV.

Como lo apunta Pielou (1977, p. 132):

"Apiñamiento es algo que es experimentado por cada individuo y depende del número total que está presente. Abigarramiento, por otro lado, es una propiedad intrínseca del patrón espacial independiente de la densidad, dos poblaciones pueden tener el mismo grado de abigarramiento aún cuando sus densidades difieran".

La relación entre apiñamiento, $I\delta$ y γ es:

$$\frac{\bar{\mu}^*}{\bar{x}} = \gamma + 1 = \frac{N-1}{N} I\delta$$

Existen en la literatura pocas aplicaciones de los índices de Lloyd. Myers (1978) concluye que $\bar{\mu}^*$ está altamente correlacionada con densidad (.63) y con agregación (.48), por otro lado, $\frac{\bar{\mu}^*}{\mu}$ resultó con correlaciones de -.41 y .73 con densidad y agregación respectivamente. Desafortunadamente estos resultados no son muy confiables dado que Myers usó las fórmulas:

[#]Traducción del Inglés: Patchiness

$$\bar{x}^* = \bar{x} + \bar{x}/K \quad \text{y} \quad \bar{x}^*/\bar{x} = 1 + 1/K$$

que son válidas solo en el caso de tener una distribución BN.

En la siguiente sección se presenta una metodología basada en la relación lineal entre \bar{x}^* y μ .

3.5 Índices de Iwao

"Cuando se discuten las distribuciones de patrones espaciales de poblaciones biológicas, es preferible distinguir dos aspectos distintos involucrados: el primero es si el componente básico de la distribución es un solo individuo o un grupo de ellos (llámense colonia), y el segundo es como esos componentes básicos se distribuyen a su vez en las unidades de habitat (cuadrantes). El primero parece más relacionado con el modo de vida de la especie en lo que respecta a reproducción, dispersión y el patrón de interacción entre individuos, mientras que el segundo está relacionado más a menudo con la heterogeneidad de las condiciones del habitat. Los dos aspectos son esencialmente independientes: cierta especie puede ser agregada en el primer aspecto pero no en el segundo y viceversa". (Iwao y Kuno, 1971).

Iwao (1968) propone un par de índices para medir estos dos aspectos. Los índices están basados en la relación lineal $\bar{x}^* = \alpha + \beta\mu$ entre el apiñamiento medio y la densidad

media donde α es una medida del tamaño de la colonia y β es un índice del patrón espacial de las colonias. Iwao fue motivado por el modelo colonial (sec 2.1) para la creación de estos índices. Sea $X = Y_1 + Y_2 \dots + Y_N$ recordando que: $\mu_X = \mu_N \mu_Y$ y $\sigma_X^2 = \sigma_N^2 \mu_Y^2 + \sigma_Y^2 \mu_N$ se tiene mediante algunos pasos algebraicos:

$$\begin{aligned} \mu_X^* &= \mu_X + \frac{\sigma_X^2}{\mu_X} - 1 \\ &= \mu_Y^* + \frac{\mu_N^*}{\mu_N} \mu_X \end{aligned}$$

donde $\mu_Y^* = \mu_Y + \sigma_Y^2/\mu_Y - 1$ y $\mu_N^* = \mu_N + \sigma_N^2/\mu_N - 1$. Es decir, α es el apiñamiento medio dentro de las colonias y β es el abigarramiento entre colonias.

Es claro que si el componente básico es un solo individuo entonces $\alpha = 0$ (p.ej. Poisson, distribuciones compuestas y binomial con una n común).

Por otro lado, si el componente básico no es un individuo sino una colonia, α siempre toma valores positivos. (p.ej. distribuciones generalizadas). Teóricamente, α no puede ser negativo, pero en algunos casos, el valor extrapolado a partir de la línea de regresión cae entre 0 y -1. Esto ocurre cuando el patrón espacial es regular.

"El valor de α puede variar con el tamaño de cuadrante, pero dentro de esa limitación, este refleja el grado de contagio, positivo o negativo, que es considerado inherente

rente a las especies. En este sentido puede ser llamado 'índice de contagio básico'.

La pendiente β de la regresión, por otro lado, puede considerarse un índice que muestra el patrón espacial de utilización del habitat por individuo o grupos de individuos en relación con su densidad de población. Su valor es igual a la unidad cuando las distribuciones de individuos o grupos de individuos (con una media fija) sigan la serie Poisson, y mayor o menor que la unidad cuando sus distribuciones sean sobre-dispersas (como la BN con una K común) o bajo-dispersas (como la binomial con una n común), respectivamente. Se debe notar, sin embargo, que β es también aproximadamente igual a la unidad en distribuciones completamente uniformes cuando el rango de densidades menores a 1 son desechadas. También, la pendiente será mayor o menor que la unidad si el tamaño medio de colonias aleatoriamente distribuidas se incrementa o decrecienta proporcionalmente al incremento en la densidad media. En cualquier caso, la pendiente describe la forma en que los individuos o grupos de individuos se distribuyen en el habitat al cambiar la densidad media. Por lo tanto, puede ser llamado 'índice de contagio-densidad'". (Iwao, 1968).

La relación entre μ^* y μ se mantiene lineal tanto para distribuciones sobre-dispersas como para aleatorias y aún para bajo-dispersas. A continuación se presentan algunas de ellas:

1. Distribución Poisson. Para la distribución Poisson con parámetro λ se tiene $\bar{\mu}^* = \lambda = \mu$ así, $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.
2. BN con una K común. Si la BN surge de manera que K permanezca constante (modelo de heterogeneidad), se puede escribir $\bar{\mu}^* = (1 + 1/K)\mu$ así, $\alpha = 0$ y $\beta = 1 + 1/K$.
3. BN con una p común. Si el modelo colonial genera la BN, el parámetro p permanecerá constante y en este caso $\bar{\mu}^* = q/p + \mu$ así, $\alpha = q/p$ y $\mu = 1$.
4. Neyman Tipo A con λ_1 constante. Si una NeyTA con parámetros λ_1 y λ_2 surge de manera que λ_1 se mantenga constante (modelo de heterogeneidad), la relación es $\bar{\mu}^* = (1 + 1/\lambda_1)\mu$ entonces, $\alpha = 0$ y $\beta = 1 + 1/\lambda_1$.
5. Neyman Tipo A con λ_2 constante. Si el parámetro λ_2 es constante (modelo colonial), se puede escribir $\bar{\mu}^* = \lambda_2 + \mu$ de modo que: $\alpha = \lambda_2$ y $\beta = 1$.
6. Polya-Aeppli con λ constante. Si la distribución Polya-Aeppli surge a través del modelo de heterogeneidad λ es constante y $\bar{\mu}^* = \mu + 2\mu/\lambda - 2$ y por lo tanto $\alpha = -2$ y $\beta = 1 + 2/\lambda$.
7. Polya-Aeppli con θ constante. Si esta distribución es generada por el modelo colonial θ es constante

y la relación es: $\bar{\mu}^* = \mu + 2 \theta / (1-\theta)$ y entonces $\alpha = 2 \theta / (1-\theta)$ y $\beta = 1$.

8. Poisson-binomial con λ y p constantes. Este es el caso de la Poisson-binomial generada por el modelo de heterogeneidad. De manera que: $\bar{\mu}^* = \mu (1+1/\lambda) - p$ y por lo tanto $\alpha = -p$ y $\beta = 1 + 1/\lambda$.
9. Poisson-binomial con n y p Constantes. Si esta distribución es generada por el modelo colonial, n y p son constantes. Así, $\bar{\mu}^* = \mu + p(n-1)$ y por lo tanto $\alpha = p (n-1)$ y $\beta = 1$.
10. Poisson-Pascal con λ y p constantes. Una distribución Poisson-Pascal (K, p, λ) que surja del modelo de heterogeneidad mantiene λ y p constantes y en ese caso $\bar{\mu}^* = \mu(1+1/\lambda) + q/p$ y entonces $\alpha = q/p$ y $\beta = 1+1/\lambda$.
11. Poisson-Pascal con K y p constantes. Si esta distribución es generada por el modelo colonial, n y p son constantes y entonces $\bar{\mu}^* = \mu + q (K+1)/p$ por lo tanto $\alpha = q (K+1)/p$ y $\beta = 1$.
12. Binomial con n constante. Si la binomial surge de manera que el parámetro n sea constante como por ejemplo la situación en que un número finito de individuos están distribuidos aleatoriamente en una región finita, se tiene que $\bar{\mu}^* = (1-1/n)\mu$ así que $\alpha = 0$ y $\beta = 1-1/n$.

13. Binomial con p constante. Si un proceso de nacimiento puro genera una binomial, el parámetro p es constante y en ese caso $\hat{\mu}^* = \mu - p$ entonces $\alpha = -p$ y $\beta = 1$.
14. Distribución Uniforme. En el caso de contagio negativo que dá lugar a patrones regulares, la relación entre $\hat{\mu}^*$ y μ tiene pendiente 1 para densidades mayores que la unidad y se mantiene constante en cero para menores de 1. Por lo tanto, se obtiene $\hat{\mu}^* = \mu - 1$ y $\alpha = -1$, $\beta = 1$.

Una forma de estimar α y β es tomar varias muestras sobre la misma población pero cambiando el tamaño de cuadrante cada vez y ajustar una línea recta a los estimadores de $\hat{\mu}^*$ y μ .

"Una limitante del método sería el gran número de cuadrantes que son necesarios para estimar α y β con precisión satisfactoria. Esto es particularmente cierto para la ordenada al origen α , para la cual generalmente encontramos en regresión que su intervalo de confianza es demasiado amplio; reflejando desviaciones en pendiente". (Stiteler, 1970, p. 75).

"Es interesante notar el hecho de que si la población es tal que $\alpha = 0$, tenemos:

$$\hat{\mu}^* = \beta\mu$$

y por lo tanto

$$\beta = \gamma + 1$$

de manera que el procedimiento de Iwao nos dá el índice γ pero estimado a partir de varias muestras". (Stiteler, 1970, p. 75).

Iwao y Kuno (1968) asumen la relación lineal entre μ^* y μ y desarrollan un procedimiento para determinar el tamaño de muestra para estimar μ y también la transformación adecuada para poder aplicar análisis de varianza. El desarrollo es sencillo:

La varianza se puede expresar como:

$$\sigma^2 = (\alpha + 1)\mu + (\beta - 1)\mu^2 \quad (1)$$

el error estandar estimado será entonces:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(\hat{\alpha} + 1)\bar{x} + (\hat{\beta} - 1)\bar{x}^2}{q}}$$

donde q es el número de cuadrantes muestreados.

Si se desea una precisión d en la estimación, se tiene:

$$d = Z_{\alpha/2} S_{\bar{x}}$$

y por lo tanto

$$q = \frac{Z^2}{d^2} \{(\hat{\alpha} + 1)\bar{x} + (\hat{\beta} - 1)\bar{x}^2\}$$

Si la proporción q del total de cuadrantes Q es apreciable, el tamaño de muestra es:

$$q' = q / \{1 + (q/Q)\}$$

Iwao y Kuno justifican la aproximación normal a través del Teorema del Límite Central y mencionan además que se puede tolerar algún sesgo dado que se está interesado en el error total de estimación más que en las cotas superior e inferior.

Las transformaciones las derivan de la ecuación:

$$f(x) = c \int \frac{1}{\sqrt{g(x)}} dx \dots (2)$$

donde $g(\cdot)$ es una función tal que $\sigma^2 = g(\mu)$ y c es una constante arbitraria.

Si se sustituye la relación (1) en (2) se tiene:

$$f(x) = c \int \frac{1}{\sqrt{(\alpha+1)x + (\beta-1)x^2}} dx$$

Por ejemplo, si se supone una distribución Poisson ($\alpha = 0$ y $\beta = 1$), la transformación es $f(x) = \sqrt{x}$. En el trabajo referido se presentan las transformaciones obtenidas para varias combinaciones de α y β .

La relación $\overset{*}{\mu} - \mu$ también puede ser aplicada para diseñar muestreo secuencial. (Kuno, 1969, 1972).

Un buen número de ejemplos de este procedimiento para medir patrones espaciales en insectos son presentados por Iwao (1968).

Mukerji (1973) usa la técnica de Iwao para detectar agregación de Lygus Lineolaris a través de sus distintas etapas de desarrollo.

En los Capítulos IV y V se discutirán algunos aspectos del efecto de la mortalidad (Iwao, 1970) y del efecto del tamaño de cuadrante (Iwao, 1972) sobre estos índices.

3.6 Ley de Potencia de Taylor

Al analizar la relación entre la varianza muestral (s^2) y la media (\bar{x}) en conteos de insectos, Bliss (1941) observa una relación lineal entre $\log s^2$ y $\log \bar{x}$. Sin embargo, es Taylor (1961) quien al observar en 24 conjuntos de datos una relación del tipo $s^2 = a \bar{x}^b$, propone b como un índice de agregación. A esta relación se le ha llamado "ley de potencia". (Taylor, 1961; Southwood, 1966).

Al interpretar las constantes, Taylor apunta: "a es evidentemente un factor de muestreo o computacional dependiendo del tamaño de la unidad de muestreo o del estimador de la varianza usado" y "b parece ser un estadístico de la población, un 'índice de agregación' que describe una propiedad intrínseca de los organismos, con una gradua

*Note la similitud con la "Ley de Varianza" de Fairfield Smith: $\log V_x = \log V_1 - b \log x$ donde V_x es la varianza entre parcelas de tamaño x y V_1 es la varianza entre parcelas de tamaño unitario. (J.Agr.Sci.(1938))

ción continua desde casi regular ($b \rightarrow 0$), pasando por aleatorio ($b = 1$) hasta muy agregado ($b \rightarrow \infty$)" (Taylor, 1961).

Algunos autores son partidarios de este índice sobre todo como alternativa a la K de la BN cuando no es adecuado estimar una K común para todos los conteos (Kogan, Ruesink y McDowell, 1974) y también porque esta relación permite incluir conteos donde la varianza no excede a la media (Bliss 1971). Harcourt (1963), al observar que la ley de potencia se ajusta a conteos de insectos menciona: "El hecho de que la relación varianza-media propuesta por Taylor fuera apropiada en este caso no es sorprendente dado que el crecimiento de poblaciones de insectos es geométrico más que aritmético".

Sin embargo, como lo apunta Stiteler (1970, p. 101). "Si b es aceptado como medida de patrones espaciales, sería muy conveniente poder darle alguna interpretación biológica. Existe, cierta oposición al uso de un índice del cual nadie puede decir porqué o como mide patrones espaciales".

El mismo Taylor (1971) acepta que no existe una interpretación satisfactoria para su índice y apunta: ". . . sería mejor aceptar una ley empírica que trabaje razonablemente bien aún cuando su derivación teórica no sea muy clara, que esforzarse por encontrar justificación para expresiones más complejas que tengan la misma función de relacionar agregación con densidad pero con menor éxito".

Para tratar de dar una interpretación a los parámetros a y b , se analiza la relación $\sigma^2 = a \mu^b$ para varios modelos.

1. Distribución Poisson. Para un patrón aleatorio, la ley de potencia se cumple con $a = b = 1$.
2. BN con una K común. En este caso la relación es entre la varianza y la media es: $\sigma^2 = \mu + \mu^2/K$ y por lo tanto la ley no se cumple.
3. BN con p constante. En este caso $\mu = K q/p$ y $\sigma^2 = K q/p^2$ y por lo tanto $\sigma^2 = \mu/p$ y la ley se cumple con $a = 1/p$ y $b = 1$.
4. Binomial con n Constante. Para distribuciones binomial donde n permanezca constante se tiene que $\sigma^2 = \mu - \mu^2/K$. Entonces la ley de potencia no se cumple.
5. Binomial con p constante. Si p permanece constante entonces $\sigma^2 = (1-p)\mu$ y la ley se cumple con $a = 1-p$ y $b = 1$.

Es importante notar que en los casos 1, 3 y 5 en los cuales la ley de potencia se cumple, se tiene $b = 1$ y por lo tanto no diferencia entre un patrón aleatorio, uno agregado y uno uniforme.

En general, considérese un modelo colonial (sección 2.1) $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$. Para este modelo, se tiene $\sigma^2/\mu = \omega_Y + \mu_Y \omega_N$ ($\omega = \sigma^2/\mu$, sec. 3.1) y por lo tanto la

ley de potencia se cumple con $a = \omega_Y + \mu_Y \omega_N$ y $b = 1$.

