UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRAS BOOLEANAS, TEOREMA DE STONE Y AXIOMA DE MARTIN

TESINA QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

PEDRO FRANCISCO VALENCIA VIZCAÍNO

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE 2008

Introducción

La topología de muchos espacios importantes en las matemáticas puede describirse en términos de sucesiones. Sin embargo, en espacios más generales la noción de sucesión no es suficiente para capturar la esencia de su estructura topológica. Resulta que una herramienta excelente para trabajar con la noción de convergencia que, de alguna manera, extiende la noción de sucesión es la de filtro. La primera vez que aparecen los filtros en el estudio de la topología es en el artículo de 1908 del matemático húngaro Frigyes Riesz, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre* ([**5**]). Después en 1937 Cartan esboza el papel que juegan los filtros en la convergencia y en 1955 Bartle, Bruns y Schmidt notan la equivalencia entre la teoría de redes y la de filtros para tratar la convergencia en toda generalidad. Tiempo después, en parte gracias al trabajo de Marshall Harvey Stone se observa la importancia de los filtros en estructuras más generales como álgebras booleanas, retículas y órdenes parciales.

La primera sección de la tesina trata sobre conjuntos parcialmente ordenados. Aquí se dan las definiciones fundamentales como las de orden parcial, buen orden, retícula y álgebra booleana, así como algunos ejemplos importantes en topología de estas estructuras. Según Stone, las álgebras booleanas (que fueron desarrolladas originalmente por el matemático inglés George Boole) son de interés tanto para los lógicos como para los matemáticos ya que nacieron en el tratamiento de la lógica por métodos simbólicos y tienen una estrecha relación con las reglas que rigen la manipulación de clases y el álgebra (véanse [**1**] y [**2**]).

La segunda sección de la tesina está dedicada a esta teoría que entre sus aplicaciones más bonitas enlista una demostración elegante del teorema de Tychonov sobre productos de espacios compactos. En esta parte incluimos un contraejemplo original (debido al autor de esta tesina) a un enunciado que aparece en [**9**] (pg. 167, V.5.5) sobre productos de filtros maximales. Finalizamos esta sección con el teorema de representación de Birkhoff-Stone.

La tercera sección de la tesina está dedicada a la construcción del espacio de Stone de un álgebra booleana, que tiene una relación estrecha con los resultados que presentaremos sobre el axioma de Martin y el teorema de representación de Stone.

La cuarta sección de la tesina se enfoca en el axioma de Martin. Nos parece importante discutir este tema, puesto que mientras más avanza uno en una teoría matemática, se hace más evidente la necesidad de entender con profundidad las bases sobre las cuales descansa la misma, y el axioma de Martin da una oportunidad maravillosa de acercarse a las bases axiomáticas en las que descansa la matemática que realizamos. Además los filtros ofrecen una buena plataforma para iniciar el análisis de este axioma y algunas de sus aplicaciones a la topología, por lo cual la combinación de la noción de filtro con el axioma de Martin nos parece una mancuerna muy armionosa. En esta parte de la tesina seguiremos el camino trazado por Porter y Grant Woods en su libro *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces* ([**3**]), mismo que se tomó como base para un curso avanzado de topología en la maestría. Veremos la utilidad de los filtros para la comprensión de este axioma, así como su relación con el teorema de Baire y la topología general. Terminamos esta parte y así mismo la tesina, con un contraejemplo original (también debido al autor de la tesina), que surgió como respuesta a una pregunta planteada por el matemático Rodrigo Hernández en el curso avanzado de topología antes mencionado. Este es un contraejemplo a un enunciado que aparece en [**3**] sobre espacios numerablemente compactos (pg. 206, capítulo 3, sección 5, enunciado (l), (1)).

1. Conjuntos Parcialmente Ordenados, Retículas y Álgebras Booleanas

Definición Sea P un conjunto. Decimos que un subconjunto $\leq$ del producto cartesiano $P \times P$ es una *relación de orden en* P y que $(P, \leq)$ es un *conjunto parcialmente ordenado* o un *orden parcial* si $\leq$ satisface las siguientes condiciones:

1. Para toda $p \in P$ se tiene $(p,p) \in \leq$. Como es usual, en lugar de escribir $(x,y) \in \leq$, por lo general escribiremos $x \leq y$.
2. Para todas $p, q \in P$ se tiene que: si $p \leq q$ y $q \leq p$, entonces $p = q$.
3. Para todas $p, q, r \in P$ se tiene que: si $p \leq q$ y $q \leq r$, entonces $p \leq r$.

El ejemplo canónico de orden parcial es la potencia de un conjunto con la contención; como veremos más adelante este es también un ejemplo de una retícula distributiva y de un álgebra booleana.

Definición Sea $(P, \leq)$ un orden parcial. Decimos que $(P, \leq)$ es un *orden lineal* si para todas $x, y \in P$ o bien $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

Definición Sea $(P, \leq)$ un orden parcial. Decimos que $C \subseteq P$ es una *cadena en* P si $(C, \leq\restriction_C)$ es un orden lineal. Decimos que $p \in P$ es *maximal* si para toda $q \in P$ el hecho de que $q \geq p$ implica que $q = p$.

Definición Sean $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq P$. Decimos que $r \in P$ es una *cota inferior* de A si $r \leq a$ para toda $a \in A$. Decimos que $p \in P$ es el *ínfimo* de A si:

1. $p \leq a$ para toda $a \in A$.
2. Si $q \in P$ es una cota inferior de A, entonces $q \leq p$.

La noción de cota superior y de supremo se definen de manera análoga, como es bien sabido.

Definición Sea $(P, \leq)$ un orden parcial. Decimos que $(P, \leq)$ es un *conjunto bien ordenado* o un *buen orden* si para todo subconjunto no vacío, $\varnothing \neq A \subseteq P$, existe $a \in A$ tal que a es el ínfimo de A.

Notación Sean $(P, \leq)$ un orden parcial y $A \subseteq P$. Denotamos con $\sqcap A$ al ínfimo de A, en caso de que exista. Denotamos con $\sqcup A$ al supremo de A, en caso de que exista.

Notación Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces

$$\mathring{P} = \begin{cases} P \setminus \{\sqcap P\} & \text{si } P \text{ tiene ínfimo} \\ P & \text{si } P \text{ no tiene ínfimo} \end{cases}$$

Usamos un círculo sin relleno para acordarnos que posiblemente le quitamos algo (el ínfimo) al conjunto.

Ejemplos

1. Si X es un espacio topológico con topología $\tau(X)$ entonces $(\tau(X), \subseteq)$ es un orden parcial en el que $\varnothing$ es el ínfimo. En este caso $\mathring{\tau}(X) = \tau(X) \setminus \{\varnothing\}$.
2. Si tomamos como P al conjunto ordenado de números reales determinado por el intervalo $(0, 1)$, tenemos un orden parcial sin ínfimo. En este caso $\mathring{P} = P$.

Tres enunciados de la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel que juegan un papel fundamental para nosotros son el axioma de elección, el teorema del buen orden de Zermelo y el lema de Zorn. Cabe mencionar que el axioma de elección, el teorema del buen orden de Zermelo y el lema de Zorn, son enunciados *independientes* (en el sentido de la lógica matemática) de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y que, aunque al parecer podríamos obtener tres teorías distintas tomando como base los axiomas de Zermelo-Fraenkel y cada uno de estos enunciados, en realidad estas tres teorías son la misma en un sentido lógico matemático. El lector interesado encontrará en **[8]** más sobre estos temas. También vale la pena leer la parte de fundamentos del libro de Nagata (**[4]**, pgs. 16-23). El famoso teorema de Tychonov es otro enunciado de este tipo (véase **[10]**, pgs. 101-102).

