



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE MORSE
Y LA TOPOLOGÍA DE FOLIACIONES
HOLOMORFAS ALREDEDOR
DE UNA SINGULARIDAD AISLADA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA

BEATRIZ LIMÓN GUTIÉRREZ

DIRECTOR DE TESIS: **DR. JOSÉ SEADE**

MÉXICO, D.F.

JUNIO 2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero agradecer a CONACyT por el apoyo recibido a través de la beca 162340 de la cual gocé a lo largo del doctorado. También quiero agradecer el apoyo recibido por parte del proyecto de CONACyT: J-49048-F a cargo del Dr. José Luis Cisneros Molina y los proyectos PAPIIT: IN100308 y ECOS-ANUIES: M06-M02 a cargo del Dr. José Antonio Seade Kuri, éste último en coordinación con el Dr. Jean-Paul Brasselet. A través de dichos apoyos pude viajar para exponer mi trabajo ante expertos en el área y así enriquecer mi proyecto doctoral.

Quiero agradecer a mis papás por todo el apoyo y cariño que me han brindado a lo largo de tantos años de estudio. A mis hermanos Eli y Paco por traer tanta alegría a mi vida con sus locuras.

Quiero agradecer a mis compañeros y amigos en especial a Noemi y Hugo, con los cuales inicié mi camino en el estudio de las matemáticas y con los cuales he vivido momentos muy felices a lo largo de estos años.

Quiero agradecer a Haydee, mi compañera del doctorado, por tantas experiencias juntas y tantos trámites superados.

Quiero agradecer a mis profesores que me han enseñado tanto: al Dr. José Luis Cisneros, a la Dra. Messuma, al Dr. Bourama Tony y a muchos otros que han sido parte fundamental de mi formación profesional.

Quiero agradecer a los miembros del jurado de mi segunda etapa de la candidatura al grado de doctor, en particular a la Dra. Laura Ortíz y al Dr. Ernesto Rosales, los cuales me brindaron ideas muy interesantes para el desarrollo de esta tesis y me ayudaron a revisar mis cálculos cuando parecía haber inconsistencias en mi trabajo.

Quiero agradecer a los miembros de mi comité tutorial, los cuales me han apoyado ampliamente en la realización de este trabajo, pero muy en particular, al Dr. José Seade, mi director de tesis, que me ha apoyado enseñándome valiosos conceptos matemáticos y dándome ánimos para continuar en mi carrera a pesar de tantos altibajos, de verdad ¡¡muchas gracias!!

Quiero agradecer a los miembros del jurado del examen de doctorado por todas las sugerencias y comentarios que me han hecho respecto a esta tesis, los cuales me han permitido mejorar la calidad de la misma.

Quiero agradecer a Pilar y a Angeles que realizan un estupendo trabajo en la biblioteca del instituto y realmente hacen más fácil que uno pueda conseguir la información que necesita. A las secretarias del posgrado: a Laurita, a Socorro, a Maria Ines y a Liz, que son tan eficientes y siempre nos ayudan a lidiar con los múltiples trámites que hay que realizar.

Finalmente, quiero agradecer a Chucho, mi pareja, compañero de vida y amigo, por todo el apoyo que me ha brindado durante todos estos años que hemos estado juntos y muy particularmente a lo largo del doctorado. Por haberme escuchado y animado a continuar tantas veces con este trabajo a pesar de que muchas de ellas yo no me creía capaz de continuar ¡¡muchas gracias!!

A todos ustedes que han influido tanto en mi vida y que me han llevado a ser quien soy les dedico este trabajo.

Betty Limon

Índice general

Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Teoría de Morse	1
1.2. Variedades algebraicas y conjunto analíticos	4
1.2.1. Caso local	5
1.3. Teorema de Poincaré-Hopf	8
1.4. Foliaciones	10
2. Antecedentes	13
2.1. Foliaciones de dimensión 1.	13
2.2. Variedad polar	17
2.3. Trabajos recientes relacionados con la variedad de contacto.	20
3. Generalidades	23
3.1. Conceptos básicos	23
3.2. Cambios de coordenadas	26
3.2.1. Repercusiones de los cambios de coordenadas en el cálculo de índices de Morse.	27

4. Foliaciones holomorfas d-dimensionales.	31
4.1. La variedad polar para foliaciones holomorfas de dimensión d	32
4.1.1. Ejemplos: foliaciones de dimensión 1.	35
4.2. Estructura analítica de M	43
4.3. Las hojas de la foliación	45
4.4. Foliaciones sobre las esferas	48
5. Foliaciones de codimensión 1	59
5.1. Ecuaciones de la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g	59
5.2. Polinomios de Pham-Brieskorn	63
5.2.1. Polinomios de Pham-Brieskorn en \mathbb{C}^2	63
5.2.2. Foliaciones definidas por polinomios de Pham-Brieskorn en \mathbb{C}^n . . .	70
5.3. Polinomios homogéneos en \mathbb{C}^n	73
6. Degeneraciones de la variedad polar	89
6.1. Análisis de índices de Morse	89
6.2. Degeneraciones bajo perturbaciones de la métrica	95
6.2.1. La foliación definida por $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2$	95
6.2.2. La foliación definida por $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^q$	103
Referencias	107

Introducción

En 1964 René Thom escribió un artículo muy interesante [40] en el que explicaba como se pueden adaptar ideas de teoría de Morse al estudio de la topología de una variedad foliada no singular. Dichas ideas han sido fuente de inspiración para diversos trabajos, entre ellos el trabajo desarrollado en [13] por Gómez-Mont, Seade y Verjovsky.

Sea N^n una variedad diferenciable compacta, la cual está dotada de una foliación \mathcal{F} no singular de codimensión k . En [40] Thom considera una función g definida sobre N^n y hace un estudio de las propiedades de g restringida a las hojas de la foliación. Él observa que si \mathcal{L} es una hoja de \mathcal{F} entonces los puntos críticos de $g|_{\mathcal{L}}$ corresponden a los puntos críticos de g unión los puntos donde \mathcal{L} es tangente a las superficies de nivel de g . Estos últimos son llamados *puntos de contacto* de \mathcal{F} con la foliación definida por las curvas de nivel de g . Siguiendo ideas de teoría de Morse clásica, Thom hace una clasificación del tipo de puntos críticos que puede tener $g|_{\mathcal{L}}$ y analiza como afecta a la estructura de la variedad N el pasar a través de un punto crítico de cada clase.

En [7] Camacho, Kuiper y Palis, y posteriormente López de Medrano en [20], estudiaron las propiedades topológicas de foliaciones holomorfas singulares definidas por las curvas integrales de un campo vectorial lineal en \mathbb{C}^n . En particular, consideremos un sistema dinámico de la forma

$$\dot{z} = Az \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (1)$$

donde A es una matriz $n \times n$ con entradas constantes. Vamos a decir que un sistema satisface la *hipótesis de hiperbolicidad* si dados $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los valores propios de A , $\lambda_j \notin \lambda_k \mathbb{R}$, con $j \neq k$. En el caso de que los valores propios no sean independientes la topología de la foliación definida por el sistema (1) se complica, por lo que en adelante únicamente consideraremos sistemas que satisfacen la hipótesis de hiperbolicidad. Las soluciones del sistema (1) definen una foliación holomorfa \mathcal{F} , de dimensión 1, con singularidad (única) en el origen. Si nos fijamos en la configuración de los valores propios de A en el plano complejo tenemos la siguiente clasificación: decimos que la matriz A (o el sistema (1)) pertenece al dominio de Poincaré, si el origen no pertenece a la envolvente convexa de $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, en caso contrario decimos que A está en el dominio de Siegel. En el caso del dominio de Poincaré todas las hojas (hojas de Poincaré) se acercan arbitrariamente al origen y son transversales a todas las esferas con centro en el origen. Cuando A está en

el dominio de Siegel la foliación está compuesta por hojas de Poincaré y hojas de Siegel, éstas últimas están acotadas con respecto al origen y forman un abierto denso de \mathbb{C}^n , más aún cada hoja tiene un único punto de distancia mínima al origen y está caracterizada por éste (ver figura 1).

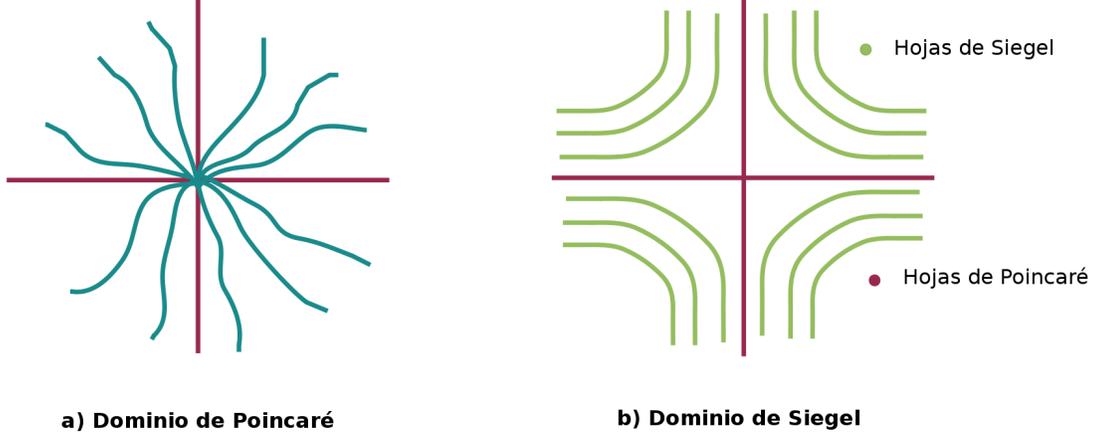


Figura 1: Foliaciones lineales

El conjunto de estos puntos de distancia mínima al origen en cada hoja de la foliación está definido por

$$M = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \mid \sum \lambda_i z_i \bar{z}_i = 0 \right\}.$$

En la notación de Thom, M corresponde a la variedad de contacto entre la foliación lineal \mathcal{F} y la foliación definida por la función distancia al origen. En [7] se demuestra que M es una variedad diferenciable, real y de codimensión dos, más aún, la unión de todas las hojas de Siegel es el espacio total de un haz trivial, $M \times \mathbb{C} \rightarrow M$, encajado en \mathbb{C}^n . Por otra parte, si consideramos su intersección con una esfera, $M_1 = M \cap \mathbb{S}_1$, tenemos que M es difeomorfo a $M_1 \times \mathbb{R}$, es decir, M es un cono sobre M_1 con vértice borrado en $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$. Más aún, en [20] López de Medrano realizó un estudio de la topología de la variedad de contacto M asociada a un sistema en el dominio de Siegel, en el cual encontró que $M_1 = M \cap \mathbb{S}_1$ es difeomorfa a un producto de esferas de la forma $\mathbb{S}^{2n_1-1} \times \mathbb{S}^{2n_2-1} \times \mathbb{S}^{2n_3-1}$ o a una suma conexa de productos de pares de esferas de distintas dimensiones (para más detalles ver teoremas 1 y 2 de [20]). En particular, para un campo vectorial en \mathbb{C}^3 (en el dominio de Siegel) la aureola de la variedad de contacto M_1 es el 3-toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Los resultados anteriores nos muestran que el conjunto de hojas de Siegel y en particular su conjunto de puntos de distancia mínima al origen M , tiene una gran riqueza topológica.

Inspirados en las ideas presentadas por Thom en [40] del estudio de foliaciones holomorfas no singulares, Gómez-Mont, Seade y Verjovsky en [13] generalizan algunos de los resultados obtenidos para foliaciones lineales en [7] y [20] al caso de foliaciones holomorfas de “tipo Morse” de dimensión 1 con singularidad aislada en el origen. Más adelante se darán de manera más detallada las definiciones y resultados presentados en [13].

Sea F un campo vectorial holomorfo en una vecindad U de $\mathbf{0}$ en \mathbb{C}^n con singularidad única en el origen y \mathcal{F} la foliación holomorfa de dimensión 1, definida por las curvas integrales de dicho campo. Definimos la *variedad de contactos* como el conjunto de puntos M que satisfacen $\langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle = \sum_{i=1}^n F_i(\mathbf{z})\bar{z}_i = 0$. En analogía con el caso lineal, en [13] los autores encontraron que *si F es de tipo Morse entonces $M = \{\mathbf{0}\}$ o $M \setminus \{\mathbf{0}\}$ es una variedad suave de codimensión dos, tal que cada una de sus componentes conexas consta únicamente de puntos de distancia mínima al origen o puntos silla, además la foliación \mathcal{F} es transversal a $M \setminus \{\mathbf{0}\}$* . Lo anterior nos dice que en algún sentido las foliaciones de tipo Morse (de dimensión 1) son una generalización de las foliaciones lineales. Por otra parte, las foliaciones de tipo de Morse son interesantes por sí mismas y bien estructuradas.

Observemos que la restricción de la foliación \mathcal{F} a una esfera de radio ε centrada en el origen define una foliación \mathcal{F}_ε de \mathbb{S}_ε de dimensión real 1 con singularidades en $M \cap \mathbb{S}_\varepsilon$. Una pregunta que surge es: dados ε y ε' suficientemente pequeños ¿las foliaciones \mathcal{F}_ε y $\mathcal{F}_{\varepsilon'}$ son topológicamente equivalentes? En [13] se demostró que *en caso de que todos los contactos en M sean puntos de distancia mínima al origen, las foliaciones \mathcal{F}_ε y $\mathcal{F}_{\varepsilon'}$ son homeomorfas*.

Pero, ¿que es lo que sucede para foliaciones holomorfas de otras dimensiones?

En el caso de tener una foliación \mathcal{F} de dimensión m sobre \mathbb{C}^n definida por un conjunto de campos vectoriales lineales que satisfacen ciertas propiedades, la variedad de contacto definida por \mathcal{F} y por las esferas canónicas centradas en el origen, están relacionadas con un conjunto de variedades muy interesantes llamadas variedades LVM. Dichas variedades fueron estudiadas primero por López de Medrano y Verjovsky en [21] y posteriormente por Meersseman en [26]. Las variedades LVM se pueden ver como la proyectivización de la variedad de contacto asociada a una foliación lineal, por lo que dichas variedades heredan algunas propiedades de la variedad de contacto asociada. En general, las variedades LVM forman una familia de variedades complejas, compactas, no-simplécticas con una geometría y topología muy interesantes.

Por otra parte, Ito, Scardua y Yamagishi en [18] y [19] comienzan un estudio de las propiedades de la variedad de contacto para el caso de foliaciones holomorfas de co-dimensión 1 con singularidad aislada en el origen, particularmente para el caso de foliaciones lineales (dichos resultados se irán mencionando a lo largo de la tesis). Sin embargo, no hay evidencia de estudios de las propiedades de la variedad de contacto para foliaciones no lineales de dimensión intermedia, es decir, $1 < d < n$. Lo cual nos ha dado la pauta para el presente trabajo.

El objetivo principal de esta tesis *es hacer un análisis de las propiedades de la variedad de contacto $M = M(\mathcal{F}, g)$ (o variedad polar relativa a \mathcal{F} y g en la notación que emplearemos más adelante) entre una foliación holomorfa \mathcal{F} de \mathbb{C}^n de dimensión d , con singularidad aislada en el origen y una función de Morse g con punto crítico aislado en el origen de índice de Morse 0, siguiendo las ideas desarrolladas en [13] para el caso de dimensión 1.*

En cuanto a la estructura de la tesis tenemos que: el capítulo 1 es un resumen de las definiciones y resultados básicos para el desarrollo de esta tesis. Entre los temas a tratar se encuentran resultados básicos de teoría de Morse clásica, conjuntos analíticos, el teorema de Poincaré-Hopf, entre otros; el lector experto podrá evitarlo si así lo desea.

En el capítulo 2 desglosaremos un poco más el trabajo desarrollado en [13]. Definiremos la *variedad polar de la foliación \mathcal{F} relativa a la función de Morse g , $M(\mathcal{F}, g)$* , la definición es equivalente a la de *variedad de contacto* en el sentido de Thom, el cambio de nombre es debido a las confusiones que puede provocar con conceptos empleados en geometría de contacto y al gran parecido que existe entre la variedad $M(\mathcal{F}, g)$ y la *variedad polar asociada a una forma lineal*, usual en geometría algebraica. Finalmente hablaremos un poco de las variedades LVM y de su relación con la variedad de contacto o variedad polar definida por \mathcal{F} y g .

En el capítulo 3 definiremos el *índice de Morse sobre una foliación* y daremos una noción de cuando una foliación es “buena”, la cual corresponde al caso en que *la foliación \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g* dicho concepto será totalmente equivalente al término *foliación de tipo Morse* empleada en [13]. Más adelante se dará la justificación del cambio de nombre. También estudiaremos los sistemas coordenados $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ y $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ que emplearemos en el estudio de funciones de la forma $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Específicamente mencionaremos cómo están dados los cambios de coordenadas entre dichos sistemas y analizaremos la forma en que afecta el cambiar de un sistema coordenado a otro, especialmente en el cálculo de índices de Morse.

El capítulo 4 está enfocado al estudio de la variedad de contacto $M(\mathcal{F}, g)$ y la topología de las hojas de una foliación holomorfa de dimensión $d \geq 1$ con singularidad aislada en el origen. En este capítulo se encuentran concentrados la mayoría de los resultados obtenidos durante el desarrollo del proyecto doctoral. En la primera sección, se da una caracterización de las *foliaciones holomorfas que preservan la estructura de Morse de g* en términos de las propiedades de la variedad polar $M(\mathcal{F}, g)$, específicamente demostraremos:

Teorema. *Sean \mathcal{F} una foliación holomorfa de dimensión d en \mathbb{C}^n , $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse y $M := M(\mathcal{F}, g)$ la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g . Entonces, \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g si y sólo si $M^* := M \setminus \{\mathbf{0}\}$ es una subvariedad suave de \mathbb{C}^n , reducida, de codimensión $2d$ e interseca transversalmente a la foliación \mathcal{F} .*

También analizaremos las propiedades locales de la variedad polar M cuando el germe de $M(\mathcal{F}, g)$ en $\mathbf{0}$ es analítico (en este caso diremos que \mathcal{F} tiene un contacto analítico en $\mathbf{0}$). Entre otras cosas, veremos que en este caso M consta de un número finito de componentes irreducibles, las cuales tienen estructura cónica y daremos algunos ejemplos de foliaciones que cumplen esta propiedad. En la sección 4.3 se hace un análisis de la topología de las hojas de \mathcal{F} en los casos en que una hoja pertenece (o no) al saturado de M por \mathcal{F} . También se analiza la forma de emplear los índices de Morse de la función distancia al origen (Q) en su restricción a cada hoja de \mathcal{F} para calcular la característica de Euler de una hoja \mathcal{L} . Por otra parte, siguiendo las ideas desarrolladas en [13], haremos un análisis de como se modifica la foliación $\mathcal{F}_\varepsilon := \mathcal{F} \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ al cambiar de esfera. A este respecto, se demuestra en 4.4.1 que si M consta únicamente de puntos de índice de Morse 0, podemos definir un homeomorfismo de \mathcal{F}_ε a \mathcal{F}'_ε que envía hojas de la foliación en \mathbb{S}_ε a hojas de la foliación correspondiente en $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$ (para esferas de radios suficientemente pequeños).

En el capítulo 5 se desarrolla el caso de foliaciones de \mathbb{C}^n de codimensión 1. Específicamente, analizaremos foliaciones cuyas hojas corresponden a las fibras de una función holomorfa $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$. En este caso podemos dar ecuaciones que definen a la variedad polar $M(\mathcal{F}, g)$, lo cual nos permite ver que \mathcal{F} tiene un contacto analítico respecto a g en el origen (ver definición 4.2.1). Además, analizaremos las propiedades de foliaciones definidas por polinomios de Pham-Brieskorn y polinomios homogéneos. En el primer caso encontramos que si $f(\mathbf{z}) = z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \dots + z_n^{a_n}$ es tal que algún $a_j = 2$, entonces la foliación \mathcal{F} (definida por f) no preserva la estructura de Morse de la función cuadrado de la distancia al origen (Q), es decir, la variedad polar $M(\mathcal{F}, Q)$ tiene puntos de degeneración. Por otro lado, veremos que si \mathcal{F} es una foliación definida por un polinomio homogéneo de grado $k > 2$ entonces \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de Q .