Por lo tanto, b parece no ser un índice útil de patrones espaciales, dado que tendría el mismo valor para cualquier distribución Poisson-generalizada (patrón agregado) y para la Poisson (patrón aleatorio). Por lo que respecta al coeficiente a , Stiteler (1970, p. 105) menciona: "En el caso de colonias aleatoriamente distribuidas, a puede ser interpretado en términos de los parámetros de la distribución del tamaño de la colonia, pero en general no da mucha información acerca del patrón espacial. Es fácil asignar dos distribuciones distintas al tamaño de la colonia que produzcan la misma a . Por ejemplo, si el tamaño de la colonia es constante $c > 1$, o si es una v.a. Poisson con media $c-1$ ".

CAPITULO IV

EFFECTO DE DENSIDAD

Hay dos características fundamentales que se deben distinguir al medir patrones espaciales: la agregación y la densidad. Entendiendo por agregación la disposición espacial de los individuos y por densidad el número promedio de individuos por cuadrante. Aquí cabe hacer una aclaración, la densidad puede afectar a la agregación (hay pruebas de que altas densidades generan patrones regulares), pero no debe afectar a la medida de la agregación. En otras palabras si se tienen varias poblaciones con diferentes densidades pero con la misma agregación, el valor del índice debe ser el mismo.

La densidad de una población puede variar por dos causas: la remoción (adición) aleatoria de individuos y la remoción (adición) no aleatoria de individuos.

En el primer caso, la estructura espacial de la población no se modifica (Pielou, 1977, p. 126), mientras que en el segundo esta estructura sí es afectada. Cuando los factores que provocan la variación en densidad no modifican la estructura espacial de la misma, se conocen como "independientes de densidad". Por el otro lado, si estos factores modifican la estructura, se conocen en la literatura como "dependientes de densidad".*

* Traducción del inglés: density-dependent.

Estos nombres fueron creados usando el concepto de densidad local. Es decir, un factor dependiente de densidad, actúa más(o menos) sobre los cuadrantes más densamente poblados de la población.

En el presente capítulo se estudiará el efecto de la densidad sobre cada uno de los índices, así como también la forma de detectar cuando los factores presentes son de pendientes de densidad.

Como se vió en el capítulo anterior, el índice de Morisita y el de Lloyd son esencialmente iguales al índice γ (sec. 3.2), por lo tanto aquí se analizarán el cociente varianza-media, el índice γ y los índices de Iwao.

4.1 Cociente varianza-media

Para analizar el efecto de la disminución de la densidad debida a la remoción aleatoria de individuos sobre el cociente varianza-media, suponga que $G_0(z)$ es la fgp de la distribución inicial y $G_1(z)$ la fgp de la distribución final después de remover una proporción $(1-\theta)$ de la población. Escribiendo la probabilidad de que un cuadrante contenga x individuos en la población final como

$$P_1\{X=x\} = \sum_{i=x}^{\infty} \binom{i}{x} \theta^x (1-\theta)^{i-x} P_0\{X=i\} \dots \quad 4.1.1$$

donde $P_0 \{X=x\}$ es la probabilidad en la población inicial, se tiene que:

$$G_1(z) = G_0(\theta z + 1 - \theta)$$

Calculando los primeros dos momentos factoriales de $G_1(z)$ y $G_0(z)$, se obtiene: *

$$\mu_{(1),1} = \theta \mu_{(1),0} \quad \text{y} \quad \mu_{(2),1} = \theta^2 \mu_{(2),0}$$

donde $\mu_{(1)}$ y $\mu_{(2)}$ denotan el primer y segundo momentos factoriales.

Tomando en cuenta que:

$$\sigma^2 = \mu_{(2)} + \mu_{(1)} - \mu^2_{(1)}$$

se tiene,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\sigma_1^2}{\mu_1} = \frac{\mu_{(2),1} + \mu_{(1),1} - \mu^2_{(1),1}}{\mu_{(1),1}} \\ &= \frac{\theta^2 \mu_{(2),0} + \theta \mu_{(1),0} - \theta^2 \mu^2_{(1),0}}{\theta \mu_{(1),0}} + 1 = \theta \omega_0 + (1-\theta) \end{aligned}$$

*Ver Apéndice E.

De aquí se sigue que el índice, ω no es independiente a cambios aleatorios en la densidad. Más aún, en este caso la densidad y ω están relacionados linealmente por la función $\omega = \mu b + 1$ (Figura 4.1)

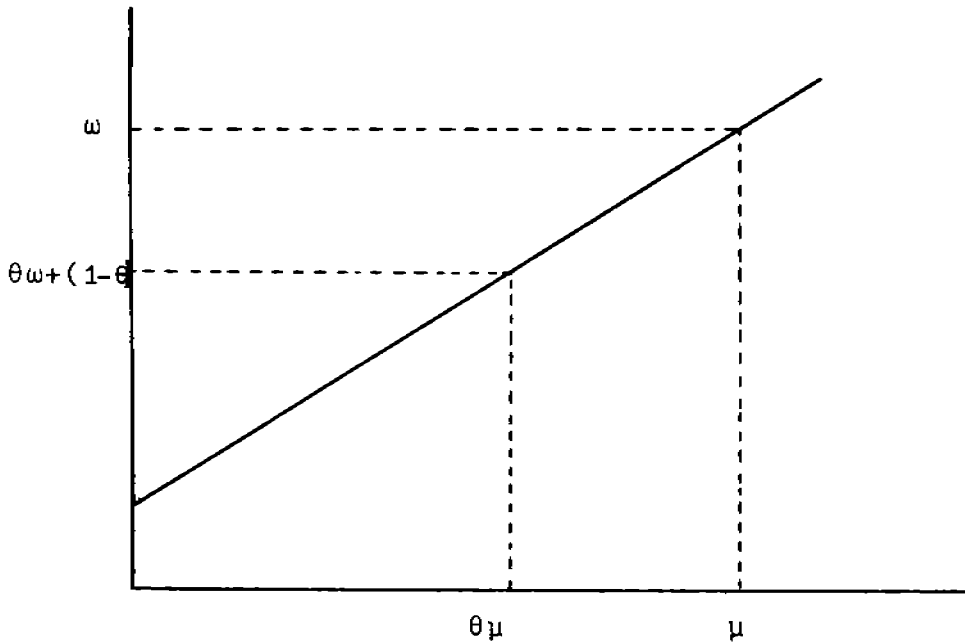


Figura 4.1 Relación entre ω y μ cuando la variación en esta se debe a factores aleatorios.

Por ser afectado por densidad, no es válido comparar dos valores de este índice sin tomar en cuenta la densidad. Un procedimiento es comparar los dos valores de ω a una densidad constante, es decir, ¿que valor de ω se tendría en la población 1 si la densidad fuera la de la población 2?. Este procedimiento es equivalente a la comparación de las pendientes de las rectas construidas uniendo los puntos (d_1, ω_1) con $(0,1)$ y (d_2, ω_2) con $(0,1)$ donde d_1 y ω_1 son la den-

sidad y ω calculados en la población 1 e igualmente d_2 y ω_2 para la población 2.

La relación lineal mencionada también proporciona un método para determinar si los factores que están afectando a la población son independientes o dependientes de densidad. Este método consiste en muestrear a través del tiempo la población y observar la relación entre ω y \bar{x} .

Si los factores son independientes de densidad, esta relación será una línea recta que pasa por el punto (0, 1), mientras que será una curva si los factores presentes son dependientes de densidad.

4.2 K de la Binomial negativa

Como se mencionó en el capítulo anterior, la K de la BN es tal vez el índice de agregación más comunmente usado en ecología. Sin embargo, varios autores (Waters y Henson, 1959; Harcourt, 1961, 1963; Myers, 1978) reportan cierta correlación entre este índice y la densidad, esto debido a la falta de ajuste con la BN.

Ciertamente, una propiedad de K es que no es afectado por variaciones en la densidad debidas a muertes o nacimientos aleatorios, siempre y cuando la distribución espacial sea BN. Es fácilmente demostrable que después de eliminar aleatoriamente una proporción $1 - \theta$ de individuos la distribución

bución 4.1.1 sigue siendo una BN pero con parámetros K y p , es decir, el parámetro K permanece constante.

Sin embargo, cuando la distribución resultante no es una B_n , el parámetro K estimado por máxima verosimilitud si es afectado por cambios aleatorios en la densidad.

En la sección 3.2 se introdujo el índice $\gamma = (\sigma^2 - \mu)/\mu^2$ inspirado en la estimación de K por el método de momentos que podría utilizarse aún cuando no se tuviera una BN. Este índice tiene la ventaja de no ser afectado por cambio aleatorio en la densidad. En efecto, usando el resultado de la sección anterior se tiene:

$$\gamma_1 = \frac{\sigma_1^2 - \mu_1}{\mu_1} = \frac{\omega_1 - 1}{\mu_1} = \frac{\theta\omega_0 - \theta}{\theta\mu_0} = \frac{\omega_0 - 1}{\mu_0} = \frac{\sigma_0^2 - \mu_0}{\mu_0^2} = \gamma_0$$

Pielou (1977, p.13) presenta un ejemplo donde se observa el efecto de la densidad en K y en γ . Parte de una distribución agregada y elimina aleatoriamente la mitad de la población. El resultado es que el índice γ permanece constante, mientras que el estimador de m.v. de K aumenta, sugiriendo, erróneamente, que la agregación decreció al disminuir la densidad.

Como se recordará (Cap. III), el índice de Morisita y el abigarramiento de Lloyd son esencialmente iguales a γ , por lo tanto esos índices tampoco son afectados por cambios aleatorios en la densidad.

Puesto que este índice no es afectado por cambios aleatorios en la densidad, es fácil detectar si los factores - presentes en un momento dado son dependientes o independientes de densidad. En el primer caso γ variará al cambiar la - densidad, mientras que en el segundo permanecerá constante.

Usando el hecho de que γ , y por consiguiente $\bar{\mu}^*/\mu$ no es afectado por cambios aleatorios en densidad, Iwao (1970) propone el índice:

$$\tau = \frac{\bar{\mu}^*/\mu}{\bar{\mu}_0^*/\mu_0}$$

donde como de costumbre, $\bar{\mu}_0^*$ y μ_0 son el apiñamiento medio y la media de la población inicial y $\bar{\mu}^*$ y μ son de la población resultante después de la acción de los factores. Si $\tau = 1$, - son los factores son independientes de densidad, mientras que $\tau \neq 1$ indicará presencia de factores dependientes de densidad. Iwao aplica este índice a través de las distintas etapas del desarrollo de la oruga de bolsa Malacosoma californicum - - pluviale.

4.3 Indices de Iwao

Dado que Iwao contempla dos aspectos al medir patrones espaciales, es menester tomar en cuenta ambos al analizar el efecto de densidad sobre sus índices. Es decir, por un lado, la remoción (adición) aleatoria de individuos y por otro, la remoción (adición) aleatoria de colonias.

Al analizar el primero de estos aspectos, Iwao y Kuno (1971), llegan a la expresión 4.1.1 de donde se obtiene $\mu_1 = q\mu_0$ y $\sigma_1^2 = q^2\sigma_0^2 + pq\mu_0$ donde el subíndice 0 indica la población original. Usando estos resultados se llega a:

$$\mu_1^* = q\mu_0^*$$

dado que $q = \mu_1/\mu_0$, la expresión anterior se convierte en

$$\mu_1^* = \frac{\mu_0^*}{\mu_0} \mu$$

Entonces, si la remoción ocurre con una tasa común q en una serie de poblaciones cuya relación $\mu^* - \mu$ se ajuste a una regresión lineal con $\alpha = \alpha_0$ y $\beta = \beta_0$, la relación será:

$$\mu^* = q\alpha_0 + \beta_0\mu_1$$

es decir, la linealidad se mantiene con la misma pendiente pero la intersección se decrementa de α_0 a $q\alpha_0$. (Figura - - 4.3.1)

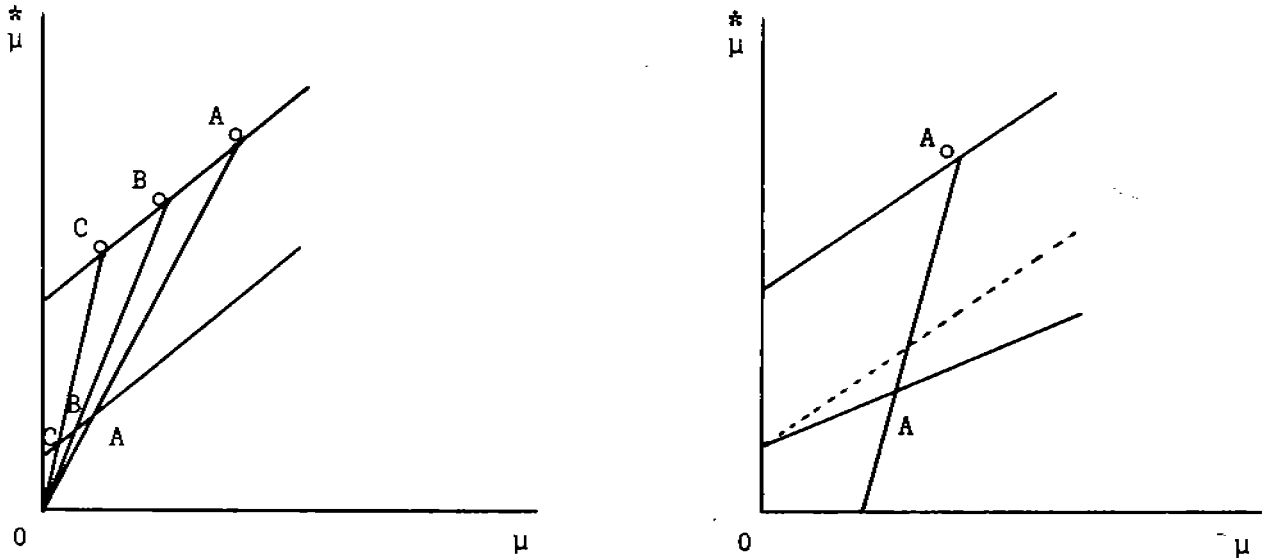


Figura 4.3.1 Representación esquemática de procesos independientes (izquierda) y dependientes de densidad (derecha).

Como se puede ver en la Figura 4.3.1 (izquierda), si la mortalidad (remoción) aleatoria ocurre en la población A_0 , μ y μ^* disminuirán en la misma proporción; i.e., el punto se desviará hacia abajo sobre la línea OA_0 . Por lo tanto, si la mortalidad es dependiente de densidad, el punto A no estará sobre la línea OA_0 (Figura 4.3.1, derecha).

Por lo que toca a la remoción (adicción) aleatoria de colonias, suponga que μ_Y^* y μ_Y son el apiñamiento medio y la media de la distribución del tamaño de las colonias y que a su vez, estas se distribuyen con media μ_N y apiñamiento medio μ_N^* . Entonces la población tiene media $\mu_Y \mu_N$ y apiñamiento medio $\mu_Y \mu_N^* + \mu_Y^*$ lo cual es fácilmente demostrable. La remo

ción aleatoria de una proporción p de colonias afecta a μ_N y μ_N^* transformándolos en $q\mu_N$ y $q\mu_N^*$ respectivamente donde $q = 1 - p$, mientras que μ_Y y μ_Y^* permanecen constantes. La relación entre μ y μ^* queda

$$\mu^* = q\mu_0^* + p\mu_Y^*$$

y dado que $q = \mu/\mu_0$ y $p = 1 - q$, la ecuación anterior puede ser escrita:

$$\mu^* = \mu_Y^* + \frac{\mu_N^*}{\mu_N} \mu,$$

lo que implica que la remoción aleatoria de colonias no -- afecta la linealidad ni el valor de los parámetros. Por es te hecho, si los puntos graficados después del efecto de - la mortalidad no caen sobre la misma recta, se debe a que los factores que actuaron son dependientes de densidad.