Axioma de Elección Sea $\mathcal{A}$ un conjunto no vacío de conjuntos no vacíos. Entonces existe una función $\varphi : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que para toda $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $\varphi(A) \in A$. Escrito de manera un poco más formal, $\forall \mathcal{A} \forall x \forall A$

$$[((\mathcal{A} \neq \varnothing) \wedge ((x \in \mathcal{A}) \Rightarrow (x \neq \varnothing))) \Rightarrow (\exists\, \varphi : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}\ ((A \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\varphi(A) \in A)))]$$

Teorema de Zermelo Sea A un conjunto. Entonces existe un subconjunto

$\leq$ del producto cartesiano $A \times A$ tal que $(A, \leq)$ es un buen orden.

Lema de Zorn Sea $(P, \leq)$ un orden parcial tal que $P \neq \varnothing$ y toda cadena en P tiene una cota superior. Entonces existe un elemento maximal $p \in P$. Ahora estamos listos para dar la definición de retícula:

Definición Una *retícula* es un orden parcial en el cual todo subconjunto de dos elementos tiene tanto supremo como ínfimo. En vez de escribir $\sqcap\{a, b\}$ y $\sqcup\{a, b\}$ por lo general escribiremos $a \sqcap b$ y $a \sqcup b$. Decimos que una retícula es *distributiva* si $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$ para todos $x, y, z \in B$.

Notación Sea X un espacio topológico. Denotamos con $C(X)$ al conjunto de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$ y con $C^*(X)$ al conjunto de funciones continuas y acotadas de X a $\mathbb{R}$.

Definición Sean X un espacio topológico y $Z(X) = \{A \in \mathbb{P}(X) \mid \exists\, f \in C(X)\,(A = f^{-1}[\{0\}])\}$. A un $A \in Z(X)$ por lo general lo llamamos *conjunto nulo de X* o *conjunto funcionalmente cerrado de X*.

Proposición Sean X un espacio topológico y $Z(X)$ el conjunto de nulos de X. Entonces, $(Z(X), \subseteq)$ es una retícula.

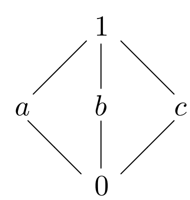
Demostración. Solo tenemos que ver que cualesquiera dos $A, B \in Z(X)$ tienen ínfimo y supremo. Para esto, tomemos $f, g \in C(X)$ tales que $f^{-1}[\{0\}] = A$ y $g^{-1}[\{0\}] = B$. Entonces el ínfimo de $\{A, B\}$ es $A \cap B$; es claro que es el ínfimo de estos dos conjuntos con respecto a la contención. Para ver que en efecto es también un conjunto nulo consideramos la función $f^2 + g^2$. Esta función pertenece a $C(X)$ y de hecho $(f^2 + g^2)^{-1}[\{0\}] = A \cap B$, precisamente porque $f^2(x) + g^2(x) = 0$ si y solo si $f(x) = g(x) = 0$. El supremo de A y B es $A \cup B$. Para ver esto simplemente observamos que $(f \cdot g)^{-1}[\{0\}] = A \cup B$, porque $f(x) \cdot g(x) = 0$ si y solo si o bien $f(x) = 0$ o bien $g(x) = 0$, además es un hecho bien conocido que $f \cdot g \in C(X)$. $\square$

Dados un orden parcial y un elemento en él, hay tres conjuntos que son de suma importancia:

Notación Sean $(P, \leq)$ un orden parcial y $p \in P$. Entonces

$$\hat{p} = \{x \in P \mid p \leq x\}$$
$$\check{p} = \{x \in P \mid x \leq p\}$$
$$\mathring{\check{p}} = \{x \in \mathring{P} \mid x \leq p\}$$

Usamos estos símbolos porque nos sugieren ir hacia arriba o hacia abajo respectivamente. Cuando pensamos en un orden parcial, a veces pensamos que sus elementos están acomodados de izquierda a derecha y a veces pensamos que están acomodados de arriba a abajo, es decir si $x \leq y$ a veces pensamos que x está a la izquierda de y y a veces que x está abajo de y. Esta última manera de ver las cosas es útil cuando se quiere describir la estructura de un orden parcial mediante un diagrama, como veremos en seguida. Tal vez pensar en conjuntos con la contención como ejemplos típicos de retículas sea algo natural. Estos ejemplos son muy particulares, puesto que estas retículas son distributivas y no hay porque esperar que todas las retículas tengan esta propiedad. El siguiente diagrama muestra un ejemplo de una retícula que no es distributiva:



Definición Un *álgebra booleana* es una retícula distributiva B que tiene tanto supremo, que por lo general denotamos con 1, como ínfimo (que denotamos por 0); satisface que para todo $b \in B$ existe un $c \in B$ tal que $b \sqcap c = 0$ y $b \sqcup c = 1$, y además $0 \neq 1$.

Se puede ver que para cada $b \in B$ tal c en la definición anterior es único. Lo llamamos el *complemento* de b en B y a veces lo denotamos b'. También podemos ahora verificar que la potencia de un conjunto es un álgebra booleana.

Proposición Sea X un espacio topológico no vacío. Entonces

$$\mathcal{B}(X) = \{A \in \tau(X) \mid (X \setminus A) \in \tau(X)\}$$

es un álgebra booleana.

Definición Sea X un espacio topológico. Decimos que $A \subseteq X$ es un *abierto regular* de X si $A = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$. Denotamos con $\mathcal{RO}(X)$ al conjunto de abiertos regulares de X.

Es muy importante para nosotros demostrar que si X es un espacio topológico no vacío, entonces $\mathcal{RO}(X)$ es un álgebra booleana. Para esto necesitamos algunos lemas básicos. La demostración del primero se encuentra en **[6]** (pg. 15, de hecho nuestro lema aparece en este libro como el teorema 1.1.5).

Lema 1 Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces $\mathrm{Int}(A) = X \setminus (\mathrm{Cl}(X \setminus A))$.

Lema 2 Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))))$ y $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))))$.

Proposición 2 Sea X un espacio topológico no vacío. Entonces $\mathcal{RO}(X)$ es un álgebra booleana.

Demostración. Aunque la relación de orden en $\mathcal{RO}(X)$ está dada por la contención usual de conjuntos, es importante notar que los complementos en esta álgebra booleana no son los complementos conjuntistas y que, aunque el ínfimo de dos abiertos regulares es la intersección de ellos, el supremo de dos abiertos regulares U y V no es su unión, sino $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U \cup V))$. Resulta que si U es un abierto regular, su complemento en $\mathcal{RO}(X)$ es $X \setminus \mathrm{Cl}(U)$, como veremos a continuación: Sea $U \in \mathcal{RO}(X)$ entonces $\mathrm{Cl}(X \setminus \mathrm{Cl}(U)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X \setminus U)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(X \setminus U)))$. Por lo anterior concluimos que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(X \setminus \mathrm{Cl}(U))) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(X \setminus U)))) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(X \setminus U)) = \mathrm{Int}(X \setminus U) = X \setminus (\mathrm{Cl}(X \setminus (X \setminus U))) = X \setminus \mathrm{Cl}(U)$. Entonces tenemos para cada $U \in \mathcal{RO}(U)$ un complemento ya que $U \cap (X \setminus \mathrm{Cl}(U)) = \varnothing$ y $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U \cup (X \setminus \mathrm{Cl}(U)))) = X$.

Ahora, si $U, V, W \in \mathcal{RO}(X)$, entonces $U \sqcap (V \sqcup W) = U \cap (\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V \cup W))) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U \cap (V \cup W))) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}((U \cap V) \cup (U \cap W))) = (U \sqcap V) \sqcup (U \sqcap W)$, con lo cual tenemos que $\mathcal{RO}(X)$ es en efecto un álgebra booleana. $\square$

2. Filtros, Ultrafiltros y el Teorema de Representación de Birkhoff-Stone

Definición Sea $(P, \leq)$ un orden parcial. Decimos que $F \subseteq P$ es un *P-orden-filtro* o un *orden-filtro en P* si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\varnothing \neq F$.
2. Si $x, y \in F$, entonces existe un $r \in F$ tal que $r \leq x$ y $r \leq y$.
3. Si $x \in F$, $y \in P$ y $x \leq y$, entonces $y \in F$.

