



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Los números de Fibonacci de las Gráficas  
Circulantes de salto consecutivo  $(1, 2, \dots, r)$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
LOIRET ALEJANDRÍA DOSAL TRUJILLO

DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ



2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

Apellido paterno: Dosal  
Apellido materno: Trujillo  
Nombre(s): Loiret Alejandría  
Teléfono: 56715316  
Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad: Ciencias  
Carrera: Matemáticas  
Número de cuenta: 09800284-3

### 2. Datos del tutor

Grado: Dr.  
Nombre(s): Hortensia  
Apellido paterno: Galeana  
Apellido materno: Sánchez

### 3. Datos del Sinodal 1

Grado: Dr.  
Nombre(s): Hugo Alberto  
Apellido paterno: Rincón  
Apellido materno: Mejía

### 4. Datos del Sinodal 2

Grado: Dr.  
Nombre(s): Mucuy Kak del Carmen  
Apellido paterno: Guevara  
Apellido materno: Aguirre

### 5. Datos del Sinodal 3

Grado: Dr.  
Nombre(s): Mika  
Apellido paterno: Olsen  
Apellido materno:

### 6. Datos del Sinodal 4

Grado: M. en C.  
Nombre(s): César  
Apellido paterno: Hernández  
Apellido materno: Cruz

### 7. Datos del trabajo escrito

Título: Los números de Fibonacci de las Gráficas Circulantes de salto consecutivo  $(1, 2, \dots, r)$   
Número de páginas: 103  
Año: 2011

*A mis padres Patricia y Alejandro,  
por su fe y amor infinitos.*

*A mi hermano José Alejandro,  
porque sin ti nada sería lo mismo.*

*Quien busque el infinito que cierre los ojos.*  
*-Milán Kundera*

# Agradecimientos

A la Dra. Hortensia Galeana por acompañarme y guiarme como mi directora de tesis, porque de tí he aprendido no sólo como mi mentora sino también como persona.

A mis profesores, Julieta Verdugo, Alejandro Díaz Barriga, Francisco Raggi, Rafael Rojas, Joel García, Laura Ortíz y Hortensia Galeana, porque a ustedes debo mi formación como matemática.

A Fidel Casarrubias, por haberme dado tu apoyo en tiempos difíciles.

A Daniela Terán y César Hernández, por los viejos tiempos y las lecciones de vida.

A Ilán Goldfeder, por el trabajo juntos y por haberme dado la oportunidad de crecer en la docencia.

A mis amigos de la facultad, porque además de compartir nuestra pasión por la matemática terminamos compartiendo también la vida... Gabriel, Germán, Karina, Andrea, Tania, Pilar, Osvaldo, Armando, Rubén y en especial a Zulma por ser mi amuleto de la buena suerte y tu incondicionalidad.

A mis amigos Claudia, Gaby, Cahue y Diego, por la vida juntos, por ser y estar siempre conmigo.

A mis padres, por todo su apoyo y paciencia, por haberme enseñado a luchar y a creer en mí, a mi hermano José porque contigo crezco todos los días y a José Luis por todo tu apoyo y ser mi familia a elección.

A todos los que fuimos, a los que estamos, a los que quedamos y los que somos... gracias por compartir.

# Índice general

<b>1. Los números de Fibonacci</b>	<b>3</b>
1.1. Nota histórica . . . . .	3
1.2. El problema de los conejos . . . . .	5
1.3. La sucesión de Fibonacci . . . . .	7
1.4. Propiedades de Fibonacci y Lucas . . . . .	10
1.5. Algunas observaciones . . . . .	17
1.5.1. Fibonacci y el triángulo de Pascal . . . . .	17
<b>2. Gráficas</b>	<b>19</b>
2.1. Nociones básicas . . . . .	19
2.2. Isomorfismo entre gráficas . . . . .	23
2.3. Algunas gráficas simples . . . . .	26
2.3.1. Gráficas completas $K_p$ . . . . .	26
2.3.2. Gráficas $r$ -Regulares . . . . .	27
2.3.3. Gráficas bipartitas . . . . .	28
2.4. Subgráficas . . . . .	31
2.5. Operaciones en gráficas . . . . .	34
2.5.1. Unión . . . . .	34
2.5.2. Suma . . . . .	35
2.5.3. Producto cartesiano . . . . .	36
2.6. Caminos . . . . .	37
2.7. Árboles . . . . .	42
<b>3. Fibonacci en las Gráficas</b>	<b>49</b>
3.1. Los números de Fibonacci de las Gráficas . . . . .	49
3.2. Los números de Fibonacci de los Árboles . . . . .	56
<b>4. Fibonacci y las Circulantes</b>	<b>59</b>
4.1. Gráficas Circulantes . . . . .	59

4.1.1.	$C_{n[2]}$ y sus números de Fibonacci . . . . .	61
4.1.2.	$C_{n[3]}$ y sus números de Fibonacci . . . . .	69
4.1.3.	Los teoremas para $C_{n[3]}$ . . . . .	74
4.2.	La generalización . . . . .	82
4.2.1.	Las sucesiones . . . . .	82
4.2.2.	Las Pruebas . . . . .	89
4.2.3.	Las gráficas $T_{n[r]}$ y $T_{n[r]}^k$ . . . . .	95
4.2.4.	Los Teoremas . . . . .	96

# Introducción

Originalmente el objetivo que nos habíamos propuesto, mi asesora la Dra. Hortensia Galeana Sánchez y yo, como trabajo de tesis, había sido el de explicar a detalle dos artículos relativos a *Los números de Fibonacci de las Gráficas*, este concepto fue intrucido por Prodinger y Tichy en 1982 y se refiere a el número total de conjuntos independientes de vértices en una gráfica y recibe este curioso nombre porque el número total de conjuntos independientes de las trayectorias de orden  $n$  es precisamente un término en la sucesión de Fibonacci, más aún para los ciclos de orden  $n$ , este número es un término en la sucesión de Lucas.

Mientras trabajábamos el primer artículo, se me ocurrió jugar con uno de los problemas abiertos que se planteaban en él, el cual no resolvimos, pero mi asesora me sugirió que pensara un poco en el número de Fibonacci de las gráficas circulantes de salto consecutivo  $(1, 2)$ ; en lenguaje coloquial una gráfica circulante de orden  $n$  y de salto consecutivo  $(1, \dots, r)$  se puede ver como un ciclo de orden  $n$  añadiéndole todas las aristas tales que sus vértices incidentes tienen distancia mayor o igual que 2 y menor o igual que  $r$ . Al tratar de resolver este problema logramos encontrar un patrón de dichos números dado por una sucesión, este patrón es similar a la de la sucesiones generalizadas de Fibonacci y para probarlo tuvimos que encontrar los números de Fibonacci de ciertas subgráficas de los circulantes de salto consecutivo  $(1, 2)$ , los cuales preservan ese patrón. Más adelante decidimos trabajar con las circulantes de salto consecutivo  $(1, 2, 3)$  y por fortuna encontramos nuevamente sucesiones y patrones en esas sucesiones que los determinan dichos números no sólo para esas circulantes si no también para ciertas subgráficas de las mismas, que además son necesarias para probar este resultado, más aún pudimos generalizar estos resultados a cualquier gráfica circulante de orden  $n$  y salto consecutivo  $(1, 2, \dots, r)$  y tuvimos la necesidad de determinar los números de Fibonacci de ciertas subgráficas de las mismas, como en los casos particulares. También fue necesario generalizar las sucesiones que de-

terminan dichos números y probar propiedades que las relacionan entre sí, estas relaciones están determinadas por el grado del salto de las gráficas.

El desarrollo de este trabajo se divide en 4 capítulos, los primeros dos son nociones preliminares, en el capítulo 1 se dan las nociones básicas y algunas propiedades básicas de los números de Fibonacci, en el capítulo 2 se abarcan nociones y resultados básicos de la Teoría de Gráficas, mientras que el 3 está enfocado al desarrollo del artículo *Fibonacci numbers of graphs* de Prodinger y Tichy el cual es sumamente importante no sólo porque se introduce el concepto central de este trabajo, si no también porque se observa con claridad el método que se usa en las pruebas para contar el número total de conjuntos independientes de vértices en las gráficas; y por último el capítulo 4 es el desarrollo de nuestro trabajo de investigación tal y como fue en el proceso, por eso se abarcarán a detalle los casos particulares primero mencionados y posteriormente el resultado general.

# Capítulo 1

## Los números de Fibonacci

### 1.1. Nota histórica

Leonardo Pisano o Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, nació alrededor de 1175, como su nombre lo indica, en Pisa, Italia; poco después de haberse iniciado la construcción de *la campana de la torre* (La Torre Inclinada de Pisa).

Leonardo adquiere su apodo de su padre Guglielmo, a quien solían nombrar *Bonacci*, se cree que *Fibonacci* proviene del latín *filius Bonacci*, que quiere decir “hijo de Bonacci”. Aunque en ocasiones se refería a sí mismo como *Bigollo*, que podría significar “bueno para nada”.

Guglielmo era empleado en la aduana de Bujía, lo que ahora es Bejaia, Argelia. Deseaba que Fibonacci se convirtiera en un exitoso comerciante, por lo que decidió llevárselo con él. De ahí que Fibonacci desarrollara su habilidad de cálculo, puesto que tenía la necesidad de hacer conversiones de una moneda a otra. Poco a poco Fibonacci se fue familiarizando con la notación indo-arábiga; las nueve figuras hindúes y el signo 0 de los árabes, nombrado Zephyr.

Fibonacci viajó por varios países, Egipto, Siria, Grecia, Sicilia y Provenza, donde se instruyó con los matemáticos de la región mediterránea. Mas tarde, vuelve a Pisa y escribe su primer libro titulado *Liber Abaci*, traducido como “Libro del Ábaco”, que es un tratado sobre aritmética. Es en esta publicación donde Fibonacci, le hereda a Europa Occidental la numeración y métodos indo-arábigos, y las técnicas formales demostrativas de los griegos.

En el *Liber Abaci* aparece por primera vez, un curioso problema de aritmética, hoy conocido como *el problema de los conejos*, del cual surgen *los números de Fibonacci*, de los que estaremos hablando durante el presente trabajo.

Cabe mencionar que *los números de Fibonacci*, son nombrados así hasta mediados del siglo XIX, por el matemático francés Francois-Edouard-Anatole Lucas, quien hizo grandes aportaciones relacionadas con los números de Fibonacci. Dado su interés en el tema, Lucas construyó una sucesión de números, intrínsecamente relacionada con la sucesión de los números de Fibonacci, de la cual hablaremos mas adelante.

## 1.2. El problema de los conejos

La sucesión de Fibonacci, es una sucesión infinita de números naturales, descrita por Fibonacci en el problema de los conejos:

Supóngase que hay dos conejos recién nacidos, un macho y una hembra. Cuál será el número de conejos que habrá en un determinado número de meses si:

- Los conejos tardan un mes en ser adultos.
- De cada par de conejos nace otro par de conejos, un macho y una hembra a partir del segundo mes, y se reproducen cada mes.
- Los conejos no mueren.

Véase la siguiente figura:

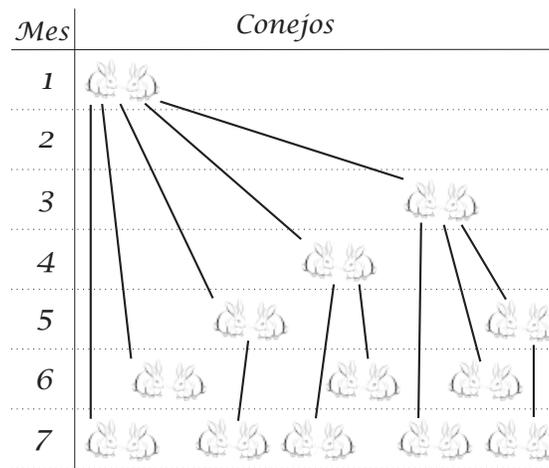


Figura 1.1: Los conejos de Fibonacci

Podemos suponer que el primer par de conejos nació un 1 de Enero; para el día 1 de Febrero los conejos serán fértiles pero no se habrán reproducido aún, por lo que tendremos un sólo par de conejos; para el día 1 de Marzo el primer par de conejos se reproducirá, entonces tendremos un par de conejos

adultos y un par de conejos recién nacidos; para el día 1 de Abril el primer par tendrá un nuevo par de conejos recién nacidos, el segundo par será fértil por lo que habrán tres pares de conejos en total; para el 1 de Mayo el primer par de conejos tendrá otro nuevo par de conejos recién nacidos, el segundo par de conejos tendrá a su primer par de recién nacidos y el tercer par será fértil, por lo que habrán cinco pares en total; para el 1 de Junio habrá un total de 8 pares de conejos y así sucesivamente.

Observemos la siguiente tabla:

No. de Pares	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto
<i>Adultos</i>	0	1	1	2	3	5	8	13
<i>Bebés</i>	1	0	1	1	2	3	5	8
<i>Total</i>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>13</b>	<b>21</b>

Cuadro 1.1: Los conejos de Fibonacci

Fijémonos en el número total de pares de conejos que se van obteniendo por mes:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
<i>No. total de pares</i>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>13</b>	<b>21</b>	<b>34</b>	<b>55</b>	<b>89</b>	<b>144...</b>

Cuadro 1.2: La sucesión de Fibonacci

de donde obtenemos la siguiente sucesión de números naturales.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

Dicha sucesión es la sucesión de Fibonacci y cada uno de los números de la sucesión es un número de Fibonacci.

**Nomenclatura 1.** *Al  $n$ -ésimo término de la sucesión le llamaremos el  $n$ -ésimo número de Fibonacci.*

### 1.3. La sucesión de Fibonacci

**Definición 1.3.1.** Los números de Fibonacci se definen de manera recursiva de la siguiente manera:  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 1$  y  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  si  $n \geq 3$ , donde  $F_n$  es el  $n$ -ésimo número de Fibonacci. Por convención se tiene que  $F_0 = 0$ .

**Teorema 1.3.1.** (Lucas, 1876)

Se puede obtener el  $n$ -ésimo número de Fibonacci por la siguiente fórmula:

$$F_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-i-1}{i}, \text{ si } n \in \mathbb{N}$$

*Demostración.* Por inducción. □

**Proposición 1.3.1.** El siguiente sistema de ecuaciones lineales de  $2 \times 2$ , define la sucesión de Fibonacci

$$\begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}, \text{ si } k \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* Dado que la suma de dos números consecutivos en la serie de Fibonacci nos da el siguiente número de Fibonacci; es decir  $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$  si  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$\begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}.$$

□

**Teorema 1.3.2.** *Fórmula de Cassini*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \text{ si } n \in \mathbb{N}$$

*Demostración.* Demostraremos la fórmula de Cassini, usando la definición matricial de la sucesión de Fibonacci. Veamos por inducción sobre  $n$  que si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Si  $n = 1$ ,

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$$

Supongamos que se cumple para alguna  $n$ , veamos que sucede también para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{entonces, } \det A^n = \det \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2.$$

Usando el hecho de que  $\det A^n = (\det A)^n$ , tenemos que:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \det A^n = (\det A)^n = (-1)^n.$$

□

**Definición 1.3.2.** *Números de Lucas*

*Intrínsecamente relacionados con los números de Fibonacci, están los números de Lucas; que son una generalización de los números de Fibonacci, donde:*

$$L_1 = 1, L_2 = 3 \text{ y } L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \text{ si } n \geq 3$$

la siguiente tabla nos muestra la sucesión de Lucas:

<b>1</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>7</b>	<b>11</b>	<b>18</b>	<b>29</b>	<b>47</b>	<b>76</b>	<b>123</b>	<b>199...</b>
$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$	$L_7$	$L_8$	$L_9$	$L_{10}$	$L_{11} \dots$

Cuadro 1.3: La sucesión de Lucas

**Teorema 1.3.3.** *Fórmula de Binet*

Sea  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , entonces:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ y } L_n = \alpha^n + \beta^n$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las soluciones de la ecuación:  $x^2 - x - 1 = 0$

*Demostración.* Por inducción. □

## 1.4. Propiedades de Fibonacci y Lucas

A continuación damos una lista de algunas identidades básicas de los números de Fibonacci y los números de Lucas:

**Proposición 1.4.1.**  $F_n = 2F_{n-2} + F_{n-3}$ ,  $n \geq 4$

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 4, F_4 = 3 = 2 + 1 = 2F_2 + F_1$$

Supongamos que la proposición es cierta para todos los números  $k$ , con  $4 \leq k < n$ , veamos que es cierta para  $n$ :

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\ &= (2F_{n-3} + F_{n-4}) + (2F_{n-4} + F_{n-5}) \\ &= 2(F_{n-3} + F_{n-4}) + (F_{n-4} + F_{n-5}) \\ &= 2F_{n-2} + F_{n-3} \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.2.**  $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}$ ,  $n \geq 2$

*Demostración.* Sabemos por la fórmula de Cassini que  $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ , para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , entonces si multiplicamos ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de  $-1$ , tenemos que:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1) (F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2) = (-1)^{-1}(-1)^n = (-1)^{n-1}$$

□

**Proposición 1.4.3.**  $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 1, 1 = F_1 = F_{1+2} - 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Supongamos que la proposición es cierta para algún  $n$ , veamos que es cierta para  $n + 1$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} F_i &= \sum_{i=1}^n F_i + F_{n+1} \\
 &= F_{n+2} - 1 + F_{n+1} \\
 &= (F_{n+2} + F_{n+1}) - 1 \\
 &= F_{n+3} - 1 \\
 &= F_{(n+1)+2} - 1
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.4.**  $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}$

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 1, \quad F_{2(1)-1} = F_1 = 1 = F_2$$

Supongamos que la proposición es cierta para algún  $n$ , veamos que es cierta para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} F_{2i-1} &= \sum_{i=1}^n F_{2i-1} + F_{2(n+1)-1} \\
 &= F_{2n} + F_{2n+1} \\
 &= F_{2n+2} \\
 &= F_{2(n+1)}
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.5.**  $\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1$

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 1, \quad F_{2(1)} = 1 = 2 - 1 = F_{2(1)+1} - 1$$

Supongamos que la proposición es cierta para algún  $n$ , veamos que es cierta para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} F_{2i} &= \sum_{i=1}^n F_{2i} + F_{2(n+1)} \\
 &= F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} \\
 &= (F_{2n+2} + F_{2n+1}) - 1 \\
 &= F_{2n+3} - 1
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.6.**  $\sum_{i=1}^n L_i = L_{n+2} - 3$

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 1, \quad L_1 = 1 = 4 - 3 = L_{1+2} - 3$$

Supongamos que la proposición es cierta para  $n$ , veamos que es cierta para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} L_i &= \sum_{i=1}^n L_i + L_{n+1} \\
 &= L_{n+2} - 3 + L_{n+1} \\
 &= (L_{n+2} + L_{n+1}) - 3 \\
 &= L_{n+3} - 3
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.7.**  $\sum_{i=1}^n L_{2i-1} = L_{2n} - 2$

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 1, \quad L_{2(1)-1} = L_1 = 1 = 3 - 2 = L_{2(1)} - 2$$

Supongamos que la proposición es cierta para  $n$ , veamos que es cierta para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} L_{2i-1} &= \sum_{i=1}^n L_{2i-1} + L_{2(n+1)-1} \\
 &= L_{2n} - 2 + L_{2n+1} \\
 &= (L_{2n+1} + L_{2n}) - 2 \\
 &= L_{2n+2} - 2 \\
 &= L_{2(n+1)} - 2
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.8.**  $\sum_{i=1}^n L_{2i} = L_{2n+1} - 1$

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 1, \quad L_{2(1)} = 3 = 4 - 1 = L_{2(1)+1} - 1$$

Supongamos que la proposición es cierta para  $n$ , veamos que es cierta para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} L_{2i} &= \sum_{i=1}^n L_{2i} + L_{2(n+1)} \\
 &= L_{2n+1} - 1 + L_{2n+2} \\
 &= (L_{2n+2} + L_{2n+1}) - 1 \\
 &= L_{2n+3} - 1
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.9.**  $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 1, \quad F_1^2 = 1^2 = 1 = F_1 F_2$$

Supongamos que la proposición es cierta para  $n$ , veamos que es cierta para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 &= \sum_{i=1}^n F_i^2 + F_{n+1}^2 \\
 &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\
 &= F_{n+1} (F_{n+1} + F_n) \\
 &= F_{n+1} F_{n+2}
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.10.**  $\sum_{i=1}^n L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 1, \quad L_1^2 = 1 = (1)(3) - 2 = L_1 L_{1+1} - 2$$

Supongamos que la proposición es cierta para  $n$ , veamos que es cierta para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} L_i^2 &= \sum_{i=1}^n L_i^2 + L_{n+1}^2 \\
 &= (L_n L_{n+1} - 2) + L_{n+1}^2 \\
 &= L_{n+1} (L_{n+1} + L_n) - 2 \\
 &= L_{n+1} L_{n+2} - 2
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.11.**  $F_{2n} = F_n L_n$

*Demostración.* Sabemos por la fórmula de Binet que

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{y} \quad L_n = \alpha^n + \beta^n$$

donde  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , entonces

$$\begin{aligned}
 F_n L_n &= \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^n + \beta^n) \\
 &= \frac{(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^n + \beta^n)}{\alpha - \beta} \\
 &= \frac{(\alpha^n)^2 - (\beta^n)^2}{\alpha - \beta} \\
 &= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \\
 &= F_{2(n)}
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.12.**  $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$  si  $n \geq 2$

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 2, \quad F_{2-1} + F_{2+1} = 1 + 2 = 3 = L_2$$

Supongamos que la proposición es cierta para todos los números naturales menores que  $n$ , veamos que es cierta para  $n$ :

$$\begin{aligned}
 L_n &= L_{n-1} + L_{n-2} \\
 &= (F_{n-2} + F_n) + (F_{n-3} + F_{n-1}) \\
 &= (F_{n-2} + F_{n-3}) + (F_n + F_{n-1}) \\
 &= F_{n-1} + F_{n+1}
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.13.**  $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$  si  $n \geq 3$

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 3, \quad F_{3+2} - F_{3-2} = 5 - 1 = 4 = L_3$$

Supongamos que la proposición es cierta para todos los números naturales menores que  $n$ , veamos que es cierta para  $n$ :

$$\begin{aligned}
 L_n &= L_{n-1} + L_{n-2} \\
 &= (F_{n+1} - F_{n-3}) + (F_n - F_{n-4}) \\
 &= (F_{n+1} + F_n) - (F_{n-3} + F_{n-4}) \\
 &= F_{n+2} - F_{n-2}
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.4.14.**  $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$  si  $n \geq 2$

*Demostración.* Si  $n = 2$ , entonces

$$L_{2-1} + L_{2+1} = 1 + 4 = 5 = 5(1) = 5F_2$$

Por la proposición 1.4.12 sabemos que para toda  $n \geq 3$

$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ , entonces  $L_{n-1} = F_{n-2} + F_n$  y  $L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$

$$\begin{aligned}
 \text{entonces, } L_{n-1} + L_{n+1} &= (F_{n-2} + F_n) + (F_n + F_{n+2}) \\
 &= 2F_n + F_{n-2} + F_{n+2} \\
 &= 2F_n + F_{n-2} + (F_{n+1} + F_n) \\
 &= 3F_n + F_{n-2} + F_{n+1} \\
 &= 3F_n + F_{n-2} + (F_n + F_{n-1}) \\
 &= 4F_n + (F_{n-1} + F_{n-2}) \\
 &= 4F_n + F_n \\
 &= 5F_n
 \end{aligned}$$

□





## Capítulo 2

# Gráficas

### 2.1. Nociones básicas

**Definición 2.1.1.** Una gráfica  $G$  es un par  $(V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito y no vacío de vértices y  $E$  es un conjunto de pares no ordenados de  $V$ . A los elementos de  $E$  les llamamos aristas. Si  $E = \emptyset$ , decimos que la gráfica  $G$  es trivial.

**Notación 1.** Al conjunto  $V$  de los vértices de  $G$ , también se le denota por  $V(G)$  y sus elementos se representan con puntos. Al conjunto  $E$  de las aristas de  $G$ , también se le denota por  $E(G)$  y sus elementos se representan como líneas que unen dichos puntos.

**Definición 2.1.2.** Sea  $G$  una gráfica, si  $e = \{u, v\} \in E(G)$ , diremos que  $e$  es una  $uv$ -arista. La arista  $e$  incide en  $u$  y en  $v$ , en ese caso se dice que  $u$  y  $v$  son extremos de la arista  $e$ .