Finalmente, en el capítulo 7 se hará un análisis de los índices de Morse de la función Q en su restricción a las hojas de una foliación definida por un polinomio de Pham-Brieskorn (para $n = 2$) y se usará el teorema 4.3.3 para calcular la característica de Euler de las hojas de la foliación. También se hará un análisis de cómo se modifican las degeneraciones de los puntos de contacto al perturbar la métrica.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo vamos a dar definiciones y resultados básicos que se van a emplear a lo largo de la tesis. Entre los temas a tratar se encuentran: resultados básicos de teoría de Morse, foliaciones, conjuntos analíticos y el teorema de Poincaré-Hopf.

1.1. Teoría de Morse

A lo largo de este trabajo de tesis se empleará una extensión del concepto de función de Morse al caso de una variedad foliada (ver la primera sección del capítulo 3), por lo cual en esta sección repasaremos (sin demostración) algunos resultados importantes dentro de la teoría de Morse clásica, siguiendo la línea de pensamiento mostrada en las notas de Lê y Massey [24]. Para hacer una revisión más profunda de temas relacionados con Teoría de Morse ver [17], [24], [25], [28] y [29].

Para efectos de este trabajo, una *variedad suave* N será una variedad dotada con un atlas maximal suave, es decir, un atlas tal que sus funciones de transición son C^∞ . De igual forma, una *variedad analítica real* (resp. *compleja*) será una variedad tal que sus funciones de transición son analíticas en el sentido real (resp. complejo), es decir, las funciones de transición están representadas por una serie de potencias en \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) convergente en una vecindad de cada punto.

Definición 1.1.1. Sea $f : N \rightarrow P$ una función suave (i.e. C^∞) entre dos variedades suaves N y P . Un punto \mathbf{p} en N tal que $d_{\mathbf{p}}f$ es sobre, es llamado un *punto regular de f* . Un punto \mathbf{p} en N en el cual la diferencial $d_{\mathbf{p}}f$ no es sobre es llamado *punto crítico de f* . Si f no tiene puntos críticos, entonces f es una submersión.

Sea $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ una función de una variedad suave N en \mathbb{R} . Sea $p \in N$ y sea (x_1, \dots, x_n) un sistema suave de coordenadas locales en una vecindad abierta de \mathbf{p} .

Definición 1.1.2. El punto \mathbf{p} es un *punto crítico no degenerado* de f si \mathbf{p} es un punto crítico de f y la matriz Hessiana $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{p})\right)_{j,k}$ es no singular.

El *índice de f en un punto crítico no degenerado* \mathbf{p} es el número de valores propios negativos de $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{p})\right)_{j,k}$, contados con multiplicidad.

Un punto crítico \mathbf{p} de índice 0 o n corresponde a un mínimo o máximo local de f respectivamente, en cualquier otro caso diremos que \mathbf{p} es un punto silla. Observemos que el hecho de que un punto crítico \mathbf{p} sea no degenerado no depende del sistema coordenado elegido. De igual forma el índice de un punto crítico no degenerado \mathbf{p} de f es independiente de la elección de coordenadas locales reales, sin embargo, consideremos el siguiente caso. Si N es una variedad compleja de dimensión n , la podemos pensar como una variedad real de dimensión $2n$ la cual tiene asociados de manera canónica los sistemas de coordenadas reales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ y $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ donde $z_k = x_k + iy_k$ para $1 \leq k \leq n$. En la sección 3.2 veremos que la matriz de cambio de base asociada a los sistemas coordenados mencionados no es una matriz con entradas reales y por tanto en este caso el índice de Morse de f en un punto crítico no degenerado no necesariamente se preserva. En la sección 3.2 se hace un análisis profundo de como afecta el considerar el sistema de coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ al cálculo del índice de una función.

Vamos a enunciar ahora el *lema de Morse*.

Lema 1.1.3. Sea \mathbf{p} un punto crítico no degenerado de f . Entonces, existe un sistema de coordenadas locales (y_1, \dots, y_n) en una vecindad U de \mathbf{p} , con $y_j(\mathbf{p}) = 0$ para todo j , y tal que para todo $\mathbf{q} \in U$

$$f(\mathbf{q}) = f(\mathbf{p}) - (y_1(\mathbf{q}))^2 - \dots - (y_\lambda(\mathbf{q}))^2 + (y_{\lambda+1}(\mathbf{q}))^2 + \dots + (y_n(\mathbf{q}))^2$$

donde λ es el índice de f en \mathbf{p} .

El resultado anterior nos brinda una forma muy sencilla de describir a las funciones de Morse alrededor de un punto crítico no degenerado.

Denotemos por $N_{\leq a}$ al conjunto $f^{-1}((-\infty, a])$, notemos que si $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f entonces $N_{\leq a}$ es una variedad suave con frontera $\partial N_{\leq a}$. Un resultado fundamental de teoría de Morse es el *teorema de descomposición en n -celdas*, el cual nos indica como podemos obtener $N_{\leq b}$ a partir de $N_{\leq a}$ donde $a < b$.

Teorema 1.1.4. ([28, Teo. 3.5]) Si f es una función diferenciable sobre una variedad N sin puntos críticos degenerados y si cada $N_{\leq a}$ es compacto, entonces N tiene el tipo de homotopía de un complejo CW, con una celda de dimensión λ por cada punto crítico de índice λ .

El teorema 1.1.4 nos da una forma de relacionar propiedades de la función f , a través de sus puntos críticos, con propiedades de la variedad N sobre la cual está definida. Por

otra parte, el hecho de que los puntos críticos de la función f sean no degenerados es fundamental no sólo en la demostración del teorema anterior, sino en una gran cantidad de resultados de teoría de Morse.

Definición 1.1.5. La función suave $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función de Morse* si y sólo si todos los puntos críticos de f son no degenerados.

Notemos que la definición 1.1.5 sería poco interesante, si el conjunto de funciones de Morse fuera muy pequeño, sin embargo, tenemos:

Teorema 1.1.6. ([29, pág. 11]) Si g es una función C^2 de un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} , entonces para casi toda función lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la función $g+L : U \rightarrow \mathbb{R}$ no tiene puntos críticos degenerados.

Teorema 1.1.7. ([17, Cap. 6, Teo. 1.2]) Para cualquier variedad N , el conjunto de funciones de Morse forma un conjunto abierto denso de $C^r(N, \mathbb{R})$ (con la topología fuerte sobre $C^r(N, \mathbb{R})$) para toda $r \geq 2$.

El resultado 1.1.6 nos dice que bajo perturbaciones lineales genéricas podemos transformar una función g en una función de Morse. Por otra parte 1.1.7 nos dice que el conjunto de funciones de Morse es denso. Ambos teoremas son una muestra de la estabilidad del conjunto de funciones de Morse.

Todos los resultados vistos para el caso real se pueden aplicar a funciones holomorfas sobre variedades complejas pensando a éstas últimas como variedades reales de dimensión par, sin embargo, este enfoque no siempre es el más adecuado debido a que existen algunos resultados que son válidos únicamente sobre variedades complejas. Dada una función analítica compleja $c : N \rightarrow \mathbb{C}$ definida sobre una variedad compleja n -dimensional, podemos generalizar la definición de punto crítico no degenerado dada en 1.1.2 al caso complejo, de igual forma existe una versión de los teoremas 1.1.3 y 1.1.6 para el caso complejo. En este trabajo no vamos a dar explícitamente las propiedades mencionadas, debido a que no seguiremos este enfoque, sin embargo, si vamos a enunciar un resultado que sólo es válido para variedades complejas y que nos será de gran utilidad.

Teorema 1.1.8. ([1, Teo. 1]) Si N es una subvariedad analítica compleja n -dimensional de \mathbb{C}^m , la cual es un subconjunto cerrado de \mathbb{C}^m , entonces N tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo n -dimensional. En particular $H_j(N; \mathbb{Z}) = 0$ para $j > n$.

Notemos que como N es una variedad compleja de dimensión n , en el sentido real N es una variedad $2n$ -dimensional, por lo que el resultado anterior no es trivial. El teorema 1.1.8 nos dice que la homología de una subvariedad analítica compleja de \mathbb{C}^m la cual es un cerrado en \mathbb{C}^m tiene homología trivial más allá de la dimensión media.

Otro resultado importante para el caso de variedades complejas es el *principio del máximo* (ver [12]).

Teorema 1.1.9. ([12, Teo. 4.11]) *Sea N un subconjunto de \mathbb{C}^n abierto y conexo y $f : N \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si existe un punto $\mathbf{z}_0 \in N$ tal que $|f|$ tiene un máximo local en \mathbf{z}_0 , entonces f es constante.*

El principio del módulo máximo, aplicado a las funciones coordenadas sobre \mathbb{C}^n , implica que la única subvariedad compleja de \mathbb{C}^n , conexa y compacta, es un punto. Por otra parte, dicho resultado nos dice que no cualquier función holomorfa puede tener un máximo local.

Para concluir esta sección vamos a dar el *teorema de la función implícita para funciones complejas* (ver [12]).

Teorema 1.1.10. *Sea $B \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ un conjunto abierto, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m) : B \rightarrow \mathbb{C}^m$ un mapeo holomorfo y $(\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0) \in B$ un punto con $\mathbf{f}(\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0) = 0$ y*

$$\det \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}(\mathbf{z}_0, \mathbf{w}_0) \right)_{\substack{\mu=1, \dots, m \\ \nu=n+1, \dots, n+m}} \neq 0 .$$

Entonces, existe una vecindad abierta $U = U' \times U'' \subset B$ y un mapeo holomorfo $g : U' \rightarrow U''$ tal que

$$\{(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in U' \times U'' \mid \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = 0\} = \{(\mathbf{z}, g(\mathbf{z})) \mid \mathbf{z} \in U'\} .$$

1.2. Variedades algebraicas y conjunto analíticos

En esta sección daremos algunas definiciones y propiedades básicas de los conjuntos algebraicos y analíticos que nos serán de gran utilidad. Para estudiar teoría básica de variedades algebraicas ver [30], [32] y [36], para el caso analítico ver [3], [24], [33] y [41].

Denotemos por \mathcal{K} al campo \mathbb{R} o \mathbb{C} y sea N una variedad analítica real o compleja (es decir, una variedad tal que sus cartas coordenadas están dadas por funciones analíticas reales o complejas respectivamente). Sea $\mathcal{O}_{\mathcal{K}^n}$ el anillo de polinomios en n variables sobre \mathcal{K} y sea \mathcal{O}_N^{anal} el anillo de funciones analíticas de N en \mathcal{K} . Éstas últimas son funciones dadas localmente por series de potencias convergentes sobre el campo \mathcal{K} en n variables. En el caso complejo una función f en \mathcal{O}_N^{anal} es simplemente una función holomorfa. Notemos que no estamos pidiendo que sobre cada punto de N , la representación en series de potencias de la función analítica sea la misma.

En general, hay muchas propiedades que se valen en el caso complejo pero no en el caso real, sin embargo, las definiciones y propiedades que enunciaremos en esta sección serán válidas en ambos casos a menos de que específicamente se indique lo contrario.

Definición 1.2.1. Sea $A \subset \mathcal{O}_{\mathcal{K}^n}$. Definimos *el lugar de ceros de A* , $V(A)$, como el conjunto de puntos en \mathcal{K}^n

$$V(A) := \{x \in \mathcal{K}^n \mid f(x) = 0 \text{ para todo } f \in A\} .$$

Sea $E \subset \mathcal{K}^n$. Definimos el *ideal de polinomios los cuales se anulan en E* como

$$\mathcal{I}(E) := \{f \in \mathcal{O}_{\mathcal{K}^n} \mid f(e) = 0 \text{ para todo } e \in E\} .$$

Las definiciones anteriores también son válidas en el caso analítico.

Definición 1.2.2. Sea $A \subseteq \mathcal{O}_N^{anal}$. Definimos *el lugar de ceros de A*, $V(A)$, como el conjunto de puntos en N

$$V(A) := \{x \in N \mid f(x) = 0 \text{ para todo } f \in A\} .$$

Sea $E \subseteq N$. Definimos el *ideal de funciones analíticas los cuales se anulan en E* como

$$\mathcal{I}(E) := \{f \in \mathcal{O}_N^{anal} \mid f(e) = 0 \text{ para todo } e \in E\} .$$

Si $A = \{f_1, \dots, f_k\}$, escribimos $V(f_1, \dots, f_k)$ en lugar de $V(A)$. Notemos que un conjunto de la forma $V(A)$ donde $A \subset \mathcal{O}_{\mathcal{K}^n}$ satisface que $V(A) = V(\langle A \rangle)$, por otra parte, $\mathcal{O}_{\mathcal{K}^n}$ es Noetheriano, por tanto $V(A)$ es el cero de un número finito de polinomios f_1, \dots, f_k . En este caso decimos que $V(A)$ es un *subconjunto algebraico de \mathcal{K}^n* . En el caso analítico tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.3. Un subconjunto $X \subseteq N$ es un *subconjunto analítico de N* si y sólo si X es cerrado en N y para todo $x \in X$ existe una vecindad abierta W de x en N y una colección finita $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_W^{anal}$ tal que $W \cap X = V(f_1, \dots, f_k)$.

Notemos que un subconjunto algebraico es un caso particular de un subconjunto analítico, el cual está definido por funciones polinomiales.

Definición 1.2.4. Un subconjunto algebraico no vacío de \mathcal{K}^n (resp., subconjunto analítico de N no vacío) es *irreducible* si y sólo si no puede ser escrito como la unión de dos subconjuntos algebraicos (resp., analíticos) propios.

Notemos que la definición anterior implica que un subconjunto analítico irreducible de N debe ser conexo.

1.2.1. Caso local

En general estaremos interesados en las propiedades locales de conjuntos algebraicos o analíticos, por lo cual daremos a continuación las definiciones de germen de un espacio y de una función alrededor de un punto \mathbf{p} .

Definición 1.2.5. Dados dos espacios analíticos X y X' y $\mathbf{p} \in X \cap X'$ vamos a decir que X y X' son equivalentes en \mathbf{p} , denotado por $X \sim_{\mathbf{p}} X'$, si existe un conjunto abierto U con $\mathbf{p} \in U$ tal que $U \cap X = U \cap X'$. La clase de equivalencia bajo la relación $\sim_{\mathbf{p}}$ será llamada *germen de X en \mathbf{p}* y lo denotaremos por $X_{\mathbf{p}}$.

De igual forma, dos funciones $h : X \rightarrow Y$ y $h' : X' \rightarrow Y'$ son equivalentes en $\mathbf{p} \in X \cap X'$ si existe una vecindad abierta U de \mathbf{p} tal que $X \cap U = X' \cap U$ y $h|_U = h'|_U$. La clase de equivalencia de una función h bajo la relación anterior será llamada *germen de h en \mathbf{p}* y la denotaremos por $[h]_{\mathbf{p}}$.

Si \mathbf{p} está en N vamos a denotar por $\mathcal{O}_{N,\mathbf{p}}^{anal}$ al *anillo de gérmenes de funciones* las cuales son analíticas en alguna vecindad de \mathbf{p} en N .

Dados los conjuntos $A \subseteq \mathcal{O}_{N,\mathbf{p}}^{anal}$ y $E_{\mathbf{p}}$ el germen de un conjunto de puntos de N en \mathbf{p} , podemos definir $V_{\mathbf{p}}(A)$ y $I(E_{\mathbf{p}})$ análogamente a las definiciones 1.2.2 en el caso global. De igual forma, vamos a decir que el *germen $X_{\mathbf{p}}$ es irreducible* si y sólo si $X_{\mathbf{p}}$ no puede ser escrito como la unión de dos gérmenes analíticos propios en \mathbf{p} .

Notemos que las distintas nociones de irreducibilidad son independientes entre sí, por ejemplo un subconjunto puede ser analíticamente irreducible de manera global, pero no irreducible localmente. El siguiente ejemplo se encuentra en las notas de Lê y Massey [24, pág. 100]

Ejemplo 1.2.6. Consideremos el conjunto $X := V(y^2 - x^3 - x^2) \subset \mathbb{R}^2$. Este conjunto es algebraica y analíticamente irreducible en \mathbb{R}^2 . Sin embargo, X no es analíticamente irreducible en $\mathbf{0}$. Para demostrar lo anterior notemos que la expresión $y^2 - x^3 - x^2$ se puede factorizar como $(y + x\sqrt{1+x})(y - x\sqrt{1+x})$. En este caso $\sqrt{1+x}$ denota la serie de potencias convergente en $\mathbf{0}$ cuyo cuadrado es $1+x$, dicha serie es convergente dentro de la bola centrada en el origen y de radio 1, por lo tanto en el interior de la bola de radio 1 tenemos

$$X = V(y + x\sqrt{1+x}) \cup V(y - x\sqrt{1+x}),$$

es decir, el germen de X en $\mathbf{0}$ tiene dos componentes irreducibles, sin embargo, observemos que la descomposición anterior sólo se da localmente.

Notemos que si $I(X_{\mathbf{p}})$ es el conjunto de gérmenes de funciones analíticas en $\mathcal{O}_{N,\mathbf{p}}^{anal}$ las cuales se anulan sobre $X_{\mathbf{p}}$, entonces $I(X_{\mathbf{p}})$ es un ideal. Más aún, $X_{\mathbf{p}}$ es irreducible si y sólo si $I(X_{\mathbf{p}})$ es un ideal primo, dicha propiedad junto con el hecho de que $\mathcal{O}_{N,\mathbf{p}}^{anal}$ es un anillo Noetheriano implican la siguiente proposición (ver [33, pág. 32]).

Proposición 1.2.7. *Cualquier germen analítico $X_{\mathbf{p}}$ puede ser escrito como una unión finita $X_{\mathbf{p}} = \cup_{j=1}^k X_{j,\mathbf{p}}$ de gérmenes analíticos irreducibles $X_{j,\mathbf{p}}$. Además, dicha descomposición es única salvo el orden.*

Al igual que en el caso algebraico, en el caso analítico podemos clasificar los puntos en suaves y singulares, sin embargo, podemos tener puntos suaves de distintas dimensiones, específicamente tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.8. Sea X un subconjunto analítico de N . Un punto $\mathbf{p} \in X$ es llamado *suave de dimensión j* si y sólo si existe una vecindad abierta W de \mathbf{p} en N tal que $X \cap W$ es una subvariedad analítica de W de dimensión j sobre el campo \mathcal{K} , es decir, si $X \cap W$ está dotado de un atlas analítico que lleva abiertos de \mathcal{K}^j en abiertos de $X \cap W$. Así $\mathbf{p} \in X$ es suave de dimensión j si y sólo si existe una vecindad abierta W de \mathbf{p} en N y $f_{j+1}, \dots, f_n \in \mathcal{O}_W^{anal}$ tal que $W \cap X = V(f_{j+1}, \dots, f_n)$ y para todo $\mathbf{x} \in W$, $d_{\mathbf{x}}f_{j+1}, \dots, d_{\mathbf{x}}f_n$ son linealmente independientes.

Denotamos al conjunto de puntos suaves de X por \mathring{X} y al conjunto de puntos suaves de dimensión j por $\mathring{X}^{(j)}$. Un punto suave de X de la máxima dimensión es llamado *punto regular*. Denotaremos al conjunto de puntos regulares de X por X_{reg} .

Un punto $\mathbf{p} \in X$ el cual no es suave es llamado *punto singular*. Denotaremos al lugar de puntos singulares de X por X_{sing} .

Dada la clasificación anterior tenemos las siguientes propiedades.