Si F solamente satisface las primeras dos condiciones, llamamos a F una *P-orden-base de filtro* o una *orden-base de filtro* en P.

Definición Sean $(P, \leq)$ un orden parcial y F un orden-filtro en P. Decimos que F es un *P-orden-ultrafiltro* o un *orden-ultrafiltro en P* si F es maximal en el sentido de la contención de conjuntos entre los orden-filtros de P.

El siguiente resultado es bien conocido y es simplemente una aplicación directa del Lema de Zorn.

Proposición 1 Sean $(P, \leq)$ un orden parcial, $B \subseteq P$ una orden-base de filtro en P y F un P-orden-filtro. Entonces $\{p \in P \mid \exists\, q \in B\, (q \leq p)\}$ es un P-orden-filtro y existe un P-orden-ultrafiltro U tal que $F \subseteq U$.

Definición Sean $(P, \leq)$ un orden parcial y F un orden-filtro en P. Decimos que F es un *orden-filtro primo en P* o un *P-orden-filtro primo* si para todas $a, b \in P$ se tiene que $a \sqcup b \in F$ implica $a \in F$ o $b \in F$.

Definición Sean $(R, \leq)$ una retícula y $F \subseteq \mathring{R}$. Decimos que F es un *ret-filtro en R* si F es un orden-filtro en $\mathring{R}$.

Definición Sean $(B, \leq)$ un álgebra booleana y $F \subset B$. Decimos que F es un *boole-filtro en B* o un *B-boole-filtro* si F es un B-orden-filtro que además satisface $0 \notin F$.

Las nociones de boole-base y boole-ultrafiltro se definen de la manera esperada. Notemos que para un álgebra booleana la noción de ret-filtro y boole-filtro coinciden, no así la de ret-filtro y orden-filtro. Desde luego también definimos de la manera esperada las otras nociones asociadas a ret-filtros.

Un teorema elemental pero muy importante que utilizaremos es el siguiente:

Teorema 1 Sean B un álgebra booleana y F un boole-filtro en B. Entonces son equivalentes:

1. F es un B-boole-ultrafiltro.
2. Si $a \in B$ y para toda $b \in F$ tenemos que $a \sqcap b \neq 0$, entonces $a \in F$.
3. Para todos $a, b \in B$, si $a \sqcup b \in F$, entonces $a \in F$ o $b \in F$.
4. Para toda $a \in B$, tenemos que $a \in F$ o $a' \in F$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $G = \{a \sqcap b \mid b \in F\}$. Entonces G es una boole-base de filtro en B: Sean $a \sqcap b_1$, $a \sqcap b_2 \in G$, entonces como $b_1, b_2 \in F$ tenemos que $b_1 \sqcap b_2 \in F$, entonces $a \sqcap (b_1 \sqcap b_2) \in G$ y además $a \sqcap (b_1 \sqcap b_2) \leq a \sqcap b_1$ y $a \sqcap (b_1 \sqcap b_2) \leq a \sqcap b_2$. Como cada elemento de G es distinto de 0, G es una B-boole-base de filtro. Entonces el boole-filtro $H = \{b \in B \mid \exists c \in G\,(c \leq b)\}$ es tal que $F \subseteq H$ y $a \in H$. Como F es maximal entre los boole-filtros de B, necesariamente $F = H$ y por tanto $a \in F$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que $a \sqcup b \in F$. Entonces, por hipótesis, si $a \sqcap c \neq 0$ para toda $c \in F$ pues $a \in F$. En caso de que exista una $c \in F$ tal que $a \sqcap c = 0$ obtenemos, del hecho de que B es una retícula distributiva, $(a \sqcup b) \sqcap c = (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap c) = 0 \sqcup (b \sqcap c)$, por lo cual $b \sqcap c \in F$ y esto implica que $b \in F$. Entonces en cualquier caso se cumple $a \in F$ o $b \in F$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Como F es un boole-filtro, tenemos que $1 \in F$. Además, para cualquier $a \in B$, sabemos que $a \sqcup a' = 1$, es decir, $a \sqcup a' \in F$; entonces, por hipótesis, o bien $a \in F$ o bien $a' \in F$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que existe un B-boole-filtro H tal que $F \subset H$ y $a \in H \setminus F$. Entonces, por hipótesis $a' \in F$ pero esto implica que tanto a como a' pertenecen a H, en consecuencia $a \sqcap a' \in H$ por ser H un B-boole-filtro, pero $a \sqcap a' = 0$ y no puede ser que 0 pertenezca a un B-boole-filtro. De esta manera hemos mostrado que F es maximal entre los boole-filtros de B, es decir, que F es un B-boole-ultrafiltro. $\square$

Proposición 3 Sean X un conjunto no vacío y $x \in X$. Entonces $\{A \in \mathbb{P}(X) \mid x \in A\}$ es un boole-ultrafiltro en $(\mathbb{P}(X), \subseteq)$.

Notación Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección no vacía de conjuntos no vacíos y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea $\mathcal{F}_\alpha$ un boole-filtro en $(\mathbb{P}(X_\alpha), \subseteq)$. Definimos

$$\Pi_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{F}_\alpha := \{\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[F_i] \mid F_i \in \mathcal{F}_{\alpha_i},\ n \in \omega,\ 0 \leq i \leq n\}.$$

Proposición 4 Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección no vacía de conjuntos no vacíos y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea $\mathcal{F}_\alpha$ un boole-filtro en $(\mathbb{P}(X_\alpha), \subseteq)$. Entonces $\Pi_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{F}_\alpha$ es una boole-base de filtro en $(\mathbb{P}(\Pi_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha), \subseteq)$.

Demostración. Sean $U, V \in \Pi_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{F}_\alpha$, entonces $U = \Pi_{\alpha\in\Lambda}F_\alpha$ y $V = \Pi_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$, donde cada F_α y cada G_α es igual a X_α excepto para un número finito de índices en Λ. Pues entonces $U \cap V = \Pi_{\alpha\in\Lambda}F_\alpha \cap G_\alpha$ pertenece a $\Pi_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{F}_\alpha$, puesto que cada $\mathcal{F}_\alpha$ es un boole-filtro en $(\mathbb{P}(X), \subseteq)$; entonces $F_\alpha \cap G_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$. Además, $F_\alpha \cap G_\alpha = X_\alpha$ excepto quizás par un número finito de índices en Λ. Por lo tanto, $\Pi_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{F}_\alpha$ es una boole-base de filtro. $\square$

Ya que hemos hablado un poco de álgebras booleanas y boole-filtros estamos preparados para analizar el primer contrajemplo de la tesina.

Contraejemplo 1 Sean $\Lambda = \omega$ y $X_\alpha = \mathbb{R}$ para toda $\alpha \in \Lambda$. Entonces por la proposición 3, $\mathcal{U}_\alpha = \{A \in \mathbb{P}(\mathbb{R}) \mid 0 \in A\}$ es un boole-ultrafiltro en $(\mathbb{P}(X_\alpha), \subseteq)$. Sin embargo, el boole-filtro generado por $\Pi_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ no es un boole-ultrafiltro en $(\mathbb{P}(\Pi_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha), \subseteq)$ ya que está contenido propiamente en el boole-ultrafiltro $\mathcal{U} = \{A \in \mathbb{P}(\Pi_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha) \mid \bar{0} \in A\}$. Para verificar esto, basta observar que el producto $[-1, 1]^\Lambda \in \mathcal{U}$, pero no contiene a ningún elemento de $\Pi_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ por lo cual no está en el boole-filtro generado por $\Pi_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$.

Definición Sean $(R, \leq)$ una retícula y $A \subseteq R$. Decimos que $(A, \leq\restriction_A)$ es una *subretícula* de $(R, \leq)$ si $(A, \leq\restriction_A)$ es una retícula.