**Definición 2.1.3.** Dos vértices  $u, v \in V(G)$  son adyacentes si existe  $e \in E(G)$  tal que  $e = \{u, v\}$  y la adyacencia entre dichos vértices se denota por  $u \text{ ady}_G v$ . Dos aristas  $e_1, e_2 \in E(G)$  son adyacentes si inciden en un mismo vértice, del mismo modo la adyacencia entre dos aristas se denota por  $e_1 \text{ ady}_G e_2$ .

**Ejemplo 1.** Sea  $G$  una gráfica con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y

$$E(G) = \{v_1v_3, v_1v_5, v_2v_4, v_5v_3, v_2v_2, v_4v_3, v_3v_2, v_4v_5\}$$

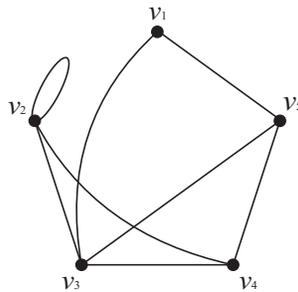


Figura 2.1: Ejemplo de una gráfica  $G$

**Definición 2.1.4.** Una arista  $e \in E(G)$  es una lazo si tiene sus dos extremos en un mismo vértice. Decimos que  $G$  es una gráfica simple si no tiene lazos.

**Ejemplo 2.** Sea  $G$  una gráfica con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y

$$E(G) = \{v_1v_4, v_1v_5, v_5v_4, v_4v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$$

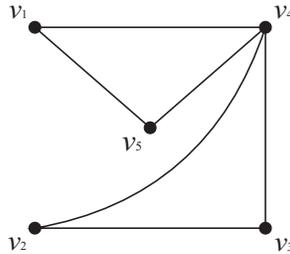


Figura 2.2: Ejemplo de una gráfica simple  $G$

**Definición 2.1.5.** Sea  $G$  una gráfica y  $v \in V(G)$ . El grado de  $v$  en  $G$  es el número de aristas de  $G$  que inciden en  $v$  y se denota por  $d_G(v) = n$ . Un vértice  $v$  de  $G$  se dice que es un vértice aislado si  $d_G(v) = 0$  y se dice que es un vértice terminal si  $d_G(v) = 1$ .

**Observación 1.** Si  $G$  es una gráfica simple y  $u \in V(G)$ ,  $0 \leq d_G(u) \leq p - 1$ .

**Observación 2.** Dado que el conjunto de vértices  $V(G)$  de una gráfica  $G$  es finito, entonces el conjunto de aristas  $E(G)$  también es finito.

**Definición 2.1.6.** El orden de una gráfica  $G$  es la cardinalidad del conjunto  $V(G)$  y lo denotamos por  $p$ ; es decir,  $p = |V(G)|$ . El tamaño de una gráfica  $G$  es la cardinalidad del conjunto  $E(G)$ , y lo denotamos por  $q$ ; es decir,  $q = |E(G)|$ .

Observemos la siguiente figura:

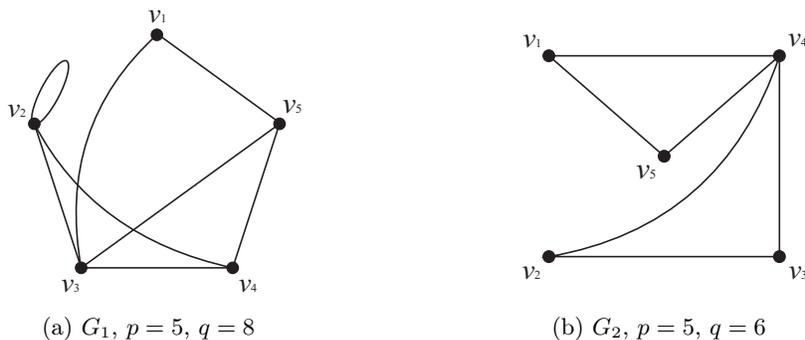


Figura 2.3: Orden y tamaño de una gráfica

Como ya se había mencionado  $G_1$  es una gráfica con lazos, mientras que  $G_2$  es una gráfica simple. Notemos que  $d_{G_1}(v_5) = 3$ , y  $d_{G_2}(v_3) = 2$ .  $G_1$  y  $G_2$  tienen el mismo orden, pero no el mismo tamaño.

**Teorema 2.1.1.** Sea  $G$  una gráfica de tamaño  $q$ , entonces

$$\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2q$$

*Demostración.* Sea  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  con  $d_G(v_i) = n_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , como cada arista incide en dos vértices (no necesariamente distintos, si la gráfica no es simple), entonces la suma de los grados de los vértices nos da dos veces el número de aristas.  $\square$

**Corolario 2.1.1.** Sea  $G$  una gráfica, entonces el número de vértices de  $G$  de grado impar, es par.

*Demostración.* Sean  $V_1 = \{v \in V(G) : d_G(v) = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$  y  $V_2 = \{v \in V(G) : d_G(v) = 2l, l \in \mathbb{N}\}$ , entonces

$$\begin{aligned} 2q &= \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{v \in V_1} d_G(v) + \sum_{v \in V_2} d_G(v) \\ &= \sum_{v \in V_1} d_G(v) + 2m. \end{aligned}$$

Por lo que

$$2(q - m) = \sum_{v \in V_1} d_G(v).$$

$\square$

**Definición 2.1.7.** Sea  $G$  una gráfica y  $S \subset V(G)$ ,  $S$  es un conjunto de vértices independiente de  $G$  si para cualesquiera  $u, v \in S$  se tiene que  $u$  no  $\text{ady}_G v$ .

**Observación 3.** Para cualquier gráfica  $G$ , El conjunto  $\emptyset$  es un conjunto de vértices independiente.

## 2.2. Isomorfismo entre gráficas

**Definición 2.2.1.** Sean  $G_1$  y  $G_2$  gráficas, si existe una función biyectiva  $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  tal que  $u \text{ ady}_{G_1} v$  si y sólo si  $f(u) \text{ ady}_{G_2} f(v)$  se dice que  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas y se denota por  $G_1 \cong G_2$ .

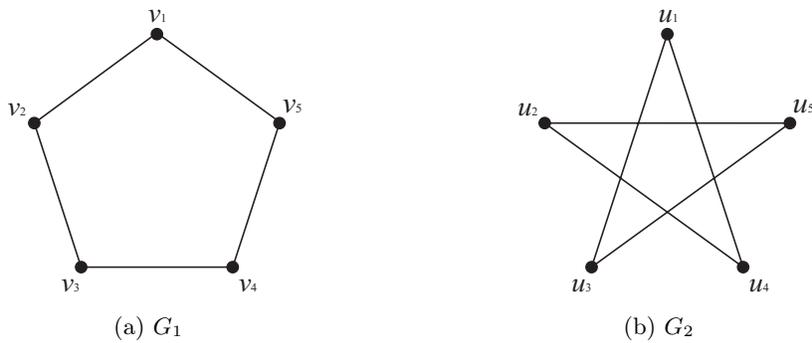


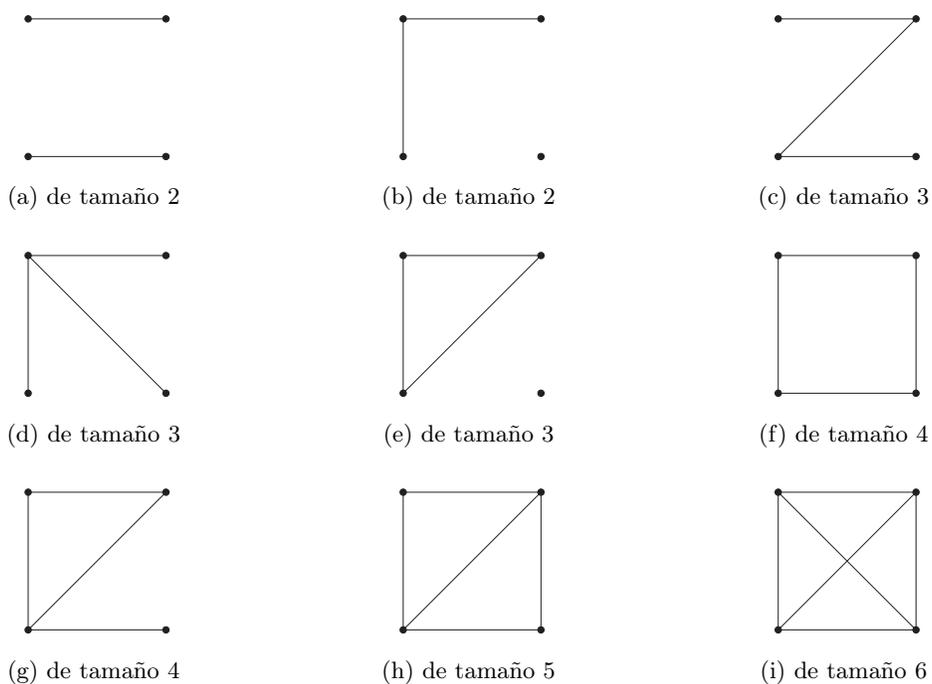
Figura 2.4: Ejemplo de gráficas isomorfas

En la figura 2.4 tenemos dos gráficas  $G_1$ ,  $G_2$  y una función  $f$  entre ellas dada por  $f = \{(v_1, u_1), (v_2, u_3), (v_3, u_5), (v_4, u_2), (v_5, u_4)\}$  claramente  $f$  es biyectiva y cumple la definición de isomorfismo, por lo que  $G_1 \cong G_2$ .

**Observación 4.** Si dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfas entonces tienen el mismo orden.

A continuación se muestran todas las gráficas no isomorfas de orden 4:





**Definición 2.2.2.** Se define el complemento  $G^c$  de una gráfica  $G$ , como la gráfica que tiene como conjunto de vértices a  $V(G)$  y para cualesquiera dos vértices  $u, v \in V(G^c)$  se tiene que  $u \text{ ady}_{G^c} v$  si y sólo si  $u$  no  $\text{ady}_G v$ . A  $G^c$  también se le denota por  $\overline{G}$ .

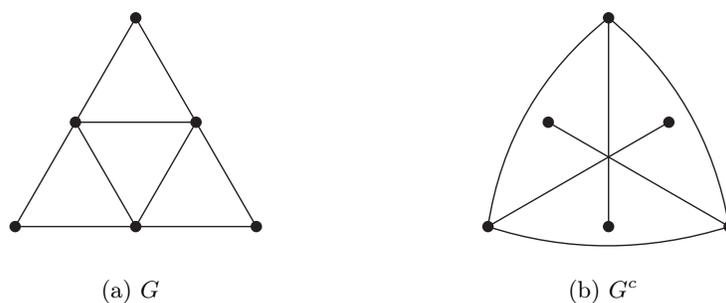


Figura 2.5: Ejemplo del complemento de una gráfica

**Observación 5.** Sabemos que el número máximo de aristas de una gráfica simple con  $p$  vértices es  $\binom{p}{2}$ , entonces  $|E(G^c)| = \binom{p}{2} - |E(G)|$ .

**Definición 2.2.3.** Una gráfica simple  $G$  es autocomplementaria si  $G \cong G^c$ .

En el ejemplo de la figura 2.4 es fácil ver que  $G_2 \cong \overline{G_1}$ , por lo que  $G_1$  es una gráfica autocomplementaria.

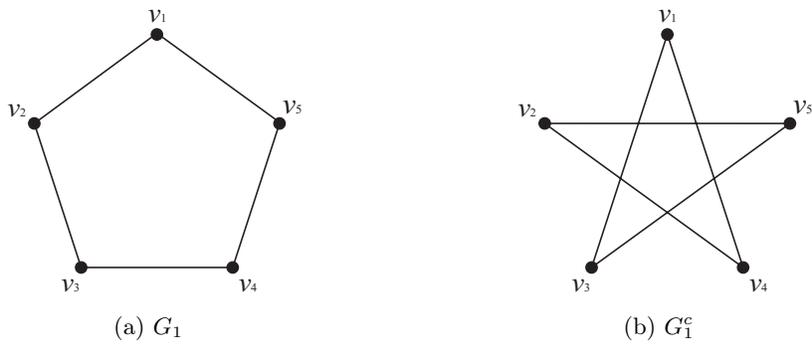


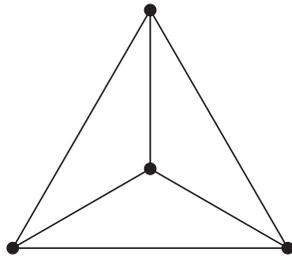
Figura 2.6: Ejemplo de una gráfica autocomplementaria

## 2.3. Algunas gráficas simples

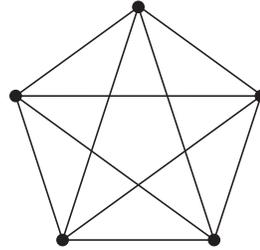
De ahora en adelante, cuando hablemos de una gráfica  $G$ , estaremos hablando de una gráfica simple, aunque algunas de las proposiciones que se mencionen en este capítulo no sean exclusivas de las gráficas simples.

### 2.3.1. Gráficas completas $K_p$

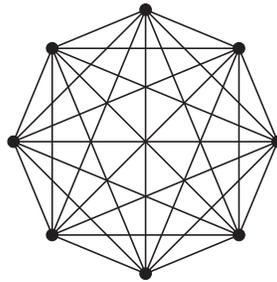
**Definición 2.3.1.** Una gráfica  $G$  es completa si  $d_G(v) = p-1$ , para cualquier  $v \in V(G)$ , y se denota por  $K_p$ , con  $p$  el orden de  $G$ .



(a)  $K_4$



(b)  $K_5$



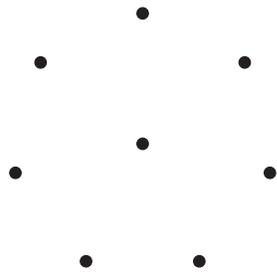
(c)  $K_8$

Figura 2.7: Ejemplos de  $K_p$

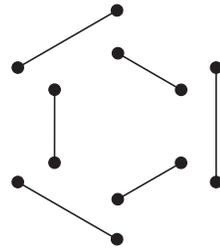
**Observación 6.** La gráfica completa de un sólo vértice  $K_1$ , es una gráfica trivial. Cualquier gráfica completa con  $p$  vértices, se puede representar con un polígono de  $p$  lados que tiene todas sus diagonales.

### 2.3.2. Gráficas $r$ -Regulares

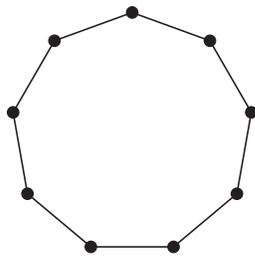
**Definición 2.3.2.** Una gráfica  $G$  es  $r$ -regular si  $d_G(v) = r$ , para cualquier  $v \in V(G)$ .



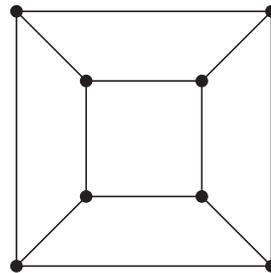
(a)  $G_1$ , 0-regular



(b)  $G_2$ , 1-regular



(c)  $G_3$ , 2-regular



(d)  $G_4$ , 3-regular

Figura 2.8: Ejemplos de gráficas  $r$ -regulares

**Observación 7.** Toda gráfica completa de orden  $p$ , es  $(p-1)$ -regular, y toda gráfica trivial es 0-regular.

### 2.3.3. Gráficas bipartitas

**Definición 2.3.3.** Una gráfica  $G$  es bipartita, si existe una partición de  $V(G)$ , en  $V_1$  y  $V_2$  tal que toda arista de  $G$  es una  $V_1V_2$ -arista; es decir, tiene un extremo en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ .

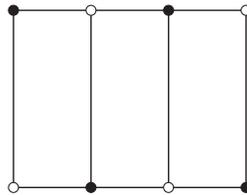


Figura 2.9: Ejemplo de una gráfica bipartita  $G$

En la gráfica  $G$  de la figura 2.9, damos una partición de los vértices en dos conjuntos  $V_1$  y  $V_2$ , donde los vértices que pertenecen al conjunto  $V_1$  son de color blanco y los vértices que pertenecen al conjunto  $V_2$  son de color negro. Notemos que cualesquiera dos vértices del mismo color son no adyacentes, y cualquier arista de  $G$  incide en un vértice negro y en un vértice blanco.

**Definición 2.3.4.** Una gráfica  $G$  es  $n$ -partita, si existe una partición de  $V(G)$ , en  $n$  conjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_n$  tal que toda arista de  $G$  es una  $V_iV_j$ -arista; con  $i \neq j$ ;  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

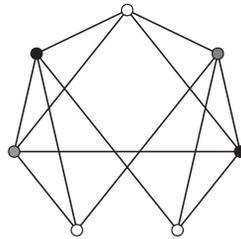


Figura 2.10: Ejemplo de una gráfica 3-partita

**Definición 2.3.5.** Una gráfica  $G$  bipartita, es bipartita completa si todo vértice de  $V_1$  es adyacente a todo vértice de  $V_2$ , y se denota por  $K_{n,m}$ , donde  $n = |V_1|$  y  $m = |V_2|$ . A las gráficas  $K_{1,m}$  les llamamos estrellas.

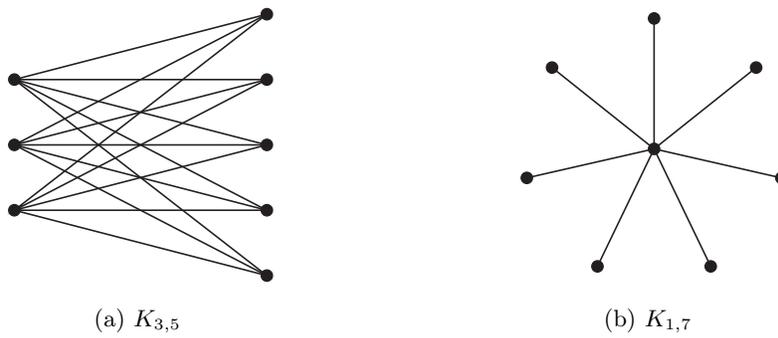


Figura 2.11: Ejemplos de gráficas bipartitas completas

**Definición 2.3.6.** Una gráfica  $G$   $n$ -partita, es  $n$ -partita completa si todo vértice de  $V_i$  es adyacente a todo vértice de  $V_j$ , con  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  y se denota por  $K_{m_1, \dots, m_n}$ , donde  $m_i = |V_i|$  y  $i = 1, \dots, n$ .

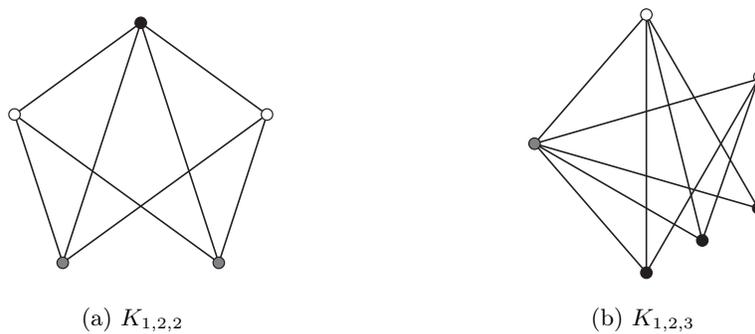
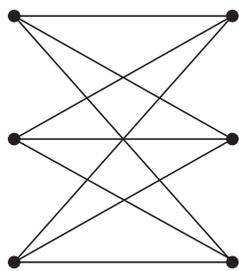
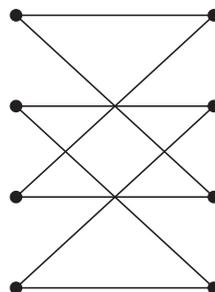


Figura 2.12: Ejemplos de gráficas 3-partitas completas

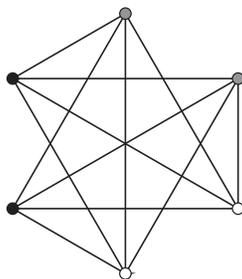
Una gráfica  $G$  puede ser  $n$ -partita y  $r$ -regular. Observemos las siguientes gráficas:



(a)  $K_{3,3}$ , 3-regular



(b) bipartita, 2-regular



(c)  $K_{2,2,2}$ , 4-regular

Figura 2.13: Ejemplos de gráficas  $n$ -partitas  $r$ -regulares

## 2.4. Subgráficas

**Definición 2.4.1.** Sea  $G$  una gráfica, se dice que  $H$  es subgráfica de  $G$  si es una gráfica tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ .

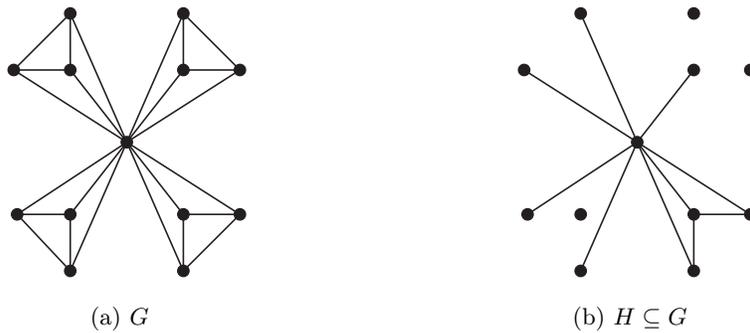


Figura 2.14: Ejemplo de una subgráfica  $H$  de  $G$

**Definición 2.4.2.** Una subgráfica  $H$  de  $G$ , es una subgráfica generadora si  $V(H) = V(G)$ .

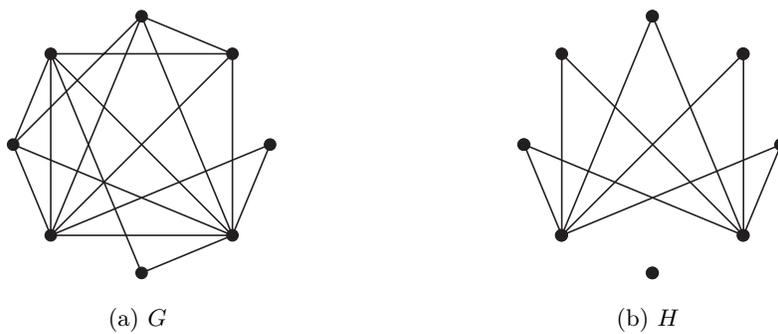


Figura 2.15: Ejemplo de una subgráfica generadora  $H$  de  $G$

**Definición 2.4.3.** Una subgráfica  $H$  de  $G$ , es una subgráfica inducida por vértices si  $V_H \subseteq V_G$  y  $u \text{ ady}_H v$  si y sólo si  $u \text{ ady}_G v$  y se denota por  $H = G[S]$ , donde  $S = V(H)$ .

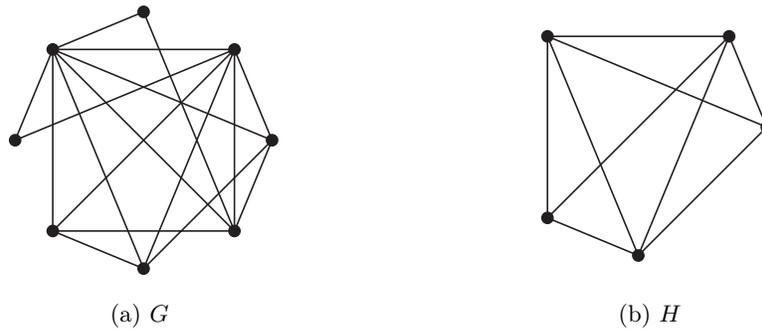


Figura 2.16: Ejemplo de una subgráfica  $H$  de  $G$  inducida por vértices

**Observación 8.** Toda subgráfica inducida  $H$  de una gráfica completa  $K_p$ , es una subgráfica completa, dado que cada vértice  $v$  en  $K_p$  es adyacente a todos los demás y no necesariamente una subgráfica inducida de una gráfica  $r$ -regular, es una subgráfica  $r$ -regular.