Teorema 1.2.9. *Sea X un subconjunto analítico de N . Supongamos que $0 \leq j \leq n$.*

1. $\mathring{X}^{(j)}$ es una subvariedad analítica j -dimensional de N y es un subconjunto abierto de X ;
2. los $\mathring{X}^{(j)}$ son disjuntos para j diferentes, $\mathring{X} = \mathring{X}^{(0)} \cup \dots \cup \mathring{X}^{(n)}$, \mathring{X} es una subvariedad analítica de N , es decir, \mathring{X} está dotado de un atlas analítico y \mathring{X} es abierto en X ;
3. si \mathbf{p} es un punto suave de X , entonces el germen $X_{\mathbf{p}}$ es irreducible;
4. \mathring{X} es denso en X ;
5. X_{sing} es un subconjunto cerrado de X no denso en X .

Para la demostración del inciso (4) ver Teo. 1 en la pág. 41 de [33], para el resto de los incisos ver teorema 5.14 de [24].

Definición 1.2.10. La *dimensión* sobre \mathcal{K} , $dim X$, de un conjunto analítico $X \subseteq N$ es el mayor j tal que $\mathring{X}^{(j)}$ es no vacío. La *dimensión de X en un punto $\mathbf{p} \in X$* , $dim_{\mathbf{p}} X$ es el mayor número j tal que \mathbf{p} está en la cerradura de $\mathring{X}^{(j)}$. Decimos que X es de *dimensión pura* si y sólo si la dimensión de X en cada punto $\mathbf{p} \in X$ es independiente de \mathbf{p} .

En el caso en que el conjunto analítico X sea de dimensión pura, todos los puntos suaves tienen la misma dimensión y por tanto el conjunto de puntos suaves coincide con el conjunto de puntos regulares de X .

En particular en la sección 4.1 demostraremos que la variedad polar $M(\mathcal{F}, g)$ asociada a una foliación \mathcal{F} y a una función de Morse g es una variedad analítica de dimensión pura, por lo que los puntos de M serán únicamente de dos tipos, puntos regulares o singulares.

Un resultado que nos va a ser de gran utilidad es el *lema de estructura cónica*. En Milnor [30] se demuestra dicho resultado para el caso de una variedad algebraica V , sin embargo vamos a enunciar el resultado en su forma más general, es decir, para el caso de conjuntos analíticos.

Teorema 1.2.11. *Sea X un conjunto analítico. Entonces, para cualquier \mathbf{p} en X existe un $\varepsilon(\mathbf{p}) > 0$ suficientemente pequeño tal que para cualquier $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(\mathbf{p})$, si \mathbb{B}_ε denota la bola cerrada centrada en \mathbf{p} y de radio ε , entonces el par $(\mathbb{B}_\varepsilon, X \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$ es homeomorfo al cono sobre el par $(\partial\mathbb{B}_\varepsilon, X \cap \partial\mathbb{B}_\varepsilon)$.*

Para la demostración ver la sección 3 de [5].

1.3. Teorema de Poincaré-Hopf

El teorema del índice de Poincaré-Hopf es un resultado clásico para variedades dotadas de un campo vectorial con singularidades aisladas, en el cual se relacionan conceptos puramente topológicos al referirnos a la característica de Euler y conceptos analíticos al hablar del índice de un campo vectorial. En esta sección enunciaremos sin demostración el teorema del índice de Poincaré-Hopf en su versión para variedades con y sin frontera. Para más detalles ver [4], [6], [14], [22], [31] y [37].

Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n con coordenadas (x_1, \dots, x_n) y sea $\nu = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ un campo vectorial sobre U . Vamos a decir que el campo vectorial es suave, continuo o analítico siempre que sus componentes $\{f_1, \dots, f_n\}$ lo sean. Una *singularidad de un campo ν* (o *cero del campo*), es un punto en el cual todas las componentes f_i se anulan.

Para definir el índice de Poincaré-Hopf, consideremos ν un campo vectorial continuo sobre un abierto U de \mathbb{R}^n con una singularidad aislada en el punto \mathbf{p} y sea \mathbb{S}_ε una esfera pequeña en U alrededor de \mathbf{p} . Entonces, el *índice local de Poincaré-Hopf* de ν en un punto \mathbf{p} , denotado por $Ind_{PH}(\nu, \mathbf{p})$, es el grado del mapeo de Gauss $\frac{\nu}{\|\nu\|}$ de \mathbb{S}_ε en la esfera unitaria en \mathbb{R}^n .

Consideremos ahora una variedad suave n -dimensional N , en este caso, un campo vectorial suave sobre N es una sección de su haz tangente TN . Dada una carta local en N , (x_1, \dots, x_n) , un campo local sobre N es expresado como $\nu = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Es bien sabido que el índice de un campo vectorial es invariante bajo difeomorfismos (ver por ejemplo

[31, pág. 33]), por lo que podemos extender la definición de índice de un campo vectorial sobre \mathbb{R}^n a un campo definido sobre N .

Definición 1.3.1. Sea $\phi : U \rightarrow V \subset N$ una parametrización local alrededor de $\mathbf{p} \in N$ tal que $\nu(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$. Entonces, el índice $Ind_{PH}(\nu, \mathbf{p})$ de ν en \mathbf{p} se define como el índice de $d\phi^{-1} \circ \nu \circ \phi$ en $\phi^{-1}(\mathbf{p})$.

El índice total de ν denotado por $Ind_{PH}(\nu, N)$ es la suma de sus índices locales en sus puntos singulares.

Vamos ahora a enunciar el teorema de Poincaré-Hopf. Para la demostración de los resultados siguientes ver [31, Cap. 6] y [37, Sec. III.1].

Teorema 1.3.2. Sea N una variedad compacta sin frontera y sea ν un campo vectorial C^∞ el cual únicamente se anula en un número finito de puntos p_1, \dots, p_r en N . Entonces

$$\sum_{i=1}^r Ind_{PH}(\nu, p_i) = \chi(N) ,$$

donde $\chi(N)$ denota la característica de Euler-Poincaré de N .

Si N es una variedad con frontera, la suma $Ind_{PH}(\nu, N)$ depende fuertemente del campo ν cerca de la frontera de N .

Teorema 1.3.3. Sea N una variedad C^∞ , compacta, orientada y con frontera. Sea ν un campo vectorial C^∞ sobre N tal que contiene sólo un número finito de singularidades en el interior de N y es no singular en ∂N . Si ν es transversal a ∂N y apunta siempre al exterior de N , entonces

$$Ind_{PH}(\nu, N) = \chi(N) .$$

Por otra parte, si ν es transversal a ∂N y apunta siempre al interior de N , entonces

$$Ind_{PH}(\nu, N) = \chi(N) - \chi(\partial N) .$$

El siguiente resultado nos da una forma alternativa de calcular el índice de un campo vectorial en el caso de que la parte lineal del campo sea no degenerada. Consideremos un campo vectorial ν sobre una subvariedad $N \subset \mathbb{R}^k$ y sea \mathbf{p} una singularidad de ν . Pensemos a ν como un mapeo de N en \mathbb{R}^k tal que la derivada $D_{\mathbf{p}}\nu : T_{\mathbf{p}}N \rightarrow \mathbb{R}^k$ está definida.

Lema 1.3.4. ([31, pág. 37]) Si la transformación lineal $D_{\mathbf{p}}\nu$ tiene determinante no nulo en \mathbf{p} , se dice que \mathbf{p} es una singularidad no degenerada, en este caso \mathbf{p} es un cero aislado de ν y su índice es $+1$ o -1 de acuerdo a si el determinante de $D_{\mathbf{p}}\nu$ es positivo o negativo.

En el caso de que el campo vectorial no sea lineal, o tenga parte lineal degenerada, si el campo es analítico y su singularidad es algebraicamente aislada, entonces se puede calcular su índice de Poincaré-Hopf haciendo uso de la fórmula de signatura de Eisenbud-Levine-Khimshiashvili, la cual expresa el índice de un campo vectorial analítico en términos de la signatura de una forma cuadrática asociada a éste (ver [10] y [2]). Sin embargo, debido a que todos los campos vectoriales que trabajaremos a lo largo de este escrito tendrán parte lineal no degenerada, no entraremos en detalles al respecto.

1.4. Foliaciones

Una foliación de dimensión d de una variedad diferenciable N^n es, a grandes rasgos, una descomposición de N en subvariedades conexas de dimensión d llamadas hojas, las cuales corresponden localmente a subconjuntos de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ con la segunda coordenada constante. Ver [8], [9], [37] y [38].

Definición 1.4.1. Consideremos la pareja $(N, \mathcal{S}^{(r)})$, donde N es una variedad C^r de dimensión n sin frontera y $\mathcal{S}^{(r)}$ es un atlas C^r de N . Sea $\mathcal{F} := \{\mathcal{L}_\alpha | \alpha \in A\}$ una familia de subconjuntos arco-conexos \mathcal{L}_α de la variedad N . Decimos que \mathcal{F} es una foliación C^r de dimensión d de N si se satisfacen las siguientes propiedades

- i) $\mathcal{L}_\alpha \cap \mathcal{L}_\beta = \emptyset$ para α, β en A con $\alpha \neq \beta$.
- ii) $\cup_{\alpha \in A} \mathcal{L}_\alpha = N$
- iii) Dado un punto \mathbf{p} en N , existe una carta $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in \mathcal{S}^{(r)}$ alrededor de \mathbf{p} tal que para $\mathcal{L}_\alpha \in \mathcal{F}$ con $\mathcal{L}_\alpha \cap U_\lambda \neq \emptyset$ cada componente arco-conexa de $\varphi_\lambda(\mathcal{L}_\alpha \cap U_\lambda)$ es de la forma

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \varphi_\lambda(\mathcal{U}_\lambda) | x_{d+1} = c_{d+1}, \dots, x_n = c_n\}.$$

donde c_{d+1}, \dots, c_n son constantes determinadas por las componentes arco-conexas.

Decimos que cada $\mathcal{L}_\alpha \in \mathcal{F}$ es una *hoja de la foliación*. Una variedad N junto con una foliación \mathcal{F} es llamada *foliada* y es denotada por (N, \mathcal{F}) .

Si N es una subvariedad compleja de \mathbb{C}^n , \mathcal{S} es un atlas analítico complejo (i.e. tal que para $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ el mapeo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ es holomorfo) y (N, \mathcal{F}) satisface al análogo a las propiedades a, b y c en \mathbb{C}^n , entonces diremos que \mathcal{F} es una *foliación holomorfa de N* .

En particular, en este trabajo estaremos interesados en foliaciones holomorfas del espacio vectorial \mathbb{C}^n .

Definición 1.4.2. Vamos a definir una *foliación holomorfa de \mathbb{C}^n con singularidades aisladas* como una pareja (\mathcal{F}, S) donde S consta de un número finito de puntos en \mathbb{C}^n y \mathcal{F} restringida a $\mathbb{C}^n - S$ es una foliación holomorfa.

En particular, a lo largo de esta tesis estaremos interesados en foliaciones con una singularidad aislada en el origen. Por simplicidad en la notación vamos a denotar a una tal foliación simplemente por \mathcal{F} .

Definición 1.4.3. Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa en un conjunto $U \subset \mathbb{C}^n$ con singularidades aisladas. Dada una subvariedad suave $M \subset U$ (posiblemente real), decimos que *la foliación \mathcal{F} es transversal a M* si el conjunto singular de \mathcal{F} no interseca a M y para cada $\mathbf{p} \in M$ tenemos $T_{\mathbf{p}}M + T_{\mathbf{p}}\mathcal{L}_{\mathbf{p}} = T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^{2n}$ como espacios lineales reales, donde, $\mathcal{L}_{\mathbf{p}}$ denota la hoja de \mathcal{F} que contiene a \mathbf{p} .

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo revisaremos el trabajo desarrollado por Gómez-Mont, Seade y Verjovsky en [13], en el cual se hace un estudio de la *variedad de contacto* (en el sentido de Thom) entre una foliación holomorfa de dimensión 1 (*de tipo Morse*) con singularidad aislada en el origen y la foliación dada por esferas centradas en el origen. En cierto sentido, los resultados obtenidos en dicho trabajo son una generalización de los resultados obtenidos en [7] y [20] para foliaciones lineales. Cabe mencionar que uno de los objetivos de esta tesis es generalizar los resultados obtenidos en [13] para foliaciones de dimensión uno, al caso de foliaciones holomorfas de dimensión d .

Por otra parte, vamos a mostrar algunas similitudes entre los conceptos de *variedad de contacto entre \mathcal{F} y g* (en el sentido de Thom) y *variedad polar asociada a f y H* en el sentido de geometría algebraica, donde f es una función holomorfa y H es un k -plano en \mathbb{C}^{n+1} . En este sentido, *la idea de la tesis es pensar en una forma alternativa de variedad polar que nos permita localizar el estudio de foliaciones holomorfas en una vecindad de una singularidad aislada, considerando funciones de Morse en lugar de proyecciones lineales.*

Finalmente, haremos mención de las variedades LVM y de su relación con la variedad de contacto definida por una foliación lineal.

2.1. Foliationes de dimensión 1.

En 1964 René Thom escribió un artículo en el que plasmó ideas muy interesantes de cómo usar la teoría de Morse para estudiar la estructura de una variedad foliada no singular. Dichas ideas han sido fuente de inspiración para diversos trabajos, entre ellos el trabajo desarrollado en [13] por Gómez-Mont, Seade y Verjovsky, en el cual los autores generalizan algunos de los resultados obtenidos en [7] y [20] para foliaciones lineales al caso de foliaciones holomorfas de dimensión 1 con singularidad aislada en el origen.

Debido a la importancia que tiene para nosotros el trabajo desarrollado en [13], desglosaremos en esta sección los resultados obtenidos en dicho trabajo.

Consideremos un campo vectorial holomorfo F en una vecindad U de $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ con $\mathbf{0}$ como su única singularidad y sea \mathcal{F} la foliación definida por F . Notemos que fuera del origen las hojas de \mathcal{F} corresponden a curvas complejas en \mathbb{C}^n . La idea principal en [13] es ver como son los contactos (en el sentido de Thom) entre la foliación \mathcal{F} y la foliación dada por las esferas canónicas en \mathbb{C}^n centradas en el origen.

Definición 2.1.1. Sea M la variedad analítica real en U que consiste de los puntos $\mathbf{z} \in U$ tales que

$$\langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle = \sum_{i=1}^n F_i(\mathbf{z}) \bar{z}_i = 0 . \quad (2.1)$$

Llamamos a M *variedad de contactos* de F .

El conjunto M corresponde geoméricamente a los puntos de tangencia entre las hojas de la foliación \mathcal{F} y la foliación por esferas bajo la métrica usual, más aún, en el caso en que el campo F es lineal, en el dominio de Siegel y satisface la hipótesis de hiperbolicidad, la definición anterior coincide con el conjunto de puntos de distancia mínima al origen sobre las hojas de Siegel.

La idea ahora es definir un conjunto de campos vectoriales similares a los campos lineales, en el sentido de que sus contactos con la foliación por esferas centradas en el origen son no degenerados. Antes de eso, vamos a definir un par de campos vectoriales que nos serán de gran utilidad.

Se define el campo vectorial *radial* o *campo vectorial distancia* sobre las hojas de \mathcal{F} como

$$r_F(\mathbf{z}) := -\overline{\langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle} F(\mathbf{z}) .$$

Este campo analítico real tiene su conjunto singular en M y fuera de M se mueve sobre cada hoja de \mathcal{F} en la dirección en que infinitesimalmente se acerca al origen. Definamos el *campo vectorial tangencial* τ_F como

$$\tau_F(\mathbf{z}) := i \overline{\langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle} F(\mathbf{z}) .$$

Nuevamente, la variedad M corresponde al lugar singular del campo τ_F , más aún, las curvas integrales de τ_F definen una foliación real \mathcal{F}_ε de dimensión 1 sobre cada esfera pequeña, \mathbb{S}_ε , que corresponde a la foliación definida por la intersección $\mathcal{F} \cap \mathbb{S}_\varepsilon$.

Definición 2.1.2. La foliación \mathcal{F} de F es de *tipo Morse* si las singularidades de r_F sobre cada hoja son no-degeneradas. F es de tipo Morse si \mathcal{F} lo es.

Notemos que los campos vectoriales de tipo de Morse son un buen candidato para generalizar muchos de los resultados que se obtuvieron para el caso de foliaciones lineales.

Teorema 2.1.3. *Sea F un campo vectorial holomorfo en U con un único cero en $\mathbf{0}$. Si F es un campo de tipo Morse, entonces $M = \{\mathbf{0}\}$ o $M \setminus \{\mathbf{0}\}$ es una variedad suave de codimensión dos. En el segundo caso, cada componente conexa de $M \setminus \{\mathbf{0}\}$ consiste enteramente de puntos mínimos sobre las hojas o puntos silla de la función distancia al origen. La foliación \mathcal{F} es transversal a $M \setminus \{\mathbf{0}\}$.*

Observación: Haefliger mostró en [15] que si tenemos una variedad suave N , encajada en \mathbb{C}^n transversalmente a una foliación holomorfa de dimensión complementaria, entonces el atlas de la foliación determina un atlas holomorfo sobre N . Por el teorema 2.1.3 sabemos que la variedad de contactos $M \setminus \{\mathbf{0}\}$ satisface precisamente dichas propiedades, lo cual implica que podemos dotar a $M \setminus \{\mathbf{0}\}$ de una estructura compleja.

Para la demostración del teorema 2.1.3 la idea es, dado un punto \mathbf{z} en M , considerar una carta plana de la foliación \mathcal{F} alrededor de \mathbf{z} y emplear que \mathbf{z} es un punto no-degenerado de r_F para demostrar que M está definido como el cero de dos ecuaciones reales linealmente independientes.

El teorema anterior junto con las propiedades siguientes generalizan los resultados obtenidos en [7] en relación a la estructura del conjunto de puntos mínimos en las hojas de Siegel.

Observaciones:

- a) Como M es una variedad analítica, el número de componentes conexas de $M \setminus \{\mathbf{0}\}$ es finito. Más aún, M luce como un cono cerca del origen, con base su intersección con una esfera pequeña.
- b) El hecho de que M es un cono nos dice que si tenemos un contacto de un tipo en U , entonces tenemos toda una curva de contactos del mismo tipo.
- c) Si \mathcal{F} es de tipo Morse, entonces $M \setminus \{\mathbf{0}\}$ está encajado en U con haz normal trivial. Más aún, la restricción de F a U provee una trivialización de este haz.

Veamos ahora que podemos decir de la topología de las hojas de la foliación.

Denotemos por $\{\gamma_t\}$ el flujo del campo vectorial r_F en \mathbb{C}^n , definimos el ω -límite de un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ como el conjunto $\omega(\mathbf{x})$ que consiste de los puntos $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ para los cuales podemos encontrar una sucesión $\{t_j\}$ en \mathbb{R} tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_{t_j}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Denotemos por $\Omega(r_F)$ a la unión de los ω -límites de todas las órbitas de r_F .

Sea \widehat{M} el saturado de M en el disco \mathbb{D}_ε dado por las hojas de \mathcal{F} , es decir, la restricción al disco \mathbb{D}_ε , del conjunto de hojas que intersecan a M . En la sección 3 de [13] los autores

demuestran que el ω -límite de r_F , $\Omega(r_F)$, es precisamente la variedad de contacto M . Más aún, si \mathbf{x} pertenece al conjunto de saturación de M en \mathbb{D}_ε dado por las hojas de \mathcal{F} , entonces el ω -límite de \mathbf{x} es un punto en M , por otra parte, si \mathbf{x} está en $K := \mathbb{D}_\varepsilon - \widehat{M}$ entonces su ω -límite es $\{\mathbf{0}\}$. En particular, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que cada hoja de \mathcal{F} contenida en K es una copia inmersa de \mathbb{R}^2 o $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dependiendo de si la hoja interseca a \mathbb{S}_ε en una línea o un círculo.

