00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

Espacios de funciones continuas, Σ-productos y la topología caja

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA:
M. C. JOSÉ JUAN ANGOA AMADOR

DIRECTOR DE TESIS:
DOCTOR ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA

MÉXICO, D.F. AGOSTO, 2005

A la madre de Rodolfo
y a Rodolfo,

a la Maruca y a su hijo,
a ellos.

Agradecimientos

A la Universidad Autónoma de Puebla, a la UNAM y en general a la educación pública, sin la cual no hubiera sido posible este trabajo ni todo lo anterior.

A mis compañeros de trabajo de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP, que con su esfuerzo apoyaron mi ausencia y mi regreso.

A Angel Tamariz Mascarúa, que nunca perdió la esperanza de la terminación de este trabajo, lo que permitió la felíz culminación del mismo.

A los Drs. Fidel Casarrubias, Agustín Conteras, Adalberto García-Maynes, Michael Hrusak, Oleg Okunev, Angel Tamariz, Richard Wilson, que superaron el tedio de leer este trabajo y propusieron correcciones que lo mejoraron.

Contenido

Introducción

Todos los espacios considerados en este trabajo son Tychonoff, así que espacio topológico significará espacio topológico Tychonoff.

En el producto cartesiano de familias arbitrarias de espacios topológicos, se define la topología Tychonoff de la siguiente manera: Sea $\{Y_x : x \in A\}$ una familia de espacios topológicos. Los abiertos básicos de la topología Tychonoff de $Y = \prod_{x \in A} Y_x$ son de la forma

$$(*) \qquad \prod_{x \in A} O_x$$

donde O_x es abierto en Y_x para todo $x \in A$, y O_x es igual a Y_x, para todo $x \in A$ salvo para un número finito.

Una generalización de los abiertos básicos que acabamos de definir, nos lleva a los abiertos caja y a la topología caja. Los abiertos caja son conjuntos del tipo

$$(**) \qquad \prod_{x \in A} O_x$$

en donde O_x es un subconjunto abierto de Y_x para todo $x \in A$. Notar que todos los O_x pueden ser subconjuntos propios de los Y_x. En el caso en que A es infinito, un abierto del tipo (**) no necesariamente es abierto en el producto Tychonoff. La topología caja es generada por la colección de los abiertos caja los cuales son los abiertos del tipo (**), como elementos básicos. Es importante notar que históricamente (ver [**20**]) la topología caja, para familias arbitrarias de espacios topológicos, aparece antes que la topología Tychonoff, pero la carencia de propiedades productivas importantes en la primera, convirtió a la topología Tychonoff en la topología "natural" del producto.

En 1964, en [**11**], se propone una serie de problemas acerca de la normalidad y paracompacidad de los productos caja debidos a A. H. Stone. ¿Es el producto caja de líneas reales un espacio normal?

M. E. Rudin es la primera en aportar importantes resultados en esta línea de problemas; en [**16**], demuestra que asumiendo CH, el producto caja de familias numerables de espacios σ-compactos, localmente compactos y metrizables es paracompacto. K. Kunen, en [**12**], demuestra que bajo CH el producto caja de una familia numerable de espacios compactos y T_2 es paracompacto si y sólo si tal producto caja tiene grado de Lindelöf igual a ω_1. E. K. van Dowen prosigue en esta línea; en [**4**] demuestra que el producto caja de familias numerables de espacios métricos y separables no necesariamente es normal. Finalmente L. B. Lawrence, en [**14**], demuestra en ZFC que los productos caja de familias no numerables de líneas reales no es normal. Es importante mencionar a S. Williams ya que en [**21**] hace una buena síntesis de esta problemática, presentando teoremas acerca de la normalidad y paracompacidad de los productos caja en los que se resumen los resultados de treinta años.

Una vertiente importante de la topología es el estudio del conjunto de funciones continuas entre dos espacios topológicos, dotado de diferentes estructuras algebraicas y topológicas. En "Rings of continuous functions" de L. Gillman y M. Jerison [**6**], $C(X)$ es estudiado en su estructura algebraica ($C(X)$ es el conjunto de las funciones continuas definidas sobre el espacio topológico X con valores en $\mathbb{R}$). En "Topological Function Spaces" de A. V. Arkhangel'skii [**2**], $C(X)$ es estudiado con la topología de la convergencia puntual (la topología de la convergencia puntual es la topología heredada de $\mathbb{R}^X$ con la topología Tychonoff); tal espacio es denotado por $C_p(X)$. Si bien estos textos son primordiales, en ellos no se estudia el problema siguiente

¿Cómo es el espacio $C_\square(X)$? (ver la Definición 1.2)

Por ejemplo: ¿Cuáles son las relaciones entre las propiedades topológicas de X y $C_\square(X)$?, ¿Bajo qué condiciones de X, $C_\square(X)$ es normal o paracompacto (donde $\square\mathbb{R}^X$ es el espacio producto $\mathbb{R}^X$ con la topología caja y $C_\square(X)$ es el conjunto $C(X)$ dotado de la topología de subespacio de $\square\mathbb{R}^X$).

En 2002, A. Tamariz y H. Villegas en el artículo *"Spaces of continuous functions, Box products and almost-ω-resolvable spaces"* [**18**], realizan un estudio sistemático de $C_\square(X)$, obteniendo el teorema que sigue.

Teorema. *ZFC es consistente con "todo espacio de Tychonoff X sin puntos aislados es casi-ω-resoluble y $C_\square(X)$ es un subespacio discreto de $\square\mathbb{R}^X$"*

En el artículo de Tamariz y Villegas [**18**], sólo se ha atendido el caso para espacios sin puntos aislados, es decir, ningún conjunto singular es abierto. Siguiendo con esta línea de investigación, Tamariz planteó la pregunta siguiente

¿Cómo es $C_\square(X)$, cuando X no es discreto y tiene puntos aislados?

En esta dirección el primer resultado importante que obtuvimos esta expuesto en el Capítulo 2, en la sección "Cuando $C_\square(X)$ es un producto caja, primera parte". Si X_0 es el conjunto de puntos aislados de X y $X_1 = X \setminus X_0$, tal teorema dice

Teorema 0.1. *Si X es un espacio topológico tal que X_0 es un conjunto denso y F_σ en X entonces*

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}.$$

Para la demostración de este teorema, se desarrolla una técnica que reiteradas veces se usará. Esta consiste en particionar distintos conjuntos por cerrabiertos, que son clases de equivalencia de alguna estructura cociente. Así, si $\widehat{C}(X_1)$ es el conjunto

$$\{f \in C(X_1) : f \text{ se extiende continuamente a } X\},$$

y si para $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$ tomamos

$$A_{\widehat{x}}(X) = \{f \in C(X) : f \restriction_{X_1} = \widehat{x}\},$$

entonces se obtiene

(1) *La familia $\{A_{\widehat{x}}(X) : \widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)\}$, es una partición de $C(X)$.*

(2) *Para todo* $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$, $A_{\widehat{x}}(X)$ *es cerrado en* $C_\square(X)$.
(3) *Para todo* $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$, $A_{\widehat{x}}(X)$ *y* $A_{\widehat{0}}(X)$ *son homeomorfos.*
(4) *Para todo* $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$, $A_{\widehat{x}}(X)$ *es un grupo topológico.*
(5) *Para todo* $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$, $A_{\widehat{x}}(X)$ *y* $A_{\widehat{0}}(X)$ *son topológicamente isomorfos.*

Volvemos a particionar al conjunto $A_{\widehat{0}}(X)$, mediante el subgrupo $A_{\widehat{0}}(X) \cap E(\mathcal{F})$, donde $\{F_n : n < \omega\}$ es una partición de X_0, $E(\mathcal{F}) = \cap_{k<\omega} E_k(\mathcal{F})$, y $E_k(\mathcal{F}) = \cup_{m<\omega} E_{k,m}(\mathcal{F})$, donde

$$E_{k,m}(\mathcal{F})(x) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } x \in F_i \text{ e } i \le m, \\ \left[-\frac{1}{2^{i+k}}, \frac{1}{2^{i+k}}\right] & \text{si } x \in F_i \text{ y } m < i, \\ \mathbb{R} & \text{si } x \in X_1. \end{cases}$$

Esta nueva partición cumple:

(1) *Para cada* $f \in A_{\widehat{0}}(X)$, $(E(\mathcal{F}) \cap A_{\bar{0}}) + f$ *es un grupo topológico.*
(2) *Para cada* $f \in A_{\widehat{0}}(X)$, $(E(\mathcal{F}) \cap A_{\bar{0}}) + f$ *y* $(E(\mathcal{F}) \cap A_{\bar{0}})$ *son homemomorfos. Es más,* $(E(\mathcal{F}) \cap A_{\bar{0}}) + f$ *y* $(E(\mathcal{F}) \cap A_{\bar{0}})$ *son topológicamente isomorfos.*

Paralela a estas particiones se construyó otra partición, ahora de $\mathbb{R}^{X_0}$. En efecto, auxiliados por una partición numerable $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ de X_0, como antes, definimos
$E_0(\mathcal{F}) = \cap_{k<\omega} E_0^k(\mathcal{F})$, donde $E_0^k(\mathcal{F}) = \cup_{m<\omega} E_0^{km}(\mathcal{F})$ y

$$E_0^{km}(\mathcal{F})(x) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } x \in F_i \text{ e } i \le m, \\ \left[-\frac{1}{2^{i+k}}, \frac{1}{2^{i+k}}\right] & \text{si } x \in F_i \text{ y } m < i. \end{cases}$$

Así, obtenemos los siguientes resultados:

(1) $E_0(\mathcal{F})$ *es un cerrabierto en* $\square\mathbb{R}^{X_0}$.
(2) $E_0(\mathcal{F})$ *es un subgrupo topológico de* $\square\mathbb{R}^{X_0}$ *(*$\square\mathbb{R}^{X_0}$ *es grupo topológico con la suma de coordenada a coordenada).*
(3) *Para todo* $f \in \mathbb{R}^{X_0}$, $E_0(\mathcal{F}) + f$ *y* $E_0(\mathcal{F})$ *son topológicamente isomorfos.*
(4) *Por el Axioma de Elección, podemos asumir la existencia de un sistema completo mínimo de representantes de las clases de equivalencia* $D_0 \subset \mathbb{R}^{X_0}$ *de* $\square\mathbb{R}^{X_0}/E_0(\mathcal{F})$. *Por tanto*

$$\square\mathbb{R}^{X_0} = \oplus_{f \in D_0}(E_0(\mathcal{F}) + f).$$

Para dos espacios topológicos X e Y, si ellos son homeomorfos escribiremos $X \simeq Y$. Si G y H son grupos topológicos que son topologicamente homeomorfos escribiremos $G \cong H$.

Asumiendo las hipótesis del Teorema 0.1, se obtiene una partición $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ de X_0 de conjuntos cerrados de X. Respecto a una partición de este tipo, se tiene que

$$a)\ \square\mathbb{R}^{X_0} = \oplus_{f \in D_0}(E_0(\mathcal{F}) + f) \text{ y}$$
$$b)\ C_\square(X) \simeq \oplus_{\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)} (\oplus_{f \in D_1} (E(\mathcal{F}) \cap A_{\bar{0}}) + f)_{\widehat{x}},$$

donde los sumandos en a) son homeomorfos a los sumandos de b), D_0 es un sistema mínimo completo de representantes de las clases de equivalencia de $\square\mathbb{R}^{X_0}/E_0(\mathcal{F})$, D_1 es un sistema mínimo completo de representantes de las clases de equivalencia de $A_{\widehat{0}}(X)/A_{\widehat{0}}(X) \cap E(\mathcal{F})$. Y además el número de sumandos de a) y b) es el mismo.

Variaciones en las hipótesis del Teorema 0.1, nos permitirán concluir algunas otras propiedades de estas dos descomposiciones y de los conjuntos particionados.

En lo que sigue del Capítulo 2, desarrollamos nuevos teoremas en donde se generalizan las hipótesis en el Teorema 0.1. Así nace el concepto de casi-ω-resolubilidad relativa en X: X_0 es casi-ω-resoluble con respecto a X_1 (en forma abreviada X_0 es **c-ω-rcra**X_1) si existe una partición numerable de X_0 tal que todo abierto de X que contiene un punto de X_1, intersecta a una infinidad de elementos de tal partición.

El que X_0 sea c-ω-rcraX_1, junto con una estructura adecuada de las vecindades de los puntos del conjunto X_1, nos llevó a obtener un importante teorema. Este teorema nos permite concluir que en espacios donde las vecindades de cada punto de X_1 intersectadas con X_0, son ultrafiltros en X_0; esperar una forma del $C_\square(X)$ como en 0.1 y que X_0 sea c-ω-rcra X_1 sólo es posible si X_0 es F_σ. Tal teorema dice:

Teorema. *Para todo $x \in X_1$ denotamos por $\mathcal{V}(x)$ sus vecindades y $\mathcal{V}_0(x) = \mathcal{V}(x) \cap X_0$. Tenemos que, si $\emptyset \neq X_1 \subset cl_X(X_0)$ y $\mathcal{V}_0(x)$ es un ultrafiltro en X_0, entonces son equivalentes:*

(1) *X_0 es F_σ en X.*
(2) *X_0 es c-ω-rcra X_1.*
(3) *$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$ y X_0 es c-ω-rcra X_1.*
(4) *$A_{\widehat{0}}(X)$ es abierto en $C_\square(X)$ y X_0 es c-ω-rcra X_1.*
(5) *$A_{\widehat{0}}(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$ y X_0 es c-ω-rcra X_1.*
(6) *$A_{\widehat{0}}(X) \simeq C_\square(X)$ y X_0 es c-ω-rcra X_1.*

En el camino de debilitar las hipótesis del Teorema 0.1, ahora buscamos una expresión para $C_\square(X)$ en donde no necesariamente $X_1 \subset cl_X X_0$. Como antes, X_0 denotará el conjunto de puntos aislados de X y $X_1 = X \setminus X_0$. Además ahora, X^b denotará a $(cl_X X_0) \cap X_1$ y Z será el conjunto $X_1 \setminus X^b$. Obtenemos el siguiente resultado.

Teorema. *Sea X un espacio topológico que cumple*

(1) El conjunto de puntos aislados de X, X_0, es infinito y F_σ.

(2) $X_1 = X \setminus X_0$ es no vacío, $X^b = cl(X_0) \cap X_1 \neq \emptyset$ y $Z = (X_1 \setminus X^b)$es no vacío y casi-ω-resoluble.

Entonces, $C_\square(X)$ es la suma directa de a lo más $|\widehat{C}(X_1)|$ copias de $\square\mathbb{R}^{X_0}$. Es decir,

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{\widehat{x}\in\widehat{C}(X_1)}(\square\mathbb{R}^{X_0})_{\widehat{x}}.$$

La definición de casi-ω-resoluble la damos en la sección: "Cuando $C_\square(X)$ es un producto caja, segunda parte" del Capítulo 2 (vease también [**18**]).

En la búsqueda de condiciones que nos permitan reducir sumas directas de copias de $\square\mathbb{R}^{X_0}$, como las que aparecen en la conclusión del último Teorema, definimos la función cardinal $Npah(X)$.

Sea X un espacio topológico. Una partición $\mathcal{C}$ de X es una *partición homeomórfica de cerrabiertos* de X, si cada elemento de $\mathcal{C}$ es un cerrabierto homeomorfo a X.

La función cardinal $Npah(X)$ es definida como:
$Npah(X) = \text{mín}\{\kappa :$ no existe una partición homeomórfica de cerrabiertos de X

de cardinalidad $\kappa\}$.

Aquí los cardinales pueden ser finitos. Es más para todo espacio X, se cumple que $2 \leq Npah(X) \leq |X|$. Así, si X es conexo entonces $Npah(X) = 2$.

En el caso en que $Npah(X)$ es infinito, si tenemos sumas directas de estrictamente menos de $Npah(X)$ sumandos homeomorfos a X, esta suma es homeomorfa a X. Es decir, conociendo el $Npah(X)$ tenemos la posibilidad de reducir sumas directas de sumandos homeomorfos a X.

Así que calculamos $Npah(\square\mathbb{R}^\kappa)$, obteniendo la siguiente evaluación:

Para todo cardinal infinito κ se tiene que:

$$Npah(\square\mathbb{R}^\kappa) = (2^\kappa)^+ .$$

En el artículo "Paracompact subspaces in the Box product topology" [**15**] se demuestra una importante propiedad de los subespacios $\sigma_x^\square\left(\prod_{\alpha\in J} X_\alpha\right) = \{y : |\{\alpha \in J : y(\alpha) \neq x(\alpha)\}| < \aleph_0\}$ de $\square_{\alpha\in J} X_\alpha$, a saber que si para todo $A \subset J$ finito tenemos que $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ es paracompacto y T_2, entonces $\sigma_x^\square\left(\prod_{\alpha\in J} X_\alpha\right)$ es paracompacto, mostrando que estos espacios guardan interesante información del espacio completo. Nosotros fijamos nuestra atención en estos subespacios, desarrollando una idea de M. E. Rudin expuesta en [**17**] pág. 55; demostrando que

Proposición. *Para todo cardinal infinito κ y $x \in \square\mathbb{R}^\kappa$, tenemos $e(\sigma_x^\square(\mathbb{R}^\kappa) = c(\sigma_x^\square(\mathbb{R}^\kappa) = l(\sigma_x^\square(\mathbb{R}^\kappa)) = d(\sigma_x^\square(\mathbb{R}^\kappa)) = \kappa$. Además la componente conexa de x en $\square\mathbb{R}^\kappa$ es $\sigma_x^\square(\mathbb{R}^\kappa)$.*

Con este resultado y la evaluación de $Npah\mathbb{R}^\kappa$, obtenemos la demostración del Teorema, que nos provee de técnicas para reducir las sumas directas de copias de $\square\mathbb{R}^\kappa$.

Teorema. *Sean τ, γ y κ cardinales infinitos, entonces*

$$\oplus_{\alpha<\kappa} (\square\mathbb{R}^\tau)_\alpha \simeq \square\mathbb{R}^\gamma \text{ si y sólo si } \kappa \leq 2^\tau \text{ y } \gamma = \tau.$$

Auxiliados con estos resultados obtenemos el siguiente teorema.

Teorema. *Sea X un espacio topológico que cumple:*

(1) *El conjunto de puntos aislados de X, X_0, es infinito y F_σ.*
(2) *$X_1 = X \setminus X_0$ es no vacío.*
(3) *$X^b \neq \emptyset \neq Z$.*

Supongamos además que Z es casi-ω-resoluble, entonces

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0} \text{ si y sólo si } |\ \widehat{C}(X_1)\ | \leq 2^{|X_0|}.$$

Este Teorema nos da condiciones que nos permitirán reducir los $C_\square(X)$, que en principio serían sumas directas de $\square\mathbb{R}^{X_0}$, a sólo $\square\mathbb{R}^{X_0}$.

Otro resultado del Capítulo 2 es el siguiente

Teorema. *Si X es un espacio topológico, donde $Z \neq \emptyset \neq X^b$, Z es casi-ω-resoluble y para todo $p \in X^b$ se tiene que $\mathcal{V}_0(p)$ es ultrafiltro en X_0, entonces son equivalentes:*

(1) *X_0 es F_σ en X.*
(2) *X_0 es c-ω-rcra X^b.*

(3) *$C_\Box(X)$ es suma directa de a lo más $|\widehat{C}(X_1)|$ copias de $\Box\mathbb{R}^{X_0}$ y X_0 es c-ω-rcra X^b.*
(4) *$A_{\widehat{0}}(X)$ es abierto en $C_\Box(X)$ y X_0 es c-ω-rcra X^b.*
(5) *$A_{\widehat{0}}(X) \simeq \Box\mathbb{R}^{X_0}$ y X_0 es c-ω-rcra X^b.*

Este Teorema nos dice, con ciertas restricciones sobre los conjuntos Z, X^b, todo lo que significa que X_0 sea F_σ. Notar que tenemos un Teorema (ver Teorema 2.25) análogo a este último, pero en este caso $X_1 \subset cl_X X_0$.

Para finalizar el Capítulo 2, usando lo que hemos demostrado y los resultados expuestos en [**14**] y [**16**], obtenemos el corolario

Corolario. *Son consistentes con ZFC las siguientes afirmaciones para todo espacio Tychonoff X tal que X_0 es un conjunto F_σ de X*
(1) $C_\Box(X)$ no es normal si $|X_0| > \aleph_0$.
(2) Asumiendo CH, tenemos que $C_\Box(X)$ es paracompacto si $|X_0| = \aleph_0$.

En el Capítulo 3, desarrollamos las expresiones de $C_\Box(X)$ donde X es un espacio Tychonoff y X_1 es un sólo punto. En este caso se tienen algunas simplificaciones respecto a los casos tratados en el Capítulo 2, lo cual nos permitió encontrar expresiones de $C_\Box(X)$, en términos de Σ-productos de diversos tipos.

Sean $\mathcal{F}$ un filtro en X_0,

$$\Sigma_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) = \{f \in \mathbb{R}^{X_0} : \{x \in X_0 : f(x) = 0\} \in \mathcal{F}\},$$

$$\Sigma_{*,\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) = \{f \in \mathbb{R}^{X_0} : \text{ para todo } \epsilon > 0,\ \{x \in X_0 : |f(x)| < \epsilon\} \in \mathcal{F}\}$$

y

$$\tilde{\Sigma}_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) = \{f \in \mathbb{R}^{X_0} : \text{ para todo } \epsilon > 0,\ \{x \in X_0 : |f(x)| \geq \epsilon\} \notin \mathcal{F}\}.$$

Si a estos subconjuntos de $\mathbb{R}^{X_0}$ les damos la topología de subespacios de $\Box\mathbb{R}^{X_0}$, los denotaremos respectivamente como

$$\Sigma^\Box_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}),\ \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) \text{ y } \tilde{\Sigma}^\Box_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

En esencia tenemos dos clases de espacios, (si $X_1 = \{p\}$) unos en los que $\mathcal{V}_0(p)$ es ω^+-completo y los otros en los que no. Los $C_\Box(X)$ de los primeros es un $\Sigma^\Box_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$, en tanto que para los segundos su $C_\Box(X)$ queda descrito en términos del espacio $\Sigma^\Box_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$. Veamos el siguiente Teorema en donde se describe tal cosa.

Teorema. *Sea X un espacio topológico y $X_1 = \{p\}$, entonces*
1. Si $\mathcal{V}_0(p)$ es ω^+-completo y X es c-ω-rcra X_1, entonces

$$C_\Box(X) \simeq \Sigma^\Box_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

2. Si $\mathcal{V}_0(p)$ no es ω^+-completo, entonces

$$C_\Box(X) \simeq \Sigma^\Box_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

Es de resaltar que existen espacios en los que su $C_\square(X)$ es un clásico Σ-producto. Por ejemplo, si $X = X_0 \cup \{p\}$, donde X_0 es un discreto no numerable y las vecindades de p son los complementos de conjuntos numerables de X_0. Es decir, X es el mínimo espacio Lindelöf que contiene al discreto X_0. En este caso $C_\square(X)$ es el Σ-producto en $\square\mathbb{R}^{X_0}$ con punto base la función nula en X_0.

En el Capítulo 3, desarrollamos expresiones para $C_\square(X)$ cuando X es numerablemente compacto. Los principales resultados son los siguientes:

Proposición *Si X es un espacio numerablemente compacto, entonces*

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{\hat{x}\in\widehat{C}(X_1)} \left(\Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_{\hat{x}},$$

y si $|\widehat{C}(X_1)| \leq 2^{\aleph_0}$, entonces $C_\square(X) \simeq \Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{X_0})$.

Proposición *(1) Para todo cardinal infinito κ, se cumple*

$$C_\square(\beta(\kappa)) \simeq \oplus_{\lambda<2^\kappa} \left(\Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^\kappa)\right)_\lambda .$$

(2) Para todo $q \in \beta(\omega)\setminus\omega$, se cumple que

$$\square\mathbb{R}^\omega \simeq \Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^\omega) \simeq \Sigma^\square_{*,q}(\mathbb{R}^\omega).$$

Concluimos el Capítulo 3 con los siguientes teoremas, que muestran cómo espacios de aparente naturaleza distinta son los mismos, así como todas las posibles formas de los espacios $C_\square([0,\alpha))$ para α un número ordinal arbitrario.

Teorema

1. *Para todo ordinal infinito α tenemos que*

$$C_\square([0,\alpha]) \simeq \oplus_{\lambda<|\alpha|^{\aleph_0}} \left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|\alpha|}\right)_\lambda .$$

2. *Para todo ordinal infinito con $cof(\alpha) > \aleph_0$ se tiene que*

$$C_\square([0,\alpha)) \simeq \oplus_{\lambda<|\alpha|^{\aleph_0}} \left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|\alpha|}\right)_\lambda .$$

3. $\square\mathbb{R}^\omega \simeq C_\square([0,\omega]) \simeq \Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^\omega)$ *y* $C_\square([0,\omega_1]) \simeq C_\square([0,\omega_1)) \simeq \Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{\omega_1})$.

Teorema *Sea α un ordinal no numerable de cofinalidad numerable, entonces*

$$C_\square([0,\alpha)) \simeq \oplus_{\lambda<|\alpha|^\omega} \left(\tilde{\Sigma}^\square_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})\right)_\lambda .$$

Donde el subconjunto $\tilde{\Sigma}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$ de $\mathbb{R}^{[0,\alpha)}$, es definido como $\{f \in \mathbb{R}^{[0,\alpha)} :$ para todo $\epsilon > 0$ y $\beta < \alpha, |\{\lambda < \beta : |f(\lambda)| \geq \epsilon\}| < \aleph_0\}$. Si a tal conjunto le damos la topología de subespacio de $\square\mathbb{R}^{[0,\alpha)}$, al espacio resultante lo denotaremos por $\tilde{\Sigma}^\square_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$.

En resumen en este trabajo analizamos los espacios $C_\square(X)$ cuando X tiene puntos aislados, y a través de estos estudios logramos demostrar que varios subespacios del tipo Σ-producto en $\square\mathbb{R}^\kappa$ son homeomorfos a algún $\square\mathbb{R}^\tau$.

De entre los resultados recopilados en el primer capítulo, algunos son conocidos, pero todas las demostraciones son propias del autor. Los resultados de los demás capítulos son originales. En el primer capítulo definimos y demostramos los resultados básicos de este tema, así como algunas propiedades que nos serán útiles posteriormente.

En el Capítulo 2, exponemos las propiedades más generales de $C_\square(X)$, y limitamos nuestros tipos de espacios con los que trabajaremos. Este es el capítulo más importante del trabajo, puesto que aquí se desarrollan las demostraciones de propiedades que se usaran posteriormente.

En el Capítulo 3, realizamos un estudio particular de conjuntos del tipo Σ-producto; los resultados obtenidos nos permiten encontrar expresiones de $C_\square(X)$ cuando X es T_3 y numerablemente compacto, así como expresiones de $C_\square(X)$ para cualquier espacio de ordinales.

Finalizamos el trabajo proponiendo una lista de problemas con respecto a nuestro tema, que nos parecen material interesante de investigación.

Los resultados fundamentales de este trabajo son:

En el Capítulo 2 los Teoremas 2.21, 2.25, 2.40 y 2.44; en el Capítulo 3 los Teoremas 3.15, 3.30, 3.32 y el Corolario 3.26.

Al final presentamos una bibliografía en la cual listamos los textos que usamos como lectura formativa y también los textos que citamos a lo largo del trabajo.

CAPíTULO 1

Los productos caja

1. Introducción

En este capítulo desarrollaremos algunos resultados que serán útiles posteriormente y que describen algunas propiedades de los productos caja.

2. Definiciones y notación

Sea $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$ una familia de conjuntos. Denotaremos como $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ al producto cartesiano de la familia $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$. Si para toda $\alpha \in S$, tenemos $Z_\alpha \subset X_\alpha$, tomaremos $\prod_{\alpha\in S} Z_\alpha = \{z \in \prod_{\alpha\in S} X_\alpha :$ para todo $\alpha \in S,\ z(\alpha) \in Z_\alpha\}$; a este tipo de conjuntos de un producto cartesiano se les llamará **conjuntos caja**, ellos quedan completamente descritos si decimos quien es cada uno de sus factores. Así si F es un conjunto caja de $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$, y $F(\alpha)$ es el correspondiente α-esimo factor, entonces F queda determinado por todos los $F(\alpha)$ y $F = \prod_{\alpha\in S} F(\alpha)$.

Definición 1.1. Sean $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$ una familia de espacios topológicos, O_α un conjunto abierto de X_α para toda $\alpha \in S$, y $O_\alpha = X_\alpha$ para casi todos los α salvo un número finito de indices. Los conjuntos

$$\prod_{\alpha\in S} O_\alpha,$$

son la base de la *topología Tychonoff* del conjunto $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$. Denotaremos por $T_{\alpha\in S}X_\alpha$ al espacio topológico que resulta de dotar al conjunto $\prod_\alpha X_\alpha$ con la topología Tychonoff.

Si la familia $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$, es tal que $X = X_\alpha$ para todo $\alpha \in S$. Denotaremos a $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ como X^S y al espacio $T_{\alpha\in S}X_\alpha$ como TX^S.

Sea X un espacio topológico. Denotamos al conjunto de funciones continuas definidas sobre X y con valores en $\mathbb{R}$ como

$$C(X).$$

Es claro que $C(X) \subset \mathbb{R}^X$. A $C(X)$ dotado con la topología de subespacio de $T\mathbb{R}^X$ se le denotará como $C_p(X)$.

Definición 1.2. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$ una familia de espacios topológicos. Si para cada $\alpha \in S$, $O_\alpha \subset X_\alpha$ es un conjunto abierto de X_α, el conjunto $\prod_{\alpha\in S} O_\alpha$, será llamado *un abierto caja* en el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$. Al conjunto $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ con la topología generada por los abiertos caja como base será llamado *el producto caja* de la familia $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$, y se denotará por $\square_{\alpha\in S}X_\alpha$.

Denotaremos por $\square X^S$ al espacio $\square_{\alpha\in S}X_\alpha$ cuando $X = X_\alpha$, para todo $\alpha \in S$. Al conjunto $C(X)$ con la topología de subespacio del espacio $\square\mathbb{R}^X$ lo denotamos como $C_\square(X)$.

Sea X un espacio topológico y B un subconjunto de X que es un conjunto cerrado y abierto de X, entonces diremos que B es un *cerrabierto.*

3. Propiedades básicas

Sea $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$ una familia de espacios topológicos. Para $A \subset S$, denotamos como π_A a la función

$$\pi_A : \prod_{\alpha \in S} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

definida como $\pi_A(f) = f \restriction_A$. Para $\alpha \in S$, escribiremos $\pi_{\{\alpha\}} = \pi_\alpha$.

Proposición 1.3. *Sean $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$ una familia de espacios topólogicos y $A \subset S$, entonces $\pi_A : \square_{\alpha \in S} X_\alpha \longrightarrow \square_{\alpha \in A} X_\alpha$ es continua y abierta.*

Demostración.
Sea $\prod_{\alpha \in S} O_\alpha$ un abierto caja de $\square_{\alpha \in S} X_\alpha$, donde O_α es un abierto no vacío de X_α para todo $\alpha \in S$. Afirmamos que $\pi_A\left(\prod_{\alpha \in S} O_\alpha\right) = \prod_{\alpha \in A} O_\alpha$. En efecto, sea $f \in \prod_{\alpha \in S} O_\alpha$; es claro que $f \restriction_A (\alpha) \in O_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, es decir $\pi_A\left(\prod_{\alpha \in S} O_\alpha\right) \subset \prod_{\alpha \in A} O_\alpha$.

Por otro lado, elegimos $x_\alpha \in O_\alpha$ para todo $\alpha \in S \backslash A$. Ahora, sea $h \in \prod_{\alpha \in A} O_\alpha$. Sea $h' \in \prod_{\alpha \in S} O_\alpha$ definida como $h'(\alpha) = h(\alpha)$ si $\alpha \in A$ y $h'(\alpha) = x_\alpha$ si $\alpha \in S \setminus A$. Así que $\pi_A(h') = h$ y de aquí tenemos la igualdad $\pi_A\left(\prod_{\alpha \in S} O_\alpha\right) = \prod_{\alpha \in A} O_\alpha$.

Por otro lado, si $f \restriction_A \in \prod_{\alpha \in A} O_\alpha$, entonces $f \in \prod_{\alpha \in S} V_\alpha$, donde $V_\alpha = O_\alpha$ si $\alpha \in A$ y $V_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \in S \setminus A$. Este último conjunto es un abierto caja de $\square_{\alpha \in S} X_\alpha$, y $\pi_A\left(\prod_{\alpha \in S} V_\alpha\right) = \prod_{\alpha \in A} O_\alpha$. Así que π_A es continua y abierta. (En el caso particular de que A sea un conjunto singular tenemos el caso de las proyecciones del producto a un espacio de la familia.) $\square$

Veamos ahora las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad de los productos caja. Veamos enseguida la propiedad asociativa para los productos caja.

Proposición 1.4. *Sea $\{X_\xi : \xi \in J\}$ una familia de espacios topológicos y $\{J_\lambda : \lambda < \kappa\}$ una partición de J, se cumple que*

$$\square_{\xi \in J} X_\xi \simeq \square_{\lambda < \kappa} \left(\square_{\xi \in J_\lambda} X_\xi\right)$$

Demostración.
Sea

$$H : \square_{\xi \in J} X_\xi \to \square_{\lambda < \kappa} \left(\square_{\xi \in J_\lambda} X_\xi\right)$$

la funcion definida como: $H(f) \in \square_{\lambda < \kappa} \left(\square_{\xi \in J_\lambda} X_\xi\right)$ es tal que $H(f)(\lambda) = f_\lambda \in \square_{\xi \in J_\lambda} X_\xi$ en donde $f_\lambda(\xi) = f(\xi)$ para toda $\xi \in J_\lambda$.

Veamos que H es inyectiva. Sean $f, g \in \square_{\xi \in J} X_\xi$ tales que $H(f) = H(g)$. Por tanto se tiene que $f_\lambda = g_\lambda$ para todo $\lambda < \kappa$. Por otro lado, sea $\xi \in J$, sabemos que existe un único $\lambda < \kappa$ tal que $\xi \in J_\lambda$. Como $f_\lambda(\xi) = g_\lambda(\xi)$, por la definición de H, tenemos finalmente que $f(\xi) = g(\xi)$, así que $f = g$.

Ahora, sea $g \in \square_{\lambda < \kappa} \left(\square_{\xi \in J_\lambda} X_\xi\right)$. Denotamos por $\tilde{g} \in \square_{\xi \in J} X_\xi$ a la función que cumple $\tilde{g}(\xi) = g(\lambda)(\xi)$ si $\xi \in J_\lambda$. Veamos que $H(\tilde{g}) = g$. Es suficiente demostrar que para toda $\lambda < \kappa$ se cumple que $\bar{g}_\lambda = g(\lambda)$, esto es claro ya que $\bar{g}_\lambda(\xi) = \bar{g}(\xi) = g(\lambda)(\xi)$ cuando $\xi \in J_\lambda$.

Para todo $\xi \in J$ sea $A_\xi \subset X_\xi$ un conjunto abierto de X_ξ. Afirmamos que

$$H\left(\prod_{\xi \in J} A_\xi\right) = \prod_{\lambda<\kappa}\left(\prod_{\xi \in J_\lambda} A_\xi\right).$$

Sea $f \in \prod_{\xi \in J} A_\xi$ y $\lambda < \kappa$, tenemos que $H(f)(\lambda)(\xi) = f(\xi) \in A_\xi$ para todo $\xi \in J_\lambda$. Por tanto $H(f)(\lambda) \in \prod_{\xi \in J_\lambda} A_\xi$ para toda $\lambda < \kappa$. En otras palabras $H(f) \in \prod_{\lambda<\kappa}\left(\prod_{\xi \in J_\lambda} A_\xi\right)$. Por otro lado si $g \in \prod_{\lambda<\kappa}\left(\prod_{\xi \in J_\lambda} A_\xi\right)$, definimos $\bar{g} \in \prod_{\xi \in J} X_\xi$ como antes, es decir, $\bar{g}(\xi) = g(\lambda)(\xi)$ cuando $\xi \in J_\lambda$. Es claro que $\bar{g}(\xi) \in A_\xi$ cuando $\xi \in J_\lambda$, por tanto $\bar{g} \in \prod_{\xi \in J} A_\xi$. Hemos demostrado que H es abierta. Como H es biyectiva entonces

$$\prod_{\xi \in J} A_\xi = H^{-1}\left(\prod_{\lambda<\kappa}\left(\prod_{\xi \in J_\lambda} A_\xi\right)\right),$$

lo que demuestra que H es continua, y finalmente H es homeomorfismo. □

Veamos ahora la conmutatividad de los productos caja.

Proposición 1.5. *Sean $\{X_\xi : \xi \in J\}$ una familia de espacios topológicos y $F : J \to J$ una biyección. Entonces*

$$\square_{\xi \in J} X_\xi \simeq \square_{\xi \in J} X_{F(\xi)}$$

DEMOSTRACIÓN.

Entendemos que $h \in \square_{\xi \in J} X_{F(\xi)}$ si y sólo si $h : J \to \cup X_\xi$ es tal que $h(\xi) \in X_{F(\xi)}$ para cada $\xi \in J$. En contraste $h \in \square_{\xi \in J} X_\xi$ si y sólo si $h : J \to \cup X_\xi$ es tal que $h(\xi) \in X_\xi$ para cada $\xi \in J$.

Sea $H : \square_{\xi \in J} X_\xi \to \square_{\xi \in J} X_{F(\xi)}$ una función definida como $H(h)(\xi) = h(F(\xi))$. Veamos que H es una biyección. Supongamos que $H(h_1) = H(h_2)$. Para toda $\xi \in J$, tenemos que $h_1(F(\xi)) = h_2(F(\xi))$. En particular para $F^{-1}(\xi)$ tenemos que $h_1(F(F^{-1}(\xi))) = h_2(F(F^{-1}(\xi)))$, o sea que $h_1(\xi) = h_2(\xi)$.

Ahora sea $h \in \square_{\xi \in J} X_{F(\xi)}$, y sea $\tilde{h}$ definida como $\tilde{h}(\xi) = h(F^{-1}(\xi))$. Verifiquemos que $\tilde{h}(\xi) \in X_\xi$. Pero sabemos que $h(F^{-1}(\xi)) \in X_{F(F^{-1}(\xi))} = X_\xi$, así que $\tilde{h} \in \square_{\xi \in J} X_\xi$. Pero además tenemos que $H(\tilde{h}) = h$.