CAPITULO V

EFFECTO DEL TAMAÑO DE CUADRANTE

El uso de índices de conteos para medir patrones espaciales requiere la división del habitat en unidades usualmente llamadas cuadrantes. Cuando la población en estudio está dispersa en un habitat discreto formado por un conjunto de objetos (hojas, ramas, árboles, etc.), estas unidades están naturalmente determinadas y esto facilita considerablemente la medición. Sin embargo, cuando el habitat es continuo, la medición del patrón se dificulta por el hecho de que hay que crear unidades artificiales.

Pielou (1977, p. 136) dice a este respecto:

"Decir que las plantas en el suelo tienen un patrón aleatorio o están aleatoriamente dispersas es equivalente a decir que cualquier punto (dentro del área de estudio) tiene la misma probabilidad de contener una planta. Cuando ese tipo de patrones se muestrea con cuadrantes escogidos al azar, la distribución esperada del número de plantas por cuadrante es Poisson con parámetro λ , donde λ es el número promedio de plantas por cuadrante. El cambio del tamaño de cuadrante, solo altera la magnitud de λ que es proporcional al tamaño de cuadrante y la distribución permanece Poisson para todos los tamaños de cuadrante. Ahora suponga que las plantas están agregadas: en ciertas partes la densidad es alta y en otras baja. Cuando tales

patrones son muestreados, los resultados estarán en general, influenciados por el tamaño del cuadrante. Un cuadrante grande a menudo contendrá la totalidad de un "parche" densamente poblado o aún varios de estos parches, mientras que un cuadrante pequeño puede contener solo una parte del parche. Como resultado, las medidas de agregación basadas en conteos en cuadrantes, generalmente no serán únicas; valores diferentes se obtendrán con distintos tamaños de cuadrante".

5.1 Cociente Varianza-Media

Si el número de individuos en un cuadrante elegido al azar es generado por el modelo colonial (sec. 2.1) $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$, el cociente varianza-media resulta:

$$\omega = (\mu_N \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 \sigma_N^2) / \mu_N \mu_Y = \omega_Y + \mu_Y \omega_N$$

Esta fórmula muestra claramente la forma en que cada aspecto del patrón espacial influye sobre ω .

Una modificación al tamaño del cuadrante afecta la distribución del número de colonias mientras que la distribución del tamaño de las colonias no se modifica.

En el caso de las distribuciones presentadas en el Capítulo II en las cuales las colonias están aleatoriamente distribuídas, el índice ω_N es igual a 1 independientemente del tamaño del cuadrante y por lo tanto el cociente varianza-media se reduce a:

$$\omega = \omega_Y + \mu_Y = E(Y^2)/E(Y)$$

claramente esta cantidad no depende de N y por lo tanto tampoco del tamaño de cuadrante.

Cuando el modelo generador es el de heterogeneidad, el cociente varianza-media no se mantiene constante. Tómese por ejemplo el caso de las Poisson-compuestas, es decir suponga que el número de individuos en un cuadrante tomado al azar es Poisson con parámetro λ y que λ varía sobre la región. Así, se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega &= V(X)/E(X) = \frac{V\{E(X|\lambda)\} + E\{V(X|\lambda)\}}{E\{E(X|\lambda)\}} = \frac{V(\lambda) + E(\lambda)}{E(\lambda)} \\ &= 1 + \frac{V(\lambda)}{E(\lambda)} \end{aligned}$$

Un cambio en el tamaño del cuadrante por una constante c resultará en un cambio en la probabilidad condicional de λ a $c\lambda$ y por lo tanto el nuevo valor de ω será $1 + cV(\lambda)/E(\lambda)$.

Greig-Smith (1952) simula una serie de poblaciones mediante dos métodos: el primero de ellos consistió en distribuir cierto número de discos al azar sobre una superficie y después se distribuyeron discos adicionales, asociados con los primeros, este método simula un modelo colonial. El segundo método consistió en dividir la superficie en áreas irregulares, posteriormente se distribuyeron discos de distintos colores en diferentes proporciones y en ciertas áreas se removieron los discos de determinado color, de esa manera

se crearon áreas de alta y áreas de baja densidad, de esta manera se simuló un modelo de heterogeneidad. Una vez generadas las poblaciones Greig-Smith divide el área en cuadrantes de distintos tamaños y calcula el cociente varianza-media, que él llama varianza relativa. En el modelo colonial el valor se conservó constante, mientras que en el de heterogeneidad, el índice mostraba una tendencia a aumentar con el tamaño de cuadrante, corroborando los resultados anteriores (Cuadro 5.2).

5.2 Índice γ

Si el patrón espacial surge a través del modelo colonial (Poisson-generalizadas), se tiene:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\mu_N \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 \sigma_N^2 - \mu_N \mu_Y}{\mu_N^2 \mu_Y^2} = \frac{\lambda \sigma_Y^2 + \lambda \mu_Y^2 - \lambda \mu_Y}{\lambda^2 \mu_Y^2} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\sigma_Y^2 + \mu_Y^2 - \mu_Y}{\mu_Y^2} \right\} \end{aligned}$$

donde λ es el número promedio de colonias por cuadrante el cual varía al cambiar el tamaño de cuadrante.

Cuando el modelo de heterogeneidad genera el patrón espacial se distinguen dos casos entre las distribuciones presentadas en el Capítulo II: las Poisson-compuestas (BN y Ney) y las restantes (Polya-Aeppli, Poisson-binomial, Poisson-Pascal y Thomas). En el primero de ellos como se

vió en la sección anterior se tiene $E(X) = E(\lambda)$ y $V(X) = V(\lambda) + E(\lambda)$ de manera que $\gamma = V(\lambda) / \{E(\lambda)\}^2$. Por lo tanto si el tamaño del cuadrante se modifica por un múltiplo c se tiene:

$$\begin{aligned}\gamma' &= V(c\lambda) / \{E(c\lambda)\}^2 = c^2 V(\lambda) / c^2 \{E(\lambda)\}^2 \\ &= V(\lambda) / \{E(\lambda)\}^2 = \gamma\end{aligned}$$

Por lo tanto el índice γ no es afectado por el tamaño de cuadrante cuando se tiene una distribución Poisson-compuesta.

Desafortunadamente, en el caso de las restantes distribuciones no se tiene el mismo comportamiento del índice: para la Polya-Aeppli (λ, θ) .

$$\gamma' = \frac{\gamma}{c} + \frac{c-1}{c\lambda}$$

Para la Poisson-binomial (n, p, λ)

$$\gamma' = \gamma + \frac{c-1}{cn\lambda}$$

Para la Poisson-Pascal (k, p, λ)

$$\gamma' = \gamma - \frac{c-1}{ck\lambda}$$

Y para la Thomas (λ_1, λ_2)

$$\gamma' = \gamma + \frac{c-1}{c\lambda_1(1+\lambda_2)^2}$$

Como se puede observar, excepto en el caso de la Polya-Aeppli, las discrepancias entre γ y γ' están acotadas.

Para corroborar los resultados anteriores, se obtuvo el índice γ para las distribuciones generadas por Greig-

Smith (1952). El índice se mantiene más o menos constante para la compuesta, mientras que muestra una clara tendencia para la generalizada (Cuadro 5.2)

Cuadro 5.2. Comportamiento de los índices γ y ω a través de distintos tamaños de cuadrantes en distribuciones generalizadas y compuestas

Tamaño de Cuadrante	Generalizada		Compuesta	
	γ	ω	γ	ω
5 cm	1.5838	1.3801	.9421	1.2376
10 cm	1.4143	1.5657	1.0145	1.3203
15 cm	1.364	1.9275	1.1411	1.7609
20 cm	.9583	2.2266	.8765	2.6090
25 cm	.6325	2.2587	1.1673	3.2789
30 cm	.1921	1.5726	.7977	3.8249
35 cm	.2503	1.8559	.7417	4.0075
40 cm	.1178	1.5923	.8486	4.4785

5.3 Índices de Iwao

Iwao (1972) analiza el efecto del cambio de tamaño de cuadrante sobre sus índices. Distingue dos tipos de análisis: el primero que llama "relación tamaño-unidad" se refiere a la relación $\mu^* - \mu$ a través de sucesivos cambios en el tamaño del cuadrante en una sola población y el segundo que llama "relación de series" y consiste en la relación $\mu^* - \mu$ entre varias poblaciones para cada tamaño de cuadrante.

Los índices se comportan de manera similar a como se presentó en la sección 3.5, siempre y cuando el tamaño mínimo de cuadrante sea mayor que el tamaño de las colonias.

Iwao presenta dos índices para detectar el área aproximada ocupada por una colonia. El primero es:

$$\tau_h = \frac{\bar{\mu}_u^*}{\mu_u} \div \frac{\bar{\mu}_{hu}^*}{\mu_{hu}} = \frac{h \bar{\mu}_u^*}{\bar{\mu}_{hu}^*}$$

donde μ_{hu} y $\bar{\mu}_{hu}^*$ representan la media y el apiñamiento medio para el cuadrante de tamaño hu . (Observe la relación con el índice Γ introducido en la sec. 4.3). "Cuando los valores de τ_h son calculados sucesivamente en una serie de tamaño de cuadrante y graficados contra el tamaño de cuadrante, el pico de la curva sugiere que el área de la colonia está entre los dos tamaños correspondientes". (Iwao, op. cit).

El segundo índice es:

$$\rho_i = \frac{\bar{\mu}_i^* - \bar{\mu}_{i-1}^*}{\mu_i - \mu_{i-1}}$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots$ indica el orden de los tamaños de cuadrante. Para el tamaño más pequeño ($i=1$) $\rho_1 = \bar{\mu}_1^* / \mu_1$. Este índice es útil para detectar correlación espacial entre cuadrantes adyacentes: si ρ es la unidad no hay correlación, si es mayor o menor que 1, existe correlación positiva o negativa respectivamente.

Si se tienen los datos para determinar la relación de series a través de varios tamaños de cuadrante, se puede usar el desarrollo de la sec. 3.5 para determinar el "mejor" tamaño de cuadrante para la estimación de la media (ver Apéndice F).

Se aplicó la relación tamaño-unidad a las poblaciones del Cuadro 5.2. En el caso de la generalizada resultó $\alpha = .99$, $\beta = .94$ y $r = .984$, sugiriendo que el patrón está formado por colonias de tamaño aproximado $2(\alpha+1)$ y distribuidas aleatoriamente. (En realidad esta distribución fue generada con colonias de tamaño promedio de 2.5 y distribuidas aleatoriamente). En el caso de la compuesta se obtuvo $\alpha = .287$, $\beta = 1.75$ y $r = .993$, que se puede interpretar como que el componente básico (colonia) fue un solo individuo y que se encontraron agregados.

CAPITULO VI

SIMULACION DE PATRONES ESPACIALES

Para observar el comportamiento de los índices, se simularon patrones espaciales con distintos niveles de agregación, usando tanto el modelo colonial como el de heterogeneidad. Se generaron las distribuciones presentadas en el Capítulo II con excepción de la Thomas por su similitud con la Neyman Tipo A.

Para generar el patrón espacial, los números aleatoriamente generados, se colocaron en una matriz de 12 x 12 que simuló conteos en 144 cuadrantes, lo que permitió modificar el tamaño del cuadrante agrupándolos.

El programa fue realizado en BASIC y corrido en la terminal del computador CDC-Cyber de la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos que se encuentra en la Representación de la SARH en Cd. Lerdo, Durango.

6.1 Métodos para la Generación de Va's

Los procedimientos usados para generar las distintas distribuciones fueron:

- a) Distribución Poisson (λ). Técnica del inverso.
(Construir la función de distribución y generar un número aleatorio Y entre 0 y 1. El número Poisson generado es X si $f(X-1) < y < f(X)$. Para

construir la función de densidad se usó la fórmula recurrente $P(X=x+1) = \frac{\lambda}{x+1} P(X=x)$

b) Distribución Logarítmica (θ). Técnica del inverso.

La fórmula para la construcción de la fd fue

$$P(X=x+1) = \frac{\theta x}{x+1} P(X=x)$$

c) Distribución Geométrica (p). $X = \log Y / \log(1-p)$

donde $Y \sim U(0,1)$. (Hastings y Peacock, 1975)

d) Distribución Binomial (n,p). Técnica del inverso.

La fórmula usada fue $P\{X=x+1\} = \frac{p(n-x)}{(1-p)(x+1)} P\{X=x\}$

e) Distribución Gamma (α, β). $X = -\alpha \log \left(\prod_{i=1}^{\beta} Y_i \right)$

con $Y \sim U(0,1)$. (Hastings y Peacock, 1975).

6.2 Generación de Distribuciones Generalizadas

Usando el modelo colonial se generaron las distribuciones: BN, NeyTA, Polya-Aeppli, Poisson-binomial y Poisson-Pascal.

Para generar un número x de la distribución $D \sim D_1 \vee D_2$, se generó primero un número N con distribución D_1 y después se sumaron N números Y con distribución D_2 . Variando D_1 y D_2 , se obtuvieron las distribuciones arriba mencionadas.

De cada distribución se hicieron 10 corridas variando en cada ocasión los parámetros involucrados.

En el Apéndice G se incluye un listado del programa

Cuadro 6.2. Ejemplo de un patrón generado por el modelo colonial

11	12	2	25	11	12	8	9	22	5	16	4
22	5	12	14	5	8	6	10	7	10	4	12
9	22	3	3	14	6	15	7	13	4	9	10
7	10	7	18	4	1	2	8	8	5	4	6
5	10	6	4	24	3	6	16	8	13	15	11
3	5	9	9	12	8	3	10	8	7	8	13
8	23	3	20	21	8	5	17	9	21	4	14
4	6	7	6	13	7	15	14	15	12	7	16
7	9	12	10	12	5	4	6	3	9	10	2
5	19	8	11	8	11	10	7	19	4	10	6
7	9	6	3	8	12	17	0	10	5	7	11
8	7	19	6	4	7	2	5	12	8	8	6

6.3 Generación de Distribuciones Compuestas

En el caso de las compuestas, se generó una Poisson-compuesta (NeyTA) y la Poisson-binomial para tener los casos en que γ se mantiene constante al modificar el tamaño de cuadrante y aquellos en que γ varía (ver Cap. V).

El procedimiento fue dividir la matriz de 12×12 en 9 cuadrantes de 4×4 cada uno. Posteriormente, se generaron 9 números con distribución D_2 y con ellos se generaron números con distribución D_1 cuyos parámetros dependían del cuadrante en que se encontrara.

En el Apéndice H se incluye un listado del programa.

Cuadro 6.3 Ejemplo de un patrón generado con el modelo de heterogeneidad

14	13	12	17	10	9	10	5	13	20	19	21
13	13	17	15	10	14	7	8	17	15	19	16
14	13	19	16	8	10	10	11	23	17	15	20
9	12	15	13	10	6	10	12	19	18	16	21
12	10	10	11	7	8	5	7	20	16	19	21
11	14	11	11	4	8	7	5	18	17	11	14
12	11	12	12	6	5	7	6	16	21	21	17
12	9	13	11	5	4	5	6	17	15	19	17
8	9	9	10	0	4	3	1	7	8	8	5
12	12	8	8	3	4	3	4	9	3	8	7
11	11	10	10	3	1	5	3	6	4	8	6
10	7	4	10	5	4	0	5	6	6	5	6

6.4 Efecto de Densidad

Para observar el efecto de la densidad sobre los diferentes índices, se tomaron 4 conjuntos de datos reportados por Evans (1953) y se eliminaron aleatoriamente el 25%, 50% y 75% de los individuos en cada uno de ellos. Se calculó en cada etapa la media, la varianza, el cociente σ^2/μ , el índice $\gamma = (\sigma^2 - \mu)/\mu$ y el estimador de máxima verosimilitud de K.

El procedimiento usado para la remoción aleatoria fue la obtención de la tabla de frecuencias y la aplicación de la fórmula 4.1.1. (Sec. 4.1).

$$P_0\{X=x\} = \sum_{i=x}^{\infty} \binom{i}{x} \theta^x (1-\theta)^{i-x} P_0\{X=i\}$$

donde $\theta = .75, .50, .25$.

En los cuadros siguientes se presentan los resultados obtenidos.