Notemos que al suponer que el campo r_F en su restricción sobre cada hoja de la foliación \mathcal{F} es de tipo Morse, podemos usar resultados clásicos de teoría de Morse para estudiar la topología de las hojas de la foliación. Denotemos por M^+ (resp. M^-) a la unión de las componentes de M que consisten de puntos mínimos (resp. puntos silla) en las hojas.

Proposición 2.1.4. *Si \mathcal{L} es una hoja compacta, entonces $\mathcal{L} \subset \widehat{M}$ y su característica de Euler-Poincaré es igual al número de puntos en M^+ menos el número de puntos en M^- .*

No daremos en este momento la demostración del resultado anterior, sin embargo, en la sección 4.3 demostraremos un teorema que incluye dichos resultados.

Por otra parte, la restricción de la foliación \mathcal{F} de \mathbb{C}^n a una esfera centrada en el origen de radio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño define una foliación real \mathcal{F}_ε sobre la esfera \mathbb{S}_ε , con singularidades en los puntos de $M_\varepsilon = M \cap \mathbb{S}_\varepsilon$. Una pregunta muy interesante que se plantean los autores en [13] es ¿las foliaciones \mathcal{F}_ε y $\mathcal{F}_{\varepsilon'}$ sobre dos esferas de radios suficientemente pequeños son equivalentes topológicamente o diferenciablemente?

No se da una respuesta general en el artículo, sin embargo en el caso en que la variedad de contactos conste únicamente de puntos de distancia mínima al origen, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.1.5. *Sea \mathcal{F} tal que la variedad M de contactos consiste enteramente de puntos de distancia mínima en las hojas. Sea $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ suficientemente pequeños, sean \mathcal{F}_ε y $\mathcal{F}_{\varepsilon'}$ las foliaciones inducidas sobre las correspondientes esferas \mathbb{S}_ε y $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$ y sean $M_\varepsilon = M \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ y $M_{\varepsilon'} = M \cap \mathbb{S}_{\varepsilon'}$. Entonces existe un homeomorfismo $\phi : (\mathbb{S}_\varepsilon, M_\varepsilon) \rightarrow (\mathbb{S}_{\varepsilon'}, M_{\varepsilon'})$ que lleva las hojas de \mathcal{F}_ε en hojas de $\mathcal{F}_{\varepsilon'}$.*

La demostración de dicho resultado consiste en definir una vecindad tubular adecuada alrededor de M_ε , fuera de la cual, el campo r_F sea transversal a todas las esferas de radio menor que ε , esta propiedad nos permite definir el homeomorfismo deseado haciendo uso de las líneas de flujo del campo r_F . Por otra parte, tenemos que el haz normal a M_ε en \mathbb{S}_ε es trivial, lo que nos permite elegir una sección del haz que no se anula en ningún punto, la idea es hacer uso de dicha sección para extender el homeomorfismo definido ya en la frontera de la vecindad tubular al interior de ésta.

Un hecho importante es que la demostración de la existencia del homeomorfismo entre las esferas está fuertemente basado en el hecho de que M_ε es una variedad analítica

real encajada en \mathbb{S}_ε con haz normal trivial, sin embargo dicha propiedad no es válida en general para foliaciones de dimensión $d > 1$, lo que impide generalizar la demostración a foliaciones de dimensión d directamente. Por otra parte, los autores hacen hincapié en que el impedimento para generalizar el teorema al caso en que existan singularidades del tipo silla es el hecho de mantener las conexiones entre ellos bajo control.

Cabe mencionar que el trabajo de tesis consiste en gran medida en generalizar los resultados obtenidos en [13].

Vamos ahora a hacer un paréntesis para analizar la definición de variedad polar relativa a un espacio lineal H y vamos a compararla con el concepto de “variedad de contacto”.

2.2. Variedad polar

El estudio de las variedades polares surgió en el siglo XIX y ha sido muy importante dentro de la geometría algebraica. Un ejemplo de dichas variedades son las llamadas variedades de Schubert. Entre otras cosas, tiene aplicaciones al estudio de estratificaciones de Whitney y al cálculo de clases características; han sido estudiadas por grandes personajes como: B. Teissier, Lê Dũng Tráng, H. Hamm, entre otros.

Sea $f \in \mathcal{O}_{n+1} \cong \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$ y $X_{\mathbf{0}} := \{f(z_0, \dots, z_n) = 0\}$ un germen de hipersuperficie con singularidad aislada en $\mathbf{0}$. Sea U una vecindad de $\mathbf{0}$ suficientemente pequeña tal que f converge en U . Consideremos la explosión del ideal jacobiano $\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \cdot \mathcal{O}_U$ la cual denotaremos por $\pi : Z \rightarrow U$, donde Z corresponde a la cerradura en $U \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ de la gráfica del morfismo

$$\begin{aligned} U - \{\mathbf{0}\} &\longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n \\ (z_0, \dots, z_n) &\longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial z_0} : \dots : \frac{\partial f}{\partial z_n}\right). \end{aligned}$$

Definimos G como la restricción a Z de la proyección $U \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Podemos resumir esta información en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z \subset U \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}\mathbb{P}^n \\ \downarrow \pi & & \\ U & & \end{array}$$

En base a los morfismos anteriores tenemos la siguiente proposición - definición ([39, Prop. 1.1]).

Proposición-definición. *Para todo entero $1 \leq k \leq n$ y todo k -plano $(H, \mathbf{0}) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, \mathbf{0})$ consideremos el conjunto F_H de puntos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ correspondiente a los hiperplanos*

de \mathbb{C}^{n+1} que contienen a H ; F_H es un subespacio lineal de dimensión $n - k$ de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Consideremos por otra parte el conjunto S_H^0 de puntos \mathbf{p} de $U - \{\mathbf{0}\}$ tales que el hiperplano tangente en \mathbf{p} a la hipersuperficie de nivel de f que pasa por \mathbf{p} , definida por $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{p}) = 0$, contiene (en dirección) a H , entonces, tenemos

$$\pi(G^{-1}(F_H)) = \overline{S_H^0}$$

(cerradura de S_H^0 en U). Este subespacio analítico cerrado de U será llamado **variedad polar asociada a f y H** , y lo denotaremos por S_H .

En [39] se demuestra que existe un conjunto denso de k -planos H a través de los cuales la variedad polar asociada a f y H es “bonita”, es decir, S_H es una intersección completa de dimensión (en el origen) igual a $n + 1 - k$ con singularidad aislada.

En el caso en que H es un hiperplano en \mathbb{C}^{n+1} la variedad polar se convierte en una curva, la curva polar Γ_H de H . En [16] los autores demuestran que existe un abierto de Zariski \mathfrak{h}_o , denso, de “direcciones” H tales que el conjunto Γ_H corresponde precisamente a una curva analítica compleja de dimensión uno y por tanto Γ_H es llamado curva polar de H , sin embargo, esto no ocurre en las direcciones que se encuentran fuera de \mathfrak{h}_o . Es decir, en la notación de [16] sólo el conjunto de direcciones “buenas” define una curva polar (fig. 2.1).

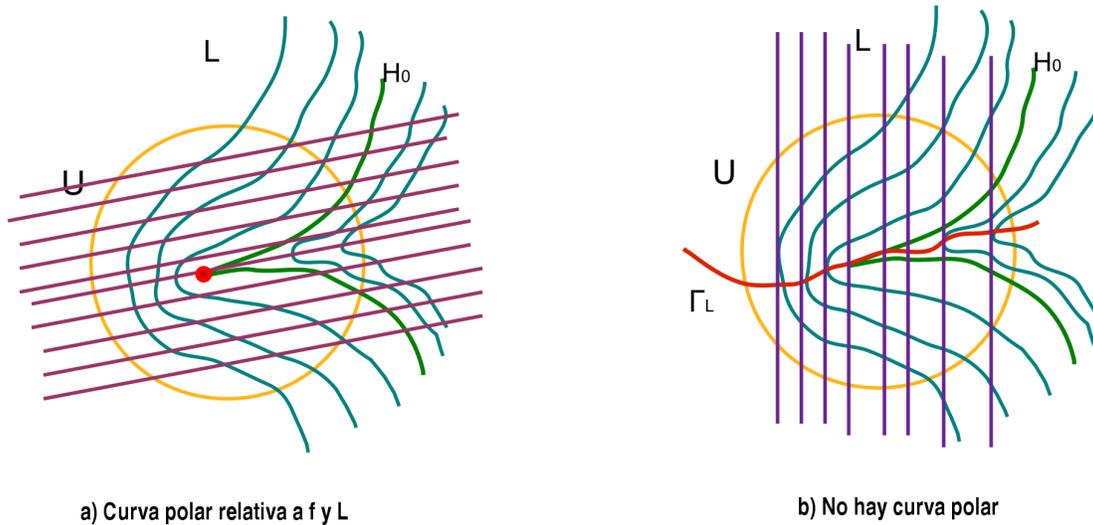


Figura 2.1: Ejemplo de curva polar asociada a una función f

Vamos a recalcar (de la proposición - definición anterior) que la variedad polar asociada a f y H corresponde precisamente a la cerradura del conjunto de puntos en que el espacio tangente a las fibras de la función holomorfa f contiene al k -plano H , es decir, podemos pensar a la variedad polar como la cerradura del conjunto de puntos en

que la foliación \mathcal{F} definida por las fibras de f y la foliación definida por el k -plano H (al considerar todos los k -planos paralelos a H en \mathbb{C}^{n+1}) se tocan de manera tangente.

Notemos que si en lugar de considerar un k -plano H , nos fijamos en el conjunto de tangencias de \mathcal{F} con la foliación definida por las fibras de una forma cuadrática, digamos $Q = |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2$, el conjunto de tangencias corresponde precisamente a la variedad de contacto (en el sentido de Thom) entre la foliación \mathcal{F} y la foliación definida por Q (fig. 2.2). Lo anterior nos muestra que el concepto que hasta el momento hemos definido como “*variedad de contacto*” generaliza en cierto sentido al concepto de “*variedad polar*”, por otra parte, el nombre de “*variedad de contacto*” se presta a confusiones con los nombres usados dentro del área de “*geometría de contacto*” por lo que a partir de este momento vamos a llamar “*variedad polar relativa a \mathcal{F} y g* ” al conjunto de puntos de tangencia entre \mathcal{F} y la foliación definida por la función de Morse $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

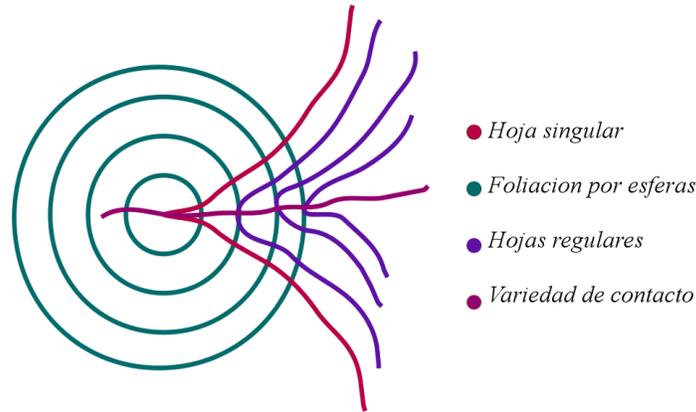


Figura 2.2: Variedad de contacto en el sentido de Thom.

Definición 2.2.1. Vamos a llamar *variedad polar de la foliación \mathcal{F} relativa a la función de Morse g* , o de manera abreviada *variedad polar relativa a \mathcal{F} y g* , al conjunto $M = M(\mathcal{F}, g)$, que consiste de los puntos críticos de la función g restringida a cada una de las hojas de la foliación \mathcal{F} , unión el origen.

Más adelante demostraremos que este conjunto corresponde precisamente al conjunto de tangencias entre ambas foliaciones. Notemos que el origen es un punto singular de la foliación \mathcal{F} y de la foliación dada por esferas, lo que implica que $\mathbf{0}$ no puede ser considerado un punto regular de la función g restringida a las hojas de \mathcal{F} .

2.3. Trabajos recientes relacionados con la variedad de contacto.

Cabe mencionar que existen trabajos recientes enfocados a generalizar los resultados obtenidos en [13], en particular los trabajos desarrollados por Ito, Scardua y Yamagishi en [18] y [19] en los cuales se realiza un estudio de la variedad polar (o variedad de contacto en la notación empleada en dicho artículos) asociada a foliaciones de codimensión 1, particularmente en el caso de foliaciones lineales. A lo largo de esta tesis iremos mencionando dichos resultados y mostrando su relación con el proyecto doctoral.

Por otra parte, en el caso de tener una foliación \mathcal{F} definida por un conjunto de campos vectoriales lineales con ciertas propiedades, la variedad de contacto definida por \mathcal{F} y por las esferas canónicas centradas en el origen está relacionada con un conjunto de variedades muy interesantes llamadas variedades LVM, dichas variedades fueron estudiadas primero por López de Medrano y Verjovsky en [21] y posteriormente por Meersseman en [26]. Las variedades LVM se pueden ver como la proyectivización (compleja) de la variedad de contacto (o variedad polar en nuestra notación) asociada a una foliación lineal, por lo que dichas variedades heredan algunas propiedades de la variedad de contacto asociada.

Las variedades LVM forman una familia de variedades complejas, compactas, no-simplécticas. Parte de su belleza radica en que dichas variedades están dotadas con una acción “bonita” de un toro compacto, es decir, existe una acción del toro sobre \mathcal{N} de tal forma que el espacio cociente es un politopo convexo simple y el tipo combinatorio de este politopo caracteriza la topología de la variedad. A continuación daremos una breve descripción de la forma en que se construyen las variedades LVM. Para un estudio más detallado del tema ver [21], [26], [27] y [35].

Construcción de las variedades LVM

Sea m y n dos enteros positivos tales que $n > 2m$. Sea $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ una n -tupla de vectores en \mathbb{C}^m y $\Lambda_j = (\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^m)$ para j entre 1 y n . Sea $\mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ la envolvente convexa de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ en \mathbb{C}^m .

Definición 2.3.1. Vamos a llamar *configuración admisible* a una n -tupla $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ que satisface

- i) la *condición de Siegel*: $\mathbf{0} \in \mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$;
- ii) la *condición de hiperbolicidad débil*: para cada $2m$ -tupla de enteros (j_1, \dots, j_{2m}) tal que $1 \leq j_1 < \dots < j_{2m} \leq n$, tenemos $\mathbf{0} \notin \mathcal{H}(\Lambda_{j_1}, \dots, \Lambda_{j_{2m}})$.

Geoméricamente la definición anterior se puede interpretar como sigue: el $\mathbf{0}$ está contenido en el politopo convexo $\mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$, sin embargo $\mathbf{0}$ no está contenido en ningún hiperplano que pase por $2m$ de sus vértices.

A una configuración admisible $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ le asociamos la foliación lineal \mathcal{F} de \mathbb{C}^n generada por los m campos vectoriales sobre \mathbb{C}^n

$$\mathcal{F}_j : (z_1, \dots, z_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k^j z_k \frac{\partial}{\partial z_k},$$

los cuales conmutan entre sí. Dichos campos definen una acción holomorfa de \mathbb{C}^m sobre \mathbb{C}^n cuyas órbitas son las hojas de \mathcal{F} y la cual tiene una singularidad en $\mathbf{0}$.

En este caso, al igual que para una foliación lineal de dimensión 1 podemos definir hojas de Siegel y hojas de Poincaré.

Definición 2.3.2. Sea \mathcal{L} una hoja de la foliación previa. Si $\mathbf{0}$ pertenece a la cerradura de \mathcal{L} decimos que \mathcal{L} es una *hoja de Poincaré*, en caso contrario decimos que \mathcal{L} es una *hoja de Siegel*. Vamos a denotar por \mathcal{S} al conjunto de hojas de Siegel.

Consideremos ahora el conjunto de contactos V_Λ de la foliación \mathcal{F} con las esferas alrededor del origen, el cual está definido por las ecuaciones analíticas reales

$$V_\Lambda = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n \Lambda_j |z_j|^2 = 0 \right\}.$$

En el caso de tener una foliación definida por una configuración admisible, al igual que para foliaciones lineales de dimensión 1, se tiene que la variedad suave $V_\Lambda^* = V_\Lambda - \{\mathbf{0}\}$ parametriza las hojas de Siegel de \mathcal{F} , es decir, cada hoja de Siegel contiene un único punto de V_Λ^* , más aún, dicho punto es un punto de distancia mínima al origen, por otra parte, tenemos que V_Λ^* es una variedad compleja de dimensión $n - m$.

Notemos que V_Λ^* es la proyección del espacio de hojas de Siegel \mathcal{S} por la \mathbb{C}^m -acción definida por los campos F_1, \dots, F_n . Además, la multiplicación escalar

$$t \cdot (z_1, \dots, z_n) \mapsto (tz_1, \dots, tz_n)$$

define una acción sobre \mathcal{S} que conmuta con la acción de \mathbb{C}^m . Definimos entonces la variedad cociente

$$\mathcal{N} = \frac{\mathcal{S}}{\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*}.$$

La variedad \mathcal{N} es por definición una variedad LVM. Observemos que el cociente \mathcal{S}/\mathbb{C}^m es precisamente la variedad V_Λ^* , entonces podemos ver a \mathcal{N} como la proyectivización de V_Λ^* , además como V_Λ^* tiene estructura cónica alrededor del origen, \mathcal{N} es el cociente de la variedad compacta $V_\Lambda^* \cap \mathbb{S}_r$ por \mathbb{S}^1 , lo cual implica que \mathcal{N} es compacta.

En [26] se demuestra que las variedades LVM forman una familia de variedades complejas, compactas, no-simplécticas, además, en [27] se estudia la topología de dichas variedades y su relación con las variedades tóricas.

Capítulo 3

Generalidades

En este capítulo definiremos nuestro objeto principal de estudio, la “*variedad polar relativa a \mathcal{F} y g* ”, daremos una noción de cuando una foliación es “buena”, la cual corresponde al caso en que “*la foliación \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g* ” y definiremos el *índice de Morse* en los puntos de la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g .

Además, analizaremos los sistemas de coordenadas reales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ y $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ que emplearemos en el estudio de funciones de la forma $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Específicamente mencionaremos como están dados los cambios de coordenadas entre dichos sistemas y analizaremos la forma en que afecta el cambiar de un sistema coordinado a otro, especialmente en el cálculo de índices de Morse.

3.1. Conceptos básicos

Consideremos una función de Morse $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con un único punto crítico en el origen, que asumimos es de Morse y tiene índice de Morse 0 (en general es suficiente con pedir que g tenga punto crítico aislado en el origen). Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa de $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, de dimensión d , con singularidad aislada en el origen. Entonces, podemos definir la *variedad polar relativa a \mathcal{F} y g* . Notemos que esta definición se dio en el capítulo anterior, sin embargo, dada la importancia de este concepto en el desarrollo de esta tesis vamos a recordar su definición y algunas de sus características.

Definición 3.1.1. Vamos a llamar *variedad polar de la foliación \mathcal{F} relativa a la función de Morse g* , o de manera abreviada *variedad polar relativa a \mathcal{F} y g* , al conjunto $M = M(\mathcal{F}, g)$, que consiste de los puntos críticos de la función g restringida a cada una de las hojas de la foliación \mathcal{F} unión el origen. Llamaremos *puntos de contacto* a los puntos en $M(\mathcal{F}, g)$.

Recordemos que en el capítulo 2 comentamos que el concepto definido en 3.1.1 corresponde precisamente a la *variedad de contacto entre la foliación \mathcal{F} y la función de Morse g* , concepto establecido por Thom en [40] y seguido en [13] por Gómez-Mont, Seade y Verjovsky (para el caso en que g corresponde a la función cuadrado de la distancia al origen), sin embargo, las similitudes entre la *variedad polar relativa a una forma lineal L* (ver [39]) y el *conjunto de puntos de tangencia entre la foliación \mathcal{F} y la foliación definida por las curvas de nivel de g* son muy amplias, debido a esto y a la gran cantidad de confusiones que ocasiona el emplear el nombre *variedad de contacto* con los términos empleados en el área de *geometría de contacto* hemos decidido que el nombre que mejor corresponde a la definición dada en 3.1.1 y que emplearemos de aquí en adelante es *variedad polar de la foliación \mathcal{F} relativa a la función de Morse g* .