Veamos las siguientes figuras:

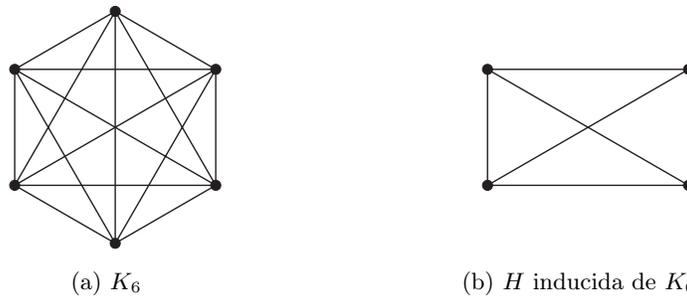


Figura 2.17: Ejemplo de una subgráfica inducida de una gráfica completa

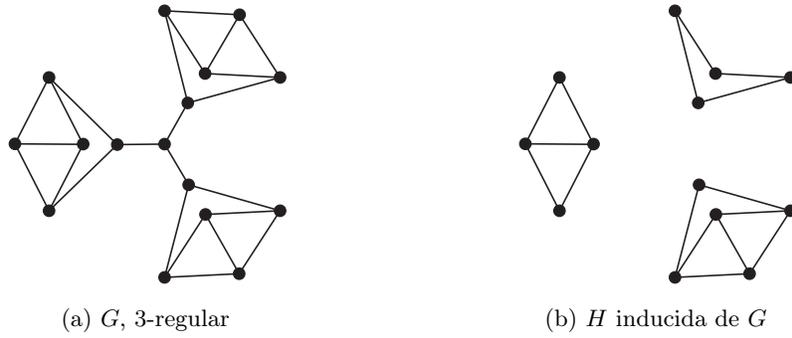


Figura 2.18: Ejemplo de una subgráfica inducida de una gráfica  $r$ -regular

En la figura 2.17 se muestra una subgráfica inducida  $H$  de  $K_6$ , y se observa que  $H$  es una gráfica completa de orden 4. En la figura 2.18 tenemos una gráfica inducida  $H$  de una gráfica  $G$  3-regular, pero  $H$  no es  $r$ -regular.

## 2.5. Operaciones en gráficas

Existen varias formas de combinar gráficas para generar nuevas gráficas, por medio de operaciones binarias, algunas de ellas se describen a continuación. En las siguientes definiciones vamos a considerar a las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  ajenas; es decir, que  $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ .

### 2.5.1. Unión

**Definición 2.5.1.** Se define la unión  $G_1 \cup G_2$  de las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  como la gráfica tal que  $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1 \cup V(G_2))$  y  $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$ .

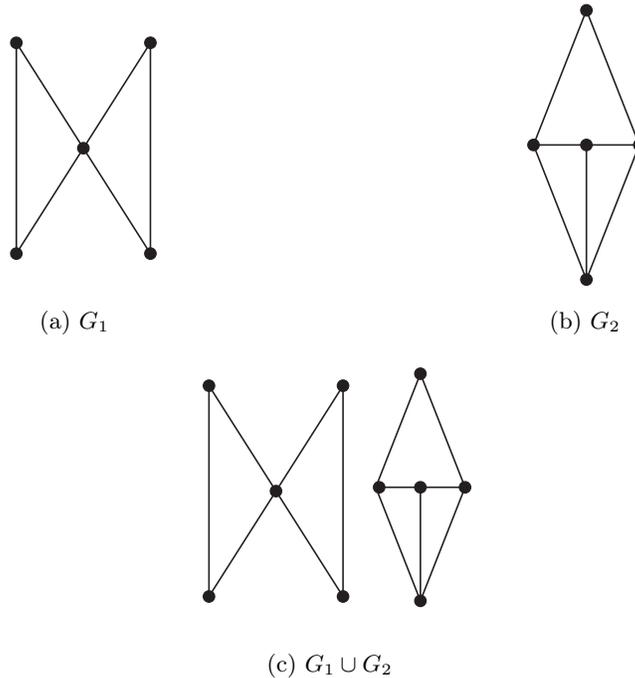


Figura 2.19: Ejemplo de la unión de dos gráficas

**Observación 9.** Como  $G_1$  y  $G_2$  son ajenas, se tiene que  $|V(G_1 \cup G_2)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$ , por la misma razón  $|E(G_1 \cup G_2)| = |E(G_1)| + |E(G_2)|$ .

### 2.5.2. Suma

**Definición 2.5.2.** Se define la suma  $G_1 + G_2$  de las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  como la gráfica tal que  $V(G_1 + G_2) = V(G_1 \cup V(G_2))$  y  $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv : u \in V(G_1) \text{ y } v \in V(G_2)\}$ .

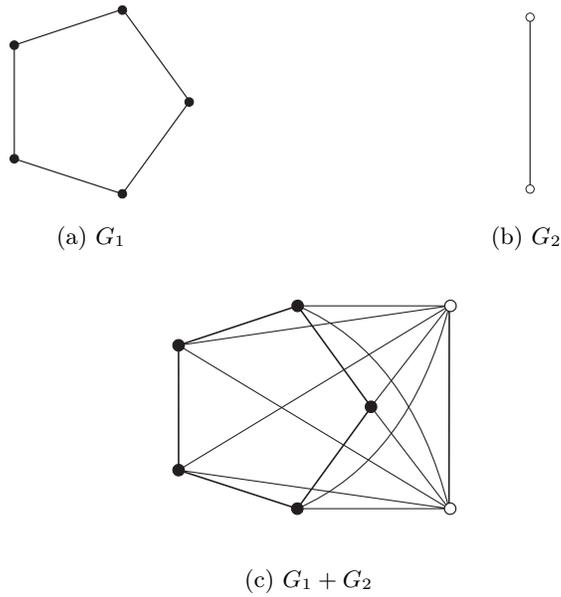


Figura 2.20: Ejemplo de la suma de dos gráficas

**Observación 10.** Usando la suma de dos gráficas, podemos construir la gráfica  $K_{n,m}$  de la siguiente manera:  $K_{n,m} = K_n^c + K_m^c$ . Nótese que  $K_p^c$  es la gráfica trivial de  $p$  vértices.



### 2.5.3. Producto cartesiano

**Definición 2.5.3.** Se define el producto cartesiano  $G_1 \times G_2$  de las gráficas  $G_1$  y  $G_2$  como la gráfica tal que  $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$  y

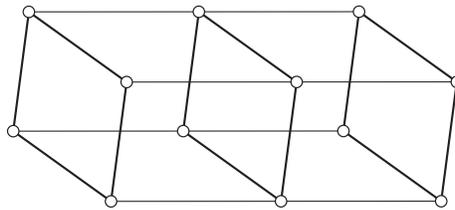
$$(u_1, u_2) \text{ ady}_{G_1 \times G_2} (v_1, v_2) \text{ si y sólo si } \begin{cases} u_1 = v_1 \text{ y } u_2 \text{ ady}_{G_2} v_2 \\ \text{ó} \\ u_2 = v_2 \text{ y } u_1 \text{ ady}_{G_1} v_1 \end{cases}$$



(a)  $G_1$



(b)  $G_2$



(c)  $G_1 \times G_2$

Figura 2.21: Ejemplo del producto cartesiano de dos gráficas

## 2.6. Caminos

**Definición 2.6.1.** Sea  $G$  una gráfica,  $I$  un conjunto de índices y  $V(G) = \{v_i : i \in I, |I| = p\}$ , un camino  $\mathcal{C} = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$  en  $G$  es una sucesión de vértices tal que  $e_i = v_i v_{i+1}$  es una arista de  $G$ . A  $\mathcal{C}$  se le llama un  $v_0 v_n$ -camino, donde  $v_0$  es el vértice inicial de la sucesión y  $v_n$  es el vértice final de la sucesión. Si  $v_0 = v_n$  se dice que  $\mathcal{C}$  es un camino cerrado.

**Definición 2.6.2.** La longitud del camino  $\mathcal{C} = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  es  $n$  y se denota por  $\ell(\mathcal{C})$ . Si  $\ell(\mathcal{C}) = 0$ , se dice que el camino es trivial.

**Definición 2.6.3.** Un paseo  $P$  en una gráfica  $G$ , es un camino que no repite aristas.

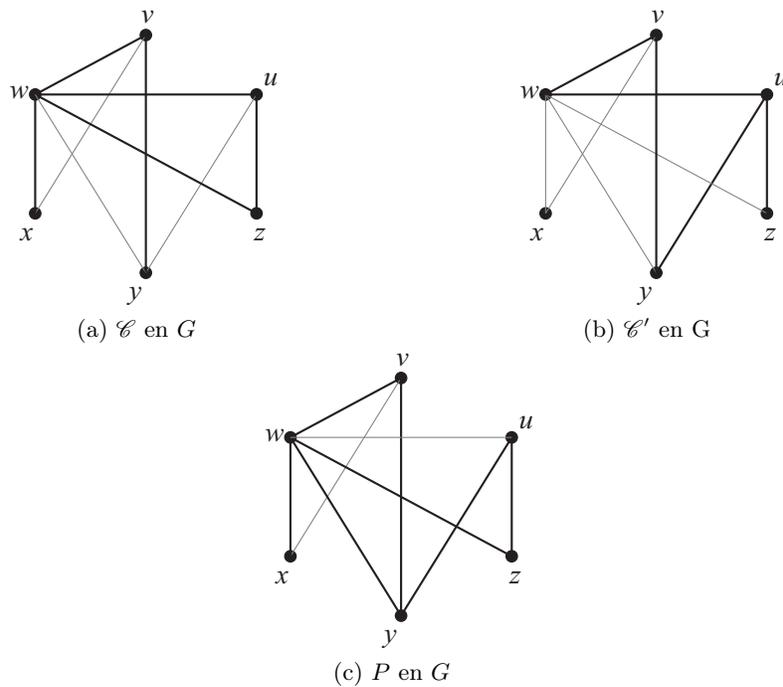


Figura 2.22:

En la gráfica de la figura 2.22, tenemos tres ejemplos de caminos, en la figura 2.22a, el camino  $\mathcal{C} = (y, v, w, x, u, z, w)$  es un  $yw$ -camino en el cual

se repiten el vértice  $w$  y la  $xw$ -arista y  $\ell(\mathcal{C}) = 7$ . En la figura 2.22b, el camino  $\mathcal{C}' = (z, u, y, v, w, u, z)$  es un camino cerrado en el cual se repite la  $uz$ -arista y  $\ell(\mathcal{C}') = 6$ . En la figura 2.22c el camino  $P = (x, w, v, y, w, z, u, y)$  es un  $xy$ -paseo de longitud 7, en el cual se repiten los vértices  $y$  y  $w$ .

**Definición 2.6.4.** Una trayectoria  $T$  en una gráfica  $G$ , es un camino que no repite vértices.

**Definición 2.6.5.** Un ciclo  $\gamma$  en una gráfica  $G$ , es un camino cerrado que no repite vértices, salvo el vértice inicial y el vértice terminal. Por lo que para cualquier ciclo  $\gamma$ , se tiene que  $\ell(\gamma) \geq 3$ . Si  $\ell(\gamma) = n$  se dice que es un  $n$ -ciclo.

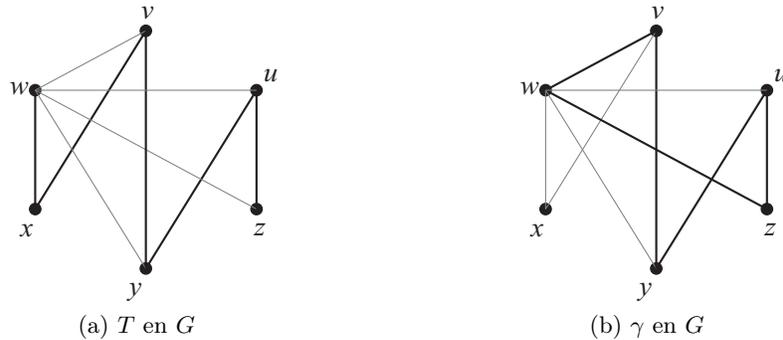


Figura 2.23:

En la figura 2.23 tenemos otros dos ejemplos de caminos, en la figura 2.23a tenemos una  $wz$ -trayectoria  $T = (w, x, y, u, z)$  la cual por no repetir vértices, tampoco repite aristas y  $\ell(T) = 5$ . En la figura 2.23b el camino  $\gamma = (u, y, v, w, z, u)$  es un ciclo en  $G$  y  $\ell(\gamma) = 5$ .

**Definición 2.6.6.** Se dice que una gráfica  $G$  es acíclica si no tiene ciclos.

**Notación 2.** A las gráficas que son en sí mismas trayectorias de orden  $n$  las denotamos por  $T_n$  y a las gráficas que son en sí mismas ciclos de orden  $n$  las denotamos por  $C_n$ .

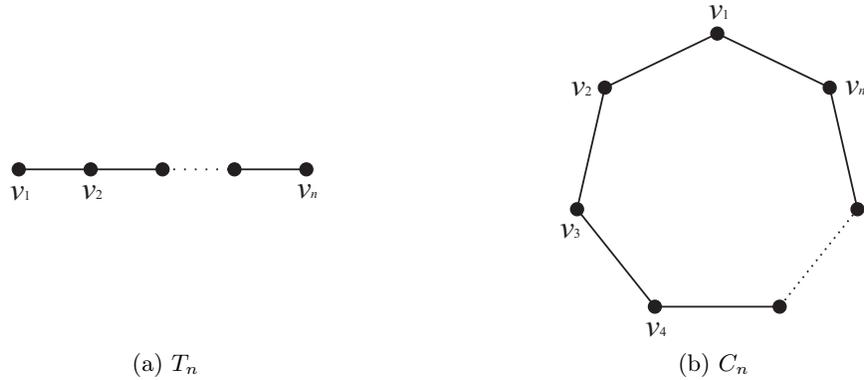


Figura 2.24: Trayectorias y ciclos

**Teorema 2.6.1.** *Sea  $G$  una gráfica y  $\mathcal{C}$  un  $uv$ -camino en  $G$ ,  $u \neq v$ , entonces  $\mathcal{C}$  contiene una  $uv$ -trayectoria.*

*Demostración.* Por inducción sobre  $\ell(\mathcal{C})$

Si  $\ell(\mathcal{C}) = 1$ , entonces  $\mathcal{C} = (u, v)$  lo cual es una  $uv$ -trayectoria.

Supongamos que cualquier  $uv$ -camino de longitud menor que  $n$  contiene una  $uv$ -trayectoria. Veamos que sucede para  $n$ .

Sea  $\mathcal{C} = (u = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = v)$  un  $uv$ -camino de longitud  $n$ , entonces tenemos dos casos:

**Caso 1** Si  $x_i \neq x_j$ , para todo  $i \neq j$  entonces  $\mathcal{C}$  es una  $uv$ -trayectoria.

**Caso 2** Si  $x_i = x_j$  para alguna  $i \neq j$ , podemos suponer que  $i < j$ , entonces consideremos  $\mathcal{C}' = (u = v_0, v_1, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$ , el cual es un  $uv$ -camino de longitud menor que  $n$  contenido en  $\mathcal{C}$  y por hipótesis de inducción  $\mathcal{C}'$  contiene una  $uv$ -trayectoria, por lo que  $\mathcal{C}$  también la contiene.

□

**Teorema 2.6.2.** Sea  $G$  una gráfica y  $\mathcal{C}$  un camino cerrado de longitud impar en  $G$ , entonces  $\mathcal{C}$  contiene un ciclo de longitud impar.

*Demostración.* Por inducción sobre  $\ell(\mathcal{C})$

Si  $\ell(\mathcal{C}) = 3$ , entonces  $\mathcal{C} = (x_0, x_1, x_2, x_0)$ , como  $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_0\} \in E(\mathcal{C})$  tenemos que los vértices del camino  $\mathcal{C}$  son distintos dos a dos, lo cual quiere decir que  $\mathcal{C}$  es un ciclo y tiene longitud impar.

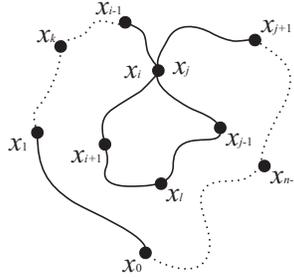
Supongamos que todo camino cerrado de longitud impar y menor que  $2n + 1$  contiene un ciclo de longitud impar. Veamos que cualquier camino cerrado de longitud  $2n + 1$  contiene un ciclo de longitud impar.

Sea  $\mathcal{C} = (x_0, x_1, \dots, x_{2n}, x_0)$  un camino cerrado de longitud  $2n + 1$ , entonces tenemos dos casos:

**Caso 1** Si  $x_i \neq x_j$ , para todo  $i \neq j$ , entonces  $\mathcal{C}$  es un ciclo y su longitud es impar.

**Caso 2** Si existen  $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$  con  $i < j$  tales que  $x_i = x_j$ , entonces consideremos los siguientes caminos cerrados:

$\mathcal{C}_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_0)$  y  $\mathcal{C}_2 = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j-1}, x_j)$



por la forma en que construimos  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ ,  $\ell(\mathcal{C}) = \ell(\mathcal{C}_1) + \ell(\mathcal{C}_2)$ , como  $\ell(\mathcal{C})$  es impar, entonces  $\ell(\mathcal{C}_1)$  es impar ó  $\ell(\mathcal{C}_2)$  es impar. Supongamos que  $\mathcal{C}_1$  tiene longitud impar, sabemos que  $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}$  y como  $\ell(\mathcal{C}_1) < \ell(\mathcal{C}) = 2n + 1$ , por hipótesis de inducción  $\mathcal{C}_1$  contiene un ciclo de longitud impar, por lo que  $\mathcal{C}$  también.

□

**Teorema 2.6.3.** *Sea  $G$  una gráfica tal que para todo  $v \in V(G)$ ,  $d_G(v) \geq 2$ , entonces  $G$  contiene un ciclo.*

*Demostración.* Consideremos  $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  una trayectoria en  $G$  de longitud máxima, como  $d_G(v) \geq 2$  para cualquier  $v \in V(G)$ , entonces existe  $u \in V(G)$  tal que  $u \neq x_{n-1}$  y  $u \text{ ady}_G x_n$ , tenemos dos casos:

**Caso 1** Si  $u = x_i$  para algún  $i = 0, \dots, n - 2$ , entonces el camino  $\mathcal{C} = (x_n, u = x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n)$  es un ciclo en  $G$ .

**Caso 2** Si  $u \neq x_i$  para todo  $i = 0, \dots, n - 2$ , entonces el camino  $\mathcal{C} = (x_0, \dots, x_n, u)$  es una trayectoria de longitud  $\ell(T) + 1$  lo cual es una contradicción pues  $T$  es de longitud máxima, por lo que  $G$  contiene un ciclo.

□

## 2.7. Árboles

Para poder definir lo que es un árbol, primero necesitamos introducir el concepto de conexidad de una gráfica, aunque el tema de conexidad es un tema amplio en la teoría de gráficas, en este trabajo no es necesario ahondar en él.

**Definición 2.7.1.** Una gráfica  $G$  es conexa si para todo  $u, v \in V(G)$  existe un  $uv$ -camino ( $uv$ -trayectoria) en  $G$ . Se dice que una gráfica  $G$  es inconexa si no es conexa.

**Definición 2.7.2.** Una componente conexa de una gráfica  $G$ , es una subgráfica conexa de  $G$ , máxima con esta propiedad. Se denota por  $\omega(G)$  al número de componentes conexas de  $G$ .

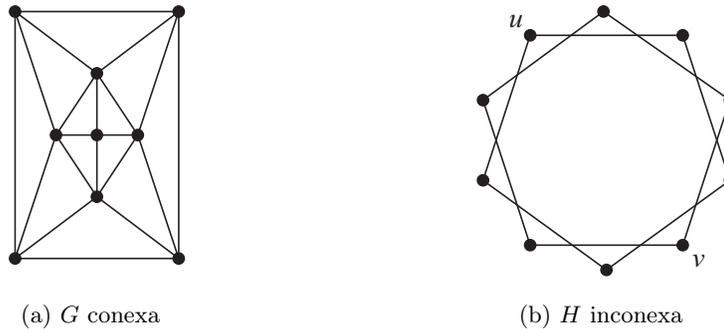


Figura 2.25: conexidad de una gráfica

En el ejemplo de la figura 2.25 la gráfica  $G$  es conexa mientras que  $H$  es inconexa, puesto que para los vértices  $u$  y  $v$  no existe una  $uv$ -trayectoria y  $\omega(H) = 2$ . Note que para cualquier gráfica  $G$ ;  $G$  es conexa si y sólo si  $\omega(G) = 1$ .

**Definición 2.7.3.** Un árbol  $A$  es una gráfica conexa y acíclica.

**Definición 2.7.4.** *Un bosque es una gráfica acíclica.*

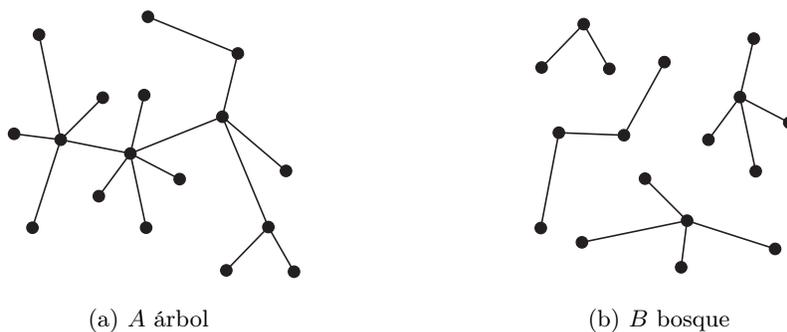


Figura 2.26:

Las gráficas que se muestran en la figura anterior, corresponden a un árbol y a un bosque, se sigue de la definición que todo árbol es un bosque; mientras que un bosque puede ser una gráfica inconexa, en la que cada una de sus componentes conexas es un árbol.

**Teorema 2.7.1.** *Todo árbol  $A$  no trivial, tiene al menos dos vértices terminales; es decir, existen  $u, v \in V(A)$  tales que  $d_A(u) = 1 = d_A(v)$ .*

*Demostración.* Sea  $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  una  $uv$ -trayectoria de longitud máxima en  $A$ . Supongamos por contradicción que  $d_G(u) \neq 1$ , es claro que  $d_G(u) \neq 0$  pues  $A$  es conexas, por lo que  $d_G(u) \geq 2$ , entonces existe  $w \in V(G)$  tal que  $u \text{ ady}_G w$  y  $w \neq x_1$ . Tenemos dos casos:

**Caso 1** Si  $w = x_i$  para algún  $x_i \in V(T)$  con  $i = 2, \dots, n$ , entonces el camino  $\mathcal{C} = (w, u = x_0, x_1, \dots, x_i = w)$  es un ciclo en  $A$ , lo cual es una contradicción, pues  $A$  es acíclica.

**Caso 2** Si  $w \in V(A) \setminus V(T)$ , entonces el camino  $T' = (w, u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  es una trayectoria en  $A$  tal que  $\ell(T') > \ell(T)$ , lo cual es una contradicción pues  $T$  es de longitud máxima.

Si  $d_G(v) \neq 1$  la prueba es análoga y por tanto  $u$  y  $v$  son vértices terminales.  $\square$

**Definición 2.7.5.** Una gráfica  $A$  es un árbol generador de  $G$ , si es una subgráfica generadora de  $G$  tal que es un árbol.

**Lema 2.7.1.** Si  $G$  es una gráfica conexa,  $e \in E(G)$ . Si existe  $\gamma$  un ciclo en  $G$  tal que  $e \in E(\gamma)$ , entonces  $G - \{e\}$  es conexa.

*Demostración.* Sea  $e$  una  $uv$ -arista de  $G$  y  $\gamma = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v, u)$  un ciclo en  $G$  tal que  $e \in E(\gamma)$ . Sean  $w_1, w_2 \in V(G)$  y  $\mathcal{C}$  un  $w_1w_2$ -camino en  $G$ , entonces tenemos dos casos:

**Caso 2** Si  $e \notin E(\mathcal{C})$ , entonces  $\mathcal{C}$  es un  $w_1w_2$ -camino en  $G - \{e\}$ .

**Caso 1** Si  $e \in E(\mathcal{C})$  consideremos el camino  $\mathcal{C}' = (w_1, \mathcal{C}, u) \cup (u, \gamma, v) \cup (v, \mathcal{C}, w_2)$ , entonces  $\mathcal{C}'$  es un  $w_1, w_2$  camino en  $G - \{e\}$ .

□

**Lema 2.7.2.** Sea  $G$  un árbol y  $v \in V(G)$  un vértice terminal, entonces  $G - \{v\}$  es un árbol.

*Demostración.*  $G - \{v\}$  es acíclica pues es una subgráfica de  $G$ , basta ver que  $G - \{v\}$  es conexa.

Sean  $x, y \in V(G - \{v\})$ . Como  $G$  es conexa, entonces existe  $T$  una  $xy$ -trayectoria en  $G$ ; dicha trayectoria no pasa por  $v$  ya que, como  $d_G(v) = 1$  toda trayectoria en  $G$  que pase por  $v$  tiene como vértice final a  $v$ , por lo que  $T$  es una  $xy$ -trayectoria en  $G - \{v\}$ . □

**Teorema 2.7.2.** Toda gráfica conexa  $G$  tiene un árbol generador.

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ , donde  $n$  es el número de ciclos en  $G$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $G$  una gráfica conexa.