Definición Sean $(R, \leq)$ y $(P, \preceq)$ retículas y $f : R \to P$ una función. Decimos que f es un *morfismo de retículas* o un *homomorfismo de retículas* si para todas $a, b \in R$ se tiene que $f(a \sqcap b) = f(a) \sqcap f(b)$ y $f(a \sqcup b) = f(a) \sqcup f(b)$. Decimos que f es un *isomorfismo de retículas* si existe un morfismo de retículas $g : P \to R$ tal que $f \circ g = id_P$ y $g \circ f = id_R$. En tal caso decimos que R y P son retículas *isomorfas*.

Definición Sea $(R, \leq)$ una retícula. Decimos que $(R, \leq)$ es una retícula conjuntista si existe un conjunto X tal que $(R, \leq)$ es isomorfa como retícula a una subretícula de $(\mathbb{P}(X), \subseteq)$.

Teorema [Birkhoff-Stone]. Sea $(R, \leq)$ una retícula tal que $R \neq \varnothing$. Entonces $(R, \leq)$ es distributiva si y sólo si $(R, \leq)$ es una retícula conjuntista.

Demostración. Supongamos que $(R, \leq)$ es una retícula distributiva. Si $|R| = 1$, entonces $(R, \leq)$ es isomorfa a $(\mathbb{P}(\varnothing), \subseteq)$. Supongamos pues que $|R| > 1$. Podemos suponer también para fines de la demostración que R tiene ínfimo, puesto que de lo contrario podemos aumentarle a mano un elemento que declaramos menor que todos los otros y obtener una retícula con ínfimo y, de ser necesario, al final de la demostración R sería una subretícula de una retícula conjuntista y, por tanto, sería también una retícula conjuntista. Análogamente, podemos suponer que R tiene supremo. Es muy importante notar que dado $a \in \mathring{R}$ el conjunto $\hat{a} = \{p \in R \mid a \leq p\}$ es un ret-filtro en R.

Ahora, si F es un ret-filtro en R tal que $a \notin F$, entonces existe, por el lema de Zorn, un ret-filtro maximal M tal que $a \notin M$ y $F \subseteq M$. Tal ret-filtro maximal resulta ser un ret-filtro primo como podemos ver a continuación: Supongamos que $b \sqcup c \in M$, pero que $b \notin M$ y $c \notin M$. Entonces para toda $m \in M$ se tiene que $b \sqcap m \neq 0$ y que $c \sqcap m \neq 0$. Para convencernos de este hecho hay que ver que si existiera una $m \in M$ tal que, por ejemplo, $c \sqcap m = 0$ tendríamos que $(b \sqcup c) \sqcap m \in M$ pero, dado que R es distributiva, $(b \sqcup c) \sqcap m = (b \sqcap m) \sqcup (c \sqcap m) = (b \sqcap m) \sqcup 0 = b \sqcap m$, es decir,$(b \sqcap m) \in M$ y como $(b \sqcap m) \leq b$, tendríamos $b \in M$ contrario a lo que suponemos. Esto quiere decir que los conjuntos $F = \{p \in R \mid \exists k \in M\ (b \sqcap k \leq p)\}$ y $G = \{p \in R \mid \exists k \in M\ (c \sqcap k \leq p)\}$ son R-ret-filtros tales que $M \subseteq F \cap G$. Ahora, si $a \notin F$ o $a \notin G$, por hipótesis de maximalidad, tendríamos $F = M$ o $G = M$, pero ninguno de estos casos puede ocurrir ya que $b \in F$ y $c \in G$. Entonces concluimos que $a \in F$ y $a \in G$, de modo que existen $k_1, k_2 \in M$ tales que $b \sqcap k_1 \leq a$ y $c \sqcap k_2 \leq a$. Como M es un ret-filtro, existe $k_3 \in M$ tal que $k_3 \leq k_1 \sqcap k_2$. Pero entonces $(b \sqcup c) \sqcap k_3 \in M$, y nuevamente por ser R distributiva tenemos que $(b \sqcap k_3) \sqcup (c \sqcap k_3) \in M$ pero $b \sqcap k_3 \leq b \sqcap k_1$ y $c \sqcap k_3 \leq c \sqcap k_2$. Por lo tanto, $a \in M$ lo cual es una contradicción, que muestra que M tiene que ser un ret-filtro primo.

Una vez que hemos visto esto, podemos definir para $a \in R$, $f(a)$ como el conjunto de R-ret-filtros primos a los que a pertenece. Esta función es inyectiva, ya que si $a \neq b$, entonces no puede ser que $a \leq b$ y $b \leq a$, sin pérdida de generalidad $b \nleq a$ de modo que $\hat{b}$ es un R-ret-filtro tal que $a \notin \hat{b}$, que está contenido en un ret-filtro primo H tal que $a \notin H$ (como ya hemos visto). Por lo tanto $H \in f(b) \setminus f(a)$, por lo cual $f(b) \neq f(a)$. Es claro que $f(0) = \varnothing$ y que $f(1)$ es el conjunto de todos los ret-filtros primos de R. Ahora, si F es un ret-filtro primo tal que $a \in F$ y $b \in F$, entonces, por el hecho de ser F un ret-filtro, $a \sqcap b \in F$, lo cual muestra que $F \in f(a) \cap f(b) \Rightarrow F \in f(a \sqcap b)$. Recíprocamente, $F \in f(a \sqcap b) \Rightarrow a \sqcap b \in F$ de modo que $a, b \in F$ que por definición quiere decir que $F \in f(a) \cap f(b)$. Esto muestra que $f(a \sqcap b) = f(a) \cap f(b)$. Si $F \in f(a \sqcup b)$ es porque $a \sqcup b \in F$, pero como F es primo, $a \in F$ o $b \in F$, es decir, $F \in f(a)$ o $F \in f(b)$, así que $f(a \sqcup b) \subseteq f(a) \cup f(b)$. Recíprocamente, si $F \in f(a) \cup f(b)$, entonces $a \in F$ o $b \in F$ y, en cualquier caso, $a \sqcup b \in F$ y entonces $F \in f(a \sqcup b)$. Esto quiere decir que f es un isomorfismo de retículas, por lo cual $(R, \leq)$ es una retícula conjuntista.

La demostración de la otra dirección en el teorema es directa porque si X es un conjunto entonces una subretícula de $(\mathbb{P}(X), \subseteq)$ es distributiva porque ínfimos y supremos son intersecciones y uniones. $\square$

3. Espacios de Stone y el Teorema de Representación de Stone

Lo que sigue prepara el camino para los resultados relacionados con el axioma de Martin.

Definición Sea B un álgebra booleana. Llamamos *espacio de Stone de B* al conjunto de boole-ultrafiltros de B y lo denotamos $S(B)$.

Definición Sean B y C álgebras booleanas y $f : B \to C$ un morfismo de retículas. Decimos que f es un *homomorfismo booleano* o simplemente un *morfismo booleano* si para toda $b \in B$, $f(b') = f(b)'$.
Definimos de manera categórica, al igual que para retículas, la noción de isomorfismo booleano.

Teorema 2 Sean B un álgebra booleana, $a, b \in B$ y $\lambda : B \to \mathbb{P}(S(B))$

definida por

$$x \mapsto \{U \in S(B) \mid x \in U\}.$$

Entonces

1. $\lambda(0) = \varnothing$ y $\lambda(1) = S(B)$.
2. $\lambda(a \sqcup b) = \lambda(a) \cup \lambda(b)$.
3. $\lambda(a \sqcap b) = \lambda(a) \cap \lambda(b)$.
4. $\lambda(a') = S(B) \setminus \lambda(a)$.

Teorema de Representación de Stone. Sean B un álgebra booleana y $\lambda : B \to \mathbb{P}(S(B))$ definida como en el teorema 2. Entonces

1. $\lambda[B]$ es una base para una topología que hace a $S(B)$ un espacio Hausdorff compacto y cero-dimensional.
2. $\lambda[B]$ es, de hecho, el conjunto de abiertos-y-cerrados de $S(B)$.
3. λ es un isomorfismo booleano de B sobre el conjunto de abiertos-y-cerrados de $S(B)$.