Nota: a partir de ahora, cada vez que hablemos de la *variedad polar* nos referiremos a la *variedad polar de la foliación \mathcal{F} relativa a la función de Morse g* .

Vamos entonces a empezar el estudio de las propiedades de la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g . Notemos que en el caso de tener una foliación de dimensión uno, el conjunto M corresponde de manera geométrica a los puntos donde la foliación \mathcal{F} y la foliación dada por las fibras de g se tocan de manera tangente.

Lema 3.1.2. *Sea \mathcal{L} una hoja de la foliación \mathcal{F} . El conjunto de puntos críticos de $g|_{\mathcal{L}}$ corresponde a los puntos donde \mathcal{L} es tangente a las superficies de nivel de g .*

Demostración. Recordemos que en una vecindad de \mathbf{p} , un punto regular de g , la ecuación $D_{\mathbf{p}}(g|_{\mathcal{L}}) = (D_{\mathbf{p}}g)|_{T_{\mathbf{p}}\mathcal{L}}$ es válida, lo cual implica que la condición $D_{\mathbf{p}}g|_{\mathcal{L}} \equiv 0$ es equivalente a $T_{\mathbf{p}}\mathcal{L} \subset T_{\mathbf{p}}g^{-1}(g(\mathbf{p}))$. \square

Observemos que si F es un campo vectorial holomorfo con ceros aislados definido sobre \mathbb{C}^n , entonces éste define una foliación holomorfa \mathcal{F} de dimensión uno cuyas hojas corresponden a las líneas de flujo de F y los ceros del campo son las singularidades de la foliación. En [13] Gómez-Mont, Seade y Verjovsky definen a la variedad polar $M(\mathcal{F}, Q)$, donde Q es la función cuadrado de la distancia al origen, como el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación

$$\langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle_{\mathbb{C}} = 0, \quad (3.1)$$

donde el producto corresponde al producto hermitiano en \mathbb{C}^n . Vamos a demostrar que la definición anterior corresponde a la definición dada en 3.1.1.

Demostración. Sea $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ la hoja de la foliación \mathcal{F} que contiene a \mathbf{z} . Por 3.1.2 sabemos que un punto \mathbf{z} pertenece a la variedad polar $M(\mathcal{F}, Q)$ si y sólo si los espacios tangentes $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ y $T_{\mathbf{z}}\mathbb{S}_{|\mathbf{z}|}$ se tocan de manera tangente, específicamente $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \subset T_{\mathbf{z}}\mathbb{S}_{|\mathbf{z}|}$, donde $\mathbb{S}_{|\mathbf{z}|}$ denota a la esfera de radio $|\mathbf{z}|$ centrada en el origen. Por otra parte, un vector v pertenece al espacio tangente $T_{\mathbf{z}}\mathbb{S}_{|\mathbf{z}|}$ si y sólo si el producto vectorial real $\langle v, \mathbf{z} \rangle_{\mathbb{R}}$ se anula. Como $F(\mathbf{z}), iF(\mathbf{z})$

son la base del espacio $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ en el sentido real, entonces $\mathbf{z} \in M$ si y sólo si $\langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ y $\langle iF(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ lo cual equivale a $\langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle_{\mathbb{C}} = 0$. \square

En [13] la Teoría de Morse demostró ser una herramienta muy útil en el estudio de las propiedades de las hojas de una foliación holomorfa de dimensión uno. Ahora daremos algunas definiciones que nos ayudarán en el estudio de foliaciones de dimensión $1 \leq d < n$.

Definición 3.1.3. Diremos que *un contacto \mathbf{z} es degenerado* (resp. *no degenerado*) si dada la hoja $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ que contiene a \mathbf{z} , se tiene que \mathbf{z} es un punto crítico degenerado (resp. no degenerado) de la función $g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}$. Si todos los puntos en M son no degenerados, diremos que M es no degenerada.

Recordemos que en [13] los autores introdujeron el concepto de *foliación de tipo Morse* (ver 2.1.2), refiriéndose al caso en que el campo de Morse r_F restringido a cada hoja de la foliación \mathcal{F} tiene únicamente singularidades no degeneradas (este concepto también ha sido empleado en [19] y [18] en el estudio de foliaciones holomorfas de codimensión uno), sin embargo, creemos que el nombre “*foliaciones de tipo Morse*” puede confundirse con “*foliaciones de Morse*” (las cuales son foliaciones de codimensión 1 definidas localmente por una función de Morse) por lo cual hemos decidido darle un nombre diferente en este trabajo.

Vamos entonces a extender la definición 2.1.2 al caso en que \mathcal{F} es una foliación holomorfa de dimensión d y g es una función de Morse arbitraria (con punto crítico de Morse en el origen de índice 0).

Definición 3.1.4. Vamos a decir que *la foliación \mathcal{F} es compatible con la estructura de Morse de g* si la restricción de g a cada una de las hojas \mathcal{L} de la foliación \mathcal{F} , $g|_{\mathcal{L}}$, es nuevamente una función de Morse. A manera de abreviar a menudo diremos simplemente que \mathcal{F} *preserva la estructura de Morse de g* .

Otro concepto importante en la teoría de Morse clásica, es el de índice de Morse de una función, debido a que, podemos usar el teorema de descomposición celular para describir a través de los índices de Morse de una función $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ la topología de la variedad N . A continuación daremos un análogo de dicho concepto al caso de una variedad foliada.

Definición 3.1.5. Asumiremos que un punto \mathbf{z} en $M^* := M \setminus \{\mathbf{0}\}$ es un contacto no degenerado. Entonces definimos su *índice de Morse de g relativo a \mathcal{F}* como el índice de Morse en \mathbf{z} de la restricción de g a la hoja de \mathcal{F} que contiene a \mathbf{z} .

Vamos ahora a hacer un paréntesis para estudiar las propiedades de los sistemas de coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ y $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ los cuales nos serán muy útiles a lo largo de este trabajo.

3.2. Cambios de coordenadas

Parte importante de esta tesis es el desarrollo de las propiedades de la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g en algunos ejemplos específicos, tanto en el sentido diferencial, como en el sentido algebraico o analítico, para lo cual haremos uso de los sistemas de coordenadas reales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ y $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Como era de esperarse, el sistema de coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ en \mathbb{R}^{2n} nos provee de una manera canónica de encontrar los puntos en la variedad polar, así como de calcular sus índices de Morse correspondientes. Por otra parte, el sistema de coordenadas reales $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ en $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, facilita el cálculo de índices y demás propiedades en ejemplos específicos, debido a la gran cantidad de relaciones que preservan sus coordenadas, por lo cual es importante analizar la forma en la que ambos sistemas se relacionan. Específicamente, en esta sección vamos a hacer un análisis de la relación que existe entre los sistemas de coordenadas reales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ y $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ y de su repercusión en el cálculo de índices de Morse.

Recordemos la relación fundamental entre ambos sistemas de coordenadas.

$$z = x + iy \quad \text{y} \quad \bar{z} = x - iy \quad (3.2)$$

o de manera equivalente

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (3.3)$$

Usando las ecuaciones ((3.2)) podemos ver que las primeras derivadas parciales de una función f en coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ y coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ se relacionan mediante

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial z_k} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y_k} = i \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \right) \quad (3.4)$$

para todo $k = 1, \dots, n$. Al resolver las ecuaciones anteriores para $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i \frac{\partial f}{\partial y_k} \right). \quad (3.5)$$

Vamos ahora a emplear las ecuaciones ((3.4)) para calcular las segundas derivadas

parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} &= \left(\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_j \partial z_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_k}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial x_k} &= i \left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \right) \\
&= i \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_j \partial z_k} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_k} \right]; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y_k} &= \left(\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) i \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \right) \\
&= i \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_k} - \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_j \partial z_k} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_k} \right]; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k} &= i \left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) i \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \right) \\
&= -\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_j \partial z_k} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_k}.
\end{aligned}$$

Notemos que las ecuaciones anteriores nos indican como transformar el conjunto de segundas derivadas parciales en términos de las coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ a coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, sin embargo, hay que notar que la matriz de cambio de coordenadas entre ambos sistemas no tiene únicamente entradas reales, y por tanto las matrices hessianas correspondientes a cada sistema de coordenadas puede no brindarnos directamente la misma información, por lo que es necesario hacer un análisis un poco más profundo de la relación entre dichas matrices.

3.2.1. Repercusiones de los cambios de coordenadas en el cálculo de índices de Morse.

Para analizar cómo se comporta la matriz hessiana de una función de la forma $f : \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bajo cambios de coordenadas en el dominio, recordaremos algunas definiciones y resultados de álgebra lineal, ver ([11]).

Definición 3.2.1. Sea $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$. Se dice que B es *congruente* a A si existe una matriz invertible $C \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ tal que $B = C^t A C$.

Una consecuencia de la *Ley de inercia de Sylvester* para formas bilineales simétricas, nos dice que dos matrices reales simétricas de $n \times n$ son congruentes si y sólo si tienen los mismos invariantes, es decir, la misma signatura, rango e índice, donde el índice de A corresponde al número de entradas positivas de la matriz diagonal asociada a A y la

signatura corresponde a la diferencia entre el número de entradas positivas y negativas de la matriz diagonal. Por otra parte, el teorema de cambio de bases nos dice que si H_β y H_γ corresponden a las matrices hessianas de una función $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ en las bases β y γ de \mathbb{R}^{2n} respectivamente, entonces H_β y H_γ son congruentes, es decir, existe una matriz C con entradas reales, invertible tal que $H_\gamma = C^t H_\beta C$. Por lo que tenemos que la signatura, el rango y el índice son invariantes bajo cambios de coordenadas propiamente reales. Recordemos que el índice de Morse de f lo podemos ver como el número de valores propios negativos de la matriz hessiana asociada a f , por lo que también es invariante bajo cambios de coordenadas reales. Veamos qué pasa cuando cambiamos de coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ a coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ en \mathbb{R}^2 .

Proposición 3.2.2. *Si denotamos por H_x y H_z a la matriz hessiana de f en coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ y coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ respectivamente, entonces*

$$H_x = C_n^t H_z C_n,$$

donde C_n es la matriz

$$C_n = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -i \end{pmatrix}.$$

La demostración consiste en un cálculo directo del producto de matrices, empleando las relaciones entre las segundas derivadas parciales en coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ y $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ dadas al final de la sección anterior.

Notemos que la matriz de cambio de base en este caso no es una matriz con entradas reales, por lo que la *ley de inercia de Silvester* no aplica.

Ejemplo 3.2.3. Sea $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ la función holomorfa $f(z_1, z_2) = z_1^3 + z_2^3$ y \mathcal{F} la foliación dada por las fibras de esta función. Consideremos la función de Morse $Q(z_1, z_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2$ y su restricción a una hoja \mathcal{L} de la foliación \mathcal{F} , $Q|_{\mathcal{L}}$.

Consideremos un punto $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \neq \mathbf{0}$ en \mathcal{L} , y supongamos que $p_2 \neq 0$, en este caso $\frac{\partial f}{\partial z_2}(\mathbf{p}) \neq 0$, por tanto podemos aplicarle a f el teorema de la función implícita en su versión compleja (ver 1.1.10), lo cual implica que, en una vecindad U de \mathbf{p} , las hojas de la foliación \mathcal{F} se pueden parametrizar de manera holomorfa en términos de su primera coordenada, es decir, cualquier punto $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ sobre una hoja $\mathcal{L} \cap U$ satisface $z_2 = z_2(z_1)$, por lo tanto podemos considerar a $Q|_{\mathcal{L}}$ localmente como una función de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ en \mathbb{R} , en particular, si derivamos implícitamente la ecuación que define a cada hoja, $z_1^3 + z_2^3 = \text{constante}$, en términos de las coordenadas reales z_1 y \bar{z}_1 obtenemos que

$\frac{\partial z_2}{\partial z_1} = -\frac{z_1^2}{z_2^2}$. Esta ecuación nos indica como se relacionan las coordenadas z_1 y z_2 sobre cada hoja de la foliación \mathcal{F} en una vecindad de \mathbf{p} , por lo tanto vamos a emplear dicha relación para calcular las primeras derivadas parciales de $Q|_{\mathcal{L}}$ respecto a z_1 y \bar{z}_1

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q|_{\mathcal{L}}}{\partial z_1} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \frac{\partial z_2}{\partial z_1} = \bar{z}_1 - \frac{z_1^2}{z_2^2} \bar{z}_2 ; \\ \frac{\partial Q|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_1} &= z_1 + z_2 \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \bar{z}_1} = z_1 - \frac{\bar{z}_1^2}{\bar{z}_2^2} z_2 .\end{aligned}$$

Notemos que los puntos (z_1, z_2) que se encuentran sobre el eje complejo z_2 son puntos críticos de la función $Q|_{\mathcal{L}}$. Vamos ahora a calcular las segundas derivadas parciales respecto a z_1 y \bar{z}_1

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_1} Q|_{\mathcal{L}} &= -\frac{2z_1}{z_2^2} \cdot \bar{z}_2 - 2\frac{z_1^2}{z_2^3} \cdot \frac{z_1^2}{z_2^2} \cdot \bar{z}_2 ; \\ \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} Q|_{\mathcal{L}} &= 1 + \left| \frac{z_1^2}{z_2^2} \right|^2 ; \\ \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} Q|_{\mathcal{L}} &= 1 + \left| \frac{z_1^2}{z_2^2} \right|^2 ; \\ \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_1} Q|_{\mathcal{L}} &= -\frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2^2} \cdot z_2 - 2\frac{\bar{z}_1^2}{\bar{z}_2^3} \cdot \frac{\bar{z}_1^2}{\bar{z}_2^2} \cdot z_2 .\end{aligned}$$

En particular, la matriz hessiana H_z evaluada en un punto no nulo del eje z_2 toma la forma

$$H_z(0, z_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

por lo que sus valores propios son 1 y -1, en consecuencia su índice de Morse es 1 y corresponde a un punto silla. Utilizando las fórmulas de cambio de base para las segundas derivadas parciales tenemos que la matriz hessiana en coordenadas x_1, y_1 es

$$H_z(0, 0, x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

cuyos valores propios son ambos positivos y por tanto su índice de Morse correspondiente sería 0.

El ejemplo anterior nos muestra que el índice de Morse sólo se preserva bajo cambios de coordenadas reales, y que si bien el sistema de coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ nos facilita sobre manera la realización de cálculos, no podemos obtener el índice de Morse directamente de la matriz hessiana en coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$, pero si mediante la relación $H_x = C^t H_z C$.

Por otra parte, notemos que la matriz C es no singular y por lo tanto si la matriz H_x es degenerada en un punto \mathbf{p} también lo es la matriz H_z en \mathbf{p} , es decir, podemos usar indistintamente ambos sistemas coordenados para determinar si un punto \mathbf{p} es un punto de degeneración de la función $g|_{\mathcal{L}_p}$.

Capítulo 4

Foliaciones holomorfas d -dimensionales.

A lo largo de este capítulo vamos a considerar a \mathcal{F} como una foliación holomorfa de \mathbb{C}^n de dimensión $d \geq 1$, con singularidad aislada en el origen y vamos a denotar por $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ a la hoja de \mathcal{F} que contiene al punto $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Por otra parte, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ va a denotar a una función de Morse definida en U , vecindad abierta del origen en \mathbb{C}^n , con único punto crítico en el origen y tal que su índice de Morse en $\mathbf{0}$ es 0.

El objetivo de este capítulo es analizar las propiedades de la variedad polar $M(\mathcal{F}, g)$ definida por la foliación holomorfa \mathcal{F} y la función de Morse g en U .

La primera sección estará enfocada a dar una caracterización de cuándo una foliación holomorfa \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g en términos de las propiedades de la variedad polar M , específicamente tenemos que: *una foliación \mathcal{F} va a preservar la estructura de Morse de g si y sólo si M es “bonita”, es decir, $M - \{\mathbf{0}\}$ es una variedad suave de dimensión complementaria a la foliación y la intersección de \mathcal{F} y M es transversal.* Cabe mencionar que existe un par de resultados previos en [13] y [19] en esta misma dirección. De hecho, el teorema 4.1.1 es un refinamiento del teorema 2.3 de [13] en el cual se trata el caso de foliaciones holomorfas de dimensión 1 y el cual nos sirvió como fuente de inspiración. En esta primera sección daremos también un par de ejemplos en los que se muestra la utilidad de dicho resultado.

En la sección 2 hablaremos de las propiedades locales de la variedad polar M en el caso en que \mathcal{F} tenga un contacto analítico en $\mathbf{0}$, es decir, cuando el germen de $M(\mathcal{F}, g)$ en $\mathbf{0}$ sea analítico. Entre otras cosas, demostraremos que en el caso de foliaciones holomorfas de dimensión 1 y co-dimensión 1, M tiene un contacto analítico en $\mathbf{0}$. Además, veremos que si \mathcal{F} tiene un contacto analítico en $\mathbf{0}$ entonces M consta de un número finito de componentes irreducibles las cuales tienen estructura cónica.

En la tercera sección hablaremos de la topología de las hojas \mathcal{L} de \mathcal{F} en el caso en que \mathcal{L} se encuentre en el saturado \widehat{M} de M por la foliación \mathcal{F} o cuando \mathcal{L} está en el complemento de \widehat{M} .

Finalmente, en la sección 4 nos enfocaremos a estudiar las propiedades de la foliación \mathcal{F}_ε definida por la restricción de \mathcal{F} a la esfera \mathbb{S}_ε . La idea principal es hacer un análisis de como se modifica la foliación \mathcal{F}_ε al cambiar de esfera. Específicamente estamos interesados en saber si al movernos de una esfera de radio ε a una esfera de radio ε' (ambos suficientemente pequeños) la topología de las foliaciones cambia o no. En relación a esto, se demuestra en 4.4.1 que si M consta únicamente de puntos de índice de Morse 0, podemos definir un homeomorfismo de \mathcal{F}_ε a $\mathcal{F}_{\varepsilon'}$ que envía hojas de la foliación en \mathbb{S}_ε a hojas de la foliación correspondiente en $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$. Dicho resultado es una generalización a los teoremas 4.1 y 4.2 de [13].

4.1. La variedad polar para foliaciones holomorfas de dimensión d

Sea \mathcal{F} como una foliación holomorfa de \mathbb{C}^n de dimensión $d \geq 1$, con singularidad aislada en el origen y vamos a denotar por $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ a la hoja de \mathcal{F} que contiene al punto $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Por otra parte, sea $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse definida en U , vecindad abierta del origen en \mathbb{C}^n , con un único punto crítico en el origen y tal que su índice de Morse en $\mathbf{0}$ es 0.

Teorema 4.1.1. *Sean \mathcal{F} una foliación holomorfa de dimensión d en \mathbb{C}^n y $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse con las características mencionadas anteriormente. Sea $M := M(\mathcal{F}, g)$ la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g . Entonces, \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g si y sólo si $M^* := M \setminus \{\mathbf{0}\}$ es una subvariedad suave de \mathbb{C}^n , real, reducida, de codimensión $2d$ e interseca transversalmente a la foliación \mathcal{F} .*

La demostración del teorema 4.1.1 se dará a través de los dos lemas siguientes. Cabe mencionar que el teorema anterior es un refinamiento del teorema 2.3 de [13] en el cual se demuestra la implicación dada en el lema 4.1.2 para el caso de foliaciones holomorfas de dimensión 1. En [19] se analiza el caso de foliaciones de codimensión 1.