Si  $n = 0$ , entonces  $G$  es acíclica por lo que  $G$  es árbol y  $G$  es subgráfica generadora de si misma.

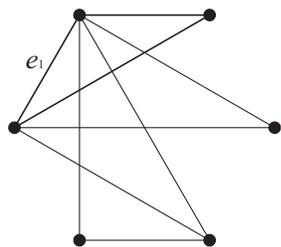
Si  $n = 1$ , entonces sea  $\gamma$  el ciclo de  $G$  y  $e \in E(\gamma)$ , consideremos a  $G' =$

$G - \{e\}$ , por el Lema 2.7.1  $G'$  es conexa y además es acíclica por construcción, por lo que  $G'$  es un árbol y además es una subgráfica generadora de  $G$ .

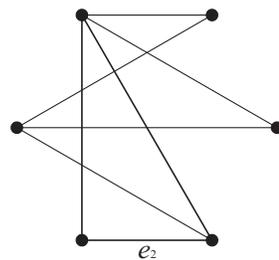
Supongamos que cualquier gráfica conexa  $G$  con  $k$  ciclos,  $1 \leq k < n$  posee un árbol generador. Veamos que si  $G$  es una gráfica conexa con  $n$  ciclos,  $G$  tiene un árbol generador.

Sea  $G$  conexa con  $n$  ciclos, sea  $\gamma$  un ciclo en  $G$  y  $e \in E(\gamma)$ , entonces por el Lema 2.7.1  $G - e$  es conexa y tiene menos de  $n$  ciclos, entonces  $G - e$  tiene un árbol generador por hipótesis de inducción, sea  $A$  dicho árbol generador de  $G - e$ , como  $A \subset G - e \subset G$  y  $V(A) = V(G - e) = V(G)$ , entonces  $A$  es un árbol generador para  $G$ .

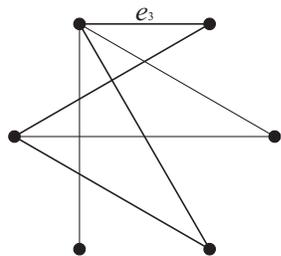
□



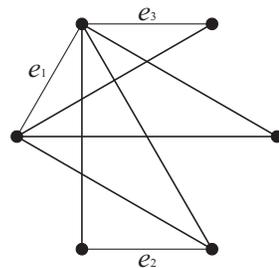
(a)  $e_1 \in E(\mathcal{C}_1)$  en  $G$



(b)  $e_2 \in E(\mathcal{C}_2)$  en  $G - \{e_1\}$



(c)  $e_3 \in E(\mathcal{C}_3)$  en  $G - \{e_1, e_2\}$



(d)  $G - \{e_1, e_2, e_3\}$ , árbol generador de  $G$

Figura 2.27: Árbol generador de una gráfica conexa  $G$

En la figura 2.27 se muestra cómo obtener un árbol generador de una gráfica conexa  $G$ . Primero quitamos una arista  $e_1$  que pertenece a un ciclo  $\mathcal{C}_1$  de  $G$ , como la gráfica  $G - \{e_1\}$  no es acíclica, podemos quitar una arista  $e_2$  que pertenece a un ciclo  $\mathcal{C}_2$  de  $G - \{e_1\}$ , como la gráfica obtenida  $G - \{e_1, e_2\}$  sigue teniendo ciclos, podemos quitar una arista  $e_3$  de un ciclo  $\mathcal{C}_3$  de  $G - \{e_1, e_2\}$  y de esta forma obtenemos una gráfica  $G - \{e_1, e_2, e_3\}$  que es acíclica, como eliminamos aristas de  $G$  de manera adecuada de tal forma que la gráfica final siguiera siendo conexa y al no borrar vértices de  $G$  es también una subgráfica generadora de  $G$ , conseguimos un árbol generador de  $G$ .

**Teorema 2.7.3.** *Caracterización de árboles.*

Sea  $G$  una gráfica de orden  $p$  y tamaño  $q$ . Son equivalentes:

1.  $G$  es un árbol
2.  $G$  es acíclica y  $q = p - 1$
3.  $G$  es conexa y  $q = p - 1$

*Demostración.*

Si  $G$  es un árbol, entonces  $G$  es acíclica y  $q = p - 1$ .

Basta ver que  $q = p - 1$ . Por inducción sobre  $p$ .

Si  $p = 1$ , entonces  $G = K_1$  y  $q = 0$

Si  $p = 2$ , entonces  $G = K_2$  y  $q = 1$

Supongamos que todo árbol de orden  $p$  tiene  $p - 1$  aristas. Sea  $G$  un árbol de orden  $p + 1$ , veamos que  $G$  tiene  $p$  aristas.

Sea  $v \in V(G)$  un vértice terminal, entonces  $G - \{v\}$  es un árbol y tiene orden  $p$ , por hipótesis de inducción  $|E(G - \{v\})| = p - 1$ , como  $d_G(v) = 1$  sucede que  $|E(G)| = |E(G - \{v\})| + 1 = p$ .

Si  $G$  es acíclica y  $q = p - 1$ , entonces  $G$  es conexa y  $q = p - 1$ .

Basta ver que  $G$  es conexa.

Sean  $G_1, G_2, \dots, G_m$  las componentes conexas de  $G$ , como  $G$  es acíclica,

$G_i$  es árbol para toda  $i \in \{1, \dots, m\}$ , por lo que  $q_i = p_i - 1$ , de aquí que

$$q = \sum_{i=1}^m q_i = \sum_{i=1}^m p_i - 1 = p - k$$

pero por hipótesis  $q = p - 1$ , por lo tanto  $k = 1$ , lo que quiere decir que  $G$  es conexa.

Si  $G$  es acíclica y  $q = p - 1$ , entonces  $G$  es árbol.

Como  $G$  es conexa, entonces existe  $G'$  un árbol generador de  $G$ , pero  $|E(G')| = p - 1$  por ser árbol. Como  $G |E(G')| = |E(G)|$  y  $G'$  es subgráfica de  $G$ , entonces  $G' = G$ , por lo tanto  $G$  es un árbol.

□

**Corolario 2.7.1.** *Un bosque  $B$  de orden  $p$ , tiene  $p - \omega(B)$  aristas.*

**Teorema 2.7.4.** *Una gráfica  $G$  es un árbol si y sólo si para todo  $u, v \in V(G)$  existe una única  $uv$ -trayectoria.*

*Demostración.* Como  $G$  es un árbol, es conexa, por lo que para cualesquiera dos vértices  $u, v \in V(G)$  existe  $T = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  una  $uv$ -trayectoria. Supongamos por contradicción que  $T$  no es única, entonces existe otra  $uv$ -trayectoria  $T' = (u = y_0, y_1, \dots, y_m = v)$  que difiere de  $T$  en al menos un vértice de la sucesión. Tenemos dos casos:

**Caso 1** Si  $T$  y  $T'$  coinciden en un vértice distinto de  $u$  y de  $v$ , sea  $z = \min \{x_i \in V(T) - \{u, v\} : x_i = y_j \text{ para algún } j = 2, \dots, m - 1\}$ , entonces el camino  $\mathcal{C} = (u = x_0, \dots, x_{i-1}, z, y_{j-1}, \dots, y_0 = u)$  es un ciclo en  $G$ , lo que contradice que  $G$  es acíclica.

**Caso 2** Si  $x_i \neq y_j$  para toda  $i = 2, \dots, n - 1$ ,  $j = 2, \dots, m - 1$ , entonces el camino  $\mathcal{C} = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v = y_m, y_{m-1}, \dots, y_0 = u)$  es un ciclo en  $G$ , lo que contradice que  $G$  sea acíclica.

Como para cualesquiera  $u, v \in V(G)$  existe una  $uv$ -trayectoria, entonces  $G$  es conexa. Basta ver que  $G$  es acíclica. Supongamos por contradicción que en  $G$  hay un ciclo  $\mathcal{C} = (u = x_0, x_1, \dots, x_n, u)$  y sea  $v \in V(\mathcal{C}) - \{u\}$  entonces los caminos  $T_1 = (u = x_0, x_1, \dots, x_i = v)$  y  $T_2 = (u = x_0, x_n, x_{n-1}, \dots, x_i = v)$  son dos  $uv$ -trayectorias distintas en  $G$ , lo cual es una contradicción.

□



## Capítulo 3

# Fibonacci en las Gráficas

### 3.1. Los números de Fibonacci de las Gráficas

Consideremos a  $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$  el conjunto de los primeros  $n$  naturales y sea  $I_n = \{S \subset A_n : \forall l, m \in S \ l \neq m \pm 1\}$ ; es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de  $A_n$  tales que no tienen números consecutivos. Es posible decir con exactitud, cual es el cardinal de  $I_n$ .

Observemos la siguiente tabla:

$n$	$A_n$	$I_n$	$ I_n $
1	{1}	{ $\emptyset$ , {1}}	2
2	{1, 2}	{ $\emptyset$ , {1}, {2}}	3
3	{1, 2, 3}	{ $\emptyset$ , {1}, {2}, {3}, {1, 3}}	5
4	{1, 2, 3, 4}	{ $\emptyset$ , {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 4}}	8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fijémonos en el número total de subconjuntos de  $A_n$  que no tienen números consecutivos, para cada  $n$ .

$n$	1	2	3	4	5	$\dots$
$ I_n $	2	3	5	8	13	$\dots$

Aparentemente, obtenemos una subsucesión de la sucesión de Fibonacci

$$2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

donde el  $n$ -ésimo término de la sucesión está dado por  $|I_n| = F_{n+2}$ , veamos que esta conjetura es cierta.

*Demostración.* Procederemos a hacer la prueba por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 1$ , entonces  $I_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$  entonces  $|I_1| = 2 = F_3$ .

Supongamos que para cada  $k < n$  se tiene que  $|I_k| = F_{k+2}$ , veamos que  $|I_n| = F_{n+2}$ .

Sea  $I_n$  el conjunto de todos los subconjuntos de  $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  que no tienen números consecutivos. A  $I_n$  lo podemos partir en dos conjuntos  $I_{n \in} = \{S \in I_n : n \in S\}$  e  $I_{n \notin} = \{S \in I_n : n \notin S\}$ , es claro que estos conjuntos forman una partición de  $I_n$ , ya que  $\emptyset \in I_{n \notin}$  y  $\{n\} \in I_{n \in}$ ; es decir, son no vacíos; y para cualquier  $S \in I_n$  se tiene que  $n \in S$  ó  $n \notin S$  y no se pueden dar ambas al mismo tiempo, por tanto  $I_{n \in} \cap I_{n \notin} = \emptyset$  y  $I_{n \in} \cup I_{n \notin} = I_n$ . Entonces, como queremos saber cuántos elementos tiene  $I_n$ , basta ver cuántos elementos de  $I_n$  tienen a  $n$  y cuántos no.

Sea  $S \in I_n$ , tenemos dos casos:

**Caso 1.** Si  $n \in S$ , entonces  $n - 1 \notin S$ , pues en  $S$  no hay números consecutivos, entonces  $S \setminus \{n\} \in I_{n-2}$ , por otro lado, si  $S' \in I_{n-2}$ , entonces  $S' \cup \{n\}$  es un subconjunto de  $A_n$  que tiene a  $n$  y no tiene números consecutivos. Por tanto, hay tantos elementos de  $I_n$  que tienen a  $n$ , como  $|I_{n-2}| = F_n$  (por hipótesis de inducción).

**Caso 2.** Si  $n \notin S$ , entonces  $S \in I_{n-1}$ , por otro lado si  $S' \in I_{n-1}$ , entonces  $S'$  es un subconjunto de  $A_n$  que no tiene a  $n$  y no tiene números consecutivos. Por tanto, hay tantos elementos de  $I_n$  que no tienen a  $n$ , como  $|I_{n-1}| = F_{n+1}$  (por hipótesis de inducción).

$$\text{Por lo tanto } |I_n| = |I_{n \in}| + |I_{n \notin}| = F_n + F_{n+1} = F_{n+2}.$$

□

Ahora, consideremos a  $T_n$ , la trayectoria de orden  $n$ , y sean  $V(T_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $E(T_n) = \{v_i v_j : j = i + 1 \forall i = 1, \dots, n - 1\}$ ; es decir  $v_i$  ady $_{T_n}$   $v_j$  si y sólo si  $i$  y  $j$  son números consecutivos. Pensemos en todos los posibles conjuntos de vértices independientes de  $T_n$ , entonces para cualquier conjunto de vértices independiente se tiene que cualesquiera dos vértices, sus subíndices no

son consecutivos, por lo que encontrar el número total de conjuntos de vértices independientes de una trayectoria de orden  $n$ , es análogo al problema anterior.

**Definición 3.1.1.** Sea  $G$  una gráfica simple, se define el número de Fibonacci de  $G$ , como el número total de conjuntos de vértices independientes de  $G$  y se denota por  $\mathcal{F}(G)$ .

**Teorema 3.1.1.** Si  $T_n$  es la trayectoria de orden  $n$ , entonces  $\mathcal{F}(T_n) = F_{n+2}$ , donde  $F_n$  es el  $n$ -ésimo número de Fibonacci.

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 1$ , entonces  $T_1 = (v_1)$ , y los posibles conjuntos de vértices independientes de  $T_1$  son  $\emptyset$  y  $\{v_1\}$ , entonces  $\mathcal{F}(T_1) = 2 = F_3$ .

Si  $n = 2$ , entonces  $T_2 = (v_1, v_2)$  y los posibles conjuntos de vértices independientes de  $T_2$  son  $\emptyset$ ,  $\{v_1\}$  y  $\{v_2\}$ , entonces  $\mathcal{F}(T_2) = 3 = F_4$ .

Supongamos que se cumple para cualquier  $2 < k < n$ ; es decir,  $\mathcal{F}(T_k) = F_{k+2}$ . Veamos que cumple para  $n$ .

Sea  $S$  un conjunto de vértices independiente para  $T_n = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$ , entonces tenemos dos casos:

**Caso 1.** Si  $v_n \in S$ , entonces  $v_{n-1} \notin S$  ya que en  $S$  cualesquiera dos vértices son no adyacentes, entonces  $S \setminus \{v_n\}$  es un conjunto de vértices independiente para  $T_{n-2}$  y viceversa, si  $S'$  es un conjunto de vértices independiente de  $T_{n-2}$ ,  $S' \cup \{v_n\}$  es independiente para  $T_n$  tal que tiene a  $v_n$ . Por tanto el número total de conjuntos de vértices independientes de  $T_n$  que tienen a  $v_n$  es  $\mathcal{F}(T_{n-2}) = F_n$ .

**Caso 2.** Si  $v_n \notin S$ , entonces  $S$  es un conjunto de vértices independiente para  $T_{n-1}$  y cualquier conjunto de vértices independiente para  $T_{n-1}$ , es independiente para  $T_n$  tal que no tiene a  $v_n$ . Por tanto, el número total de conjuntos de vértices independientes de  $T_n$  que no tienen a  $v_n$  es  $\mathcal{F}(T_{n-1}) = F_{n+1}$ .

Por lo tanto  $\mathcal{F}(T_n) = \mathcal{F}(T_{n-2}) + \mathcal{F}(T_{n-1}) = F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ .

□

Ahora, consideremos a  $C_n = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1)$ , el ciclo de orden  $n$ , y pensemos en todos los conjuntos de vértices independientes para  $C_n$ , es posible decir con exactitud cuántos hay. (Como estamos trabajando con gráficas simples, el ciclo más pequeño tiene orden 3.)

Observemos la siguiente tabla:

$n$	Conjuntos de vértices independientes de $C_n$
3	$\{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$
4	$\{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$
5	$\{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}\}$
$\vdots$	$\vdots$

Fijémonos en el número total de conjuntos de vértices independientes de  $C_n$ , para cada  $n \geq 3$ .

$n$	3	4	5	6	7	$\dots$
$\mathcal{F}(C_n)$	4	7	11	18	29	$\dots$

En la tabla anterior, podemos observar que al ir calculando  $\mathcal{F}(C_n)$ , obtenemos una subsucesión de la sucesión de Lucas

$$4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots$$

**Teorema 3.1.2.** *Sea  $C_n$ , el ciclo de orden  $n$ , entonces  $\mathcal{F}(C_n) = L_n$ , donde  $L_n$  es el  $n$ -ésimo número de Lucas.*

*Demostración.* Ya vimos que el número total de conjuntos de vértices independientes para  $C_3$  es  $4 = L_3$ .

Sea  $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$  un ciclo de orden  $n \geq 4$ , para saber cuántos conjuntos de vértices independientes tiene  $C_n$ , basta contar cuántos conjuntos de vértices independientes hay que tengan a  $v_n$  y cuántos que no.

Sea  $S$  un conjunto de vértices independiente para  $C_n$ , entonces tenemos dos casos:

**Caso 1.** Si  $v_n \in S$ , entonces  $v_1, v_{n-1} \notin S$ , ya que  $v_1, v_{n-1} \text{ ady}_{C_n} v_n$ , entonces  $S \setminus \{v_n\}$  es un conjunto de vértices independiente para la trayectoria  $T = (v_2, v_3, \dots, v_{n-2})$  de orden  $n-3$ , y cualquier conjunto  $S'$  de vértices independientes para  $T$ , cumple que  $S' \cup \{v_n\}$  es un conjunto de vértices independiente para  $C_n$ , que tiene a  $v_n$ . Por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes que tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-3}) = F_{n-1}$ .

**Caso 2.** Si  $v_n \notin S$ , entonces  $S$  es un conjunto de vértices independiente para  $C_n \setminus \{v_n\} = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) = T_{n-1}$ , y cualquier conjunto de vértices independiente de  $T_{n-1}$  es independiente para  $C_n$ , tal que no tiene a  $v_n$ . Por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes para  $C_n$  que no tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-1}) = F_{n+1}$ .

Por lo tanto  $\mathcal{F}(C_n) = \mathcal{F}(T_{n-3}) + \mathcal{F}(T_{n-1}) = F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$ .

□

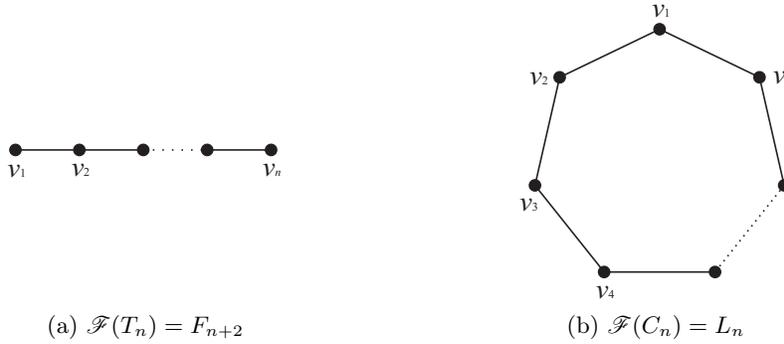


Figura 3.1: Los números de Fibonacci de  $T_n$  y  $C_n$

**Teorema 3.1.3.** *Si  $H$  es una subgráfica generadora de  $G$ , entonces*

$$\mathcal{F}(G) \leq \mathcal{F}(H).$$

*Demostración.* Queremos probar que  $|I_G = \{S \subseteq V(G) : S \text{ es independiente}\}| \leq |I_H = \{S \subseteq V(H) : S \text{ es independiente}\}|$ , basta ver que  $I_G \subseteq I_H$ .

Sea  $S$  un conjunto independiente de vértices para  $G$ , supongamos por contradicción que  $S$  no es independiente para  $H$ , entonces existen  $u, v \in V(H)$  tales que  $u \text{ ady}_H v$ , pero  $E(H) \subseteq E(G)$  por ser  $H$  una subgráfica generadora de  $G$ , entonces  $u \text{ ady}_G v$ , lo cual es una contradicción, ya que  $u, v \in S$ .

Como  $I_G \subseteq I_H$ , entonces  $|I_G| \leq |I_H|$ . Por tanto  $\mathcal{F}(G) \leq \mathcal{F}(H)$ .  $\square$

**Corolario 3.1.1.** *Sea  $G$  una gráfica simple de orden  $n$ , entonces*

$$n + 1 = \mathcal{F}(K_n) \leq \mathcal{F}(G) \leq \mathcal{F}(K_n^c) = 2^n.$$

*Demostración.* Como  $G$  es una gráfica simple de orden  $n$ , a  $G$  la podemos obtener de  $K_n$  borrando aristas, entonces  $G$  es una subgráfica generadora de  $K_n$  y  $G$  podrá ser a lo más  $K_n^c$  en el caso de que hubiésemos borrado todas las aristas de  $K_n$ , entonces usando el teorema anterior tenemos que

$$K_n^c \subseteq G \subseteq K_n \Rightarrow \mathcal{F}(K_n) \leq \mathcal{F}(G) \leq \mathcal{F}(K_n^c).$$

Basta ver que  $\mathcal{F}(K_n) = n + 1$  y  $\mathcal{F}(K_n^c) = 2^n$ .

1. Sea  $S$  un conjunto independiente de vértices no vacío para  $K_n$  y sea  $u \in S$ , como  $u \text{ ady}_{K_n} v$ , para cualquier  $v \in V(K_n)$ , entonces  $|S| = 1$  y como esto sucede para cada vértice de  $K_n$ , entonces tenemos tantos conjuntos independientes de vértices para  $K_n$  distintos del vacío, como el orden de  $K_n$ , por tanto  $\mathcal{F}(K_n) = n + 1$ .
2. Como en  $K_n^c$  no hay aristas, si  $S$  es un conjunto independiente de vértices para  $K_n^c$ ,  $S$  puede ser cualquier subconjunto de  $V(K_n^c)$ , entonces hay tantos conjuntos independientes de vértices para  $K_n^c$  como subconjuntos de  $V(K_n^c)$ , por tanto

$$\mathcal{F}(K_n^c) = |\mathcal{P}(V(K_n^c))| = 2^{|V(K_n^c)|} = 2^n.$$

$\square$

**Teorema 3.1.4.** Si  $G_1$  y  $G_2$  son gráficas tales que  $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ , entonces

$$\mathcal{F}(G_1 \cup G_2) = \mathcal{F}(G_1) \cdot \mathcal{F}(G_2).$$

*Demostración.* Sabemos que  $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$  y que  $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ .

Sea  $I_{G_1 \cup G_2} = \{S \subseteq V(G_1 \cup G_2) : S \text{ es independiente}\}$ , queremos saber cuál es la cardinalidad de  $I_{G_1 \cup G_2}$  y para ello basta ver que

$$I_{G_1 \cup G_2} = \{S_1 \cup S_2 : S_1 \subseteq V(G_1) \text{ y } S_2 \subseteq V(G_2)\},$$

con  $S_1$  y  $S_2$  conjuntos independientes de vértices para  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente.

Veamos que  $I_{G_1 \cup G_2} \subseteq \{S \subseteq V(G_1 \cup G_2) : S \text{ es independiente}\}$

Sea  $S \in I_{G_1 \cup G_2}$  y sea  $S_1 = S \cap V(G_1)$  y  $S_2 = S \cap V(G_2)$ , como  $S \subseteq V(G_1) \cup V(G_2)$ , entonces para cualquier  $u \in S$ ,  $u \in S_1$  ó  $u \in S_2$  y además  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  ya que son subconjuntos de conjuntos ajenos y como  $S$  es independiente, cualquier subconjunto de  $S$ , lo es también, en particular  $S_1$  y  $S_2$ , entonces  $S = S_1 \cup S_2$ , con  $S_1 \subseteq V(G_1)$  y  $S_2 \subseteq V(G_2)$  independientes.

Veamos que  $\{S \subseteq V(G_1 \cup G_2) : S \text{ es independiente}\} \subseteq I_{G_1 \cup G_2}$

Sean  $S_1$  y  $S_2$  conjuntos independientes de vértices para  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente y sea  $S = S_1 \cup S_2$ , entonces  $S \subseteq V(G_1 \cup G_2)$ , además para cualesquiera  $u, v \in S$  se tiene que  $u$  no  $\text{ady}_{G_1 \cup G_2} v$ , ya que  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  por ser subconjuntos de conjuntos ajenos y  $S_1$  y  $S_2$  son independientes para  $G_1 \cup G_2$ .