Sean O_ξ conjuntos abiertos de X_ξ. Verifiquemos que

$$H(\prod_{\xi \in J} O_\xi) = \prod_{\xi \in J} O_{F(\xi)}.$$

Sea $h \in \prod_{\xi \in J} O_\xi$; es claro que $H(h)(\xi) = h(F(\xi)) \in O_{F(\xi)}$, por tanto $H(\prod_{\xi \in J} O_\xi) \subset \prod_{\xi \in J} O_{F(\xi)}$. Ahora si $l \in \prod_{\xi \in J} O_{F(\xi)}$ denotamos por $\tilde{h}$ como la función que cumple que $\tilde{h}(\xi) = h(F^{-1}(\xi))$. Por los argumentos previos tendremos que $H(\tilde{h}) = h$ y además $\tilde{h} \in \prod_{\xi \in J} O_\xi$. Así que H es una función abierta.

Veamos que H es continua. Sea $O_{F(\xi)}$ un conjunto abierto de $X_{F(\xi)}$. Como tenemos que $H(\prod_{\xi \in J} O_\xi) = \prod_{\xi \in J} O_{F(\xi)}$, aplicando H^{-1} en ambos lados tenemos que

$$\prod_{\xi\in J} O_\xi = H^{-1}\left(\prod_{\xi\in J} O_{F(\xi)}\right),$$

esto es suficiente para concluir la continuidad. $\square$

Toca el turno a una propiedad distributiva, del producto caja respecto a la suma directa.

Proposición 1.6. *Sea $\{K_\xi : \xi < \gamma\}$ una familia de cardinales. Para cada $\xi < \gamma$ sea $\{X^\xi_\lambda : \lambda < K_\xi\}$ una familia de espacios topólogicos indicada por K_ξ. Se cumple*

$$\square_{\xi<\gamma}\left(\oplus_{\lambda<K_\xi} X^\xi_\lambda\right) \simeq \oplus_{f\in\prod_{\xi<\gamma}K_\xi}\left(\square_{\xi<\gamma} X^\xi_{f(\xi)}\right)$$

DEMOSTRACIÓN.

Para hacer más descriptiva la presentación de la proposición, denotemos para cada $\xi < \gamma$ por Y_ξ al espacio $\oplus_{\lambda<K_\xi} X^\xi_\lambda$ y sea $Y = \square_{\xi<\gamma} Y_\xi$. Por otro lado, para cada $f \in \prod_{\xi<\gamma} K_\xi$ denotamos por W_f al espacio $\square_{\xi<\gamma} X^\xi_{f(\xi)}$ y $W = \oplus_{f\in\prod_{\xi<\gamma}K_\xi} W_f$. La proposición afirma que $Y \simeq W$.

Definamos $H : Y \to W$ de la siguiente manera: para cada $h \in Y$ y $\xi < \gamma$ tenemos que $h(\xi) \in Y_\xi$; como Y_ξ es una suma directa, existe un único $\lambda < K_\xi$ tal que $h(\xi) \in X^\xi_\lambda$; denotamos por $f_h \in \prod_{\xi<\gamma} K_\xi$ a la función definida como $f_h(\xi) = \lambda < K_\xi$ tal que $h(\xi) \in X^\xi_\lambda$. Queremos definir $H(h) \in W_{f_h}$, Para esto, para cada $\xi < \gamma$, $H(h)(\xi)$ debe ser un elemento en $X^\xi_{f_h(\xi)}$. Tomamos $H(h)(\xi) = h(\xi) \in X^\xi_\lambda$ y como $f_h(\xi) = \lambda$, tenemos que $H(h)(\xi) = h(\xi) \in X^\xi_{f_h(\xi)}$. En resumen, definimos $H(h) \in W$ tal que para $f_h \in \prod_{\xi<\gamma} K_\xi$, $H(h) \in W_{f_h}$. Veamos que H es inyectiva. Supongamos que $H(h_1) = H(h_2)$ para $h_1, h_2 \in Y$. Sea $f \in \prod_{\xi<\gamma} K_\xi$ tal que $H(h_1), H(h_2) \in W_f = \square_{\xi<\gamma} X^\xi_{f(\xi)}$, entonces $h_1(\xi) = H(h_1)(\xi) = H(h_2)(\xi) = h_2(\xi)$, por tanto $h_1 = h_2$. Veamos que H es sobreyectiva. Sea $g \in W$ con $f \in \prod_{\xi<\gamma} K_\xi$ tal que $g \in W_f$, es decir para cada $\xi < \gamma$ tenemos que $g(\xi) \in X^\xi_{f(\xi)}$ con $f(\xi) < K_\xi$. Tomamos $h \in Y$ definida como $h(\xi) = g(\xi) \in X^\xi_{f(\xi)} \subset \oplus_{\lambda<K_\xi} X^\xi_\lambda$. Es claro que $H(h) = g$.

Sean A_ξ un abierto en $Y_\xi = \oplus_{\lambda<K_\xi} X^\xi_\lambda$ y $A = \prod_{\xi<\gamma} A_\xi$, así que A es un abierto en Y. Queremos demostrar que $H(A)$ es abierto en W, que es equivalente a demostrar que para todo $f \in \prod_{\xi<\gamma} K_\xi$ se tiene que $H(A) \cap W_f = H(A) \cap \square_{\xi<\gamma} X^\xi_{f(\xi)}$ es un conjunto abierto en W_f. Sea $g \in H(A) \cap W_f$ y $h \in A$ tal que $H(h) = g$. Por tanto tenemos que para cualquier $\xi < \gamma$, $h(\xi) \in A_\xi \cap X^\xi_\lambda$ para un único $\lambda < K_\xi$. Por otro lado $g(\xi) \in X^\xi_{f(\xi)}$ y como $g(\xi) = H(h)(\xi) = h(\xi)$, entonces $f(\xi) = \lambda$. Como $A_\xi \cap X^\xi_{f(\xi)}$ es un abierto en $X^\xi_{f(\xi)}$ para todo $\xi < \gamma$, entonces $C = \prod_{\xi<\gamma}\left(A_\xi \cap X^\xi_{f(\xi)}\right)$ es un abierto en $\square_{\xi<\gamma} X^\xi_{f(\xi)} = W_f$. Además $g \in C$, por tanto $H(A) \cap W_f \subset C$. Es más dos últimos conjuntos son iguales. En efecto sea $t \in C$, entonces para toda $\xi < \gamma$ tenemos que $t(\xi) \in A_\xi$ y $t(\xi) \in X^\xi_{f(\xi)}$, es decir $t(\xi) \in \oplus_{\lambda<K_\xi} X^\xi_\lambda$. Tomamos $h_0 \in Y$ donde $h_0(\xi) = t(\xi)$, entonces $H(h) = t$ y además $h \in A$, entonces $t \in H(A) \cap W_f$.

Ahora veamos que H es continua. Sean $h \in Y$, $H(h) \in A$ donde A es un abierto de W y $f \in \prod_{\xi<\gamma} K_\xi$ tal que $H(h) \in W_f$. Notemos que $H(h) \in A \cap W_f$ y que $A \cap W_f$ es un conjunto abierto de W_f. Existen abiertos $A_{f(\xi)}$ de $X^\xi_{f(\xi)}$ tales que $H(h) \in \prod_{\xi<\gamma} A_{f(\xi)} \subset A \cap W_f$. El conjunto $A_{f(\xi)}$ es un conjunto abierto de Y_ξ ya que $A_{f(\xi)} \cap X^\xi_\lambda = \emptyset$ si $\lambda \neq f(\xi)$ o $A_{f(\xi)} \cap X^\xi_\lambda = A_{f(\xi)}$ si $\lambda = f(\xi)$ para $\lambda < K_\xi$. Por tanto podemos concluir que $h \in \prod_{\xi<\gamma} A_{f(\xi)}$ y que $\prod_{\xi<\gamma} A_{f(\xi)}$ es un conjunto abierto de Y. Por último veamos que $H(\prod_{\xi<\gamma} A_{f(\xi)}) \subset A$. Sea $g \in \prod_{\xi<\gamma} A_{f(\xi)}$, entonces $H(g)(\xi) = g(\xi) \in A_{f(\xi)}$, es decir $H(g) \in \prod_{\xi<\gamma} A_{f(\xi)} \subset A \cap W_f \subset A$ $\square$

Sea $\{S_\xi : \xi < \gamma\}$ una partición del conjunto S (es decir $\cup_{\xi<\gamma} S_\xi = S$, $S_\xi \neq \emptyset$ para todo $\xi < \gamma$ y $S_{\xi_1} \cap S_{\xi_2} = \emptyset$ cuando $\xi_1 \neq \xi_2$). Para todo $\xi < \gamma$ y $\alpha \in S_\xi$ sea $V^\xi_\alpha \subset X_\alpha$. Tomemos el producto cartesiano

$$\prod_{\xi<\gamma}\left(\prod_{\alpha\in S_\xi} V^\xi_\alpha\right).$$

Este espacio con esta topología caja, en donde cada $\prod_{\alpha\in S_\xi} V^\xi_\alpha$ está también considerado con la topología caja (ver la propiedad asociativa y conmutativa de los productos caja) es homeomorfo al subespacio de $\square_{\alpha\in S} X_\alpha$: $\{f \in \prod_{\alpha\in S} X_\alpha : \pi_\alpha(f) \in V^\xi_\alpha, \alpha \in S_\xi\}$.

En todo el resto de este trabajo, vamos a cometer repetidamente un abuso de notación que nos permitirá simplificar la simbologia y agilizar la identificación visual de los objetos tratados, aunque se pierda presición formal.

Denotaremos por

$$\prod_{\xi<\gamma}\left(\prod_{\alpha\in S_\xi} V^\xi_\alpha\right)$$

al conjunto $\{f \in \prod_{\alpha\in S} X_\alpha : \pi_\alpha(f) \in V^\xi_\alpha$ **si** $\alpha \in S_\xi, \xi < \gamma\}$ **tomado con la topología de subespacio de** $\square_{\alpha\in S} X_\alpha$.

Proposición 1.7. *Si* $X = \oplus_{\delta\in S} X_\delta$, *entonces* $C_\square(X) \simeq \square_{\delta\in S} C_\square(X_\delta)$ *y* $C_p(X) \simeq T_{\delta\in S} C_p(X_\delta)$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $X = \oplus_{\delta\in S} X_\delta$. Definimos $F : C_\square(X) \longrightarrow \square_{\delta\in S} C_\square(X_\delta)$ como $F(f)(\delta)(x) = f \restriction_{X_\delta} (x)$ si $x \in X_\delta$.

Como $\{X_\delta : \delta \in S\}$ es una partición de X, $F(f)(\delta)$ es una función; veamos que $F(f)(\delta)$ es continua. Si $F(f)(\delta)(x) \in O$ con $x \in X_\delta$, por la continuidad de f y como $F(f)(\delta)(x) = f \restriction_{X_\delta} (x) = f(x)$, existe V, conjunto abierto de X, tal que $x \in V$ y $f(V) \subset O$. Pero entonces $V \cap X_\delta$ es abierto en X_δ. Es claro que $f \restriction_{X_\delta} (V \cap X_\delta) = f(V \cap X_\delta) \subset O$. Así que para cada $f \in C_\square(X)$, $F(f)$ es un elemento de $\square_{\delta\in S} C_\square(X_\delta)$. Si $F(f) = F(g)$ y $z \in X$, entonces $z \in X_\delta$ para alguna $\delta \in S$, entonces $F(f)(\delta)(z) = F(g)(\delta)(z)$, o sea $f(z) = g(z)$, por tanto $f = g$. Esto significa que F es inyectiva. Sea $H \in \square_{\delta\in S} C_\square(X_\delta)$, definimos

$$h : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ como } h(x) = H(\delta)(x) \text{ si } x \in X_\delta.$$

La función h es continua, ya que $H(\delta)$ es continua para toda $\delta \in S$. Ahora, $F(h)(\delta)(x) = H(\delta)(x)$, por tanto $F(h)(\delta) = H(\delta)$, o sea $F(h) = H$.

Veamos que F es continua. Sea $F(f) \in \prod_{\delta\in S} O_\delta$ con O_δ abierto en $C_\square(X_\delta)$ para todo $\delta \in S$. Como $F(f)(\delta) \in O_\delta$, sea $F(f)(\delta) \in (\prod_{x\in X_\delta} V_x^\delta) \cap C_\square(X_\delta) \subset O_\delta$. Afirmamos que

$$f \in \prod_{\delta\in S, x\in X_\delta} V_x^\delta \text{ y } F((\prod_{\delta\in S, x\in X_\delta} V_x^\delta) \cap C_\square(X)) \subset \prod_{\delta\in S} O_\delta.$$

Es más, si $f \in \prod_{x\in X} O_x$, entonces $f \restriction_{X_\delta} \in V^\delta = (\prod_{x\in X_\delta} O_x) \cap C_\square(X_\alpha)$ es un abierto en $C_\square(X_\delta)$, así que

$$F(f) \in \prod_{\delta\in S} V^\delta \text{ y } F\left(\left(\prod_{x\in X} O_x\right) \cap C_\square(X)\right) = \prod_{\delta\in S} V^\delta.$$

Y podemos concluir que F es un homeomorfismo.

Para la segunda afirmación, definimos de igual manera $F : C_p(X) \longrightarrow T_{\delta\in S} C_p(X_\delta)$ como $F(f)(\delta)(x) = f \restriction_{X_\delta} (x)$ si $x \in X_\delta$.

Repitiendo los mismos argumentos que antes, tenemos que F es una función biyectiva. Ahora veamos que F es continua. Sea $\prod_{\delta\in S} O_\delta$ un abierto básico de $T_{\delta\in S} C_p(X_\delta)$ que contiene a $F(f)$. Cada O_δ es un conjunto abierto en $C_p(X_\delta)$ para todo $\delta \in S$, y existe $A_1 \subset S$, tal que para todo $\delta \in S \setminus A_1$ se tiene que $O_\delta = C_p(X_\delta)$ con A_1 finito. Por otro lado, para cada $\delta \in A_1$, tenemos $F(f)(\delta) \in (\prod_{x\in X_\delta} V_x^\delta) \cap C_p(X_\delta) \subset O_\delta$ con $A_\delta \subset X_\delta$ conjunto finito tal que para $x \in X_\delta \setminus A_\delta$ se tiene que $V_x^\delta = \mathbb{R}$. Tomamos para todo $x \in X \setminus \cup_{\delta\in A_1} A_\delta$ a V_x^δ igual a $\mathbb{R}$. Entonces tenemos que

$$f \in \prod_{\delta\in S, x\in X_\delta} V_x^\delta \text{ y } F((\prod_{\delta\in S, x\in X_\delta} V_x^\delta) \cap C_p(X)) \subset \prod_{\delta\in S} O_\delta.$$

Es más, si $f \in (\prod_{x\in X} O_x) \cap C_p(X)$ con $O_x = \mathbb{R}$ salvo un conjunto finito, entonces $f \restriction_{X_\delta} \in V^\delta = (\prod_{x\in X_\delta} O_x) \cap C_p(X_\delta)$ es un abierto en $C_p(X_\delta)$. Así que

$$F(f) \in (\prod_{\delta\in S} V^\delta) \text{ y } F((\prod_{x\in X} O_x) \cap C_p(X)) = \prod_{\delta\in S} V^\delta.$$

Y podemos concluir que F es un homeomorfismo. $\square$

Definición 1.8. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos y $x \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. El σ-producto en $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ basado en x es

$$\sigma_x = \{y \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha : |\{\alpha \in A : y(\alpha) \neq x(\alpha)\}| < \aleph_0\}.$$

Le damos a σ_x la topología de subespacio de $\square_{\alpha\in A} X_\alpha$; el espacio resultante se denotará por $\sigma_x^\square(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha)$.

Proposición 1.9. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$ una familia de espacios topológicos y $x \in \square_{\alpha\in S} X_\alpha$. Si C_x es la componente conexa de x en $\square_{\alpha\in S} X_\alpha$, entonces*

$$C_x \subset \sigma_x.$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $y \notin \sigma_x$. Tomamos $B \subset S$, tal que $\alpha \in B$ si y sólo si $y(\alpha) \neq x(\alpha)$. Como $|B| \geq \aleph_0$, existe una partición numerable de él. Es decir existe una familia de conjuntos $\{F_n \subset B : n < \omega\}$ tal que $F_n \neq \emptyset$ para todo $n < \omega$, $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$ y $\cup_{n<\omega} F_n = B$.

Si $\alpha \in B$. Tomamos un abierto $O_0^\alpha \subset X_\alpha \setminus \{x\}$ y para todo $n < \omega$ un abierto O_{n+1}^α tales que $y(\alpha) \in O_{n+1}^\alpha \subset cl_{X_\alpha} O_{n+1}^\alpha \subset O_n^\alpha$ para todo $n < \omega$.

Definimos $H_{k,m} \subset \square_{\alpha\in S} X_\alpha$ como

$$H_{k,m}(\alpha) = \begin{cases} X_\alpha & \text{si } \alpha \in F_i,\ i \leq m \\ cl_{X_\alpha} O_{i+k}^\alpha & \text{si } \alpha \in F_i,\ m < i \\ X_\alpha & \text{si } \alpha \notin B. \end{cases}$$

Ahora $H_k = \cup_{m<\omega} H_{k,m}$ y $H = \cap_{k<\omega} H_k$.

Es claro que $y \in H$ y que $x \notin H$. En general, $z \in H$ si y sólo si existe una sucesión estrictamente creciente $\{m_k : k < \omega\}$ tal que $z \in H_{k,m_k}$ para todo $k < \omega$. Sólo mostraremos la suficiencia de la afirmación anterior. Sea $z \in H$, para todo $k < \omega$, existe $t_k < \omega$ tal que $z \in H_{k,t_k}$. Supongamos que $t_1 \leq t_0$; bastara tomar $m_0 = t_0$ y $m_1 = t_0 + 1$. En efecto si $\alpha \in F_i$ con $m_1 < i$, entonces $t_1 < i$; por tanto $z(\alpha) \in cl_{X_\alpha} O_{i+1}^\alpha$. Ahora si ya tenemos la sucesión $\{m_0, m_1, ..., m_n\}$, estrictamente creciente, pero $t_{n+1} \leq m_l$ para algún $l \in \{0, 1, ..., n\}$. Bastara definir $m_{n+1} = m_n + 1$, ya que si $\alpha \in F_i$ con $m_{n+1} < i$, entonces $t_{n+1} \leq m_l < m_n + 1$. Por tanto $t_{n+1} < i$, y aseguramos que $z(\alpha) \in cl_{X_\alpha} O_{i+(n+1)}^\alpha$.

Ahora veamos que H es abierto. Sea $z \in H$. Sabemos que existe una sucesión $\{m_k : k < \omega\}$ estrictamente creciente tal que $z \in H_{k,m_k}$. Definimos el abierto caja W como

$$W(\alpha) = \begin{cases} X_\alpha & \text{si } \alpha \in F_i,\ i \leq m_0 \\ O_{i+k-1}^\alpha & \text{si } \alpha \in F_i,\ m_k < i \leq m_{k+1} \text{ y } k \geq 1 \\ X_\alpha & \text{si } \alpha \notin B. \end{cases}$$

Veamos que $z \in W$. Sea $\alpha \in F_i$, $i > m_k$ y $k \geq 1$.Tomamos $s \geq k$ tal que $m_s < i \leq m_{s+1}$. Sabemos que $z(\alpha) \in cl_{X_\alpha} O_{i+s}^\alpha \subset O_{i+s-1}^\alpha$. Ahora sea $h \in W$, tomamos $t_{k-1} = m_k$ para $k \geq 1$. Trivialmente la sucesión $\{t_{k-1} : 1 \leq k < \omega\}$ es estrictamente creciente. Ahora, si $i > t_{k-1}$. Tomamos $s \geq k-1$ tal que $t_s < i \leq t_{s+1}$, es decir $m_{s+1} < i \leq m_{s+2}$. Ahora si $\alpha \in F_i$, entonces $h(\alpha) \in O_{i+s}^\alpha \subset cl_{X_\alpha} O_{i+k-1}^\alpha$. Por tanto $W \subset H$.

Ahora sea $l \notin H$. Existe $k_0 < \omega$, tal que $l \notin \cup_{m<\omega} H_{k_0,m}$. Es decir, para todo m, existen $i_m > m$ y $\alpha_{i_m} \in F_{i_m}$ tales que $l(\alpha_{i_m}) \notin cl_{X_{\alpha_{i_m}}} O_{i_m+k_0}^{\alpha_{i_m}}$. Tomamos $A \subset \omega$ tal que $\{i_m : m \in A\} = \{i_m : m < \omega\}$ y para todo $n, m \in A$ con $n \neq m$, se tiene que $i_m \neq i_n$. Para todo $m \in A$, sea $V_{\alpha_{i_m}}$ un abierto de $X_{\alpha_{i_m}}$ tal que $l(\alpha_{i_m}) \in V_{\alpha_{i_m}}$ y $V_{\alpha_{i_m}} \cap cl_{X_{\alpha_{i_m}}} O_{i_m+k_0}^{\alpha_{i_m}} = \emptyset$.

Sea $\mathcal{O}$, el abierto caja definido como sigue:

$$\mathcal{O} = \prod_{\alpha_{i_m}, m \in A} V_{\alpha_{i_m}} \times \prod_{\alpha \notin \{\alpha_{i_m} : m \in A\}} X_\alpha.$$

Es claro que $l \in \mathcal{O}$. Ahora sea $h \in \mathcal{O}$, $m < \omega$ y $r \in A$ tales que $i_r = i_m$. Por la construcción tenemos que

$$h(\alpha_{i_r}) \in V_{\alpha_{i_r}}$$

por tanto

$$h(\alpha_{i_m}) = h(\alpha_{i_r}) \notin cl_{X_{\alpha_{i_r}}} O^{\alpha_{i_r}}_{i_r+k_0} = cl_{X_{\alpha_{i_m}}} O^{\alpha_{i_m}}_{i_m+k_0}.$$

Por tanto $h \notin H$. Es decir H es cerrabierto.

En resumen, dado $y \notin \sigma_x$, existe un cerrabierto H de $\Box_{\alpha \in A} X_\alpha$ tal que $y \in H$ y $x \notin H$, en otras palabras $y \notin C_x$. Por tanto $C_x \subset \sigma_x$. □

Enseguida una proposición demostrada por M. E. Rudin en [**17**].

Proposición 1.10. *Sean κ un cardinal infinito y $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de espacios topológicos, donde cada uno de ellos es un espacio conexo. Si $x \in \Box_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ y C_x es la componente conexa de x en $\Box_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, entonces*

$$C_x = \sigma_x$$

Demostración.

Por el Teorema 1.9, bastará demostrar que $\sigma_x \subset C_x$. Para esto sea $y \in \sigma_x$. Denotamos por S_y al conjunto $\{\alpha < \kappa : x(\alpha) \neq y(\alpha)\}$.

Es claro que

$$x, y \in \prod_{\alpha \in S(y)} X_\alpha \times \prod_{\alpha \notin S(y)} \{x(\alpha)\}$$

Como $S(y)$ es finito, el subespacio $\prod_{\alpha \in S(y)} X_\alpha \times \prod_{\alpha \notin S(y)} \{x(\alpha)\}$ de $\Box_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ es homeomorfo a $T_{\alpha \in S(y)} X_\alpha$, el cual es conexo. Por tanto $y \in C_x$. □

La siguiente proposición, es un resultado muy útil, como se verá en los siguientes capítulos.

Proposición 1.11. *Sea G un grupo abeliano topológico y G' un subgrupo de G, entonces:*

1. *Para todo $f \in G$, $G' + f$ es un grupo topológico.*
2. *Para todo $f \in G$, $G' + f$ y G' son topológicamente isomorfos.*

   Si además G' es un un conjunto cerrabierto en la topología de G, entonces

3. *Para todo $f \in G$, $G' + f$ es cerrabierto en G.*
4. *$G = \oplus_{A \in G/G'} A$, donde $G/G' = \{G' + f : f \in G\}$.*

Demostración.

1. Definimos

$$(h_1 + f)_*(h_2 + f) = ((h_1 + f) + (h_2 + f)) - f.$$

La operación $_*$ es cerrada en $G' + f$, y convierte a $G' + f$ en grupo abeliano con neutro f, y para $h + f \in G' + f$ su inverso es $f - h$.

Sean $\phi : G' + f \times G' + f \longrightarrow G' + f$ definida como $\phi((h_1 + f), (h_2 + f)) = (h_1 + f)_*(h_2 + f)$, $\phi_0 : G \times G \longrightarrow G$ definida como $\phi_0(h, k) = h + k$ y $\phi_1 : G \longrightarrow G$ definida como $\phi_1(h) = h - f$, entonces ϕ_0 y ϕ_1 son continuas.

Además, ϕ se puede descomponer como: $\phi = (\phi_1 \circ \phi_0) \restriction_{G'+f}$. Así que ϕ es también continua.

Análogamente, sea

$$\psi : G' + f \longrightarrow G' + f \text{ definida como } \psi(h + f) = f - h$$

y

$$\psi_0 : G \longrightarrow G, \psi_1 : G \longrightarrow G \text{ definidas como } \psi_0(h) = -h, \psi_1(h) = 2f + h.$$

Es claro que ψ_0 y ψ_1 son continuas; pero además $\psi = (\psi_1 \circ \psi_0) \restriction_{G'+f}$. Por tanto G' es grupo topológico.

2. Sean

$$\theta : G' + f \longrightarrow G' \text{ definida como } \theta(h + f) = h$$

y

$$\theta_0 : G \longrightarrow G \text{ definida como } \theta_0(g) = g - f.$$

θ_0 es homeomorfismo y además $\theta = \theta_0 \restriction_{G'+f}$. Como θ es biyectiva, para concluir la demostración sólo resta demostrar que es morfismo de grupo. Pero

$$\theta((h_1 + f)_*(h_2 + f)) = \theta((h_1 + h_2) + f) = h_1 + h_2 = \theta(h_1 + f) + \theta(h_2 + f).$$

3. Para $f \in G$,

$$\psi : G \longrightarrow G \text{ definida como } \psi(g) = g + f \text{ es homeomorfismo,}$$

y $\psi[G'] = G' + f$, entonces para toda $f \in G$, $G' + f$ es cerrabierto.

4. Como las clases laterales son una partición de G, y por el inciso anterior, estas son cerrabiertas. Entonces

$$G = \oplus_{A \in \frac{G}{G'}} A.$$

□

4. Funciones cardinales en productos caja

En esta sección calcularemos algunas funciones cardinales para algunos productos caja, al menos los productos caja más importantes para nosotros. Una buena referencia a los resultados de funciones cardinales que usaremos serán [8] y [10]

Definición 1.12. 1. Sea X un espacio topológico, $x \in X$, $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos abiertos de X que contienen a x. Diremos que $\mathcal{B}$ es una seudobase local de x si $\cap\mathcal{B} = \{p\}$.

2. Sean X un espacio topológico y $x \in X$.

$$\psi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una seudobase local de } x\}.$$

3. Al cardinal

$$\psi(X) = sup\{\psi(x, X) : x \in X\} + \aleph_0$$

se le llamará el seudocarácter de X.

Proposición 1.13. *Si $\{X_i : i \in A\}$ es una familia de espacios topológicos, entonces*

$$\psi(\Box_{i\in A}X_i) = sup\{\psi(X_i) :\in A\}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Primero veamos que para cada $p \in \Box_{i\in A}X_i$ se cumple:

$$\psi(p, \Box_{i\in A}X_i) = sup\{\psi(p(i), X_i) : i \in A\}.$$

Para cada $i \in A$, sea $V_i = \{V_i^k : k < \psi(p(i), X_i)\}$ una seudobase de p_i en X_i. Sea $\alpha = sup\{\psi(p(i), X_i) : i \in A\}$. Para $\beta < \alpha$, definimos

$$O_i = \begin{cases} V_i^\beta & \text{si } \psi(p(i), X_i) > \beta, \\ X_i & \text{en caso contrario ,} \end{cases}$$

y $W_\beta = \prod_{i\in A} O_i$. Afirmamos que $\{W_\beta : \beta < \alpha\}$ es una seudobase de p en $\Box_{i\in A}X_i$. Sea $z \in \cap\{W_\beta : \beta < \alpha\}$. Si $i \in A$, entonces $z(i) \in V_i^\beta$ para todo $\beta < \psi(p(i), X_i)$. Como $\cap\{V_i^\beta : \beta < \psi(p(i), X_i)\} = \{p(i)\}$ para todo $i \in A$, entonces $p(i) = z(i)$ para todo $i \in A$. En resumen tenemos $\alpha \geq \psi(p, \Box_{i\in A}X_i)$.

Supongamos que para $\beta < \alpha$ existe una seudobase de p en $\Box_{i\in A}X_i$ de cardinalidad β, digamos que $C = \{C_k : k < \beta\}$ es tal seudobase. Sin perdida de generalidad podemos suponer que los miembros de C son abiertos caja. Sea $C_k = \prod_{i\in A} W_i^k$. Por hipótesis, para algún $i_0 \in A$ la familia de conjuntos abiertos $\{W_{i_0}^k : k < \beta\}$ no es seudobase de $p(i_0)$ en X_{i_0}. Entonces existe $z(i_0) \in \left(\cap_{k<\beta} W_{i_0}^k\right) \setminus \{p(i_0)\}$. Definimos

$$z(i) = \begin{cases} z(i_0) & \text{si } i = i_0, \\ p(i) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Tenemos que $z \in \cap\{C_k : k < \beta\}$, luego entonces $z = p$, lo cual es una contradicción. Por tanto para cada $i \in A$ las familias $\{W_i^k : k < \beta\}$ son seudobases de $p(i)$ en X_i.

Por otro lado, si $\beta < \alpha$, entonces existe un $j_0 \in A$ tal que $\beta < \psi(p(j_0), X_{j_0}) \leq \alpha$. Como la correspondiente $\{W_{j_0}^k : k < \beta\}$, sería una seudobase de $p(j_0)$ en X_{j_0} de cardinalidada menor o igual a β, esto nos lleva a una contradicción. Así que para todo $\beta < \alpha$, no existen seudobases de p en $\Box_{i\in A}X_i$ de cardinalidad β. Por tanto para todo $p \in \Box_{i\in A}X_i$, se cumple $sup\{\psi(p(i), X_i)\} = \psi(p, \Box_{i\in A}X_i)$.

Sea $\kappa = sup\{\psi(X_i) : i \in A\}$ y $p \in \Box_{i\in A}X_i$. Como para todo $i \in A$, se cumple $\kappa \geq \psi(X_i) \geq \psi(p(i), X_i)$, entonces $\kappa \geq sup\{\psi(p(i), X_i)\} = \psi(p, \Box_{i\in A}X_i)$. De aquí que $\kappa \geq \psi(\Box_{i\in A}X_i)$. Supongamos que $\kappa > \psi(\Box_{i\in A}X_i)$. Sea $t_0 \in A$ tal que

$$\kappa \geq \psi(X_{t_0}) > \psi(\Box_{i\in A}X_i).$$

Entonces existe $z(t_0) \in X_{t_0}$ tal que

$$\psi(z(t_0), X_{t_0}) > \psi(\Box_{i\in A}X_i).$$

Para $i \neq t_0$, tomemos arbitrarios $p(i) \in X_i$ y sea t definido como

$$t(i) = \begin{cases} z(t_0) & \text{si } i = i_0, \\ p(i) & \text{en caso contrario .} \end{cases}$$

Entonces

$$\psi(t, \square_{i\in A} X_i) = sup\{\psi(t(i), X_i) : i \in A\} \geq \psi(z(t_0, X_{t_o})) > \psi(\square_{i\in A} X_i).$$

Lo cual es una contradicción. □

Corolario 1.14. *Sea κ un cardinal infinito, entonces*

$$\psi(\square\mathbb{R}^{\kappa}) = \aleph_0.$$

DEMOSTRACIÓN.
Basta observar que $\psi(\mathbb{R}) = \aleph_0$. □

Definición 1.15. -1. Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{B} = \{O_\alpha : \alpha \in A \text{ y } x \in O_\alpha\}$ una familia de conjuntos abiertos de X que contienen a x. Diremos que $\mathcal{B}$ es una base local de x si para todo conjunto abierto O con $x \in O$, existe $O_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $O_\alpha \subset O$.
2. Sea X un espacio topológico, $x \in X$.

$$\chi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base local de } x\}$$

3.

$$\chi(X) = sup\{\chi(x, X) : x \in\} + \aleph_0.$$

Al cardinal $\chi(X)$, se le llamará el carácter de X.

Definición 1.16. Denotaremos por ω^ω al conjunto

$$\{f : f \text{ es una función de } \omega \text{ en } \omega\}.$$

1. Sean $f, g \in \omega^\omega$. Diremos que $f \leq^* g$ si $f(n) \leq g(n)$ salvo para un número finito de elementos de ω.
2. Sea $\mathcal{B} \subset \omega^\omega$. Diremos que $\mathcal{B}$ es una familia dominante en ω^ω, si para toda $h \in \omega^\omega$, existe $f \in \mathcal{B}$ tal que $h \leq^* f$.
3. $\mathfrak{d} = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una familia dominante en } \omega^\omega\}$.

Se puede consultar [**5**] para conocer una demostración de la importante propiedad de $\mathfrak{d}$:

$$\aleph_1 \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}.$$

Proposición 1.17. $\chi(\square\mathbb{R}^\omega) = \mathfrak{d}$.

DEMOSTRACIÓN.
Sea $f \in \square\mathbb{R}^\omega$ y $\mathcal{B} = \{\prod_{n<\omega} V_n^\beta : n < \omega \text{ y } \beta \in A\}$ una base local de f en $\square\mathbb{R}^\omega$. Para cada $n < \omega$ y $\beta \in A$, existe $m_n < \omega$ tal que

$$\left(-\frac{1}{2^{m_n}} + f(n), \frac{1}{2^{m_n}} + f(n)\right) \subset V_n^\beta.$$

Sea $f_\beta : \omega \longrightarrow \omega$ donde $f_\beta(n) = m_n$. Demostraremos que la familia $\{f_\beta : \beta \in A\}$ es dominante en ω^ω. Sea $h \in \omega^\omega$ y O_h el abierto caja definido como

$$\prod_{n<\omega}\left(-\frac{1}{2^{h(n)}} + f(n), \frac{1}{2^{h(n)}} + f(n)\right).$$

Sea $\beta \in A$ tal que $\prod_{n<\omega} V_n^\beta \subset O_h$. O sea, para todo $n < \omega$

$$\left(-\frac{1}{2^{m_n}} + f(n), \frac{1}{2^{m_n}} + f(n)\right) \subset \left(-\frac{1}{2^{h(n)}} + f(n), \frac{1}{2^{h(n)}} + f(n)\right).$$

Por tanto, para todo $n < \omega$, se tiene $h(n) \leq f_\beta(n)$; es decir, la familia $\{f_\beta : \beta \in A\}$ es dominante en ω^ω. En otras palabras

$$\mathfrak{d} \leq |\{f_\beta : \beta \in A\}| \leq |A|.$$

Así que

$$\mathfrak{d} \leq \chi(f, \square\mathbb{R}^\omega) \leq \chi(\square\mathbb{R}^\omega).$$

Por otro lado, sea $\{f_\beta : \beta \in J\}$ una familia dominante con $|J| = \mathfrak{d}$ y $f \in \square\mathbb{R}^\omega$. Para cada $\beta \in J$, sea

$$\begin{aligned} A_\beta = \{&\textstyle\prod_{n\notin F}\left(-\frac{1}{2^{f_\beta(n)}} + f(n), \frac{1}{2^{f_\beta(n)}} + f(n)\right) \times \prod_{O_{\delta,n}\in V(f(n)), n\in F} O_{\delta,n} : \\ &F \in [\omega]^{<\omega}, V(f(n)) \text{ base local numerable de } f(n) \text{ en } \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

donde $[\omega]^{<\omega} = \{F : F \subset \omega \text{ y } F \text{ es finito}\}$.

Notar que $|A_\beta| = \aleph_0$. Por tanto

$$|\cup_{\beta\in J} A_\beta| \leq \aleph_0 \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{d}.$$

Veamos que $\cup_{\beta\in J} A_\beta$, es una base local de f. Para esto, sea $\prod_{n<\omega} O_n$ un abierto caja que contiene a f. Para cada $n < \omega$, sea $h(n) < \omega$, tal que

$$\left(-\frac{1}{2^{h(n)}} + f(n), \frac{1}{2^{h(n)}} + f(n)\right) \subset O_n.$$

Entonces existe $\beta \in J$ y $A \in [\omega]^{<\omega}$, tal que $h(n) \leq f_\beta(n)$ para todo $n < \omega$ y $n \notin A$. Es decir, para todo $n \notin A$

$$\left(-\frac{1}{2^{f_\beta(n)}} + f(n), \frac{1}{2^{f_\beta(n)}} + f(n)\right) \subset \left(-\frac{1}{2^{h(n)}} + f(n), \frac{1}{2^{h(n)}} + f(n)\right).$$

Para $n \in A$, seleccionamos $O_{\delta,n} \in V(f(n))$ tal que $O_{\delta,n} \subset O_n$.

Si

$$M_\beta = \prod_{n\notin A}\left(-\frac{1}{2^{f_\beta(n)}} + f(n), \frac{1}{2^{f_\beta(n)}} + f(n)\right) \times \prod_{n\in A} O_{\delta,n},$$

es claro que $M_\beta \subset \prod_{n<\omega} O_n$. Por tanto, $\cup_{\beta\in J} A_\beta$ es una base local de f. Luego

$$\chi(f, \Box\mathbb{R}^\omega) \leq \mathfrak{d}.$$

De aquí se cumple $\chi(\Box\mathbb{R}^\omega) = \mathfrak{d}$. □

Definición 1.18. Sea X un espacio topológico

1. A una familia de subconjuntos no vacíos de X ajena dos a dos, se le llamará familia celular.
2. $c(X) = sup\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ es una familia celular de conjuntos abiertos de $X\} + \aleph_0$.

Es claro que para cualquier espacio topológico X, se cumple que $c(X) \leq |X|$.