Cuadro 6.4.1. Resultados de la simulación de muertes aleatorias en poblaciones de plantas

θ	ω	γ	K
1	1.4982	.3774	2.0012
.75	1.3736	.3774	2.1317
.50	1.2491	.3774	2.2828
.25	1.1245	.3774	2.4552

Triglochin maritima

θ	ω	γ	K
1	1.4015	.1538	5.9321
.75	1.3011	.1538	6.0354
.50	1.2007	.1538	6.1606
.25	1.1004	.1538	6.3091

Bromus erectus

Cuadro 6.4.2. Resultado de la simulación de muertes aleatorias en poblaciones de insectos

θ	ω	γ	K
1	2.1346	.7649	1.3331
.75	1.8510	.7649	1.3112
.50	1.5673	.7649	1.2941
.25	1.2837	.7649	1.2887

Barrenador del Tallo del Maíz
(*Pyrausta nubilalis*)

θ	ω	γ	K
1	1.1539	.3050	3.0219
.75	1.1154	.3050	3.0871
.50	1.0770	.3050	3.1515
.25	1.0385	.3050	3.2128

Gusano Telarañero de la Remolacha
(*Loxostege sticticalis*)

En los Cuadros 6.4.1 y 6.4.2 se puede observar el comportamiento de cada uno de los índices al eliminar aleatoriamente una proporción 1- θ de individuos. El índice ω y el estimador de máxima verosimilitud de K detectan una menor agregación al aumentar la mortalidad, excepto en el caso del barrenador del tallo donde K tiene un comportamiento inverso. El índice γ es el único que no es afectado por la mortalidad aleatoria.

El hecho interesante es que la BN se ajusta satisfactoriamente en todos los casos. Evans (1953) calcula los estadísticos T y U (sec. 2.5) y en ningún caso estos detectan desviación de la BN. Estos resultados previenen contra el uso de K como medida de agregación puesto que aún en el caso en el que las frecuencias se ajusten a una BN, este índice es afectado por la densidad.

6.5 Efecto del Tamaño de Cuadrante

Dado que los números aleatorios generados se dispusieron en una matriz de 12 x 12, fue posible agrupar distinto número de cuadrantes de tamaño unitario para simular un cambio en el tamaño del cuadrante. De hecho se construyeron siete tamaños además del unitario:

BIBLIOTECA
JUAN A. ESCALANTE B.
UNIDAD ACADÉMICA DE
LOS CICLOS PROFESIONAL
Y DE POSGRADO / CCH
U N A M

Tamaño	Dimensión
1	1 x 1
2	1 x 2
3	2 x 2
4	3 x 2
5	4 x 2
6	3 x 3
7	4 x 3
8	4 x 4

Para cada tamaño se calculó la media, la varianza, el cociente σ^2/μ , el índice γ , el de Morisita y los de Lloyd. Tomando los 8 tamaños se calcularon los índices de Iwao y de Taylor.

A continuación se presentan y discuten los resultados obtenidos

Cuadro 6.5.1. Resumen de resultados obtenidos al generar la BN usando el modelo colonial

BN Generalizada

Tamaño	k = 3 p= .2		k= 10 p= .4		k = 1 p= .15		k = 6 p= .5		k = 8 p= .35	
	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ
1	6.045	4.116	3.118	.138	5.952	.996	1.909	.159	2.748	.115
2	5.329	.176	2.646	.053	4.930	.395	2.065	.093	2.570	.052
3	6.796	.118	3.031	.033	4.994	.201	2.404	.061	1.964	.016
4	4.590	.048	3.170	.023	4.960	.133	2.390	.040	2.123	.012
5	8.046	.071	2.445	.011	4.482	.087	2.362	.030	2.047	.009
6	5.402	.039	2.551	.011	5.278	.095	2.330	.026	2.787	.013
7	9.335	.056	1.838	.004	3.688	.045	1.790	.011	3.004	.011
8	9.430	.042	2.264	.005	1.302	.004	2.601	.018	2.860	.007
α (Iwao)	3.924(\pm 2.165)		2.127(\pm .514)		5.206(\pm 1.212)		1.090(\pm .444)		1.273(\pm .633)	
β (Iwao)	1.022(\pm .020)		.996(\pm .002)		.951(\pm .028)		1.003(\pm .009)		1.002(\pm .005)	
a(Taylor)	3.483		4.632		12.04		1.815		2.250	
b(Taylor)	1.155		.868		.673		1.058		1.022	
Tamaño medio de colonia	2.49		1.64		2.99		1.44		1.77	

Cuadro 6.5.2. Resumen de resultados obtenidos al generar una Neyman Tipo A usando el modelo colonial

NEYMAN (Generalizada)

Tamaño n ^o	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_2 = 7$	$\lambda_1 = 3$	$\lambda_2 = 5$	$\lambda_1 = 4$	$\lambda_2 = 4$	$\lambda_1 = 5$	$\lambda_2 = 3$	$\lambda_1 = 2$	$\lambda_2 = 6$
	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ
1	8.147	.934	5.020	.267	4.731	.226	4.490	.239	7.195	.532
2	8.359	.481	6.030	.167	4.013	.091	4.414	.117	9.268	.355
3	8.514	.245	7.130	.102	3.979	.045	4.843	.066	7.171	.132
4	6.005	.109	8.308	.081	4.752	.038	4.328	.038	11.452	.149
5	6.571	.091	6.594	.046	5.602	.035	4.740	.032	9.562	.092
6	8.092	.103	9.916	.066	3.378	.016	3.879	.022	6.432	.052
7	7.900	.075	6.889	.032	3.736	.014	2.202	.007	4.636	.026
8	3.697	.022	8.362	.031	6.829	.022	2.997	.008	6.488	.029
α (Iwao)	7.799(± 2.041)		5.019(± 2.131)		2.904(± 1.722)		3.999(± 1.013)		8.134(± 3.316)	
β (Iwao)	.970($\pm .031$)		1.012($\pm .017$)		1.006($\pm .012$)		.990($\pm .008$)		.984($\pm .032$)	
a (Taylor)	13.105		3.360		3.589		8.331		11.280	
b (Taylor)	.829		1.172		1.051		.824		.902	
Tamaño me- dio de co- lonias	7		5		4		3		6	

Cuadro 6.5.3. Resumen de resultados obtenidos al generar una Polya-Aeppli mediante el modelo colonial

POLYA-AEPPLI (generalizada)

Tamaño	$\lambda = 2$	$\theta = .5$	$\lambda = 3$	$\theta = .7$	$\theta = 7$	$\theta = .3$	$\lambda = 1$	$\theta = .9$	$\lambda = 5$	$\theta = .4$
	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ
1	3.172	.560	4.907	.426	1.746	.075	19.494	1.720	2.510	.181
2	3.383	.307	4.698	.201	1.562	.028	17.804	.782	2.371	.082
3	2.733	.112	3.201	.060	1.679	.017	16.319	.356	2.316	.039
4	2.782	.077	3.006	.036	1.122	.002	11.142	.157	2.672	.033
5	3.305	.074	3.595	.035	1.562	.007	13.439	.145	2.674	.025
6	2.967	.056	2.319	.016	1.223	.002	8.265	.075	2.715	.023
7	3.991	.064	2.861	.017	2.700	.014	13.167	.094	2.539	.015
8	2.824	.029	3.079	.014	2.098	.007	4.752	.022	3.471	.018
α (Iwao)	2.089	(\pm .711)	3.345	(\pm 1.116)	.371	(\pm .750)	18.184	(\pm 4.086)	1.252	(\pm .368)
β (Iwao)	1.002	(\pm .021)	.987	(\pm .014)	1.004	(\pm .009)	.921	(\pm .044)	1.007	(\pm .005)
a (Taylor)	3.114		7.909		1.283		57.801		1.917	
b (Taylor)	1.001		.780		1.064		.613		1.084	
Tamaño medio de colonias	1		3.33		1.43		10		1.67	

Cuadro 6.5.4. Resumen de resultados para la Poisson-binomial generada a través del modelo colonial.

POISSON-BINOMIAL (generalizada)

Tamaño	n=5 p=.4 $\lambda=1$		n=4 p=.3 $\lambda=4$		n=6 p=.9 $\lambda=4$		n=4 p=.8 $\lambda=5$		n=6 p=.5 $\lambda=2$	
	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ
1	2.553	.847	1.467	.107	4.901	.188	3.086	.122	2.895	.318
2	2.371	.374	2.202	.069	5.092	.049	3.029	.033	2.474	.061
3	2.379	.188	2.202	.069	5.092	.049	3.029	.033	2.474	.061
4	2.742	.158	1.780	.030	4.638	.029	3.056	.020	3.132	.059
5	2.212	.083	2.305	.037	4.746	.023	1.863	.006	2.931	.040
6	3.197	.133	1.629	.016	4.881	.021	2.582	.010	3.604	.048
7	2.606	.073	2.253	.024	4.580	.014	1.664	.003	2.928	.027
8	2.652	.056	2.480	.021	3.965	.089	1.709	.003	2.941	.020
α (Iwao)	1.458	(+.487)	.616	(+.450)	4.29	(+.376)	2.379	(+.599)	1.851	(+.516)
β (Iwao)	1.010	(+.031)	1.012	(+.012)	.997	(+.002)	.993	(+.004)	1.003	(+.010)
a(Taylor)	2.375		1.240		6.553		7.106		2.633	
b(Taylor)	1.036		1.144		.932		.764		1.034	
Tamaño medio de colonias	2		1.2		5.4		3.2		3	

Cuadro 6.5.5. Resumen de resultados para la Poisson-Pascal generada con el modelo colonial.

POISSON-PASCAL (generalizada)

Tamaño	k=3 p=.3 λ=3		k=5 p=.4 λ=4		k=6 p=.2 λ=3		k=2 p=.5 λ=5		k=2 p=.7 λ=1	
	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ
1	10.550	.422	8.890	.267	20.501	.291	3.670	.270	2.895	2.115
2	12.187	.247	8.401	.125	21.670	.154	3.350	.119	3.115	1.181
3	11.769	.119	9.245	.070	23.735	.085	3.606	.066	3.153	.601
4	10.802	.072	8.683	.043	24.242	.058	4.311	.056	3.485	.462
5	11.720	.059	6.275	.022	14.304	.025	3.765	.035	2.965	.274
6	11.526	.052	10.491	.036	23.064	.037	4.003	.034	3.775	.344
7	11.267	.038	7.197	.017	18.285	.021	3.225	.019	2.994	.185
8	6.629	.016	7.534	.014	11.039	.009	5.011	.025	1.209	.015
α(Iwao)	11.451(+2.280)		8.037(+2.076)		23.194(+5.946)		2.414(+.816)		2.565(+1.069)	
β(Iwao)	.989(+.012)		.997(+.008)		.991(+.010)		1.006(+.009)		.905(+.138)	
a(Taylor)	16.184		11.145		46.247		2.451		3.508	
b(Taylor)	.913		.941		.849		1.066		.861	
Tamaño medio de colonias	7		7.5		24		2		.86	

En los Cuadros 6.5.1 - 6.5.5 se resumen los resultados de cinco de las diez corridas de cada una de las distribuciones generalizadas presentadas. Se puede observar el comportamiento de los índices ω y γ . Mientras que el primero permanece constante (con ciertas variaciones, debidas al azar) a través de los distintos tamaños de cuadrante, el segundo tiene una clara tendencia a disminuir al aumentar el tamaño del cuadrante. Esto corrobora los resultados del Capítulo V en el sentido de que el índice ω es independiente del tamaño del cuadrante para distribuciones Poisson-generalizadas. Por otro lado, el índice γ varía inversamente proporcional al número de colonias por cuadrante.

Los resultados muestran una alta correlación entre la α de Iwao y la a de Taylor (.932) así como también entre β de Iwao y b de Taylor. Tanto la α como a , están a su vez, muy correlacionadas con el tamaño de las colonias (.930). Esto sugiere que la a de Taylor está directamente relacionada con el tamaño de la colonia y b con la distribución de las mismas cuando se tiene el modelo colonial.

Por lo que toca a los índices de Iwao, resultó en casi todos los casos que $\alpha > 0$ y $\beta = 1$, lo que concuerda con el hecho de que las colonias constan de más de un individuo y están aleatoriamente distribuidas (Poisson-generalizadas).

Cuadro 6.5.6. Resumen de resultados para la Neyman Tipo A generada a través del modelo de heterogeneidad

NEYMAN (Compuesta)

Tamaño n _o	$\lambda_1=15$ $\lambda_2=3$		$\lambda_1=30$ $\lambda_2=1$		$\lambda_1=5$ $\lambda_2=10$		$\lambda_1=6$ $\lambda_2=7$		$\lambda_1=45$ $\lambda_2=2$	
	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ
1	3.333	.052	1.575	.017	6.457	.117	7.356	.161	4.263	.036
2	5.707	.053	2.406	.021	12.049	.118	13.806	.162	7.452	.036
3	10.763	.055	3.627	.020	23.252	.119	26.546	.162	13.887	.036
4	12.681	.044	4.264	.016	27.263	.094	30.729	.125	15.769	.027
5	21.164	.056	6.445	.021	45.037	.118	51.779	.161	27.179	.037
6	14.049	.032	4.634	.012	25.982	.060	39.047	.107	19.197	.023
7	23.135	.041	6.412	.014	45.757	.080	65.949	.137	34.983	.032
8	41.894	.057	11.940	.021	89.403	.118	103.142	.162	53.998	.037
α (Iwao)	-.998 ^(†) (-6.513)		-.162 ^(†) (-1.870)		-1.177 ^(†) (-16.600)		-1.837 ^(†) (-12.081)		-1.359 ^(†) (-6.977)	
β (Iwao)	1.051 ^(†) (.017)		1.018 ^(†) (.006)		1.102 ^(†) (.041)		1.151 ^(†) (.035)		1.035 ^(†) (.009)	
a (Taylor)	.135		.159		.260		.270		.086	
b (Taylor)	1.832		1.641		1.837		1.893		1.857	

Cuadro 6.5.7. Resumen de resultados para la Poisson-binomial generada mediante el modelo de heterogeneidad

POISSON-BINOMIAL (Compuesta)

Tamaño	n=5 p=.5 λ=15		n=3 p=.8 λ=20		n=5 p=.6 λ=5		n=9 p=.2 λ=8		n=20 p=.4 λ=4	
	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ
1	2.628	.048	3.078	.041	2.667	.158	1.704	.051	7.685	.201
2	4.728	.054	5.955	.049	4.959	.188	2.661	.061	14.612	.204
3	8.880	.058	11.692	.053	9.502	.202	4.455	.063	28.727	.208
4	8.097	.035	13.803	.042	12.537	.183	6.105	.062	32.173	.156
5	17.462	.060	23.267	.055	18.580	.209	8.065	.064	56.793	.210
6	9.952	.029	15.522	.032	13.383	.131	4.712	.030	36.411	.118
7	18.516	.043	27.630	.044	20.461	.154	6.018	.030	65.306	.161
8	34.496	.061	46.381	.056	36.690	.212	15.74	.067	113.053	.210
α(Iwao)	- 1.489 ⁽⁺⁾ _(-6.460)		-1.595 ⁽⁺⁾ _(-6.680)		- .786 ⁽⁺⁾ _(-5.190)		- .165 ⁽⁺⁾ _(-3.739)		-2.487 ⁽⁺⁾ _(-17.55)	
β(Iwao)	1.055 ⁽⁺⁾ _(.022)		1.052 ⁽⁺⁾ _(.015)		1.192 ⁽⁺⁾ _(.057)		1.054 ⁽⁺⁾ _(.031)		1.190 ⁽⁺⁾ _(.061)	
a(Taylor)	.139		.089		.346		.302		.342	
b(Taylor)	1.822		1.901		1.868		1.657		1.885	

En los Cuadros 6.5.6 y 6.5.7 se muestran los resultados obtenidos para las distribuciones compuestas. En este caso el comportamiento de los índices es distinto, el índice γ se mantiene constante a través de los distintos tamaños de cuadrante y ω varía proporcionalmente al tamaño. Estos hechos corroboran los resultados del Capítulo V donde se demuestra que en el caso de distribuciones compuestas, el índice γ no se modifica al cambiar el tamaño del cuadrante, mientras que ω varía en forma proporcional al tamaño del cuadrante.

Por lo que toca a los índices de Iwao, se observa que en todos los casos α no es significativamente distinta de cero, mientras que β es mayor que 1. Estos resultados sugieren que la población no está formada por colonias pero que los individuos están agregados, concordando con el hecho de que es el modelo de heterogeneidad el que está generando el patrón espacial.