Por lo tanto

$$I_{G_1 \cup G_2} = \{S_1 \cup S_2 : S_1 \subseteq V(G_1) \text{ y } S_2 \subseteq V(G_2), \text{ independientes}\},$$

entonces por cada conjunto independiente de vértices de  $G_1$ , puedo construir tantos conjuntos independientes de vértices para  $G_1 \cup G_2$  como conjuntos de vértices independientes para  $G_2$ , por lo que en total hay  $\mathcal{F}(G_1) \cdot \mathcal{F}(G_2)$  elementos de  $I_{G_1 \cup G_2}$ ; es decir,

$$\mathcal{F}(G_1 \cup G_2) = \mathcal{F}(G_1) \cdot \mathcal{F}(G_2).$$

□

### 3.2. Los números de Fibonacci de los Árboles

Hemos visto que es posible calcular con exactitud, cuál es el número de Fibonacci de ciertas gráficas, entre ellas, las trayectorias de orden  $n$ , que a su vez son árboles, cuyo número de vértices terminales es mínimo, veremos a continuación que también es posible decir con exactitud cuántos conjuntos independientes de vértices tienen las estrellas  $K_{1,n-1}$  de orden  $n$ , que son los árboles de orden  $n$  con la propiedad de tener el máximo número de vértices terminales.

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $S_n = K_{1,n-1}$  la estrella de orden  $n$ , entonces*

$$\mathcal{F}(S_n) = 2^{n-1} + 1.$$

*Demostración.* Sea  $v \in V(S_n)$  tal que  $d_{S_n}(v) = n - 1$  y sean  $I_{\in} = \{S \subseteq V(S_n) : S \text{ es independiente y } v \in S\}$  y  $I_{\notin} = \{S \subseteq V(S_n) : S \text{ es independiente y } v \notin S\}$ . Dado que  $I_{\in}, I_{\notin}$  son una partición de  $I_{S_n} = \{S \subseteq V(S_n) : S \text{ es independiente}\}$ , basta ver cuál es la cardinalidad de  $I_{\in}$  e  $I_{\notin}$ .

Sea  $S \in I_{\in}$ , como  $v \text{ ady}_{S_n} u$ , para todo  $u \in V(S_n) - \{v\}$ , entonces  $u \notin S$ , para todo  $u \in V(S_n) - \{v\}$  ya que  $S$  es un conjunto independiente de vértices, por lo que  $S = \{v\}$ , entonces  $|I_{\in}| = 1$ .

Sea  $S \in I_{\notin}$ , como  $v \notin S$  y  $u$  no  $\text{ady}_{S_n} w$ , para cualesquiera  $u, w \in V(S_n) - \{v\}$ , entonces  $S \subseteq V(S_n) - \{v\}$ , por lo que  $|I_{\notin}| = |\mathcal{P}(V(S_n) - \{v\})| = 2^{n-1}$ .

Por lo tanto  $\mathcal{F}(S_n) = |I_{S_n}| = |I_{\in}| + |I_{\notin}| = 1 + 2^{n-1}$ . □

**Teorema 3.2.2.** *Si  $B$  es un bosque de orden  $n$ , entonces  $F_{n+2} \leq \mathcal{F}(B)$ .*

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

**Si  $n=1$**   $B = K_1$ , y  $\mathcal{F}(K_1) = 2 = F_3$ .

**Si  $n=2$**  tenemos dos casos:

**Caso 1.** Si  $B = K_2$ , entonces  $\mathcal{F}(K_2) = 3 = F_4$ .

**Caso 2.** Si  $B = K_2^c$ , entonces  $\mathcal{F}(K_2^c) = 4 \geq F_4$ .

Supongamos que para cualquier bosque de orden  $k < n$  el teorema es cierto. Veamos que el teorema se cumple para  $n$ . Sea  $B$  un bosque de orden  $n$  y  $v \in V(B)$  tal que  $d_B(v) = 1$ , una vez más, podemos calcular el número de Fibonacci de  $B$ , considerando los conjuntos de vértices independientes de  $B$ , que tienen a  $v$  como elemento y a los que no.

Sea  $I_B = \{S \subseteq V(B) : S \text{ es independiente}\}$  y  $S \in I_B$  tal que  $v \notin S$ , entonces  $S$  es independiente para  $B - \{v\}$ , y es claro que cualquier conjunto  $S'$  independiente para  $B - \{v\}$ , lo será también para  $B$ , ya que  $B - \{v\} \subset B$  y como  $V(B - \{v\}) = n - 1$  y por hipótesis de inducción  $F_{n+1} \leq \mathcal{F}(B - \{v\})$ . Ahora, sea  $S \in I_B$  tal que  $v \in S$ , como  $d_B(v) = 1$ , existe un único  $u \in V(B) - \{v\}$  tal que  $u \text{ ady}_B v$ , entonces  $u \notin S$ , por ser  $S$  independiente, consideremos la siguiente función  $g : I_\infty \rightarrow I_{B-\{u,v\}}$  dada por  $g(S) = S - \{v\}$ , donde  $I_\infty = \{S \subseteq V(B) : S \text{ es independiente y } v \in S\}$  e  $I_{B-\{u,v\}} = \{S' \subseteq V(B - \{u, v\}) : S' \text{ es independiente}\}$ . Veamos que  $g$  es biyectiva: Sean  $S_1, S_2 \in I_\infty$  tales que  $g(S_1) = g(S_2)$ , entonces  $S_1 - \{v\} = S_2 - \{v\}$ , de aquí que  $S_1 = S_2$ ; por tanto  $g$  es inyectiva. Por otro lado, si  $S' \in I_{B-\{u,v\}}$ , consideremos a  $S = S' \cup \{v\}$ , entonces  $S \in I_\infty$  y  $g(S) = S - \{v\} = S'$ , por lo que  $g$  es suprayectiva y por tanto

$$|I_\infty| = |I_{B-\{u,v\}}|$$

y como  $B - \{u, v\}$  es un bosque de orden  $n - 2$  se tiene que  $F_n \leq |I_{B-\{u,v\}}|$ , por hipótesis de inducción.

Por lo tanto  $\mathcal{F}(B) \geq F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ . □

**Corolario 3.2.1.** *Si  $A$  es un árbol de orden  $n$ , entonces  $\mathcal{F}(A) \geq F_{n+2}$ .*

**Teorema 3.2.3.** *Sea  $A$  un árbol de orden  $n$ , entonces  $\mathcal{F}(A) \leq 2^{n-1} + 1$ .*

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 1$ , entonces  $A = K_1$  y  $\mathcal{F}(A) = 2 = 2^0 + 1$ .

Si  $n = 2$ , entonces  $A = K_2$  y  $\mathcal{F}(A) = 3 = 2^1 + 1$ .

Supongamos que el teorema es cierto para cualquier árbol de orden  $n$ , veamos que es cierto para cualquier árbol de orden  $n + 1$ .

Sea  $A$  un árbol de orden  $n + 1$  y  $v \in V(A)$  un vértice terminal, si  $S$  es un conjunto independiente de vértices para  $A$ , tenemos dos casos:

**Caso 1.** Si  $v \in S$  y como  $v$  es terminal, existe un único  $w \in V(A)$  tal que  $v \text{ ady}_A w$ , entonces  $w \notin S$ , además para todo  $u \in V(A) - \{v, w\}$ ,  $v$  no  $\text{ady}_A u$ , por lo que  $S \subseteq V(A) - \{w\}$ , entonces hay a lo más tantos conjuntos independientes de vértices que tienen a  $v$  como subconjuntos de  $V(A) - \{w\}$ ; es decir,  $|\mathcal{P}(V(A) - \{w\})| = 2^{n-1}$ .

**Caso 2.** Si  $v \notin S$ , entonces  $S$  es independiente para  $A - \{v\}$ , como  $v$  es un vértice terminal, entonces  $A - \{v\}$  es un árbol, de orden  $n$ , entonces  $\mathcal{F}(A) \leq 2^{n-1} + 1$  por hipótesis de inducción.

Por lo tanto  $\mathcal{F}(A) \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} + 1 = 2^n + 1$ . □

**Observación 11.** Ya que todo árbol es un bosque, podemos afirmar que si  $A$  es un árbol de orden  $n$ , entonces

$$F_{n+2} \leq \mathcal{F}(A) \leq 2^{n-1} + 1.$$

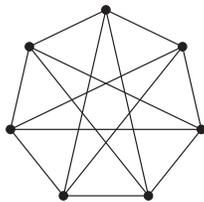
## Capítulo 4

# Fibonacci y las Circulantes

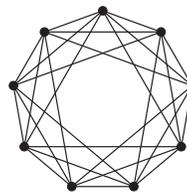
### 4.1. Gráficas Circulantes

**Definición 4.1.1.** Una gráfica circulante  $C_{n(m_1, m_2, \dots, m_r)}$ , es una gráfica de orden  $n$ , con  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  tal que  $v_i$  ady  $v_{i \pm m_j \pmod{n}}$  para toda  $i = 1, \dots, n$  y para toda  $j = 1, \dots, r$ . A los valores  $m_j$  les llamaremos, tamaño de los saltos.

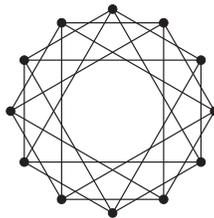
Veamos las siguientes figuras:



(a)  $C_{7(1,3)}$



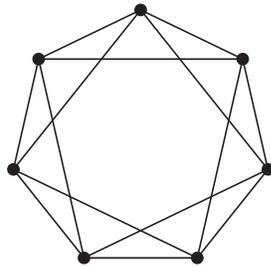
(b)  $C_{9(1,2,3)}$



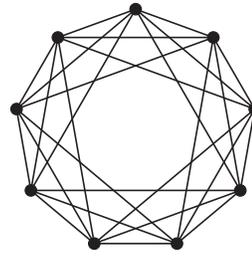
(c)  $C_{12(2,4)}$

En los ejemplos de la figura anterior, podemos observar que las gráficas circulantes son estructuras simétricas y regulares; de hecho  $d_{C_{n(m_1, \dots, m_r)}}(v) = 2r$  si  $n \geq 2r + 1$ , donde  $r$  es el número total de distintos tamaños de saltos; y esto sucede ya que por cada salto  $m_j$ ,  $v_i$  es adyacente a dos vértices.  $C_{7(1,3)}$  es 4-regular, al igual que  $C_{12(2,4)}$ , mientras que  $C_{9(1,2,3)}$  es 6-regular.

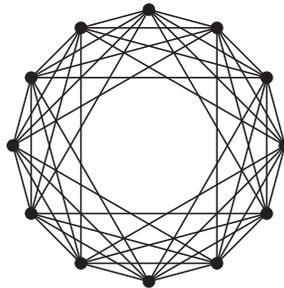
En este capítulo trabajaremos con las gráficas circulantes de salto consecutivo  $C_{n(1,2,3, \dots, r)}$  con  $n \geq r + 1$  y las denotaremos por  $C_{n[r]}$ ; queremos probar que el número de Fibonacci de cualquier circulante de salto consecutivo  $C_{n[r]}$  se puede calcular con exactitud y que además, dicho número está determinado por una sucesión recursiva de enteros positivos.



(a)  $C_{7(1,2)}$



(b)  $C_{9(1,2,3)}$



(c)  $C_{12(1,2,3,4)}$

A las gráficas circulantes de salto consecutivo  $C_{n[r]}$  las podemos ver como  $C_n \cup \{\{u, v\} : 2 \leq d(u, v)_{C_n} \leq r\}$  y empezaremos este capítulo trabajando específicamente con  $C_{n[2]}$ .

### 4.1.1. $C_{n[2]}$ y sus números de Fibonacci

Mostraremos que es posible calcular con exactitud, el número de Fibonacci de las gráficas circulantes  $C_{n[2]}$ , pero para poderlo probar necesitamos hablar de ciertas sucesiones y ciertas gráficas.

#### Algunas sucesiones interesantes

**Definición 4.1.2.** Definimos la sucesión  $F_{i[2]}$  de manera recursiva como:

$$F_{1[2]} = 2, F_{2[2]} = 3, F_{3[2]} = 4 \text{ y } F_{n[2]} = F_{n-1[2]} + F_{n-3[2]}, n \geq 4, n \in \mathbb{Z}.$$

Al  $n$ -ésimo término de la sucesión le llamaremos  $F_{n[2]}$ .

$$2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, \dots$$

**Definición 4.1.3.** Definimos la sucesión  $F_{i[2]}^1$  de manera recursiva como:

$$F_{1[2]}^1 = 1, F_{2[2]}^1 = 3, F_{3[2]}^1 = 4 \text{ y } F_{n[2]}^1 = F_{n-1[2]}^1 + F_{n-3[2]}^1, n \geq 4, n \in \mathbb{Z}.$$

Al  $n$ -ésimo término de la sucesión le llamaremos  $F_{n[2]}^1$ .

$$1, 3, 4, 5, 8, 12, 17, 25, 37, 54, 79, 116, \dots$$

**Definición 4.1.4.** Definimos la sucesión  $L_{i[2]}$  de manera recursiva como:

$$L_{1[2]} = 1, L_{2[2]} = 1, L_{3[2]} = 4 \text{ y } L_{n[2]} = L_{n-1[2]} + L_{n-3[2]}, n \geq 4, n \in \mathbb{Z}.$$

Al  $n$ -ésimo término de la sucesión le llamaremos  $L_{n[2]}$ .

$$1, 1, 4, 6, 10, 15, 21, 31, 46, 67, 98, \dots$$

Veamos la siguiente tabla:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
$F_{n[2]}$	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129...
$F_{n[2]}^1$	1	3	4	5	8	12	17	25	37	54	79	116...
$L_{n[2]}$	1	1	4	5	6	10	15	21	31	46	67	98...

Las sucesiones que acabamos de definir tienen algunas propiedades que las relacionan; observemos, de la tabla anterior, que si tomamos un término  $F_{n[2]}$  y le sumamos el término  $F_{n+3[2]}$  obtendremos el término  $F_{n+4[2]}^1$  de la segunda sucesión; de la misma manera, si tomamos un término  $F_{n[2]}^1$  y le sumamos el término  $F_{n+4[2]}^1$  de la segunda sucesión, obtendremos el término  $L_{n+5}$  de la tercera sucesión; probaremos a continuación que en efecto, estas propiedades son ciertas.

**Proposición 4.1.1.**  $F_{n[2]}^1 = F_{n-1[2]} + F_{n-4[2]}$  para toda  $n \geq 5$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 5, F_{4[2]} + F_{1[2]} = 6 + 2 = 8 = F_{5[2]}^1$$

Supongamos que la igualdad se cumple para toda  $5 \leq k < n$ , veamos que también se cumple para  $n$ :

$$\begin{aligned} F_{n[2]}^1 &= F_{n-1[2]}^1 + F_{n-3[2]}^1 \\ &= (F_{n-2[2]} + F_{n-5[2]}) + (F_{n-4[2]} + F_{n-7[2]}) \\ &= (F_{n-2[2]} + F_{n-4[2]}) + (F_{n-5[2]} + F_{n-7[2]}) \\ &= F_{n-1[2]} + F_{n-4[2]} \end{aligned}$$

□

**Proposición 4.1.2.**  $L_{n[2]} = F_{n-1[2]}^1 + F_{n-5[2]}$ , para toda  $n \geq 6$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

$$\text{Si } n = 6, F_{5[2]}^1 + F_{1[2]} = 8 + 2 = 10 = L_{6[2]}$$

Supongamos que la igualdad se cumple para toda  $6 \leq k < n$ , veamos que también se cumple para  $n$ :

$$\begin{aligned} L_{n[2]} &= L_{n-1[2]} + L_{n-3[2]} \\ &= (F_{n-2[2]}^1 + F_{n-6[2]}) + (F_{n-4[2]}^1 + F_{n-8[2]}) \\ &= (F_{n-2[2]}^1 + F_{n-4[2]}^1) + (F_{n-6[2]} + F_{n-8[2]}) \\ &= F_{n-1[2]}^2 + F_{n-5[2]} \end{aligned}$$

□

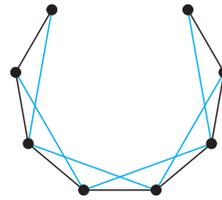
### Trayectorias saltarinas

Queremos probar que el número de Fibonacci de  $C_{n[2]}$  se puede calcular con exactitud y que además queda determinado por una de las últimas tres sucesiones anteriormente definidas; las otras dos, nos sirven para probarlo y además determinan los números de Fibonacci de ciertas subgráficas específicas de  $C_{n[2]}$ , las cuales se definen a continuación.

**Definición 4.1.5.** Sea  $T_{n[2]} = T_n \cup \{\{x, y\} : d_{T_n}(x, y) = 2\}$  la trayectoria de orden  $n$  y salto 2.

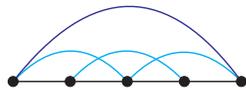


(a)  $T_{5[2]}$

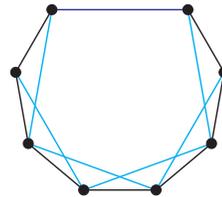


(b)  $T_{8[2]}$

**Definición 4.1.6.** Sea  $T_{n[2]}^1 = T_{n[2]} \cup \{\{x, y\} : d_{T_n}(x, y) = n - 1\}$  la trayectoria de orden  $n$  y salto  $(1, 2, n - 1)$ .



(a)  $T_{5[2]}^1$



(b)  $T_{8[2]}^1$

Es importante señalar que a  $T_{n-1[2]}^1$  se le obtiene de  $C_{n[2]}$  al borrar cualquier vértice, mientras que  $T_{n-5[2]}$  se obtiene al borrar cualquier vértice de  $C_{n[2]}$  junto con sus vecinos, ya que para contabilizar el número total de conjuntos independientes de  $C_{n[2]}$  utilizaremos este hecho y los resultados que a continuación se prueban.

**Teorema 4.1.1.** *Sea  $T_{n[2]}$ , entonces  $\mathcal{F}(T_{n[2]}) = F_{n[2]}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ .*

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 1$ , entonces  $T_{1[2]} = K_1$  y  $\mathcal{F}(K_1) = 2 = F_{1[2]}$ .

Si  $n = 2$ , entonces  $T_{2[2]} = K_2$  y  $\mathcal{F}(K_2) = 3 = F_{2[2]}$ .

Si  $n = 3$ , entonces  $T_{3[2]} = K_3$  y  $\mathcal{F}(K_3) = 4 = F_{3[2]}$ .

Supongamos que cumple para toda  $3 < k < n$ , veamos que cumple para  $n$ .

Sea  $T_{n[2]}$ , con  $n \geq 4$  y  $v_n \in V(T_{n[2]})$  el vértice final de  $T_n$  y sea  $S \subset V(T_{n[2]})$  independiente, entonces debemos considerar dos casos:

**Caso 1.** Si  $v_n \in S$ , entonces  $v_{n-1}, v_{n-2} \notin S$ , pues  $v_{n-1}, v_{n-2}$  ady $_{T_{n[2]}}$   $v_n$ .

Consideremos la siguiente función:

$$g_{[2]} : I_{T_{n[2]}\ominus} \rightarrow I_{T_{n-3[2]}}, \text{ tal que } g_{[2]}(S) = S - \{v_n\}$$

y donde  $I_{T_{n[2]}\ominus} = \{S \subset V(T_{n[2]}) : S \text{ es independiente y } v_n \in S\}$ .

Veamos que es inyectiva; sean  $S_1, S_2 \in I_{T_{n[2]}\ominus}$ , tales que  $g_{[2]}(S_1) = g_{[2]}(S_2)$ , entonces

$$\begin{aligned} g_{[2]}(S_1) &= g_{[2]}(S_2) \\ S_1 - \{v_n\} &= S_2 - \{v_n\} \\ (S_1 - \{v_n\}) \cup \{v_n\} &= (S_2 - \{v_n\}) \cup \{v_n\} \\ S_1 &= S_2 \end{aligned}$$

Veamos que es suprayectiva; sea  $S' \in I_{T_{n-3[2]}}$ , como  $T_{n-3[2]} \subset T_{n[2]}$ , entonces  $I_{T_{n-3[2]}} \subset I_{T_{n[2]}}$  y además  $v_{n-1}, v_{n-2} \notin S'$ , entonces, si consideramos a  $S = S' \cup \{v_n\}$ ,  $S \in I_{T_{n[2]}}$ , se tiene que

$$g_{[2]}(S) = S - \{v_n\} = (S' \cup \{v_n\}) - \{v_n\} = S'.$$

Por tanto,  $g_{[2]}$  es biyectiva y hay tantos conjuntos independientes de vértices de  $T_{n[2]}$ , que tienen a  $v_n$  como  $\mathcal{F}(T_{n-3[2]})$ , que por hipótesis de inducción es  $F_{n-3[2]}$ .

**Caso 2.** Si  $v_n \notin S$ , entonces  $S$  es independiente para  $T_{n[2]} \setminus \{v_n\}$ , por lo que  $S \in I_{T_{n-1[2]}}$ ; por otro lado, si  $S'$  es un conjunto independiente de vértices para  $T_{n-1[2]}$ , lo será también para  $T_{n[2]}$  de tal forma que  $v_n \notin S'$ .

Por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[2]}$ , que no tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-1[2]})$ , que por hipótesis de inducción es  $F_{n-1[2]}$ .

Por lo tanto  $\mathcal{F}(T_{n[2]}) = F_{n-1[2]} + F_{n-3[2]} = F_{n[2]}$ . □

**Teorema 4.1.2.** Sea  $T_{n[2]}^1$ , entonces  $\mathcal{F}(T_{n[2]}^1) = F_{n[2]}^1$ , para toda  $n \geq 2$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 2$ , entonces  $T_{2[2]}^1 = K_2$  y  $\mathcal{F}(K_2) = 3 = F_{2[2]}^1$ .

Si  $n = 3$ , entonces  $T_{3[2]}^1 = K_3$  y  $\mathcal{F}(K_3) = 4 = F_{3[2]}^1$ .

Si  $n = 4$ , entonces  $T_{4[2]}^1 = K_4$  y  $\mathcal{F}(K_4) = 5 = F_{4[2]}^1$ .

Supongamos que cumple para toda  $4 < k < n$ , veamos que cumple para  $n$ .

Sea  $T_{n[2]}^1$ , con  $n \geq 5$  y sea  $v_n \in V(T_{n[2]}^1)$  el vértice final de  $T_n$  y sea  $S \subset V(T_{n[2]}^1)$  independiente, entonces tenemos dos casos:

**Caso 1.** Si  $v_n \in S$ , entonces  $v_1, v_{n-1}, v_{n-2} \notin S$ , ya que  $v_1, v_{n-1}, v_{n-2}$  ady $_{T_{n[2]}^1} v_n$ .

Consideremos la siguiente función:

$$g_{[2]}^1 : I_{T_{n[2]}^1} \rightarrow I_{T_{n-4[2]}}, \text{ tal que } g_{[2]}^1(S) = S - \{v_n\}$$

y donde  $I_{T_{n[2]}^1} = \{S \subset V(T_{n[2]}^1) : S \text{ es independiente y } v_n \in S\}$ .

Veamos que  $g_{[2]}^1$  es inyectiva, sean  $S_1, S_2 \in I_{T_{n[2]}^1}$ , tales que  $g_{[2]}^1(S_1) = g_{[2]}^1(S_2)$ , entonces:

$$\begin{aligned} g_{[2]}^1(S_1) &= g_{[2]}^2(S_2) \\ S_1 - \{v_n\} &= S_2 - \{v_n\} \\ S_1 &= S_2 \end{aligned}$$

Veamos que  $g_{[2]}^1$  es suprayectiva, sea  $S' \in I_{T_{n-4[2]}}$ , como  $T_{n-4[2]} \subset T_{n[2]}^1$ , entonces  $S' \in I_{T_{n[2]}^1}$  y además  $v_1, v_{n-1}, v_{n-2} \notin S'$ , por lo que  $S = S' \cup \{v_n\}$ , es independiente para  $T_{n[2]}^1$ , entonces

$$g_{[2]}^1(S) = (S' \cup \{v_n\}) \setminus \{v_n\} = S'.$$

Por tanto,  $g_{[2]}^1$  es biyectiva y hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[2]}^1$ , que tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-4[2]}) = F_{n-4[2]}$ .

**Caso 2.** Si  $v_n \notin S$ , entonces  $S$  es un conjunto independiente para  $T_{n[2]}^1 - \{v_n\}$  y puesto que  $v_n$  ady $_{T_{n[2]}^1}$   $v_1, v_{n-1}, v_{n-2}$ , entonces  $S \in I_{T_{n-1[2]}}$ . Por otro lado si  $S'$  es independiente para  $T_{n-1[2]}$ , también lo será para  $T_{n[2]}^1$ , de tal manera que  $v_n \notin S'$ .

Por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[2]}^1$  que no tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-1[2]}) = F_{n-1[2]}$ .

Por lo tanto  $\mathcal{F}(T_{n[2]}^1) = F_{n-1[2]} + F_{n-4[2]} = F_{n[2]}^1$ .