Proposición 1.19. *Para cualquier cardinal infinito κ, se cumple*

$$c(\Box\mathbb{R}^\kappa) = 2^\kappa.$$

Demostración.
En la página 172 de **[21]**, se construye una familia celular de cerrabiertos, para cualquier espacio $\Box_{i\in A} Y_i$, de cardinalidad $2^{|A|}$. Por tanto

$$c(\Box\mathbb{R}^\kappa) \geq 2^\kappa.$$

Como $|\Box\mathbb{R}^\kappa| = 2^\kappa$, entonces $c(\Box\mathbb{R}^\kappa) \leq 2^\kappa$. Por tanto $c(\Box\mathbb{R}^\kappa) = 2^\kappa$. □

Definición 1.20. Sea X un espacio topológico. Definimos

$$w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base de } X\} + \aleph_0.$$

A $w(X)$ se le llamará el peso de X.

Proposición 1.21. *Para cualquier cardinal infinito κ, se cumple*

$$w(\Box\mathbb{R}^\kappa) = 2^\kappa.$$

Demostración.
En general se tiene que $c(X) \leq w(X)$. Para todo $\alpha < \kappa$, sea $\mathcal{B}_\alpha$ una base numerable de abiertos en $\mathbb{R}$.
Sea $\mathcal{B} = \{\Box B_\alpha : B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha\}$.
Así

$$|\mathcal{B}| \leq (\aleph_0)^\kappa \leq (2^{\aleph_0})^\kappa = 2^\kappa$$

Por tanto, $w(\Box\mathbb{R}^\kappa) \leq 2^\kappa$, es decir $w(\Box\mathbb{R}^\kappa) = 2^\kappa$.

□

Definición 1.22. Sea X un espacio topológico. Definimos

$$e(X) = sup\{|A| : A \subset X, A \text{ es cerrado y discreto}\} + \aleph_0.$$

A $e(X)$ se le llama la extensión de X.

Teorema 1.23. *Para cualquier cardinal infinito κ, se cumple*

$$e(\square\mathbb{R}^{\kappa}) = 2^{\kappa}.$$

DEMOSTRACIÓN.

En la página 172 de **[21]**, se construye para cualquier espacio $\square_{i\in A}Y_i$, un conjunto cerrado y discreto de cardinalidad $2^{|A|}$. Por tanto

$$e(\square\mathbb{R}^{\kappa}) \geq 2^{\kappa}.$$

Pero es claro que $e(\square\mathbb{R}^{\kappa}) \leq |\square\mathbb{R}^{\kappa}| = 2^{\kappa}$. Por tanto $e(\square\mathbb{R}^{\kappa}) = 2^{\kappa}$. □

Definición 1.24. Sea X un espacio topológico. Definimos

$$s(X) = sup\{|A| : A \subset X, A \text{ es discreto}\} + \aleph_0.$$

A $s(X)$ se le llama la amplitud del espacio X.

$$d(X) = \text{mín}\{|A| : A \subset X, A \text{ es denso}\} + \aleph_0.$$

A $d(X)$ se le llama la densidad de X.

Sea ϕ una función cardinal. Definimos

$$h\phi(X) = sup\{\phi(A) : A \subset X\}.$$

A $h\phi(X)$ se le llama la función hereditaria de ϕ en X.

Sea $\mathcal{N} \subset P(X)$. Si todo abierto es la unión de elementos de $\mathcal{N}$, diremos que $\mathcal{N}$ es una red de X.

$$nw(X) = \text{mín}\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \subset P(X), \mathcal{N} \text{ es red de } X\} + \aleph_0.$$

A $nw(X)$ se le llama el peso red de X.

Sea X un espacio topológico. El grado de Lindelöf de X, denotado por $l(X)$, es el menor de los cardinales infinitos κ tales que toda cubierta abierta de X, tiene una subcubierta de cardinalidad mneor o igual que κ.

En **[8]** podemos encontrar que en todo espacio topológico X, se cumplen

$$c(X) \leq d(X) \leq hd(X) \leq nw(X) \leq w(X),$$

$$c(X) \leq s(X) \leq hl(X) \leq |X|$$

y

$$e(X) \leq l(x) \leq hl(X).$$

Por tanto:

Corolario 1.25. *Para cualquier cardinal infinito κ, se cumple*

$$d(\square\mathbb{R}^{\kappa}) = hd(\square\mathbb{R}^{\kappa}) = nw(\square\mathbb{R}^{\kappa}) = s(\square\mathbb{R}^{\kappa}) = hl(\square\mathbb{R}^{\kappa}) = l(\square\mathbb{R}^{\kappa}) = 2^{\kappa}.$$

El siguiente resultado fue probado por W.W. Comfort y A.W. Hager en **[3]**, nos sera útil para calcular la cardinalidad de $C(X)$ y la utilizaremos en la demostración del Teorema 3.29.

Proposición 1.26. *Para un espacio X, se cumple*

$$|C(X)| = w(\beta(X))^{\aleph_0}.$$

Si X e Y, son espacios topológicos, diremos que Y es una condensación de X si existe una función continua y biyectiva $f : X \longrightarrow Y$. Recordemos la definición de la función cardinal i-peso.

Definición 1.27. Sea X un espacio topológico. El i-peso de X, denotado por $iw(X)$, es:

$$iw(X) = \text{mín}\,\{w(Y) : Y \text{ es una condensación de } X\}.$$

Ahora demostraremos un importante cálculo de la función cardinal i-peso para los productos caja. Antes un lema.

Lema 1.28. *Sean X un espacio y κ un cardinal infinito. Si X contiene un conjunto discreto de cardinalidad κ, entonces $log(\kappa) \leq iw(X)$.*

DEMOSTRACIÓN.
En la página 26 de [**2**], se tiene la siguiente relación para todo espacio Y:

$$iw(Y) = d(C_p(Y)).$$

En la página 104 de [**10**] tenemos el siguiente resultado:
"Si $\{R_i : i \in A\}$ es una familia de espacios topológicos tal que para todo $i \in A$, R_i tiene dos conjuntos abiertos ajenos no vacíos, entonces

$$d(T_{i\in A}R_i) = log|A| \cdot sup\{d(R_i) : i \in A\}".$$

Ahora sea $H \subset X$ un conjunto discreto de cardinalidad κ. Por lo anterior y como la función i-peso es monótona, tenemos
$iw(H) \leq iw(X)$, $iw(H) = d(C_p(H)) = d(T\mathbb{R}^H) = log \mid H \mid \cdot\aleph_0$.
Por tanto $log(\kappa) \leq iw(X)$. □

Proposición 1.29. *Si $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$ una familia de espacios tal que $|X_\alpha| \geq 2$ para todo $\alpha \in S$, entonces*

$$log|S|.sup\{iw(X_\alpha) : \alpha \in S\} \leq iw(\square_{\alpha\in S}X_\alpha) \leq |S|.sup\{iw(X_\alpha) : \alpha \in S\}.$$

DEMOSTRACIÓN.
En la pagina 172 de [**21**] se construye, para cualquier producto caja de una familia $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$ con factores con dos puntos o más, un conjunto cerrado discreto de cardinalidad $2^{|S|}$. Tomamos un subconjunto de cardinalidad $|S|$ de tal discreto. Por el Lema 1.28 tenemos que $log|S| \leq iw(\square_{\alpha\in S}X_\alpha)$. Por otro lado, para cada $\alpha \in S$, X_α es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $\square_{\alpha\in S}X_\alpha$, por la monótonia tenemos que $iw(X_\alpha) \leq \square_\alpha X_\alpha$ para todo $\alpha \in S$. En otras palabras tenemos que $sup\{iw(X_\alpha) : \alpha \in S\} \leq iw(\square_{\alpha\in S}X_\alpha)$, por tanto: $log|S|.sup\{iw(X_\alpha) : \alpha \in S\} \leq iw(\square_{\alpha\in S}X_\alpha)$.

Por otro lado sea la función $\psi : T_{\alpha\in S}X_\alpha \longrightarrow Y$ una condensación tal que $w(Y) = iw(T_{\alpha\in S}X_\alpha)$ y $Id : \square_{\alpha\in S}X_\alpha \longrightarrow T_{\alpha\in S}X_\alpha$ la función identidad. Como

$iw(T_{\alpha\in S}X_\alpha) = |S|sup\{iw(X_{\alpha\in S}) : \alpha \in S\}$ y $\psi \circ Id$ es una condensación de $\square_{\alpha\in S}X_\alpha$, tenemos que $iw(\square_{\alpha\in S}X_\alpha) \leq |S|.sup\{iw(X_\alpha) : \alpha \in S\}$. $\square$

Proposición 1.30. *Si κ es un cardinal infinito, entonces*

$$log(\kappa) \leq iw\,(\square\mathbb{R}^\kappa) \leq \kappa.$$

DEMOSTRACIÓN.
Por la Proposición 1.29 y ya que $iw(\mathbb{R}) = \aleph_0$, tenemos la conclusión. $\square$

Ahora un par de proposiciones que describen propiedades de algunas funciones cardinales en sumas topólogicas. Estos resultados nos serán útiles en capítulos posteriores.

Proposición 1.31. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$ una familia de espacios topológicos, entonces*

$$w(\oplus_{\alpha\in S}X_\alpha) = |S|.sup\{w(X_\alpha) : \alpha \in S\}.$$

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\mathcal{O}_\alpha$ una base de X_α tal que $w(X_\alpha) = |\mathcal{O}_\alpha|$. Si $\mathcal{O} = \cup_{\alpha\in S}\mathcal{O}_\alpha$, tenemos $|\mathcal{O}| \leq |S|.sup\{w(X_\alpha) : \alpha \in S\}$. Demostremos que $\mathcal{O}$ es una base de $\oplus_{\alpha\in S}X_\alpha$. Sea $x \in \oplus_{\alpha\in S}X_\alpha$ y V abierto de $\oplus_{\alpha\in S}X_\alpha$ tal que $x \in V$. Existe $\alpha \in S$ tal que $x \in X_\alpha$. Como $V \cap X_\alpha$ es un abierto de X_α, entonces existe $O \in \mathcal{O}_\alpha$ tal que $x \in O_\alpha \subset V \cap X_\alpha \subset V$.

Es claro que cada X_α es un subespacio de $\oplus_{\alpha\in S}X_\alpha$, así que $w(X_\alpha) \leq w(\oplus_{\alpha\in S}X_\alpha)$, es decir $sup\{w(X_\alpha) : \alpha \in S\} \leq w(\oplus_{\alpha\in S}X_\alpha)$. Sea $\mathcal{V}$ una base de $\oplus_{\alpha\in S}X_\alpha$ tal que $w(\oplus_{\alpha\in S}X_\alpha) = |\mathcal{V}|$. Para cada $\alpha \in S$, X_α es un abierto de $\oplus_{\alpha\in S}X_\alpha$. Como $\mathcal{V}$ es una base de $\oplus_{\alpha\in S}X_\alpha$, entonces para cada $\alpha \in S$, existe $V_\alpha \in \mathcal{V}$ tal que $V_\alpha \subset X_\alpha$. La función f que asigna a cada α el abierto V_α es una función inyectiva de S en $\mathcal{V}$. Por tanto $|S| \leq w(\oplus_{\alpha\in S}X_\alpha)$. Y se concluye la demostración de la proposición. $\square$

Proposición 1.32. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$ una familia de espacios, entonces*

$$iw(\oplus_\alpha X_\alpha) = log(|S|).sup\{iw(X_\alpha) : \alpha \in S\}.$$

DEMOSTRACIÓN.
Sabemos que $iw(\oplus_\alpha X_\alpha) = d\,(C_p(\oplus_\alpha X_\alpha))$ (ver [**2**]). Por la Proposición 1.7 tenemos que $d\,(C_p(\oplus_\alpha X_\alpha)) = d\,(T_{\alpha\in S}C_p(X_\alpha))$. Como

$$d(T_\alpha C_p(X_\alpha)) = log|S|.sup\{d(C_p(X_\alpha)) : \alpha \in S\} = log|S|sup\{iw(X_\alpha) : \alpha \in S\},$$

obtenemos que

$$iw(\oplus_\alpha X_\alpha) = log(|S|).sup\{iw(X_\alpha) : \alpha \in S\}.$$

$\square$

Proposición 1.33. *Para todo cardinal infinito κ y $x \in \Box\mathbb{R}^\kappa$, tenemos*
$$l(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)) = d(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)) = e(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)) = c(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa) = \kappa$$

DEMOSTRACIÓN.
Sea $x \in \Box\mathbb{R}^\kappa$ y $\mathcal{C} = \{O_\gamma : \gamma < \tau\}$ una cubierta de $\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)$ formada por abiertos caja. Por otro lado, para cada $J \in [\kappa]^{<\aleph_0}$, sea $H_J = \mathbb{R}^J \times \prod_{\alpha\in\kappa\setminus J}\{x(\alpha)\}$. En particular, H_J con la topología de subespacio cumple que $H_J \simeq T\mathbb{R}^J$, el cual es un espacio Lindelöf. Cada O_γ es de la forma $O_\gamma = \prod_{\alpha<\kappa} V_\alpha^\gamma$ donde para cada $\gamma < \tau$ y $\alpha < \kappa$, V_α^γ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$. Como $H_J \subset \sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)$, escogemos $\mathcal{C}_J \subset \mathcal{C}$ tal que $H_J \subset \bigcup\mathcal{C}_J$. Ahora definimos para cada $O_\gamma \in \mathcal{C}_J$, $O'_\gamma = \prod_{\alpha\in J} V_\alpha^\gamma \times \prod_{\alpha\in\kappa\setminus J}\{x(\alpha)\}$, que es un conjunto abierto de H_J. Si $\mathcal{C}'_J = \{O'_\gamma : O_\gamma \in \mathcal{C}_J\}$, tenemos que $H_J \subset \bigcup\mathcal{C}'_J$. Sea $\mathcal{D}'_J$ una subcubierta numerable de $\mathcal{C}'_J$. Definimos $\mathcal{D}_J = \{O_\gamma : O'_\gamma \in D'_J\}$, que es una subcubierta numerable de $\mathcal{C}_J$. Ahora como $\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa) = \bigcup_{J\in[\kappa]^{<\aleph_0}} H_J$, tenemos que $\mathcal{D} = \bigcup_{J\in[\kappa]^{<\aleph_0}} D_J$ es una subcubierta de $\mathcal{C}$. Pero
$$|\mathcal{D}| \leq \kappa.\aleph_0 \leq \kappa.$$
Por tanto $l(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)) \leq \kappa$.

Por otro lado, si $\delta < \kappa$, tomamos $z_\delta \in \mathbb{R} \setminus \{x(\delta)\}$ y definimos para cada $\alpha < \kappa$
$$t_\alpha(\delta) = \begin{cases} z_\delta & \text{si } \alpha = \delta \\ x(\delta) & \text{si } \alpha \notin \delta. \end{cases}$$
Es claro que $t_\alpha \in \sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)$. El conjunto $D = \{t_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es discreto. Además D es cerrado. En efecto, si $w \in \sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa) \setminus D$, existe $A_w \subset \kappa$ tal que para todo $\alpha \in A_w$ se tiene que $w(\alpha) = x(\alpha)$ y $\kappa \setminus A_w$ es finito. Para cada $\alpha \in A_w$ sea O_α un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ tal que $x(\alpha) \in O_\alpha$ pero $z_\alpha \notin O_\alpha$. Sea $O = \left(\prod_{\alpha\in A_w} O_\alpha \times \mathbb{R}^{\kappa\setminus A_w}\right) \cap \sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)$, es claro que $t_\alpha \notin O$ para todo $\alpha \in A_w$. Sea $V = O \cap (\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa) \setminus \{t_\alpha : \alpha \notin A_w\})$. Tenemos que $z \in V$ y además $D \cap V = \emptyset$.

Sabemos en general, que $e(X) \leq l(X)$. En nuestro caso particular, como $\kappa \leq e(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)) \leq l(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa))$, tenemos la igualdad $e(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)) = l(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)) = \kappa$.

Calculemos la densidad de $\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)$. Igual que antes, para cada $J \in [\kappa]^{<\aleph_0}$, sea $H_J = \mathbb{R}^J \times \{x(\alpha)\}^{\kappa\setminus J}$; es claro que $H_J \simeq T\mathbb{R}^J$. Ahora, para cada $J \in [\kappa]^{<\aleph_0}$, se tiene que $d(T\mathbb{R}^J) = \aleph_0$. Por tanto, para cada $J \in [\kappa]^{\aleph_0}$, existe $D_J \subset H_J$ conjunto denso en H_J y numerable. Afirmamos que si $D = \bigcup_{J\in[\kappa]^{<\aleph_0}} D_J$, entonces D es denso en $\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)$. Sea $V = \left(\prod_{\alpha<\kappa} O_\alpha\right) \cap \sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)$ un conjunto abierto no vacío de $\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)$. Tomamos $z \in V$, sea $J \in [\kappa]^{<\aleph_0}$, tal que $z(\alpha) = x(\alpha)$ para todo $\alpha \in \kappa \setminus J$; es decir $z \in H_J$. En particular $z \in \left(\prod_{\alpha<\kappa} O_\alpha\right) \cap H_J$, por tanto existe $d \in \left(\prod_{\alpha<\kappa} O_\alpha\right) \cap H_J \cap D_J$. Así que $d \in V \cap D$, es decir D es denso en $\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)$. Como $|D| \leq |[\kappa]^{<\aleph_0}|.\aleph_0 = \kappa.\aleph_0 = \kappa$, entonces $d(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)) \leq \kappa$.

Como $c(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)) \leq d(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa))$, si demostramos que $\kappa \leq c(\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa))$, podremos concluir las restantes igualdades. Para esto bastará mostrar una familia celular de conjuntos abierto de $\sigma_x^\Box(\mathbb{R}^\kappa)$ de cardinalidad κ. Para cada $\alpha < \kappa$, tomamos conjuntos A_α y B_α abiertos en $\mathbb{R}$, tales que $x(\alpha) \in A_\alpha$ y $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$. Ahora, para cada $\alpha < \kappa$, definimos G_α, como el siguiente abierto caja
$$G_\alpha(\delta) = \begin{cases} B_\delta & \text{si } \alpha = \delta \\ A_\delta & \text{si } \alpha \neq \delta. \end{cases}$$

La familia $\mathcal{G} = \{G_\alpha \cap \sigma_x^\square(\mathbb{R}^\kappa) : \alpha < \kappa\}$ es una familia celular de abiertos en $\sigma_x^\square(\mathbb{R}^\kappa)$, y como $|\mathcal{G}| = \kappa$, concluimos nuestra demostración.

$\square$

Corolario 1.34. *Sean κ, τ cardinales infinitos, entonces*

$$\square\mathbb{R}^\kappa \simeq \square\mathbb{R}^\tau \text{ si y sólo si } \kappa = \tau.$$

DEMOSTRACIÓN.
Supongamos que $\psi : \square\mathbb{R}^\kappa \longrightarrow \square\mathbb{R}^\tau$ es un homeomorfismo. Sea $x \in \square\mathbb{R}^\kappa$, por la Proposición 1.10, sabemos que la componente conexa de x es $\sigma_x^\square(\mathbb{R}^\kappa)$. Por otro lado $\psi(\sigma_x^\square(\mathbb{R}^\kappa))$ debe ser la componente conexa de $\psi(x)$ en $\square\mathbb{R}^\tau$, es decir $\psi(\sigma_x^\square(\mathbb{R}^\kappa)) = \sigma_{\psi(x)}^\square(\mathbb{R}^\tau)$. En resumen tenemos que $\sigma_x^\square(\mathbb{R}^\kappa) \simeq \sigma_{\psi(x)}^\square(\mathbb{R}^\tau)$. Por la Proposición 1.33 concluimos que $\kappa = \tau$. La otra implicación es clara. $\square$

En la Sección 6 del Capítulo 3 se demostrará un resultado que generaliza el Corolario 1.34 (véase la Poposición 2.33).

CAPÍTULO 2

$C_\square(X)$

1. Propiedades básicas

Para un espacio X se denotará por X_0 al conjunto de puntos aislados de X y $X_1 = X \setminus X_0$. De ahora en adelante supondremos que cualquier espacio X considerado en este trabajo satisface:

(1) X_0 y X_1 son no vacíos,
(2) $|X_0| \geq \aleph_0$.

Denotaremos por $\widehat{C}(X_1)$ al conjunto

$$\{f \in C(X_1) : f \text{ se extiende continuamente a } X\};$$

así $\pi_{X_1}[C(X)] = \widehat{C}(X_1)$.

Para $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$, tomamos

$$A_{\widehat{x}}(X) = \{f \in C(X) : f\restriction_{X_1} = \widehat{x}\}.$$

Estos conjuntos son importantes ya que descomponen de manera conveniente para nuestro estudio a $C_\square(X)$, como se demostrará en el Teorema 2.9. Si $\widehat{0}$ es la función nula de $C(X_1)$, el conjunto $A_{\widehat{0}}(X)$ jugará un papel muy importante en la descripción de $C_\square(X)$. En lo que sigue, la operación $+$ en $\square\mathbb{R}^X$ denotará a la suma coordenada a coordenada. Cuando nos refiramos a $\square\mathbb{R}^X$ o a algunos de sus subconjuntos sin especificar su operación, nos estaremos refiriendo a $+$.

Lema 2.1. (1) $(\square\mathbb{R}^X, +)$ *es un grupo topológico.*
(2) $(C_\square(X), +)$ *es un grupo topológico.*
(3) $(A_{\widehat{0}}(X), +)$ *es un grupo topológico.*

Demostración.
(1) Se sabe que el producto caja de grupos topológicos es un grupo topológico ([**21**] pág. 175).
(2) No es difícil demostrar que si Z es grupo topológico y $H \subset Z$ tal que H es subgrupo de Z, entonces H con la topología de subespacio es grupo topológico. De aquí se sigue la conclusión, ya que $(C_\square(X), +)$ es subgrupo de $(\square\mathbb{R}^X, +)$.
(3) De igual manera que en (2) se concluye que $A_{\widehat{0}}(X)$ es grupo topológico, y que $A_{\widehat{0}}(X)$ es subgrupo de $(C_\square(X), +)$.

$\square$

Proposición 2.2. (1) *La familia $\{A_{\widehat{x}}(X) : \widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)\}$, es una partición de $C(X)$.*

(2) *Para todo $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$, $A_{\widehat{x}}(X)$ es cerrado en $C_\square(X)$.*

(3) *Para todo $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$, $A_{\widehat{x}}(X) \simeq A_{\widehat{0}}(X)$.*

(4) *Para todo $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$, $A_{\widehat{x}}(X)$ es un grupo topológico.*

(5) *Para todo $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$, $A_{\widehat{x}}(X)$ y $A_{\widehat{0}}(X)$ son topológicamente isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN.

(1) Si $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2 \in \widehat{C}(X_1)$ con $\widehat{x}_1 \neq \widehat{x}_2$, entonces $A_{\widehat{x}_1} \cap A_{\widehat{x}_2} = \emptyset$. Si $f \in C(X)$, entonces $f \in A_{f\restriction_{X_1}}(X)$. Por tanto $\{A_{\widehat{x}}(X) : \widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)\}$, es una partición de $C(X)$.

(2) Sea $h \in C(X) \setminus A_{\widehat{x}}(X)$, entonces existe $z \in X_1$ tal que $|h(z) - \widehat{x}(z)| = \epsilon > 0$. Sea O el abierto caja definido por

$$O(x) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } x \neq z, \\ \left(-\frac{\epsilon}{2} + h(z), \frac{\epsilon}{2} + h(z)\right) & \text{si } x = z. \end{cases}$$

Es claro que $h \in O \cap C(X)$. Si $g \in O \cap C(X)$, entonces $|g(z) - h(z)| < \frac{\epsilon}{2}$. Como $|h(z) - \widehat{x}(z)| = \epsilon$, entonces

$$\epsilon \leq |h(z) - g(z)| + |g(z) - \widehat{x}(z)|. \text{ Por tanto}$$

$$\frac{\epsilon}{2} \leq |g(z) - \widehat{x}(z)|; \text{ luego}$$

$g \in C(X) \setminus A_{\widehat{x}}(X)$.

Observemos que para $f_0 \in A_{\widehat{x}}(X)$ fija, tenemos que $A_{\widehat{x}}(X) = A_{\widehat{0}}(X) + f_0$. En efecto, sea $g \in A_{\widehat{x}}(X)$, entonces $g - f_0 \in A_{\widehat{0}}(X)$; luego $g \in A_{\widehat{0}}(X) + f_0$. Por otro lado, si $h \in A_{\widehat{0}}(X)$, es claro que $h + f_0 \in A_{\widehat{x}}(X)$. Ahora usamos la Proposición 1.11 partes (3) y (4): ya que $A_{\widehat{x}}(X)$ es una clase lateral en $C(X)$ módulo el subgrupo $A_{\widehat{0}}(X)$, entonces concluimos (3), (4) y (5). □

El siguiente Lema será muy util

Lema 2.3. *Sea X un espacio topológico y Y un subconjunto de X que contiene a X_0, entonces la función $\phi = \pi_Y \restriction_{A_{\widehat{0}}(X)}: A_{\widehat{0}}(X) \longrightarrow \square\mathbb{R}^Y$ es una inmersión del grupo topológico $A_{\widehat{0}}(X)$ en el grupo topológico $\square\mathbb{R}^Y$.*

DEMOSTRACIÓN.

ϕ es inyectiva. En efecto, si $f, g \in A_{\widehat{0}}(X)$ tales que $\phi(f) = \phi(g)$, entonces $f\restriction_Y = g\restriction_Y$. Es decir $f\restriction_{X_0} = g\restriction_{X_0}$; como además para todo $z \in X_1$, tenemos que $f(z) = 0 = g(z)$, entonces tenemos la igualdad. Por otro lado, como $(f-g)\restriction_Y = f\restriction_Y - g\restriction_Y$, concluimos que ϕ es un morfismo de grupo.

Ahora, para cada $x \in Y$, sea O_x un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in O_x$. Entonces

$$\phi^{-1}\left[\prod_{x \in Y} O_x\right] = A_{\widehat{0}}(X) \cap \prod_{x \in X} H_x,$$

donde $H_x = O_x$ si $x \in Y$ y $H_x = \mathbb{R}$ si $x \in X \setminus Y$. Así que ϕ es continua. Y si para cada $x \in X$, tenemos que H_x es un abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a 0, tenemos que

$$\phi\left[\prod_{x\in X} H_x \cap A_{\widehat{0}}(X)\right] = \prod_{x\in Y} H_x \cap \phi[A_{\widehat{0}}(X)]$$

Esto es suficiente para asegurar que ϕ es abierta en su imagen, y por tanto concluir la demostración. $\square$

2. Una partición de $\square\mathbb{R}^{X_0}$

Sea Y un conjunto, $S \subset Y, T = Y\setminus S$ y $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ una partición de S (es decir, $F_n \neq \emptyset$ para cada $n < \omega$, si $n \neq m$, entonces $F_n \cap F_m = \emptyset$ y $\cup_{n<\omega} F_n = S$). Definimos $E(\mathcal{F}) \subset \mathbb{R}^Y$ como $E(\mathcal{F}) = \cap_{k<\omega} E_k(\mathcal{F})$, y $E_k(\mathcal{F}) = \cup_{m<\omega} E_{k,m}(\mathcal{F})$, donde $E_{k,m}(\mathcal{F})$ es el conjunto caja definido por:

$$E_{k,m}(\mathcal{F})(x) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } x \in F_i \text{ e } i \leq m, \\ \left[-\frac{1}{2^{i+k}}, \frac{1}{2^{i+k}}\right] & \text{si } x \in F_i \text{ y } m < i, \\ \mathbb{R} & \text{si } x \in T. \end{cases}$$

Veamos algunas propiedades de los conjuntos así definidos.

Lema 2.4. *Sea Y un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una partición de $S \subset Y$, entonces*

(1) *Para todo $f \in \mathbb{R}^Y$, $f \in E(\mathcal{F})$ si y sólo si existe una sucesión $\{m_k < \omega : k < \omega\}$ estrictamente creciente tal que $f \in E_{k,m_k}(\mathcal{F})$, para todo $k < \omega$.*
(2) *$E(\mathcal{F})$ es cerrabierto en $\square\mathbb{R}^Y$.*
(3) *$E(\mathcal{F})$ es un subgrupo topológico de $\square\mathbb{R}^Y$.*

DEMOSTRACIÓN.
El inciso (1) es evidente. Para demostrar (2) se puede seguir la demostración del Teorema 1.9.

(3) Sea $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ la partición de S. Mostraremos que si $f, g \in E(\mathcal{F})$, entonces $f + g \in E(\mathcal{F})$. Para esto tomamos $\{m_k : k < \omega\}$ y $\{l_k : k < \omega\}$, sucesiones tales que para todo $k < \omega$ y para todo $i > m_k$, si $x \in F_i$ entonces $f(x) \in \left[-\frac{1}{2^{i+k}}, \frac{1}{2^{i+k}}\right]$, y para todo $j > l_k$, si $y \in F_j$ entonces $g(y) \in \left[-\frac{1}{2^{j+k}}, \frac{1}{2^{j+k}}\right]$.
Tomamos $t_{k-1} = máx\{m_k, l_k\}$ para $k \geq 1$. Si demostramos que $f + g \in E^{k-1,t_{k-1}}(\mathcal{F})$ para todo $k \geq 1$, habremos terminado. Para esto, sea $i > t_{k-1}$ y $x \in F_i$. Tenemos que $i > m_k$ e $i > l_k$, por tanto $f(x), g(x) \in \left[-\frac{1}{2^{i+k}}, \frac{1}{2^{i+k}}\right]$ o sea que

$$f(x) + g(x) \in \left[-\frac{1}{2^{i+k-1}}, \frac{1}{2^{i+k-1}}\right].$$

Es claro que la operación suma coordenada a coordenada en $E(\mathcal{F})$ es asociativa. La función constante cero pertenece a $E(\mathcal{F})$, además, dada $f \in E(\mathcal{F})$, es claro que $-f \in E(\mathcal{F})$. En resumen, $E(\mathcal{F})$ es un subgrupo abeliano de $\square\mathbb{R}^Y$. Por el Lema 2.1, $\square\mathbb{R}^Y$ es un grupo topológico con estas mismas operaciones, por tanto $E(\mathcal{F})$ es un subgrupo topológico de $\square\mathbb{R}^Y$. $\square$

Recordaremos que para un espacio X, hemos denotado por X_0 el conjunto de puntos aislados de X y X_1 como el conjunto $X \setminus X_0$. Sea $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ una partición de X_0. Denotaremos por $E(\mathcal{F})$ al subconjunto de $\mathbb{R}^X$ construido antes del Lema 2.4, donde $Y = X$ y $S = X_0$. Denotaremos por $E_0(\mathcal{F})$ al subconjunto de $\mathbb{R}^{X_0}$ obtenido de manera similar pero ahora con $Y = S = X_0$.

Por el Lema 2.4, se tienen las siguientes propiedades de los conjuntos definidos:

(1) $f \in E_0(\mathcal{F})$ si y sólo si existe una sucesión $\{m_k < \omega : k < \omega\}$ estrictamente creciente tal que $f \in E_0^{km_k}(\mathcal{F})$, para todo $k < \omega$.
(2) $E_0(\mathcal{F})$ es un cerrabierto en $\Box\mathbb{R}^{X_0}$.
(3) $E_0(\mathcal{F})$ es un subgrupo topológico de $\Box\mathbb{R}^{X_0}$.

Ahora podemos iniciar una descomposición conveniente de $\Box\mathbb{R}^{X_0}$.

Definición 2.5. Dado un conjunto X y una relación de equivalencia R en X, *un sistema completo mínimo de representantes de clases* de la relación de equivalencia R es un conjunto Y tal que

(1) $Y \subset X$.
(2) Para todo $x \in X$, existe un único $y \in Y$ tal que xRy.
(3) *Si $y, z \in Y$ y $y \neq z$, entonces y y z no están relacionados por R.*

Dada una partición $\mathcal{F}$ de X_0, por el Axioma de Elección, podemos asumir la existencia de $D_0 \subset \mathbb{R}^{X_0}$, un sistema completo mínimo de representantes del grupo cociente $\Box\mathbb{R}^{X_0}/E_0(\mathcal{F})$. Por tanto

$$\Box\mathbb{R}^{X_0} = \oplus_{f \in D_0} E_0(\mathcal{F}) + f.$$

Es más, usando la Proposición 1.11, hemos demostrado que en realidad todos los sumandos en la última descomposición son homeomorfos entre sí. En lo que sigue usaremos particiones particulares de X_0 que mejorarán la partición de $\mathbb{R}^{X_0}$. En este sentido damos la siguiente definición.

Definición 2.6. Sean X un espacio topológico, A y B subconjuntos de X. Diremos que A es *casi-ω-resoluble con respecto a B(en forma abreviada: A es c-ω-rcra B)* si:

1. existe una partición $\{F_n : n < \omega\}$ de A, con $F_n \neq \emptyset$ para todo $n < \omega$,
2. tal que para todo conjunto abierto O de X con $O \cap B \neq \emptyset$, se cumple que

$$|\{n : F_n \cap O \neq \emptyset\}| = \aleph_0.$$

A la partición $\{F_n : n < \omega\}$ se le llamará *resolución de A respecto a B*.

Recordemos que nuestros espacios topológicos son Tychonoff. En lo sucesivo, si X es un espacio topológico, denotaremos por X_0 al conjunto de los puntos aislados de X, y por X_1 a su complemento $X \setminus X_0$. Además supondremos siempre que $X_0 \neq \emptyset \neq X_1$ y $|X_0| \geq \aleph_0$.

Proposición 2.7. *Si X_0 es c-ω-rcra X_1, entonces existe una resolución $\mathcal{F}$ de X_0 respecto a X_1, tal que si definimos $E_0(\mathcal{F})$ respecto a esta partición, entonces*

$$|\{E_0(\mathcal{F}) : f \in \mathbb{R}^{X_0}\}| = 2^{|X_0|}.$$

DEMOSTRACIÓN.

1. Supongamos que $cof|X_0| > \omega$ y que $\{H_n : n < \omega\}$ es una resolución de X_0 respecto a X_1. Notemos que $|\cup_{n<\omega} H_n| = sup_{n<\omega}|H_n| = |X_0|$. No puede ser que $|H_n| < |X_0|$ para todo $n < \omega$, ya que $cof|X_0| > \omega$.

Sea $A \subset \omega$, tal que $n \in A$ si y sólo si $|H_n| = |X_0|$. Supongamos primero que $|A| < \aleph_0$. Digamos que $n_0 < \omega$ es tal que $n_0 \in A$ y $|H_n| < |X_0|$ si $n \geq n_0$. Sean $T = \cup_{n<n_0} H_n$ y $\{F'_n : n < \omega\}$ una partición de T, donde $|F'_n| = |X_0|$ para toda $n < \omega$.

Tomamos

$$F_0 = F'_0 \cup H_{n_0}$$

y en general definimos

$$F_n = F'_n \cup H_{n_0+n}.$$

Es claro que $\{F_n : n < \omega\}$ es una resolución de X_0 respecto a X_1 con $|F_n| = |X_0|$.

Si $|A| = \aleph_0$, entonces existe una sucesión $\{m_n < \omega : n < \omega\}$, estrictamente creciente, tal que $|H_{m_n}| = |X_0|$ para toda $n < \omega$. Definimos ahora

$$F_0 = \cup_{0 \leq n \leq m_0} H_n,$$

y para $n > 0$

$$F_n = \cup_{m_{n-1} < n \leq m_n} H_n.$$

Es fácil observar que $\{F_n : n < \omega\}$ es una resolución de X_0 respecto de X_1 y además $|F_n| = |X_0|$.

En resumen, si $cof|X_0| > \omega$, entonces existe una resolución $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ de X_0 respecto a X_1 tal que para todo $n < \omega$ se cumple que $|F_n| = |X_0|$.

Podemos indicar cada $F_n = \{x^n_\delta : \delta < |X_0|\}$.

Para $B \subset |X_0|$, tomaremos $f_B \in \mathbb{R}^{X_0}$ definida como:

$$f_B(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} & \text{si } y = x^n_\delta \text{ con } \delta \in B \text{ y } 0 < n < \omega, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Demostraremos que si $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(|X_0|)$ son dos conjuntos diferentes, entonces $f_{B_1} \not\approx_0 f_{B_2}$. Supongamos que $\delta \in B_1 \setminus B_2$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_{B_1}(x^n_\delta) = \frac{1}{2^{n-1}}$ pero $f_{B_2}(x^n_\delta) = 0$. En otras palabras $(f_{B_1} - f_{B_2})(x^n_\delta) = \frac{1}{2^{n-1}} \notin [-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$. Lo cual significa que $f_{B_1} - f_{B_2} \notin E_{0,0}(\mathcal{F})$. Por tanto, $f_{B_1} - f_{B_2} \notin E_0(\mathcal{F})$. Entonces

$$|\{E_0(\mathcal{F}) : f \in \mathbb{R}^{X_0}\}| \geq 2^{|X_0|},$$

por tanto

$$|\{E_0(\mathcal{F}) + f : f \in \mathbb{R}^{X_0}\}| = 2^{|X_0|}.$$

2. Ahora supongamos que $cof|X_0| = \omega$ y que $\{H_n : n < \omega\}$ es una resolución de X_0 respecto de X_1. Si existe n_0 tal que $|H_{n_0}| = |X_0|$, entonces procedemos igual que en el caso anterior: sea $\{F'_n : n < \omega\}$ una partición de H_{n_0} con $|F'_n| = |X_0|$. Definimos:

$$F_n = H_n \cup F'_n \text{ si } n \neq n_0 \text{ y}$$

$$F_{n_0} = F'_{n_0}.$$

Así, si $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$, $\mathcal{F}$ es una resolución de X_0 respecto a X_1, que además cumple que $|F_n| = |X_0|$. Siguiendo un razonamiento como en (1) tenemos

$$|\{E_0(\mathcal{F}) + f : f \in \mathbb{R}^{X_0}\}| = 2^{|X_0|}.$$

Ahora supongamos que para todo $n < \omega$ se tiene que $|H_n| < |X_0|$. Sea $\mathcal{F} = \{H_n : n < \omega\}$ y

$$\alpha_0 = mín\{|H_n| : |H_n| > |H_0|\}$$

y para $n > 0$, sea

$$\alpha_n = mín\{|H_m| : |H_m| > max\{|H_0|, ...|H_n|, \alpha_{n-1}\}\}.$$

Se cumple

a) $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < .... < \alpha_{n<} ... < |X_0|$, y
b) $sup_{n<\omega}\alpha_n = |X_0|$.