Los índices de Taylor también tuvieron un comportamiento distinto al mostrado con el modelo colonial. En este caso, a disminuyó acercándose a cero, mientras que b aumentó sensiblemente. Estos resultados pueden sugerir una nueva interpretación para estos índices.

Cuadro 6.5.8. Resumen de resultados para la distribución Poisson

POISSON

Tamaño	$\lambda = 3$		$\lambda = 6$		$\lambda = 9$		$\lambda = 12$		$\lambda = 15$	
	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ
1	.986	-.005	.981	-.003	.799	-.022	1.088	-.007	.824	-.012
2	1.031	.005	1.068	.006	.691	.017	.991	.004	.816	-.006
3	.888	-.009	1.186	.008	.592	-.011	.687	-.006	.981	-.001
4	1.015	.0008	1.262	.007	.728	-.005	.678	-.004	1.018	-.001
5	.703	.012	.954	-.001	.689	-.004	.938	-.001	.796	-.002
6	.520	-.018	.825	-.003	.821	-.002	.965	-.001	.929	-.001
7	.728	-.007	.924	-.001	.815	-.002	1.156	.001	.700	-.002
8	.374	-.013	.662	-.003	.591	-.003	.755	-.001	.853	-.001
α (Iwao)	.082($\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$.202)		.176($\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$.232)		-.266($\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$.156)		-.100($\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$.303)		-.100($\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$.174)	
β (Iwao)	.986($\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$.008)		.996($\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$.004)		.999($\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$.002)		.999($\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$.003)		.999($\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}$.001)	
a(Taylor)	.509		.356		-.252		.016		-.107	
b(Taylor)	.710		.888		-.977		.966		.990	

Cuadro 6.5.9. Resumen de resultados para la distribución binomial

Tamaño	n = 4 p= .3		n = 9 p= .8		n =20 p= .4		n =50 p= .8		n =40 p= .7	
	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ	ω	γ
1	.631	-.312	.141	-.121	.597	-.051	.174	-.021	.245	-.030
2	.592	-.173	.143	-.061	.511	-.031	.183	-.010	.283	-.013
3	.619	-.080	.155	-.030	.829	-.005	.158	-.005	.245	-.007
4	.634	-.052	.133	-.020	.915	-.002	.249	-.003	.231	-.005
5	.744	-.027	.130	-.015	1.243	-.004	.136	-.003	.233	-.003
6	.516	-.045	.131	-.013	1.063	-.001	.258	-.002	.189	-.003
7	.633	-.026	.075	-.011	1.385	-.004	.132	-.002	.273	-.002
8	.829	-.009	.123	-.008	.888	-.001	.117	-.001	.330	-.001
α (Iwao)	-.425($\frac{+}{-}$)	.136	-.849($\frac{+}{-}$)	.031	-.346($\frac{+}{-}$)	.386	-.797($\frac{+}{-}$)	.084	-.770($\frac{+}{-}$)	.066
β (Iwao)	1.009($\frac{+}{-}$)	.013	.999($\frac{+}{-}$)	.001	1.005($\frac{+}{-}$)	.005	.999($\frac{+}{-}$)	.001	1.000($\frac{+}{-}$)	.001
a(Taylor)	-.539		-1.609		-1.230		-1.311		-1.475	
b(Taylor)	1.054		.874		1.295		.914		1.018	

En los Cuadros 6.5.8 y 6.5.9 se resumen los resultados para un patrón aleatorio (Poisson) y uno regular (Binomial).

Es interesante observar el comportamiento de los índices de Iwao. En un patrón aleatorio se tiene que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ (excepto en un caso), sugiriendo que el patrón está formado por individuos aislados y éstos están distribuidos aleatoriamente. Por otro lado, cuando el patrón es regular, se observa $\alpha < 0$ (excepto en un caso) y $\beta = 1$, corroborando los resultados de Iwao (sec. 3.5)

CAPITULO VII

RESUMEN, CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS DE INVESTIGACION

7.1 Resumen

"La disposición espacial de los miembros de una población es de primordial importancia para entender la ecología de la población. En muchos casos el tipo de patrón espacial es fácilmente detectable por el ecólogo aún sin el uso de herramientas cuantitativas, pero en otras situaciones se hace necesario el uso de índices que describan claramente el patrón espacial y que permitan probar desviaciones de la aleatoriedad". (Stiteler, 1970, p. 109).

En esta tesis se presentan y discuten varios índices de patrones espaciales basados en conteos, así como su comportamiento bajo distintos modelos poblacionales teóricos que han demostrado su aplicabilidad en estudios ecológicos. Se estudian las relaciones que guardan entre ellos y por último, se analiza el efecto tanto de la densidad de población como del tamaño del cuadrante sobre cada índice.

Los modelos considerados incluyen modelos coloniales y de heterogeneidad que dan lugar a distribuciones generalizadas y compuestas respectivamente, el proceso de nacimiento puro y modelos con adición de ceros. Se presentan varias distribuciones y la forma en que pueden ser generadas tanto a través del modelo colonial como del de heterogeneidad. Se hace énfasis en el problema de detectar la

distribución a la cual pertenecen ciertos datos, dificultad debida principalmente a la similitud entre las distribuciones de contagio.

El primero de los índices considerados es el cociente varianza-media ($\omega = \sigma^2/\mu$). Se interpreta como el cociente entre dos varianzas, donde el denominador es la varianza que tendría la población si estuviera aleatoriamente distribuida. Gart (1970) usa la relación $\lambda = ip(i)/p(i-1)$, $i = 1, 2, \dots$ de la Poisson, demuestra que es una función lineal para la binomial, la Poisson y la BN, pero con pendiente menor, igual y mayor a cero respectivamente. El estimador ponderado de la pendiente resulta:

$$b = 1 - \frac{n}{n-1} \frac{\bar{x}}{S^2}$$

de aquí surge naturalmente $\omega = \sigma^2/\mu$ como índice para medir patrones espaciales.

En segundo lugar, se consideró la K de la BN como índice de patrón espacial. Es el índice más comúnmente usado y existen varios métodos para estimarlo, así como para estimar una K común para una serie de conteos. Sin embargo, existen en la literatura pruebas de la correlación entre K y la densidad, por este hecho se presenta el índice $\gamma = (\sigma^2 - \mu)/\mu^2$ propuesto por Kuno (1968) y que surge como el recíproco del estimador de momentos de K pero que puede ser usado como medida de agregación sin importar la distribución subyacente.

El siguiente índice (I_{δ}) es el de Morisita (1959) que lo origina basado en el concepto de diversidad (Simpson, 1949). Se demuestra sin embargo, que este índice es esencialmente igual a γ .

Lloyd (1967) propone sus índices tratando de encontrar medidas que fueran independientes de la densidad y así origina el apiñamiento medio ($\bar{\mu}^*$) y el índice de abigarramiento ($\bar{\mu}^*/\mu$). Aunque también creados a partir de conceptos biológicos distintos, están íntimamente ligados a γ , en concreto la relación es:

$$\gamma + 1 = \frac{N-1}{N} \quad I_{\delta} = \frac{\bar{\mu}^*}{\bar{X}}$$

Iwao (1968) encuentra una relación lineal entre el apiñamiento medio ($\bar{\mu}^*$) y la media (μ) donde la ordenada al origen es una medida del tamaño de las colonias y la pendiente un índice de la distribución espacial de las mismas. Aunque estos índices fueron inspirados en el modelo colonial, se pueden usar en otras situaciones. Se analiza el comportamiento de estos índices sobre varias distribuciones generadas por ambos modelos. Se demuestra que bajo ciertas condiciones, estos índices son equivalentes a γ . Se menciona como limitante importante, la gran cantidad de cuadrantes necesarios para estimar α y β con precisión satisfactoria.

Se analiza la ley de potencia de Taylor (1961) para varios modelos, se observa que no es aplicable en todos los

casos y sobre todo que la interpretación no es clara.

Uno de los objetivos principales de esta tesis es estudiar el efecto de la densidad sobre cada uno de los índices presentados. Para hacer el análisis es necesario introducir el concepto de factores dependientes y factores independientes de densidad. Los primeros afectan la estructura espacial, mientras que los últimos solo afectan la densidad, se pueden considerar cambios aleatorios.

En el caso del índice ω , se demuestra que está relacionado linealmente con la densidad y por lo tanto no se pueden comparar dos poblaciones sin tomar en cuenta las respectivas medias. Por lo que toca al parámetro K , se ve que no es afectado por la densidad, siempre y cuando la distribución sea BN. Por otro lado, se demuestra que γ es independiente de densidad, cualquiera que sea la distribución subyacente. Para los índices de Iwao, se maneja la variación tanto en tamaño de colonias como en el número de las mismas, analizándose en cada caso el efecto de factores dependientes e independientes de densidad.

El otro problema que se estudió fue el del tamaño de cuadrante. Según análisis de Stiteler (1970), cuando la distribución es Poisson-generalizada (modelo colonial) el índice ω no es afectado por el tamaño del cuadrante. Sin embargo, cuando el modelo generador es el de heterogeneidad, el índice sí se ve afectado por el tamaño del cuadrante.

te. En cambio, cuando la distribución es Poisson-compuesta (modelo de heterogeneidad), es el índice γ el que se mantiene constante. Iwao (1972) propone dos índices para detectar el tamaño de la colonia. Las relaciones originales se mantienen siempre y cuando el tamaño de cuadrante menor sea mayor que el área promedio de una colonia.

7.2 Conclusiones

Entre las conclusiones más importantes están:

- A. Es más conveniente usar índices de agregación que sean independientes de la distribución, que el parámetro K de la binomial negativa el cual es afectado tanto por la densidad como por el tamaño del cuadrante cuando la distribución real no es binomial negativa.
- B. Los índices de Morisita, Lloyd y γ , aunque originados en conceptos biológicos distintos, son esencialmente iguales.
- C. El cociente varianza-media es afectado por la densidad, mientras que γ no lo es.
- D. El muestreo con distintos tamaños de cuadrante permite discriminar entre el modelo colonial y el de heterogeneidad observando el comportamiento de ω y de γ .

E. La técnica de Iwao proporciona la mayor cantidad de información y, por determinar una relación entre la media y la varianza, permite diseñar muestreo y hacer transformaciones adecuadas. Sin embargo, una fuerte limitante para el uso de estos índices, es el número de cuadrantes necesario para estimarlos con precisión satisfactoria.

7.3 Perspectivas para Futura Investigación

I. Es necesario mejorar los índices de conteos puesto que solo toman en cuenta el número de organismos en el cuadrante y no la posición de los cuadrantes en el campo. Es claro que el patrón de la Figura 7.3a no es igual al de la 7.3b aunque su tabla de frecuencias es la misma.

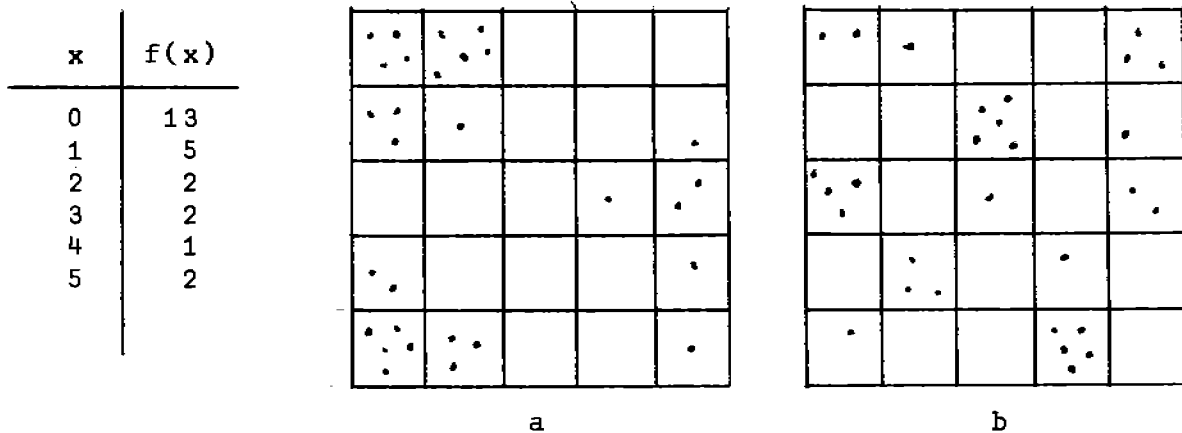


Figura 7.3. Dos formas de interpretar una misma tabla de frecuencias.

"Una manera de solucionar este problema podría ser el tomar la posición de cada cuadrante en el campo y de alguna forma incorporar esta información al análisis". (Stiteler, 1970, p. 118).

- II. Investigar el comportamiento de los índices en presencia de procesos de nacimiento puro y distribuciones con adición de ceros.
- III. Determinar la distribución de cada índice por lo menos bajo la hipótesis nula de aleatoriedad.

BIBLIOGRAFIA

1. Andrewartha, H.G. (1961). Introduction to the study of animal populations. Chapman and Hall. London.
2. Anscombe, F.J. (1949). The statistical analysis of insect counts based on the negative binomial distributions. Biometrics 5: 165-173.
3. Anscombe, F.J. (1950). Sampling theory of the negative binomial and logarithmic series distributions. Biometrika 37: 358-382.
4. Archibald, E.E.A. (1948). Plant populations I.A. new application of Neyman's contagious distribution. Ann. Bot. N.S. 12:221-235
5. Archibald, E.E.A. (1948). Plant populations II. The estimation of the number of individuals per unit area of species in heterogeneous plant populations. Ann. Bot. N.S. 14: 7-21
6. Bartlett, M.S. (1971). Two dimensional nearest-neighbor systems and their ecological applications. Statistical ecology. Vol. I. The Pennsylvania State University Press.
7. Beall, G. (1939). Methods of estimating the population of insects in a field. Biometrika 30: 422-439

8. Beall, G. (1942). The transformation of data for entomological field experiments so that the analysis of variance becomes applicable. Biometrika 32: 243-262
9. Bliss, C.I. (1941). Statistical problema in estimating populations of Japanese beetle larvae. J. Econ. Ent. 34:221-232
10. Bliss, C.I. and Fisher, R.A. (1953). Fitting the negative binomial distribution to biological data. Biometrics 9:176-200.
11. Bliss, C.I. (1958). The analysis of insect counts as negative binomial distributions. Proc. 10th. International Congress of Entomology (1956)
12. Bliss, C.I. and Owen, A.R.G. (1958). Negative binomial distributions with a common K. Biometrika 45:37-58.
13. Carrillo Liz, A. (1970). Proyecto de Investigación sobre muestreo de insectos. Escuela Nacional de Agricultura. Colegio de Postgraduados. Chapingo, Méx.
14. Clapham, A.R. (1936). Over-dispersion in grassland communities and the use of statistical methods in plant ecology. J. Ecol. 24: 232-251
15. Cole, L.C. (1946). A theory for analysing contagiously distributed colonies. Ecology 27: 329-341

16. David, F.N. and Moore, P.G. (1954). Notes on contagious distributions in plant populations. Ann. Bot. N.S. 18: 47-53
17. Evans, D.A. (1953). Experimental evidence concerning contagious distributions in ecology. Biometrika 40: 186-211.
18. Feller, W. (1943). On a general class of "contagious" distributions. Ann. Math. Stat. 14: 389-400
19. Gart, J.J. (1970). Some simple graphically oriented statistical methods for discrete data. Random Counts in Scientific Work. Vol. I. Penn State University Press
20. Gerard, G. and Berthet, P. (1971). Simpling strategy in censusing patchy populations. Statistical Ecology, Vol. I. The Pennsylvania State University Press.
21. Grieg-Smith, P. (1952). The use of random and contiguous quadrats in the study of the structure of plant communities. Ann. Bot. N.S. 16: 293-316
22. Grieg-Smith, P. (1961). Data on pattern within plant communities. I. The analysis of pattern. J. Ecol. 49: 695-702
23. Gokhale, D.V. (1975). Indices and models for aggregation in spatial patterns. Statistical Distributions in Scientific Work. D. Reidel Publishing Company