Demostración. El hecho de que $\lambda[B]$ es una base para una topología se sigue del punto 3 del teorema 2. Veamos que $S(B)$ con esta topología es un espacio Hausdorff: Sean $F, G \in S(B)$ dos boole-ultrafiltros distintos, entonces, sin pérdida de generalidad, existe un $b \in F \setminus G$; esto significa que $F \in \lambda(b)$. Como G es un boole-ultrafiltro y $b \notin G$, por el teorema 1, sabemos que $b' \in G$, lo cual significa que $G \in \lambda(b')$. Además, por el punto 4 del teorema 2, $\lambda(b') = S(B) \setminus \lambda(b)$, así que F y G pertenecen a abiertos básicos ajenos, es decir, $S(B)$ con esta topología es Hausdorff.

El punto 4 del teorema 2 también implica que los elementos de la base son cerrados, por lo cual $S(B)$ es cero-dimensional. Veamos ahora que $S(B)$ es compacto. Sean $\mathcal{F}$ un ret-filtro cerrado en $S(B)$ (un ret-filtro en la retícula de cerrados de $S(B)$) y $\mathcal{G} = \{a \in B \mid \exists\, F \in \mathcal{F}\ (F \subseteq \lambda(a))\}$. Como $\lambda[B]$ es una base cerrada para $S(B)$ (una base para los cerrados de $S(B)$), se sigue que $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap\{\lambda(a) \mid a \in \mathcal{G}\}$. Ahora, si $a_1, a_2 \in \mathcal{G}$ existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $F_1 \subseteq \lambda(a_1)$ y $F_2 \subseteq \lambda(a_2)$, entonces $F_1 \cap F_2 \subseteq \lambda(a_1) \cap \lambda(a_2) = \lambda(a_1 \sqcap a_2)$ de modo que, por ser $\mathcal{F}$ un ret-filtro $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, pero entonces $a_1 \sqcap a_2 \in \mathcal{G}$. Esto implica que $\mathcal{G}$ está contenido en un boole-ultrafiltro U de B, lo cual a su vez dice que $U \in \lambda(a)$ para toda $a \in \mathcal{G}$, de modo que $U \in \bigcap\{\lambda(a) \mid a \in \mathcal{G}\} = \bigcap \mathcal{F}$. Por lo cual $S(B)$ es compacto.

Como ya hemos visto, $\lambda[B]$ está contenido en el conjunto de abiertos-y-cerrados de $S(B)$. Recíprocamente, si C es un abierto-y-cerrado de $S(B)$, entonces por ser un subconjunto cerrado de un compacto, es compacto. Además como los elementos de $\lambda[B]$ son abiertos básicos y C es también abierto, tenemos que C es un unión de abiertos básicos, pero como es compacto, es unión finita de abiertos básicos de modo que existen $b_1, ..., b_n$ tales que $C = \lambda(b_1) \cup ... \cup \lambda(b_n) = \lambda(b_1 \sqcup ... \sqcup b_n)$. Entonces $\lambda[B]$ es el conjunto de abiertos-y-cerrados de $S(B)$. Ahora como $\lambda[B]$ es el conjunto de abiertos-y-cerrados de $S(B)$, el teorema anterior nos dice que λ es un isomorfismo booleano entre estas dos álgebras booleanas. $\square$

4. El Axioma de Martin

Definición Sean $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $x, y \in P$. Decimos que x y y son *compatibles* si existe algún $z \in \mathring{P}$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$. En otro caso decimos que x y y son *incompatibles*.

Notación Usamos la fórmula $x \perp y$ para indicar que x y y son incompatibles.

Ejemplo Si $P = \mathbb{P}(\mathbb{R})$, entonces $(P, \subseteq)$ es un orden parcial. En este caso el ínfimo del orden parcial es el conjunto vacío. Los intervalos $[0,1]$ y $[2,3]$ son incompatibles, y los intervalos $[0,1]$ y $[1,2]$ son compatibles.

Definición Sean $(P, \leq)$ un orden parcial y $E \subseteq \mathring{P}$. Decimos que E es una *anticadena de* P si para cualesquiera dos elementos distintos $x, y \in E$ tenemos que $x \perp y$.

Definición Sea $(P, \leq)$ un orden parcial. Decimos que P *satisface la condición de cadena contable* si toda anticadena de P es contable.

Notación Como abreviatura del enunciado "P satisface la condición de cadena contable" usamos el enunciado "P es ccc".

Proposición 5

1. Sea X un conjunto. Entonces $\mathbb{P}(X)$ es ccc si y sólo si X es contable.
2. Para cada espacio topológico Hausdorff X, tanto $C(X)$ como $C^*(X)$ están parcialmente ordenados por la relación $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in X$. Entonces, con esta relación de orden, un subconjunto $E \subseteq C^*(X)$ (respectivamente $E \subseteq C(X)$) es una anticadena si y sólo si E es un conjunto de un solo elemento. En particular, tanto $C^*(X)$, como $C(X)$ son ccc.
3. Si $(L, \leq)$ es un orden lineal, entonces $E \subseteq \mathring{L}$ es una anticadena si y sólo si E es un conjunto de un solo elemento. En particular todo orden lineal es ccc.
4. La topología del orden en ω_1 no es ccc.

Demostración. Supongamos que X es contable. Sea L una anticadena en $\mathbb{P}(X)$, si fuera de cardinalidad mayor que $\aleph_0$, por el axioma de elección tendríamos una función de elección de L a X. Por el hecho de ser una anticadena, esta función sería inyectiva de modo que X sería no numerable y esto no puede ser. Por tanto, $\mathbb{P}(X)$ es ccc. Recíprocamente, si $\mathbb{P}(X)$ es ccc, entonces la anticadena formada por los conjuntos de un solo elemento de X sería contable, pero obviamente esta anticadena es biyectable con X, por lo cual X es contable.

Para ver que se cumple el punto 2, basta ver que si $f, g \in C(X)$ entonces $f \sqcap g \in C(X)$. Para esto tomamos un abierto subbásico de $\mathbb{R}$ de la forma (a, ∞). Si $f(x) > a$ y $g(x) > a$, entonces $(f \sqcap g)(x) > a$, es decir, si $x \in f^{-1}[(a, \infty)] \cap g^{-1}[(a, \infty)]$, entonces $x \in (f \sqcap g)^{-1}[(a, \infty)]$, lo cual significa que $f^{-1}[(a, \infty)] \cap g^{-1}[(a, \infty)] \subseteq (f \sqcap g)^{-1}[(a, \infty)]$. Recíprocamente, si $x \in (f \sqcap g)^{-1})[(a, \infty)]$, entonces tanto $f(x)$ como $g(x)$ son mayores que a, de modo que $x \in f^{-1}[(a, \infty)] \cap g^{-1}[(a, \infty)]$. Ahora, tomemos un abierto subbásico de la forma $(-\infty, b)$. Si $x \in (f \sqcap g)^{-1})[(-\infty, b)]$, entonces o bien $f(x) \leq b$ o bien $g(x) \leq b$ de modo que $x \in f^{-1}[(-\infty, b)] \cup g^{-1}[(-\infty, b)]$, y, recíprocamente, si $x \in f^{-1}[(-\infty, b)] \cup g^{-1}[(-\infty, b)]$, entonces el ínfimo $(f \sqcap g)(x) \in (-\infty, b)$. Esto prueba que $(f \sqcap g)^{-1}[(-\infty, b)] = f^{-1}[(-\infty, b)] \cup g^{-1}[(-\infty, b)]$. Por tanto, $f \sqcap g$ es una función continua. Esto implica que si un subconjunto de $C(X)$ tiene más de un elemento, entonces no es una anticadena porque cualesquiera dos de sus elementos son compatibles.

En un conjunto linealmente ordenado cualesquiera dos elementos son compatibles por lo cual tenemos el punto 3. Y, finalmente, como los conjuntos singulares de sucesores en ω_1 son abiertos y son una cantidad no numerable, la topología del orden en ω_1 no es ccc. $\square$

Proposición 6 Si $(P, \leq)$ es un orden parcial y $E \subseteq P$ una anticadena de P, entonces E está contenida en una anticadena maximal.