La parte a) se cumple por la definición.

Demostraremos b). Sea $\kappa = sup_{n<\omega}\alpha_n$. Si $\kappa < |X_0|$, como $sup_{n<\omega} \mid H_n \mid= |X_0|$, entonces existe $n < \omega$ tal que $\kappa < |H_n| < |X_0|$. Por otro lado $|H_n| < \alpha_n$, lo cual es una contradicción.

Para cada $n < \omega$, indicaremos $H_n = \{x^n_\beta : \beta < |H_n|\}$. Para $A \in \mathcal{P}(|X_0|)$, definimos $f_A \in \mathbb{R}^{X_0}$ como

$$f_A(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} & \text{si } y = x^n_\beta \text{ con } \beta \in A \text{ y } n > 0, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Sean $A, B \in \mathcal{P}(|X_0|)$ diferentes y $n < \omega$. Digamos que $\beta \in A \setminus B$. Tomamos $m_0 = mín\{m : \beta < \alpha_m\}$. Sea $n_0 < \omega$, tal que $|H_{n_0}| = \alpha_{m_0}$. Como $\beta < \alpha_m$ para todo $m \geq m_0$, existe $l > máx\{n_0, n\}$ tal que $|H_l| = \alpha_m$ con $m \geq m_0$. Tomamos $x^l_\beta \in H_l$. Bajo estas condiciones tenemos que $f_A(x^l_\beta) = \frac{1}{2^{l-1}}$ y $f_B(x^l_\beta) = 0$.

Por tanto $(f_A - f_B)(x^l_\beta) = \frac{1}{2^{l-1}} \notin [-\frac{1}{2^l}, \frac{1}{2^l}]$. Con lo cual concluimos que $(f_A - f_B) \notin E_{0,n_0}(\mathcal{F})$, es decir $(f_A - f_B) \notin E_0(\mathcal{F})$. Con lo cual obtenemos $2^{|X_0|}$ diferentes clases en $\square\mathbb{R}^{X_0}/E_0(\mathcal{F})$. Por tanto

$$\mid \{E_0(\mathcal{F}) + f : f \in \mathbb{R}^{X_0}\} \mid= 2^{|X_0|}.$$

□

3. Una descomposición de $C_\square(X)$

Queremos mejorar la calidad de la partición del Teorema 2.2. Antes presentamos unos lemas técnicos.

Lema 2.8. *Sean S y T dos subconjuntos de un espacio topológico Y. Si S es c-ω-rcra$T$, $g \in C(Y)$, $\{F_n : n < \omega\}$ es una resolución de S respecto a T, y*

$$O_g = \left[\left(\prod_{n<\omega} \prod_{x \in F_n} \left(g(x) - \frac{1}{2^n}, g(x) + \frac{1}{2^n} \right) \right) \times \mathbb{R}^{Y \setminus S} \right] \cap C(Y),$$

entonces para cualquier $h \in O_g$ se tiene

$$g \restriction_T = h \restriction_T .$$

DEMOSTRACIÓN.

Tomemos $h \in O_g$ y supongamos que existe $z \in T$ tal que $0 < | h(z) - g(z) | = \epsilon$. Sea $r < \omega$ tal que para todo $n > r$, se tiene que $\frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{3}$. Ahora sea $V \in \mathcal{V}(z)$ (donde $\mathcal{V}(z)$ es el conjunto de las vecindades de z) tal que

$$g(V) \subset (g(z) - \tfrac{\epsilon}{3}, g(z) + \tfrac{\epsilon}{3}) \text{ y } h(V) \subset (h(z) - \tfrac{\epsilon}{3}, h(z) + \tfrac{\epsilon}{3}).$$

Como $\{F_n : n < \omega\}$ es una resolución de S respecto a T y $V \cap T \neq \emptyset$, existen $n > r$ y $x \in S$ tal que $x \in F_n \cap V$. Para esta x se cumple

$$| h(x) - g(x) | < \frac{\epsilon}{3},\ | h(z) - h(x) | < \frac{\epsilon}{3} \ \text{ y } \ | g(x) - g(z) | < \frac{\epsilon}{3},$$

luego

$$|h(z) - g(z)| < \epsilon,$$

lo cual no es posible, así que $h(z) = g(z)$ para todo $z \in X_1$. □

Proposición 2.9. *Si X es un espacio topológico, X_0 los puntos aislados de X, $X_1 = X \setminus X_0$ y X_0 es c-ω-rcra X_1, entonces*

(1) *para todo $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$, $A_{\widehat{x}}(X)$ es cerrabierto en $C_\Box(X)$, y*

(2) $C_\Box(X) \simeq \oplus_{\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)} A_{\widehat{x}}(X)$.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Por el Lema 2.2, sólo debemos demostrar que $A_{\widehat{x}}(X)$ es abierto. Por el Lema 2.8, si $g \in A_{\widehat{x}}(X)$ y

$$O_g = \left[\left(\prod_{n<\omega} \prod_{x \in F_n} \left(g(x) - \frac{1}{2^n}, g(x) + \frac{1}{2^n} \right) \right) \times \mathbb{R}^{X_1} \right] \cap C(X),$$

entonces $O_g \subset A_{\widehat{x}}(X)$.

Por tanto $A_{\widehat{x}}(X)$, es cerrabierto en $C_\Box(X)$.

(2) Bastará observar que $\{A_{\widehat{x}}(X) : \widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)\}$ es una partición de $C(X)$. □

Sea $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ una partición de X_0. Notar que:

1. Si $f \in A_{\widehat{0}}$, entonces $E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}} + f$, la clase de f en el grupo cociente $A_{\widehat{0}}(X)/E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)$, es igual al conjunto $\{g \in A_{\widehat{0}}(X) : f - g \in E(\mathcal{F})\}$.

2. Si X_0 es c-ω-rcra X_1 y $\mathcal{F}$ es una resolución de X_0 respecto a X_1, entonces $E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)$ es un subgrupo cerrabierto de $A_{\widehat{0}}(X)$.

Esto último nos permite una partición adecuada de $A_{\widehat{0}}(X)$.

Proposición 2.10. *Sea $\mathcal{F}$ una partición de X_0. Respecto a esta partición definimos $E(\mathcal{F})$. Entonces:*

1. *Si X_0 es c-ω-rcra X_1 y $\mathcal{F}$ es una resolución de X_0 respecto a X_1, entonces para todo $f \in A_{\widehat{0}}$, $\left[E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)\right] + f$ es un conjunto cerrabierto en $A_{\widehat{0}}$.*
2. *Si X_0 es c-ω-rcra X_1 y $\mathcal{F}$ es una resolución de X_0 respecto a X_1, entonces existe $D_1 \subset A_{\widehat{0}}$ tal que $A_{\widehat{0}} = \oplus_{f\in D_1}\left(\left[E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)\right] + f\right)$.*
3. *Para cada $f \in A_{\widehat{0}}$, $\left[E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)\right] + f$ es un grupo topológico.*
4. *Para cada $f \in A_{\widehat{0}}$, $\left[E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)\right] + f \simeq \left[E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)\right]$. Es más, $\left[E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)\right] + f$ y $\left[E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)\right]$ son topológicamente isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN.
Por la Proposición 1.11 y usando la parte 2 del comentario previo a esta proposición, obtenemos la demostración de todos los incisos de la proposición. □

Corolario 2.11. *Si X_0 es c-ω-rcra X_1, entonces*

$$\begin{aligned} C_\square(X) &\simeq \oplus_{\widehat{x}\in\widehat{C}(X_1)}(\oplus_{f\in D_1}([E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)] + f))_{\widehat{x}} \\ &\simeq \oplus_{\widehat{x}\in\widehat{C}(X_1), f\in D_1}([E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)])_{\widehat{x},f}. \end{aligned}$$

4. Cuando $C_\square(X)$ es un producto caja, primera parte

Fijamos una partición $\mathcal{F}$ de X_0. Tomemos $E(\mathcal{F})$ y $E_0(\mathcal{F})$ con respecto a $\mathcal{F}$ como se definió en la Sección 2 de este capítulo. Veamos algunas relaciones entre estos conjuntos.

Lema 2.12. *Sea $\mathcal{F}$ una partición de X_0 y $f, g \in \mathbb{R}^X$, entonces $E(\mathcal{F}) + f = E(\mathcal{F}) + g$ si y sólo si $E_0(\mathcal{F}) + f \restriction_{X_0} = E(\mathcal{F}) + g \restriction_{X_0}$.*
En particular si $f, g \in A_{\widehat{0}}(X)$, entonces $E(\mathcal{F}) + f = E(\mathcal{F}) + g$ si y sólo si $E_0(\mathcal{F}) + f \restriction_{X_0} = E(\mathcal{F}) + g \restriction_{X_0}$.

DEMOSTRACIÓN.
Es claro que si demostramos:
(1) si $f, g \in \mathbb{R}^X$ y $f - g \notin E(\mathcal{F})$, entonces $f \restriction_{X_0} - g \restriction_{X_0} \notin E_0(\mathcal{F})$ y
(2) si $f, g \in \mathbb{R}^X$ y $f - g \in E(\mathcal{F})$, entonces $f \restriction_{X_0} - g \restriction_{X_0} \in E_0(\mathcal{F})$,
el Lema estará probado.

Tomamos $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ y

$$E_{0,(k,m)}(\mathcal{F})(x) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } x \in F_i \text{ e } i \leq m, \\ \left[-\frac{1}{2^{i+k}}, \frac{1}{2^{i+k}}\right] & \text{si } x \in F_i \text{ y } m < i. \end{cases}$$

$E_{0,(k,m)}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{R}^{X_0}$ y $E_0(\mathcal{F}) = \cap_{k<\omega} E_{0,k}$ donde $E_{0,k} = \cup_{m<\omega} E_{0,(k,m)}$.
(1) Sean$f, g \in \mathbb{R}^X$. Si $f - g \notin E(\mathcal{F})$, entonces existe $k_0 < \omega$ tal que para todo $m < \omega$, existen $i_m > m$ y $x_{i_m} \in F_{i_m}$ tales que

$$f(x_{i_m}) - g(x_{i_m}) \notin \left[-\frac{1}{2^{i_m+k_0}}, \frac{1}{2^{i_m+k_0}}\right].$$

Esto significa que $f\restriction_{X_0} - g\restriction_{X_0} \notin E_{0,(k_0,m)}$, para todo $m < \omega$.

(2) Si $f, g \in \mathbb{R}^X$ y $f - g \in E(\mathcal{F})$, entonces existe una sucesión $\{m_k < \omega : k < \omega\}$ estrictamente creciente, tal que $f - g \in E_{k,m_k}(\mathcal{F})$; es decir,

$$f\restriction_{X_0} - g\restriction_{X_0} = (f-g)\restriction_{X_0} \in E_{0,(k,m_k)}(\mathcal{F}),$$

lo cual significa que $f\restriction_{X_0} - g\restriction_{X_0} \in E_0(\mathcal{F})$. $\square$

Continuemos con propiedades de los conjuntos $E(\mathcal{F})$ y $E_0(\mathcal{F})$.

Lema 2.13. *Para una partición $\mathcal{F}$ de X_0, se cumple que $E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)$ está inmerso cerradamente en $E_0(\mathcal{F})$.*

DEMOSTRACIÓN.
Definimos

$$F = \pi_{X_0}\restriction_{E(\mathcal{F})\cap A_{\widehat{0}}(X)} : E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X) \longrightarrow E_0(\mathcal{F}) \text{ es decir } F(g) = g\restriction_{X_0},$$

a) Como $F\left[E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)\right] \subset E_0(\mathcal{F})$, por el Lema 2.3 tenemos que F es inmersión.

b) Afirmamos que $F\left[E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)\right]$ es cerrado en $E_0(\mathcal{F})$. Sea $t \in E_0(\mathcal{F}) \setminus F\left[E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)\right]$. En otras palabras, t no tiene una extensión continua a X que pertenezca a $A_{\widehat{0}}$. O sea, existen $z \in X_1$ y $\epsilon > 0$ tales que para toda $V \in \mathcal{V}(z)$, $t(V \cap X_0) \setminus (-\epsilon, \epsilon) \neq \emptyset$.
Para toda $V \in \mathcal{V}(z)$ definimos

$$D_V = (V \cap X_0) \setminus t^{-1}[(-\epsilon, \epsilon)] \text{ y}$$
$$D = \cup_{V \in \mathcal{V}(z)} D_V.$$

Para toda $x \in D$, existe $\epsilon_x > 0$, tal que

$$(-\epsilon_x + t(x), \epsilon_x + t(x)) \cap \left(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right) = \emptyset.$$

Es claro que

$$t \in O = \left(\prod_{x \in D} (-\epsilon_x + t(x), \epsilon_x + t(x)) \times \mathbb{R}^{X_0 \setminus D}\right) \cap E_0(\mathcal{F}).$$

Ahora sea $g \in O$. Si $V \in \mathcal{V}(z)$ y $x \in D_V$, entonces $g(x) \in (-\epsilon_x + t(x), \epsilon_x + t(x))$; o sea, $g(x) \notin \left(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Por tanto, g no tiene una extensión continua a X que pertenezca a $A_{\widehat{0}}$. Es decir $O \subset E_0(\mathcal{F}) \setminus F\left[E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)\right]$. $\square$

Nos gustaría saber bajo qué condiciones de la partición $\{F_n : n < \omega\}$ de X_0 que define los conjuntos $E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)$ y $E_0(\mathcal{F})$, la función F definida en la prueba del Lema 2.13 es un homeomorfismo. En este sentido tenemos el siguiente Lema.

Lema 2.14. *Sean $\{F_n : n < \omega\}$ una partición de X_0 y*

$$F = \pi_{X_0} \restriction_{E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)} : E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X) \longrightarrow E_0(\mathcal{F})$$

F es homeomorfismo si y sólo si para todo $n < \omega$, F_n es cerrado en X.

En particular como F siempre es morfismo de grupo podemos enunciar el Lema de la siguiente forma:

F es isomorfismo topológico si y sólo si para todo $n < \omega$, F_n es cerrado en X.

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que F es homeomorfismo y que algún F_{n_0} no es cerrado en X. Sea $z \in cl_X F_{n_0} \cap X_1$.

Notar que $[(cl_X F_{n_0}) \setminus F_{n_0}] \cap X_0 = \emptyset$ ya que los puntos de X_0 son puntos aislados.

Sea $\chi_{F_{n_0}} : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función carácteristica de F_{n_0} en X_0. Para cada $k < \omega$, definimos $m_k = n_0 + k$. La colección $\{m_k : k < \omega\}$ es trivialmente una sucesión estrictamente creciente.

Ahora si $i > m_k$ y $x \in F_i$, entonces $\chi_{F_{n_0}}(x) = 0 \in \left[-\frac{1}{2^{i+k}}, \frac{1}{2^{i+k}}\right]$.

Por tanto $\chi_{F_{n_0}} \in E_{0,(k,m_k)}$ para todo $k < \omega$, es decir $\chi_{F_{n_0}} \in E_0(\mathcal{F})$.

Sea $\chi'_{F_{n_0}} \in E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)$, tal que $F(\chi'_{F_{n_0}}) = \chi_{F_{n_0}}$; es decir $\chi'_{F_{n_0}} \in A_{\widehat{0}}(X)$ y es una extensión continua de $\chi_{F_{n_0}}$ en X. Para $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe $V \in \mathcal{V}(z)$ tal que $\chi'_{F_{n_0}}[V] \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Por construcción existe $x \in V \cap F_{n_0}$, para el cual $\chi'_{F_{n_0}}(x) = 1$, lo cual no puede ser cierto. Por tanto, F_{n_0} debe ser cerrado.

Ahora supongamos que la partición de X_0, $\{F_n : n < \omega\}$, está formada por conjuntos cerrados de X. Si $h \in E_0(\mathcal{F})$ y $h' \in \mathbb{R}^X$ con $h' \restriction_{X_0} = h$ y $h'(z) = 0$ para todo $z \in X_1$, entonces $h' \in A_{\widehat{0}}(X)$.

En efecto, sean $z \in X_1$, $\epsilon > 0$ y $\{m_k < \omega : k < \omega\}$ una sucesión estrictamente creciente, tal que $h \in E_{0,(k,m_k)}$ para todo $k < \omega$. Tomamos $k > 0$ tal que $\frac{1}{2^{m_k}} < \epsilon$. Si $y \in (X \setminus (\cup_{i \le m_k} F_i)) \cap X_0$, entonces $y \in F_i$ con $i > m_k$, por tanto se cumple que

$$h'(y) = h(y) \in \left[-\frac{1}{2^{i+k}}, \frac{1}{2^{i+k}}\right] \subset \left(-\frac{1}{2^{i+k-1}}, \frac{1}{2^{i+k-1}}\right) \subset \left(-\frac{1}{2^{m_k+k}}, \frac{1}{2^{m_k+k}}\right) \subset (-\epsilon, \epsilon).$$

Si $y \in X_1$, entonces $h'(y) = 0$. De todas formas

$$h'\left(X \setminus (\cup_{i \le m_k} F_i)\right) \subset (-\epsilon, \epsilon) \text{ y } h'(z) = 0 \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Concluimos que $h' \in A_{\widehat{0}}(X)$. Ahora, por el Lema 2.12 concluimos que $h' \in E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)$, y es claro que $F(h') = h$. Con esto concluimos que F es un homeomorfismo. □

Recordemos que espacio topológico significará espacio Tychonoff, además que X_0, X_1 son no vacíos y X_0 es infinito.

En esta sección estamos interesados en mostrar algunas condiciones en el espacio X que implican que $C_{\square}(X)$ es un producto caja. Veremos en el Teorema 2.21 que "X_0 es un subconjunto denso y F_σ en X" es una de las condiciones buscadas.

Proposición 2.15. *Sea X un espacio topológico, X_0 el conjunto de punto aislados de X, $X_1 = X \setminus X_0$, $\emptyset \neq X^b = X_1 \cap cl_X X_0$. Si X_0 es F_σ, entonces X_0 es c-ω-rcra X^b.*

En particular, si X_0 es un subconjunto denso y F_σ en X, entonces X_0 es c-ω-rcra X_1.

DEMOSTRACIÓN.
Notemos que si $\mathcal{H} = \{H_n : n < \omega\}$ es una familia de cerrados de X tal que $X_0 = \cup_{n<\omega} H_n$. Entonces H_n es un conjunto cerrabierto de X para cada $n < \omega$. Además, si existiera sólo un número finito de elementos de $\mathcal{H}$ no vacíos, entonces X_0 sería cerrado y no se cumpliría que $X^b \neq \emptyset$. Por lo cual podemos suponer que $H_n \neq \emptyset$ para todo $n < \omega$. Ahora si $F_0 = H_0$ y $F_n = H_n \setminus \cup_{i<n} H_i$ para $n > 0$, es claro que $\{F_n : n < \omega\}$ es una partición de X_0. Pero como cada H_n es un conjunto abierto, entonces cada F_n es un conjunto cerrado.

Para finalizar, veamos que $\{F_n : n < \omega\}$ es una resolución de X_0 respecto a X_b. Sea $z \in X^b$ y $V \in \mathcal{V}(z)$. Sea $A = \{n < \omega : V \cap F_n \neq \emptyset\}$. Si A es finito, entonces existe $n_0 < \omega$ tal que para todo $n > n_0$ se tiene que $V \cap F_n = \emptyset$. Como V y $X \setminus \cup_{n \leq n_0} F_n$ pertenecen a $\mathcal{V}(z)$, tendríamos que $(X \setminus \cup_{n\leq n_0} F_n) \cap V \cap X_0 = \emptyset$, lo cual no puede ser ya que $z \in cl_X(X_0)$. Por tanto A es infinito y $\{F_n : n < \omega\}$ es una resolución de X_0 respecto a X_1. □

En resumen tenemos que si X_0 es un subconjunto denso y F_σ en X, si $E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)$ y $E_0(\mathcal{F})$ se definen respecto a la partición de cerrados no vacíos $\mathcal{F}$, entonces

$$a)\ \Box\mathbb{R}^{X_0} = \oplus_{f \in D_0} (E_0(\mathcal{F}) + f) \text{ y}$$
$$b)\ C_\Box(X) \simeq \oplus_{\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)} \left(\oplus_{f \in D_1} \left(E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X) + f\right)\right)_{\widehat{x}},$$

donde los sumandos en a) son homeomorfos a los sumandos de b), D_0 es un sistema completo de representantes de las clases de equivalencia del grupo cociente $\Box\mathbb{R}^{X_0}/E_0(\mathcal{F})$, y D_1 es un sistema mínimo completo de representantes de las clases de equivalencia del grupo cociente $A_{\widehat{0}}(X)/E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)$.

Así que para establecer un homeomorfismo entre $\Box\mathbb{R}^{X_0}$ y $C_\Box(X)$, bastará demostrar que la cardinalidad del conjunto de sumandos en a) y b) en el párrafo anterior es la misma; es decir bastará demostrar que:

$$\left|\widehat{C}(X_1)\right| |D_1| = |D_0|.$$

Es claro que del Lema 2.12 tenemos

Lema 2.16.

$$|D_1| \leq |D_0|.$$

Es más

Lema 2.17. *Si X_0 es un subconjunto denso y F_σ en X, entonces*

$$\left|\widehat{C}(X_1)\right| \leq |D_0|.$$

Donde D_0 es un sistema completo de representantes de $\square\mathbb{R}^{X_0}/E_0(\mathcal{F})$, donde $\mathcal{F}$ es una partición de X_0 formada por conjuntos cerrados de X.

DEMOSTRACIÓN.

Definamos una relación en $\mathbb{R}^{X_0}$: Sean $f, g \in \mathbb{R}^{X_0}$, diremos que $f \sim g$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ y $z \in X_1$, existe $V \in \mathcal{V}(z)$ (donde $\mathcal{V}(z)$ es el conjunto de vecindades de z en X), tal que $(f-g)[V \cap X_0] \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Demostraremos que $\sim$ es una relación de equivalencia. Es claro que $f \sim f$ y que si $f \sim g$, entonces $g \sim f$. Ahora sean $f \sim g$ y $g \sim h$, $\epsilon > 0$, $z \in X_1$, tomamos $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(z)$ tales que

$$(f-g)[V_1 \cap X_0] \subset \left(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

$$(g-h)[V_2 \cap X_0] \subset \left(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

entonces

$$(f-h)[V_1 \cap V_2 \cap X_0] \subset (-\epsilon, \epsilon).$$

Por tanto $f \sim h$. Veamos las afirmaciones siguientes

Afirmación A. Sean $\mathcal{F}$ una partición de X_0 de conjuntos cerrados de X y $f, g \in \mathbb{R}^{X_0}$. Si $f \nsim g$, entonces $f - g \notin E_0(F)$. Es decir $|\mathbb{R}^{x_0}/\sim| \leq |D_0|$

Demostración de la Afirmación A.

Existen $z_0 \in X_1$ y $\epsilon_0 > 0$, tales que para cada $V \in \mathcal{V}(z_0)$, existe $x_V \in V \cap X_0$ tal que $(f-g)(x_V) \notin (-\epsilon_0, \epsilon_0)$. Sea $k < \omega$ tal que $\frac{1}{2^k} < \epsilon_0$. Sea $m < \omega$. Es claro que $V = (X \setminus \cup_{i \leq m} F_i) \in \mathcal{V}(z_0)$. Sea $x_V \in V \cap X_0$, tal que $(f-g)(x_V) \notin (-\epsilon_0, \epsilon_0)$. En particular existe $i_m > m$, tal que $x_V \in F_{i_m}$. Como $\left[-\frac{1}{2^{i_m+k}}, \frac{1}{2^{i_m+k}}\right] \subset \left[-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right] \subset (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, entonces $(f-g)(x_V) \notin \left[-\frac{1}{2^{i_m+k}}, \frac{1}{2^{i_m+k}}\right]$, es decir $(f-g) \notin E_{0,(k,m)}$ para todo $m < \omega$; de donde $f - g \in E_0(\mathcal{F})$.

Esto demuestra la Afirmación A.

Afirmación B. $\left|\widehat{C}(X_1)\right| \leq |\mathbb{R}^{X_0}/\sim|$.

Demostración de la Afirmación B.

Para cada $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$, elegimos una arbitraria extensión continua de $\widehat{x}$ a X, $f_{\widehat{x}}$, es decir $f_{\widehat{x}} \in A_{\widehat{x}}(X)$. Ahora sea

$$H : \widehat{C}(X_1) \longrightarrow \mathbb{R}^{X_0}/\sim,$$

donde

$$H(\widehat{x}) = [f_{\widehat{x}} \restriction_{X_0}] = \{g \in \mathbb{R}^{X_0} : f \sim g\} \in \mathbb{R}^{x_0}/\sim.$$

Es claro que si $g \in A_{\widehat{x}}(X)$, entonces $(f_{\widehat{x}} - g) \in A_{\widehat{0}}(X)$; así que para todo $z \in X_1$ y $\epsilon > 0$, existe $V \in \mathcal{V}(z)$ tal que $(f_{\widehat{x}} - g)[V] \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Por tanto $f_{\widehat{x}} \restriction_{X_0} \sim g \restriction_{X_0}$. Así que $H(\widehat{x})$ no depende de la elección de $f_{\widehat{x}}$, por lo que H es función. Veamos que H es inyectiva.

Notar que si $f, g \in C(X)$ con $f \restriction X_0 \sim g \restriction X_0$ y suponemos que existe $z \in X_1$, tal que $\epsilon = | f(z) - g(z) | > 0$. Por un lado existe $V \in \mathcal{V}(z)$ tal que

$$\text{para todo } t \in V \cap X_0 \text{ se cumple } \mid f(t) - g(t) \mid < \frac{\epsilon}{3},$$

$$\text{para todo } t \in V \text{ se cumple } \mid f(z) - f(t) \mid < \frac{\epsilon}{3} \text{ y}$$

$$\text{para todo } t \in V \text{ se cumple } \mid g(t) - g(z) \mid < \frac{\epsilon}{3}.$$

Así, sumando las desigualdades, obtenemos $\mid f(z) - g(z) \mid < \epsilon$. Lo cual es una contradicción. Por tanto $f(z) = g(z)$ para todo $z \in X_1$. Así que H es inyectiva.

Esto demuestra la Afirmación B.

En resumen tenemos que

$$|\mathbb{R}^{X_0} / \sim| \leq |D_0| \text{ y } \left|\widehat{C}(X_1)\}\right| \leq |\mathbb{R}^{X_0} / \sim|.$$

Por lo tanto

$$\left|\widehat{C}(X_1)\right| \leq |D_0|.$$

□

Corolario 2.18. *Si X_0 es un subconjunto denso y F_σ en X, entonces* $\left|\widehat{C}(X_1)\right| \cdot |D_1| \leq |D_0|$.

DEMOSTRACIÓN.
Usando los Lemas 2.16 y 2.17 se obtiene la conclusión. □

Vamos a tomar X cumpliendo que X_0 es F_σ y denso, y además la restricción:

(+) Existe una partición $\{F_n : n < \omega\}$ de X_0 formada por cerrados de X, y existe una partición de X_0, $\{C_\alpha \subset X_0 : \text{ con } \alpha < |X_0| \text{ y } |C_\alpha| = \aleph_0\}$, tal que para todo $\alpha < |X_0|$ y $n < \omega$, se tiene que $|C_\alpha \cap F_n| = 1$. Es decir, cada C_α puede ser enumerado de la siguiente forma:

$$C_\alpha = \{x_{\alpha,n} : n < \omega\},$$

con $x_{\alpha,n} \in F_n$ para todo $n < \omega$.

Con esta restricción obtenemos un primer acercamiento al teorema principal (ver Teorema 2.21).

Proposición 2.19. *Si X_0 es un subconjunto denso y F_σ en X y se cumple* (+), *entonces*

$$\Box\mathbb{R}^{X_0} \simeq C_\Box(X).$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\mathcal{F}$ una partición de X_0 formada por cerrados de X, que cumple $(+)$. Tomamos D_0 un sistema mínimo completo de representantes de $\Box\mathbb{R}^{X_0}/E_0(\mathcal{F})$, D_1 un sistema mínimo completo de representantes de $A_{\widehat{0}}(X)/E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X)$.

Si demostramos que $2^{|X_0|} \leq |D_1|$, ya que $|\mathbb{R}|^{|X_0|} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{|X_0|} = 2^{|X_0|}$ y $|D_0| \leq |\mathbb{R}|^{|X_0|}$, por el Corolario 2.18, tendríamos la igualdad

$$|\widehat{C}(X_1)||D_1| = |D_0|.$$

Así que existiría un homeomorfismo entre $\Box\mathbb{R}^{X_0}$ y $C_\Box(X)$ (recordar el comentario previo al Lema 2.16).

Enseguida demostraremos que $2^{|X_0|} \leq |D_1|$. Sea $A \in \mathcal{P}(|X_0|)$ y tomamos $f_A \in \mathbb{R}^X$ definida como

$$f_A(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} & \text{si } y \in C_\alpha \text{ con } y = x_{\alpha,n},\ \alpha \in A \text{ y } 1 \leq n < \omega, \\ 0 & \text{de cualquier otra forma.} \end{cases}$$

Resulta que $f_A \in A_{\widehat{0}}(X)$. En efecto, sea $z \in X_1$. Es claro que $f_A(z) = 0$. Ahora tomamos $\epsilon > 0$ y sea $k < \omega$ tal que $\frac{1}{2^k} < \epsilon$ y $V = X \setminus (\cup_{i \leq k} F_i)$. Es claro que $f_A[V] \subset (-\epsilon, \epsilon)$.

Sean $A, B \in \mathcal{P}(|X_0|)$ con $A \neq B$. Mostraremos que $f_A - f_B \notin E(\mathcal{F})$. Bastará ver que $f_A - f_B \notin E_0(\mathcal{F})$. Supongamos que existe $\alpha \in A \setminus B$. Entonces para todo $n < \omega$, tenemos que $f_A(x_{\alpha,n+1}) - f_B(x_{\alpha,n+1}) = \frac{1}{2^n} \notin \left[-\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right]$; esto es suficiente para concluir que $f_A - f_B \notin E_0(\mathcal{F})$, y de ahi que $f_A - f_B \notin E(\mathcal{F})$. Así que la función

$$T : \mathcal{P}(|X_0|) \longrightarrow A_{\widehat{0}}(X)/E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X) \text{ donde } T(A) = E(\mathcal{F}) \cap A_{\widehat{0}}(X) + f_A,$$

es inyectiva, y se concluye la proposición. □

De la prueba del Teorema 2.19 tenemos que si X_0 es un subconjunto denso y F_σ en X y se cumple $(+)$, entonces $|D_0| \leq |\mathbb{R}|^{|X_0|} = 2^{|X_0|} \leq |D_1|$, y por el Lema 2.16 sabemos que $|D_1| \leq |D_0|$; por lo tanto

$$|D_1| = |D_0| = 2^{|X_0|}$$

(comparar este resultado con el del Teorema 2.7); y podemos concluir el siguiente corolario.

Corolario 2.20. *Si X_0 es un subconjunto denso y F_σ en X y se cumple $(+)$, entonces*

$$A_{\widehat{0}}(X) \simeq \Box\mathbb{R}^{X_0}.$$

O sea $A_{\widehat{0}}(X) \simeq C_\Box(X)$.

Ahora veremos que sin la restricción $(+)$ en la Proposición 2.19 se tiene igual resultado.

Teorema 2.21. *Si X_0 es un subconjunto denso y F_σ en X, entonces*

$$C_{\square}(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}.$$

Además $A_{\widehat{0}}(X) \simeq C_{\square}(X)$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\mathcal{F} = \{F_i : i < \omega\}$ una familia de conjuntos cerrados de X que es una partición de X_0. Denotamos $\alpha_i = |F_i|$ y $F_i = \{x_i^\kappa : \kappa < \alpha_i\}$. Sea

$$\alpha = sup\{\alpha_i : i < \omega\}.$$

En realidad, $|X_0| = \alpha$.

Para $\delta < \alpha$, sea

$$C_\delta = \{x_i^\delta : \text{ si } i \text{ cumple que } \delta < \alpha_i\}$$

y

$$T = \{\delta < \alpha : |C_\delta| = \aleph_0\}.$$

Afirmamos que el subespacio $Y = X_1 \cup (\cup_{\delta\in T} C_\alpha)$ de X cumple que Y_0 (el conjunto de puntos aislados de Y) es F_σ y denso en Y, y además $(+)$. Es claro $Y_0 = \cup_{\delta\in T} C_\delta$. Sea $D_i = \{x_i^\delta : \delta < \alpha_i \text{ y } \delta \in T\}$. En realidad $D_i = Y \cap F_i$. Así que D_i es un conjunto cerrado de Y, $Y_0 = \cup_{i<\omega} D_i$ y $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Por tanto Y_0 es F_σ en Y.

Resulta que la familia $\{C_\delta : \delta \in T\}$ es una partición de Y_0 que cumple $(+)$. En efecto, veamos primero que para todo $z \in X_1$ se tiene que $z \in cl_Y Y_0$.

Con este propósito demostremos la siguiente afirmación:

Afirmación A. Existe $n_0 < \omega$ tal que para todo $\delta \in \alpha \setminus T$ se tiene $F_i \cap C_\delta = \emptyset$ cuando $i > n_0$.

Demostración de la Afirmación A.

Sea $\delta_0 = mín\ \alpha \setminus T$, (si $\alpha \setminus T = \emptyset$, estaríamos en el caso del Teorema 2.19). Escribimos C_{δ_0} de tal manera que:

$$C_{\delta_0} = \{x_{j_1}^{\delta_0}, x_{j_2}^{\delta_0}, ..., x_{j_r}^{\delta_0}\} \text{ con } j_1 < j_2 < ... < j_r.$$

Sea $\delta \in \alpha \setminus T$ y $C_\delta = \{x_{s_1}^\delta, ..., x_{s_t}^\delta\}$. Por definición de C_δ, tenemos que $\delta < \alpha_{s_l}$ y $x_{s_l}^\delta \in F_{s_l}$ para todo $l \in \{1, ..., t\}$. Como $\delta_0 \leq \delta$, entonces $\delta_0 < \alpha_{s_l}$ para cada $l \in \{1, ..., t\}$. Entonces, para cada $l \in \{1, ..., t\}$ existe $x_{s_l}^{\delta_0} \in C_{\delta_0}$ tal que $x_{s_l}^{\delta_0} \in F_{s_l}$, es decir, $s_l \in \{j_1, ..., j_r\}$ para todo $l \in \{1, ..., t\}$.

Ahora, si $i > j_r$ y $\delta \in \alpha \setminus T$ y $x \in C_\delta \cap F_i$, como $\delta_0 \leq \delta$ y $x = x_i^\delta$, por lo anterior $i \in \{j_1, ..., j_r\}$, lo cual no es posible. Si $n_0 = j_r$, n_0 cumple lo pedido.

Esto demuestra la Afirmación A.

Ahora continuamos la demostración del Teorema 2.21. Sea $z \in X_1$ y $V \in \mathcal{V}(z)$. Entonces $W = V \cap (X \setminus \cup_{n_0 \leq i} F_i) \in \mathcal{V}(z)$, pero $W \cap (\cup_{\delta\in\alpha\setminus T} C_\delta) = \emptyset$, así que $W \cap Y_0 \neq \emptyset$. Por tanto $Y_1 = X_1 \subset cl_Y Y_0$.

La **Afirmación A** demuestra además que $\cup_{\alpha\in\kappa\setminus T} C_\alpha$ es un cerrabierto de X. Por tanto

$$X = Y \oplus (\cup_{\alpha\in\kappa\setminus T} C_\alpha).$$

Por el Teoremas 2.19 y la Proposición 1.7 tenemos que

$$C_{\square}(X) \simeq C_{\square}(Y) \times C_{\square}(\cup_{\alpha\in\kappa\setminus T} C_\alpha) \simeq \square\mathbb{R}^{Y_0} \times \square\mathbb{R}^{\cup_{\alpha\in\kappa\setminus T} C_\alpha} \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}.$$

Ahora demostremos que $C_\Box(X) \simeq A_{\widehat{0}}(X)$. Recordemos que $X = Y \oplus \left(\bigcup_{\alpha\in\kappa\setminus T} C_\alpha\right)$, y que Y cumple que Y_0 es F_σ y denso en Y, junto con $(+)$, así que por el Corolario 2.20, tenemos que $C_\Box(Y) \simeq \{f \in C(Y) : f \restriction_{X_1} \equiv 0\} = A_{\widehat{0}}(Y)$. Por otro lado afirmamos que

$$A_{\widehat{0}}(X) \simeq A_{\widehat{0}}(Y) \times \Box\mathbb{R}^{Z_0}$$

donde $Z_0 = \left(\bigcup_{\alpha\in\kappa\setminus T} C_\alpha\right)$.

En efecto sea:

$$\psi : A_{\widehat{0}}(X) \longrightarrow A_{\widehat{0}}(Y) \times \Box\mathbb{R}^{Z_0} \text{ donde } \psi(f) = f \restriction_Y \times f \restriction_{Z_0} .$$

Es claro que para toda $f \in A_{\widehat{0}}(X)$, se tiene que $\psi(f) \in A_{\widehat{0}}(Y) \times \Box\mathbb{R}^{Z_0}$ y que ψ es inyectiva. Veamos que ψ es sobreyectiva: sean $\prec f_1, f_2 \succ \in A_{\widehat{0}}(Y) \times \Box\mathbb{R}^{Z_0}$, $x \in X_1 = Y_1$ y $\epsilon > 0$. Como $Y \in \mathcal{V}(x)$ (Y es cerrabierto en X), existe $O \in \mathcal{V}(x)$ tal que $f_1[O \cap Y] \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Ya que $(Y \cap O) \in \mathcal{V}(x)$, concluimos que $(f_1 \times f_2)$ es continua en x. Por tanto $(f_1 \times f_2) \in A_{\widehat{0}}(X)$.