24. Gurland, J. and Hinz, P. (1971). Estimating parameters, testing fit and analyzing untransformed data pertaining to the negative binomial and other distributions. Statistical Ecology. Vol. I. The Pennsylvania State University Press.
25. Hairston, N.G., Hill, R.W. and Ritte, U. (1971). The interpretation of aggregation patterns. Statistical Ecology. Vol. I. The Pennsylvania State University Press.
26. Harcourt, D.G. (1961). Spatial pattern of the imported cabbageworm, *Pieris rapae* (Lepidoptera: Pieridae) on cultivated cruciferae. Canad. Ent. 93: 945-952
27. Harcourt, D.G. (1963). I. Spatial pattern and transformation of field counts. Canad. Ent. 95: 813-820
28. Hastings, N.A.J. and Peacock, J.B. (1975). Statistical Distributions. A handbook for students and practitioners. Halsted Press. John Wiley and Sons. New York.
29. Hill, B.G., McNew, R.W., Young, J.H., Ruth, W.E. (1975). The effects of sampling unit size in some southwestern Oklahoma cotton insects. Env. Ent. 4-491
30. Iwao, S. (1968). A new regression method for analysing the aggregation pattern of animal populations. Res. Popul. Ecol. 10: 1-20

31. Iwao, S. and Kuno, E. (1968). Use of the regression of mean crowding on mean density for estimating sample size and the transformation of data for the analysis of variance. Res. Popul. Ecol. 10: 210-214
32. Iwao, S. (1970). Analysis of contagiousness in the action of mortality factors on the western tent caterpillar population by using the $\bar{\mu}^* - \mu$ relationship. Res. Popul. Ecol. 12: 100-110.
33. Iwao, S. and Kuno, E. (1971). An approach to the analysis of aggregation patterns in biological populations. Statistical Ecology, Vol. I. The Pennsylvania State University Press.
34. Iwao, S. (1972). Application of the $\bar{\mu}^* - \mu$ method for the analysis of spatial patterns by changing the quadrat size. Res. Popul. Ecol. 14: 97-128
35. Iwao, S. (1975). A new method of sequential sampling to classify populations relative to a critical density. Res. Popul. Ecol. 16: 281-288
36. Johnson, N.L. and Kotz, S. (1969). Discrete Distributions. Houghton Mifflin Co. Boston.
37. Kershaw, K.A. (1960). The detection of pattern and association. J. Ecol. 48: 233-242

38. Kogan M, Ruesink, W.G., McDowell, K. (1974). Spatial and temporal distribution patterns of the bean leaf beetle, *Cerotoma trifurcata* (Forster), on soybeans in Illinois. Env. Ent. 3: 607-617
39. Kuehl, R.O., and Fye, R.E. (1972). An analysis of the sampling distributions of cotton insects in Arizona. J. Econ. Ent. 65: 855-860
40. Kuno, E. (1968). Studies on the population dynamics of rice leafhoppers in a paddy field. Bull. Kyushu Agr. Exp. Sta. 14, 131-246
41. Kuno, E. (1969). A new method of sequential sampling to obtain the population estimates with a fixed level of precision. Res. Popul. Ecol. 11: 127-136
42. Kuno, E. (1972). Some notes on population estimation by sequential sampling. Res. Popul. Ecol. 14: 58-73.
43. Lloyd, M. (1967). Mean crowding. J. Anim. Ecol. 36: 1-30.
44. McGuire, J.U., Brindley, T.A. y Bancroft, T.A. (1947). The distribution of the european corn-borer larvae in field corn. Biometrics, 13: 65-78
45. Morisita, M. (1964). Application of the I_{δ} index to sampling techniques. Res Popul. Ecol. 6: 43-53
46. Morisita, M. (1971). Composition of the I_{δ} index. Res. Popul. Ecol. 13: 1-27

47. Morris, R.F. (1960). Sampling insects populations. Ann. Rev. Ent. 5: 243-264
48. Mukerji, M.K. (1973). The development of sampling techniques for populations of the tarnished plant bug, *Lygus Lineolaris* (Hemiptera: Miridae). Res Popul. Ecol. 15: 50-63
49. Myers, J.H. (1978). Selecting a measure of dispersion. Env. Ent. 7: 619-621
50. Neyman, J. (1939). On a new class of "contagious" distributions, applicable in entomology and bacteriology. Ann. Math. Stat. 10: 35-57
51. Patil, G.P. and Stiteler, W.M. (1974). Concepts of aggregation and their quantification: a critical review with some new results and applications. Res. Popul. Ecol. 15: 238-254
52. Pielou, E.C. (1960). A single mechanism to account for regular, random and aggregated populations. J. Ecol. 48: 575-584
53. Pielou, E.C. (1977). Mathematical Ecology. Wiley Interscience. John Wiley and Sons, Inc. New York.
54. Pieters, E.P. and Sterling, W.L. (1973). Inferences on the dispersion of cotton arthropods in Texas. Env. Ent. 2: 863-867.

55. Pieters, E.P. and Sterling, W.L. (1974). Aggregation indices of cotton arthropods in Texas. Env. Ent. 3: 598-600
56. Poole, R.W. (1974). An introduction to quantitative ecology. Mc Graw-Hill.
57. Rojas, B.A. (1964). La binomial negativa y la estimación de platas en el suelo. Fitotec. Latinoam. 1:27-36
58. Sevacherian, V. and Stern, V.M. (1972). Spatial distribution patterns of *Lygus* bugs in California cotton fields. Env. Ent. 1: 695-703.
59. Simpson, E.H. (1949). Measurement of diversity. Nature 163-688
60. Skellman, J.G. (1952). Studies in statistical ecology. I. Spatial Pattern. Biometrika 39: 346-362
61. Southwood, T.R.E. (1966). Ecological methods with special reference to the study of insect populations. Methuen and Co. Ltd. London.
62. Student (1919). An explanation of deviations from poisson's law in practice. Biometrika, 2: 211-215
63. Stiteler, W.M. (1970). Measurement of spatial patterns in ecology. Ph. D. Thesis. Pennsylvania State University.

64. Stiteler, W.M. (1974). Computer generation of random variates. Publicado en Computer Simulation in human population. Studies. Academic Press.
65. Taylor, L.R. (1961). Aggregation, variance and the mean. Nature 189: 732-735.
66. Taylor, L.R. (1971). Aggregation as a species characteristic. Statistical Ecology. Vol. I. The Pennsylvania State University Press.
67. Thomas, M. (1949). A generalization of Poisson's binomial unit for use in ecology. Biometrika 36: 18-25
68. Upholt, W.M. (1942). The use of the square root transformation and the analysis of variance with contagious distributions. J. Econ. Ent. 35: 536-543.
69. Waters, W.E. (1950). A quantitative measure of aggregation in insects J. Econ. Ent. 52: 1180-1184
70. Waters, W.E. (1955). Sequential sampling in forest insect surveys. For. Sci. 68-79
71. Waters, W.E. and Henson, W.R. (1959). Some sampling attributes of the negative binomial distribution with special reference to forest insects. For. Sci. 5: 397-412

APENDICES

I	APENDICE	A
II	APENDICE	B
VII	APENDICE	C
VIII	APENDICE	D
X	APENDICE	E
XII	APENDICE	F
XIV	APENDICE	G
XV	APENDICE	H

APENDICE A

Si $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$ donde N es v.a. con fgp. $P_N(s)$ y Y_i son v.a.i.i.d. con fgp $P_Y(s)$ entonces:

$$P_X(s) = P_N\{P_Y(s)\}$$

además

$$\mu_X = \mu_N \mu_Y \quad \sigma_X^2 = \mu_N \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 \sigma_N^2$$

Demostración

$$\begin{aligned} P_X(s) &= E\{s^X\} = E_N\{E_Y(s^X|N)\} = \\ &= E_N\{E_Y(s^{Y_1} s^{Y_2} \dots s^{Y_N})\} = E_N\{E_Y(s^{Y_1}) \dots E_Y(s^{Y_N})\} \\ &= E_N\{(P_Y(s))^N\} = P_N\{P_Y(s)\} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} E(X) &= E_N\{E(X|N)\} = E_N\{E(\sum_{i=1}^N Y_i)\} \\ &= E_N\{\sum_{i=1}^N E(Y_i)\} = E_N\{\sum_{i=1}^N \mu_Y\} \\ &= E_N\{N \mu_Y\} \\ &= \mu_N \mu_Y \\ V(X) &= V_N\{E(X|N)\} + E_N\{V(X|N)\} \\ &= V_N\{N \mu_Y\} + E_N\{N \sigma_Y^2\} \\ &= \mu_Y^2 \sigma_N^2 + \sigma_Y^2 \mu_N \end{aligned}$$

II

APENDICE B

Partiendo de las ecuaciones:

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) \dots\dots\dots(1)$$

$$P'_x(t) = -\lambda_x P_x(t) + \lambda_{x-1} P_{x-1}(t) \dots\dots\dots(2)$$

y las condiciones $P_0(0)=1$ y $P_x(0) = 0$ obtener $P_x(t)$
 $x = 0, 1, \dots$ cuando $\lambda_x = \alpha + \beta_x$

Caso i - $\beta = 0$ ($\lambda_x = \alpha$)

Partiendo de (1)

$$P'_0(t) = -\alpha P_0(t) \quad \text{integrado se tiene}$$

$$\log P_0(t) = -\alpha t$$

$$\boxed{P_0(t) = e^{-\alpha t}} \quad (3)$$

Usando (2)

$$P'_1(t) = -\alpha P_1(t) + \alpha P_0(t) \quad \text{integrado resulta}$$

$$e^{\alpha t} P_1(t) = \alpha t$$

$$\boxed{P_1(t) = \alpha t e^{-\alpha t}}$$

Usando (2)

$$P'_2(t) = -\alpha P_2(t) + \alpha P_1(t) \quad \text{al integrar se tiene}$$

$$e^{\alpha t} P_2(t) = \alpha^2 t^2 / 2$$

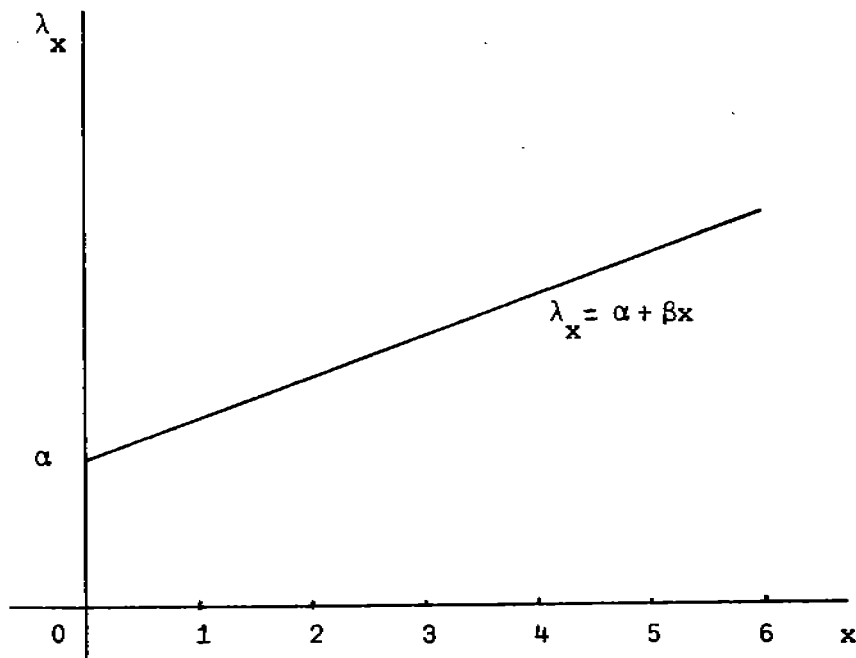
$$\boxed{P_2(t) = \left(\frac{\alpha t}{2}\right)^2 e^{-\alpha t}}$$

La forma general es:

$$P_x(t) = \frac{(\alpha t)^x}{x!} e^{-\alpha t}$$

que es una Poisson (αt)

Caso ii $\beta > 0$



Partiendo de (1)

$$P'_0(t) = -\alpha P_0(t)$$

$$P_0(t) = e^{-\alpha t}$$

Siguiendo el procedimiento anterior:

$$P'_1(t) = -(\alpha + \beta) P_1(t) + \alpha P_0(t) \quad \text{integrado y usando las condiciones iniciales}$$

IV

$$e^{(\alpha+\beta)t} P_1(t) = \frac{\alpha}{\beta} (e^{\beta t} - 1)$$

$$P_1(t) = \frac{\alpha}{\beta} (e^{\beta t} - 1) e^{-(\alpha+\beta)t}$$

$$P_2'(t) = -(\alpha+2\beta) P_2(t) + (\alpha+\beta) P_1(t) \quad \text{integrado:}$$

$$e^{(\alpha+2\beta)t} P_2(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{2\beta^2} (e^{\beta t} - 1)^2$$

$$P_2(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{2\beta^2} (e^{\beta t} - 1)^2 e^{-(\alpha+2\beta)t}$$

Se puede inducir que la forma general está dada por:

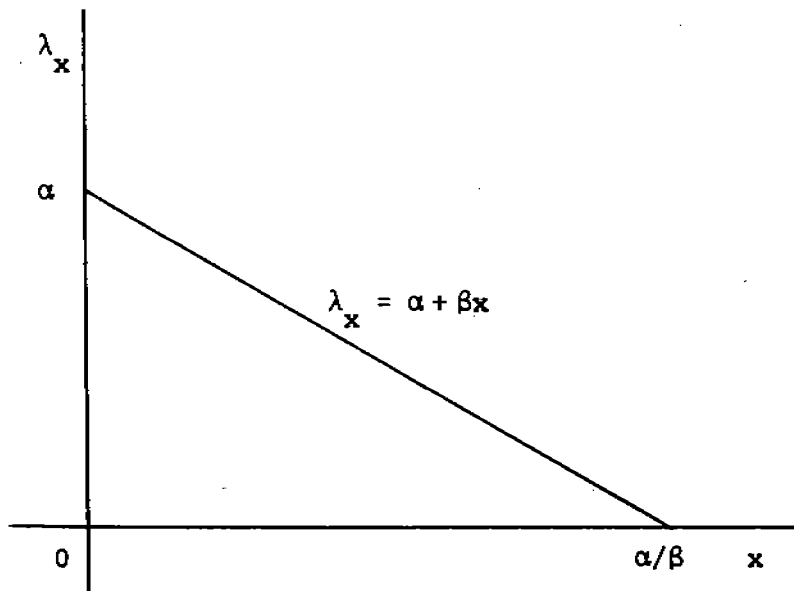
$$P_x(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)\dots(\alpha+(x-1)\beta)}{x! \beta^x} (e^{\beta t} - 1)^x e^{-(\alpha+x\beta)t}$$

la cual, mediante algunos pasos algebraicos y usando el hecho de que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$ se convierte en:

$$P_x(t) = \frac{\Gamma(\alpha/\beta + x)}{x! \Gamma(\alpha/\beta)} e^{-\alpha t} (1 - e^{-\beta t})^x \quad x = 0, 1, \dots$$

Se reconoce una distribución BN con $K = \frac{\alpha}{\beta}$ y $p = e^{-\beta t}$.

Caso iii $\beta < 0$.



Este caso implica una capacidad limitada $(-\alpha/\beta)$ de in dividuos por cuadrante.

Sea $n = -\frac{\alpha}{\beta}$ entonces

$$\lambda_n = \alpha + \beta_n = \alpha + \beta(-\alpha/\beta) = 0$$

(λ_x solo está definida para $x = 0, 1, \dots, n$)

$$\lambda_{n-1} = \alpha + \beta(n-1) = \alpha + \beta(-\alpha/\beta - 1) = -\beta$$

$$\vdots$$

$$\lambda_x = \alpha + \beta(n - (n-x)) = \alpha + \beta(-\alpha/\beta - (n-x)) = -\beta(n-x)$$

$$\vdots$$

$$\lambda_0 = \alpha + \beta(n-n) = \alpha + \beta(-\alpha/\beta - n) = -\beta(n)$$

Usando el hecho de que $\lambda_x = -\beta(n-x)$ $x = 0, 1, \dots, n$ se sigue el procedimiento de los casos anteriores.