Demostración. Sea E una anticadena en P. Sea $\mathcal{C}(E)$ el conjunto de anticadenas de P que contienen a E. Éste es un conjunto parcialmente ordenado con la contención y es no vacío, pues $E \subseteq E$. Si tomamos una cadena $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}(E)$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es el supremo de $\mathcal{A}$, basta ver que $\bigcup \mathcal{A}$ es una anticadena de P que contiene a E. Como cualquier elemento de $\mathcal{A}$ contiene a E, $E \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Sean $p, q \in \bigcup \mathcal{A}$, entonces existen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tales que $p \in A_1$ y $q \in A_2$, pero como $\mathcal{A}$ es una cadena, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $A_1 \subseteq A_2$ de modo que $p, q \in A_2$, y como A_2 es una anticadena, tenemos que $p \perp q$. Esto muestra que $\bigcup \mathcal{A}$ es una anticadena en P, así que por el lema de Zorn existe una anticadena maximal que contiene a E. $\square$

Hay tres nociones de densidad que son de suma importancia para nosotros.

Definición Sean X un espacio topológico y $D \subseteq X$. Decimos que D es *top-denso* en X si $\mathrm{Cl}(D) = X$.

Definición Sean $(P, \leq)$ un orden parcial y $D \subseteq P$. Decimos que D es *orden-denso* en P si para cada $x \in P$ existe un $d \in D$ tal que $d \leq x$.

Definición Sean $(B, \leq)$ un álgebra booleana y $D \subset B$. Decimos que D es *boole-denso* en B si $0 \notin D$ y para cada $x \in \mathring{B}$ existe un $d \in D$ tal que $d \leq x$.

Notación Sean $(P, \leq)$ un orden parcial, $p, q \in \mathring{P}$. Denotamos con $D_{\mathring{P}}(p, q)$ al conjunto

$$\{r \in \mathring{P} \mid (r \perp p) \vee (r \perp q) \vee (r \in \check{\mathring{p}} \cap \check{\mathring{q}})\}.$$

Proposición 7 Sea $(P, \leq)$ un orden parcial. Entonces para todas $p, q \in$

$\mathring{P}$, $D_{\mathring{P}}(p,q)$ es orden-denso en $\mathring{P}$.

Demostración. Sea $x \in \mathring{P}$. Notemos primero que si $x \perp p$, entonces $x \in D_{\mathring{P}}(p,q)$ y por supuesto $x \leq x$, por lo cual para x hay un punto del conjunto $D_{\mathring{P}}(p,q)$ menor igual a x. Supongamos, entonces, que x y p son compatibles, es decir, que existe un $r \in \mathring{P}$ tal que $r \leq x$ y $r \leq p$. Si $r \perp q$, entonces $r \in D_{\mathring{P}}(p,q)$ y $r \leq x$. Si r y q son compatibles, entonces existe $k \in \mathring{P}$ tal que $k \leq r$ y $k \leq q$, pero como también $r \leq p$ tenemos que $k \leq p$. Entonces $k \in \check{\mathring{p}} \cap \check{\mathring{q}}$ y $k \leq r \leq x$. Por lo tanto, $k \in D_{\mathring{P}}(p,q)$ y $k \leq x$. Esto muestra que $D_{\mathring{P}}(p,q)$ es denso en $\mathring{P}$. $\square$

Axioma de Martin Sea κ un cardinal infinito. El κ-ésimo enunciado de Martin es:

MA(κ): Sean X un espacio topológico no vacío, compacto, Hausdorff de topología ccc, y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ un conjunto de abiertos densos de X. Entonces $\bigcap\{U_\alpha\}_{\alpha\in\kappa} \neq \varnothing$.
El axioma de Martin es:
Para cada cardinal infinito $\kappa < 2^{\aleph_0}$ tenemos MA(κ).

El enunciado de Martin MA($\aleph_0$) es una consecuencia del siguiente teorema (véase **[7]**, pg. 296, para una demostración del mismo).

Teorema [Baire]. Si X es un espacio topológico, compacto y Hausdorff o métrico completo, entonces para cualquier familia $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de abiertos densos de X tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ es denso en X.

Por otro lado, el siguiente ejemplo muestra que para $\kappa \geq 2^{\aleph_0}$ el $\kappa-$ésimo enunciado de Martin es falso.

Ejemplo El intervalo $[0,1]$ es compacto y Hausdorff. Los conjuntos que son complementos de un punto de $[0,1]$ son abiertos densos en $[0,1]$ y son tantos como puntos hay en $[0,1]$, es decir, $2^{\aleph_0}$. Sin embargo su intersección es vacía.

Teorema 3 Sea κ un cardinal infinito. Son equivalentes:

1. MA(κ).
2. Si $(B,\leq)$ es un álgebra booleana ccc y $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ es una familia de subconjuntos boole-densos de B, entonces existe un boole-filtro F en

B tal que $F \cap D_\alpha \neq \varnothing$ para cada $\alpha \in \kappa$.

3. Si $(P, \leq)$ es un orden parcial ccc, $\varnothing \neq |P| \leq \kappa$ y $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ es una familia de subconjuntos orden-densos de P, entonces existe un orden-filtro F en P tal que $F \cap D_\alpha \neq \varnothing$ para toda $\alpha \in \kappa$.
4. Si $(P, \leq)$ es un orden parcial ccc, $P \neq \varnothing$, y $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ es una familia de subconjuntos orden-densos de P, entonces existe un orden-filtro F en P tal que $F \cap D_\alpha \neq \varnothing$ para toda $\alpha \in \kappa$.

Demostración (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $S(B)$ el espacio de Stone de B y $\lambda : B \to \mathcal{B}(X)$ el isomorfismo booleano canónico del teorema 2. Primero veremos que la topología del espacio compacto cero-dimensional $S(B)$ es ccc. Sea $\mathcal{C} = \{O_\iota\}_{\iota\in J}$ una anticadena de abiertos no vacíos en $S(B)$; como cada abierto de $\mathcal{C}$ es no vacío, cada abierto de $\mathcal{C}$ contiene un abierto básico no vacío de la forma $\lambda(b_\iota) = \{U \in S(B) \mid b_\iota \in U\}$. Entonces las correspondientes b_ι son una anticadena en B: Si b_ι y b_ζ fueran compatibles, entonces existiría un $c \in \mathring{B}$ tal que $c \leq b_\iota$ y $c \leq b_\zeta$. Entonces como el boole-filtro $\hat{c}$ estaría contenido en un B-boole-ultrafiltro V, al cual pertenecerían tanto b_ι como b_ζ, tendríamos que $V \in \lambda(b_\iota) \cap \lambda(b_\zeta)$, lo cual no puede ser porque $\lambda(b_\iota) \cap \lambda(b_\zeta) = \varnothing$ en vista de que $\lambda(b_\iota)$ y $\lambda(b_\zeta)$ están contenidos en elementos distintos de una anticadena en la que la relación de orden está dada por la contención de conjuntos (incompatibles en conjuntos quiere decir ajenos). De esta manera vemos que, en efecto, la topología de $S(B)$ es ccc. Ahora, si tenemos un boole-denso D_α de B, podemos tomar el conjunto de abiertos $\lambda[D_\alpha]$, cuya unión es un abierto top-denso en $S(B)$. Veamos esta afirmación: Como $\lambda[D_\alpha] = \{\lambda(d) \mid d \in D_\alpha\}$ y cada $\lambda(d)$ es un abierto básico de $S(B)$, entonces $\bigcup \lambda[D_\alpha]$ es abierto en $S(B)$ por ser unión de abiertos básicos. Para ver que $\bigcup \lambda[D_\alpha]$ es top-denso en $S(B)$, tomamos un abierto básico cualquiera $\lambda(b)$. Entonces, como D_α es boole-denso en B, existe un $c \in D_\alpha$ tal que $c \leq b$. Esto implica que $\lambda(c) \subseteq \lambda(b)$ y, por lo tanto, $\bigcup \lambda[D_\alpha]$ es top-denso en $S(B)$. Por el axioma de Martin, concluimos que existe un boole-ultrafiltro $U \in \bigcap_{\alpha\in\kappa} \bigcup \lambda[D_\alpha]$, pero entonces U intersecta a todos los D_α's porque para cada $\alpha \in \kappa$ existe un $d_\alpha \in D_\alpha$ tal que $U \in \lambda(d_\alpha)$, lo cual significa, por definición de λ, que $d_\alpha \in U$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sean $(P, \leq)$ un orden parcial ccc de cardinalidad menor o igual a κ y $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ una familia de conjuntos orden-densos de $\mathring{P}$. Primero notemos que si $(P, \leq)$ tiene ínfimo entonces P mismo es el orden-filtro buscado. Podemos entonces suponer que $(P, \leq)$ no tiene ínfimo. Observemos que si