Ahora si $O = \left(\prod_{x\in X} O_x\right) \cap A_{\widehat{0}}(X)$, tenemos que

$$\psi(O) = \left(\prod_{x\in Y} O_x\right) \cap A_{\widehat{0}}(Y) \times \left(\prod_{x\in Z_0} O_x\right).$$

Y si $V = \left(\prod_{x\in Y} V_Y\right) \cap A_{\widehat{0}}(Y) \times \prod_{x\in Z_0} V_x$, entonces

$$\psi^{-1}(V) = \left(\prod_{x\in X} V_x\right) \cap A_{\widehat{0}}(X).$$

Así que ψ es homeomorfismo. Como

$$A_{\widehat{0}}(X) \simeq A_{\widehat{0}}(Y) \times \Box\mathbb{R}^{Z_0} \simeq C_\Box(Y) \times \Box\mathbb{R}^{Z_0} \simeq C_\Box(X);$$

se concluye la demostración. □

A la luz del Teorema 2.21, obtenemos el siguiente corolario

Corolario 2.22. *Si $|X_0| = \aleph_0$ y $X_1 \subset cl_X X_0$, entonces $C_\Box(X) \simeq \Box\mathbb{R}^{\aleph_0}$. En particular, si $c(X) = \aleph_0$ y $X_1 \subset cl_X X_0$, entonces $C_\Box(X) \simeq \Box\mathbb{R}^{\aleph_0}$.*

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que $c(X) = \aleph_0$ y $|X_0| > \aleph_0$. La familia $\mathcal{H} = \{\{x\} : x \in X_0\}$, es una familia celular de X. Por tanto $|\mathcal{H}| \leq \aleph_0$, lo cual no es posible. Entonces $|X_0| = \aleph_0$ y por tanto F_σ. Así concluimos la demostración del corolario. □

Antes de ver algunos ejemplos recordemos que todo espacio X considerado satisface: X **es Tychonoff,** X_0**, el conjunto de puntos aislados de** X**, es infinito y** $X_1 = X \setminus X_0$ **es no vacío.**

Ejemplos 2.23. 1. Si X es separable y $\emptyset \neq X_1 \subset cl_X(X_0)$, entonces

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{\aleph_0}.$$

En efecto, sean $A \subset X$ un conjunto denso numerable y $x \in X_0$. Como $\{x\}$ es un abierto no vacío entonces $\{x\} \cap A = \{x\}$. Por tanto $X_0 \subset A$; o sea, X_0 es numerable. Si $X_1 \subset cl_X X_0$, entonces

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{\aleph_0}.$$

2. Si X es perfecto con $\emptyset \neq X_1 \subset cl_X(X_0)$, entonces $C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{\aleph_0}$.

Como resulta que X_0 es abierto en X, entonces X_0 es F_σ en X. Por tanto concluimos que

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{\aleph_0}.$$

3. Sea X un espacio metrizable o semi-estratificable o desarrollable, con $\emptyset \neq X_1 \subset cl_X(X_0)$, entonces $C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{\aleph_0}$.

Como todo metrizable o semi-estratificable o desarrollable es perfecto, tenemos que

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{\aleph_0}.$$

4. Si α es un ordinal numerable, entonces cualquier compactación $b([0,\alpha))$ del espacio $[0,\alpha)$ de ordinales menores que α cumple las condiciones del Corolario 2.22, por tanto

$$C_\square(b([0,\alpha))) \simeq \square\mathbb{R}^{\aleph_0}.$$

En particular

$$C_\square(\beta\omega) \simeq \square\mathbb{R}^{\aleph_0}.$$

5. Más general, si κ es un cardinal infinito de cofinalidad numerable y Y es un subconjunto de los ultrafiltros uniformes sobre κ (es decir $x \in Y$ y $A \in x$ implica que $|A| = \kappa$), entonces $C_\square(Y \cup \kappa) \simeq \square\mathbb{R}^{\kappa}$ en donde $Y \cup \kappa$ está considerado con la topología heredada de $\beta(\kappa)$. Recordar que la base de vecindades de los puntos $x \in \beta(\kappa)$ son los conjuntos $\bar{A} = \{z \in \beta(\kappa) : A \in z\}$ para $A \in x$. Así que $Y \subset cl_{Y\cup\kappa}\kappa$. Además $(Y \cup \kappa)_0 = \kappa$ y $(Y \cup \kappa)_1 = Y$. Ahora veamos que κ es F_σ en $Y \cup \kappa$. Sea $\{\kappa_n : n < \omega\}$ una sucesión estrictamente creciente y cofinal de κ. Tenemos que $\kappa = \cup_{n<\omega}\kappa_n$, afirmamos que $(Y \cup \kappa) \setminus [0, \kappa_n)$ es un conjunto abierto en $Y\cup\kappa$. Sea $x \in (Y\cup\kappa)\setminus[0,\kappa_n)$. Primero tomemos $x \in Y$. Supongamos que para todo $A \in x$, siempre $\bar{A} \cap [0,\kappa_n) \neq \emptyset$. Esto último significa que $A \cap [0,\kappa_n) \neq \emptyset$, por lo cual $[0,\kappa_n) \in x$, pero $|[0,\kappa_n)| < \kappa$, lo cual es una contradicción. Ahora si $x \in \kappa$, el abierto de $Y \cup \kappa$ $\{x\}$ no intersecta con $[0,\kappa_n)$.

6. Si $\mathcal{E}$ es una familia casi ajena maximal de ω. Tomamos $\Psi = \mathcal{E} \cup \omega$. Dotamos a Ψ de la topología en donde los puntos de ω son aislados y las vecindades de $E \in \mathcal{E}$ son conjuntos de la forma $\{E\} \cup B$ en donde $B \subset \omega$ y $|B \setminus E| < \aleph_0$. Este espacio es llamado el espacio de Mrówka, el cual cumple $\Psi_0 = \omega$ y $\Psi_1 \subset cl_\Psi \Psi_0$. Por tanto

$$C_\square(\Psi) \simeq \square\mathbb{R}^{\aleph_0}.$$

5. Cuando $C_\Box(X)$ es un producto caja, segunda parte

Aquí, como antes, X_0 son los puntos aislados de X y $X_1 = X \setminus X_0$, $X_0 \neq \emptyset \neq X_1$ y X es Tychonoff. El objetivo de esta sección es encontrar condiciones más débiles que la condición "X_0 es F_σ y denso en X", que nos proporcionen relaciones interesantes entre $C_\Box(X)$ y $\Box\mathbb{R}^{X_0}$. Para lograr esto, estudiaremos la estructura de las vecindades en un punto.

Para cada $x \in X$, hemos denotado como $\mathcal{V}(x)$ al conjunto de vecindades de x en la topología de X. Como en esta sección supondremos que para cada espacio X, $X_1 \subset cl_X X_0$, si $\mathcal{V}_0(x) = \{V \cap X_0 : V \in \mathcal{V}(x)\}$, entonces $\mathcal{V}_0(x)$ es un filtro en X_0 para cada $x \in X_1$.

Lema 2.24. *Si $x \in X_1$ y $\mathcal{V}_0(x)$ se define como la colección $\{V \cap X_0 : V \in \mathcal{V}(x)\}$, entonces $\mathcal{V}_0(x)$ es un filtro en X_0*

DEMOSTRACIÓN.
Bastará demostrar que si $B \in \mathcal{P}(X_0)$ y $V \in \mathcal{V}(x)$ es tal que $V \cap X_0 \subset B$, entonces $B \in \mathcal{V}_0(x)$. Pero B es un conjunto abierto de X, así que $B \cup V \in \mathcal{V}(x)$. Como $B = (B \cup V) \cap X_0$, entonces $B \in \mathcal{V}_0(x)$. $\Box$

Recordemos que para cada espacio X, $A_{\widehat{0}}(X)$ denota al conjunto $\{f \in C(X) : f\restriction_{X_0} \equiv 0\}$.

Teorema 2.25. *Si para todo $x \in X_1$ tenemos que $\mathcal{V}_0(x)$ es un ultrafiltro en X_0, entonces son equivalentes*

(1) *X_0 es F_σ en X.*
(2) *X_0 es c-ω-rcra X_1.*
(3) *$C_\Box(X) \simeq \Box\mathbb{R}^{X_0}$ y X_0 es c-ω-rcra X_1.*
(4) *$A_{\widehat{0}}(X)$ es abierto en $C_\Box(X)$ y X_0 es c-ω-rcra X_1.*
(5) *$A_{\widehat{0}}(X) \simeq \Box\mathbb{R}^{X_0}$ y X_0 es c-ω-rcra X_1.*
(6) *$A_{\widehat{0}}(X) \simeq C_\Box(X)$ y X_0 es c-ω-rcra X_1.*

DEMOSTRACIÓN.
(1) implica (2) por la Proposición 2.15.
Veamos que (2) implica (1). Sea $\{F_n : n < \omega\}$ una resolución de X_0 respecto a X_1. Fijamos $n < \omega$ y suponemos que existe $x \in clF_n \cap X_1$. O sea, para toda $V \in \mathcal{V}(x)$, se tiene que $V \cap F_n \neq \emptyset$. Así, para cada $V \cap X_0 \in \mathcal{V}_0(x)$, $V \cap F_n = (V \cap X_0) \cap F_n \neq \emptyset$. Como $\mathcal{V}_0(x)$ es ultrafiltro, $F_n \in \mathcal{V}_0(x)$. Sea $V' \in \mathcal{V}(x)$ tal que $F_n = V' \cap X_0$. Con lo cual tenemos que $F_m \cap V' = \emptyset$ cuando $n \neq m$, lo cual es una contradicción ya que $\{F_n : n < \omega\}$ es una resolución de X_0 respecto a X_1.
(1) implica (3): Por el Teorema 2.21 tenemos que $C_\Box(X) \simeq \Box\mathbb{R}^{X_0}$ y por la Proposición 2.15 tenemos que X_0 es c-ω-rcra X_1.
(3) implica (4): Por el Teorema 2.9, tenemos que $A_{\widehat{0}}(X)$ es abierto. Por tanto concluimos (4).
(4) implica (2): Esto es claro.
(1) implica (5): Por el Teorema 2.21 tenemos que $A_{\widehat{0}}(X) \simeq \Box\mathbb{R}^{X_0}$ y por la Proposición 2.15 tenemos que X_0 es c-ω-rcra X_1.
(5) implica (2): Esto es claro.
(1) implica (6): Por el Teorema 2.21 tenemos que $A_{\widehat{0}}(X) \simeq C\Box(X)$ y por la Proposición 2.15 tenemos que X_0 es c-ω-rcra X_1.

(6) implica (2): Es claro.

□

Una parte de (4) del Teorema 2.25 se puede obtener por otra condición. Veamos el siguiente Teorema

Proposición 2.26. *(1) Si X es c-ω-rcra X_1, entonces $A_{\widehat{x}}(X)$ es un conjunto abierto en $C_\square(X)$ para todo $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$.*

(2) X es c-ω-rcra X_1 si y sólo si $A_{\widehat{0}}(X)$ es un conjunto abierto en $C_\square(X)$.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Recordar que $A_{\widehat{x}}(X) = \{f \in C(X) : f \restriction_{X_1} = \widehat{x}\}$. Sea $\{F_n : n < \omega\}$ una resolución de X respecto a X_1 y

$$O_f = \left[\prod_{x \in F_n} \left(-\frac{1}{2^n} + f(x), \frac{1}{2^n} + f(x)\right)\right] \cap C_\square(X).$$

Es claro que $f \in O_f$. Repitiendo los mismos argumentos que en la demostración del Teorema 2.8 concluimos que para toda $g \in O_f$ se cumple que $f \restriction_{X_1} = g \restriction_{X_1}$; por lo cual $O_f \subset A_{\widehat{x}}(X)$. Por tanto $A_{\widehat{x}}(X)$ es abierto en $C_\square(X)$.

(2) Ahora supongamos que $A_{\widehat{0}}(X)$ es abierto. Sea $\bar{0} \in C(X)$ la función constante cero. Como $\bar{0} \in A_{\widehat{0}}(X)$, para cada $x \in X$ existe un abierto G_x de $\mathbb{R}$ tal que

$$\bar{0} \in \left(\prod_{x \in X} G_x\right) \cap C(X) \subset A_{\widehat{0}}(X).$$

Como $0 \in G_x$ para todo $x \in X$, podemos definir

$$d(x) = mín\{n < \omega : \left(-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right) \subset G_x\}$$

y

$$F_n = \{x \in X : d(x) = n\}.$$

Veamos ahora que $\{F_n : n < \omega\}$ es una resolución de X respecto a X_1. Para cada $x \in X$, es claro que $x \in F_{d(x)}$. Ahora si $n, m < \omega$ y $x \in F_m \cap F_n$, entonces $m = d(x) = n$. Así que $\{F_n : n < \omega\}$ es una partición de X.

Para finalizar, supongamos que existen $z \in X_1$, $V \in \mathcal{V}(z)$ vecindad abierta y $n_0 < \omega$, tales que $V \cap F_n = \emptyset$ para todo $n > n_0$.

Sea

$$H : X \longrightarrow \left[0, \frac{1}{2^{n_0+1}}\right] \text{ una función continua,}$$

tal que $H(X \setminus V) \subset \{0\}$ y $H(z) = \frac{1}{2^{n_0+1}}$ (recordemos que estamos suponiendo que X es Tychonoff).

Si $x \in V$, entonces $d(x) \leq n_0$. En efecto, si $m = d(x) > n_0$, entonces $x \in F_m$, pero $F_m \cap V = \emptyset$. Así que para todo $x \in V$ se tiene

$$\frac{1}{2^{n_0+1}} < \frac{1}{2^{d(x)}},$$

y además $H(x) \leq \frac{1}{2^{n_0+1}}$. Por tanto, para todo $x \in V$, $H(x) \in \left(-\frac{1}{2^{d(x)}}, \frac{1}{2^{d(x)}}\right) \subset G_x$. Ahora si $x \in X \setminus V$, trivialmente $H(x) = 0 \in G_x$. Así que

$$H \in \left(\prod_{x\in X} G_x\right) \cap C(X) \subset A_{\widehat{0}}(X).$$

Por tanto $H(z) = 0$, pero H está de tal manera definida que relaciona a z con $\frac{1}{2^{n_0+1}}$. Así hemos obtenido una contradicción. Por tanto $\{F_n : n < \omega\}$ es una resolución de X respecto a X_1. Ahora usando la parte (1) para $A_{\widehat{0}}(X)$, concluimos (2). □

Para finalizar esta sección veamos las relaciones entre la propiedad "X c-ω-rcra X_1" y la propiedad "X_0 c-ω-rcra X_1".

Proposición 2.27. *(a)Si X_0 es c-ω-rcra X_1, entonces X es c-ω-rcra X_1.*
(b) Existe un espacio topológico X tal que X es c-ω-rcra X_1, pero X_0 no es c-ω-rcra X_1.

Demostración.
(a) Sea $\{F_n : n < \omega\}$ una resolución de X_0 respecto de X_1. Tomamos la partición $\mathcal{P} = \{X_1\} \cup \{F_n : n < \omega\}$. Trivialmente $\mathcal{P}$ es una resolución de X respecto a X_1, ya que para todo $z \in X_1$ y toda $V \in \mathcal{V}(z)$, V intersecta una infinidad de elementos de $\mathcal{P}$.

(b) Si α es un cardinal de cofinalidad no numerable, entonces $\beta(\alpha)$ cumple lo pedido (ver el Ejemplo 2.29). □

En [**18**], es definida la noción de un espacio *casi-ω-resoluble.* Se dice que un espacio X es *casi-ω-resoluble* si existe una partición numerable de él tal que todo conjunto abierto de X intersecta una infinidad de elementos de tal partición. A tal partición se le llama *resolución* de X.

Proposición 2.28. *Si X_1 es casi-ω-resoluble, entonces X es c-ω-rcra X_1*

Demostración.
Sea $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ una resolución de X_1. Tomamos la partición

$$\mathcal{G} = \{X_0\} \cup \{F_n : n < \omega\}.$$

Sean $z \in X_1$ y $V \in \mathcal{V}(z)$. Es claro que $V \cap X_1 \neq \emptyset$ y es un conjunto abierto de X_1. Por tanto $V \cap X_1$ intersecta una infinidad de elementos en $\mathcal{F}$, por lo cual V intersecta una infinidad de elementos en $\mathcal{G}$. □

Observese que si X es c-ω-rcra X_1, entonces X_1 no tiene puntos aislados. En efecto, si $z \in X_1$ fuera aislado y $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ una resolución de X respecto a X_1, entonces $\{x\}$ intersectaría a una infinidad de elementos de $\mathcal{F}$, pero esto implicaría que algunos elementos de $\mathcal{F}$ no serían ajenos.

Con los últimos resultados, podemos presentar una clase de espacios que ejemplifican mejor las relaciones entre X_0 y X_1.

Ejemplos 2.29. Sea α un cardinal infinito de cofinalidad no numerable. Tomamos α con la topología discreta y $X = \beta(\alpha)$, entonces

1. X_0 no es F_σ

   Es claro que $X_0 = \alpha$ y $X_1 \subset cl_X X_0$. Sabemos que toda unión numerable de subconjuntos de X_0 de cardinalidad menor que α no pueden ser X_0. Si $A \subset X_0$ con $|A| = \alpha$, como $cl_X(A) = \{p \in X : A \in p\}$ y existe $q \in U(\alpha) \cap cl_X(A)$, donde $U(\alpha) = \{p \in X : |B| = \alpha$, para todo $B \in p\}$ que es el conjunto de los ultrafiltros uniformes (ver **[19]**), entonces A no puede ser cerrado en X. Si $A \subset X_0$ y cerrado en X, entonces $|A| < \alpha$, por tanto toda unión numerable de subconjuntos de X_0 cerrados en X no puede ser X_0.

2. X_0 no es c-ω-rcra X_1.

   Tenemos que
   $X_1 = \alpha^* = \beta(\alpha) \setminus \alpha$. Así que, si $p \in X_1$, p es un ultrafiltro libre en α. Sea $A \in p$ y

$$A^* = \{q \in \beta(\alpha) : A \in q\}, \text{ entonces } A^* \in \mathcal{V}(p).$$

   Como $A = A^* \cap \alpha = A^* \cap X_0 \in \mathcal{V}_0(p)$, $p \subset \mathcal{V}_0(p)$, es decir $p = \mathcal{V}_0(p)$. Así que para todo $p \in X_1$, $\mathcal{V}_0(p)$ es un ultrafiltro. Por el Teorema 2.25, tenemos que X_1 no es c-ω-rcra X_0, ya que X_0 no es F_σ.

3. $A_{\widehat{0}}(X)$ es un conjunto abierto en $C_\square(X)$.

   Para todo $x \in \alpha$, como $\{x\}$ es cerrabierto en α, entonces $\{x\}$ es cerrabierto en $\beta(\alpha)$, de aqui que α es abierto en X. Por tanto $X_1 = \beta(\alpha) \setminus \alpha$ es cerrado en $\beta(\alpha)$, o sea X_1 es compacto. Como los espacios sin puntos aislados que son compactos y T_2 (ver **[18]**) son casi-ω-resolubles, entonces X es c-ω-rcra X_1. Por el Teorema 2.26, tenemos que $A_{\widehat{0}}(X)$ es abierto.

6. Fórmulas de reducción I

Estamos interesados en hallar fórmulas de reducción para expresiones del tipo

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{f \in \mathcal{C}} (\square \mathbb{R}^{X_0})_f.$$

Consideremos el siguiente espacio topológico: Sea κ un cardinal infinito, denotamos por $D(\kappa)$ al espacio discreto de cardinalidad κ, $[0, \omega]$ el conjunto de ordinales menores o iguales a ω con la topología del orden y $E(\kappa) = [0, \omega] \times D(\kappa)$ el espacio producto. La topología de $E(\kappa)$ será la siguiente:

1. Los puntos de la forma $\prec n, \alpha \succ$ con $n < \omega$ y $\alpha < \kappa$, serán aislados.
2. Las vecindades V de los puntos de $\prec \omega, \alpha \succ$ con $\alpha < \kappa$, serán subconjuntos de $(\omega + 1) \times \{\alpha\}$, tales que $\prec \omega, \alpha \succ \in V$ y $| \omega \setminus \{n : n < \omega$ y $\prec n, \alpha \succ \in V\} | < \aleph_0$.

De esta forma tenemos que:

1. $(E(\kappa))_0 = \{\prec n, \alpha \succ : n < \omega, \alpha < \kappa\}$ y $| (E(\kappa))_0 | = \kappa$.
2. $(E(\kappa))_1 = \{\prec \omega, \alpha \succ : \alpha < \kappa\}$.
3. Para cada $n < \omega$, $F_n = \{\prec n, \alpha \succ : \alpha < \kappa\}$ es cerrado en $E(\kappa)$. Como $(E(\kappa))_0 = \cup_{n<\omega} F_n$, tenemos que $(E(\kappa))_0$ es F_σ en $E(\kappa)$.
4. Se cumple que $(E(\kappa))_0$ es un subconjunto denso y F_σ de $E(\kappa)$, ya que $(E(\kappa))_1 \subset cl_{E(\kappa)} (E(\kappa))_0$.

Así que usando el Teorema 2.21, las Proposiciones 2.2, 2.9 y 2.15, tenemos que

$$\square \mathbb{R}^\kappa \simeq C_\square(E(\kappa)) \simeq \oplus_{\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{C}}((E(\kappa))_1)} (\square \mathbb{R}^\kappa)_{\widehat{x}}.$$

Como el espacio $(E(\kappa))_1$ es el discreto de κ puntos, entonces $\widehat{C}((E(\kappa))_1) = \mathbb{R}^\kappa$. De hecho, si $f \in \mathbb{R}^\kappa$, existe una función $\bar{f}$ que extiende continuamente a f en $E(\kappa)$. Esta extensión puede definirse de la siguiente manera, para cada $\alpha < \kappa$, sea $\{a_n^\alpha : n < \omega\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a $f(\alpha)$, entonces $\bar{f}(\prec n, \alpha \succ) = a_n^\alpha$ si $n < \omega$ y $\alpha < \kappa$, además $\bar{f}(\prec \omega, \alpha \succ) = f(\alpha)$ para todo $\alpha < \kappa$. O sea que en realidad tenemos

$$\square\mathbb{R}^\kappa \simeq \oplus_{x \in \mathbb{R}^\kappa} (\square\mathbb{R}^\kappa)_x.$$

Con lo anterior hemos demostrado el siguiente lema:

Lema 2.30. *Para todo κ, cardinal infinito, $\square\mathbb{R}^\kappa$ admite una partición de 2^κ cerrabiertos, cada uno de ellos homeomorfo a $\square\mathbb{R}^\kappa$.*

Queremos determinar qué tan grandes pueden ser estas familias. En este sentido está la siguiente definición.

Definición 2.31. Sea X un espacio topológico. Si $\mathcal{C}$ es una partición de X formada por conjuntos cerrabiertos de X, donde cada uno de ellos es homeomorfo a X, diremos que $\mathcal{C}$ es *una partición homeomórfica de cerrabiertos en* X.

$Npah(X) = \min\{\kappa :$ no existe una partición homeomórfica de cerrabiertos de X de cardinalidad $\kappa\}$

De la definición tenemos siempre que $Npah(X) \leq |X|^+$.

Proposición 2.32. *Para todo cardinal infinito κ se tiene que:*

$$Npah(\square\mathbb{R}^\kappa) = (2^\kappa)^+ .$$

DEMOSTRACIÓN.
De la Definición 2.31 tenemos

$$Npah(\square\mathbb{R}^\kappa) \leq |\square\mathbb{R}^\kappa|^+ .$$

Como $|\square\mathbb{R}^\kappa| = 2^\kappa$, tenemos que $Npah(\square\mathbb{R}^\kappa) \leq (2^\kappa)^+$. Por otro lado, por el Lema 2.30, tenemos que $(2^\kappa)^+ \leq Npah(\square\mathbb{R}^\kappa)$. De aquí concluimos la igualdad. $\square$

Ahora presentamos una útil proposición, que nos permitirá reducir algunas sumas directas.

Proposición 2.33. *Sean τ, γ y κ cardinales inifinitos, entonces*

$$\oplus_{\alpha<\kappa} (\square\mathbb{R}^\tau)_\alpha \simeq \square\mathbb{R}^\gamma \text{ si y sólo si } \kappa \leq 2^\tau \text{ y } \gamma = \tau.$$

DEMOSTRACIÓN.
Supongamos que $\psi : \oplus_{\alpha<\kappa} (\square\mathbb{R}^\tau)_\alpha \longrightarrow \square\mathbb{R}^\gamma$ es un homeomorfismo. Sean $\alpha < \kappa$ y $x \in (\square\mathbb{R}^\tau)_\alpha$. Tenemos que (ver Proposición 1.10)

1. Si C_x es la componente conexa de x en $\oplus_{\alpha<\kappa} (\square\mathbb{R}^\tau)_\alpha$, entonces $C_x \subset (\square\mathbb{R}^\tau)_\alpha$, ya que $(\square\mathbb{R}^\tau)_\alpha$ es un cerrabierto de $\oplus_{\alpha<\kappa} (\square\mathbb{R}^\tau)_\alpha$.
2. $C_x \simeq \sigma_{x'}^\square(\mathbb{R}^\tau)$, para algún $x' \in \square\mathbb{R}^\tau$. Como $(\square\mathbb{R}^\tau)_\alpha$ es homeomorfo a $\square\mathbb{R}^\tau$, entonces C_x es homeomorfa a la componente conexa en $\square\mathbb{R}^\tau$ de algún elemento de $\square\mathbb{R}^\tau$.
3. $\sigma_{x'}^\square(\mathbb{R}^\tau) \simeq \sigma_{\psi(x)}^\square(\mathbb{R}^\gamma)$. En efecto, como $C_x \simeq C_{\psi(x)}$, donde $C_{\psi(x)}$ es la componente conexa de $\psi(x)$ en $\square\mathbb{R}^\gamma$, concluimos que $\sigma_{x'}^\square(\mathbb{R}^\tau) \simeq \sigma_{\psi(x)}^\square(\mathbb{R}^\gamma)$.

Ahora, por la Proposición 1.33 tenemos que $\tau = \gamma$. Supongamos que $\kappa > 2^\tau$. Como

$$|\oplus_{\alpha<\kappa} (\square\mathbb{R}^\tau)_\alpha| = |\square\mathbb{R}^\gamma|,$$

entonces $\kappa.2^\tau = 2^\gamma$. Es decir $\kappa = 2^\gamma$. En resumen $2^\gamma > 2^\tau$, lo cual no es posible ya que $\gamma = \tau$. Por tanto $\kappa \leq 2^\tau$.

Por otro lado, supongamos que $\kappa \leq 2^\tau$ y $\gamma = \tau$. Por la Proposición 2.32, tenemos que

$$\oplus_{\alpha<\kappa} (\square\mathbb{R}^\tau)_\alpha \simeq \square\mathbb{R}^\tau.$$

Pero trivialmente $\square\mathbb{R}^\tau \simeq \square\mathbb{R}^\gamma$. Así que

$$\oplus_{\alpha<\kappa} (\square\mathbb{R}^\tau)_\alpha \simeq \square\mathbb{R}^\gamma.$$

□

7. Cuando $C_\square(X)$ es una suma de productos caja

Ahora analizaremos $C_\square(X)$ en un caso más general que el tratado en la sección anterior. **Como antes, X_0 denotará el conjunto de puntos aislados de X y $X_1 = X \setminus X_0$, X^b denotará a $(cl_X X_0) \cap X_1$ y ahora Z será el conjunto $X_1 \setminus X^b$.** Con esta notación tenemos que $Z = X \setminus cl_X X_0$, por tanto es un conjunto abierto en X.

En el caso en que X_0 es F_σ en X, $Z = \emptyset$ y $X^b \neq \emptyset$, estaremos en la situación ya estudiada en la Sección 2, **así que de ahora en adelante supondremos que $Z \neq \emptyset$ o $X^b \neq \emptyset$.**

Por otro lado, si $X^b = \emptyset$, entonces X_0 es cerrabierto en X. Así que $X = X_0 \oplus X_1$. Por el Teorema 1.7, tenemos que $C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0} \times C_\square(X_1)$. Como el espacio X es Tychonoff, podemos usar el siguiente teorema para expresar $C_\square(X)$ en términos de productos caja (ver [**18**]).

Teorema 2.34 (Tamariz-Villegas). *ZFC es consistente con "todo espacio Tychonoff X sin puntos aislados es casi-ω-resoluble y $C_\square(X)$ es un subespacio discreto de $\square\mathbb{R}^X$".*

Y así concluir el siguiente resultado

Proposición 2.35. *ZFC es consistente con:*

Para todo espacio Tychonoff tal que X tal que $X^b = cl_X(X_0) \cap X_1 = \emptyset$, se tiene $C_\square(X) \simeq \oplus_{\alpha<|C(X_1)|}(\square\mathbb{R}^{X_0})_\alpha$.

En particular ZFC es consistente con:

Para todo espacio Tychonoff X tal que

1. *$X^b = cl_X(X_0) \cap X_1 = \emptyset$, y*
2. *$|C(X_1)| \leq 2^{|X_0|}$*

se tiene $C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$.

DEMOSTRACIÓN.

Por los comentarios previos y el Teorema 2.34, tenemos que si $\mathfrak{M}$ es un modelo de ZFC en donde se cumple la conclusión del Teorema 2.34, entonces en $\mathfrak{M}$ se cumple

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0} \times D,$$

donde D es un discreto de cardinalidad $\mid C(X_1) \mid$. Indicamos al conjunto D como $D = \{d_\alpha : \alpha <\mid C(X_1) \mid\}$. Es claro que para cada $\alpha <\mid C(X_1) \mid$

$$A_\alpha = \{(x, d_\alpha) : x \in \mathbb{R}^{X_0}\},$$

es cerrabierto en $\square\mathbb{R}^{X_0} \times D$. De esto concluimos la primera parte del teorema. Para concluir la segunda parte del teorema se debe usar el Teorema 2.32, lo cual nos permite reducir a un sumando la expresión $C_\square(X) \simeq \oplus_{\alpha<|C(X_1)|}(\square\mathbb{R}^{X_0})_\alpha$, si la cardinalidad de sumandos no supera a $2^{|X_0|}$. $\square$

De ahora en adelante, los espacios X que consideraremos en esta sección cumplirán que X^b y Z son no vacíos, donde $X^b = cl_X X_0 \cap X_1$ y $Z = X_1 \setminus X^b$ y X_0 es F_σ en X.

Para espacios topológicos que cumplan esta condición buscaremos una expresión de $C_\square(X)$ en terminos de $\square\mathbb{R}^{X_0}$.

En lo que sigue demostraremos que la Proposición 2.35, se puede generalizar en un Teorema en el que se obtiene la misma conclusión pero sin pedir que X^b sea un conjunto vacío. Veamos algunos resultados previos.

Si $X^b \neq \emptyset \neq Z$, X_0 es F_σ en X y Z es casi-ω- resoluble, $A_{\widehat{0}}(X)$ es también un conjunto cerrabierto de $C_\square(X)$ (recordar que $A_{\widehat{0}}(X) = \{f \in C(X) : f(x) = 0$ para todo $x \in X_1\}$). Es más, tenemos que:

Proposición 2.36. *Si $X^b \neq \emptyset \neq Z$ y X_0 es F_σ en X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Z es casi-ω-resoluble.

(2) El grupo topológico $A_{\widehat{0}}(X)$ es un conjunto cerrabierto de $C_\square(X)$.

(3) X es c-ω-rcraX_1.

Demostración.

(1)⇒(2) Sea $\mathcal{H} = \{H_n : n < \omega\}$ una resolución de Z; es decir, $\mathcal{H}$ es una partición de Z tal que todo abierto de Z intersecta una infinidad de elementos de $\mathcal{H}$. Por otro lado, como $X^b \cup X_0$ cumple que X_0 es denso y F_σ en $X^b \cup X_0$, por la Proposición 2.15, existe una resolución $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ de X_0 respecto a X^b. Definimos

$$C_0 = H_0 \cup X^b \cup F_0$$

y

$$C_i = H_i \cup F_i \text{ para } i \geq 1.$$

Es claro que $\mathcal{C}$ es una partición de X. Por otro lado, sean $x \in X^b$ y $V \in \mathcal{V}(z)$; es claro que V intersecta una infinidad de elementos de $\mathcal{F}$ y por tanto a una infinidad de elementos de $\mathcal{C}$. Ahora sea $x \in Z$ y $W \in \mathcal{V}(x)$, entonces $W \cap Z$ es un conjunto abierto no vacío de Z, por tanto intersecta a una infinidad de elementos de $\mathcal{H}$, de ahí que intersecta a una infinidad de elementos de $\mathcal{C}$.

(2)⇒(1) Si $\mathcal{C} = \{C_n : n < \omega\}$ es una resolución de X respecto a X_1, entonces $\mathcal{H} = \{H_n \cap Z : n < \omega$ y $H_n \cap Z \neq \emptyset\}$ es una resolución de Z. En efecto, que $\mathcal{H}$ es una partición de Z, lo hereda de que $\mathcal{C}$ es una partición de X. Ahora si O es un abierto no vacío de Z, entonces $O = V \cap Z$ donde V es un abierto no vacío de X. Como O es un abierto no vacío de X, ya que Z es un abierto no vacío de X, así que O intersecta con una infinidad de elementos de $\mathcal{H}$.

(2)⇔(3) Es la Proposicion 2.26 $\square$

Por la Proposición 2.26 obtenemos el siguiente corolario

Corolario 2.37. *Si $X^b \neq \emptyset \neq Z$, X_0 es F_σ en X y Z es casi-ω-resoluble, entonces*

1. *Para todo $\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)$, $A_{\widehat{x}}(X)$ es un cerrabierto de $C_\square(X)$.*
2. *$C_\square(X) = \oplus_{\widehat{x}\in\widehat{C}(X_1)} A_{\widehat{x}}(X)$.*

Ahora tomemos el espacio Y igual a $X_0 \cup X^b$, Y cumple que $Y_0 = X_0$ es F_σ y denso en Y. Es decir: $A_{\widehat{0}}(Y) = \{f \in C(Y) : f \restriction_{X^b} \equiv 0\} \simeq C_\square(Y)$. En el siguiente lema veremos una relación entre $C(X)$ y $C(Y)$.

Lema 2.38. *Si Y es igual a $X_0 \cup X^b$, entonces*
(1) *$A_{\widehat{0}}(X) \simeq A_{\widehat{0}}(Y)$.*
(2) *$A_{\widehat{0}}(X)$ y $A_{\widehat{0}}(Y)$ son topológicamente isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN.
(1) Por el Lema 2.3, tenemos que $\pi_Y \restriction_{A_{\widehat{0}}(X)}$ es una inmersión, así que bastará demostrar que $\pi_Y \restriction_{A_{\widehat{0}}(X)} (A_{\widehat{0}}(X)) = A_{\widehat{0}}(Y)$, para concluir que $A_{\widehat{0}}(X) \simeq A_{\widehat{0}}(Y)$. Es claro que $\pi_Y \restriction_{A_{\widehat{0}}(X)} (A_{\widehat{0}}(X)) \subset A_{\widehat{0}}(Y)$.

Ahora sea $h \in A_{\widehat{0}}(Y)$, definimos $h' \in \mathbb{R}^X$ como $h'(z) = 0$ para todo $z \in Z$ y $h' \restriction_Y = h$. Veamos que $h' \in C(X)$. Sea $z \in Z = X_1 \setminus X^b$ y $\epsilon > 0$, como Z es abierto y $f[Z] = \{0\} \subset (-\epsilon, \epsilon)$, entonces h' es continua en z. Ahora si $z \in X^b$, por la continuidad de h, existe W abierto de X con $z \in W$, tal que $h[W \cap Y] \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Notemos que $W = (W \cap Y) \cup (W \cap Z)$, entonces $h'[W] = h'[W \cap Y] \cup h'[W \cap Z] \subset h[W \cap Y] \cup \{0\} \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Es claro que $h' \in A_{\widehat{0}}(X)$, y que $\pi_Y \restriction_{A_{\widehat{0}}(X)} (h') = h$.

(2) Como $\pi_Y \restriction_{A_{\widehat{0}}(X)}$ es morfismo de grupo, entonces concluimos el lema. □

Lema 2.39. *Si $X^b \neq \emptyset \neq Z$, X_0 es F_σ en X y $Y = X_0 \cup X^b$, entonces $A_{\widehat{0}}(Y) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$.*
En particular, $A_{\widehat{0}}(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$.

DEMOSTRACIÓN.
Como $Y_0 = X_0$ y Y_0 cumple que es F_σ y denso en Y, por el Teorema 2.21 tenemos que $A_{\widehat{0}}(Y) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$. Usando el Lema 2.38, tenemos finalmente que $A_{\widehat{0}}(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$. □

En resumen obtenemos el siguiente teorema. Recordemos que X_0, el conjunto de puntos aislados de X, es infinito y F_σ en X, $\emptyset \neq X_1 = X \setminus X_0$, $\emptyset \neq X^b = X_1 \cap cl_X X_0$, $\emptyset \neq Z = X_1 \setminus X^b$.

Teorema 2.40. *Si $X^b \neq \emptyset \neq Z$, X_0 es F_σ en X y Z es casi-ω-resoluble. Entonces $C_\square(X)$ es la suma directa de a lo más $|\widehat{C}(X_1)|$ copias de $\mathbb{R}^{X_0}$. Es decir*

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{\widehat{x}\in\widehat{C}(X_1)} (\square\mathbb{R}^{X_0})_{\widehat{x}}.$$

Además $A_{\widehat{0}}(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$

DEMOSTRACIÓN.
Usando el Corolario 2.37 y los Lemas 2.38 y 2.39, obtenemos la demostración. □

Veamos unas condiciones para que la suma que aparece en el Teorema 2.40 se reduzca a un sumando.

Corolario 2.41. *Si $X^b \neq \emptyset \neq Z$, X_0 es F_σ en X y Z es casi-ω-resoluble, entonces*

$$|\widehat{C}(X_1)| \leq 2^{|X_0|} \text{ si y sólo si } C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}.$$

DEMOSTRACIÓN.
Supongamos que $|\widehat{C}(X_1)| \leq 2^{|X_0|}$, usando el Teorema 2.40 y la Proposición 2.32, obtenemos que $C_\square(X) \simeq \oplus_{\widehat{x}\in\widehat{C}(X_1)}(\square\mathbb{R}^{X_0})_{\widehat{x}} \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$.