□

Todos los conceptos que hemos definido y resultados que hemos probado en esta sección, son las herramientas necesarias para probar el siguiente teorema.

Sabemos que la notación propuesta en este capítulo resulta ser un tanto engorrosa, esto se debe a que queremos generalizar este resultado a cualquier gráfica circulante de orden  $n$  y salto  $r$  ( $C_{n[r]}$ ),  $n, r \in \mathbb{Z}^+$  y consideramos que esta es una notación adecuada que permite identificar fácilmente la sucesión correspondiente a las gráficas que constituyen la base de las pruebas que ocupamos para el resultado final, junto con sus respectivos números de Fibonacci, no obstante, conforme vayamos avanzando en el capítulo, esperamos que sea más claro el por qué elegimos dicha notación.

**Teorema 4.1.3.** Sea  $C_{n[2]}$ , entonces  $\mathcal{F}(C_{n[2]}) = L_{n[2]}$ , para toda  $n \geq 3$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 3$ , entonces  $C_{3[2]} = K_3$  y  $\mathcal{F}(K_3) = 4 = L_{3[2]}$ .

Si  $n = 4$ , entonces  $C_{4[2]} = K_4$  y  $\mathcal{F}(K_4) = 5 = L_{4[2]}$ .

Si  $n = 5$ , entonces  $C_{5[2]} = K_5$  y  $\mathcal{F}(K_5) = 6 = L_{5[2]}$ .

Supongamos que la igualdad se cumple para toda  $5 < k < n$ , veamos que también se cumple para  $n$ .

Sea  $C_{n[2]}$ , con  $n \geq 6$  y sea  $v \in V(C_{n[2]})$  cualquier vértice, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $v = v_n$ . Sea  $S$  un conjunto independiente de vértices para  $C_{n[2]}$ , entonces debemos considerar dos casos:

**Caso 1.** Si  $v_n \in S$ , entonces  $v_1, v_2, v_{n-1}, v_{n-2} \notin S$ , puesto que estos vértices son adyacentes a  $v_n$  en  $C_{n[2]}$  y  $S$  es independiente.

Consideremos la siguiente función:

$$h_{[2]} : I_{C_{n[2] \setminus v_n}} \rightarrow I_{C_{n-5[2]}}, \text{ tal que } h_{[2]}(S) = S - \{v_n\}$$

y donde  $I_{C_{n[2] \setminus v_n}} = \{S \subset V(C_{n[2]}) : S \text{ es independiente y } v_n \in S\}$ .

Veamos que  $h_{[2]}$  es inyectiva; sean  $S_1, S_2 \in I_{C_{n[2] \setminus v_n}}$  tales que  $h_{[2]}(S_1) = h_{[2]}(S_2)$ , entonces:

$$\begin{aligned} h_{[2]}(S_1) &= h_{[2]}(S_2) \\ S_1 - \{v_n\} &= S_2 - \{v_n\} \\ (S_1 - \{v_n\}) \cup \{v_n\} &= (S_2 - \{v_n\}) \cup \{v_n\} \\ S_1 &= S_2 \end{aligned}$$

Veamos que  $h_{[2]}$  es suprayectiva, sea  $S' \in I_{T_{n-5[2]}}$ , como  $T_{n-5[2]} \subset C_{n[2]}$ , entonces  $S' \in I_{C_{n[2]}}$  y además  $v_1, v_2, v_{n-1}, v_{n-2} \notin S'$ , por lo que  $S = S' \cup \{v_n\}$ , es independiente para  $C_{n[2]}$ , entonces

$$h_{[2]}(S) = (S' \cup \{v_n\}) \setminus \{v_n\} = S'.$$

Por tanto,  $h_{[2]}$  es biyectiva y hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $C_{n[2]}$ , que tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-5[2]}) = F_{n-5[2]}$ .

**Caso 2.** Si  $v_n \notin S$ , entonces  $S$  es un conjunto independiente para  $C_{n[2]} - \{v_n\}$ , y puesto que  $v_n \text{ ady}_{C_{n[2]}} v_1, v_2, v_{n-1}, v_{n-2}$ , entonces  $S \in I_{T_{n-1[2]}}^1$ . Por otro lado si  $S'$  es independiente para  $T_{n-1[2]}^1$ , también lo será para  $C_{n[2]}$ , de tal manera que  $v_n \notin S'$ .

Por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $C_{n[2]}$  que no tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-1[2]}^1) = F_{n-1[2]}^1$ .

Por lo tanto  $\mathcal{F}(C_{n[2]}) = F_{n-1[2]}^1 + F_{n-5[2]} = L_{n[2]}$ .

□

### 4.1.2. $C_{n[3]}$ y sus números de Fibonacci

#### Hacia la generalización

Hemos probado hasta el momento, con todo detalle que se puede decir con exactitud cuál es el número de Fibonacci de  $C_{n[2]}$ , pero para ello fue necesario definir tres sucesiones recursivas de enteros positivos y propiedades que las relacionan; así como dos subgráficas específicas de  $C_{n[2]}$  cuyo número de Fibonacci está determinado por dos de esas sucesiones; esto, para poder contar el número total de conjuntos independientes de vértices de  $C_{n[2]}$ . Creamos una partición del conjunto  $I_{C_{n[2]}} = \{S \subset V(C_{n[2]}) : S \text{ es independiente}\}$  considerando a todos aquellos conjuntos independientes  $S \in I_{C_{n[2]}}$  que tienen a un vértice  $v$  y todos los que no, y al considerar estos casos es necesario referirnos a dichas subgráficas. Este método, ha sido utilizado en todo el trabajo y es el que nos servirá para probar la generalización del problema, para cualquier salto consecutivo  $r \geq 2$ .

Aunque no es necesario incluir el caso particular  $r = 3$ , lo mostraremos a fondo para conducir de manera gradual a la generalización del problema; consideramos que es sumamente ilustrativo porque nos permite comparar el comportamiento de las sucesiones que se definen para cada caso y por ende el comportamiento de las subgráficas que tienen como número de Fibonacci las sucesiones correspondientes.

#### Las sucesiones para $C_{n[3]}$

**Definición 4.1.7.** Definimos la sucesión  $F_{i[3]}$  de manera recursiva como:

$$F_{1[3]} = 2, F_{2[3]} = 3, F_{3[3]} = 4, F_{4[3]} = 5 \text{ y } F_{n[3]} = F_{n-1[3]} + F_{n-4[3]}, n \geq 5, n \in \mathbb{Z}.$$

Al  $n$ -ésimo término de la sucesión le llamaremos  $F_{n[3]}$ .

$$2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26, 36, 50, 69, \dots$$

**Definición 4.1.8.** Definimos la sucesión  $F_{i[3]}^1$  de manera recursiva como:

$$F_{1[3]}^1 = 1, F_{2[3]}^1 = 3, F_{3[3]}^1 = 4, F_{4[3]}^1 = 5 \text{ y } F_{n[3]}^1 = F_{n-1[3]}^1 + F_{n-4[3]}^1, n \geq 5, n \in \mathbb{Z}.$$

Al  $n$ -ésimo término de la sucesión le llamaremos  $F_{n[3]}^1$ .

$$1, 3, 4, 5, 6, 9, 13, 18, 24, 33, 46, 64, \dots$$

**Definición 4.1.9.** Definimos la sucesión  $F_{i[3]}^2$  de manera recursiva como:

$$F_{1[3]}^2 = 1, F_{2[3]}^2 = 1, F_{3[3]}^2 = 4, F_{4[3]}^2 = 5 \text{ y } F_{n[3]}^2 = F_{n-1[3]}^2 + F_{n-4[3]}^2 \quad \forall n \geq 5, n \in \mathbb{Z}.$$

Al  $n$ -ésimo término de la sucesión le llamaremos  $F_{n[3]}^2$ .

$$1, 1, 4, 5, 6, 7, 11, 16, 22, 29, 40, 56, \dots$$

**Definición 4.1.10.** Definimos la sucesión  $L_{i[3]}$  de manera recursiva como:

$$L_{1[3]} = 1, L_{2[3]} = 1, L_{3[3]} = 1, L_{4[3]} = 5 \text{ y } L_{n[3]} = L_{n-1[3]} + L_{n-4[3]}, \quad n \geq 5, n \in \mathbb{Z}.$$

Al  $n$ -ésimo término de la sucesión le llamaremos  $L_{n[3]}$ .

$$1, 1, 1, 5, 6, 7, 8, 13, 19, 26, 34, 47, \dots$$

Observemos la siguiente tabla:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
$F_{n[3]}$	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50	69...
$F_{n[3]}^1$	1	3	4	5	6	9	13	18	24	33	46	64...
$F_{n[3]}^2$	1	1	4	5	6	7	11	16	22	29	40	56...
$L_{n[3]}$	1	1	1	5	6	7	8	13	19	26	34	47...

Como ya habíamos mencionado las sucesiones que acabamos de definir tienen algunas propiedades que las relacionan; observemos, de la tabla anterior que si tomamos un término  $F_{n[3]}$  y le sumamos el término  $F_{n+4[3]}$  obtendremos el término  $F_{n+5[3]}^1$  de la segunda sucesión; de la misma manera, si tomamos un término  $F_{n[3]}^1$  y le sumamos el término  $F_{n+5[3]}^1$  de la segunda sucesión, obtendremos el término  $F_{n+6[3]}^2$  de la tercera sucesión, y por último si tomamos un término  $F_{n[3]}^2$  y le sumamos el término  $F_{n+6[3]}^2$  de la tercera sucesión, obtendremos el término  $L_{n+7[3]}$  de la cuarta sucesión; probaremos a continuación que, en efecto, estas propiedades son ciertas. Notemos también que hemos definido una sucesión más que en el caso  $r = 2$ .

**Proposición 4.1.3.**  $F_{n[3]}^1 = F_{n-1[3]} + F_{n-5[3]}$  para toda  $n \geq 6$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 6$ ,  $F_{5[3]} + F_{1[3]} = 7 + 2 = 9 = F_{6[3]}^1$

Supongamos que la igualdad se cumple para toda  $6 \leq k < n$ , veamos que también se cumple para  $n$ :

$$\begin{aligned} F_{n[3]}^1 &= F_{n-1[3]}^1 + F_{n-4[3]}^1 \\ &= (F_{n-2[3]} + F_{n-6[3]}) + (F_{n-5[3]} + F_{n-9[3]}) \\ &= (F_{n-2[3]} + F_{n-5[3]}) + (F_{n-6[3]} + F_{n-9[3]}) \\ &= F_{n-1[3]} + F_{n-5[3]} \end{aligned}$$

□

**Proposición 4.1.4.**  $F_{n[3]}^2 = F_{n-1[3]}^1 + F_{n-6[3]}$  para toda  $n \geq 7$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 7$ ,  $F_{6[3]}^1 + F_{1[3]} = 9 + 2 = 11 = F_{7[3]}^2$

Supongamos que la igualdad se cumple para toda  $7 \leq k < n$ , veamos que también se cumple para  $n$ :

$$\begin{aligned} F_{n[3]}^2 &= F_{n-1[3]}^2 + F_{n-4[3]}^2 \\ &= (F_{n-2[3]}^1 + F_{n-7[3]}) + (F_{n-5[3]}^1 + F_{n-10[3]}) \\ &= (F_{n-2[3]}^1 + F_{n-5[3]}^1) + (F_{n-7[3]} + F_{n-10[3]}) \\ &= F_{n-1[3]}^1 + F_{n-6[3]} \end{aligned}$$

□

**Proposición 4.1.5.**  $L_{n[3]} = F_{n-1[3]}^2 + F_{n-7[3]}$ , para toda  $n \geq 8$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 8$ ,  $F_{7[2]}^2 + F_{1[3]} = 11 + 2 = 13 = L_{8[3]}$

Supongamos que la igualdad se cumple para toda  $8 \leq k < n$ , veamos que también se cumple para  $n$ :

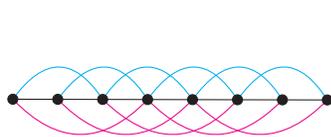
$$\begin{aligned}
 L_{n[3]} &= L_{n-1[3]} + L_{n-4[3]} \\
 &= \left( F_{n-2[3]}^2 + F_{n-8[3]} \right) + \left( F_{n-5[3]}^2 + F_{n-11[3]} \right) \\
 &= \left( F_{n-2[3]}^2 + F_{n-5[3]}^2 \right) + \left( F_{n-8[3]} + F_{n-11[3]} \right) \\
 &= F_{n-1[3]}^2 + F_{n-7[3]}
 \end{aligned}$$

□

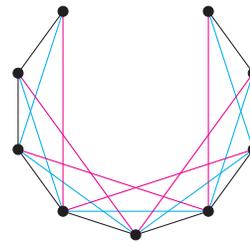
### Las trayectorias saltarinas para $C_{n[3]}$

Las sucesiones que acabamos de definir determinarán los números de Fibonacci de  $C_{n[3]}$ , así como los de ciertas subgráficas específicas de  $C_{n[3]}$  que se obtendrán al considerar la partición anteriormente mencionada. Dichas subgráficas se describen a continuación.

**Definición 4.1.11.** Sea  $T_{n[3]} = T_n \cup \{xy : 2 \leq d_{T_n}(x, y) \leq 3\}$  la trayectoria de orden  $n$  y salto  $(1, 2, 3)$ .

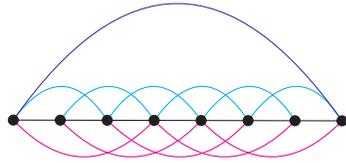


(a)  $T_{8[3]}$

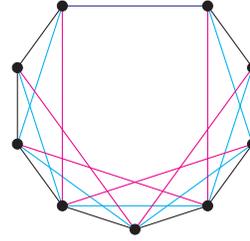


(b)  $T_{9[3]}$

**Definición 4.1.12.** Sea  $T_{n[3]}^1 = T_{n[3]} \cup \{xy : d_{T_n}(x, y) = n - 1\}$  la trayectoria de orden  $n$  y salto  $(1, 2, 3, n - 1)$ .

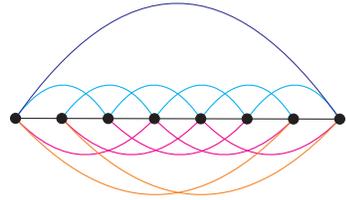


(a)  $T_{8[3]}^1$

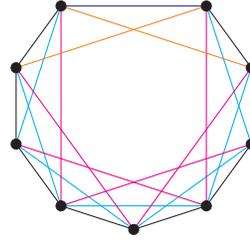


(b)  $T_{9[3]}^1$

**Definición 4.1.13.** Sea  $T_{n[3]}^2 = T_{n[3]}^1 \cup \{xy : d_{T_n}(x, y) = n - 2\}$  la trayectoria de orden  $n$  y salto  $(1, 2, 3, n - 1, n - 2)$ .



(a)  $T_{8[3]}^2$



(b)  $T_{9[3]}^2$

Se observa claramente que se define una subgráfica más de  $C_{n[3]}$  que en el caso  $r = 2$ , como sucedió con las sucesiones, ya que de manera correspondiente  $T_{n[3]}$  estará asociada a la sucesión  $F_{n[3]}$ ,  $T_{n[3]}^1$  a la  $F_{n[3]}^1$ ,  $T_{n[3]}^2$  a la  $F_{n[3]}^2$  y por supuesto  $C_{n[3]}$  estará asociada a la sucesión  $L_{n[3]}$ . Es por esto mismo que se eligió esta notación.

### 4.1.3. Los teoremas para $C_{n[3]}$

Hasta el momento, hemos construido todas las sucesiones, sus propiedades y subgráficas de  $C_{n[3]}$  que utilizaremos para contar el número total de conjuntos independientes de  $C_{n[3]}$ , así como los de dichas subgráficas. Recordemos que en todas las pruebas utilizamos una partición específica del conjunto cuyos elementos son todos aquellos conjuntos de vértices independientes de la gráfica, por lo que todas las pruebas son similares, sin embargo las escribiremos a detalle.

Recordemos la notación: Si  $G$  es una gráfica, entonces  $I_G = \{S \subset V(G) : S \text{ es independiente}\}$ ; ahora, si tomamos cualquier vértice de la gráfica  $v$  y consideramos los conjuntos  $I_{G_\epsilon} = \{S \in I_G : v \in S\}$  y  $I_{G_\notin} = \{S \in I_G : v \notin S\}$ , estos conjuntos nos generan dicha partición de  $I_G$ .

**Teorema 4.1.4.** *Sea  $T_{n[3]}$ , entonces  $\mathcal{F}(T_{n[3]}) = F_{n[3]}$ , para toda  $n \in \mathbb{Z}^+$ .*

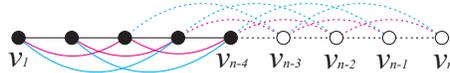
*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 1$ , entonces  $T_{1[3]} = K_1$  y  $\mathcal{F}(K_1) = 2 = F_{1[3]}$ .  
 Si  $n = 2$ , entonces  $T_{2[3]} = K_2$  y  $\mathcal{F}(K_2) = 3 = F_{2[3]}$ .  
 Si  $n = 3$ , entonces  $T_{3[3]} = K_3$  y  $\mathcal{F}(K_3) = 4 = F_{3[3]}$ .  
 Si  $n = 4$ , entonces  $T_{4[3]} = K_4$  y  $\mathcal{F}(K_4) = 5 = F_{4[3]}$ .

Supongamos que cumple para toda  $4 < k < n$ , veamos que cumple para  $n$ .

Sea  $T_{n[3]}$ , con  $n \geq 5$  y  $v_n \in V(T_{n[3]})$  el vértice final de  $T_n$  y sea  $S \subset V(T_{n[3]})$  independiente, entonces debemos considerar dos casos:

**Caso 1.** Si  $v_n \in S$ , entonces  $v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3} \notin S$ , pues  $v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3} \text{ ady}_{T_{n[3]}} v_n$ .



Consideremos la siguiente función:

$$g_{[3]} : I_{T_{n[3]e}} \rightarrow I_{T_{n-4[3]}}, \text{ tal que } g_{[3]}(S) = S - \{v_n\}.$$

Veamos que es inyectiva:

Sean  $S_1, S_2 \in I_{T_{n[3]e}}$ , tales que  $g_{[3]}(S_1) = g_{[3]}(S_2)$ , entonces

$$\begin{aligned} g_{[3]}(S_1) &= g_{[3]}(S_2) \\ S_1 - \{v_n\} &= S_2 - \{v_n\} \\ (S_1 - \{v_n\}) \cup \{v_n\} &= (S_2 - \{v_n\}) \cup \{v_n\} \\ S_1 &= S_2 \end{aligned}$$

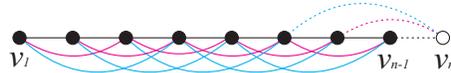
Veamos que es suprayectiva:

Sea  $S' \in I_{T_{n-4[3]}}$ , como  $T_{n-4[3]} \subset T_{n[3]}$ , entonces  $I_{T_{n-4[3]}} \subset I_{T_{n[3]}}$  y además  $v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3} \notin S'$ , entonces, si consideramos a  $S = S' \cup \{v_n\}$ ,  $S \in I_{T_{n[3]}}$ , se tiene que

$$g_{[3]}(S) = S - \{v_n\} = (S' \cup \{v_n\}) - \{v_n\} = S'.$$

Por tanto,  $g_{[3]}$  es biyectiva y hay tantos conjuntos independientes de vértices de  $T_{n[3]}$ , que tienen a  $v_n$  como  $\mathcal{F}(T_{n-4[3]})$ , que por hipótesis de inducción es  $F_{n-4[3]}$ .

**Caso 2.** Si  $v_n \notin S$ , entonces  $S$  es independiente para  $T_{n[3]} \setminus \{v_n\}$ , por lo que  $S \in I_{T_{n-1[3]}}$ ; por otro lado, si  $S'$  es un conjunto independiente de vértices para  $T_{n-1[3]}$ , lo será también para  $T_{n[3]}$  de tal forma que  $v_n \notin S'$ .



Por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[3]}$ , que no tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-1[3]})$ , que por hipótesis de inducción es  $F_{n-1[3]}$ .

Por lo tanto  $\mathcal{F}(T_{n[3]}) = F_{n-1[3]} + F_{n-4[3]} = F_{n[3]}$ . □

**Teorema 4.1.5.** *Sea  $T_{n[3]}^1$ , entonces  $\mathcal{F}(T_{n[3]}^1) = F_{n[3]}^1$ , para toda  $n \geq 2$ .*

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 2$ , entonces  $T_{2[3]}^1 = K_2$  y  $\mathcal{F}(K_2) = 3 = F_{2[3]}^1$ .

Si  $n = 3$ , entonces  $T_{3[3]}^1 = K_3$  y  $\mathcal{F}(K_3) = 4 = F_{3[3]}^1$ .

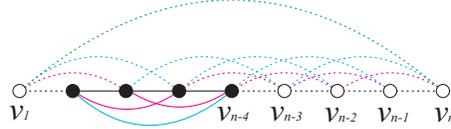
Si  $n = 4$ , entonces  $T_{4[3]}^1 = K_4$  y  $\mathcal{F}(K_4) = 5 = F_{4[3]}^1$ .

Si  $n = 5$ , entonces  $T_{5[3]}^1 = K_5$  y  $\mathcal{F}(K_5) = 6 = F_{5[3]}^1$ .

Supongamos que cumple para toda  $5 < k < n$ , veamos que cumple para  $n$ .

Sea  $T_{n[3]}^1$ , con  $n \geq 6$  y sea  $v_n \in V(T_{n[3]}^1)$ , el vértice final de  $T_n$ , y sea  $S \subset V(T_{n[3]}^1)$  independiente, entonces tenemos dos casos:

**Caso 1.** Si  $v_n \in S$ , entonces  $v_1, v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3} \notin S$ , ya que  $v_1, v_{n-1}, v_{n-2}$  y  $v_{n-3}$  son no adyacentes a  $v_n$  en  $T_{n[3]}^1$ .



Consideremos la siguiente función:

$$g_{[3]}^1 : I_{T_{n[3]}^1} \rightarrow I_{T_{n-5[3]}^1}, \text{ tal que } g_{[3]}^1(S) = S - \{v_n\}.$$

Veamos que  $g_{[3]}^1$  es inyectiva:

Sean  $S_1, S_2 \in I_{T_{n[3]}^1}$ , tales que  $g_{[3]}^1(S_1) = g_{[3]}^1(S_2)$ , entonces:

$$\begin{aligned} g_{[3]}^1(S_1) &= g_{[3]}^1(S_2) \\ S_1 - \{v_n\} &= S_2 - \{v_n\} \\ S_1 &= S_2 \end{aligned}$$

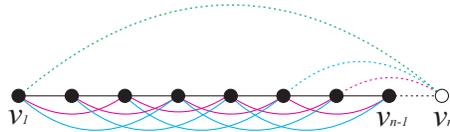
Veamos que  $g_{[3]}^1$  es suprayectiva:

Sea  $S' \in I_{T_{n-5[3]}}$ , como  $T_{n-5[3]} \subset T_{n[3]}^1$ , entonces  $S' \in I_{T_{n[3]}^1}$  y además  $v_1, v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3} \notin S'$ , por lo que  $S = S' \cup \{v_n\}$  es independiente para  $T_{n[3]}^1$ , entonces

$$g_{[3]}^1(S) = (S' \cup \{v_n\}) \setminus \{v_n\} = S'.$$

Por tanto,  $g_{[3]}^1$  es biyectiva y hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[3]}^1$ , que tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-5[3]}) = F_{n-5[3]}$ .

**Caso 2.** Si  $v_n \notin S$ , entonces  $S$  es un conjunto independiente para  $T_{n[3]}^1 - \{v_n\}$ , por lo que  $S \in I_{T_{n-1[3]}}$ . Por otro lado si  $S'$  es independiente para  $T_{n-1[3]}$ , también lo será para  $T_{n[3]}^1$ , de tal manera que  $v_n \notin S'$ .



Por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[3]}^1$  que no tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-1[3]}) = F_{n-1[3]}$ .

Por lo tanto  $\mathcal{F}(T_{n[3]}^1) = F_{n-1[3]} + F_{n-5[3]} = F_{n[3]}^1$ .

□

**Teorema 4.1.6.** Sea  $T_{n[3]}^2$ , entonces  $\mathcal{F}(T_{n[3]}^2) = F_{n[3]}^2$ , para toda  $n \geq 3$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 3$ , entonces  $T_{3[3]}^2 = K_3$  y  $\mathcal{F}(K_3) = 4 = F_{3[3]}^2$ .

Si  $n = 4$ , entonces  $T_{4[3]}^2 = K_4$  y  $\mathcal{F}(K_4) = 5 = F_{4[3]}^2$ .