Lema 4.1.2. *Si \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g entonces M^* es una subvariedad suave de \mathbb{C}^n , real, reducida, de codimensión $2d$ que interseca transversalmente a \mathcal{F} .*

Demostración. Sea $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ un punto en U . Consideremos U' una carta plana de la foliación alrededor de \mathbf{z} , contenida en U , con coordenadas holomorfas (z_1, z_2, \dots, z_n) tal que las hojas de \mathcal{F} están dadas localmente por

$$\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \cap U' = \{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in U' \mid z_{d+1} = c_{d+1}, \dots, z_n = c_n \} ,$$

donde c_j son constantes. Entonces, dada la hoja $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ de \mathcal{F} , podemos pensar a $g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}$ en U' como una función que depende únicamente de las coordenadas (z_1, \dots, z_d) o de manera equivalente como función de las coordenadas reales $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_d, \bar{z}_d)$. En consecuencia, la matriz hessiana de la función $g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}$ toma la forma

$$\text{Hess}(g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial z_1 \partial z_1} & \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial z_d \partial z_1} & \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial \bar{z}_d \partial z_1} \\ \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} & \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial z_d \partial \bar{z}_1} & \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial \bar{z}_d \partial \bar{z}_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial z_1 \partial z_d} & \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_d} & \cdots & \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial z_d \partial z_d} & \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial \bar{z}_d \partial z_d} \\ \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial z_1 \partial \bar{z}_d} & \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_d} & \cdots & \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial z_d \partial \bar{z}_d} & \frac{\partial^2 g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}}{\partial \bar{z}_d \partial \bar{z}_d} \end{pmatrix}.$$

Vamos ahora a analizar la estructura de la variedad polar M . Definamos $G(\mathbf{z}) := (G_{1,0}(\mathbf{z}), G_{0,1}(\mathbf{z}), \dots, G_{d,0}(\mathbf{z}), G_{0,d}(\mathbf{z}))$, donde $G_{j,0}(\mathbf{z}) := \frac{\partial}{\partial z_j} g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}(\mathbf{z})$ y $G_{0,j}(\mathbf{z}) := \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}(\mathbf{z})$ para $1 \leq j \leq d$. Entonces M se puede ver como el conjunto de ceros de las funciones $\{G_{j,0}(\mathbf{z}), G_{0,j}(\mathbf{z})\}_{1 \leq j \leq d}$ cuya jacobiana es

$$D_{\mathbf{z}}G = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_{1,0}}{\partial z_1} & \frac{\partial G_{1,0}}{\partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial G_{1,0}}{\partial z_d} & \frac{\partial G_{1,0}}{\partial \bar{z}_d} & \frac{\partial G_{1,0}}{\partial z_{d+1}} & \cdots & \frac{\partial G_{1,0}}{\partial \bar{z}_n} \\ \frac{\partial G_{0,1}}{\partial z_1} & \frac{\partial G_{0,1}}{\partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial G_{0,1}}{\partial z_d} & \frac{\partial G_{0,1}}{\partial \bar{z}_d} & \frac{\partial G_{0,1}}{\partial z_{d+1}} & \cdots & \frac{\partial G_{0,1}}{\partial \bar{z}_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_{d,0}}{\partial z_1} & \frac{\partial G_{d,0}}{\partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial G_{d,0}}{\partial z_d} & \frac{\partial G_{d,0}}{\partial \bar{z}_d} & \frac{\partial G_{d,0}}{\partial z_{d+1}} & \cdots & \frac{\partial G_{d,0}}{\partial \bar{z}_n} \\ \frac{\partial G_{0,d}}{\partial z_1} & \frac{\partial G_{0,d}}{\partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial G_{0,d}}{\partial z_d} & \frac{\partial G_{0,d}}{\partial \bar{z}_d} & \frac{\partial G_{0,d}}{\partial z_{d+1}} & \cdots & \frac{\partial G_{0,d}}{\partial \bar{z}_n} \end{pmatrix}.$$

Observemos que la submatriz correspondiente a las primeras $2d$ columnas de $D_{\mathbf{z}}G$ es precisamente la matriz $H(\mathbf{z}) := \text{Hess}(g|_{\mathcal{L}})(\mathbf{z})$. Recordemos que la hipótesis del lema nos dice que \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g , por lo tanto si \mathbf{z} es un punto de M^* entonces $H(\mathbf{z})$ es una matriz no singular y por tanto $D_{\mathbf{z}}G$ tiene rango $2d$, lo que implica que M^* es la preimagen de un valor regular de G , en consecuencia M^* es una subvariedad real de \mathbb{R}^{2n} reducida y de codimensión $2d$.

Para demostrar la transversalidad entre \mathcal{F} y M^* consideremos el vector con j -ésima entrada no nula

$$v_j := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

El conjunto de vectores $\{v_j\}_{1 \leq j \leq 2n}$ corresponde a la base canónica de \mathbb{R}^{2n} en coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$. Notemos que el conjunto de vectores $\{v_j\}_{1 \leq j \leq 2d}$ forma una base del espacio $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ para todo $\mathbf{z} \in M^* \cap U'$, por otra parte, al aplicar la diferencial $D_{\mathbf{z}}G$ al vector v_j se obtiene precisamente la j -ésima columna de la matriz $D_{\mathbf{z}}G$, lo anterior, junto con el hecho de que las primeras $2d$ columnas de $D_{\mathbf{z}}G$ son linealmente independientes implican que el espacio tangente $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ no interseca al espacio nulo de $D_{\mathbf{z}}G$, por lo tanto, los espacios $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ y M^* se encuentran transversalmente. \square

Notemos de la demostración anterior que si la función de Morse g es analítica, entonces M^* es analítica.

Lema 4.1.3. *Si M^* es subvariedad diferenciable real de \mathbb{R}^{2n} , reducida, de dimensión $2(n-d)$ e interseca transversalmente a \mathcal{F} , entonces \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g .*

Demostración. Sea $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ y G como en la demostración del lema anterior. Recordemos que $M = G^{-1}(0)$. Por hipótesis M^* es una variedad diferenciable, reducida y de dimensión real $2(n-d)$ entonces, para un punto \mathbf{z} en M^* la matriz $D_{\mathbf{z}}G$ tiene rango $2d$.¹

Sea $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^{2d} y $\mathbf{w}_0 := (\mathbf{v}_0, \mathbf{0})$ en \mathbb{R}^{2n} . Sabemos por la demostración anterior, que \mathbf{w}_0 es un elemento de $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ y que las matrices $D_{\mathbf{z}}G$ y $H(\mathbf{z})$ se relacionan mediante $D_{\mathbf{z}}G = (H(\mathbf{z}), A)$, donde A es una matriz real de $2d \times 2(n-d)$ con entradas constantes. Así

$$D_{\mathbf{z}}G(\mathbf{w}_0) = H(\mathbf{z})(\mathbf{v}_0) . \quad (4.1)$$

Como la hoja $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ interseca transversalmente a M^* y estos tienen dimensiones complementarias, entonces el vector \mathbf{w}_0 no puede estar en el núcleo de $D_{\mathbf{z}}G$. Lo anterior junto con la ecuación (4.1) implica que $H(\mathbf{z})(\mathbf{v}_0)$ es distinto de cero, como esto se satisface para todo $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^{2d} , la matriz $H(\mathbf{z})$ es no singular en todo punto \mathbf{z} en M^* y por tanto $g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}$ no tiene puntos de degeneración. \square

Corolario 4.1.4. *Bajo las hipótesis del teorema 4.1.1 cada hoja de la foliación \mathcal{F} interseca a M en un conjunto discreto de puntos, además M^* es de dimensión pura.*

Demostración. El primer enunciado es una consecuencia directa de la transversalidad de \mathcal{F} y M mostrada en el teorema 4.1.1 y de un teorema básico de topología diferencial sobre la dimensión de la intersección de espacios transversales, el cual nos indica que

$$\text{codim}(\mathcal{L} \cap M) = \text{codim}(\mathcal{L}) + \text{codim}(M) = 2 + (2n - 2) = 2n ,$$

por lo tanto el conjunto $\mathcal{L} \cap M$ consta a lo más de un conjunto discreto de puntos. La segunda parte es una consecuencia directa de la demostración del lema 4.1.2. \square

Notemos que el hecho de que la variedad M^* sea reducida es indispensable en el desarrollo del teorema, ya que en caso contrario la función g restringida a las hojas podría tener degeneraciones. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.5. Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función de Morse $g(x, y) = x^4 + y$ y sea \mathcal{F} la foliación de \mathbb{R}^2 dada por las líneas $\{y = \text{constante}\}$. La variedad polar correspondiente es

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = 0\} .$$

¹Notemos que para hacer uso de la definición usual de punto singular es necesario que M sea reducida.

Como conjunto, M es precisamente el eje y , el cual es una subvariedad diferenciable de \mathbb{R}^2 de dimensión complementaria a las hojas de la foliación y transversal a las hojas de \mathcal{F} ; sin embargo, en este caso el eje y tiene multiplicidad 3, ya que es la preimagen del valor crítico 0 bajo el mapeo x^3 en \mathbb{R}^2 , por lo que todos los contactos son degenerados.

En la sección 5.3 mostraremos, en forma directa y posteriormente haciendo uso del teorema 4.1.1, que cualquier foliación definida por un polinomio homogéneo de Fermat preserva la estructura de Morse de la función $Q(\mathbf{z}) := z_1^2 + \dots + z_n^2$, sin embargo, no en todos los casos es fácil demostrar de manera directa este tipo de propiedades. A continuación vamos a dar un par de ejemplos del uso de 4.1.1 para verificar si una foliación \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de la función cuadrado de la distancia al origen.

4.1.1. Ejemplos: foliaciones de dimensión 1.

Sea (z_1, \dots, z_n) la base canónica de \mathbb{C}^n y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ una permutación del conjunto de índices $(1, \dots, n)$. Cada permutación α define un campo vectorial sobre \mathbb{C}^n de la forma $F(\mathbf{z}) = (\lambda_1 z_{\alpha_1}^{a_1}, \lambda_2 z_{\alpha_2}^{a_2}, \dots, \lambda_n z_{\alpha_n}^{a_n})$ donde $\lambda_k \in \mathbb{C}^*$ y $a_k \in \mathbb{N}$ con $a_k > 1$ para todo k . Denotemos por \mathcal{F} a la foliación definida por el campo F .

Notemos que si n es par, los campos definidos anteriormente se pueden ver como el campo vectorial Hamiltoniano de un polinomio de Pham-Brieskorn.

Vamos a demostrar, haciendo uso del teorema 4.1.1, que para el caso $n = 2$ la foliación \mathcal{F} definida por el campo vectorial $F(\mathbf{z}) = (\lambda_1 z_1^{a_1}, \lambda_2 z_2^{a_2})$ o $F(\mathbf{z}) = (\lambda_1 z_2^{a_1}, \lambda_2 z_1^{a_2})$ preserva la estructura de Morse de la función distancia al origen.

En el artículo titulado “Open book decompositions associated to holomorphic vector fields” (ver [34]), Seade demostró la siguiente proposición.

Proposición 4.1.6. *Sea $F(\mathbf{z}) = (\lambda_1 z_{\alpha_1}^{a_1}, \lambda_2 z_{\alpha_2}^{a_2}, \dots, \lambda_n z_{\alpha_n}^{a_n})$ un campo vectorial sobre \mathbb{C}^n con $\lambda_k \in \mathbb{C}^*$ y $a_k > 1$ para todo k . Denotemos por \mathcal{F} a la foliación definida por F . Entonces la variedad polar $M^* = M(\mathcal{F}, Q) \setminus \{\mathbf{0}\}$ es una variedad diferenciable real de codimensión 2.*

Demostración. Notemos que una permutación α es un ciclo o se puede descomponer en r -ciclos, donde un r -ciclo es una permutación de las componentes del campo que involucra r componentes. Por ejemplo, el campo vectorial $(z_2^{a_1}, z_3^{a_2}, z_1^{a_3})$ tiene un 3-ciclo, por otra parte, el campo $(z_3^{a_1}, z_4^{a_2}, z_1^{a_3}, z_2^{a_4})$ consta de los 2-ciclos $(3, 1)$ y $(4, 2)$.

En la sección 3.1 vimos que si \mathcal{F} es una foliación definida por un campo vectorial holomorfo sobre \mathbb{C}^n , entonces la variedad polar relativa a \mathcal{F} y Q está definida como el conjunto de puntos que satisfacen

$$\langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle = 0,$$

la ecuación anterior la podemos descomponer en las ecuaciones reales

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{z}) &:= 2 \operatorname{Re} \langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle = 0 \quad \text{y} \\ \psi(\mathbf{z}) &:= 2 \operatorname{Im} \langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle = 0.\end{aligned}$$

Denotemos por Φ a la dupla de funciones (ϕ, ψ) y por $D_{\mathbf{z}}\Phi$ a la jacobiana de (ϕ, ψ) . Entonces, demostrar la proposición equivale a demostrar que fuera del origen la matriz $D_{\mathbf{z}}\Phi$ tiene rango 2, además, debido a la descomposición de α en ciclos es suficiente con suponer que $F(\mathbf{z}) = (\lambda_1 z_1^{a_1}, \dots, \lambda_n z_n^{a_n})$ o $F(\mathbf{z}) = (\lambda_1 z_2^{a_1}, \lambda_2 z_3^{a_2}, \dots, \lambda_n z_1^{a_n})$.

Supongamos que $F(\mathbf{z}) = (\lambda_1 z_1^{a_1}, \dots, \lambda_n z_n^{a_n})$, entonces

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{z}) &= \sum_{j=1}^n (\lambda_j z_j^{a_j} \bar{z}_j + \bar{\lambda}_j \bar{z}_j^{a_j} z_j) \quad \text{y} \\ \psi(\mathbf{z}) &= i \sum_{j=1}^n (\lambda_j z_j^{a_j} \bar{z}_j - \bar{\lambda}_j \bar{z}_j^{a_j} z_j).\end{aligned}$$

La transpuesta de la jacobiana $D_{\mathbf{z}}\Phi$ toma la forma

$$D_{\mathbf{z}}\Phi^t = \begin{pmatrix} a_1 \lambda_1 z_1^{a_1-1} \bar{z}_1 + \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{a_1} & ia_1 \lambda_1 z_1^{a_1-1} \bar{z}_1 - i\bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{a_1} \\ a_1 \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{a_1-1} z_1 + \lambda_1 z_1^{a_1} & -ia_1 \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{a_1-1} z_1 + i\lambda_1 z_1^{a_1} \\ \vdots & \vdots \\ a_n \lambda_n z_n^{a_n-1} \bar{z}_n + \bar{\lambda}_n \bar{z}_n^{a_n} & ia_n \lambda_n z_n^{a_n-1} \bar{z}_n - i\bar{\lambda}_n \bar{z}_n^{a_n} \\ a_n \bar{\lambda}_n \bar{z}_n^{a_n-1} z_n + \lambda_n z_n^{a_n} & -ia_n \bar{\lambda}_n \bar{z}_n^{a_n-1} z_n + i\lambda_n z_n^{a_n} \end{pmatrix}.$$

Evaluemos ahora el determinante que resulta de considerar las columnas $2k$ y $2k-1$ de la matriz jacobiana $D_{\mathbf{z}}\Phi$,

$$D_k(\mathbf{z}) := \begin{vmatrix} a_k \lambda_k z_k^{a_k-1} \bar{z}_k + \bar{\lambda}_k \bar{z}_k^{a_k} & a_k \bar{\lambda}_k \bar{z}_k^{a_k-1} z_k + \lambda_k z_k^{a_k} \\ ia_k \lambda_k z_k^{a_k-1} \bar{z}_k - i\bar{\lambda}_k \bar{z}_k^{a_k} & -ia_k \bar{\lambda}_k \bar{z}_k^{a_k-1} z_k + i\lambda_k z_k^{a_k} \end{vmatrix}.$$

Al resolver el determinante y simplificar la ecuación tenemos

$$D_k(\mathbf{z}) = -2i(a_k^2 - 1)|\lambda_k|^2 |z_k|^{2a_k}.$$

Como $\lambda_k \neq 0$ y $a_k \geq 2$, el determinante $D_k(\mathbf{z})$ únicamente se anula si la coordenada z_k es cero. Como lo anterior es válido par todo $k = 1, \dots, n$, entonces la matriz jacobiana $D_{\mathbf{z}}\Phi$ tiene rango 2 para todo \mathbf{z} en M^* .

Consideremos ahora el campo $F(z) = (\lambda_1 z_2^{a_1}, \lambda_2 z_3^{a_2}, \dots, \lambda_n z_1^{a_n})$, en este caso, la variedad polar relativa a \mathcal{F} y Q corresponde al conjunto de ceros de las funciones

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{z}) &= \lambda_1 z_2^{a_1} \bar{z}_1 + \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2^{a_1} z_1 + \lambda_2 z_3^{a_2} \bar{z}_2 + \bar{\lambda}_2 \bar{z}_3^{a_2} z_2 + \dots + \lambda_n z_1^{a_n} \bar{z}_n + \bar{\lambda}_n \bar{z}_1^{a_n} z_n, \\ \psi(\mathbf{z}) &= i(\lambda_1 z_2^{a_1} \bar{z}_1 - \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2^{a_1} z_1 + \lambda_2 z_3^{a_2} \bar{z}_2 - \bar{\lambda}_2 \bar{z}_3^{a_2} z_2 + \dots + \lambda_n z_1^{a_n} \bar{z}_n - \bar{\lambda}_n \bar{z}_1^{a_n} z_n).\end{aligned}$$

4.1. LA VARIEDAD POLAR PARA FOLIACIONES HOLOMORFAS DE DIMENSIÓN D 37

Entonces, la transpuesta de la matriz jacobiana de Φ es

$$D_{\mathbf{z}}\Phi^t = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2^{a_1} + a_n \lambda_n z_1^{a_n-1} \bar{z}_n & -i \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2^{a_1} + i a_n \lambda_n z_1^{a_n-1} \bar{z}_n \\ \lambda_1 z_2^{a_1} + a_n \bar{\lambda}_n \bar{z}_1^{a_n-1} z_n & i \lambda_1 z_2^{a_1} - i a_n \bar{\lambda}_n \bar{z}_1^{a_n-1} z_n \\ \vdots & \vdots \\ \bar{\lambda}_k \bar{z}_{k+1}^{a_k} + a_{k-1} \lambda_{k-1} z_k^{a_{k-1}-1} \bar{z}_{k-1} & -i \bar{\lambda}_k \bar{z}_{k+1}^{a_k} + i a_{k-1} \lambda_{k-1} z_k^{a_{k-1}-1} \bar{z}_{k-1} \\ \lambda_k z_{k+1}^{a_k} + a_{k-1} \bar{\lambda}_{k-1} \bar{z}_k^{a_{k-1}-1} z_{k-1} & i \lambda_k z_{k+1}^{a_k} - i a_{k-1} \bar{\lambda}_{k-1} \bar{z}_k^{a_{k-1}-1} z_{k-1} \\ \vdots & \vdots \\ \bar{\lambda}_n \bar{z}_1^{a_n} + a_{n-1} \lambda_{n-1} z_n^{a_{n-1}-1} \bar{z}_{n-1} & -i \bar{\lambda}_n \bar{z}_1^{a_n} + i a_{n-1} \lambda_{n-1} z_n^{a_{n-1}-1} \bar{z}_{n-1} \\ \lambda_n z_1^{a_n} + a_{n-1} \bar{\lambda}_{n-1} \bar{z}_n^{a_{n-1}-1} z_{n-1} & i \lambda_n z_1^{a_n} - i a_{n-1} \bar{\lambda}_{n-1} \bar{z}_n^{a_{n-1}-1} z_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Consideremos el determinante de las columnas $2k$ y $2k-1$ de la matriz $D_{\mathbf{z}}\Phi$

$$D_k(\mathbf{z}) := i \begin{vmatrix} \bar{\lambda}_k \bar{z}_{k+1}^{a_k} + a_{k-1} \lambda_{k-1} z_k^{a_{k-1}-1} \bar{z}_{k-1} & -\bar{\lambda}_k \bar{z}_{k+1}^{a_k} + a_{k-1} \lambda_{k-1} z_k^{a_{k-1}-1} \bar{z}_{k-1} \\ \lambda_k z_{k+1}^{a_k} + a_{k-1} \bar{\lambda}_{k-1} \bar{z}_k^{a_{k-1}-1} z_{k-1} & \lambda_k z_{k+1}^{a_k} - a_{k-1} \bar{\lambda}_{k-1} \bar{z}_k^{a_{k-1}-1} z_{k-1} \end{vmatrix}.$$