Ahora si $C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$, entonces $\oplus_{\widehat{x}\in\widehat{C}(X_1)}(\square\mathbb{R}^{X_0})_x \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$, ahora usando la Proposición 2.32, concluimos que $|\widehat{C}(X_1)| \leq 2^{|X_0|}$. □

Para un espacio topológico X, $wc(X)$ es el mínimo cardinal infinito κ tal que cada cubierta abierta de X tiene una subfamilia de a lo más κ elementos tal que la unión de ella es densa en X. En [3] se tiene la estimación siguiente:

$$|C(X)| \leq (w(X_1))^{wc(X_1)} \leq 2^{d(X)}.$$

Por tanto tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 2.42. *Si $X^b \neq \emptyset \neq Z$, X_0 es F_σ en X y Z es casi-ω-resoluble. Si $(w(X_1))^{wc(X_1)} \leq 2^{|X_0|}$, entonces*

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}.$$

En particular si $w(X) \leq |X_0|$ o $d(X_1) \leq |X_0|$, entonces

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}.$$

DEMOSTRACIÓN.
Por el comentario anterior a este corolario, tenemos la siguiente estimación:

$$|\widehat{C}(X_1)| \leq |C(X_1)| \leq 2^{|X_0|}.$$

Por el Corolario 2.41, se cumple que

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}.$$

Por otro lado, por el comentario anterior a este corolario, obtenemos que

$$|C(X_1)| \leq 2^{d(X_1)}.$$

Así que si $d(X_1) \leq |X_0|$, logramos también que $|\widehat{C}(X_1)| \leq 2^{|X_0|}$, y por tanto

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}.$$

Ahora si $w(X) = |X_0|$, entonces se cumple que

$$|C(X_1)| \leq (w(X_1))^{wc(X_1)} \leq (w(X))^{wc(X_1)} \leq \left(2^{w(X)}\right)^{w(X_1)} \leq 2^{w(X)\cdot w(x)},$$

ya que en general $wc(X) \leq w(X)$. Por tanto, tendríamos que $|\widehat{C}(X_1)| \leq 2^{|X_0|}$, de aquí nuevamente concluimos que $C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$. □

Si usamos el Teorema 2.34, podemos obtener una generalización de la Proposición 2.35:

Teorema 2.43. *ZFC es consistente con:*
Para todo espacio Tychonoff X tal que

1. X_0 *es* F_σ *en* X,
2. $X^b = cl(X_0) \cap X_1$, $Z = X_1 \setminus X^b$ *con* $Z \neq \emptyset \neq X^b$

se tiene

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)} (\square \mathbb{R}^{X_0})_{\widehat{x}}.$$

En particular ZFC es consistente con:
Para todo espacio Tychonoff X tal que

1. X_0 *es* F_σ *en* X,
2. $X^b = cl(X_0) \cap X_1$, $Z = X_1 \setminus X^b$ *con* $Z \neq \emptyset \neq X^b$ *y*
3. $|\widehat{C}(X_1)| \leq 2^{|X_0|}$

se tiene

$$C_\square(X) \simeq \square \mathbb{R}^{X_0}.$$

DEMOSTRACIÓN.
Como Z no tiene puntos aislados, por el Teorema 2.34, tenemos que es consistente con ZFC que Z es casi-ω-resoluble. Por el Teorema 2.40 y el Corolario 2.41 obtenemos la conclusión. □

Ahora daremos una generalización del Teorema 2.25.

Teorema 2.44. *Si $X^b \neq \emptyset \neq Z$ y $Z \neq \emptyset \neq X^b$, Z es casi-ω-resoluble y para todo $p \in X^b$ se tiene que $\mathcal{V}_0(p)$ es ultrafiltro en X_0, entonces son equivalentes:*

(1) X_0 *es* F_σ *en* X.
(2) X_0 *es c-ω-rcra* X^b.
(3) $C_\square(X)$ *es suma directa de lo más* $|\widehat{C}(X_1)|$ *copias de* $\square\mathbb{R}^{X_0}$ *y* X_0 *es c-ω-rcra* X^b.
(4) $A_{\widehat{0}}(X)$ *es abierto en* $C_\square(X)$ *y* X_0 *es c-ω-rcra* X^b.
(5) $A_{\widehat{0}}(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$ *y* X_0 *es c-ω-rcra* X^b.

DEMOSTRACIÓN.
(1) $\Rightarrow$ (2). Es la Proposición 2.15.
(2) $\Rightarrow$ (1). Sea $\mathcal{F} = \{F_n : n < \omega\}$ una resolución de X_0 respecto a X^b. Sea $n < \omega$ y supongamos que existe $p \in cl_X F_n \cap X_1$. Como $cl_X F_n \cap X_1 \subset cl_X X_0 \cap X_1 = X^b$, entonces $\mathcal{V}_0(p)$ es un ultrafiltro en X_0. Pero, para toda $V \in \mathcal{V}(p)$ se tiene que $V \cap F_n \neq \emptyset$ y además $V \cap X_0 \cap F_n = V \cap F_n$. Como $\mathcal{V}_0(p)$ es un ultrafiltro, concluimos que $F_n \in \mathcal{V}_0(p)$. Así que existe $V' \in \mathcal{V}(p)$ tal que $F_n = V' \cap X_0$. En resumen, si $m \neq n$, entonces $V' \cap F_m = \emptyset$, lo que contradice que $\mathcal{F}$ sea resolución de X_0 respecto a X^b.
(1) $\Rightarrow$ (3). Si X_0 es F_σ, como además Z es casi-ω-resoluble. Por el Teorema 2.40, tenemos que $C_\square(X)$ es suma directa de a lo más $|\widehat{C}(X_1)|$ copias de $\square\mathbb{R}^{X_0}$. Y como además (1) implica (2), concluimos (3).
(3) $\Rightarrow$ (2). Es claro.

(2) $\Rightarrow$ (4). En la prueba de la Proposición 2.36, se puede observar que se demostró que siempre que X_0 es c-ω-rcra X_b y Z es casi-ω-resoluble tenemos que $A_{\hat{0}}(X)$ es abierto en $C_\Box(X)$ (es decir X es c-ω-rcra X_1).

(4) $\Rightarrow$ (2). Es claro.

(1) $\Rightarrow$ (5). Si suponemos que X_0 es F_σ en X, por la Proposición 2.39 tenemos que $A_{\hat{0}} \simeq \Box\mathbb{R}^{X_0}$.

(5) $\Rightarrow$ (2). Es claro. $\Box$

Finalizamos este capítulo resumiendo lo que hasta ahora tenemos junto con los resultados de **[14]** y **[16]** , que dicen respectivamente que un producto caja de un número no numerable de líneas rectas no es normal y que asumiendo CH un producto numerable de espacios metrizables σ-compactos localmente compactos es paracompacto.

Corolario 2.45. *Es consistente con ZFC que para todo espacio Tychonoff X tal que X_0 es un conjunto F_σ de X*

(1) $C_\Box(X)$ no es normal si $|X_0| > \aleph_0$.

(2) Asumiendo CH, tenemos que $C_\Box(X)$ es paracompacto si $|X_0| = \aleph_0$.

Demostración.

(1) Por el Teorema 2.43 y la Proposición 2.35, tenemos que es consistente con ZFC que todo espacio Tychonoff con $Z \neq \emptyset$ o $X^b = \emptyset$, $C_\Box(X)$ es una suma directa de copias de $\Box\mathbb{R}^{X_0}$. Como $\Box\mathbb{R}^{X_0}$ no es normal si $|X_0| > \aleph_0$, entonces ninguna suma de copias de él podrá ser normal, entonces $C_\Box(X)$ no es normal.

Ahora si X es tal que $Z = \emptyset$ y $X^b \neq \emptyset$, entonces $X = X_0 \cup X^b$ donde $X_1 = X^b$. Por tanto por el Teorema 2.21 tenemos que $C_\Box(X) \simeq \mathbb{R}^{X_0}$. Por tanto, si $|X_0| > \aleph_0$, entonces $C_\Box(X)$ es no normal.

(2) Igual que en (1), tenemos que es consistente con ZFC que todo espacio Tychonoff con $Z \neq \emptyset$ o $X^b = \emptyset$, $C_\Box(X)$ es una suma directa de copias de $\Box\mathbb{R}^{X_0}$.

Si $|X_0| = \aleph_0$ y asumimos CH, entonces $\Box\mathbb{R}^{X_0}$ es paracompacto. Como toda suma de paracompactos es paracompacto, entonces $C_\Box(X)$ será paracompacto.

Ahora si X es tal que $Z = \emptyset$ y $X^b \neq \emptyset$, entonces $X = X_0 \cup X^b$; por el Teorema 2.21 , tenemos que $C_\Box(X) \simeq \Box\mathbb{R}^{X_0}$. Si además, $|X_0| = \aleph_0$ y asumimos CH, entonces $C_\Box(X)$ será paracompacto. $\Box$

Usando partes de la demostración del Corolario 2.45, se obtiene la prueba del siguiente corolario

Corolario 2.46. *Si $X^b \neq \emptyset \neq Z$, X_0 es F_σ en X y Z es casi-ω-resoluble, se cumple*

(1) $C_\Box(X)$ no es normal si $|X_0| > \aleph_0$.

(2) Asumiendo CH, tenemos que $C_\Box(X)$ es paracompacto si $|X_0| = \aleph_0$.

Demostración.

1. Por el Teorema 2.40, tenemos que para todo espacio que cumple las hipótesis del corolario, $C_\Box(X)$ es una suma directa de copias de $\Box\mathbb{R}^{X_0}$. Como $\Box\mathbb{R}^{X_0}$ no es normal si $|X_0| > \aleph_0$; entonces ninguna suma de copias de él podrá ser normal, entonces $C_\Box(X)$ no es normal.

2. Igual que en (1), tenemos que para todo espacio que cumple las hipótesis del corolario, $C_\Box(X)$ es una suma directa de copias de $\Box\mathbb{R}^{X_0}$.

Si $|X_0| = \aleph_0$ y asumimos CH, entonces $\square\mathbb{R}^{X_0}$ es paracompacto. Como toda suma de paracompactos es paracompacto, entonces $C_{\square}(X)$ será paracompacto.

$\square$

Ejemplos 2.47. 1. Algunos espacios conocidos como espacios métricos generalizados (incluidos los métrizables) cumplen la propiedad de ser primero numerables, a saber: los espacios desarrollables y los espacios semimetrizables. Si X es un espacio métrizable, semimetrizable o desarrollable tal que $|X_0| \geq w(X)$ y $X^b \neq \emptyset \neq Z$, entonces $C_{\square}(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$.

En efecto, como Z es primero numerable, entonces Z es casi-ω-resoluble (ver [**18**]). También los espacios métrizables, semimetrizable o desarrollables son perfectos, así que tenemos que cumplen que X_0 es F_σ. Por el Corolario 2.42, tenemos que

$$C_{\square}(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}.$$

Aquí estamos interesados en hallar espacios X tales que $C_{\square}(X)$ no es del tipo $\square\mathbb{R}^{\kappa}$ para algún cardinal κ. Para esto veamos el siguiente resultado.

Ejemplos 2.48. 1. Existe un espacio X tal que $C_{\square}(X)$ no es homeomorfo a ningún espacio de la forma $\square\mathbb{R}^{\kappa}$ donde κ es un cardinal infinito.

Sea $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, κ cardinal infinito tal que $\kappa > 2^{\aleph_0}$. Ahora tomamos la siguiente partición de $\mathbb{R}^- \times \kappa$

$$\mathcal{P} = \{\{\prec 0, \alpha \succ : \alpha < \kappa\}\} \cup \{\{\prec x, \alpha \succ\} : x < 0, \alpha < \kappa\}.$$

Nuestro espacio X será el conjunto $\mathcal{P} \cup \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ son los números naturales). Denotamos $\widetilde{0} = \{\prec 0, \alpha \succ : \alpha < \kappa\}$. Una base de vecindades del punto $\widetilde{0}$ en X serán uniones de los siguientes conjuntos

$$\{\prec x, \alpha \succ : x \in (r, 0) \text{ para algún } r < 0\} \cup \{\widetilde{0}\} \text{ para } \alpha < \kappa$$

ó

$$A \cup \widetilde{0} \text{ donde } A \subset \mathbb{N}\ |\mathbb{N} \setminus A| < \aleph_0.$$

Los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados. Finalmente las vecindades de los puntos $\prec x, \alpha \succ$ donde $x < 0$ seran los conjuntos del tipo

$$\{\prec z, \alpha \succ : z \in (r, s) \subset \mathbb{R}^- \text{ y } x \in (r, s)\}.$$

En este espacio tenemos que $X_0 = \mathbb{N}$, $X_1 = \{\widetilde{0}\} \cup \{\prec x, \alpha \succ : x < 0,\ \alpha < \kappa\}$, $X^b = \{\widetilde{0}\}$ y $Z = \cup_{\alpha<\kappa}\{\prec x, \alpha \succ : x < 0\}$.

Como Z es una unión de casi-ω-resolubles él es casi-ω-resoluble. Por el Teorema 2.40, tenemos que

$$C_{\square}(X) \simeq \oplus_{\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)} (\square\mathbb{R}^{\aleph_0})_{\widehat{x}}.$$

Para todo $\alpha < \kappa$ sea $f_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_\alpha(n) = \frac{1}{2^n}$ si $n \in \mathbb{N}$, $f_\alpha(\prec x, \beta \succ) = 0$ si $x < 0$, $\beta < \kappa$ y $\beta \neq \alpha$, $f_\alpha(\prec x, \alpha \succ) = x$ si $x < 0$ y finalmente $f_\alpha(\widetilde{0}) = 0$.

Se puede demostrar que $f_\alpha \restriction_{X_1} \in \widehat{C}(X_1)$ para todo $\alpha < \kappa$. Ahora si $\alpha, \beta < \kappa$ con $\alpha \neq \beta$, entonces $f_\alpha \restriction_{X_1} \neq f_\beta \restriction_{X_1}$, ya que $f_\alpha \restriction_{X_1} (\prec 1, \beta \succ) = 0$, pero $f_\beta \restriction_{X_1} (\prec 1, \beta \succ) = 1$. Así que $\kappa \leq |\widehat{C}(X_1)|$. Si

$$\oplus_{\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)} (\square \mathbb{R}^{\aleph_0})_{\widehat{x}} \simeq \square \mathbb{R}^{\gamma}$$

por la Proposición 2.33, tendríamos que $|\widehat{C}(X_1)| \leq 2^{\aleph_0}$, lo cual no es posible.

CAPíTULO 3

Σ-productos y espacios $C_\square(X)$

1. Resultados Básicos

En este capítulo estudiaremos el caso de espacios X con un sólo punto no aislado; es decir, espacios tales que $|X \setminus X_0| = 1$ en donde X_0 es el conjunto de puntos aislados de X. El Corolario 2.22 determina $C_\square(X)$ cuando $|X_0|$ es numerable. Así que en lo que sigue supondremos que $|X_0| > \aleph_0$.

Recordemos que $\mathcal{V}_0(p) = \{V \cap X_0 : V \in \mathcal{V}(p)\}$ es un filtro. Un filtro $\mathcal{F}$ es *ω^+-completo* si para toda $\{F_n : n < \omega\} \subset \mathcal{F}$, se cumple que $\bigcap_{n<\omega} F_n \in \mathcal{F}$.

Lema 3.1. *Si $X_1 = \{p\}$ y $\mathcal{V}_0(p)$ no es ω^+-completo, entonces X_0 es c-ω-rcra X_1.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\{V_n : n < \omega\} \subset \mathcal{V}_0(p)$ tal que $\bigcap_{n<\omega} V_n \notin \mathcal{V}_0(p)$. Sea $W_0 = V_0$ y $W_n = V_0 \cap \ldots \cap V_n$. Tenemos que $W_n \in \mathcal{V}_0(p)$ para toda $n < \omega$, y además $\bigcap_{n<\omega} W_n = \bigcap_{n<\omega} V_n$. Sean $F_0 = \bigcap_{n<\omega} W_n$, $F_1 = X_0 \setminus \bigcup_{i<\omega} W_i$ y $F_n = W_{n-2} \setminus W_{n-1}$ para $n > 1$.

Supongamos que existen $V \in \mathcal{V}(p)$ y $n_0 < \omega$ tales que

$$V \cap F_n = \emptyset \text{ para todo } n > n_0.$$

Sea $M_0 = W_{n_0+1} \cap V$. Tenemos que $M_0 \in \mathcal{V}_0(p)$, pero además $M_0 \cap F_n = \emptyset$ para todo $n > n_0$.

Afirmamos que $M_0 \subset \bigcap_{n>n_0} W_n$. En efecto, sea $x \in M_0$, entonces $x \in W_{n_0+1}$. Si $x \notin W_{n_0+2}$, entonces $x \in F_{n_0+3}$, lo cual no puede ser. Si $m > n_0$ tal que $x \in W_m$, entonces $x \in W_{m+1}$, ya que en caso contrario $x \in F_{m+2}$. Por tanto $x \in \bigcap_{n>n_0} W_n$.

Como $\mathcal{V}_0(p)$ es filtro y $M_0 \subset \bigcap_{n>n_0} W_n$, entonces $\bigcap_{n>n_0} W_n \in \mathcal{V}_0(p)$, pero $\bigcap_{n>n_0} W_n = \bigcap_{n<\omega} W_n$. Lo cual es una contradicción. Así que existe una subfamilia infinita de $\{F_n : n < \omega\}$, que debe ser una resolución de X_0 respecto a X_1. $\square$

Como un corolario del Teorema 2.25 y del Lema 3.1 obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Si $\mathcal{V}_0(p)$ es un ultrafiltro que no es ω^+-completo, entonces*

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$$

y X_0 debe ser F_σ en X.

DEMOSTRACIÓN.

Por el Lema 3.1, X_0 es c-ω-rcra X_1. Por el Teorema 2.25, como $\mathcal{V}_0(p)$ es ultrafiltro, tenemos que

$$C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}.$$

Además X_0 debe ser F_σ en X. $\square$

Así, si κ es un cardinal infinito y $p \in \beta(\kappa) \setminus \kappa$ no es ω^+-completo, y si a $X = \{p\} \cup \kappa$ le damos topología de subespacio de $\beta(\kappa)$, tenemos que

$$C_\Box(X) \simeq \Box\mathbb{R}^\kappa.$$

En el tipo de espacios que estamos estudiando en esta sección, ser X c-ω-rcra X_1 es lo mismo que ser X_0 c-ω-rcra X_1. Demostrémoslo.

Proposición 3.3. *Si $X_1 = \{p\}$, entonces X es c-ω-rcra X_1 si y sólo si X_0 es c-ω-rcra X_1*

Demostración.

Por el Teorema 2.27, bastará demostrar que si X es c-ω-rcra X_1, entonces X_0 es c-ω-rcra X_1. Sea $\{F_n : n < \omega\}$ una resolución de X respecto de X_1. Sea $n_0 < \omega$ tal que $p \in F_{n_0}$. Ahora tomamos $\{F_n : n \in \omega \setminus \{n_0\}\} \cup \{F_{n_0} \cap X_0\}$. Esta es una resolución de X_0 respecto de X_1. □

En el caso en que $X_1 = \{p\}$, tenemos que $A_{\widehat{0}}(X) = \{f \in C(X) : f(p) = 0\}$. Y en este caso, $A_{\widehat{0}}(X)$ adoptará una forma especial.

Definición 3.4. Sean $\mathcal{F}$ un filtro en X_0,

$$\Sigma_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) = \{f \in \mathbb{R}^{X_0} : \{x \in X_0 : f(x) = 0\} \in \mathcal{F}\},$$

$$\Sigma_{*,\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) = \{f \in \mathbb{R}^{X_0} : \text{ para todo } \epsilon > 0,\ \{x \in X_0 : |f(x)| < \epsilon\} \in \mathcal{F}\}$$

y

$$\widehat{\Sigma}_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) = \{f \in \mathbb{R}^{X_0} : \text{ para todo } \epsilon > 0,\ \{x \in X_0 : |f(x)| \geq \epsilon\} \notin \mathcal{F}\}.$$

Si a estos subconjuntos de $\mathbb{R}^{X_0}$ les damos la topología de subespacios de $\Box\mathbb{R}^{X_0}$, los denotaremos respectivamente como

$$\Sigma^\Box_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}),\ \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) \text{ y } \widehat{\Sigma}^\Box_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

Es importante notar que $\Sigma_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) \subset \Sigma_{*,\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) \subset \widehat{\Sigma}^\Box_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0})$. En efecto, si $f \in \Sigma_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0})$ y $\epsilon > 0$, entonces $\{x \in X_0 : f(x) = 0\} \subset \{x \in X_0 : |f(x)| < \epsilon\}$, por tanto $\{x \in X_0 : |f(x)| < \epsilon\} \in \mathcal{F}$, es decir $f \in \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0})$. Por otro lado sea $g \in \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0})$. Sea $\epsilon > 0$, es claro que $\{x \in X_0 : |g(x)| \geq \epsilon\} = X_0 \setminus \{x \in X_0 : |g(x)| < \epsilon\}$. Como $\{x \in X_0 : |g(x)| < \epsilon\} \in \mathcal{F}$, entonces $\{x \in X_0 : |g(x)| \geq \epsilon\} \notin \mathcal{F}$. Además si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, y $g \in \widehat{\Sigma}^\Box_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0})$, entonces $\{x \in X_0 : |g(x)| \geq \epsilon\} \notin \mathcal{F}$ y en este caso podemos concluir que $\{x \in X_0 : |g(x)| < \epsilon\} \in \mathcal{F}$. Es decir, en el caso de que $\mathcal{F}$ sea ultrafiltro tenemos que $\Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) = \widehat{\Sigma}^\Box_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0})$.

Veamos un resultado general sobre este tipo de espacios.

Lema 3.5. *Si $X_1 = \{p\}$, entonces*

$$\Sigma^\Box_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}) \simeq A_{\widehat{0}}(X).$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea

$$F : A_{\widehat{0}}(X) \longrightarrow \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$$

definida como

$$F(f) = f \restriction_{X_0} .$$

Ver el Lema 2.3. Así que bastará demostrar que $F(A_{\widehat{0}}(X)) = \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$

Para esto, notemos que si $\epsilon > 0$ y $f \in A_{\widehat{0}}(X)$, entonces existe $V \in \mathcal{V}(p)$ tal que $f[V] \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Así que $V \cap X_0 \in \mathcal{V}_0(p)$ y

$$V \cap X_0 \subset \{x \in X_0 : |f(x)| < \epsilon\}.$$

Por tanto $\{x \in X_0 : |f(x)| < \epsilon\} \in \mathcal{V}_0(p)$. En otras palabras $f \restriction_{X_0} \in \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$.

Además, si $g \in \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$ y si $\bar{g} \in \mathbb{R}^X$ es tal que $\bar{g} \restriction_{X_0} = g$ y $\bar{g}(p) = 0$, entonces $\bar{g} \in A_{\widehat{0}}$.

Para demostrar esta última afirmación será suficiente verificar que $\bar{g}$ es continua en p. Sea $\epsilon > 0$, como $\{x \in X_0 : |g(x)| < \epsilon\} \in \mathcal{V}_0(p)$, entonces $V = \{x \in X_0 : |g(x)| < \epsilon\} \cup \{p\} \in \mathcal{V}(p)$ y además $\bar{g}[V] \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Es decir, $\bar{g}$ es continua. □

2. Cuando $\mathcal{V}_0(p)$ es ω^+-completo (algunos resultados)

Los conjuntos $\Sigma_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) = \{f \in \mathbb{R}^{X_0} : \{x \in X_0 : f(x) = 0\} \in \mathcal{F}\}$ y $\Sigma_{*,\mathcal{F}}(\mathbb{R}^{X_0}) = \{f \in \mathbb{R}^{X_0} :$ para todo $\epsilon > 0$, $\{x \in X_0 : |f(x)| < \epsilon\} \in \mathcal{F}\}$, definidos en la anterior sección, bajo ciertas condiciones se igualan.

Lema 3.6. *Si $X_1 = \{p\}$ y $\mathcal{V}_0(p)$ es un filtro ω^+-completo, entonces*

$$\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}) = \Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

DEMOSTRACIÓN.

Por el comentario a la Definición 3.4 bastará demostrar que $\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}) \subset \Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$.

Sea $f \in \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$ y para cada $n < \omega$

$$D_n = \{x \in X_0 : |f(x)| < \frac{1}{2^n}\}.$$

Es claro que $D_n \in \mathcal{V}_0(p)$ para cada $n < \omega$. Por tanto $\cap_{n<\omega} D_n \in \mathcal{V}_0(p)$. Pero

$$\cap_{n<\omega} D_n = \{x \in X_0 : f(x) = 0\}.$$

Por tanto $f \in \Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$. Es decir

$$\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}) = \Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

□

Corolario 3.7. *Si $X_1 = \{p\}$ y $\mathcal{V}_0(p)$ es un filtro ω^+-completo, entonces*

$$A_{\widehat{0}} \simeq \Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$$

DEMOSTRACIÓN.
Por los Lemas 3.5 y 3.6 se concluye el Corolario. $\square$

En resumen, tenemos

Proposición 3.8. *Si X cumple que $X_1 = \{p\}$, $\mathcal{V}_0(p)$ es un filtro ω^+-completo y X es c-ω-rcra X_1, entonces*

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{x\in\mathbb{R}} \left(\Sigma^\square_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_x .$$

DEMOSTRACIÓN.
Por el Teorema 2.26 $A_{\widehat{x}}(X)$ es cerrabierto. Por los Teoremas 2.2, 2.9 y 3.7, tenemos que

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{x\in\mathbb{R}} \left(\Sigma^\square_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_x .$$

$\square$

En la Seccion 4, veremos que la Proposición 3.8 puede afinarse (vease el Teorema 3.15).

3. Cuando $\mathcal{V}_0(p)$ no es ω^+-completo

En realidad sólo presentaremos una consecuencia de lo ya obtenido.

Proposición 3.9. *Si $\mathcal{V}_0(p)$ es un filtro que no es ω^+-completo, entonces*

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{x\in\mathbb{R}} \left(\Sigma^\square_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_x .$$

DEMOSTRACIÓN.
Por la Proposición 2.9 y el Lema 3.1, $A_{\widehat{0}}(X)$ es cerrabierto en $C_\square(X)$. Por el Lema 3.5 y las Proposiciones 2.2 y 2.9, se tiene que

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{x\in\mathbb{R}} \left(\Sigma^\square_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_x .$$

$\square$

4. Fórmulas de reducción II

Como en la seccion Fórmulas de reducción I, pretendemos simplificar, en esta sección, las sumas de "Σ-productos" que aparecen en las Secciones 2 y 3 de este capítulo. Aquí nuevamente $X_1 = \{p\}$ y $|X_0| > \aleph_0$. Calcularemos una acotación de $Npah(\Sigma^\square_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}))$ y $Npah(\Sigma^\square_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}))$ con cierta restricciones sobre $\mathcal{V}_0(p)$.

Si X_0 es un discreto y $p \notin X_0$. La compactación a un punto del discreto X_0 se denotará como $K(X_0)$ y será el espacio topológico $X_0 \cup \{p\}$ en el que X_0 es discreto y si $p \in O$ donde O es abierto, entonces $X_0 \setminus O$ es finito. Denotamos como $[X_0]^{\aleph_0}$ a la familia de subconjuntos de X_0 de cardinalidad $\aleph_0$.

Proposición 3.10. *Si $X_1 = \{p\}$, entonces $X = K(X_0)$ si y sólo si, para todo $A \in [X_0]^{\aleph_0}$ y todo $V \in \mathcal{V}(p)$ se tiene que $A \cap V \neq \emptyset$*

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que $X = K(X_0)$ y sean $A \in [X_0]^{\aleph_0}$ y $V \in \mathcal{V}(p)$, tal que $A \cap V = \emptyset$, es decir $A \subset X_0 \setminus V$, por otro lado como $V \in \mathcal{V}(p)$, tenemos que $X_0 \setminus V$ es finito, lo cual no puede ser.

Sea ahora $V \in \mathcal{V}(p)$ arbitaria. Supongamos que $|X_0 \setminus V| \geq \aleph_0$. Tomamos $A \subset X_0 \setminus V$, tal que $A \in [X_0]^{\aleph_0}$. Resulta que $A \cap V = \emptyset$, pero por hipótesis tenemos lo contrario. Por tanto, para toda $V \in \mathcal{V}(p)$, se cumple que $|X_0 \setminus V| < \aleph_0$, lo que significa que $X = K(X_0)$. □

Para un conjunto S el conjunto

$$\Sigma = \{f \in \mathbb{R}^S : \text{ para todo } \epsilon > 0, |\{x \in S : |f(x)| \geq \epsilon\}| < \aleph_0\}$$

coincide con el "Σ-producto" $\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^S)$, en donde $\mathcal{F}_0$ es el filtro de Fréchet sobre S ($F \in \mathcal{F}_0$ si y sólo si $S \setminus F$ es finito). En efecto, sea $\epsilon > 0$, entonces $f \in \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^S)$ si y sólo $\{x \in S : |f(x)| < \epsilon\} \in \mathcal{F}_0$. Como $\{x \in S : |f(x)| \geq \epsilon\} = S \setminus \{x \in S : |f(x)| < \epsilon\}$, entonces $\{x \in S : |f(x)| \geq \epsilon\}$ es finito si y sólo si $S \setminus \{x \in S : |f(x)| < \epsilon\}$ lo es, es decir si y sólo si $f \in \Sigma$. Notar que si $X = K(X_0)$, entonces $\mathcal{V}_0(p) = \mathcal{F}_0$, así que

$$\{f \in \mathbb{R}^{X_0} : \text{ para todo } \epsilon > 0, |\{x \in X_0 : |f(x)| \geq \epsilon\}| < \aleph_0\} = \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

Este comentario, es importante en la demostración de los siguientes resultados para $K(X_0)$.

Teorema 3.11. *Si $X = K(X_0)$, entonces $\mathcal{V}_0(p)$ no es ω^+-completo. En particular*

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{x \in \mathbb{R}} \left(\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_x .$$

Es más $C_\square(X) \simeq \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $A \in [X_0]^{\aleph_0}$ con $A = \{a_n : n < \omega\}$ de tal manera que si $n \neq m$ entonces $a_n \neq a_m$. Tomamos $V_n = X_0 \setminus \{a_0, ..., a_n\}$, es claro que $V_n \in \mathcal{V}_0(p)$. Pero $\cap_{n<\omega} V_n = X_0 \setminus A \notin \mathcal{V}_0(p)$.

Sea $B \in [X_0]^{\aleph_0}$. Usando la construcción definida en la sección "Una partición de $\square\mathbb{R}^{X_0}$" del Capítulo 2 y el Lema 2.4 de igual capítulo, tenemos los siguientes resultados. Si $B = \{x_n : n < \omega\}$, es claro que $\mathcal{F}_0 = \{\{x_n\} : n < \omega\}$ es una partición de B, entonces $E(\mathcal{F}_0)$ es un cerrabierto de $\square\mathbb{R}^{X_0}$ y subgrupo de $\square\mathbb{R}^{X_0}$. Veamos que $C = \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}) \cap E(\mathcal{F}_0) \neq \emptyset$. Sea $\{m_k : k < \omega\}$ cualquier sucesión estrictamente creciente en ω. Definimos el siguiente conjunto W:

$$W(x) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } x = x_i,\ i \leq m_0 \\ \left(-\frac{1}{2^{i+k-1}}, \frac{1}{2^{i+k-1}}\right) & \text{si } x = x_i,\ m_k < i \leq m_{k+1} \text{ y } k \geq 1 \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Usando la caracterización de los elementos de $\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$, tenemos que $W \subset \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$. Ahora, argumentando igual que en la Proposición 1.9, concluimos que $W \subset E(\mathcal{F}_0)$, por tanto $C \neq \emptyset$.

Por otro lado veamos que $\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$ es un subgrupo de $\square\mathbb{R}^{X_0}$. Sean $f, g \in \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$ y $\epsilon > 0$. Digamos que $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_0(p)$ son tales que para todo $x \in V_1$ y $y \in V_2$ se cumple que $|f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|g(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. Como $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_0(p)$ y $V_1 \cap V_2 \subset \{x \in X_0 : |(f+g)(x)| < \epsilon\}$, entonces $\{x \in X_0 : |(f+g)(x)| < \epsilon\} \in \mathcal{V}_0(p)$.

Combinando esto con lo anterior tenemos que C es un subgrupo cerrabierto de $\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$. Por tanto se cumple que

$$\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}) \simeq \oplus_{D\in G} D \simeq \oplus_{\beta<|G|}(C)_\beta.$$

Donde $G = \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})/C$.

Es bien conocido que existe una familia casi-ajena en ω de cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Así que en B tenemos una familia casi-ajena $\mathcal{B}$, de cardinalidad igual a $2^{\aleph_0}$. Para $T \in \mathcal{B}$, definimos

$$f_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} & \text{si } x = x_n \text{ y } x_n \in T \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $f_T \in \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$, ya que $f_T[X_0 \setminus T] = \{0\}$, y para cada $\epsilon > 0$ el conjunto $\{x \in X_0 : |f_T(x)| \geq \epsilon\}$ es finito. Ahora sean $T_1, T_2 \in \mathcal{B}$, afirmamos que $f_{T_1} - f_{T_2} \notin C$. En efecto, como $T_1 \setminus T_2$ es infinito (recordar que siempre $T_1 \cap T_2$ es finito y todos los miembros de $\mathcal{B}$ son numerables e infinitos), existe una sucesión $\{n_k : n < \omega\}$ en ω, estrictamente creciente, tal que $\{x_{n_k} : k < \omega\} \subset T_1 \setminus T_2$. Bajo estas condiciones tenemos que $(f_{T_1} - f_{T_2})(x_{n_k}) = \frac{1}{2^{n_k - 1}}$. Si demostramos que $f_{T_1} - f_{T_2} \notin E_0(\mathcal{F}_0)$, entonces tendremos que $f_{T_1} - f_{T_2} \notin C$. Para $m < \omega$, existe k_m tal que $n_{k_m} > m$. Como $(f_{T_1} - f_{T_2})(x_{n_{k_m}}) = \frac{1}{2^{n_{k_m}-1}} \notin \left[-\frac{1}{2^{n_{k_m}}}, \frac{1}{2^{n_{k_m}}}\right]$, tenemos que $f_{T_1} - f_{T_2} \notin E_{0,m}(\mathcal{F}_0)$.

Por un lado, se cumple que

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{\alpha<2^{\aleph_0}\cdot|G|}(C)_\alpha.$$

Pero, por lo anterior tenemos que $2^{\aleph_0} \leq |G|$. Por tanto

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{\alpha<|G|}(C)_\alpha \simeq \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

Por lo cual $C_\square(X) \simeq \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$. □

El Teorema 3.11 junto con la Proposición 3.9 demuestra que si $X = K(X_0)$, entonces existe una familia de cerrabiertos de $\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$, cada uno de ellos homeomorfo a $\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$, de cardinalidad igual a $2^{\aleph_0}$. En otras palabras, existe una partición homeomorfica de cerrabiertos en $\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$ de cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Es decir

Corolario 3.12. *Si $X = K(X_0)$, entonces $Npah(\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})) \geq (2^{\aleph_0})^+$.*

Ahora digamos algo para los espacios que tienen un sólo punto no aislado pero no son una compactación de un discreto a un punto. Veamos, que sin embargo se tiene una acotación de los números cardinales $Npah\left(\Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)$ y $Npah\left(\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)$.

En particular, por la Proposición 3.10, sabemos que si $X_1 = \{p\}$ y $X \neq K(X_0)$, entonces existe $A \in [X_0]^{\aleph_0}$ tal que $X \setminus A \in \mathcal{V}(p)$. Una variación de esta propiedad, nos permitirá demostrar la acotación anunciada.

Teorema 3.13. *Sea $\kappa \geq \aleph_0$. Si existe $A \in [X_0]^\kappa$ tal que $(X \setminus A) \in \mathcal{V}(p)$, entonces*

$$Npah\left(\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right) \geq (2^\kappa)^+$$

y

$$Npah\left(\Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right) \geq (2^\kappa)^+ .$$

DEMOSTRACIÓN.

Demostremos la primera acotación; para demostrar la segunda se procede de forma similar. Sea $A \in [X_0]^\kappa$ tal que $(X \setminus A) \in \mathcal{V}(p)$. Por el Lema 2.30, existe una partición de cerrabiertos de $\square\mathbb{R}^A$ de cardinalidad 2^κ, cada uno de ellos homeomorfo a $\square\mathbb{R}^A$. Sea

$$\{A_\lambda : \lambda < 2^\kappa\}$$

tal partición. Y sea ψ_λ un homeomorfismo entre A_λ y $\square\mathbb{R}^A$. Para cada $\lambda < 2^\kappa$, sea

$$B_\lambda \subset \mathbb{R}^{X_0} \text{ tal que } \pi_A[B_\lambda] = A_\lambda \text{ y } \pi_x[B_\lambda] = \mathbb{R} \text{ si } x \notin A$$

$$C_\lambda = (B_\lambda) \cap \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

Análogamente

$$C'_\lambda = (B_\lambda) \cap \Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

Notar que si $f \in A_\lambda$ y $\bar{f} \in \mathbb{R}^{X_0}$, donde $\bar{f} \restriction_A = f$ y $\bar{f}(x) = 0$ para $x \in X_0 \setminus A$, y como $X_0 \setminus A \subset \{x \in X_0 : \bar{f}(x) = 0\}$, entonces $\{x \in X_0 : \bar{f}(x) = 0\} \in \mathcal{V}_0(p)$. Por tanto, $\bar{f} \in \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$ y también $\bar{f} \in \Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$, así C_λ y C'_λ son no vacíos.

Ahora, para cada $\lambda < 2^\kappa$, sea

$$\Psi_\lambda : C_\lambda \longrightarrow \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}) \text{ definidas por } \Psi_\lambda(f) = \psi_\lambda(f \restriction_A) \times f \restriction_{X_0 \setminus A} .$$

Veamos que Ψ_λ es inyectiva. Sean $\Psi_\lambda(f_1) = \Psi_\lambda(f_2)$, entonces

$$\psi_\lambda(f_1 \restriction_A) = \psi_\lambda(f_2 \restriction_A) \text{ y } f_1 \restriction_{X_0 \setminus A} = f_2 \restriction_{X_0 \setminus A} .$$

O sea

$$f_1 \restriction_A = f_2 \restriction_A \text{ y } f_1 \restriction_{X_0 \setminus A} = f_2 \restriction_{X_0 \setminus A} .$$

Lo que significa que $f_1 = f_2$.