Sustituyendo en la expresión (1)

$$P'_0(t) = \beta n P_0(t), \text{ integrando:}$$

$$\log P_0(t) = \beta n t$$

$$P_0(t) = e^{\beta n t}$$

ahora utilizando (2) y el resultado anterior

$$P'_1(t) = \beta(n-1) P_1(t) - \beta n P_0(t), \text{ integrando y usando las condiciones iniciales}$$

$$e^{-\beta(n-1)t} P_1(t) = n(1 - e^{\beta t})$$

$$P_1(t) = n e^{\beta(n-1)t} (1 - e^{\beta t})$$

Nuevamente sustituyendo en (2)

$$P'_2(t) = \beta(n-2) P_2(t) - \beta(n-1) P_1(t)$$

$$e^{-\beta(n-2)t} P_2(t) = \frac{n(n-1)}{2} (1-e^{\beta t})^2$$

$$P_2(t) = \frac{n(n-1)}{2} e^{\beta(n-2)t} (1-e^{\beta t})^2$$

Siguiendo este proceso, el término general es:

$$P_x(t) = \frac{n(n-1)\dots(n-(x-1))}{x!} e^{\beta(n-x)t} (1-e^{\beta t})^x$$

que se puede escribir como:

$$P_x(t) = \binom{n}{x} (e^{\beta t})^{n-x} (1-e^{\beta t})^x \quad x = 0, 1, \dots, n$$

esta es una distribución binomial con $n = -\alpha/\beta$ y

$$p = 1 - e^{\beta t}.$$

APENDICE C

Mostrar que $f(i) = ip(i)/p(i-1)$ es lineal.

Caso i $X \sim p(\lambda)$

$$f(i) = i \frac{e^{-\lambda} \lambda^i / i!}{e^{-\lambda} \lambda^{i-1} / (i-1)!} = \lambda$$

Caso ii $X \sim BN(K,p)$

$$\begin{aligned} f(i) &= i \frac{\Gamma(K+i)/i! \Gamma(K)}{\Gamma(K+i-1)/(i-1)! \Gamma(K)} \frac{p^k q^i}{p^k q^{i-1}} \\ &= q \frac{\Gamma(K+i)}{\Gamma(K+i-1)} \\ &= q (K+i-1) \\ &= q (K-1) + i q \end{aligned}$$

Caso iii $X \sim B(n,p)$

$$\begin{aligned} f(i) &= i \frac{\binom{n}{i} p^i q^{n-i}}{\binom{n}{i-1} p^{i-1} q^{n-i+1}} \\ &= i \frac{p}{q} \frac{n! / (i! (n-i)!)}{n! / ((i-1)! (n-i+1)!)} \\ &= \frac{p}{q} (n-i+1) \\ &= \frac{p}{q} (n+1) - i \frac{p}{q} \end{aligned}$$

VIII

APENDICE D

Serán $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ir_i}$ v.a.i.i.d. Poisson (λ_i)
 ($i=1, \dots, s$) y $N = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} X_{ij}$

$$\begin{aligned}
 E\{I_\delta\} &= n E_N \left\{ \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} (X_{ij} (X_{ij} - 1))}{N(N-1)} \right\} \\
 &= n E_N \left\{ E \left(\frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} (X_{ij} (X_{ij} - 1))}{N(N-1)} \mid N \right) \right\} \\
 &= n E_N \left\{ \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} E(X_{ij}^2) - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} E(X_{ij})}{N(N-1)} \right\} \\
 &= n E_N \left\{ \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} (\lambda_i + \lambda_i^2) - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_i}{N(N-1)} \right\} \\
 &= n E_N \left\{ \frac{\sum_{i=1}^s r_i \lambda_i^2}{N(N-1)} \right\} \text{ resultado de Stiteler (1970, p.66)} \\
 &= \frac{n \sum_{i=1}^s r_i \lambda_i^2}{\left(\sum_{i=1}^s r_i \lambda_i \right)^2} \quad \left(\text{por el hecho de que } N \sim p \left(\sum_{i=1}^s r_i \lambda_i \right) \right)
 \end{aligned}$$

si el tamaño del cuadrante se multiplica por m entonces $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ir_i/m}$ son v.a.i.i.d. Poisson ($m\lambda_i$) y $N = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i/m} X_{ij}$ en este caso: y siguiendo el mismo procedimiento:

$$\begin{aligned}
 E\{I_\delta\} &= \frac{n}{m} E \left\{ \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i/m} E(X_{ij}^2) - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i/m} E(X_{ij})}{N(N-1)} \right\} \\
 &= \frac{n}{m} E_N \left\{ \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i/m} (m\lambda_i + m^2\lambda_i^2) - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i/m} m\lambda_i}{N(N-1)} \right\} \\
 &= \frac{n}{m} E_N \left\{ \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i/m} m^2 \lambda_i^2}{N(N-1)} \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{m} \left\{ \frac{\sum m r_i \lambda_i^2}{(\sum r_i \lambda_i)^2} \right\} \{ N \sim P \left(\sum_{i=1}^s r_i \lambda_i \right) \}$$

Cancelando las m se tiene:

$$E \{ I_{\delta}^2 \} = \frac{n \sum r_i \lambda_i^2}{\{ \sum r_i \lambda_i \}^2}$$

APENDICE E

Sea

$$f_1(x) = \sum_{i=x}^{\infty} \binom{i}{x} \theta^x (1-\theta)^{i-x} f_0(x)$$

demostrar que $G_1(Z) = G_0(\theta Z + 1 - \theta)$ y que $\mu_{(1),1} = \theta \mu_{(1),0}$ y

$$\mu_{(2),1} = \theta^2 \mu_{(2),0}.$$

$$\begin{aligned} G_1(Z) = E_1(Z^x) &= \sum_{x=0}^{\infty} f_1(x) Z^x = \sum_{x=0}^{\infty} Z^x \left\{ \sum_{i=x}^{\infty} \binom{i}{x} \theta^x (1-\theta)^{i-x} f_0(x) \right\} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} f_0(x) \left\{ \sum_{i=0}^x \binom{x}{i} (\theta Z)^i (1-\theta)^{x-i} \right\} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} f_0(x) (\theta Z + 1 - \theta)^x \\ &= E_0(\theta Z + 1 - \theta)^x \\ &= G_0(\theta Z + 1 - \theta) \end{aligned}$$

Para encontrar los momentos factoriales, se parte del hecho:

$$\phi(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i!} \mu(i) = G(1+u)$$

donde $\phi(u)$ es la función generatriz de momentos factoriales (fgmf) y $\mu(i)$ es el i -ésimo momento factorial.

Sea $\phi_0(u)$ y $\phi_1(u)$ las fgmf de $f_0(x)$ y $f_1(x)$ respectivamente, entonces se tiene:

$$\phi_1(u) = G_1(1+u) = G_0\{\theta(1+u) + 1-\theta\} = G_0(1+\theta u) = \phi_0(\theta u)$$

Si se denotan $\mu_{(i),1}$ y $\mu_{(i),0}$ los momentos factoriales de $f_1(x)$ y $f_0(x)$, entonces:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu_{(i),1} \frac{u^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_{(i),0} \frac{(\theta u)^i}{i!}$$

Igualando los coeficientes de $u^i/i!$ para $i = 1, 2$ se ve que:

$$\mu_{(1),1} = \theta \mu_{(1),0} \quad \mu_{(2),1} = \theta^2 \mu_{(2),0}$$

APENDICE F

La precisión relativa definida por $D = \text{error estandar}/\text{media}$ en muestreo simple aleatorio es:

$$D_u = \frac{1}{n_u} \left(\frac{\alpha_u + 1}{\bar{x}_u} + \beta_u - 1 \right)$$

donde u es el tamaño de cuadrante, n_u el número de cuadrantes muestreados y α_u y β_u son los coeficientes de regresión de la relación de series. Si se toma $u=1$ como tamaño estandar, $\bar{x}_u = u \bar{x}_1$ y si el área muestreada es la misma $n_u = n_1/u$, la expresión anterior se escribe como:

$$D_u = \sqrt{\frac{u}{n_1} \left(\frac{\alpha_u + 1}{u \bar{x}} + \beta_u - 1 \right)}$$

Así, se tiene:

$$\frac{D_u}{D_1} = \sqrt{\frac{\alpha_u + 1 + (\beta_u - 1) u \bar{x}_1}{\alpha_1 + 1 + (\beta_1 - 1) \bar{x}_1}}$$

que dá un criterio para comparar la precisión relativa cuando el área total muestreada es la misma pero con dos tamaños distintos de cuadrantes: u es mejor si $D_u/D_1 < 1$.

El número de cuadrantes a muestrear para lograr un nivel de precisión D_u es:

$$n_u = \frac{1}{D_u} \left(\frac{\alpha_u + 1}{u \bar{x}}, + \beta_u - 1 \right)$$

XIII

Si el costo de muestrear un cuadrante de tamaño u es C_u , el costo relativo para una D dada al muestrear con dos tamaños de cuadrante u y 1 es:

$$\frac{C_u n_u}{C_1 n_1} = \frac{C_u}{C_1} \frac{\alpha_u + 1 + (\beta_u - 1)u \bar{x}_1}{u\{\alpha_1 + 1 + (\beta_1 - 1) \bar{x}_1\}}$$

El tamaño u es mejor si $C_u n_u / C_1 n_1 < 1$.

APENDICE G

Listado del programa usada para generar una distribución generalizada (Polya-Aeppli).



SARH

BASICXX

BASIC 3.

```
10 DIM M1(8),M2(8),M7(8),M4(8),M3(8),M5(8),M6(8)
20 DIM P(100),Q(100),A(12,12),B(12,12),R(100)
40 DIM F(100),G(100),H(1,100)
50 REM GENERACION DE MATRIZ ORIGINAL
60 DATA 3,3,.3,4,5,.4,5,2,.5,3,6,.2,1,2,.7,1,6,.5,7,1,.8,2,1,.6,
65 DATA 3,5,10,.4,7,3,.4
70 FOR J7=1 TO 10
71 M7=-9999
72 M7=9999
73 M3=-9999
74 M3=9999
80 READ L1,L2,L3
82 FOR JB=1 TO 10
83 PRINT
84 NEXT JB
90 PRINT "DISTRIBUCION POISSON-PASCAL CON L1=";L1;" L2=";L2;" Y L3
95 PRINT "MODELO COLONIAL "
100 P(1)=EXP(-L1)
110 P=P(1)
120 FOR P1=2 TO 100
130 P=P*L1/(P1-1)
140 P(P1)=P+P(P1-1)
150 IF 1-P(P1)<.001 THEN 170
160 NEXT P1
170 L2=-L2*LOG(L3)
180 Q(1)=EXP(-L2)
190 Q=Q(1)
200 FOR Q1=2 TO 100
210 Q=Q*L2/(Q1-1)
220 Q(Q1)=Q+Q(Q1-1)
230 IF 1-Q(Q1)<.001 THEN 250
240 NEXT Q1
250 L3=1-L3
260 R(1)=-L3/LOG(1-L3)
270 R=R(1)
280 FOR R1=2 TO 100
290 P=P*(R1-1)*L3/R1
300 R(R1)=P+R(R1-1)
310 IF 1-R(R1)<.001 THEN 330
320 NEXT R1
330 FOR J=1 TO 144
334 S1=0
335 S2=0
340 X=RNDR(-1)
350 FOR I1=1 TO P1
360 IF X<P(I1) THEN 380
370 NEXT I1
380 IF I1=1 THEN 434
390 FOR I2=1 TO I1-1
400 X=RNDR(-1)
410 FOR I3=1 TO Q1
412 IF X<Q(I3) THEN 416
414 NEXT I3
416 S1=S1+I3-1
418 NEXT I2
419 IF S1=0 THEN 434
420 FOR I2=1 TO S1
```



SARH

BASICXX

BASIC 3

```
422 X=RND(-1)
424 FOR I3=1 TO R1
426 IF X<R(I3) THEN 430
428 NEXT I3
430 S2=S2+I3
432 NEXT I2
434 J1=J+11
436 J2=INT(J1/12)
438 J3=((J1/12-INT((J1-1)/12))*12+.1)
440 A(J2,J3)=S2
442 NEXT J
450 REM CALCULO DE F.
460 FOR I=1 TO 50
470 F(I)=G(I)=H(I,I)=0
480 NEXT I
485 R=0
490 FOR I=1 TO 12
500 FOR J=1 TO 12
510 F(I)=F(I)+A(I,J)
520 G(I)=G(I)+1
530 IF A(I,J)=0 GO TO 650
540 FOR K=2 TO (A(I,J)+1)
545 IF K>=50 GO TO 650
550 X=Y=1
560 FOR L=1 TO K-1
570 W=A(I,J)-L+1
580 X=X*W
590 Y=Y*L
600 NEXT L
610 Z=X/Y
620 F(K)=Z*(A(I,J)-K+1)+F(K)
630 G(K)=Z+G(K)
640 NEXT K
645 IF A(I,J)<R THEN 650
646 R=A(I,J)
650 NEXT J
660 NEXT I
670 FOR I=1 TO R+1
680 H(I,I)=F(I)/G(I)
690 NEXT I
692 PRINT
693 PRINT
700 MAT PRINT H;
1000 REM LLAMADAS A LA SUBROUTINA DE LOS APREGLOS DE B(X,Y)
1003 Z=1
1004 K5=12
1005 J5=12
1006 GO SUB 2000
1010 Z=2
1020 K5=12
1030 J5=6
1040 GO SUB 2000
1050 Z=3
1060 K5=6
1070 J5=6
1080 GO SUB 2000
1090 Z=4
```



SARH

BASICXX

BASIC 3

1100 K5=4

1110 J5=6

1120 GO SUB 2000

1130 Z=5

1140 K5=3

1150 J5=6

1160 GO SUB 2000

1170 Z=6

1180 K5=4

1190 J5=4

1200 GO SUB 2000

1210 Z=7

1220 K5=3

1230 J5=4

1240 GO SUB 2000

1250 Z=8

1260 K5=3

1270 J5=3

1280 GO SUB 2000

1290 N1=N2=0

1291 N3=N4=0

1292 N5=N6=0

1293 N7=N8=0

1294 N9=W1=0

1350 FOR I=1 TO 8

1360 N1=M1(I)+N1

1370 N2=M1(I)**2+N2

1380 N3=M5(I)+N3

1390 N4=LOG(M1(I))+N4

1400 N5=(LOG(M1(I)))**2+N5

1410 N6=LOG(M2(I))+N6

1420 N7=M5(I)**2+N7

1430 N8=(LOG(M2(I)))**2+N8

1440 N9=M1(I)*M5(I)+N9

1450 W1=(LOG(M1(I)))*(LOG(M2(I)))+W1

1460 NEXT I

1470 S1=N2-N1**2/8

1480 S2=N7-N3**2/8

1490 S3=N8-N6**2/8

1500 S4=N5-N4**2/8

1510 B1=(N9-(N1*N3)/8)/S1

1520 A1=(N3-B1*N1)/8

1530 R1=(B1*SQR(S1))/SQR(S2)

1532 PRINT

1533 PRINT

1534 PRINT

1540 PRINT "B DE IWA0 =";B1," A DE IWA0 =";A1," R =";R1

1550 B2=(W1-((N4*N6)/8))/S4

1560 A2=(N6-B2*N4)/8

1570 R2=(B2*SQR(S4))/SQR(S3)

1580 PRINT "B DE TAYLOR =";B2," A DE TAYLOR =";A2," R =";R2

1590 MARGIN 130

1600 AS="MEDIA"

1610 BS="VARIANZA"

1620 CS="INDICE DE "

1630 DS="MOORE"

1640 ES="MORISITA"



SARH

BASICXX

BASIC 3

```
1650 F$="K DE BIN."
1655 G$=" NEGATIVA"
1660 H$="APINAMIENTO"
1665 I$="O MEDIO"
1670 J$="INDICE"
1675 K$="ARIGARRA"
1680 L$="MIENTO"
1685 FOR I=1 TO 5
1690 PRINT
1695 NEXT I
1697 MARGIN 133
1699PRINT"NO", A$ ;TAB(30);B$;TAB(39);D$;TAB(50);E$;TAB(72);F$;TAB
1699 PRINT TAB(72);G$;TAB(110);K$+L$
1780 FOR W=1 TO 8
1781 O1=M1(W)
1782 O2=M2(W)
1783 O3=M7(W)
1784 O4=M4(W)
1785 O5=M3(W)
1785 O6=M5(W)
1787 O7=M6(W)
1788 MARGIN 130
1790PRINTW,O1,TAB(17);O2;TAB(30);O3;TAB(51);O4;TAB(74);O5;TAB(99);
1795 NEXT W
1800 PRINT "GRAFICA K DE BIN. NEGATIVA"
1805 T1=0
1810 R1=D3
1820 R2=M3
1821 O1=0
1822 O2=0
1830 GO SUB 3000
1833 FOR I=1 TO 5
1834 PRINT
1835 NEXT I
1840 PRINT "GRAFICA INDICE DE MOORE"
1845 T1=1
1850 R1=O7
1860 R2=M7
1861 O1=0
1862 O2=0
1865 GO SUB 3000
1900 GO TO 2410
2000 PEM CALCULO PARA DISTINTOS TAMANO DE CUADPANTE
2005 S1=S2=0
2010 MATB=ZER(K5,J5)
2020 K6=12/K5
2030 J6=12/J5
2035 K1=0
2040 FOR K=1 TO 12 STEP K6
2050 K1=K1+1
2060 J1=0
2070 FOR J=1 TO 12 STEP J6
2080 J1=J1+1
2090 FOR K3=K TO K+K6-1
2100 FOR J3=J TO J+J6-1
2110 B(K1,J1)=A(K3,J3)+B(K1,J1)
2120 NEXT J3
```