Al simplificar el determinante tenemos

$$-i D_k(\mathbf{z}) = 2 |\lambda_k|^2 |z_{k+1}|^{2a_k} - 2 a_{k-1}^2 |\lambda_{k-1}|^2 |z_k|^{2(a_{k-1}-1)} |z_{k-1}|^2.$$

Si suponemos que el determinante $D_k(\mathbf{z})$ es cero entonces

$$|\lambda_k|^2 |z_{k+1}|^{2a_k} = a_{k-1}^2 |\lambda_{k-1}|^2 |z_k|^{2(a_{k-1}-1)} |z_{k-1}|^2.$$

Por lo que, si cada determinante $D_k(\mathbf{z})$ se anula en un punto \mathbf{z} de M , tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} |\lambda_1|^2 |z_2|^{2a_1} &= a_n^2 |\lambda_n|^2 |z_1|^{2(a_n-1)} |z_n|^2 \\ |\lambda_2|^2 |z_3|^{2a_2} &= a_1^2 |\lambda_1|^2 |z_2|^{2(a_1-1)} |z_1|^2 \\ &\vdots \\ |\lambda_n|^2 |z_1|^{2a_n} &= a_{n-1}^2 |\lambda_{n-1}|^2 |z_n|^{2(a_{n-1}-1)} |z_{n-1}|^2. \end{aligned}$$

Notemos que si una coordenada z_k de \mathbf{z} es nula, entonces el sistema de ecuaciones arriba mencionado implica que todas las coordenadas de \mathbf{z} se anulan. Supongamos entonces que $z_k \neq 0$ para todo k y veamos si el sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales. Si multiplicamos el lado derecho de cada una de las ecuaciones y posteriormente el lado izquierdo, obtenemos

$$|\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 \dots |\lambda_n|^2 |z_1|^{2a_n} |z_2|^{2a_1} \dots |z_n|^{2a_{n-1}} = a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 \dots |\lambda_n|^2 |z_1|^{2a_n} |z_2|^{2a_1} \dots |z_n|^{2a_{n-1}},$$

de donde obtenemos que $a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 = 1$ pero esto claramente es una contradicción, ya que cada a_k es un entero positivo mayor que uno. Por tanto, para todo z en M^* existe un determinante de 2×2 de $D_{\mathbf{z}}\Phi$ que no se anula. Lo cual concluye la demostración. \square

Consideremos ahora los campos $F(\mathbf{z}) = (\lambda_1 z_1^{a_1}, \lambda_2 z_2^{a_2})$ y $F(\mathbf{z}) = (\lambda_1 z_2^{a_1}, \lambda_2 z_1^{a_2})$ en \mathbb{C}^2 . Vamos a demostrar que la foliación \mathcal{F} definida por cada uno de estos campos es transversal a la variedad polar $M(\mathcal{F}, Q)$, pero antes de pasar a este punto vamos a demostrar un lema técnico que nos será de gran utilidad.

Lema 4.1.7. *Sea $\bar{\nabla}\varphi(\mathbf{z}) := \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_1}(\mathbf{z}), \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_2}(\mathbf{z}), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_n}(\mathbf{z}) \right)$ y sea $F(\mathbf{z})$ un campo vectorial holomorfo sobre \mathbb{C}^n . Entonces se satisface la ecuación*

$$2 \langle F(\mathbf{z}), \bar{\nabla}\varphi(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle F(\mathbf{z}), \text{grad } \varphi(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{R}} - i \langle iF(\mathbf{z}), \text{grad } \varphi(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (4.2)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ denotan al producto interno usual en \mathbb{R}^{2n} y al producto hermitiano en \mathbb{C}^n respectivamente, además, el gradiente de φ está dado en coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$.

Demostración. Sea (z_1, \dots, z_n) el sistema canónico de coordenadas complejas en \mathbb{C}^n y sea $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ el sistema canónico de coordenadas reales en \mathbb{R}^{2n} . Sabemos que ambos sistemas están relacionados mediante las ecuaciones $z_j = x_j + iy_j$ para toda j . Si $F(\mathbf{z})$ es el vector complejo $(F_1(\mathbf{z}), \dots, F_n(\mathbf{z}))$, éste puede ser visto en su forma real como $F = (\text{Re } F_1, \text{Im } F_1, \dots, \text{Re } F_n, \text{Im } F_n)$ y por tanto iF corresponde al vector $(-\text{Im } F_1, \text{Re } F_1, \dots, -\text{Im } F_n, \text{Re } F_n)$, por otra parte $\text{grad}(\varphi) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} \right)$.

Para demostrar el lema, vamos a desarrollar el lado izquierdo de la ecuación (4.2). Para esto, notemos que las ecuaciones de cambio de base mostradas en la sección 3.2,

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right),$$

nos dicen que el gradiente complejo de φ se puede ver como

$$2\bar{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + i \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} + i \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} \right).$$

Empleando esta ecuación para desarrollar el producto hermitiano $\langle F(\mathbf{z}), \bar{\nabla}\varphi(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{C}}$ tenemos

$$\begin{aligned} 2 \langle F(\mathbf{z}), \bar{\nabla}\varphi(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{C}} &= F_1(\mathbf{z}) \overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} \right)} + F_2(\mathbf{z}) \overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + i \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} \right)} + \dots + F_n(\mathbf{z}) \overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} + i \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} \right)} \\ &= (\text{Re } F_1 + i \text{Im } F_1) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} \right) + \dots + (\text{Re } F_n + i \text{Im } F_n) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} \right) \\ &= \text{Re } F_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \text{Im } F_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \dots + \text{Re } F_n \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} + \text{Im } F_n \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} \\ &\quad - i \left(\text{Re } F_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} - \text{Im } F_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \dots + \text{Re } F_n \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} - \text{Im } F_n \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \right) \\ &= \langle F(\mathbf{z}), \text{grad } \varphi(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{R}} - i \langle iF(\mathbf{z}), \text{grad } \varphi(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.1.8. *Sea $F(z) = (\lambda_1 z_1^{a_1}, \lambda_2 z_2^{a_2})$ con λ_1, λ_2 números complejos distintos de cero. La variedad de contacto $M = M(\mathcal{F}, Q)$ interseca transversalmente a \mathcal{F} en todo punto fuera del origen.*

Demostración. Como la foliación \mathcal{F} está definida por el campo vectorial holomorfo F , entonces para todo $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ los vectores $F(\mathbf{z})$ y $iF(\mathbf{z})$ forman una base del espacio tangente real a la hoja $\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \in \mathcal{F}$ que contiene a \mathbf{z} . Por otra parte, recordemos que M corresponde al conjunto de ceros de las funciones reales ϕ y ψ , por tanto, \mathcal{F} y M son transversales fuera del origen si y sólo si $F(\mathbf{z})$ y $iF(\mathbf{z})$ no son ortogonales a los gradientes de ϕ y ψ simultáneamente, es decir, $F(\mathbf{z})$ y $iF(\mathbf{z})$ deben satisfacer

$$\begin{aligned} \langle F(z), \text{grad } \phi(z) \rangle_{\mathbb{R}} \neq 0 & \quad \text{o} \quad \langle F(z), \text{grad } \psi(z) \rangle_{\mathbb{R}} \neq 0 & \quad \text{y además} \\ \langle iF(z), \text{grad } \phi(z) \rangle_{\mathbb{R}} \neq 0 & \quad \text{o} \quad \langle iF(z), \text{grad } \psi(z) \rangle_{\mathbb{R}} \neq 0. \end{aligned}$$

Vamos a emplear la ecuación obtenida en el lema 4.1.7 para calcular los productos internos que necesitamos. Tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \phi &= (a_1 \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{a_1-1} z_1 + \lambda_1 z_1^{a_1}, a_2 \bar{\lambda}_2 \bar{z}_2^{a_2-1} z_2 + \lambda_2 z_2^{a_2}), \\ \bar{\nabla} \psi &= (-ia_1 \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{a_1-1} z_1 + i\lambda_1 z_1^{a_1}, -ia_2 \bar{\lambda}_2 \bar{z}_2^{a_2-1} z_2 + i\lambda_2 z_2^{a_2}). \end{aligned}$$

Los productos hermitianos del campo $F(\mathbf{z})$ con $\bar{\nabla} \phi$ y $\bar{\nabla} \psi$ se ven como

$$\begin{aligned} \langle F(z), \bar{\nabla} \phi \rangle_{\mathbb{C}} &= \lambda_1 z_1^{a_1} \overline{(a_1 \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{a_1-1} z_1 + \lambda_1 z_1^{a_1})} + \lambda_2 z_2^{a_2} \overline{(a_2 \bar{\lambda}_2 \bar{z}_2^{a_2-1} z_2 + \lambda_2 z_2^{a_2})} \\ &= |\lambda_1|^2 |z_1|^{2a_1} + |\lambda_2|^2 |z_2|^{2a_2} + a_1 \lambda_1^2 z_1^{2a_1-1} \bar{z}_1 + a_2 \lambda_2^2 z_2^{2a_2-1} \bar{z}_2, \\ \langle F(z), \bar{\nabla} \psi \rangle_{\mathbb{C}} &= \lambda_1 z_1^{a_1} \overline{(-ia_1 \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{a_1-1} z_1 + i\lambda_1 z_1^{a_1})} + \lambda_2 z_2^{a_2} \overline{(-ia_2 \bar{\lambda}_2 \bar{z}_2^{a_2-1} z_2 + i\lambda_2 z_2^{a_2})} \\ &= -i(|\lambda_1|^2 |z_1|^{2a_1} + |\lambda_2|^2 |z_2|^{2a_2}) + i(a_1 \lambda_1^2 z_1^{2a_1-1} \bar{z}_1 + a_2 \lambda_2^2 z_2^{2a_2-1} \bar{z}_2). \end{aligned}$$

Para simplificar las cuentas, definamos $A := |\lambda_1|^2 |z_1|^{2a_1} + |\lambda_2|^2 |z_2|^{2a_2}$ y $B := a_1 \lambda_1^2 z_1^{2a_1-1} \bar{z}_1 + a_2 \lambda_2^2 z_2^{2a_2-1} \bar{z}_2$, por el lema 4.1.7 tenemos

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{z}), \text{grad } \phi \rangle &= 2A + 2 \text{Re } B, \\ \langle F(\mathbf{z}), \text{grad } \psi \rangle &= -2 \text{Im } B, \\ \langle iF(\mathbf{z}), \text{grad } \phi \rangle &= -2 \text{Im } B, \\ \langle iF(\mathbf{z}), \text{grad } \psi \rangle &= 2A - 2 \text{Re } B. \end{aligned}$$

En consecuencia, \mathcal{F} es transversal a M si y sólo si $\text{Im } B \neq 0$ o si las desigualdades $A + \text{Re } B \neq 0$ y $-A + \text{Re } B \neq 0$ se satisfacen.

Recordemos que la variedad de contacto está definida por la ecuación $\lambda_1 z_1^{a_1} \bar{z}_1 + \lambda_2 z_2^{a_2} \bar{z}_2 = 0$ la cual podemos descomponer en su forma polar en las ecuaciones reales

$$\begin{aligned} |\lambda_1| |z_1|^{a_1+1} &= |\lambda_2| |z_2|^{a_2+1}, \\ e^{i\theta_{\lambda_1}} e^{i(a_1-1)\theta_1} &= e^{i\theta_{\lambda_2} + \pi} e^{i(a_2-1)\theta_2}, \end{aligned}$$

donde θ_k y θ_{λ_k} corresponden a los argumentos principales de z_k y λ_k respectivamente. Vamos a descomponer a B en su forma polar y a emplear las ecuaciones anteriores para simplificarlo

$$\begin{aligned} B &= a_1 \lambda_1^2 z_1^{2a_1-1} \bar{z}_1 + a_2 \lambda_2^2 z_2^{2a_2-1} \bar{z}_2 \\ &= a_1 |\lambda_1|^2 |z_1|^{2a_1} (e^{i\theta_{\lambda_1}} e^{i(a_1-1)\theta_1})^2 + a_2 |\lambda_2|^2 |z_2|^{2a_2} (e^{i\theta_{\lambda_2}} e^{(a_2-1)\theta_2})^2 \\ &= (a_1 |\lambda_1|^2 |z_1|^{2a_1} + a_2 |\lambda_2|^2 |z_2|^{2a_2}) (e^{i\theta_{\lambda_2}} e^{(a_2-1)\theta_2})^2 . \end{aligned}$$

Supongamos $\text{Im } B = 0$. En éste caso B toma la forma

$$B = \pm(a_1 |\lambda_1|^2 |z_1|^{2a_1} + a_2 |\lambda_2|^2 |z_2|^{2a_2}) . \quad (4.3)$$

Supongamos además que $A + \text{Re } B = 0$ y sustituyamos el valor resultante de B en esta ecuación. Tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= A + \text{Re } B = |\lambda_1|^2 |z_1|^{2a_1} + |\lambda_2|^2 |z_2|^{2a_2} \pm (a_1 |\lambda_1|^2 |z_1|^{2a_1} + a_2 |\lambda_2|^2 |z_2|^{2a_2}) \\ &= |\lambda_1|^2 |z_1|^{2a_1} (1 \pm a_1) + |\lambda_2|^2 |z_2|^{2a_2} (1 \pm a_2) . \end{aligned}$$

Notemos que la única solución a la ecuación anterior es $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, lo cual implica que para $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ las ecuaciones $\text{Im } B = 0$ y $A + \text{Re } B = 0$ no se satisfacen simultáneamente y por tanto $F(\mathbf{z})$ no está contenido en el tangente a M . Por otra parte, si suponemos $\text{Im } B = 0$ y $A - \text{Re } B = 0$ la ecuación (4.3) es válida y podemos sustituirla ahora en $A - \text{Re } B = 0$, de donde obtenemos

$$0 = A - \text{Re } B = |\lambda_1|^2 |z_1|^{2a_1} (1 \pm a_1) + |\lambda_2|^2 |z_2|^{2a_2} (1 \pm a_2) .$$

Nuevamente, la única solución a la ecuación anterior es el origen, lo cual concluye la demostración. \square

Proposición 4.1.9. *La foliación \mathcal{F} definida en \mathbb{C}^2 por el campo $F(z) = (\lambda_1 z_2^{a_1}, \lambda_2 z_1^{a_2})$ interseca transversalmente a la variedad de contacto $M = M(\mathcal{F}, Q)$ fuera del origen.*

Demostración. Para demostrar esta proposición vamos a seguir el mismo método que en la prueba de la proposición anterior. Las funciones que definen a la variedad polar en este caso son

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{z}) &= \lambda_1 z_2^{a_1} \bar{z}_1 + \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2^{a_1} z_1 + \lambda_2 z_1^{a_2} \bar{z}_2 + \bar{\lambda}_2 \bar{z}_1^{a_2} z_2 , \\ \psi(\mathbf{z}) &= i(\lambda_1 z_2^{a_1} \bar{z}_1 - \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2^{a_1} z_1 + \lambda_2 z_1^{a_2} \bar{z}_2 - \bar{\lambda}_2 \bar{z}_1^{a_2} z_2) . \end{aligned}$$

Entonces las diferenciales $\bar{\nabla}\phi$ y $\bar{\nabla}\psi$ se ven como

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}\phi(\mathbf{z}) &= (\lambda_1 z_2^{a_1} + a_2 \bar{\lambda}_2 \bar{z}_1^{a_2-1} z_2, \lambda_2 z_1^{a_2} + a_1 \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2^{a_1-1} z_1) , \\ \bar{\nabla}\psi(\mathbf{z}) &= (i\lambda_1 z_2^{a_1} - ia_2 \bar{\lambda}_2 \bar{z}_1^{a_2-1} z_2, i\lambda_2 z_1^{a_2} - ia_1 \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2^{a_1-1} z_1) \end{aligned}$$

y los productos toman la forma

$$\begin{aligned}
 \langle F(\mathbf{z}), \bar{\nabla} \phi \rangle_{\mathbb{C}} &= \lambda_1 z_2^{a_1} (\lambda_1 z_2^{a_1} + a_2 \bar{\lambda}_2 \bar{z}_1^{a_2-1} z_2) + \lambda_2 z_1^{a_2} (\lambda_2 z_1^{a_2} + a_1 \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2^{a_1-1} z_1) \\
 &= |\lambda_1|^2 |z_2|^{2a_1} + |\lambda_2|^2 |z_1|^{2a_2} + a_2 \lambda_1 \lambda_2 z_2^{a_1} z_1^{a_2-1} \bar{z}_2 + a_1 \lambda_2 \lambda_1 z_1^{a_2} z_2^{a_1-1} \bar{z}_1, \\
 \langle F(\mathbf{z}), \bar{\nabla} \psi \rangle_{\mathbb{C}} &= \lambda_1 z_2^{a_1} (i \lambda_1 z_2^{a_1} - i a_2 \bar{\lambda}_2 \bar{z}_1^{a_2-1} z_2) + \lambda_2 z_1^{a_2} (i \lambda_2 z_1^{a_2} - i a_1 \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2^{a_1-1} z_1) \\
 &= -i(|\lambda_1|^2 |z_2|^{2a_1} + |\lambda_2|^2 |z_1|^{2a_2}) + i(a_2 \lambda_1 \lambda_2 z_2^{a_1} z_1^{a_2-1} \bar{z}_2 + a_1 \lambda_2 \lambda_1 z_1^{a_2} z_2^{a_1-1} \bar{z}_1).
 \end{aligned}$$

Definamos $A := |\lambda_1|^2 |z_2|^{2a_1} + |\lambda_2|^2 |z_1|^{2a_2}$ y $B := a_2 \lambda_1 \lambda_2 z_2^{a_1} z_1^{a_2-1} \bar{z}_2 + a_1 \lambda_2 \lambda_1 z_1^{a_2} z_2^{a_1-1} \bar{z}_1$, usando la ecuación (4.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \langle F(\mathbf{z}), \text{grad } \phi \rangle_{\mathbb{R}} &= 2A + 2 \text{Re } B, \\
 \langle F(\mathbf{z}), \text{grad } \psi \rangle_{\mathbb{R}} &= -2 \text{Im } B, \\
 \langle iF(\mathbf{z}), \text{grad } \phi \rangle_{\mathbb{R}} &= -2 \text{Im } B, \\
 \langle iF(\mathbf{z}), \text{grad } \psi \rangle_{\mathbb{R}} &= 2A - 2 \text{Re } B.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $F(z)$ pertenece al tangente $T_z M$ si y sólo si $A + \text{Re } B = 0$ y $\text{Im } B = 0$, análogamente $iF(z)$ pertenece a $T_z M$ si y sólo si $A - \text{Re } B = 0$ y $\text{Im } B = 0$.