Veamos que Ψ_λ es sobreyectiva. Afirmamos que si $f \in \mathbb{R}^A$, $g_1 \in \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$ y $g_2 \in \Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$, entonces

$$h = f \times g_1 \restriction_{X_0 \setminus A} \in \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$$

y

$$t = f \times g_2 \restriction_{X_0 \setminus A} \in \Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

En efecto, sea $\epsilon > 0$, $An_\epsilon(h) = \{x \in X_0 : |h(x)| < \epsilon\}$ y $An(t) = \{x \in X_0 : t(x) = 0\}$. Demostaremos que $An_\epsilon(h), An(t) \in \mathcal{V}_0(p)$. Como

$$An_\epsilon(h) = \{x \in A : |f(x)| < \epsilon\} \cup \{x \in X_0 \setminus A : |g_1(x)| < \epsilon\}$$

y $\{x \in X_0 \setminus A : |g_1(x)| < \epsilon\} = \{x \in X_0 : |g_1(x)| < \epsilon\} \cap [(X \setminus A) \cap X_0] \in \mathcal{V}_0(p)$, por tanto $An_\epsilon(h) \in \mathcal{V}_0(p)$. Análogamente, como

$$An(t) = \{x \in A : f(x) = 0\} \cup \{x \in X_0 \setminus A : g_2(x) = 0\}$$

y $\{x \in X_0 \setminus A : g_2(x) = 0\} = \{x \in X_0 : g_2 = 0\} \cap [(X \setminus A) \cap X_0] \in \mathcal{V}_0(p)$, por tanto $An(t) \in \mathcal{V}_0(p)$.

Ahora sea $g \in \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$. Tomamos $g_0 = \psi_\lambda^{-1}(g \restriction_A)$, es decir $g_0 \in A_\lambda$. Finalmente sea $\bar{g} = g_0 \times g \restriction_{X_0 \setminus A}$. Es claro que

1. $\bar{g} \in C_\lambda$ y
2. $\Psi_\lambda(\bar{g}) = g$.

Por tanto Ψ_λ es sobreyectiva. Con análogos argumentos tendremos una biyección entre C'_λ y $\Sigma^\square_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$.

Sea

$$D = \prod_{\alpha \in X_0} O_\alpha \text{ un abierto caja de } \square\mathbb{R}^{X_0} \text{ tal que } \emptyset \neq O = D \cap C_\lambda.$$

Si $f \in O$, entonces $\psi_\lambda(f \restriction_A) \in \psi_\lambda[\pi_A[D] \cap A_\lambda]$ Sabemos que $\psi_\lambda[\pi_A[D] \cap A_\lambda]$ es un abierto en $\square\mathbb{R}^A$ y que $\prod_{\alpha \in (X_0 \setminus A)} O_\alpha$ es un abierto en $\square\mathbb{R}^{X_0 \setminus A}$. Entonces $\psi_\lambda[\pi_A[D] \cap A_\lambda] \times \prod_{\alpha \in (X_0 \setminus A)} O_\alpha$, es un abierto en $\square\mathbb{R}^{X_0}$. Además

$$\Psi_\lambda[O] \subset \left[(\psi_\lambda[\pi_A[D] \cap A_\lambda]) \times \left(\prod_{\alpha \in (X_0 \setminus A)} O_\alpha \right) \right] \cap \Sigma^\square_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}) = V.$$

Por otro lado, sea $h \in V$, es decir $h \restriction_A \in \psi_\lambda[\pi_A[D] \cap A_\lambda]$. Ahora, si $h_0 \in \pi_A[D] \cap A_\lambda$, tal que $\psi_\lambda(h_0) = h \restriction_A$, tenemos que $\Psi_\lambda(h_0 \times h \restriction_{X_0 \setminus A}) = h$. Pero además $h_0 \times h \restriction_{X_0 \setminus A} \in O$, ya que $h_0 \in \pi_A[D]$ y $h \restriction_{X_0 \setminus A} \in \prod_{\alpha \in (X_0 \setminus A)} O_\alpha$. Por tanto, Ψ_λ es una función abierta.

Si demostramos que Ψ_λ es continua, tendremos que Ψ_λ es homeomorfismo. Sea

$$f \in C_\lambda \text{ y } \Psi_\lambda(f) \in V = \left(\prod_{\alpha \in X_0} O_\lambda \right) \cap \Sigma^\square_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

Si $O_1 = \psi_\lambda^{-1}\left(\prod_{\alpha \in A} O_\lambda\right)$, entonces $f \restriction_A \in O_1$, que es un abierto de A_λ. Por tanto existe $W = \prod_{\alpha \in A} W_\alpha$ abierto caja de $\square\mathbb{R}^A$, tal que $f \restriction_A \in W \cap A_\lambda \subset O_1$. Ahora, sea $O = \left[W \cap A_\lambda \times \left(\prod_{\alpha \in X_0 \setminus A} O_\lambda\right)\right] \cap C_\lambda$. Entonces tenemos que $f \in O$ y además $\Psi_\lambda(O) \subset V$. Análogamente, C'_λ y $\Sigma^\square_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$ son homeomorfos.

Veamos ahora que para cada $\lambda < 2^\kappa$, C_λ es cerrabierto en $\Sigma^\square_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$.

Sea $f \in C_\lambda$, entonces $f \restriction_A \in A_\lambda$. Como A_λ es un cerrabierto de $\square\mathbb{R}^A$, existe $\prod_{\alpha \in A} O_\alpha$ abierto caja de $\square\mathbb{R}^A$, tal que

$$f \restriction_A \in \prod_{\alpha \in A} O_\alpha \subset A_\lambda.$$

Por tanto

$$f \in \left[\left(\prod_{\alpha \in A} O_\alpha \right) \times \square\mathbb{R}^{X_0 \setminus A} \right] \cap \Sigma^\square_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}) \subset C_\lambda.$$

Luego C_λ es abierto.

Por otro lado, si $x \in \Sigma^\square_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}) \setminus C_\lambda$, es claro que $x \restriction_A \notin A_\lambda$. Tomamos $O_1 = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ abierto caja de $\square\mathbb{R}^A$ tal que $O_1 \cap A_\lambda = \emptyset$ y $x \restriction_A \in O_1$. Si

$$V = \left[\left(\prod_{\alpha \in A} V_\alpha \right) \times \square\mathbb{R}^{X_0 \setminus A} \right] \cap \Sigma^\square_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}),$$

es claro que $x \in V$ y $V \cap C_\lambda = \emptyset$.

Finalmente veamos que la familia $\{C_\lambda : \lambda < 2^\kappa\}$ es una partición de $\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$. Sea $y \in \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$, entonces $y \restriction_A \in \square\mathbb{R}^A$. Por tanto, existe $\lambda < 2^\kappa$, tal que $y \restriction_A \in A_\lambda$. Así que $y \in C_\lambda$. Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in 2^\kappa$ diferentes. Supongamos que $x \in C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2}$, entonces $x \restriction_A \in A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2}$, lo cual no es posible.

Por tanto $Npah(\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})) \geq (2^\kappa)^+$. Análogamente obtenemos que $Npah(\Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})) \geq (2^\kappa)^+$. □

Corolario 3.14. *Si $X_1 = \{p\}$, entonces*

$$Npah\left(\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right) \geq \left(2^{\aleph_0}\right)^+$$

y

$$Npah(\Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})) \geq \left(2^{\aleph_0}\right)^+.$$

DEMOSTRACIÓN.
Por el Corolario 3.12, bastará demostrar el caso en que $X \neq K(X_0)$. Ya que, cuando $X_1 = \{p\}$ y $X \neq K(X_0)$ existe $A \in [X_0]^{\aleph_0}$ tal que $X_0 \setminus A \in \mathcal{V}_0(p)$; por el Teorema 3.13 obtenemos la conclusión deseada. □

Como resumen de todo lo anterior tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.15. *Sea X un espacio tal que $X_1 = \{p\}$, entonces:*
1. Si $\mathcal{V}_0(p)$ es ω^+-completo y X es c-ω-rcra X_1, entonces

$$C_\square(X) \simeq \Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

2. Si $\mathcal{V}_0(p)$ no es ω^+-completo, entonces

$$C_\square(X) \simeq \Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

DEMOSTRACIÓN.
1. Sabemos que

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{x\in\mathbb{R}} \left(\Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_x \simeq \oplus_{\alpha<Npah(\Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}))} \left(\Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_\alpha \oplus \left[\oplus_{x\neq 0}\left(\Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_x\right].$$

Como en la última descomposición tenemos $Npah(\Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}))$ sumandos, ésta se reduce a un solo sumando. Usando el Corolario 3.14, tenemos que

$$C_\square(X) \simeq \Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

2. Análogamente tenemos

$$C_\square(X) \simeq \oplus_{x\in\mathbb{R}} \left(\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_x \simeq \oplus_{\alpha<Npah(\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}))} \left(\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_\alpha \oplus \left[\oplus_{x\neq 0}\left(\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_x\right].$$

Usando el Corolario 3.14, tenemos que

$$C_\square(X) \simeq \Sigma^\square_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

□

Ejemplos 3.16. 1. Sea κ un cardinal infinito y sea $p \in \kappa^* = \beta(\kappa) \setminus \kappa$. Tomamos $X = \kappa \cup \{p\}$. Si p no es ω^+-completo, entonces

$$\Sigma^\square_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^\kappa) \simeq \square\mathbb{R}^\kappa.$$

En efecto, por el Teorema 3.2, tenemos que $C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^\kappa$, pero por el Teorema 3.15 tenemos que $C_\square(X) \simeq \Sigma^\square_{*,\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^\kappa)$.

2. Sea X_0 un espacio topológico discreto no numerable. Sea

$$\mathcal{F} = \{A \subset X_0 : \mid X_0 \setminus A \mid \leq \aleph_0\},$$

el cual es un filtro en X_0. Tenemos que

$$\Sigma^\square_\mathcal{F}(\mathbb{R}^{X_0}) = \{f \in \mathbb{R}^{X_0} : \{x \in X_0 : f(x) = 0\} \in \mathcal{F}\}$$

o sea

$$\Sigma^\square_\mathcal{F}(\mathbb{R}^{X_0}) = \{f \in \mathbb{R}^{X_0} : \mid \{x \in X_0 : f(x) \neq 0\} \mid \leq \aleph_0\}.$$

Sea $f \in \mathbb{R}^{X_0}$. Al conjunto

$$\{g \in \mathbb{R}^{X_0} : \mid \{x \in X_0 : f(x) \neq g(x)\} \mid \leq \aleph_0\}$$

se le llamará **el Σ-producto con punto base** f, el cual se denotará como $\Sigma_f(\mathbb{R}^{X_0})$. Si a $\Sigma_f(\mathbb{R}^{X_0})$ lo dotamos de la topología de subespacio del espacio $\square\mathbb{R}^{X_0}$, entonces al espacio resultante lo denotaremos como $\Sigma^\square_f(\mathbb{R}^{X_0})$.

Si $\bar{0}$ es la función constante cero en $\mathbb{R}^{X_0}$, entonces tenemos que

$$\Sigma^\square_\mathcal{F}(\mathbb{R}^{X_0}) = \Sigma^\square_{\bar{0}}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

Ahora, sea $p \notin X_0$. Denotamos $L(X_0) = X_0 \cup \{p\}$ a la extensión Lindelöf por un punto del discreto de cardinalidad $|X_0|$ que es el espacio topológico en el que X_0 es discreto y el sistema de vecindades de p es

$$\mathcal{V}(p) = \{B \subset L(X_0) : p \in B \text{ y } \mid L(X_0) \setminus B \mid \leq \aleph_0\}.$$

Así que tenemos

$$\mathcal{V}_0(p) = \mathcal{F}$$

es decir

$$\Sigma^\square_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0}) = \Sigma^\square_\mathcal{F}(\mathbb{R}^{X_0}) = \Sigma^\square_{\bar{0}}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

Por el Teorema 3.13, tenemos que

$$Npah(\Sigma^\square_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})) \geq 2^{\aleph_0}.$$

3. Sea $|X_0| > \kappa$ y $L_\kappa(X_0) = \{p\} \cup X_0$, donde los puntos de X_0 son aislados y un sistema de vecindades de p es $\{V \subset L_\kappa(X_0) : |L_\kappa(X_0) \setminus V| \leq \kappa\}$, entonces
$$Npah\left(\Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})\right) \geq 2^\kappa.$$
Esto se demuestra usando el Teorema 3.13 y análogos razonamientos que en el anterior apartado.

4. Para $L_\kappa(X_0)$, se cumple que $\mathcal{V}_0(p)$ es ω^+-completo.
En efecto, sea $\{B_n : n < \omega\} \subset \mathcal{V}(p)$. Como
$$L_\kappa(X_0) \setminus (\cap_{n<\omega} B_n) = \cup_{n<\omega} (L_\kappa(X_0) \setminus B_n),$$
y para todo $n < \omega$ tenemos que
$$| L(X_0) \setminus B_n | \leq \kappa,$$
entonces
$$|L(X_0) \setminus (\cap_{n<\omega} B_n)| \leq \aleph_0.\kappa = \kappa.$$
Es decir $\cap_{n<\omega} B_n \in \mathcal{V}(p)$. Por tanto $\cap_{n<\omega} (B_n \cap X_0) \in \mathcal{V}_0(p)$, es decir $\mathcal{V}_0(p)$ es ω^+-completo.

5. $L_\kappa(X_0)$ es un espacio normal (en particular es un espacio Tychonoff).
Esto es un resultado conocido.

6. Si $cof\,(|X_0|) > \kappa$, entonces $L_\kappa(X_0)$ es c-ω-rcra X_0. Notar que $(L_\kappa(X_0))_0 = X_0$; es decir, los únicos puntos aislados de $L_\kappa(X_0)$ son los puntos de X_0, y $(L_\kappa(X_0))_1 = \{p\}$.
Sean $|X_0| = \alpha$ y $X_0 = \{x_\delta : \delta < \alpha\}$. Para cada $n < \omega$, denotamos por F_n al conjunto
$$\{x_\delta : \delta = \gamma + n, \text{ donde } \gamma < \alpha \text{ y } \gamma \text{ es un ordinal límite}\}.$$
Demostraremos que $\{F_n : n < \omega\}$ es una resolución de $L_\kappa(X_0)$ respecto a $(L_\kappa(X_0))_1 = \{p\}$.
Sea $V \in \mathcal{V}(p)$, entonces $V = L(X_0) \setminus A$, donde $A \subset X_0$ con $|A| \leq \kappa$. Tomamos
$$\delta_0 = sup\{\delta : x_\delta \in A\}.$$
Como $cof\,(\alpha) > \kappa$, tenemos que $\delta_0 < \alpha$. Sea $\delta_0 = \gamma + n$, entonces
$$\{x_{\gamma+m} : m > n\} \subset V.$$
Por tanto
$$V \cap F_m \neq \emptyset \text{ para todo } m > n.$$
Entonces $L_\kappa(X_0)$ es c-ω-rcra $(L_\kappa(X_0))_1$.

7. Así, si $cof(|X_0|) > \kappa$, entonces $C_\square(L_\kappa(X_0)) \simeq \Sigma^{\square}_{\mathcal{V}_0(p)}(\mathbb{R}^{X_0})$.

8. En particular, si $|X_0| = \aleph_1$, se cumple
$$C_\square(L(X_0)) \simeq \Sigma^{\square}_0(\mathbb{R}^{\aleph_1}).$$

5. Σ-productos y los filtros $\mathcal{F}_\gamma$

Aqui generalizamos el filtro de Fréchet.

Definición 3.17. Sean κ y γ cardinales infinitos tales que $\gamma \leq \kappa$, y sea S un conjunto tal que $|S| = \kappa$. Se define la familia $\mathcal{F}_\gamma(S)$ de subconjuntos de S, como:

$$\{A \subset S : |S \setminus A| < \gamma\}.$$

Cuando $S = \kappa$ escribiremos $\mathcal{F}_\gamma$ en lugar de $\mathcal{F}_\gamma(\kappa)$.

Lema 3.18. *Sean κ y γ cardinales infinitos tales que $\gamma \leq \kappa$ y sea S un conjunto tal que $|S| = \kappa$. La familia de subconjuntos de S, $\mathcal{F}_\gamma(S)$ es un filtro en S.*

Demostración.
Sólo mostraremos que si $A, B \in \mathcal{F}_\gamma(S)$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_\gamma(S)$. En efecto,

$$|S \setminus (A \cap B)| = |S \setminus A) \cup (S \setminus B)| \leq máx\{|S \setminus A|, |S \setminus B|\} < \gamma.$$ □

Algunos Σ-productos definidos con este tipo de filtro son útiles en la descripción de los $C_\square(X)$ de algunos espacios X, incluso algunos de estos Σ-productos son homeomorfos a un producto caja. Notemos que por las Definiciones 3.4 y 3.17 tenemos que

$$\Sigma_{*,\mathcal{F}_\kappa}\mathbb{R}^\kappa = \{f \in \mathbb{R}^\kappa : \text{ para todo } \epsilon > 0, \{\lambda < \kappa : |f(\lambda)| < \epsilon\} \in \mathcal{F}_\kappa\}$$

de aquí que

$$\Sigma_{*,\mathcal{F}_\kappa}\mathbb{R}^\kappa = \{f \in \mathbb{R}^\kappa : \text{ para todo } \epsilon > 0, |\kappa \setminus \{\lambda < \kappa : |f(\lambda)| < \epsilon\}| < \kappa\}.$$

Es decir,

$$\Sigma_{*,\mathcal{F}_\kappa}\mathbb{R}^\kappa = \{f \in \mathbb{R}^\kappa : \text{ para todo } \epsilon > 0, |\{\lambda < \kappa : |f(\lambda)| \geq \epsilon\}| < \kappa\}.$$

Hechas estas aclaraciones veamos ahora la siguiente proposición.

Proposición 3.19. *Sea κ cardinal infinito tal que $cof(\kappa) = \aleph_0$. Entonces tenemos que*

$$\Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_\kappa}\mathbb{R}^\kappa \simeq \square\mathbb{R}^\kappa.$$

Demostración.
El Ejemplo 2.23 inciso (5) nos dice que si κ es un cardinal infinito y $cof(\kappa) = \aleph_0$, entonces κ es F_σ en el subespacio $X = \kappa \cup U(\kappa)$ de $\beta(\kappa)$, donde $U(\kappa)$ son los ultrafiltros uniformes en $\beta(\kappa)$. Por el Teorema 2.25 tenemos que $A_{\widehat{0}}(X) \simeq \square\mathbb{R}^\kappa$. Así que terminaremos nuestra demostración si probamos que $A_{\widehat{0}}(X) \simeq \Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_\kappa}\mathbb{R}^\kappa$. Por el Lema 2.3, será suficiente probar que $\pi_\kappa \restriction_{A_{\widehat{0}}(X)} [A_{\widehat{0}}(X)] = \Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_\kappa}\mathbb{R}^\kappa$.

Sea $f \in A_{\widehat{0}}(X)$ y supongamos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $|\{\lambda < \kappa : |f(\lambda)| \geq \kappa\}| \geq \kappa$. Si $A = \{\lambda < \kappa : |f(\lambda)| \geq \kappa\}$, entonces existe $p \in U(\kappa)$ tal que $A \in p$. Si $\bar{A} = \{q \in \beta(\kappa) : A \in q\}$, entonces $\widehat{A} = \bar{A} \cap X = \{q \in U(\kappa) : A \in q\} \cup A$. Ahora $\widehat{A}$ es un abierto en X que contiene a p. En general los conjuntos de la forma $\widehat{B}$ donde $B \in p$ son una base de vecindades de p. Ya que $f \in A_{\widehat{0}}(X)$, entonces existe $B \in p$ tal que $f[\widehat{B}] \subset (-\epsilon_0, \epsilon_0)$. Sabemos que $A \cap B \in p$, por tanto $A \cap B \neq \emptyset$; pero además $f[A \cap B] \subset f[\widehat{A} \cap \widehat{B}] \subset (-\epsilon_0, \epsilon_0)$. Es decir existe $\lambda \in A \cap B$ tal que $f(\lambda) \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ lo cual no es posible. Asi $f \restriction_\kappa \in \Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_\kappa}\mathbb{R}^\kappa$.

Ahora sea $f \in \Sigma^{\Box}_{*,\mathcal{F}_\kappa}\mathbb{R}^\kappa$ y $\bar{f}$ la extensión de f a X tal que $\bar{f}(p) = 0$ para todo $p \in U(\kappa)$. Si $\bar{f}$ es continua en cualquier $p \in U(\kappa)$, entonces $\bar{f} \in A_{\widehat{0}}(X)$ y es claro que $\bar{f} \restriction_\kappa = f$. Para estos propósitos, sean $p \in U(\kappa)$ y $\epsilon > 0$. Sea $A = \{\lambda < \kappa : |f(\lambda)| < \epsilon\}$. Sabemos que $A \in \mathcal{F}_\kappa$, lo que significa que $|\{\lambda < \kappa : |f(\lambda)| \geq \epsilon\}| = |\kappa \setminus A| < \kappa$. Por tanto $\kappa \setminus A \notin p$, es decir $A \in p$. En resumen, tenemos que $p \in \widehat{A}$ y $\bar{f}[\widehat{A}] = \bar{f}[\bar{A} \cap U(\kappa)] \cup f[A] = \{0\} \cup f[A] \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Así que finalmente $\pi_\kappa \restriction_{A_{\widehat{0}}(X)} [A_{\widehat{0}}(X)] = \Sigma^{\Box}_{*,\mathcal{F}_\kappa}\mathbb{R}^\kappa$. $\Box$

Ahora analizaremos los Σ-productos de la forma $\Sigma^{\Box}_{\mathcal{F}_\gamma}\mathbb{R}^\kappa$ donde $\gamma \leq \kappa$ con γ y κ cardinales infinitos (recordar que $\Sigma^{\Box}_{\mathcal{F}_\gamma}\mathbb{R}^\kappa = \{f \in \mathbb{R}^\kappa : \{\lambda < \kappa : f(\lambda) = 0\} \in \mathcal{F}_\gamma\}$).

En contraste con la Proposición 3.19, mostramos una condición para que estos últimos Σ-productos no sean algunos tipos de productos caja.

Lema 3.20. *Sean κ, γ, τ cardinales infinitos. Si $\kappa \neq \tau$ y $\gamma \leq \kappa$, entonces $\Sigma^{\Box}_{\mathcal{F}_\gamma}(\mathbb{R}^\kappa)$ y $\Box\mathbb{R}^\tau$ no son homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN.

Sabemos que $\sigma^{\Box}_{\bar{0}}(\mathbb{R}^\kappa)$ es la componente conexa de $\bar{0}$ en $\Box\mathbb{R}^\kappa$ y como $\sigma^{\Box}_{\bar{0}}(\mathbb{R}^\kappa) \subset \Sigma^{\Box}_{\mathcal{F}_\gamma}(\mathbb{R}^\kappa)$, entonces la componente conexa de $\bar{0}$ en $\Sigma^{\Box}_{\mathcal{F}_\gamma}(\mathbb{R}^\kappa)$ es $\sigma^{\Box}_{\bar{0}}(\mathbb{R}^\kappa)$.

Si $\psi : \Sigma^{\Box}_{\bar{0}}(\mathbb{R}^\kappa) \longrightarrow \Box\mathbb{R}^\tau$ fuera un homeomorfismo, entonces $\sigma^{\Box}_{\bar{0}}(\mathbb{R}^\kappa)$ y $\sigma^{\Box}_{\psi(\bar{0})}(\mathbb{R}^\tau)$ serían homeomorfos pero por la Proposición 1.33 esto no es posible. $\Box$

Sean κ un cardinal infinito y $p \in \beta(\kappa)$, la norma del filtro p se denotará como $||p||$ y será igual a $mín\{|A| : A \in p\}$. Si γ es cardinal infinito tal que $\gamma \leq \kappa$, tendremos que $U_\gamma(\kappa) = \{p \in \beta(\kappa) : ||p|| \geq \gamma\}$. El espacio $X = \kappa \cup U_\gamma(\kappa)$ cumple las siguientes propiedades (ver [**19**]): $X_0 = \kappa$, $X_1 = U_\gamma(\kappa)$, $U_\gamma(\kappa)$ es compacto, X es c-ω-rcraX_1. Para los espacios $X = \kappa \cup U_\gamma(\kappa)$ bajo ciertas condiciones, tendremos que $C_\Box(X)$ se puede expresar en términos del espacio $\Sigma^{\Box}_{\mathcal{F}_\gamma}\mathbb{R}^\kappa$.

Proposición 3.21. *Sean γ y κ cardinales infinitos tales que $cof(\gamma) > \aleph_0$ y $\gamma \leq \kappa$. Si $X = \kappa \cup U_\gamma(\kappa)$, entonces*

$$C_\Box(X) \simeq \oplus_{\lambda<2^\kappa}\left(\Sigma^{\Box}_{\mathcal{F}_\gamma}\mathbb{R}^\kappa\right)_\lambda.$$

DEMOSTRACIÓN.

Como X es c-ω-rcraX_1, entonces

$$C_\Box(X) \simeq \oplus_{\widehat{x}\in\widehat{C}(X_1)}\left(A_{\widehat{0}}(X)\right)_{\widehat{0}}.$$

Si probamos que $A_{\widehat{0}}(X) \simeq \Sigma^{\Box}_{\mathcal{F}_\gamma}\mathbb{R}^\kappa$ y que $|\widehat{C}(X_1)| = 2^\kappa$ habremos concluido la demostración.

En este camino demostaremos que $\pi_\kappa \restriction_{A_{\widehat{0}}(X)} [A_{\widehat{0}}(X)] = \Sigma^{\Box}_{\mathcal{F}_\gamma}\mathbb{R}^\kappa$. Sean $f \in A_{\widehat{0}}(X)$ y $S = \{\lambda < \kappa : f(\lambda) \neq 0\}$. Sabemos que $C^f_n = \{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{2^n}\}$ es un cerrado de X contenido en X_0. Si $|C^f_n| \geq \gamma$, entonces existe $p \in U_\gamma(\kappa)$ tal que $C^f_n \in p$. Por otro lado $cl_X(C^f_n) = \{q \in U_\gamma(\kappa) : C^f_n \in q\} \cup C^f_n$, lo que significa que $p \in cl_X(C^f_n) \setminus C^f_n$; es decir C^f_n no es cerrado en X. Así que C^f_n es de cardinalidad menor que γ. Es claro que $S = \cup_{n<\omega}C^f_n$, entonces $|S| < \gamma$. Por tanto $f \restriction_\kappa \in \Sigma^{\Box}_{\mathcal{F}_\gamma}(\mathbb{R}^\kappa)$.

Por otro lado, sea $g \in \Sigma^{\Box}_{\mathcal{F}_\gamma}(\mathbb{R}^\kappa)$. Sea $\bar{g}$, la extensión de g a X, donde $\bar{g}(p) = 0$ para todo $p \in U_\gamma(\kappa)$. Si demostramos que $\bar{g} \in C_\Box(X)$, habremos concluido. Sea

$p \in U_\gamma(\kappa)$ y $\epsilon > 0$, entonces $A = \kappa \setminus \{x \in \kappa : g(x) \geq 0\}$. Así que $\bar{g}(\bar{A} \cap X) = \{0\} \subset (-\epsilon, \epsilon)$.

Como $U_\gamma(\kappa)$ es compacto y X es normal, entonces $\widehat{C}(X_1) = \widehat{C}(U_\gamma(\kappa)) = C(U_\gamma(\kappa))$. Por el Lema 1.26, se tiene que

$$|C(U_\gamma(\kappa))| = (w(U_\gamma(\kappa)))^{\aleph_0},$$

pero $w(U_\gamma(\kappa)) = 2^\kappa$. Resumiendo tenemos que

$$|\widehat{C}(X_1)| = 2^\kappa.$$

Luego concluimos la demostración. □

Corolario 3.22. *Sean γ y κ cardinales infinitos tales que $cof(\gamma) > \aleph_0$ y $\gamma \leq \kappa$. Si $X = \kappa \cup U_\gamma(\kappa)$ y $Npah(\Sigma^\Box_{\mathcal{F}_\gamma}\mathbb{R}^\kappa) \geq (2^\kappa)^+$, entonces*

$$C_\Box(X) \simeq \Sigma^\Box_{\mathcal{F}_\gamma}\mathbb{R}^\kappa.$$

Finalizamos la sección con el siguiente corolario:

Corolario 3.23. *Sean γ y κ cardinales infinitos tales que $cof(\gamma) > \aleph_0$ y $\gamma \leq \kappa$. Si $X = \kappa \cup U_\gamma(\kappa)$ y asumimos que existe un cardinal infinito τ tal que $\tau < \gamma$ y $2^\tau = 2^\kappa$, entonces $Npah \geq (2^\kappa)^+$ y $C_\Box(X) \simeq \Sigma^\Box_{\mathcal{F}_\gamma}\mathbb{R}^\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN.

Definimos el espacio auxiliar $Y = \kappa \cup \{p\}$, donde los puntos de κ son aislados y la base de vecindades de p es la familia $\{A \cup \{p\} : A \in \mathcal{F}_\gamma\}$, es decir $\mathcal{N}_0(p) = \mathcal{F}_\gamma$. Por tanto $\Sigma^\Box_{\mathcal{F}_\gamma}\mathbb{R}^\kappa = \Sigma^\Box_{\mathcal{V}_0(p)}\mathbb{R}^\kappa$. Por el Teorema 3.13, tenemos que $Npah\left(\Sigma^\Box_{\mathcal{F}_\gamma}\mathbb{R}^\kappa\right) \geq (2^\tau)^+$. Por la hipótesis y el Corolario 3.23 tenemos finalmente que $C_\Box(X) \simeq \Sigma^\Box_{\mathcal{F}_\gamma}\mathbb{R}^\kappa$. □

6. $C_\Box(X)$ para X numerablemente compactos

Recordemos que si S es un conjunto, $\Sigma = \{f \in \mathbb{R}^S :$ para todo $\epsilon > 0, |\{x \in S : |f(x)| \geq \epsilon\}| < \aleph_0\}$ coincide con $\Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^S)$, donde $\mathcal{F}_0$ es el filtro de Fréchet sobre S. Estos conjuntos resultarán muy importantes para describir $C_\Box(X)$ en el caso en que X sea numerablemente compacto. También recordemos que para X, espacio topológico, X_0 es el conjunto de puntos aislados de X, $X_1 = X \setminus X_0$, $X^b = X_1 \cap cl_X X_0$ y $Z = X_1 \setminus X^b$, además supondremos que X es T_1 y $X^b \neq \emptyset \neq X_0$.

Proposición 3.24. *Sea X un espacio topológico tal que todo conjunto infinito tiene un punto clausura en X. Entonces $A_{\widehat{0}}(X)$ es homeomorfo a $\Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{X_0})$.*

DEMOSTRACIÓN.

Por el Lema 2.3, bastará demostrar que $F : A_{\widehat{0}}(X) \longrightarrow \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{X_0})$ definida como $F(f) = f \restriction_{X_0}$, cumple $F[A_{\widehat{0}}(X)] = \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{X_0})$.

Sea $f \in A_{\widehat{0}}(X)$, y supongamos que $A = \{x \in X_0 : |f(x)| \geq \epsilon_0\}$ es infinito para algún $0 < \epsilon_0$. Por hipótesis, existe $p \in X$ que es punto clausura de A. Es claro que $p \in X_1$, es decir $f(p) = 0$ y por la continuidad de f en p, tenemos que para $0 < \epsilon < \epsilon_0$, existe $W \in \mathcal{V}(p)$, tal que $f[W] \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Pero existe $x \in A \cap W$, es decir $|f(x)| \geq \epsilon_0 > \epsilon$, lo cual es una contradicción.

Ahora sea $g \in \Sigma^{\Box}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{X_0})$. Tomamos $\bar{g} \in \mathbb{R}^X$ tal que $\bar{g} \restriction_{X_0} = g$ y $\bar{g}(p) = 0$ para todo $p \in X_1$; demostraremos que $\bar{g} \in A_{\widehat{0}}(X)$. Para todo $n < \omega$, sea $S_n(g) = \{x \in X_0 : |g(x)| \geq \frac{1}{2^n}\}$. Así que $S_n(g)$ es finito para todo $n < \omega$. Ahora sea $p \in X_1$. Demostremos que $\bar{g}$ es continua en p. Sea $\epsilon > 0$, existe $n_0 < \omega$ tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$. Como $S_{n_0}(g)$ es finito, entonces es un conjunto cerrado de X y además $X \setminus S_{n_0}(g) \in \mathcal{V}(p)$. Sea $z \in X \setminus S_{n_0}(g)$; como $|\bar{g}(z)| = 0 < \epsilon$ si $z \in X_1$ y $|\bar{g}(z)| < \frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$ si $z \in X_0$, tenemos que $\bar{g}[X \setminus S_{n_0}(g)] \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Con lo que concluimos la demostración. □

Teorema 3.25. *Sea X un espacio topológico tal que todo conjunto infinito tiene un punto clausura en X y además X es c-ω-rcraX_1, entonces*

$$C_\Box(X) \simeq \oplus_{\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)} \left(\Sigma^{\Box}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_{\widehat{x}}.$$

En particular, si $|\widehat{C}(X_1)| \leq 2^{\aleph_0}$, entonces $C_\Box(X) \simeq \Sigma^{\Box}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{X_0})$.

Demostración.
Por la Proposición 2.26 tenemos que

$$C_\Box(X) \simeq \oplus_{\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)} \left(A_{\widehat{x}}(X)\right).$$

Por la Proposición 3.29 tenemos que

$$C_\Box(X) \simeq \oplus_{\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)} \left(\Sigma^{\Box}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_{\widehat{x}}.$$

Ahora, por el Corolario 3.14, si $|\widehat{C}(X_1)| \leq 2^{\aleph_0}$, como $\mathcal{F}_0 = \mathcal{V}_0(p)$ cuando $K(X_0) = \{p\} \cup X_0$, la suma anterior se reduce a un sumando y por tanto

$$C_\Box(X) \simeq \Sigma^{\Box}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{X_0}).$$

□

Para todo espacio X numerablemente compacto y T_3 se cumple que todo conjunto infinito tiene un punto clausura en X. Como X_1 (el conjunto de puntos no aislados de X) es un conjunto cerrado de X, él es nuevamente numerablemente compacto T_3 y además sin puntos aislados, por tanto X_1 es casi-ω-resoluble. Por la Proposición 2.28 tenemos que X es c-ω-rcraX_1. Por tanto tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.26. *Si X es T_3 y numerablemente compacto, entonces*

$$C_\Box(X) \simeq \oplus_{\widehat{x} \in \widehat{C}(X_1)} \left(\Sigma^{\Box}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{X_0})\right)_{\widehat{x}}.$$

Y si $|\widehat{C}(X_1)| \leq 2^{\aleph_0}$, entonces $C_\Box(X) \simeq \Sigma^{\Box}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{X_0})$.

Corolario 3.27. *(1) Para todo cardinal infinito κ, se cumple*

$$C_\Box(\beta(\kappa)) \simeq \oplus_{\lambda < 2^\kappa} \left(\Sigma^{\Box}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{\kappa})\right)_{\lambda}.$$

(2) Para todo $q \in \beta(\omega) \setminus \omega$, se cumple que

$$\Box\mathbb{R}^\omega \simeq \Sigma^{\Box}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{\omega}) \simeq \Sigma^{\Box}_{*,q}(\mathbb{R}^{\omega}).$$

DEMOSTRACIÓN.

(1) Por el Corolario 3.26, tenemos que

$$C_\Box(\beta(\kappa)) \simeq \oplus_{\widehat{x}\in\widehat{C}(X_1)} \left(\Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^\kappa)\right)_{\widehat{x}}.$$

$(\beta(\kappa))_1 = \kappa^*$, el cual es cerrado en $\beta(\kappa)$; por tanto $\beta(\kappa^*) = \kappa^*$. Además que $\widehat{C}(\kappa^*) = C(\kappa^*)$. Usando la Proposición 1.26, concluimos que $|\widehat{C}(\kappa^*)| = (w(\kappa^*))^{\aleph_0}$. Pero $w(\kappa^*) = 2^\kappa$. En resumen tenemos que $|\widehat{C}(\kappa^*)| = 2^\kappa$.

(2) Primero notemos que $(\beta(\omega))_0 = \omega$, entonces $\Box\mathbb{R}^\omega \simeq C_\Box(\beta(\omega))$. Por (1) de esta demostración tenemos que $C_\Box(\beta(\omega)) \simeq \oplus_{\lambda<\tau} \left(\Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^\omega)\right)_\lambda$ con $\tau \leq 2^\omega$. Por el Corolario 3.14, tenemos que $C_\Box(\beta(\omega)) \simeq \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^\omega)$. Con esto obtenemos que $\Box\mathbb{R}^\omega \simeq \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^\omega)$.

Definimos $X = \omega \cup \{q\}$ para $q \in \beta(\omega) \setminus \omega$, con la topología heredada de $\beta(\omega)$. Así que $X_0 = \omega$, $X_1 = \{q\}$ y además $\mathcal{V}_0(q) = q$. Por el Teorema 2.25 y ya que X_0 es F_σ, entonces $A_{\widehat{0}}(X) \simeq \Box\mathbb{R}^\omega$ con X_0 c-ω-rcraX_1. Otra consecuencia del mismo teorema es que $A_{\widehat{0}}(X)$ es cerrabierto en $C_\Box(X)$. Por el Lema 3.5, tenemos que $A_{\widehat{0}}(X) \simeq \Sigma^\Box_{*,q}(\mathbb{R}^\omega)$. En resumen se cumple que

$$\Box\mathbb{R}^\omega \simeq C_\Box(X) \simeq \oplus_{x\in\mathbb{R}}(A_{\widehat{0}}(X))_x \simeq \oplus_{x\in\mathbb{R}}(\Sigma^\Box_{*,q}(\mathbb{R}^\omega))_x \simeq \Sigma^\Box_{*,q}(\mathbb{R}^\omega).$$

□

7. Espacios de ordinales

Recordar que si α es un ordinal numerable entonces tenemos que $C_\Box([0,\alpha)) \simeq \Box\mathbb{R}^\omega \simeq C_\Box([0,\alpha])$. En esta sección desarrollaremos expresiones de $C_\Box([0,\alpha))$ y de $C_\Box([0,\alpha])$ para el caso no numerable. Sea α un ordinal no numerable arbitrario, tomamos a $[0,\alpha)$ con la topología del orden. Tenemos que $[0,\alpha)_0$ (el conjunto de puntos aislados) es el conjunto de ordinales sucesores menores que α; así que $[0,\alpha)_1 = [0,\alpha) \setminus [0,\alpha)_0$ es el conjunto de ordinales límite menores que α. Lo mismo puede decirse para el espacio $[0,\alpha]$ con la topología del orden y α un ordinal no numerable. En lo que sigue demostaremos una evaluación de $|C[0,\alpha)|$ para todo ordinal infinito α. Antes demostraremos dos lemas técnicos.