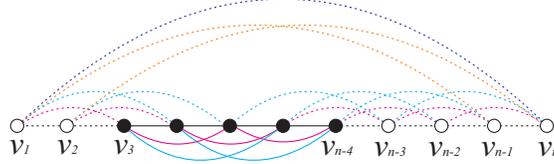
Si  $n = 5$ , entonces  $T_{5[3]}^2 = K_5$  y  $\mathcal{F}(K_5) = 6 = F_{5[3]}^2$ .

Si  $n = 6$ , entonces  $T_{6[3]}^2 = K_6$  y  $\mathcal{F}(K_6) = 7 = F_{6[3]}^2$ .

Supongamos que cumple para toda  $6 < k < n$ , veamos que cumple para  $n$ .

Sea  $T_{n[3]}^2$ , con  $n \geq 7$  y sea  $v_n \in V(T_{n[3]}^2)$ , el vértice final de  $T_n$ , y sea  $S \subset V(T_{n[3]}^2)$  independiente, entonces tenemos dos casos:

**Caso 1.** Si  $v_n \in S$ , entonces  $v_1, v_2, v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3} \notin S$ , ya que  $v_1, v_2, v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3} \text{ ady}_{T_{n[3]}^2} v_n$ .



Consideremos la siguiente función:

$$g_{[3]}^2 : I_{T_{n[3]}^2} \rightarrow I_{T_{n-6[3]}^2}, \text{ tal que } g_{[3]}^2(S) = S - \{v_n\}.$$

Veamos que  $g_{[3]}^2$  es inyectiva:

Sean  $S_1, S_2 \in I_{T_{n[3]}^2}$ , tales que  $g_{[3]}^2(S_1) = g_{[3]}^2(S_2)$ , entonces:

$$\begin{aligned} g_{[3]}^2(S_1) &= g_{[3]}^2(S_2) \\ S_1 - \{v_n\} &= S_2 - \{v_n\} \\ S_1 &= S_2 \end{aligned}$$

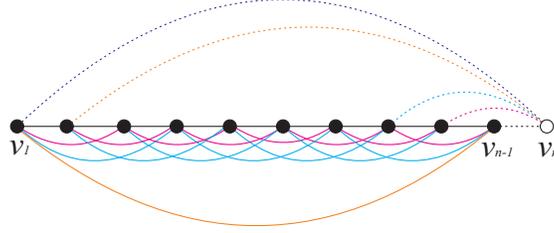
Veamos que  $g_{[3]}^2$  es suprayectiva:

Sea  $S' \in I_{T_{n-6[3]}}$ , como  $T_{n-6[3]} \subset T_{n[3]}^2$ , entonces  $S' \in I_{T_{n[3]}^2}$  y además  $v_1, v_2, v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3} \notin S'$ , por lo que  $S = S' \cup \{v_n\}$ , es independiente para  $T_{n[3]}^2$ , entonces

$$g_{[3]}^2(S) = (S' \cup \{v_n\}) \setminus \{v_n\} = S'.$$

Por tanto,  $g_{[3]}^2$  es biyectiva y hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[3]}^2$ , que tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-6[3]}) = F_{n-6[3]}$ .

**Caso 2.** Si  $v_n \notin S$ , entonces  $S$  es un conjunto independiente para  $T_{n[3]}^2 - \{v_n\}$ , por lo que  $S \in I_{T_{n-1[3]}^1}$ . Por otro lado si  $S'$  es independiente para  $T_{n-1[3]}^1$ , también lo será para  $T_{n[3]}^2$ , de tal manera que  $v_n \notin S'$ .



Por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[3]}^2$  que no tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-1[3]}^1) = F_{n-1[3]}^1$ .

Por lo tanto  $\mathcal{F}(T_{n[3]}^2) = F_{n-1[3]}^1 + F_{n-6[3]} = F_{n[3]}^2$ .

□

Todos los conceptos que hemos definido y resultados que hemos probado hasta en momento, en esta sección, son las herramientas necesarias para probar el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.7.** Sea  $C_{n[3]}$ , entonces  $\mathcal{F}(C_{n[3]}) = L_{n[3]}$ , para toda  $n \geq 4$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 4$ , entonces  $C_{4[3]} = K_4$  y  $\mathcal{F}(K_4) = 5 = L_{4[3]}$ .

Si  $n = 5$ , entonces  $C_{5[3]} = K_5$  y  $\mathcal{F}(K_5) = 6 = L_{5[3]}$ .

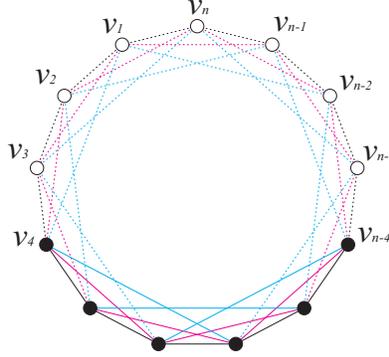
Si  $n = 6$ , entonces  $C_{6[3]} = K_6$  y  $\mathcal{F}(K_6) = 7 = L_{6[3]}$ .

Si  $n = 7$ , entonces  $C_{7[3]} = K_7$  y  $\mathcal{F}(K_7) = 8 = L_{7[3]}$ .

Supongamos que cumple para toda  $7 < k < n$ , veamos que cumple para  $n$ .

Sea  $C_{n[2]}$ , con  $n \geq 8$  y sea  $v \in V(C_{n[3]})$  cualquier vértice, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $v = v_n$ . Sea  $S$  un conjunto independiente de vértices para  $C_{n[3]}$ , entonces debemos considerar dos casos:

**Caso 1.** Si  $v_n \in S$ , entonces  $v_1, v_2, v_3, v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3} \notin S$ , puesto que estos vértices son adyacentes a  $v_n$  en  $C_{n[3]}$  y  $S$  es independiente.



Consideremos la siguiente función:

$$h_{[3]} : I_{C_{n[3]}\epsilon} \rightarrow I_{T_{n-7[3]}}, \text{ tal que } h_{[3]}(S) = S - \{v_n\}.$$

Veamos que  $h_{[3]}$  es inyectiva:

Sean  $S_1, S_2 \in I_{C_{n[3]}\epsilon}$  tales que  $h_{[3]}(S_1) = h_{[3]}(S_2)$ , entonces:

$$\begin{aligned} h_{[3]}(S_1) &= h_{[3]}(S_2) \\ S_1 - \{v_n\} &= S_2 - \{v_n\} \\ (S_1 - \{v_n\}) \cup \{v_n\} &= (S_2 - \{v_n\}) \cup \{v_n\} \\ S_1 &= S_2 \end{aligned}$$

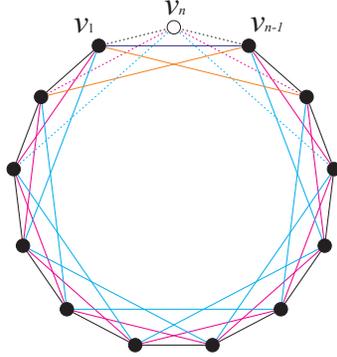
Veamos que  $h_{[3]}$  es suprayectiva:

Sea  $S' \in I_{T_{n-7[3]}}$ , como  $T_{n-7[3]} \subset C_{n[3]}$ , entonces  $S' \in I_{C_{n[3]}}$  y además  $v_1, v_2, v_3, v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3} \notin S'$ , por lo que  $S = S' \cup \{v_n\}$ , es independiente para  $C_{n[3]}$ , entonces

$$h_{[3]}(S) = (S' \cup \{v_n\}) \setminus \{v_n\} = S'.$$

Por tanto,  $h_{[3]}$  es biyectiva y hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $C_{n[3]}$ , que tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-7[3]}) = F_{n-7[3]}$ .

**Caso 2.** Si  $v_n \notin S$ , entonces  $S$  es un conjunto independiente para  $C_{n[3]} - \{v_n\}$ , por lo que  $S \in I_{T_{n-1[3]}}^2$ . Por otro lado si  $S'$  es independiente para  $T_{n-1[3]}^2$ , también lo será para  $C_{n[3]}$ , de tal manera que  $v_n \notin S'$ .



Por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $C_{n[3]}$  que no tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-1[3]}^2) = F_{n-1[3]}^2$ .

Por lo tanto  $\mathcal{F}(C_{n[3]}) = F_{n-1[3]}^2 + F_{n-7[3]} = L_{n[3]}$ .

□

## 4.2. La generalización

### 4.2.1. Las sucesiones

Queremos dar una generalización de los resultados de los casos  $r = 2$  y  $r = 3$  a cualquier  $r \in \mathbb{Z}^+$ ,  $r \geq 2$ , y para ello es necesario definir con sumo cuidado las sucesiones necesarias que se utilizan en la prueba del caso general. Para ello, observemos comparativamente el comportamiento de las sucesiones definidas en los casos  $r = 2$  y  $r = 3$ :

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
$F_{n[2]}$	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88	129...
$F_{n[2]}^1$	1	3	4	5	8	12	17	25	37	54	79	116...
$L_{n[2]}$	1	1	4	5	6	10	15	21	31	46	67	98...

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
$F_{n[3]}$	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50	69...
$F_{n[3]}^1$	1	3	4	5	6	9	13	18	24	33	46	64...
$F_{n[3]}^2$	1	1	4	5	6	7	11	16	22	29	40	56...
$L_{n[3]}$	1	1	1	5	6	7	8	13	19	26	34	47...

Notemos que al comparar la primer sucesión correspondiente a cada tabla y de cómo se definieron en cada caso, obtenemos que

$$F_{n[2]} = \begin{cases} n + 1 & \text{si } n \in \{1, 2, 3\} \\ F_{n-1[2]} + F_{n-3[2]} & \text{si } n \geq 4 \end{cases} \quad \& \quad F_{n[3]} = \begin{cases} n + 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, 4\} \\ F_{n-1[3]} + F_{n-4[3]} & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

de esto, es natural pensar que para el caso general se puede definir a la sucesión  $F_n[r]$  de la siguiente manera:

$$F_{n[r]} = \begin{cases} n + 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, r + 1\} \\ F_{n-1[r]} + F_{n-(r+1)[r]} & \text{si } n \geq r + 2 \end{cases}$$

Ahora, necesitamos definir el resto de las sucesiones. A la sucesión  $L_{i_{[r]}}$  la nombraremos también como  $F_{i_{[r]}}^r$ . De comparar el comportamiento de las sucesiones en los casos  $r = 2$  y  $r = 3$  obtuvimos que:

Para  $r = 2$ ,  $k = 1, 2$  y para  $r = 3$ ,  $k = 1, 2, 3$ ; además

$$F_{n_{[2]}}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, 3\} \\ F_{n-1_{[2]}}^k + F_{n-3_{[2]}}^k & \text{si } n \geq 4 \end{cases} \quad \& \quad F_{n_{[3]}}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, 4\} \\ F_{n-1_{[3]}}^k + F_{n-4_{[3]}}^k & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

Es decir, para una  $r$  fija y una  $n \geq r + 2$ , el término  $F_{n_{[r]}}^k$ , donde  $k$  varía entre 1 y  $r$ , se puede obtener sumando el término anterior de dicha sucesión con el  $r + 1$ -término anterior de la misma sucesión; por ejemplo, para  $r = 3$  con  $k = 2$ , cualquier término de la sucesión  $F_{n_{[3]}}^2$  con  $n \geq 4$ , digamos  $n = 11$  se tiene que,  $F_{11_{[3]}}^2 = 40 = 29 + 11 = F_{10_{[3]}}^2 + F_{7_{[3]}}^2$ .

En general podemos conjeturar que para alguna  $r \in \mathbb{Z}^+$ ,  $r \geq 2$  y fija  $k = 1, \dots, r$  tenemos que

$$F_{n_{[r]}}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, r + 1\} \\ F_{n-1_{[r]}}^k + F_{n-(r+1)_{[r]}}^k & \text{si } n \geq r + 2 \end{cases}$$

Notemos que esta propiedad que obtuvimos de observar el comportamiento de las tablas de los casos  $r = 2$  y  $r = 3$ , determinan los términos de las sucesiones  $F_{n_{[r]}}^k$  en el renglón  $k$ , independientemente del resto de las sucesiones, por eso de manera informal, durante el proceso de investigación nos referimos a esta propiedad como *la propiedad por renglones*.

Por otro lado, si observamos la distancia que hay entre dos términos de las tablas, vistos de manera diagonal, notaremos que dicha distancia es invariante entre los términos de esa diagonal, a partir de ciertas  $n$ ; por ejemplo:

$$\begin{aligned} F_{1_{[3]}} + F_{5_{[3]}} &= 2 + 7 = 9 = F_{8_{[3]}}^1, \\ F_{1_{[3]}} + F_{8_{[3]}}^1 &= 2 + 9 = 11 = F_{9_{[3]}}^2, \\ F_{1_{[3]}} + F_{9_{[3]}}^2 &= 2 + 11 = 13 = F_{10_{[3]}}^3. \end{aligned}$$

Este comportamiento que poseen las tablas de las sucesiones, por diagonales, se probaron como propiedades en los casos  $r = 2$  y  $r = 3$  y se describen de la siguiente manera:

Para  $r = 2$ ,  $k = 1, 2$  y para  $r = 3$ ,  $k = 1, 2, 3$ ; además

$$F_{n_{[2]}}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, k + 3\} \\ F_{n-1_{[2]}}^{k-1} + F_{n-(k+3)_{[2]}} & \text{si } n \geq k + 4 \end{cases} \quad \& \quad F_{n_{[3]}}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, k + 4\} \\ F_{n-1_{[3]}}^{k-1} + F_{n-(k+4)_{[3]}} & \text{si } n \geq k + 5 \end{cases}$$

y proponemos que si  $k = 1$ , entonces

$$F_{n_{[2]}}^{k-1} = F_{n_{[2]}}^0 = F_{n_{[2]}} \quad \text{y} \quad F_{n_{[3]}}^{k-1} = F_{n_{[3]}}^0 = F_{n_{[3]}}.$$

En general podemos conjeturar que para alguna  $r \in \mathbb{Z}^+$ ,  $r \geq 2$  y fija  $k = 1, \dots, r$  y que

$$F_{n_{[r]}}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, r + k + 1\} \\ F_{n-1_{[r]}}^{k-1} + F_{n-(r+k+1)_{[r]}} & \text{si } n \geq r + k + 2. \end{cases}$$

Observemos que el comportamiento que tiene esta propiedad nos determina los términos de las sucesiones  $F_{n_{[r]}}^k$  en términos de  $F_{n-1_{[r]}}^{k-1}$  y  $F_{n-(r+k+1)_{[r]}}$  para cualquier  $n \geq r + k + 2$ ; es decir, a partir de esta propiedad se puede construir la tabla del caso general  $r$ , de manera recursiva en función de los términos anteriores sobre su diagonal, es por ello que del mismo modo que *la propiedad por renglones*, hemos nombrado de manera informal a esta propiedad como *la propiedad por diagonales*.

Estas dos propiedades son muy importantes, ya que son las que utilizamos en las pruebas del caso general. De manera intuitiva durante el proceso de investigación tratamos de inducir una usando la otra como definición, lo cual nos generó algunos problemas, ya que de *la propiedad por renglones* no es posible llegar a *la propiedad por diagonales* puesto que en la primera el renglón es fijo y no pudimos decir con certeza qué pasaba para valores de  $n$  mayores a  $r + k + 2$ . De manera similar tampoco pudimos probar *la propiedad*

por renglones a partir de la *propiedad por diagonales* tomando la segunda como definición, al intentarlo pudimos probarla para  $1 \leq n \leq r+k+1$ , pero tampoco pudimos decir con certeza lo que pasaba para  $n \geq r+k+2$ . Por esto fue necesario encontrar otras propiedades que nos dieran la oportunidad de transitar sobre los términos de las sucesiones de otro modo, y encontramos las siguientes propiedades que explicaremos a detalle.

Tomemos un ejemplo de la *propiedad por diagonales* para el caso  $r = 3$ :

$$\begin{aligned} F_{5[3]} + F_{9[3]} &= 7 + 26 = 33 = F_{10[3]}^1 \\ F_{5[3]} + F_{10[3]}^1 &= 7 + 33 = 40 = F_{11[3]}^2 \\ F_{5[3]} + F_{11[3]}^2 &= 7 + 40 = 47 = F_{12[3]}^3 \end{aligned}$$

Dado que  $F_{5[3]} = F_{10[3]}^1 - F_{9[3]} = F_{11[3]}^2 - F_{10[3]}^1 = F_{12[3]}^3 - F_{11[3]}^2$ , entonces

$$\begin{aligned} F_{12[3]}^3 &= 3F_{5[3]} + F_{9[3]} \\ F_{11[3]}^2 &= 2F_{5[3]} + F_{9[3]} \\ F_{10[3]}^1 &= F_{5[3]} + F_{9[3]} \end{aligned}$$

esto sucede como una consecuencia de la *propiedad por diagonales* ya que para las  $n \geq r+k+2$  la distancia entre un término y el consecutivo anterior es invariante sobre su diagonal y es de hecho un término de la sucesión  $F_{i[r]}$  para alguna  $r$  fija, a saber,  $F_{n-(r+k+1)[r]}$ , entonces la distancia que habrá entre dicho término  $F_{n[r]}^k$  y  $F_{n-k[r]}$  será un múltiplo de  $F_{n-(r+k+1)[r]}$ , dicho múltiplo es precisamente  $k$ , puesto que es el número de renglones que hay entre  $F_{n[r]}^k$  y  $F_{n-k[r]}$  sobre su diagonal.

En términos generales se puede describir esta propiedad de la siguiente manera:

$$F_{n[r]}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n+1 & \text{si } n \in \{k+1, \dots, r+k+1\} \\ F_{n-k[r]} + kF_{n-(r+k+1)[r]} & \text{si } n \geq r+k+2 \end{cases}$$

Probaremos que esta propiedad resulta ser equivalente a la *propiedad por diagonales* y nos permite saber con certeza como son los términos de las sucesiones  $F_{n[r]}^k$ , para las  $n \geq r+k+2$  en términos únicamente de la sucesión  $F_{n[r]}$ , la cual a su vez está definida en términos de ella misma, por lo que esta equivalencia sí nos permite inducir la *propiedad por renglones* tomando la *propiedad por diagonales* como definición.

Aunque hasta aquí las propiedades que hemos analizado basadas en el comportamiento de las tablas son suficientes para probar el resultado que nos hemos propuesto en este trabajo respecto al número total de conjuntos independientes de cierta familia de gráficas; durante el proceso de investigación no llegamos de manera inmediata a la propiedad equivalente a la *propiedad por diagonales*. Al principio tratamos de encontrar algún comportamiento patrón entre los términos de las sucesiones vistos por columnas y después de analizar las tablas de las sucesiones obtuvimos otra propiedad, la cual nombramos de manera informal la *propiedad por columnas*. Su forma general es la siguiente:

$$F_{n[r]}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, r + k + 1\} \\ F_{n[r]}^{k-1} - k & \text{si } n \in \{r + k + 2, \dots, 2r + k + 1\} \\ F_{n[r]}^{k-1} - kF_{n-(2r+k+1)} & \text{si } n \geq 2r + k + 2 \end{cases}$$

Esta propiedad es menos intuitiva que las anteriores. Observamos las distancias que hay entre los términos de las sucesiones de un renglón a otro consecutivo sobre la misma columna a partir de cierta  $n$ ; es decir, tomamos un término  $F_{n[r]}^k$  y lo comparamos con el término  $F_{n[r]}^{k-1}$  para las  $n \geq r+k+2$  y notamos que para los valores de  $n$  entre  $r+k+2$  y  $2r+k+1$  la distancia es  $k$ , mientras que para  $n \geq 2r+k+2$  la distancia entre  $F_{n[r]}^k$  y  $F_{n[r]}^{k-1}$  es un múltiplo de  $F_{n-(2r+k+1)[r]}$ , la razón de este comportamiento será más claro cuando realicemos la prueba, puesto que esta propiedad es consecuencia de las propiedades anteriores en conjunto. Veamos algunos ejemplos con  $r = 3$ :

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
$F_{n[3]}$	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50	69...
$F_{n[3]}^1$	1	3	4	5	6	9	13	18	24	33	46	64...
$F_{n[3]}^2$	1	1	4	5	6	7	11	16	22	29	40	56...
$L_{n[3]}$	1	1	1	5	6	7	8	13	19	26	34	47...

Si  $n = 8$ ,

$$F_{8[3]} - F_{8[3]}^1 = 19 - 18 = 1$$

$$F_{8[3]}^1 - F_{8[3]}^2 = 18 - 16 = 2$$

$$F_{8[3]}^2 - F_{8[3]}^3 = 16 - 13 = 3$$

en este caso  $n$  está entre  $r + k + 2$  y  $2r + k + 1$  para toda  $k = 1, 2, 3$ .

Si  $n = 12$ ,

$$F_{12[3]} - F_{12[3]}^1 = 69 - 64 = 5 = F_{4[3]}$$

$$F_{12[3]}^1 - F_{12[3]}^2 = 64 - 56 = 8 = 2F_{3[3]}$$

$$F_{12[3]}^2 - F_{12[3]}^3 = 56 - 47 = 9 = 3F_{2[3]}$$

en este caso  $n \geq 2r + k + 2$  para toda  $k = 1, 2, 3$ .

Entonces, si conocemos la distancia entre  $F_{n[r]}^k$  y  $F_{n[r]}^{k-1}$ , es posible determinar la distancia entre  $F_{n[r]}^k$  y  $F_{n[r]}$  para toda  $k \geq r + k + 2$ , como una consecuencia de la *propiedad por renglones*, basta sumar las distancias que hay entre  $F_{n[r]}^i$  y  $F_{n[r]}^{i-1}$  para toda  $i = 1, \dots, k$ ; es decir, tendremos la siguiente propiedad como corolario de la *propiedad por renglones*:

$$F_{n[r]}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, r + k + 1\} \\ F_{n[r]} - \sum_{i=1}^k i & \text{si } n = r + k + 2, \dots, 2r + k + 1 \\ F_{n[r]} - \sum_{i=1}^k i F_{n-(2r+i+1)} & \text{si } n \geq 2r + k + 2 \end{cases}$$

En resumen, para el caso general, las propiedades que tomaremos como definiciones para probar las demás son:

$$F_{n[r]} = \begin{cases} n + 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, r + 1\} \\ F_{n-1[r]} + F_{n-(r+1)[r]} & \text{si } n \geq r + 2 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$F_{n[r]}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, r + k + 1\} \\ F_{n-k[r]} + kF_{n-(r+k+1)[r]} & \text{si } n \geq r + k + 2 \end{cases} \quad (4.2)$$

y con ellas probaremos las siguientes propiedades.

$$F_{n[r]}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, r + k + 1\} \\ F_{n-1[r]}^{k-1} + F_{n-(r+k+1)[r]} & \text{si } n \geq r + k + 2 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$F_{n[r]}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, r + 1\} \\ F_{n-1[r]}^k + F_{n-(r+1)[r]}^k & \text{si } n \geq r + 2 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$F_{n[r]}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, r + k + 1\} \\ F_{n[r]}^{k-1} - k & \text{si } n \in \{r + k + 2, \dots, 2r + k + 1\} \\ F_{n[r]}^{k-1} - kF_{n-(2r+k+1)} & \text{si } n \geq 2r + k + 2 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$F_{n[r]}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, r + k + 1\} \\ F_{n[r]} - \sum_{i=1}^k i & \text{si } n \in \{r + k + 2, \dots, 2r + k + 1\} \\ F_{n[r]} - \sum_{i=1}^k iF_{n-(2r+i+1)} & \text{si } n \geq 2r + k + 2 \end{cases} \quad (4.6)$$

### 4.2.2. Las Pruebas

**Definición 4.2.1.** Sean  $r \in \mathbb{Z}^+$  y  $1 \leq k \leq r$ , definimos de manera recursiva las siguientes sucesiones:

$$F_{n[r]} = \begin{cases} n + 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, r + 1\} \\ F_{n-1[r]} + F_{n-(r+1)[r]} & \text{si } n \geq r + 2 \end{cases}$$

$$F_{n[r]}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, r + k + 1\} \\ F_{n-k[r]} + kF_{n-(r+k+1)[r]} & \text{si } n \geq r + k + 2 \end{cases}$$

**Teorema 4.2.1.**

$$F_{n[r]}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, r + k + 1\} \\ F_{n-k[r]} + kF_{n-(r+k+1)[r]} & \text{si } n \geq r + k + 2 \end{cases}$$

si y sólo si

$$F_{n[r]}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, k\} \\ n + 1 & \text{si } n \in \{k + 1, \dots, r + k + 1\} \\ F_{n-1[r]}^{k-1} + F_{n-(r+k+1)[r]} & \text{si } n \geq r + k + 2 \end{cases}$$

*Demostración.* Basta ver que

$$F_{n-k[r]} + kF_{n-(r+k+1)[r]} = F_{n-1[r]}^{k-1} + F_{n-(r+k+1)[r]} \text{ para toda } n \geq r + k + 2.$$

Por inducción sobre  $k$ .