$x, y \in P$ y $z \in \check{p} \cap \check{q}$ entonces $\check{z} \subseteq \check{p} \cap \check{q}$. Esto implica que $\{\check{x} \mid x \in P\}$ es una base para una topología en P. Sea $\mathcal{RO}(P)$ el conjunto de abiertos regulares de esta topología para P. Como ya vimos, $\mathcal{RO}(P)$ es un álgebra booleana. Si $\mathcal{C}$ es una anticadena en $\mathcal{RO}(P)$, entonces para cada $U \in \mathcal{RO}(P)$ existe un $p_U \in P$ tal que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{p}_U)) \subseteq U$. Si $U, V \in \mathcal{C}$ y $U \neq V$ entonces $U \cap V = \varnothing$, así que la función $U \mapsto p_U$ es inyectiva y $\check{p}_U \cap \check{p}_V \subseteq U \cap V = \varnothing$, es decir, $p_U \perp p_V$, de modo que $\{p_U \mid U \in \mathcal{C}\}$ es una anticadena en P. Como P es ccc, concluimos que $\mathcal{RO}(P)$ es ccc. Recordemos que en este caso estamos suponiendo que $\mathring{P} = P$.

Sea $\mathcal{D} = \{D_\alpha\}_{\alpha \in \kappa} \cup \{D_{\mathring{P}}(p, q) \mid (p, q) \in P \times P\}$. Por la proposición 7, $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos orden-densos de P. Como $|P| \leq \kappa$, entonces $|\mathcal{D}| \leq \kappa$. Sean $D \in \mathcal{D}$ fijo y $E(D) = \{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{p})) \mid p \in D\}$. Para mostrar que $E(D)$ es boole-denso en $\mathcal{RO}(P)$, tomamos un $U \in \mathcal{RO}(P) \setminus \{\varnothing\}$ y notamos que existe un $q \in P$ tal que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{q})) \subseteq U$, entonces como D es denso, existe un $p \in D$ tal que $p \leq q$. Entonces $\check{p} \subseteq \check{q}$, lo cual implica que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{p})) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{q})) \subseteq U$. Por lo tanto, $E(D)$ es boole-denso en $\mathcal{RO}(P)$.

Por hipótesis existe un boole-filtro F en $\mathcal{RO}(P)$ tal que $F \cap E(D_\alpha) \neq \varnothing$ y $F \cap E(D_{\mathring{P}}(p, q)) \neq \varnothing$ para toda $\alpha \in \kappa$ y todas $p, q \in P$. Sea $G = \{p \in P \mid \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{p})) \in F\}$. Lo primero que observamos es que G intersecta a todos los orden-densos D_α y $D_{\mathring{P}}(p, q)$: En efecto, si F intersecta a $E(D_\alpha)$ es porque existe un $p \in D_\alpha$ tal que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{p})) \in F$, esto quiere decir que dicho p pertenece también a G, por la definición misma de G. Análogamente G intersecta a todo $D_{\mathring{P}}(p, q)$.

Veamos que G es un orden-filtro en P: G es distinto del vacío porque F es un boole-filtro (y por tanto $F \neq \varnothing$) y además F intersecta a cualquier boole-denso $E(D_\alpha)$ por lo tanto hay al menos un $p \in P$ tal que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{p})) \in E(D_\alpha) \cap F$, pero esto significa que $p \in G$, por lo tanto $G \neq \varnothing$. Ahora supongamos que p y q pertenecen a G, entonces $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{p})) \in F$ y $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{q})) \in F$, entonces como F es un boole-filtro $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{p})) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{q})) \in F$ pero $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{p})) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{q})) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{p} \cap \check{q}))$. Sea $r \in D_{\mathring{P}}(p, q) \cap G$. No puede ser que $r \perp p$ porque entonces tendríamos $\check{r} \cap \check{p} = \varnothing$ y por tanto $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{r})) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{p})) = \varnothing \in F$ lo cual contradiría que F es un boole-filtro. Análogamente, no puede ser que $r \perp q$; entonces $r \in \check{p} \cap \check{q}$, es decir, hemos encontrado un $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, por lo cual G ya es por lo menos una orden-base de filtro. Ahora, si $p \in G$, y $q \in P$ es tal que $p \leq q$ entonces

$\check{p} \subseteq \check{q}$, de modo que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{p})) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{q}))$ por lo cual $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\check{q})) \in F$. De esta manera tenemos que $q \in G$. Todo esto implica que G es un P-orden-filtro.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sean $(P, \leq)$ un orden parcial ccc y $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ una familia de orden-densos de P. Nuevamente si $(P, \leq)$ tiene ínfimo entonces P es el orden-filtro buscado. Supongamos entonces que $(P, \leq)$ no tiene ínfimo, es decir, que $P = \mathring{P}$. Por el axioma de elección, sabemos que existen funciones $f_\alpha : P \to D_\alpha$ tales que $f_\alpha(p) \in \check{p}$. Utilizando también el axioma de elección vemos que es posible construir una función $f : P \times P \to P$ tal que $f(p, q) \in \check{p} \cap \check{q}$ cuando $\check{p} \cap \check{q} \neq \varnothing$. Simplemente hacemos que f tome un valor constante en (p, q) en caso de que $\check{p} \cap \check{q} = \varnothing$. Tomemos un elemento $q \in P$ fijo y definamos por recursión $S_0 = \{q\}$ y $S_{n+1} = S_n \cup f[S_n \times S_n] \cup (\bigcup\{f_\alpha[S_n]\}_{\alpha\in\kappa})$. Sea $S = \bigcup\{S_n \mid n \in \omega\}$, entonces $|S| \leq \kappa$, $f[S \times S] \subseteq S$ y $f_\alpha[S] \subseteq S$ para toda $\alpha \in \kappa$. Ahora, S es un conjunto parcialmente ordenado y si $\mathcal{C}$ es una anticadena en S, entonces $\mathcal{C}$ es una anticadena en P ya que $f[S\times S] \subseteq S$. Entonces S es ccc. Como $f_\alpha[S] \subseteq S$ para toda $\alpha \in \kappa$, tenemos que $S \cap D_\alpha$ es orden-denso en S. Entonces, por hipótesis, existe un orden-filtro F en S tal que $F \cap (S \cap D_\alpha) \neq \varnothing$ para toda $\alpha \in \kappa$. Entonces $G = \{p \in P \mid \exists\, r \in F\ (r \leq p)\}$ es un orden-filtro en P que intersecta a todos los orden-densos D_α, como se quería demostrar.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sea X un espacio topológico compacto Hausdorff tal que su topología $\tau(X)$ vista como orden parcial con la contención es ccc. Supongamos que X es infinito, porque de ser X finito el resultado es inmediato. Sean $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ un conjunto de abiertos top-densos y $E(D_\alpha) = \{U \in \mathring{\tau}(X) \mid \mathrm{Cl}(U) \subseteq D_\alpha\}$. Entonces $E(D_\alpha)$ es ret-denso en $\tau(X)$. Esto quire decir que existe un ret-filtro F en $\tau(X)$ tal que $F \cap E(D_\alpha) \neq \varnothing$ para toda $\alpha \in \kappa$. Así, tenemos que F es un ret-filtro abierto en X. Como X es un espacio topológico compacto existe un $x \in \bigcap\{\mathrm{Cl}(U) \mid U \in F\}$; entonces para cada $\alpha \in \kappa$ hay un $U \in F \cap E(D_\alpha)$, como $U \in F$ pues entonces $x \in \mathrm{Cl}(U)$ y como $U \in E(D_\alpha)$ pues $\mathrm{Cl}(U) \subseteq D_\alpha$, de modo que $x \in D_\alpha$ para toda $\alpha \in \kappa$, es decir $\bigcap_{\alpha\in\kappa} D_\alpha \neq \varnothing$. $\square$

Una consecuencia topológica del axioma de Martin es la siguiente

Proposición 8 Supongamos que κ es un cardinal regular mayor que $\aleph_0$ y que el κ-ésimo enunciado de Martin es válido. Entonces si X es un espacio compacto Hausdorff cuya topología es ccc y $\mathcal{A}$ es una familia de abiertos de X de cardinalidad κ, existe una subfamilia $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{O}| = \kappa$ y $\bigcap \mathcal{O} \neq \varnothing$.