Lema 3.28. *Sea α un ordinal limite infinito. Si $cof(\alpha) > \omega$, entonces*

$$C_\Box([0,\alpha)) \simeq C_\Box([0,\alpha]).$$

DEMOSTRACIÓN.

Recordemos que si α es un ordinal con cofinalidad no-numerable, entonces $[0,\alpha)$ es numerablemente compacto.

Si $f \in C([0,\alpha))$, donde α tiene cofinalidad no-numerable, entonces $f[[0,\alpha)]$ es numerablemente compacto en $\mathbb{R}$, por tanto compacto. Para cada $\delta < \alpha$, el conjunto $[\delta,\alpha)$ es homeomorfo a $[0,\delta_0)$ para algun ordinal $\delta_0 < \alpha$. Este ordinal δ_0, no puede tener cofinalidad numerable, ya que entonces, $[0,\alpha)$ tendría cofinalidad numerable. Así que $[0,\delta_0)$ es numerablemente compacto, por tanto $[\delta,\alpha)$ para todo $\delta < \alpha$, es numerablemente compacto. Así que la familia $\{f[[\delta,\alpha)] : \delta < \alpha\}$, es una familia de cerrados en $f[[0,\alpha)]$ con la propiedad de la intersección finita. Sea $r \in \cap_{\delta<\alpha} f[[\delta,\alpha)]$.

Notar que si A y B cerrados en $[0,\alpha)$ y ajenos, con α de cofinalidad no-numerable, entonces uno de los dos es acotado en $[0,\alpha)$. En efecto, si ninguno de los dos fuera acotado, entonces sería posible construir una sucesión estrictamente creciente $\{\delta_n : n<\omega\}$ de $[0,\alpha)$ tal que, si n par, entonces $\delta_n \in A$ y $\delta_{n+1} \in B$. Si $\delta = sup\{\delta_n : n<\omega\}$, entonces $\delta \in [0,\alpha)$, por tanto $\delta \in A\cap B$, lo cual no es posible.

Como se tomó r, tenemos que $f^{-1}[\{r\}]$ es un conjunto cerrado y no acotado. Por otro lado, para cada $n<\omega$ definimos al conjunto $C_n = \{x \in [0,\alpha) : |f(x)-r| \geq \frac{1}{2^n}\}$. Tenemos que para cada $n<\omega$, $C_n \cap f^{-1}[\{r\}] = \emptyset$, así que cada C_n es acotado. Tomamos $\alpha_n = supC_n$ y $\beta_1 = sup\{\alpha_n : n<\omega\}$, tenemos que $\beta_1 < \alpha$. Ahora, si $\beta \in (\beta_1,\alpha)$ y $\delta \in [\beta,\alpha)$, entonces $\delta \notin \cup_{n<\omega} C_n$, o sea $|f(\delta)-r| < \frac{1}{2^n}$ para todo $n<\omega$, por tanto $f[[\beta,\alpha)] = \{r\}$. En resumen tenemos que si α tiene cofinalidad no-numerable, entonces para toda $f \in C([0,\alpha))$ existe $\beta \in [0,\alpha)$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $f[[\beta,\alpha)] = \{r\}$.

Por otro lado, ya demostramos que $[0,\alpha)$ es numerablemente compacto y es conocido que $[0,\alpha)$ es un espacio normal y T_2; así que $[0,\alpha)$ cumple las hipótesis del Corolario 3.26. Por tanto

$$C_\square([0,\alpha)) \simeq \oplus_{\widehat{x}\in\widehat{C}([0,\alpha)_1)} \left(\Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)_0})\right)_{\widehat{x}} \simeq \oplus_{\widehat{x}\in\widehat{C}([0,\alpha)_1)} \left(\Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{|\alpha|})\right)_{\widehat{x}}.$$

Notar que $|[0,\alpha]_0| = |[0,\alpha)_0| = |\alpha|$. Y como además valen los mismos razonamientos para $[0,\alpha]$ ya que este es compacto, tenemos

$$C_\square([0,\alpha]) \simeq \oplus_{\widehat{x}\in\widehat{C}([0,\alpha]_1)} \left(\Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{|\alpha|})\right)_{\widehat{x}}.$$

Para concluir el lema bastará demostrar que $|\widehat{C}([0,\alpha]_1)| = |\widehat{C}([0,\alpha)_1)|$. Como los espacios $[0,\alpha]_1$ y $[0,\alpha)_1$ están C-encajados en $[0,\alpha]$ y $[0,\alpha)$ respectivamente, entonces tenemos que $\widehat{C}([0,\alpha]_1) = C([0,\alpha]_1)$ y $\widehat{C}([0,\alpha]_1) = C([0,\alpha)_1)$. Así que demostraremos que $|C([0,\alpha]_1)| = |C([0,\alpha)_1)|$.

Sea $f \in C([0,\alpha)_1)$, tomamos $\bar{f}$ una extensión continua de f a $[0,\alpha)$. Como existe $\beta < \alpha$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{f}[[\beta,\alpha)] = \{r\}$, entoces se cumple que para toda $f \in C([0,\alpha)_1)$, existe $\beta<\alpha$ y $r\in\mathbb{R}$ tales que $f[[\beta,\alpha)\cap[0,\alpha)_1] = \{r\}$.

Definimos la siguiente función

$F : C([0,\alpha)_1) \longrightarrow C([0,\alpha]_1)$ con $F(f) = \bar{f}$, tal que $\bar{f}\restriction_{[0,\alpha)_1} = f$ y $\bar{f}(\alpha) = r$, donde $f[[\beta,\alpha)\cap[0,\alpha)_1] = \{r\}$ para alguna $\beta<\alpha$. Veamos que $\bar{f} \in C([0,\alpha]_1)$, es claro que será suficiente demostrar que $\bar{f}$ es continua en α. Pero esto es claro ya que $f[[\beta,\alpha)] = \{r\}$, por tanto $\bar{f}[(\beta+1,\alpha)\cap[0,\alpha)_1] = \{r\}$. F es inyectiva, ya que si $\bar{f} = \bar{g}$, tenemos que $\bar{f}\restriction_{[0,\alpha)} = f$, $\bar{g}\restriction_{[0,\alpha)_1} = g$ y $\bar{f}\restriction_{[0,\alpha)_1} = \bar{g}\restriction_{[0,\alpha)}$, por tanto $f = g$. Por otro lado, si $T \in C([0,\alpha]_1)$, entonces $T\restriction_{[0,\alpha)_1} \in C([0,\alpha)_1)$, además existe $\beta<\alpha$ y $r\in\mathbb{R}$, tal que $T\restriction_{[0,\alpha)_1}[[\beta,\alpha)\cap[0,\alpha)_1] = \{r\}$. Así que para que T sea continua en α es menester que $T(\alpha) = r$, o lo que es lo mismo $F(T\restriction_{[0,\alpha)}) = T$. Por tanto F es una biyección, y con esto concluimos el lema. $\square$

Teorema 3.29. *Sea α un número ordinal infinito. Entonces*

$$|C([0,\alpha))| = |\alpha|^{\aleph_0}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Como hasta ahora, tomamos a los espacio $[0,\alpha)$ y $[0,\alpha]$ con la topología del orden. Notar que para cualquier ordinal α se cumple que $d([0,\alpha]) = |\alpha|$. En efecto, todo conjunto denso de $[0,\alpha]$ contiene a los ordinales sucesores contenidos en $[0,\alpha]$

es decir $|\alpha| \leq d([0,\alpha]) \leq |[0,\alpha]| = |\alpha|$. Aun más, como $|\alpha| = d([0,\alpha]) \leq w([0,\alpha]) \leq |\alpha|$, tenemos que $w([0,\alpha]) = |\alpha|$. Usando la Proposición 1.26, obtenemos que para cualquier ordinal:

$$|C([0,\alpha])| = w([0,\alpha])^{\aleph_0} = |\alpha|^{\aleph_0},$$

y para cualquier ordinal límite α de cofinalidad no-numerable,

$$|C([0,\alpha))| = w([0,\alpha])^{\aleph_0} = |\alpha|^{\aleph_0}.$$

ya que $\beta([0,\alpha)) = [0,\alpha]$.

Ahora, asumimos que α tiene cofinalidad numerable. En este caso,sea $\{\alpha_n : n < \omega\}$ una sucesión creciente en $[0,\alpha)$ tal que $sup\{\alpha_n : n < \omega\} = \alpha$. Para todo $n < \omega$, tenemos que $(\alpha_n, \alpha_{n+1}] = [\alpha_n + 1, \alpha_{n+1}] = (\alpha_n, \alpha_{n+1} + 1)$. Es claro que $[0,\alpha) = \cup_{n<\omega}(\alpha_n, \alpha_{n+1}]$, así que aplicando la Proposición 1.7, obtenemos que

$$C_p([0,\alpha)) \simeq T_{n<\omega} C_p((\alpha_n, \alpha_{n+1}]).$$

De esto obtenemos

$$|C([0,\alpha))| = \prod_{n<\omega} |C((\alpha_n, \alpha_{n+1}])|.$$

Pero, $(\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ está C-encajado en $[0,\alpha_{n+1}]$ para todo $n < \omega$, lo que significa que $|C((\alpha_n, \alpha_{n+1}])| \leq |C([0,\alpha_{n+1}])| = |\alpha_{n+1}|^{\aleph_0}$. En resumen, tenemos que

$$|C([0,\alpha))| \leq \prod_{n<\omega} |\alpha_n|^{\aleph_0} \leq |\alpha|^{\aleph_0}.$$

Por otro lado, sea $F : C([0,\alpha]) \longrightarrow C([0,\alpha))$ definida como $F(f) = f \restriction_{[0,\alpha)}$. Es claro que F es inyectiva, ya que si $f, g \in C[0,\alpha]$ tales que $f \restriction_{[0,\alpha)} = g \restriction_{[0,\alpha)}$, entonces $g(\alpha) = f(\alpha)$. Así que $|\alpha|^{\aleph_0} = |C[0,\alpha]| \leq |C[0,\alpha)|$. Luego $|C[0,\alpha)| = |\alpha|^{\aleph_0}$ □

Concluimos este capítulo con un par de teoremas, que describen los espacios $C_\square([0,\alpha))$.

Teorema 3.30. 1. *Para todo ordinal infinito α tenemos que*

$$C_\square([0,\alpha]) \simeq \oplus_{\lambda<|\alpha|^{\aleph_0}} \left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0} \mathbb{R}^{|\alpha|}\right)_\lambda.$$

2. *Para todo ordinal infinito con $cof(\alpha) > \aleph_0$ se tiene que*

$$C_\square([0,\alpha)) \simeq \oplus_{\lambda<|\alpha|^{\aleph_0}} \left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0} \mathbb{R}^{|\alpha|}\right)_\lambda.$$

3. $\square\mathbb{R}^\omega \simeq C_\square([0,\omega]) \simeq \Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^\omega)$ *y* $C_\square([0,\omega_1]) \simeq C_\square([0,\omega_1)) \simeq \Sigma^\square_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{\omega_1})$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Tenemos que

$$C_\square([0,\alpha]) \simeq \oplus_{\lambda<|\widehat{C}(X_1)|} \left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0} \mathbb{R}^{|\alpha|}\right)_\lambda$$

donde X_1 son ordinales límite en $[0,\alpha]$. El conjunto de los ordinales límite en $[0,\alpha]$ es un conjunto cerrado, por tanto es un conjunto compacto. Por la Proposición 1.26 (además que $\widehat{C}([0,\alpha]_1) = C([0,\alpha]_1))$, obtenemos que $|\widehat{C}([0,\alpha]_1)| = w([0,\alpha]_1)^{\aleph_0}$. La familia $\{[0,\delta+1) \cap [0,\alpha]_1 : \delta \in [0,\alpha]_1\}$ de conjuntos abiertos en $[0,\alpha]_1$ tiene cardinalidad $|[0,\alpha]_1| = |\alpha|$, asi que $|\alpha| \leq w([0,\alpha]_1) \leq w([0,\alpha]) = |\alpha|$. Por tanto $|\widehat{C}([0,\alpha]_1)| = |\alpha|^{\aleph_0}$.

2. El Lema 3.28 asegura que $C_\square([0,\alpha)) \simeq C_\square([0,\alpha])$ y por lo anterior tenemos lo deseado.

3. En el Corolario 3.26, se demuestra que $\Box\mathbb{R}^\omega \simeq \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^\omega)$. Como $[0,\omega]_0$ es F_σ, obtenemos que $\Box\mathbb{R}^\omega \simeq C_\Box([0,\omega])$. Ahora por el Lema 3.28, concluimos que $C_\Box([0,\omega_1]) \simeq C_\Box([0,\omega_1))$. Ahora, tenemos que

$$C_\Box([0,\omega_1]) \simeq \oplus_{\lambda<(\aleph_1)^{\aleph_0}} \left(\Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{\omega_1})\right)_\lambda .$$

Como $(\aleph_1)^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$, entonces $|\widehat{C}([0,\omega_1]_1)| \leq 2^{\aleph_0}$. Luego $C_\Box([0,\omega_1]) \simeq \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{\omega_1})$. $\Box$

Queremos decir algo acerca de los espacios $C_\Box[0,\alpha)$, cuando α es un ordinal no-numerable de cofinalidad numerable. Para desarrollar este tema será muy importante el subconjunto $\tilde{\Sigma}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$ de $\mathbb{R}^{[0,\alpha)}$, definido como $\{f \in \mathbb{R}^{[0,\alpha)}$: para todo $\epsilon > 0$ y $\beta < \alpha, |\{\lambda < \beta : |f(\lambda)| \geq \epsilon\}| < \aleph_0\}$. Si a tal conjunto le damos la topología de subespacio de $\Box\mathbb{R}^{[0,\alpha)}$, al espacio resultante lo denotaremos por $\tilde{\Sigma}^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$. Veamos el siguiente lema cuya demsotración es simple.

Lema 3.31. *Sea α un ordinal no numerable de cofinalidad numerable, entonces se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:*

a) Existe $\kappa < \alpha$ tal que $\alpha = \kappa + \omega$

b) Existe una sucesión cofinal $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_n < ... < \alpha$ en α tal que $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ es infinito para todo $n < \omega$.

Ahora demostremos el siguiente teorema.

Teorema 3.32. *Sea α un ordinal no numerable de cofinalidad numerable, entonces*

$$C_\Box([0,\alpha)) \simeq \oplus_{\lambda<|\alpha|^{\aleph_0}} \left(\tilde{\Sigma}^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})\right)_\lambda .$$

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que $\alpha = \kappa + \omega$. Como $[0,\alpha) = [0,\kappa] \oplus [\kappa+1, \kappa+\omega)$, entonces $C_\Box([0,\alpha)) \simeq C_\Box[0,\kappa] \times C_\Box([\kappa+1,\kappa+\omega)$. Notemos que $|\kappa| = |\alpha|$ y $|[\kappa+1,\kappa+\omega)| = \omega$. Por el Teorema 3.30 tenemos que $C_\Box[0,\alpha) \simeq \left(\oplus_{\lambda<|\kappa|^\omega} \left(\Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{|\kappa|})\right)_\lambda\right) \times \Box\mathbb{R}^\omega$, por la propiedad distributiva del producto respecto a la suma directa (ver la Proposición 1.6) tenemos que $C_\Box([0,\alpha)) \simeq \oplus_{\lambda<|\alpha|^\omega} \left(\Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{|\kappa|}) \times \Box\mathbb{R}^\omega\right)_\lambda$. Vamos a demostrar que

$$\Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{|\kappa|}) \times \Box\mathbb{R}^\omega \simeq \tilde{\Sigma}^\Box_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)}).$$

Demostremos que $\Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\kappa]}) \times \Box\mathbb{R}^{[\kappa+1,\alpha)} \simeq \tilde{\Sigma}^\Box_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$. Definamos

$$H : \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\kappa]}) \times \Box\mathbb{R}^{[\kappa+1,\alpha)} \to \tilde{\Sigma}^\Box_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$$

como $H(f_0,f_1) = f \in \mathbb{R}^{[0,\alpha)}$ tal que $f \restriction_{[0,\kappa]}= f_0$ y $f \restriction_{[\kappa+1,\alpha)}= f_1$. Veamos que $H(f_0,f_1) = f \in \tilde{\Sigma}^\Box_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$. Sea $\epsilon > 0$ y $\beta < \alpha$, si $\beta \leq \kappa$, entonces $\{\lambda < \beta : |f(\lambda)| \geq \epsilon\} \subset \{\lambda \leq \kappa : |f_0(\lambda)| \geq \epsilon\}$ así que $|\{\lambda < \beta : |f(\lambda)| \geq \epsilon\}| < \aleph_0$. Ahora si $\beta > \kappa$, entonces existe $0 < n_0 < \omega$ tal que $\beta = \kappa + n_0$ y además tenemos que $\{\lambda < \beta : |f(\lambda)| \geq \epsilon\} \subset \{\lambda \leq \kappa : |f_0(\lambda)| \geq \epsilon\} \cup \{\kappa+1, ..., \kappa+n_0\}$, lo cual muestra que $\{\lambda < \beta : |f(\lambda)| \geq \epsilon\}$ es un conjunto finito. Ahora veamos que H es biyectiva. Es claro que es inyectiva. Ahora si $z \in \tilde{\Sigma}^\Box_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$, como $\kappa+1 < \alpha$, para $\epsilon > 0$, tenemos que $\{\lambda < \kappa+1 : |z(\lambda)| \geq \epsilon\}$ es finito pero $\{\lambda < \kappa+1 : |z(\lambda)| \geq \epsilon\} = \{\lambda < [0,\kappa] : |z \restriction_{[0,\kappa]} (\lambda)| \geq \epsilon\}$, así que $z \restriction_{[0,\kappa]}\in \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\kappa]})$, por tanto $(z \restriction_{[0,\kappa]}, z \restriction_{[\kappa+1,\alpha)}) \in \Sigma^\Box_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\kappa]}) \times \Box\mathbb{R}^{[\kappa+1,\alpha)}$, además que $H((z \restriction_{[0,\kappa]}, z \restriction_{[\kappa+1,\alpha)}) = z$.

Ahora veamos que H es un homeomorfismo. Sean A un conjunto abierto en $\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\kappa]})$ y B un conjunto abierto de $\square\mathbb{R}^{[\kappa+1,\alpha)}$, demostraremos que $H(A\times B)$ es un conjunto abierto en $\tilde{\Sigma}^{\square}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$. Sea $f\in H(A\times B)$, esto significa que $f\restriction_{[0,\kappa]}\in A$ y $f\restriction_{[\kappa+1,\alpha)}\in B$. Sean $\mathbb{O}_1=\prod_{\lambda\in[0,\kappa]}O_\lambda$ un abierto caja de $\square\mathbb{R}^{[0,\kappa]}$ y $\mathbb{O}_2=\prod_{\lambda\in[\kappa+1,\alpha)}V_\lambda$ abierto caja de $\square\mathbb{R}^{[\kappa+1,\alpha)}$ tales que $f\restriction_{[0,\kappa]}\in\mathbb{O}_1\cap\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\kappa]})\subset A$ y $f\restriction_{[\kappa+1,\alpha)}\in\mathbb{O}_2\subset B$. Sea $\mathbb{O}=\prod_{\lambda<\alpha}T_\lambda$ donde $T_\lambda=O_\lambda$ si $\lambda\in[0,\kappa]$ y $T_\lambda=V_\lambda$ si $\lambda\in[\kappa+1,\alpha)$. Afirmamos que $f\in\mathbb{O}\cap\tilde{\Sigma}^{\square}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})\subset H(A\times B)$. En efecto, sea $t\in\mathbb{O}\cap\tilde{\Sigma}^{\square}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$, para demostrar que $t\in H(A\times B)$ es suficiente demostrar que $t\restriction_{[0,\kappa]}\in\mathbb{O}_1\cap\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\kappa]})$ y que $t\restriction_{[\kappa+1,\alpha)}\in\mathbb{O}_2$, pero esto es claro ya que siempre que $t\in\tilde{\Sigma}^{\square}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$ se tiene que $t\restriction_{[0,\kappa]}\in\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\kappa]})$ y por la definición de $\mathbb{O}$, tenemos que $t\restriction_{[0,\kappa]}\in\mathbb{O}_1$ y $t\restriction_{[\kappa+1,\alpha)}\in\mathbb{O}_2$.

Ahora veamos que H es continua, sean $(f_0,f_1)\in\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\kappa]})\times\square\mathbb{R}^{[\kappa+1,\alpha)}$ y $\mathbb{O}_3=\prod_{\lambda\in[0,\alpha)}C_\lambda$ un abierto caja de $\square\mathbb{R}^{[0,\alpha)}$ tal que $H(f_0,f_1)\in\mathbb{O}_3\cap\tilde{\Sigma}^{\square}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$. Sean $A'=\prod_{\lambda\in[0,\kappa]}C_\lambda\cap\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\kappa]})$ y $B'=\prod_{\lambda\in[\kappa+1,\alpha)}C_\lambda$, con análogos argumentos a los realizados en el parrafo anterior tenemos que $(f_0,f_1)\in A'\times B'$ y $H(A'\times B')\subset\mathbb{O}_3$.

Ahora supongamos que $\alpha=sup\{\alpha_n : n<\omega\}$ con $\alpha_0<...<\alpha_n<...<\alpha$ y $[\alpha_n,\alpha_{n+1}]$ infinito para todo $n<\omega$. Tenemos que $[0,\alpha)=[0,\alpha_0]\oplus[\alpha_0+1,\alpha_1]\oplus ...\oplus[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]\oplus ....$ Por la Proposición 1.7 tenemos que

$$C_\square([0,\alpha))\simeq C_\square([0,\alpha_0])\times\square_{1\le n<\omega}C_\square[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}].$$

Como $[0,\alpha_0)$ ó $[\alpha_n+1,\alpha_{n+1})$ con $n<\omega$ es un ordinal infinito, por el Teorema 3.30 tenemos que

$$C_\square([0,\alpha_0])\simeq\oplus_{\lambda<|\alpha_0|^{\aleph_0}}\left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|\alpha_0|}\right)_\lambda$$

y

$$C_\square([\alpha_n+1,\alpha_{n+1}])\simeq\oplus_{\lambda<|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|^{\aleph_0}}\left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|}\right)_\lambda \text{ para } n<\omega.$$

Ahora por el Teorema 1.6 tenemos que
$C_\square([0,\alpha))\simeq\oplus_{(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n,...)\in|[0,\alpha_0]|^{\aleph_0}\times\prod_{n<\omega}|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|^{\aleph_0}}\left(\left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|\alpha_0|}\right)_{\lambda_0}\times\square_{n<\omega}\left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|}\right)_{\lambda_n}\right)$

Sabemos que para cada $(\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n,...)\in|[0,\alpha_0]|^{\aleph_0}\times\prod_{n<\omega}|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|^{\aleph_0}$ se tiene que $\left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|\alpha_0|}\right)_{\lambda_0}$ es homeomorfo a $\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|\alpha_0|}$ y para cada $n<\omega$ los espacios $\left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|}\right)_{\lambda_n}$ son homeomorfos a su correspondiente $\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|}$, entonces $\left(\left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|\alpha_0|}\right)_{\lambda_0}\times\square_{n<\omega}\left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|}\right)_{\lambda_n}\right)$ es homeomorfo a $\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|\alpha_0|}\times\square_{n<\omega}\left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|}\right)$, el cual a su vez es homeomorfo a $\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{[0,\alpha_0]}\times\square_{n<\omega}\left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]}\right)$. Veamos que este último espacio es homeomorfo a $\tilde{\Sigma}^{\square}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$.

Para este efecto definimos

$$H:\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{[0,\alpha_0]}\times\square_{n<\omega}\left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]}\right)\to\tilde{\Sigma}^{\square}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$$

como $H(g_0,f_0,.....,f_n,.....)=f$ donde $g_0\in\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{[0,\alpha_0]}$, para $n<\omega$ se tiene que $f_n\in\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]}$ y $f\restriction_{[0,\alpha_0]}=g_0$, para $n<\omega$ se cumple que $f\restriction_{[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]}=f_n$. Veamos que $f\in\tilde{\Sigma}^{\square}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$. Sean $\beta<\alpha$ y $\epsilon>0$, se tiene que $\beta\in[0,\alpha_0]$, o bien existe $n_0<\omega$ tal que $\beta\in[\alpha_{n_0}+1,\alpha_{n_0+1}]$. En el caso en que $\beta\in[0,\alpha_0]$, tenemos que $\{\lambda < \beta : |f(\lambda)| \geq \epsilon\} = \{\lambda < \beta : |g_0(\lambda)| \geq \epsilon\}$ como $\{\lambda < \beta : |g_0(\lambda)| \geq \epsilon\}$ es finito tenemos que $\{\lambda < \beta : |f(\lambda)| \geq \epsilon\}$ es finito. En el segundo caso, supongamos que $A = \{\lambda < \beta : |f(\lambda)| \geq \epsilon\}$ es infinito. Como $\{A \cap [0, \alpha_0], A \cap [\alpha_0 + 1, \alpha_1], ..., A \cap [\alpha_{n_0} + 1, \alpha_{n_0+1}]$ es una partición de A, existe un elemento de esta partición infinito, sea C tal conjunto. Sabemos que para todo $\lambda \in C$ se cumple que $|f(\lambda)| \geq \epsilon$ y existe $t \in \{g_0\} \cup \{f_n : n < \omega\}$ tal que $C \subset Dom\ t$, así que $\{\lambda \in C : |t(\lambda)| \geq \epsilon\}$ es finito, sin embargo $C = \{\lambda \in C : |f(\lambda)| \geq \epsilon\} = \{\lambda \in C : |t(\lambda)| \geq \epsilon\}$, lo cual es una contradicción.

Veamos que H es un homeomorfismo, como en el caso cuando $\alpha = \kappa + \omega$, sea

$$V^0 = \prod_{\lambda \in [0,\alpha_0]} V^0_\lambda \text{ un abierto caja de } \square\mathbb{R}^{[0,\alpha_0]}$$

y para $n < \omega$, sea

$$O^n = \prod_{\lambda \in [\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]} O^n_\lambda \text{ un abierto caja de } \square\mathbb{R}^{[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]}.$$

Tomamos $V_0 = V^0 \cap \Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{[0,\alpha_0]}$ y para $n < \omega$ sea $O_n = O^n \cap \Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]}$. Ahora definimos

$$W_\lambda = \begin{cases} V^0_\lambda & \text{si } \lambda \in [0, \alpha_0], \\ O^n_\lambda & \text{si } \lambda \in [\alpha_n + 1, \alpha_{n+1}]. \end{cases}$$

Es claro que

$$H\left(V_0 \times \prod_{n<\omega} O_n\right) = \left(\prod_{\lambda\in[0,\alpha)} W_\lambda\right) \cap \tilde{\Sigma}^{\square}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)}).$$

Por tanto H es abierta.

Ahora si $f = H((g_0, f_0, ..., f_n, ...))$ y $f \in W = \prod_{\lambda\in[0,\alpha)} W_\lambda \cap \tilde{\Sigma}^{\square}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})$. Tomamos

$$V^0_\lambda = W_\lambda \text{ cuando } \lambda \in [0, \alpha_0]$$

y

$$O^n_\lambda = W_\lambda \text{ cuando } \lambda \in [\alpha_n + 1, \alpha_{n+1}].$$

Formamos

$$V_0 = \left(\prod_{\lambda\in[0,\alpha_0]} V^0_\lambda\right) \cap \Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{[0,\alpha_0]}$$

y

$$O_n = \left(\prod_{\lambda\in[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]} O^n_\lambda\right) \cap \Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]}.$$

Es claro que $(g_0, f_0, ..., f_n, ...) \in V_0 \times \prod_{n<\omega} O_n$ y que

$$H\left(V_0 \times \prod_{n<\omega} O_n\right) \subset W.$$

Con esto demostramos que H es una función continua, y por tanto H es homeomorfismo.

En resumen tenemos que

$$C_\square([0,\alpha)) \simeq \oplus_{\lambda<||[0,\alpha_0]|^{\aleph_0} \times \prod_{n<\omega} |[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|^{\aleph_0}|} \left(\tilde{\Sigma}^{\square}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})\right)_\lambda.$$

Para concluir el teorema sólo resta demostrar que

$$|\alpha|^{\aleph_0} = |[0,\alpha_0]|^{\aleph_0}.|[\alpha_0+1,\alpha_1]|^{\aleph_0}....|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|^{\aleph_0}.....$$

Por el teorema de König, ya que α se particiona por los ordinales $[0,\alpha_0], ..., [\alpha_n + 1, \alpha_{n+1}]$, tenemos que

$$|\alpha| \leq |[0,\alpha_0]|.|[\alpha_0+1,\alpha_1]|....|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|....$$

Por otro lado

$$(|[0,\alpha_0]|.|[\alpha_0+1,\alpha_1]|....|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|....)^{\aleph_0} = |[0,\alpha_0]|^{\aleph_0}.|[\alpha_0+1,\alpha_1]|^{\aleph_0}....|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|^{\aleph_0}....$$

Así que

$$|\alpha|^{\aleph_0} \leq |[0,\alpha_0]|^{\aleph_0}.|[\alpha_0+1,\alpha_1]|^{\aleph_0}....|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|^{\aleph_0}....$$

Ahora $|[0,\alpha_0]|^{\aleph_0} \leq |\alpha|^{\aleph_0}, |[\alpha_0+1,\alpha_1]|^{\aleph_0} \leq |\alpha|^{\aleph_0}, ...|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|^{\aleph_0} \leq |\alpha|^{\aleph_0}....$
Por tanto

$$|[0,\alpha_0]|^{\aleph_0}.|[\alpha_0+1,\alpha_1]|^{\aleph_0}....|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|^{\aleph_0}.... \leq (|\alpha|^{\aleph_0})^{\aleph_0} = |\alpha|^{\aleph_0}.$$

Así que

$$|\alpha|^{\aleph_0} = |[0,\alpha_0]|^{\aleph_0}.|[\alpha_0+1,\alpha_1]|^{\aleph_0}....|[\alpha_n+1,\alpha_{n+1}]|^{\aleph_0}....$$

Con lo que concluimos que

$$C_\square([0;\alpha)) \simeq \oplus_{\lambda<|\alpha|^{\aleph_0}} \left(\tilde{\Sigma}^{\square}_{*\mathcal{F}_0}(\mathbb{R}^{[0,\alpha)})\right)_\lambda .$$

$\square$

Es importante notar que si $cof(\alpha)$ es finita, entonces α es un ordinal sucesor y por tanto $[0,\alpha)$ es compacto y por tanto

$$C_\square([0,\alpha)) \simeq \oplus_{\lambda<|\alpha|^{\aleph_0}} \left(\Sigma_{*,\mathcal{F}_0}\mathbb{R}^{|\alpha|}\right)_\lambda .$$

Con esto queda claro que hemos logrado expresiones para $C_\square([0,\alpha))$ con α un número ordinal arbitrario.

CAPíTULO 4

Problemas

Aquí presentamos una lista de problemas que surgieron en el desarrollo del trabajo.

1. En el Capítulo 1 obtuvimos la siguiente evaluación:

Proposición *Si* $\{X_\alpha : \alpha \in S\}$ *una familia de espacios tal que* $|X_\alpha| \geq 2$ *para todo* $\alpha \in S$, *entonces*

$log|S| \cdot sup\{iw(X_\alpha) : \alpha \in S\} \leq iw(\square_{\alpha \in S} X_\alpha) \leq |S| \cdot sup\{iw(X_\alpha) : \alpha \in S\}.$

¿Cuándo se cumple alguna de las igualdades?

2. En el Capítulo 2 demostramos el Teorema 2.25; si asumimos las mismas hipótesis del Teorema 2.25 pero añadimos que $C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^{X_0}$ ¿podemos concluir que X_0 es c-ω-rcraX_1?

3. En el Capítulo 2 definimos la función cardinal *Npah* y en el Capítulo 3 presentamos algunas acotaciones de esta función evaluada en espacios tipo Σ-producto. Si $\tau = sup\{2^\kappa :$ existe $A \in [X_0]^\kappa$ tal que $X \setminus A \in \mathcal{V}(p)\}$, entonces ¿es $Npah\left(\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}\mathbb{R}^{X_0}\right)$ igual a τ^+?

4. Si $K(X_0)$ es la compactación a un punto del discreto X_0 demostramos que $Npah\left(\Sigma^{\square}_{*,\mathcal{V}_0(p)}\mathbb{R}^{X_0}\right) \geq \left(2^{\aleph_0}\right)^+$ ¿Es cierta la igualdad?

5. Sea $\Sigma^{\square}_{\hat{0}}\mathbb{R}^{\aleph_1}$ el conjunto $\{f \in \mathbb{R}^{\aleph_1} : |\{x \in X_0 : f(x) \neq 0\}| \leq \aleph_0\}$ con la topología de subespacio de $\square\mathbb{R}^{\aleph_1}$. Si asumimos que $2^\omega = 2^{\omega_1}$, ¿es cierto que $\Sigma^{\square}_{\hat{0}}\mathbb{R}^{\aleph_1} \simeq \square\mathbb{R}^{\aleph_1}$?

6. Sean γ y κ cardinales infinitos tales que $\gamma \leq \kappa$ y

$$\Sigma^{\square}_{\hat{0},\gamma}\mathbb{R}^\kappa = \{f \in \mathbb{R}^\kappa : |\{\lambda < \kappa : f(\lambda) \neq 0\}| < \gamma\}.$$

Si $cof(\kappa) = \aleph_0$ y $cof(\gamma) > \aleph_0$, entonces

$$¿\text{es } \square\mathbb{R}^\kappa \text{ homeomorfo a } \oplus_{\lambda < 2^\kappa}\left(\Sigma^{\square}_{\hat{0},\gamma}\mathbb{R}^\kappa\right)_\lambda ?$$

7. ¿Para algún κ con $cof(\kappa) = \omega$, existe algún cardinal τ tal que

$$\square\mathbb{R}^\tau \simeq \Sigma^{\square}_{\hat{0}}\mathbb{R}^\kappa?$$

8. Si X es pseudocompacto, entonces ¿ X es c-ω-rcraX_1?

9. Calcular $C_\square(\mathbb{M})$ donde $\mathbb{M}$ es la línea de Michael. ¿Es $\mathbb{M}_0$ c-ω-rcra$\mathbb{M}_1$?

10. Si X_0 es c-ω-rcra X_1 y $C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^\kappa$, entonces ¿$\kappa$ es igual a $|X_0|$?

Problemas de tipo general

11. Caracterizar $C_\square(X)$ cuando X es Lindelöf (resp. realcompacto, localmente compacto, σ-compacto, primero numerable, paracompacto, Fréchet-Uryson).

12. Si $C_\square(X) \simeq \square\mathbb{R}^\kappa$ ¿que propiedades topólogicas debe cumplir X?

13. Si $X_1 = \{p\}$ y $\Sigma_{\mathcal{F}}^\square(\mathbb{R}^{X_0}) \simeq \Sigma_{\mathcal{G}}^\square(\mathbb{R}^{X_0})$ ¿como están relacionados $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$?

14. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en α ¿Bajo qué condiciones en $\mathcal{F}$ se tiene que $\Sigma_{\mathcal{F}}^\square(\mathbb{R}^\alpha)$ no es homeomorfo a $\square\mathbb{R}^\alpha$?

Indice Analítico

Bibliografía

[1] J. Angoa Σ-*productos de espacios topológicos*, tesis de maestría, UNAM, 1999.

[2] A. V. Arkhangel'skii, *Topological Function Spaces*, vol. 78, Kluwer Academic Publishers, Mathematics and its Applications, Dordrecht, Boston, London, 1992.

[3] W.W. Comfort and W. Hager, *Estimates for the number of real-valued continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 150 (1970), 619-631.

[4] E. K. van Dowen, *Covering and separation properties of box products*, Surveys in General Topology, Academic Press, 1980, 55-130. MR 811:54006.

[5] E. K. van Dowen, *The integers and topology*, Handbook of Set-Theoretic Topology, (K. Kunen and J. Vaughan, eds.), Elsevier, 1984, 111-167. MR 87a:54007.

[6] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Springer Verlag, Graduate Texts in Mathematics, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

[7] Hajnal A. and Juhász I., *Having a small weight is determined by the small subspaces*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 79, (1980), 657-658.

[8] Hodel R. E.; *Cardinal fuctions I*, Handbook of Set-Theoretic Topology, (K. Kunen and J. Vaughan, eds.), Elsevier, 1984, 1-61. MR 87a:54007.

[9] Hodel R. E. and Vaughan J. E., *Reflection theorems for cardinal functions*, Topology and its Appl., vol. 100, (2000), 47-66.

[10] Juhász I., *Cardinal Functions in Topology-ten years later*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, Matehematical Centre Tracts 123, Second printing 1983.

[11] C. J. Knight, *Box Topologies*, Quart. J. Math., vol. 15, (1964), 41-54.

[12] K. Kunen, *On paracompactness of box products of compact spaces*, Trans., Amer., Math., Soc., 240 (1978), 307-316. MR 58:24165.

[13] K. Kunen, *Set Theory, An Introduction to Indepenedece proofs*, Studies in Logic and the Fundations of Mathematics, vol. 102, North Holland, Amsterdam, 1980.

[14] L. B. Lawrence, *Failure of normality in the box product of uncountably many real lines*, Trans., Amer., Math., Soc., 348 (1996), No. 1, 187-203.

[15] P. Nyikos and L. Piatkiewicz, *Paracompact subspaces in the Box product Topology*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 124, (1996), 303-314.

[16] M. E. Rudin, *The box product of countably many compact metric spaces*, General Topology and Appl., 2 (1972), 293-298. MR 48:2969.

[17] M. E. Rudin, *Lectures on set theoretic topology*, Conference Board of the Mathematical Sciencie, Amer. Math Soc, 1975.

[18] A. Tamariz and H. Villegas-Rodríguez, *Spaces of continuous functions, box products and almost-ω-resolvable spaces*, Comm. Math. Univ. Carolinae, 43 (4) (2002), 687-705.

[19] A. Tamariz *Espacios de Ultrafiltros I*, Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 8, (1990), 145-187.

[20] H. Tiezte *Beitrage zur allgemeinen topologie*, Math. Ann., 88 (1923), 280-312.

[21] S. W. Williams; *Box products*, Handbook of Set-Theoretic Topology, (K. Kunen and J. Vaughan, eds.), Elsevier, 1984, 169-200. MR 87a:54007.