SARH

BASICXX

BASIC

```
3250 FOR A1=1 TO 4
3260 PRINT TAB(18);"I"
3270 NEXT A1
3275 MARGIN 133
3280 PRINT TAB(14);I;TAB(18);"I";TAB(C7);"*"
3285 C7=19
3290 Q1=Q1+F7
3330 Q2=Q2+F7**2
3340 NEXT I
3350 PRINT
3360 Q=SQR(Q2/8-Q1**2/64)/(Q1/8)
3365 PRINT "COEFICIENTE DE VARIACION =" ;Q*100;"%"
3400 RETURN
3500 REM SUBROUTINA DE TRASPASO DE MATRIZ
3510 IF T1=1 THEN 3540
3520 F7=M3(I)
3530 GO TO 3550
3540 F7=M7(I)
3550 RETURN
9999 END
```

APENDICE H

Listado del programa usado para generar una distribución compuesta (Poisson-Pascal).



```
10 DIM M1(8),M2(8),M7(8),M4(8),M3(8),M5(8),M6(8)
15 DIM C1(145),C2(145),C3(145),C4(145),C5(145),C6(145)
17 DIM C7(145),C8(145),C9(145),K(8)
20 DIM A(12,12),R(12,12),P(145)
40 DIM F(100),G(100),H(1,100)
50 DEF GENERACION DE MATRIZ ORIGINAL
60 DATA 15,5,5,20,3,4,5,5,5,3,9,2,4,20,4
70 FOR J7=1 TO 5
71 M7=-9999
72 J7=9999
73 M3=-9999
74 J3=9999
75 READ J1,J2,P
76 P(1)=EXP(-J1)
77 PRINT "P(1)=";P(1) " N=";J2 " P=";P
78 J2=P(1)
80 FOR P1=2 TO 145
81 J2=J2*(P1/(P1-1))
82 P(P1)=J2+P(P1-1)
83 IF 1-P(P1)<.001 THEN 85
84 NEXT P1
85 FOR J1=1 TO 9
86 X=PNV(-1)
87 FOR J2=1 TO P1
88 IF X<P(J2) THEN 90
89 NEXT J2
90 K(J1)=J2-1
91 NEXT J1
92 L1=J2*K(1)
93 L2=J2*K(2)
94 L3=J2*K(3)
95 L4=J2*K(4)
96 L5=J2*K(5)
97 L6=J2*K(6)
98 L7=J2*K(7)
99 L8=J2*K(8)
100 J=J2*K(9)
101 C1(1)=(1-P)*L1
102 T1=C1(1)
103 FOR A1=2 TO 145
104 T1=(T1*P*(L1-A1+2))/((A1-1)*(1-P))
105 C1(A1)=T1+C1(A1-1)
106 IF 1-C1(A1)<.001 THEN 109
107 PRINT "C1(A1)=";C1(A1)
108 NEXT A1
109 PRINT "L1=";L1;"L2=";L2;"L3=";L3;"L4=";L4;"L5=";L5;"L6=";L6;"L7=";L7;"L8=";L8;"L9=";L9
110 PRINT "L2=";L2;"L3=";L3;"L4=";L4;"L5=";L5;"L6=";L6;"L7=";L7;"L8=";L8;"L9=";L9
111 C2(1)=(1-P)*L2
112 T2=C2(1)
113 FOR A2=2 TO 145
114 T2=(T2*P*(L2-A2+2))/((A2-1)*(1-P))
115 C2(A2)=T2+C2(A2-1)
116 IF 1-C2(A2)<.001 THEN 119
117 NEXT A2
118 C3(1)=(1-P)*L3
119 T3=C3(1)
120 FOR A3=2 TO 145
```



```
125 T3=(T3*P*(L3-A3+2))/((A3-1)*(1-P))
126 C3(A3)=T3+C3(A3-1)
127 IF 1-C3(A3)<.001 THEN 130
128 NEXT A3
130 C4(1)=(1-P)**L4
131 PRINT "C4(1) =";C4(1)
132 T4=C4(1)
134 FOR A4=2 TO 145
136 T4=(T4*P*(L4-A4+2))/((A4-1)*(1-P))
137 PRINT "T4= ";T4
138 C4(A4)=T4+C4(A4-1)
139 PRINT "C4(A4)=";C4(A4)
140 IF 1-C4(A4)<.001 THEN 144
142 NEXT A4
144 C5(1)=(1-P)**L5
146 T5=C5(1)
148 FOR A5=2 TO 145
150 T5=(T5*P*(L5-A5+2))/((A5-1)*(1-P))
152 C5(A5)=T5+C5(A5-1)
154 IF 1-C5(A5)<.001 THEN 158
156 NEXT A5
158 C6(1)=(1-P)**L6
160 T6=C6(1)
162 FOR A6=2 TO 145
164 T6=(T6*P*(L6-A6+2))/((A6-1)*(1-P))
166 C6(A6)=T6+C6(A6-1)
168 IF 1-C6(A6)<.001 THEN 172
170 NEXT A6
172 C7(1)=(1-P)**L7
174 T7=C7(1)
176 FOR A7=2 TO 145
178 T7=(T7*P*(L7-A7+2))/((A7-1)*(1-P))
180 C7(A7)=T7+C7(A7-1)
182 IF 1-C7(A7)<.001 THEN 186
184 NEXT A7
186 C8(1)=(1-P)**L8
188 T8=C8(1)
190 FOR A8=2 TO 145
192 T8=(T8*P*(L8-A8+2))/((A8-1)*(1-P))
194 C8(A8)=T8+C8(A8-1)
196 IF 1-C8(A8)<.001 THEN 200
198 NEXT A8
200 C9(1)=(1-P)**L9
201 PRINT "C9(1) =";C9(1)
202 T9=C9(1)
204 FOR A9=2 TO 145
206 T9=(T9*P*(L9-A9+2))/((A9-1)*(1-P))
207 PRINT "T9= ";T9
208 C9(A9)=T9+C9(A9-1)
209 PRINT "C9(A9)=";C9(A9)
210 IF 1-C9(A9)<.001 THEN 220
212 NEXT A9
220 PRINT "A2=";A2;"A4=";A4;"A5=";A5;"A8=";A8
225 PRINT "A1=";A1;"A3=";A3;"A5=";A5;"A7=";A7;"A9=";A9
205 FOR J=1 TO 144
207 J1=J+11
209 J2=INT(J1/12)
```



SARH

```
311 J3=INT((J1/12-INT((J1-1)/12))*12+.1)
313 X=RVN(-1)
315 IF J2<=4 AND J3<=4 THEN 3800
320 IF J2<=4 AND J3>=9 THEN 4000
325 IF J2<=4 THEN 5000
330 IF J2>=9 AND J3<=4 THEN 6000
335 IF J2>=9 AND J3>=9 THEN 7000
340 IF J2>=9 THEN 8000
345 IF J3<=4 THEN 8100
350 IF J3>=9 THEN 8200
355 GO TO 8300
360 A(J2, J3)=I-1
365 NEXT J
450 DEM CALCULO DE F.
460 FOR I=1 TO 50
470 F(I)=G(I)=H(I, I)=0
480 NEXT I
485 Z=0
490 FOR I=1 TO 12
500 FOR J=1 TO 12
510 F(I)=F(I)+A(I, J)
520 G(I)=G(I)+1
530 IF A(I, J)=0 GO TO 550
540 FOR K=2 TO (A(I, J)+1)
545 IF K>=50 GO TO 550
550 Y=Y+1
560 FOR L=1 TO K-1
570 J=A(I, J)-L+1
580 X=Y#J
590 Y=Y#L
600 NEXT L
610 Z=X/Y
620 F(K)=Z*(A(I, J)-K+1)+F(K)
630 G(K)=Z+G(K)
640 NEXT K
645 IF A(I, J)<2 THEN 550
645 D=A(I, J)
650 NEXT J
660 NEXT I
670 FOR I=1 TO 3+1
680 H(I, I)=F(I)/G(I)
690 NEXT I
692 PRINT
693 PRINT
700 MAT PRINT H:
1000 DEM LLAMADAS A LA SUBROUTINA DE LOS ARREGLOS DE 3(X*Y)
1003 Z=1
1004 K5=12
1005 J5=12
1006 GO SUB 2000
1010 Z=2
1020 K5=12
1030 J5=6
1040 GO SUB 2000
1050 Z=3
1060 K5=6
1070 J5=6
```



SARH

BASICXX

BASIC 3

1080 GO SUR 2000

1090 7=4

1100 K5=4

1110 J5=6

1120 GO SUR 2000

1130 7=5

1140 K5=3

1150 J5=6

1160 GO SUR 2000

1170 7=6

1180 K5=4

1190 J5=4

1200 GO SUR 2000

1210 7=7

1220 K5=3

1230 J5=4

1240 GO SUR 2000

1250 7=8

1260 K5=3

1270 J5=3

1280 GO SUR 2000

1290 N1=N2=0

1291 N3=N4=0

1292 N5=N6=0

1293 N7=N8=0

1294 N9=N1=0

1350 FOR I=1 TO 9

1360 M1=M1(I)+N1

1370 M2=M1(I)**2+N2

1380 M3=M5(I)+N3

1390 M4=LOG(M1(I))+N4

1400 M5=(LOG(M1(I)))**2+N5

1410 M6=LOG(M2(I))+N6

1420 M7=M5(I)**2+N7

1430 M8=(LOG(M2(I)))**2+N8

1440 M9=M1(I)*M5(I)+N9

1450 M1=(LOG(M1(I)))*(LOG(M2(I)))+N1

1460 NEXT I

1470 C1=M2-N1**2/R

1480 C2=M7-N3**2/R

1490 C3=M8-N5**2/R

1500 C4=M5-N4**2/R

1510 R1=(M9-(M1*M3)/R)/C1

1520 A1=(M3-R1*M1)/R

1530 P1=(R1*C2)*S1(S1)/SOR(S2)

1532 PRINT

1533 PRINT

1534 PRINT

1540 PRINT "B DE IMAQ =" ; R1 ; " A DE IMAQ =" ; A1 ; " P =" ; R1

1550 R2=(M1-((M4*M6)/R))/S4

1560 A2=(M6-R2*M4)/R

1570 R2=(R2*SOR(S4))/SOR(S3)

1580 PRINT "B DE TAYLOR =" ; R2 ; " A DE TAYLOR =" ; A2 ; " R =" ; R2

1590 MARGIN 130

1600 AS="MEDIA"

1610 RS="VARIANZA"

1620 CS="INDICE DE "



SARH

```

1630 DS="MOORE"
1640 FS="MORTSITA"
1650 FS="K DE BIN."
1655 GS="NEGATIVA"
1660 HS="APINAMIENTO"
1665 IS="NO MEDIO"
1670 JS="INDICE"
1675 KS="ARISARRA"
1680 LS="MIENTO"
1685 FOR I=1 TO 5
1690 PRINT
1695 NEXT I
1697 MARGIN 133
1698 PRINT "M", AS : TAB(30); BS : TAB(39); DS : TAB(50); ES : TAB(72); FS : TAB(9
1699 PRINT TAB(72); GS : TAB(110); KS+LS
1780 FOR W=1 TO 8
1781 O1=M1(W)
1782 O2=M2(W)
1783 O3=M3(W)
1784 O4=M4(W)
1785 O5=M5(W)
1786 O6=M5(W)
1787 O7=M6(W)
1788 MARGIN 130
1790 PRINT W, O1, TAB(17); O2 : TAB(30); O3 : TAB(45); O4 : TAB(74); O5 : TAB(99); O
1795 NEXT W
1800 PRINT "GRAFICA K DE BIN. NEGATIVA"
1805 T1=0
1810 O1=O3
1820 O2=M3
1821 O1=0
1822 O2=0
1830 GO SUB 3000
1833 FOR I=1 TO 5
1834 PRINT
1835 NEXT I
1840 PRINT "GRAFICA INDICE DE MOORE"
1845 T1=1
1850 O1=O7
1860 O2=M7
1861 O1=0
1862 O2=0
1865 GO SUB 3000
1900 GO TO 2410
2000 REM CALCULO PARA DISTINTOS TAMANO DE CUADRANTE
2005 S1=S2=0
2010 MATB=ZER(K5,J5)
2020 K6=12/K5
2030 J6=12/J5
2035 K1=0
2040 FOR K=1 TO 12 STEP K6
2050 K1=K1+1
2060 J1=0
2070 FOR J=1 TO 12 STEP J6
2080 J1=J1+1
2090 FOR K3=K TO K+K5-1
2100 FOR J3=J TO J+J5-1

```




```
3230 GO TO 3250
3240 NEXT R
3250 FOR A1=1 TO 4
3260 PRINT TAB(18);"I"
3270 NEXT A1
3275 MARGIN 133
3280 PRINT TAB(14);I;TAB(18);"I";TAB(07);"*"
3285 C7=19
3290 O1=O1+F7
3330 O2=O2+F7**2
3340 NEXT I
3350 PRINT
3360 O=SQR(O2/R-O)**2/54)/(O1/R)
3365 PRINT "COEFICIENTE DE VARIACION ="O*100;"%"
3400 RETURN
3500 REM SUBROUTINA DE TRASPASO DE MATRIZ
3510 IF T1=1 THEN 3540
3520 F7=M7(I)
3530 GO TO 3550
3540 F7=M7(I)
3550 RETURN
3800 REM PRIMERO CUADRANTE
3810 FOR I=1 TO A1
3820 IF X<C1(I) THEN 3840
3830 NEXT I
3840 GO TO 360
4000 REM SEGUNDO CUADRANTE
4010 FOR I=1 TO A2
4020 IF X<C2(I) THEN 4040
4030 NEXT I
4040 GO TO 360
5000 REM TERCERO
5010 FOR I=1 TO A3
5020 IF X<C3(I) THEN 5040
5030 NEXT I
5040 GO TO 360
6000 REM CUARTO
6010 FOR I=1 TO A4
6020 IF X<C4(I) THEN 6040
6030 NEXT I
6040 GO TO 360
7000 REM QUINTO
7010 FOR I=1 TO A5
7020 IF X<C5(I) THEN 7040
7030 NEXT I
7040 GO TO 360
8000 REM SEXTO
8010 FOR I=1 TO A6
8020 IF X<C6(I) THEN 8040
8030 NEXT I
8040 GO TO 360
9100 REM SEPTIMO
9110 FOR I=1 TO A7
9120 IF X<C7(I) THEN 9140
9130 NEXT I
9140 GO TO 360
9200 REM OCTAVO
```



RASICXX

BASIC

SARH

```

R210 FOR I=1 TO A8
R220 IF X<CR(I) THEN G240
R230 NEXT I
R240 GO TO 360
R300 REM NOVEND
R310 FOR I=1 TO A9
R320 IF X<C9(I) THEN G340
R330 NEXT I
R340 GO TO 350
9999 FND

```

BIBLIOTECA
JUAN A. ESCALANTE H.
UNIDAD ACADEMICA DE
LOS CICLOS PROFESIONAL
Y DE POSGRADO / CCH
UNAM *