Demostración. Sean $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \kappa}$ y para cada $\alpha \in \kappa$ sea $V_\alpha = \bigcup\{U_\gamma \mid \alpha < \gamma < \kappa\}$. Entonces si $\alpha < \beta < \kappa$ tenemos que $V_\beta \subseteq V_\alpha$ y, por lo tanto, $\mathrm{Cl}(V_\beta) \subseteq \mathrm{Cl}(V_\alpha)$. Ahora, tiene que suceder que a partir de algún punto $\delta \in \kappa$ $\mathrm{Cl}(V_\delta) = \mathrm{Cl}(V_\sigma)$ si $\delta \leq \sigma < \kappa$, porque de lo contrario podríamos encontrar un subconjunto cofinal de κ en el que para cualesquiera dos índices α, β tendríamos $\mathrm{Cl}(V_\alpha) \neq \mathrm{Cl}(V_\beta)$. Pero entonces podríamos construir una colección de abiertos ajenos tomando $V_{\alpha_i} \setminus V_{\alpha_{i+1}}$ que sería de cardinalidad κ, lo cual es imposible en vista de la suposición de que la topología de X es ccc. Entonces debe de existir un $\delta \in \kappa$ tal que $\mathrm{Cl}(V_\delta) = \mathrm{Cl}(V_\gamma)$ para todo $\delta < \gamma < \kappa$. Sea $Y = \mathrm{Cl}(V_\delta)$, entonces como Y es un subconjunto cerrado de un espacio compacto y Hausdorff, pues Y es compacto y Hausdorff. Además, una colección de abiertos ajenos no vacíos en Y da origen a una colección de abiertos ajenos no vacíos en X porque Y es la cerradura de un conjunto abierto. Lo cual dice que la topología de Y es ccc. Entonces, utilizando el $\kappa-$ésimo enunciado de Martin, concluimos que la familia V_γ con $\gamma > \delta$ se intersecta ya que cada V_γ es denso en Y, es decir, existe un $p \in \bigcap_{\gamma > \delta} V_\gamma$. Pero entonces podemos construir un conjunto cofinal de abiertos de $\mathcal{A}$ a los cuales pertenezca p, como se buscaba. □

Contraejemplo 2 El objetivo es construir un espacio topológico Hausdorff numerablemente compacto cuyos subconjuntos de un solo punto sean conjuntos G_δ, pero que no sea primero numerable. El conjunto subyacente de este espacio es $W = \omega_1 + 1$. El espacio W con la topología del orden no es el contraejemplo que buscamos. Lo que haremos será dar un sistema de vecindades alrededor de cada punto de W, es decir, para cada $x \in W$ daremos un conjunto $N(x) \subseteq \mathbb{P}(W)$ que cumpla las siguientes tres propiedades:

1. Para toda $x \in W$ $N(x) \neq \varnothing$ y para cada $U \in N(x)$ $x \in U$.
2. Si $x \in V \in N(y)$, entonces existe un $U \in N(x)$ tal que $U \subseteq V$.
3. Para cualesquiera $U_1, U_2 \in N(x)$ existe un $U \in N(x)$ tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Para $x \in \omega_1$ tomamos como $N(x)$ el conjunto de vecindades de x de la topología del orden de ω_1. Ahora tenemos que definir $N(\omega_1)$. Para esto necesitamos primero definir los siguientes conjuntos: Recordemos que hay básicamente tres tipos de ordinales, a saber, el vacío, los sucesores que son de la forma $\alpha \cup \{\alpha\}$ para cualquier ordinal α, y los ordinales límite, que son aquellos que no son ni el vacío, ni sucesores. Un ejemplo de tales ordinales es ω. Para hacer la notación más clara en este contraejemplo denotamos con LIM al conjunto de ordinales límite de ω_1.

Ahora, para cada $n \in \omega$ sea $\mathcal{A}_n = \{(\beta + n, \beta + \omega) \mid \beta \in \text{LIM}\}$ y para $\gamma \in \omega_1$ denotemos con $\vec{\gamma}$ al intervalo $(\gamma, \omega_1]$. Entonces un elemento típico de $N(\omega_1)$ es un conjunto de la forma $\vec{\gamma} \cap (A_n \cup \{\omega_1\})$; es decir, $N(\omega_1) = \{\vec{\gamma} \cap (A_n \cup \{\omega_1\}) \mid n \in \omega,\ \gamma \in \omega_1\}$. Este nuevo espacio topológico sigue siendo Hausdorff y todos los puntos son G_δ porque, con las nuevas vecindades, $\{\omega_1\}$ ya es intersección numerable de abiertos. También es numerablemente compacto, pues si tomamos un subconjunto infinito numerable de W, este conjunto está acotado por arriba y, por lo tanto, contenido en un intervalo de la forma $[0, \alpha]$; como $[0, \alpha]$ tiene la misma topología como subespacio de ω_1 o de W es compacto por lo que el conjunto infinito original tiene un punto de acumulación allí y por tanto en W, es decir, W es numerablemente compacto, Hausdorff y todos los subconjuntos de W de un elemento son G_δ. Sin embargo, W no es primero numerable. Supongamos que hay una base local numerable alrededor de ω_1 en W. Por cada elemento de esta supuesta base podríamos tomar un elemento de $N(\omega_1)$ contenido en el. Por ser sólo una cantidad numerable los γ's están acotados por digamos α. Entonces si tomamos una vecindad de ω_1 de la forma $\vec{\delta} \cap (A_0 \cup \{\omega_1\})$ tal que δ sea un ordinal límite mayor que $\alpha + \omega$, obtenemos un abierto alrededor de ω_1 que no está contenido en ninguno de la colección numerable con la que empezamos, que supuestamente era una base local. Esta contradicción muestra que ninguna colección numerable de abiertos puede ser una base local alrededor de ω_1. Por lo tanto, el espacio no es primero numerable.

Bibliografía

[**1**] Marshall Harvey Stone, *Applications of the theory of Boolean Rings to General Topology*, Transactions of the American Mathematical Society, volumen 41, 1937, págs. 375-481.

[**2**] Marshall Harvey Stone, *The Theory of Representations for Boolean Algebras*, Transactions of the American Mathematical Society, volumen 40, 1936, págs. 37-111.

[**3**] Jack R. Porter, R. Grant Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer-Verlag, 1987.

[**4**] Jun-Iti Nagata, *Modern General Topology*, North-Holland, 1985.

[**5**] Frigyes Riesz, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma 1909, págs. 18-24.

[**6**] Ryszard Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1988.

[**7**] Jim Munkres, *Topology*, segunda edición, Prentice-Hall, 2000.

[**8**] Thomas Jech, *Set Theory*, Springer-Verlag, 2002.

[**9**] Carlos Prieto, *Topología Básica*, Fondo de Cultura Económica, 2003.

[**10**] Graciela Salicrup, *Introducción a la Topología*, Aportaciones Matemáticas, 1997.