Supongamos que  $F_{n[r]}^k = F_{n-k[r]} + kF_{n-(r+k+1)[r]}$ . Si  $k = 1$ , entonces

$$F_{n[r]}^1 = F_{n-1[r]} + (1)F_{n-(r+2)[r]} = F_{n-1[r]}^0 + F_{n-(r+2)[r]}$$

Supongamos que el resultado se cumple para toda  $1 \leq l < k$ , veamos que se cumple para  $k$ .

Como  $n \geq r + k + 2$  entonces  $n - 1 \geq r + k + 1 = r + (k - 1) + 2$ ,

$$\begin{aligned} F_{n-1[r]}^{k-1} &= F_{(n-1)-(k-1)[r]} + (k-1)F_{(n-1)-(r+(k-1)+1)[r]} \\ &= F_{n-k[r]} + (k-1)F_{n-(r+k+1)[r]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{n-1[r]}^{k-1} + F_{n-(r+k+1)[r]} &= F_{n-k[r]} + (k-1)F_{n-(r+k+1)[r]} + F_{n-(r+k+1)[r]} \\
&= F_{n-k[r]} + kF_{n-(r+k+1)[r]}
\end{aligned}$$

Supongamos que  $F_{n[r]}^k = F_{n-1[r]}^{k-1} + F_{n-(r+k+1)[r]}$ . Si  $k = 1$ , entonces

$$F_{n[r]}^1 = F_{n-1[r]}^0 + F_{n-(r+2)[r]} = F_{n-1[r]} + (1)F_{n-(r+2)[r]}$$

Supongamos que el resultado se cumple para  $1 \leq l < k$ , veamos que se cumple para  $k$ .

$$\begin{aligned}
F_{n[r]}^k &= F_{n-1[r]}^{k-1} + F_{n-(r+k+1)[r]} \\
&= \left( F_{(n-1)-(k-1)[r]} + (k-1)F_{(n-1)-(r+(k-1)+1)[r]} \right) + F_{n-(r+k+1)[r]} \\
&= F_{n-k[r]} + (k-1)F_{(n-(r+(k-1)+2)[r]} + F_{n-(r+k+1)[r]} \\
&= F_{n-k[r]} + kF_{n-(r+k+1)[r]}
\end{aligned}$$

□

**Teorema 4.2.2.**  $F_{n[r]}^k = F_{n-1[r]}^k + F_{n-(r+1)[r]}^k$  para toda  $n \geq r + k + 2$ .

*Demostración.* Realizaremos la prueba por casos:

**Caso 1.** Si  $n = r + k + 2$ , entonces  $n - 1 = r + k + 1$  y  $n - (r + 1) = k + 1$

$$\begin{aligned}
\text{entonces } F_{n-1[r]}^k + F_{n-(r+1)[r]}^k &= F_{r+k+1[r]}^k + F_{k+1[r]}^k \\
&= (r + k + 2) + (k + 2) \\
&= r + 2k + 4
\end{aligned}$$

Por otro lado,  $F_{n[r]}^k = F_{n-k} + kF_{n-(r+k+1)[r]}$  ya que  $n = r + k + 2$ , entonces  $n - k = r + 2$  y  $n - (r + k + 1) = 1$ , por lo que

$$\begin{aligned}
F_{n[r]}^k &= F_{n-k[r]} + kF_{n-(r+k+1)[r]} \\
&= F_{r+2[r]} + kF_{1[r]} \\
&= (F_{r+1[r]} + F_{1[r]}) + kF_{1[r]} \\
&= (r + 2) + 2 + k(2) \\
&= r + 2k + 4
\end{aligned}$$

Por tanto  $F_{n[r]}^k = F_{n-1[r]}^k + F_{n-(r+1)[r]}^k$  para  $n = r + k + 2$ .

**Caso 2.** Si  $r + k + 3 \leq n \leq 2r + k + 2$ , entonces

$$r + k + 2 \leq n - 1 \leq 2r + k + 1 \text{ y } k + 2 \leq n - (r + 1) \leq r + k + 1$$

$$F_{n-1[r]}^k + F_{n-(r+1)[r]}^k = F_{(n-1)-k[r]} + k(F_{(n-1)-(r+k+1)[r]}) + (n - r)$$

y como  $r + k + 3 \leq n \leq 2r + k + 2$ , entonces

$$2 \leq n - (r + k + 1) \leq r + 1 \text{ y } 1 \leq (n - 1) - (r + k + 1) \leq r$$

$$F_{n-(r+k+1)[r]} = n - (r + k), \text{ entonces } n - r = F_{n-(r+k+1)+k[r]} + k$$

y  $F_{(n-1)-(r+k+1)} = n - (r + k + 1)$ , entonces

$$\begin{aligned} & F_{(n-1)-k[r]} + kF_{(n-1)-(r+k+1)[r]} + (n - r) \\ &= \left( F_{(n-1)-k[r]} + k(n - (r + k + 1)) \right) + F_{n-(r+k+1)[r]} + k \\ &= \left( F_{(n-k)-1[r]} + F_{(n-k)-(r+1)} \right) + k(n - (r + k + 1)) + k \\ &= F_{n-k[r]} + k(n - (r + k)) \\ &= F_{n-k[r]} + kF_{n-(r+k+1)[r]} \\ &= F_{n[r]}^k \end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es cierto para toda  $r + k + 3 \leq n \leq 2r + k + 2$ .

**Caso 3.** Si  $n \geq 2r + k + 3$ , tenemos que

$$n - 1 \geq 2r + k + 2 > r + k + 2 \text{ y } n - (r + 1) \geq r + k + 2, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} & F_{n-1[r]}^k + F_{n-(r+1)[r]}^k \\ &= \left( F_{(n-1)-k[r]} + kF_{(n-1)-(r+k+1)[r]} \right) + \left( F_{n-(r+1)-k[r]} + kF_{(n-(r+1))-(r+k+1)[r]} \right) \\ &= \left( F_{(n-k)-1[r]} + F_{(n-k)-(r+1)} \right) + k \left( F_{n-(r+k+1)-1[r]} + F_{n-(r+k+1)-(r+1)[r]} \right) \end{aligned}$$

Y como  $n \geq 2r + k + 3$ , entonces  $n - k \geq 2r + 3 > r + 2$  y  $n - (r + k + 1) \geq r + 2$ , por lo que

$$\begin{aligned}
& \left( F_{(n-k)-1_{[r]}} + F_{(n-k)-(r+1)} \right) + k \left( F_{n-(r+k+1)-1_{[r]}} + F_{n-(r+k+1)-(r+1)_{[r]}} \right) \\
& = F_{n-k_{[r]}} + kF_{n-(r+k+1)_{[r]}} \\
& = F_{n_{[r]}}^k
\end{aligned}$$

Por tanto,  $F_{n_{[r]}}^k = F_{n-1_{[r]}}^k + F_{n-(r+1)_{[r]}}^k$ , si  $n \geq 2r + k + 3$ .

□

**Teorema 4.2.3.**

$$F_{n_{[r]}}^k = \begin{cases} F_{n_{[r]}}^{k-1} - k & \text{si } n \in \{r + k + 2, \dots, 2r + k + 1\} \\ F_{n_{[r]}}^{k-1} - kF_{n(2r+k+1)_{[r]}} & \text{si } n \geq 2r + k + 2 \end{cases}$$

*Demostración.* Por casos:

**Caso 1.** Si  $r + k + 2 \leq n \leq 2r + k + 1$ , entonces  $1 \leq n - (r + k + 1) \leq r$

Por lo que  $F_{n_{[r]}}^k = F_{n-1_{[r]}}^{k-1} + F_{n-(r+k+1)_{[r]}}$  y  $F_{n_{[r]}}^{k-1} = F_{n-1_{[r]}}^{k-1} + F_{n-(r+1)_{[r]}}^{k-1}$

$$\begin{aligned}
F_{n_{[r]}}^{k-1} - F_{n_{[r]}}^k & = \left( F_{n-1_{[r]}}^{k-1} + F_{n-(r+1)_{[r]}}^{k-1} \right) - \left( F_{n-1_{[r]}}^{k-1} + F_{n-(r+k+1)_{[r]}} \right) \\
& = F_{n-(r+1)_{[r]}}^{k-1} - F_{n-(r+k+1)_{[r]}}
\end{aligned}$$

Como  $k + 1 \leq n - (r + 1) \leq r + k$ , entonces

$(k - 1) + 2 \leq n - (r + 1) \leq r + (k - 1) + 1$  y  $1 \leq n - (r + k + 1) \leq r$

$F_{n-(r+1)_{[r]}}^{k-1} = n - r$  y  $F_{n-(r+k+1)_{[r]}} = n - (r + k)$

$$\begin{aligned}
F_{n_{[r]}}^{k-1} - F_{n_{[r]}}^k & = F_{n-(r+1)_{[r]}}^{k-1} - F_{n-(r+k+1)_{[r]}} \\
& = (n - r) - (n - (r + k)) \\
& = k
\end{aligned}$$

Por tanto  $F_{n_{[r]}}^k = F_{n_{[r]}}^{k-1} - k$ .

**Caso 2.** Si  $n \geq 2r + k + 2$ , entonces

$$F_{n[r]}^k = F_{n-1[r]}^{k-1} + F_{n-(r+k+1)[r]} \text{ y } F_{n[r]}^{k-1} = F_{n-1[r]}^{k-1} + F_{n-(r+1)[r]}^{k-1}$$

$$\begin{aligned} F_{n[r]}^{k-1} - F_{n[r]}^k &= \left( F_{n-1[r]}^{k-1} + F_{n-(r+1)[r]}^{k-1} \right) - \left( F_{n-1[r]}^{k-1} + F_{n-(r+k+1)[r]} \right) \\ &= F_{n-(r+1)[r]}^{k-1} - F_{n-(r+k+1)[r]} \end{aligned}$$

como  $n \geq 2r + k + 2$ , entonces  $n - (r + 1) \geq r + k + 1 = r + (k - 1) + 2$

$F_{n-(r+1)[r]}^{k-1} = F_{n-(r+1)-(k-1)[r]} + (k-1)F_{n-(r+1)-(r+(k-1)+1)[r]}$ , entonces

$$\begin{aligned} &F_{n-(r+1)[r]}^{k-1} - F_{n-(r+k+1)[r]} \\ &= \left( F_{n-(r+1)-(k-1)[r]} + (k-1)F_{n-(2r+k+1)[r]} \right) - F_{n-(r+k+1)[r]} \\ &= F_{n-(r+k)[r]} - F_{n-(r+k+1)[r]} + (k-1)F_{n-(2r+k+1)[r]} \end{aligned}$$

y como  $n \geq 2r + k + 2$ , entonces  $n - (r - k) \geq r + 2$ , por lo que

$$\begin{aligned} F_{n-(r+k)[r]} &= F_{(n-(r+k))-1[r]} + F_{(n-(r+k))-(r+1)[r]} \\ &= F_{n-(r+k+1)[r]} + F_{n-(2r+k+1)[r]} \end{aligned}$$

de aquí que  $F_{n-(2r+k+1)[r]} = F_{n-(r+k)[r]} - F_{n-(r+k+1)[r]}$ , entonces

$$\begin{aligned} &F_{n-(r+k)[r]} - F_{n-(r+k+1)[r]} + (k-1)F_{n-(2r+k+1)[r]} \\ &= F_{n-(2r+k+1)[r]} + (k-1)F_{n-(2r+k+1)[r]} \\ &= kF_{n-(2r+k+1)[r]} \end{aligned}$$

entonces  $F_{n[r]}^{k-1} - F_{n[r]}^k = kF_{n-(2r+k+1)[r]}$ ,

por lo tanto  $F_{n[r]}^k = F_{n[r]}^{k-1} - kF_{n-(2r+k+1)[r]}$  para toda  $n \geq 2r + k + 2$ .

□

**Teorema 4.2.4.**

$$F_{n_{[r]}}^k = F_{n_{[r]}} - \left( \sum_{i=1}^k i \left( F_{n-(2r+i+1)_{[r]}} \right) \right) \text{ para toda } n \geq 2r + k + 2$$

*Demostración.* Por inducción sobre  $k$ .

Si  $k = 1$ , entonces  $F_{n_{[r]}}^1 = F_{n_{[r]}}^0 - F_{n-(2r+2)}$ ,  $n \geq 2r + 2$ .

Supongamos que el teorema es válido para toda  $1 \leq l < k$ , veamos que se cumple para  $k$ .

Sea  $n \geq 2r + k + 2$ , entonces  $F_{n_{[r]}}^k = F_{n_{[r]}}^{k-1} - kF_{n-(2r+k+1)_{[r]}}$ , pero por hipótesis de inducción

$$F_{n_{[r]}}^{k-1} = F_{n_{[r]}} - \left( \sum_{i=1}^{k-1} i \left( F_{n-(2r+i+1)_{[r]}} \right) \right), \text{ por lo que}$$

$$\begin{aligned} F_{n_{[r]}}^k &= F_{n_{[r]}} - \left( \sum_{i=1}^{k-1} i \left( F_{n-(2r+i+1)_{[r]}} \right) \right) - kF_{n-(2r+k+1)_{[r]}} \\ &= F_{n_{[r]}} - \left( \sum_{i=1}^k i \left( F_{n-(2r+i+1)_{[r]}} \right) \right). \end{aligned}$$

□

### 4.2.3. Las gráficas $T_{n_{[r]}}$ y $T_{n_{[r]}}^k$

Hemos definido ciertas sucesiones y hemos probado algunas de sus propiedades, para probar que podemos determinar los números de Fibonacci de las siguientes familias de gráficas.

**Definición 4.2.2.** Sea  $r \in \mathbb{Z}^+, r \geq 2$ .  $T_{n_{[r]}} = T_n \cup \{xy : 2 \leq d_{T_n}(x, y) \leq r\}$  es la trayectoria de orden  $n$  y salto  $(1, 2, \dots, r)$ .

**Definición 4.2.3.** Sean  $r \in \mathbb{Z}^+, r \geq 2$  y  $1 \leq k \leq r$ .  $T_{n_{[r]}}^k = T_{n_{[r]}}^{k-1} \cup \{xy : d_{T_n}(x, y) = n - k\}$  es la trayectoria de orden  $n$  y salto  $(1, 2, \dots, r, n - 1, n - 2, \dots, n - k)$ . En el caso en que  $k = 1$ ,  $T_{n_{[r]}}^{k-1} = T_{n_{[r]}}$ .

**Definición 4.2.4.** Sea  $r \in \mathbb{Z}^+, r \geq 2$ .  $C_{n_{[r]}} = C_n \cup \{xy : 2 \leq d_{C_n}(x, y) \leq r\}$  es la gráfica circulante de orden  $n$  y salto consecutivo  $(1, 2, \dots, r)$

**Observación 12.** Cuando  $k = r$  tendremos la trayectoria de orden  $n$  y salto  $(1, 2, \dots, r, n - 1, n - 2, \dots, n - r)$ , en este caso  $T_{n_{[r]}}^r = C_{n_r}$ .

#### 4.2.4. Los Teoremas

**Teorema 4.2.5.** *Sea  $T_{n[r]}$ , entonces  $\mathcal{F}(T_{n[r]}) = F_{n[r]}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ .*

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ .

Si  $1 \leq n \leq r + 1$ , entonces  $T_{n[r]} = K_n$  y  $\mathcal{F}(K_n) = n + 1 = F_{n[r]}$ .

Supongamos que el teorema es cierto para toda  $r + 1 \leq l < n$ , veamos que es cierto para  $n$ .

Sea  $T_{n[r]}$  con  $n \geq r + 2$ , y sea  $v_n$  el vértice final de  $T_n$  y sea  $S \subset V(T_{n[r]})$  independiente, entonces debemos considerar dos casos:

**Caso 1.** Si  $v_n \in S$ , entonces  $v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{n-r} \notin S$ , ya que dichos vértices son adyacentes a  $v_n$  en  $T_{n[r]}$ .

Consideremos la función

$$g_{[r]} : I_{T_{n[r]}} \rightarrow I_{T_{n-(r+1)[r]}}, \text{ tal que } g_{[r]} = S - \{v_n\}.$$

Pero  $g_{[r]}$  es biyectiva, por tanto hay tantos conjuntos de vértices independientes, de  $T_{n[r]}$  que tienen a  $v_n$  como  $\mathcal{F}(T_{n-(r+1)[r]})$ , que por hipótesis de inducción es  $F_{n-(r+1)[r]}$ .

**Caso 2.** Si  $v_n \notin S$ , entonces  $S$  es independiente para  $T_{n[r]} \setminus \{v_n\}$ , por lo que  $S \in I_{T_{n-1}[r]}$ ; por otro lado si  $S'$  es un conjunto de vértices independiente para  $T_{n-1}[r]$ , lo será también para  $T_{n[r]}$  de tal forma que  $v_n \notin S'$ .

Por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[r]}$  que no tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-1}[r])$ , que por hipótesis de inducción es  $F_{n-1[r]}$ .

Por lo tanto  $\mathcal{F}(T_{n[r]}) = F_{n-1[r]} + F_{n-(r+1)[r]} = F_{n[r]}$ .

□

**Teorema 4.2.6.** Sea  $T_{n[r]}^k$  con  $1 \leq k \leq r$ , entonces

$$\mathcal{F}(T_{n[r]}^k) = F_{n[r]}^k, \text{ si } n \geq k + 1.$$

*Demostración.* Por inducción sobre  $k$ :

$k = 1$ , por inducción sobre  $n$ .

$$T_{n[r]}^1 = K_n \text{ para toda } 2 \leq n \leq r + 2 \text{ y } \mathcal{F}(K_n) = n + 1 = F_{n[r]}^1.$$

Supongamos que se cumple para  $r + 2 \leq l \leq n$ , veamos que cumple para  $n$ . Sea  $T_{n[r]}^1$  con  $n \geq r + 3$  y sea  $v_n$  el vértice final de  $T_n$  y  $S$  un conjunto de vértices independiente de  $T_{n[r]}^1$ , entonces tenemos dos casos:

**Caso 1.** Si  $v_n \in S$ , entonces  $v_1, v_{n-r}, \dots, v_{n-1} \notin S$  pues estos vértices son los vecinos de  $v_n$  en  $T_{n[r]}^1$ .

Consideremos la función

$$g_{[r]}^1 : I_{T_{n[r]}^1} \rightarrow I_{T_{n-(r+2)[r]}} \text{ tal que } g_{[r]}^1(S) = S - \{v_n\}.$$

Pero  $g_{[r]}^1$  es biyectiva; por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[r]}^1$  que tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-(r+2)[r]}) = F_{n-(r+2)[r]}$ , esto por el teorema anterior.

**Caso 2.** Si  $v_n \notin S$ , entonces  $S$  es independiente para  $T_{n-1[r]}^0 = T_{n-1[r]}$ , entonces  $S \in I_{T_{n-1[r]}}$ , por otro lado, si  $S' \in I_{T_{n-1[r]}^0}$ , entonces  $S'$  es independiente para  $T_{n[r]}^1$  con la propiedad de que  $v_n \notin S'$ . Por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[r]}^1$  que no tienen a  $v_n$  como  $\mathcal{F}(T_{n-1[r]}) = F_{n-1[r]}$  por el teorema anterior, entonces

$$\mathcal{F}(T_{n[r]}^1) = F_{n-1[r]}^0 + F_{n[r]}^1.$$

Supongamos que el teorema es válido para toda  $1 \leq k' < k$ ; es decir,  $\mathcal{F}(T_{n[r]}^{k'}) = F_{n[r]}^{k'}$  para toda  $n \geq k' + 1$  y para toda  $1 \leq k' < k$ , veamos que el teorema es válido para  $k$ .

Por inducción sobre  $n$ .

Sea  $T_{n[r]}^k$ , con  $n \geq k + 1$ .

Si  $k + 1 \leq n \leq r + k + 1$ , entonces  $T_{n[r]}^k = K_n$  y  $\mathcal{F}(K_n) = n + 1 = F_{n[r]}^k$ .

Supongamos que el teorema es cierto para  $r + k + 1 < l < n$ , veamos que es cierto para  $n$ .

Sea  $T_{n[r]}^k$  con  $n \geq r + k + 2$  y sea  $v_n$  el vértice final de  $T_n$  y  $S \subset V(T_{n[r]}^k)$  independiente, entonces debemos considerar los siguientes casos:

**Caso 1.** Si  $v_n \in S$ , entonces  $v_1, \dots, v_k, v_{n-r}, \dots, v_{n-1} \notin S$ , puesto que dichos vértices son adyacentes a  $v_n$  en  $T_{n[r]}^k$ .

Consideremos la función

$$g_{[r]}^k : I_{T_{n[r]}^k} \rightarrow I_{T_{n-(r+k+1)[r]}^k} \text{ tal que } g_{[r]}^k(S) = S - \{v_n\}.$$

Como  $g_{[r]}^k$  es biyectiva, por tanto hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[r]}^k$  que tienen a  $v_n$  como  $\mathcal{F}(T_{n-(r+k+1)[r]}^k)$  que por el teorema anterior sabemos que es  $F_{n-(r+k+1)[r]}^k$ .

**Caso 2.** Si  $v_n \notin S$ , entonces  $S$  es un conjunto de vértices independiente para  $T_{n[r]}^k \setminus \{v_n\}$ , por lo que  $S \in I_{T_{n-1[r]}^{k-1}}$ , además si  $S'$  es independiente en  $T_{n-1[r]}^{k-1}$ , lo será también en  $T_{n[r]}^k$  de tal modo que  $v_n \notin S'$ .

Por tanto, hay tantos conjuntos de vértices independientes de  $T_{n[r]}^k$  que no tienen a  $v_n$ , como  $\mathcal{F}(T_{n-1[r]}^{k-1})$  que por hipótesis de inducción es  $F_{n-1[r]}^{k-1}$ .

$$\text{Por lo tanto } \mathcal{F}(T_{n[r]}^k) = F_{n-1[r]}^{k-1} + F_{n-(r+k+1)[r]}^k = F_{n[r]}^k.$$

□

**Observación 13.** Recordemos que  $T_{n[r]}^r = C_{n[r]}$ , entonces

$$\mathcal{F}(C_{n[r]}) = F_{n[r]}^r$$

nombramos, a manera de notación, a  $F_{n[r]}^r$  también como  $L_{n[r]}$ , en analogía a la relación entre los números de Fibonacci de los ciclos de orden  $n$  y la sucesión de Lucas, por tanto podemos finalmente concluir que

$$\mathcal{F}(C_{n[r]}) = L_{n[r]}.$$



# Conclusiones

Notemos que que las gráficas circulantes de orden  $n$  y salto consecutivo  $(1, 2, \dots, r)$  coinciden con las  $r$ -ésimas potencias de los ciclos de orden  $n$ , por ello hemos determinado con exactitud los números de Fibonacci de una familia completa de gráficas. Además, hemos generalizado la sucesión de Fibonacci y de Lucas y propiedades que las relacionan entre sí a través de estas gráficas, ya que podemos ver a las trayectorias y a los ciclos de orden  $n$  como un caso particular de sus  $r$ -ésimas potencias.

Dentro de las cosas que tenemos propuestas para seguir trabajando en este tema, es tratar de encontrar una propiedad que determine el  $n$ -ésimo término de cada sucesión en función únicamente de  $n, r$  y  $k$  sin la necesidad de usar un método recursivo, también durante el proceso de investigación propusimos explorar algunas operaciones relacionadas con estas gráficas y ver si es posible determinar sus números de Fibonacci; sin embargo lo expuesto aquí es todo lo que tenemos hasta ahora. Esperamos poder decir más en otro momento.



# Bibliografía

- [1] A. S. Posamentier, I. Lehmann. *The Fabulous Fibonacci Numbers*. Ed. Prometheus Books. 2007.
- [2] T. Koshy. *Elementary Number Theory with Applications*. Ed. Burlington. 2a. Edición. 2007.
- [3] F. Harary. *Graph Theory*. Ed. Addison-Wesley. 1969.
- [4] G. Chartrand, L. Lesniak. *Graphs & Digraphs*. Ed. Chapman & Hall/CRC. 4a. Edición. 2009.
- [5] H. Prodinger, R. F. Tichy. *Fibonacci numbers of graphs*. The Fibonacci Quarterly. Vol. 20, 1982.