Recordemos que la variedad polar $M(\mathcal{F}, Q)$ está definida por la ecuación $\lambda_1 z_2^{a_1} \bar{z}_1 + \lambda_2 z_1^{a_2} \bar{z}_2 = 0$ la cual en normas se ve como

$$|\lambda_1| |z_2|^{a_1-1} = |\lambda_2| |z_1|^{a_2-1}.$$

Vamos a emplear la ecuación anterior para simplificar B y vamos a denotar por θ_k y θ_{λ_k} a los argumentos principales de z_k y λ_k repectivamente.

$$\begin{aligned}
 B &= a_2 \lambda_1 \lambda_2 z_2^{a_1} z_1^{a_2-1} \bar{z}_2 + a_1 \lambda_2 \lambda_1 z_1^{a_2} z_2^{a_1-1} \bar{z}_1 \\
 &= a_2 |\lambda_1| (|\lambda_2| |z_1|^{a_2-1}) |z_2|^{a_1+1} e^{i(\theta_{\lambda_1} + \theta_{\lambda_2})} e^{i(a_1-1)\theta_2} e^{i(a_2-1)\theta_1} \\
 &+ a_1 |\lambda_2| (|\lambda_1| |z_2|^{a_1-1}) |z_1|^{a_2+1} e^{i(\theta_{\lambda_1} + \theta_{\lambda_2})} e^{i(a_1-1)\theta_2} e^{i(a_2-1)\theta_1} \\
 &= (a_2 |\lambda_1|^2 |z_2|^{2a_1} + a_1 |\lambda_2|^2 |z_1|^{2a_2}) e^{i(\theta_{\lambda_1} + \theta_{\lambda_2})} e^{i(a_1-1)\theta_2} e^{i(a_2-1)\theta_1}.
 \end{aligned}$$

Si suponemos que $F(\mathbf{z}) \in T_z M$ entonces $\text{Im } B = 0$ y $A + \text{Re } B = 0$, lo que implica que

$$\begin{aligned}
 B &= \pm (a_2 |\lambda_1|^2 |z_2|^{2a_1} + a_1 |\lambda_2|^2 |z_1|^{2a_2}), \\
 A + \text{Re } B &= |\lambda_1|^2 |z_2|^{2a_1} + |\lambda_2|^2 |z_1|^{2a_2} \pm (a_2 |\lambda_1|^2 |z_2|^{2a_1} + a_1 |\lambda_2|^2 |z_1|^{2a_2}) \\
 &= (1 \pm a_2) |\lambda_1|^2 |z_2|^{2a_1} + (1 \pm a_1) |\lambda_2|^2 |z_1|^{2a_2},
 \end{aligned}$$

pero la única solución a esta última ecuación es el origen. De igual forma, si suponemos $iF(\mathbf{z}) \in T_z M$ entonces $\text{Im } B = 0$ y $A - \text{Re } B = 0$ y nuevamente, la única solución a ambas ecuaciones es el origen. \square

Notemos que las proposiciones 4.1.6, 4.1.8 y 4.1.9 nos dicen que las foliaciones \mathcal{F} definidas por los campos vectoriales $F(\mathbf{z}) = \lambda_1 z_1^{a_1} + \lambda_2 z_2^{a_2}$ o $F(\mathbf{z}) = \lambda_1 z_2^{a_1} + \lambda_2 z_1^{a_2}$, así como la variedad polar relativa a \mathcal{F} y Q satisfacen las hipótesis del lema 4.1.3, por lo tanto tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1.10. *Si \mathcal{F} es la foliación de \mathbb{C}^2 definida por el campo $F(\mathbf{z}) = \lambda_1 z_1^{a_1} + \lambda_2 z_2^{a_2}$ o $F(\mathbf{z}) = \lambda_1 z_2^{a_1} + \lambda_2 z_1^{a_2}$, entonces \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de Q .*

Vamos a dar un ejemplo más, en el cual emplearemos el teorema 4.1.1 para demostrar que la foliación correspondiente no preserva la estructura de Morse de Q . Consideremos el campo $F(\mathbf{z}) = (\lambda_1 z_2^2, \lambda_2 z_3^2, \dots, \lambda_n z_1^2)$ donde $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_n = 1$.

AFIRMACION: *para $n > 3$ la foliación \mathcal{F} definida por el campo anterior no preserva la estructura de Morse de Q .*

Para demostrar la afirmación anterior, notemos que la variedad polar está definida por la ecuación

$$\langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle_{\mathbb{C}} = \lambda_1 z_2^2 \bar{z}_1 + \lambda_2 z_3^2 \bar{z}_2 + \dots + \lambda_n z_1^2 \bar{z}_n = 0$$

y por consiguiente los puntos $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ tales que $z_4 = \dots = z_n = 0$ y $\lambda_1 z_2^2 \bar{z}_1 + \lambda_2 z_3^2 \bar{z}_2 = 0$ pertenecen a $M(\mathcal{F}, Q)$. Vamos a denotar por N al subconjunto de M de tales puntos.

Veamos si la transversalidad entre la foliación \mathcal{F} y M es válida en estos puntos.

Sean ϕ y ψ como en la demostración de la proposición 4.1.6. Si seguimos el mismo método empleado en las proposiciones 4.1.8 y 4.1.9 para calcular los productos internos de los gradientes de ϕ y ψ con los elementos de la base de $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ tenemos que en un punto \mathbf{z} en N

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{z}), \text{grad } \phi \rangle_{\mathbb{R}} &= 2A + 2 \text{Re } B, \\ \langle F(\mathbf{z}), \text{grad } \psi \rangle_{\mathbb{R}} &= -2 \text{Im } B, \\ \langle iF(\mathbf{z}), \text{grad } \phi \rangle_{\mathbb{R}} &= -2 \text{Im } B, \\ \langle iF(\mathbf{z}), \text{grad } \psi \rangle_{\mathbb{R}} &= 2A - 2 \text{Re } B, \end{aligned}$$

donde $A = |\lambda_1|^2 |z_2|^4 + |\lambda_2|^2 |z_3|^4 + |\lambda_n|^2 |z_1|^4$ y $B = 2\lambda_1 \lambda_2 z_3^2 z_2 \bar{z}_1$. Supongamos que $F(\mathbf{z})$ pertenece al tangente $T_{\mathbf{z}}M$ y veamos si existe algún \mathbf{z} no nulo que satisfaga esta condición. Sea $\text{Im } B = 0$ y $A + \text{Re } B = 0$ para algún $\mathbf{z} \in N$, entonces

$$\begin{aligned} B &= \pm 2|\lambda_1||\lambda_2||z_3|^2|z_2||z_1| \quad \text{y} \\ A + \text{Re } B &= |\lambda_1|^2 |z_2|^4 + |\lambda_2|^2 |z_3|^4 + |\lambda_n|^2 |z_1|^4 \pm 2|\lambda_1||\lambda_2||z_3|^2|z_2||z_1|. \end{aligned}$$

Empleando la ecuación de los puntos de N en normas ($|\lambda_2||z_3|^2 = |\lambda_1||z_2||z_1|$) tenemos

$$A + \text{Re } B = |\lambda_1|^2 |z_2|^4 + |\lambda_n|^2 |z_1|^4 + (1 \pm 2)|\lambda_1|^2 |z_2|^2 |z_1|^2 = 0.$$

Notemos que si consideramos el signo positivo en el último sumando, la ecuación únicamente tiene solución trivial, por tanto, vamos a considerar el caso negativo, además vamos a sustituir $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_n = 1$. La ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} 4|z_2|^4 - 4|z_2|^2|z_1|^2 + |z_1|^4 &= 0, \\ (2|z_2|^2 - |z_1|^2)^2 &= 0, \end{aligned}$$

lo cual nos dice que si $2|z_2|^2 = |z_1|^2$ entonces el vector $F(\mathbf{z})$ pertenece al tangente $T_{\mathbf{z}}M$ y por lo tanto \mathcal{F} y $M(\mathcal{F}, Q)$ no se intersecan transversalmente. Finalmente, el teorema 4.1.1 nos dice que en este caso la foliación \mathcal{F} no preserva la estructura de Morse de la función cuadrado de la distancia al origen.

4.2. Estructura analítica de M

A lo largo de esta sección vamos a suponer que g es una función analítica real y vamos a ver que propiedades cumple la variedad polar $M(\mathcal{F}, g)$.

Definición 4.2.1. Diremos que la foliación \mathcal{F} tiene un *contacto analítico* en $\mathbf{0}$ con respecto a g si el germen en $\mathbf{0}$ del espacio $M = M(\mathcal{F}, g)$ es analítico real.

Existen familias muy interesantes de foliaciones que cumplen con tener contactos analíticos, entre ellas se encuentran las foliaciones de dimensión uno y las foliaciones de codimensión uno.

Ejemplo 4.2.2. En [13] los autores demuestran que si \mathcal{F} es una foliación holomorfa de \mathbb{C}^n de dimensión uno definida por las curvas integrales de un campo vectorial $F(\mathbf{z})$, entonces la variedad polar relativa a \mathcal{F} y a la función de Morse $Q(\mathbf{z}) = z_1^2 + \dots + z_n^2$ está definida como

$$M = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid \langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle = 0\},$$

donde el producto empleado es el producto hermitiano en \mathbb{C}^n (ver sección 2.1), es decir, M corresponde al cero de las funciones analíticas reales $\operatorname{Re} \langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle$ y $\operatorname{Im} \langle F(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle$.

Ejemplo 4.2.3. Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa de \mathbb{C}^n de codimensión uno con singularidades aisladas y $n \geq 3$. El teorema de Malgrange (ver [23]) nos dice que existe una función holomorfa f tal que las hojas de \mathcal{F} corresponden a las fibras de la función f . En la sección 5.1 se demuestra que, si (z_1, z_2, \dots, z_n) es el sistema de coordenadas canónico en \mathbb{C}^n , la variedad polar relativa a la foliación \mathcal{F} y la función de Morse cuadrado de la distancia al origen está definida como el cero de las funciones

$$h_{j,k}(\mathbf{z}) := \bar{z}_k \frac{\partial f}{\partial z_j}(\mathbf{z}) - \bar{z}_j \frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}),$$

para $1 \leq j < k \leq n$. Más aún, si g es una función analítica, se puede demostrar que $M(\mathcal{F}, g)$ está definida como el conjunto de ceros de las funciones

$$h_{j,k}(\mathbf{z}) := \frac{\partial g}{\partial z_k}(\mathbf{z}) \frac{\partial f}{\partial z_j}(\mathbf{z}) - \frac{\partial g}{\partial z_j}(\mathbf{z}) \frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}).$$

Por tanto, \mathcal{F} tiene un contacto analítico en $\mathbf{0}$ con respecto a g .

Ejemplo 4.2.4. Sean m y n dos enteros positivos tales que $n > 2m$. Sea $\Lambda := (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ una configuración de n vectores en \mathbb{C}^m , es decir, $\Lambda_j = (\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^m)$ para j entre 1 y n . Si Λ satisface la condición de Siegel y la condición de hiperbolicidad débil (ver sección 2.3), entonces el campo

$$\mathcal{F}_j : (z_1, \dots, z_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k^j z_k \frac{\partial}{\partial z_k}$$

define una foliación \mathcal{F} con singularidad aislada en el origen. Más aún, la variedad polar de \mathcal{F} con respecto a la función cuadrado de la distancia al origen es:

$$V_\Lambda = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n \Lambda_j |z_j|^2 = 0 \right\},$$

por lo que, también en este caso los contactos son analíticos.

En el caso en que \mathcal{F} tenga un contacto analítico en $\mathbf{0}$ con respecto a g , la variedad polar satisface propiedades interesantes, por ejemplo, el lema de estructura cónica 1.2.11 junto con la proposición 1.2.7 nos dicen que si M es un germen analítico en $\mathbf{0}$, entonces M tiene un número finito de componentes irreducibles cada una de las cuales es localmente un cono sobre su intersección con una esfera de radio suficientemente pequeño. Además tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.5. *Supongamos que \mathcal{F} tiene un contacto analítico en $\mathbf{0}$ con respecto a la función de Morse g y asumamos que \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g . Sean M^1, \dots, M^r las componentes irreducibles de la variedad polar M . Entonces:*

1. *Cada $M^{j*} := M^j \setminus \{\mathbf{0}\}$ es una subvariedad de \mathbb{C}^n de codimensión $2d$, transversal a \mathcal{F} en todo punto y transversal a las g -esferas.*
2. *Los M^j 's son disjuntos por pares y cada M^{j*} consiste de puntos con el mismo índice de Morse.*

Demostración. El inciso (1) es una consecuencia inmediata del teorema 4.1.1. Para demostrar el inciso (2) supongamos que existen puntos p_1 y p_2 en algún M^j con índices de Morse distintos. Como cada componente irreducible debe ser conexa, consideremos α un arco en M^j que une dichos puntos, entonces forzosamente el arco debe contener un punto de degeneración, lo cual no es posible debido a que \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g . \square

4.3. Las hojas de la foliación

El objetivo de esta sección es estudiar el comportamiento de la foliación alrededor del origen, por lo cual vamos a dar notación que nos será de gran utilidad en esta sección y en la siguiente.

Sea g una función de Morse definida en una vecindad U del origen en \mathbb{C}^n y \mathcal{F} una foliación con las características mencionadas al inicio del capítulo.

Recordemos que como g es una función de Morse de índice 0 en el origen, entonces en una vecindad de $\mathbf{0}$ existe un sistema de coordenadas locales (x_1, \dots, x_{2n}) a través del cual podemos ver a g como $x_1^2 + \dots + x_{2n}^2$, es decir, localmente podemos ver a g como la función cuadrado de la distancia al origen, lo que implica que las fibras de g son difeomorfas a esferas canónicas. Sea $\mathbb{S}_{g,\varepsilon}$ la esfera centrada en el origen y de radio ε definida por la función g , es decir, $\mathbb{S}_{g,\varepsilon}$ corresponde a la preimagen $g^{-1}(\varepsilon)$. De igual forma, sea $\mathbb{B}_{g,\varepsilon}$ la bola cerrada centrada en el origen cuya frontera es $\mathbb{S}_{g,\varepsilon}$. Finalmente, vamos a definir la g -distancia de un punto \mathbf{x} en U al origen como $g(\mathbf{x})$.

Para hacer más sencilla la notación, a lo largo de esta sección y la siguiente vamos a denotar a la esfera $\mathbb{S}_{g,\varepsilon}$ (resp. a la bola $\mathbb{B}_{g,\varepsilon}$) simplemente por \mathbb{S}_ε (resp. \mathbb{B}_ε), de igual forma, cada vez que hablemos de la distancia de un punto \mathbf{x} al origen, nos estaremos refiriendo a la distancia definida por g .

Vamos a denotar por $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ al flujo correspondiente al campo vectorial gradiente de la función de Morse g en su restricción a cada una de las hojas de la foliación \mathcal{F} , $\{\text{grad}(g|_{\mathcal{L}})\}_{\mathcal{L} \in \mathcal{F}}$. Notemos que el conjunto de puntos en donde el campo $\{\text{grad}(g|_{\mathcal{L}})\}_{\mathcal{L} \in \mathcal{F}}$ se anula corresponde precisamente a la variedad polar de \mathcal{F} relativa a g . Además, cuando $t \rightarrow -\infty$ las líneas de flujo de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ se acercan al origen.

Se define el α -límite de un punto $\mathbf{z} \in U$ bajo el flujo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$, el cual denotaremos por $\alpha(\mathbf{z})$, como el conjunto de todos los puntos \mathbf{y} en U para los cuales podemos encontrar una sucesión $t_k \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t_k \rightarrow -\infty} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(t_k, \mathbf{z}) = \mathbf{y}$. El α -límite de un conjunto W bajo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ es la unión de los α -límites de puntos en ese conjunto. Denotaremos a dicho conjunto por $\alpha(W)$.

Lema 4.3.1. *Si \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g , entonces el α -límite de U bajo el flujo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ es la variedad polar $M(\mathcal{F}, g)$.*

Demostración. Para demostrar la igualdad entre los conjuntos, notemos primero que todos los puntos de M son el α -límite de algún \mathbf{z} en U , por lo que sólo hace falta verificar que $\alpha(U) \subset M$. Recordemos que el campo $\{\text{grad}(g|_{\mathcal{L}})\}_{\mathcal{L} \in \mathcal{F}}$ es un campo transversal a las g -esferas centradas en el origen, además, dicho campo siempre apunta al exterior de las esferas, por tanto, al recorrer las líneas de flujo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ cuando $t \rightarrow -\infty$ nos acercamos más al origen.

Sea \mathbf{z} un punto en una hoja $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$, si la línea de flujo que contiene a \mathbf{z} converge al origen, entonces hemos terminado, en caso contrario, podemos asumir que el α -límite de \mathbf{z} se acumula en una esfera \mathbb{S}_ρ de radio $\rho > 0$ (debido a la transversalidad del campo $\{\text{grad}(g|_{\mathcal{L}})\}_{\mathcal{L} \in \mathcal{F}}$). En este caso, la línea de flujo que contiene a \mathbf{z} converge a un punto $\mathbf{y} \in M$ (en cuyo caso hemos terminado) o converge asintóticamente a la esfera \mathbb{S}_ρ . Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_\rho$ un punto en el α -límite de \mathbf{z} . Consideremos una sucesión de reales $\{t_j\}$ tales que $\lim_{t_j \rightarrow -\infty} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(t_j, \mathbf{z}) = \mathbf{y}$ y la sucesión de planos tangentes $T_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}}(t_j, \mathbf{z})} \mathcal{L}$ converge a un plano límite \mathcal{T} , es decir,

$$\lim_{t_j \rightarrow -\infty} T_{\mathcal{G}_{\mathcal{L}}(t_j, \mathbf{z})} \mathcal{L} = \mathcal{T} .$$

Como \mathbf{y} es un punto regular de la foliación \mathcal{F} , \mathcal{T} corresponde precisamente al tangente a una hoja \mathcal{L}' en \mathbf{y} . Por otra parte, \mathcal{T} interseca a la esfera \mathbb{S}_ρ de manera tangente, esto se debe a que si \mathcal{T} intersecara a \mathbb{S}_ρ transversalmente, el campo gradiente atravesaría a la esfera y \mathbf{y} no podría ser un α -límite del flujo. Lo anterior nos dice que en \mathbf{y} , \mathcal{L} y \mathbb{S}_ρ son tangentes, lo que implica que $\mathbf{y} \in M$. \square

Lema 4.3.2. *Sea \widehat{M}^* el saturado de M^* por \mathcal{F} en \mathbb{B}_ε , es decir, la unión de todas las hojas que contienen algún punto de $M^* \setminus \{\mathbf{0}\}$ intersección \mathbb{B}_ε y sea $K := \mathbb{B}_\varepsilon \setminus \widehat{M}^*$. Si \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g , entonces el α -límite de K por el flujo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ es el origen y el α -límite de cada \mathbf{z} en \widehat{M}^* es el origen o el punto donde la línea de flujo de \mathbf{z} interseca a M .*

Demostración. Vamos a demostrar primero la siguiente afirmación: dado un punto \mathbf{z} en una hoja no singular \mathcal{L}' de \mathcal{F} , el α -límite de \mathbf{z} es el origen o está contenido en \mathcal{L}' .

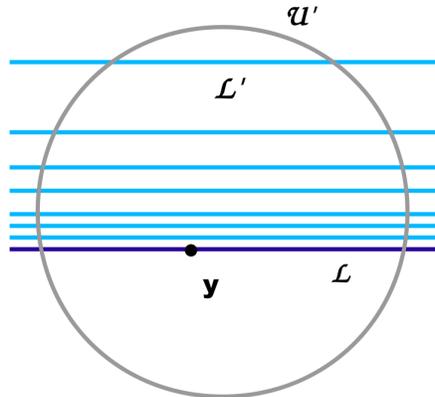


Figura 4.1: Estructura local de las hojas de \mathcal{F} alrededor de \mathbf{y} .

La demostración se hará por contradicción. Supongamos que existe un $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ en $\alpha(\mathbf{z})$ tal que \mathbf{y} no está en \mathcal{L}' . Sea \mathcal{L} la hoja que contiene a \mathbf{y} . Como \mathbf{y} es un punto regular

de la foliación \mathcal{F} podemos considerar, $(U', (x_1, \dots, x_n))$, la carta plana de la foliación alrededor de \mathbf{y} , donde (x_1, \dots, x_n) es un sistema coordenado en la vecindad abierta U' de \mathbf{y} , tal que, en esta vecindad las hojas de la foliación están definidas por las ecuaciones: $x_{d+1} = c_{d+1}, \dots, x_n = c_n$ (con d igual a la dimensión de la foliación \mathcal{F} y c_{d+1}, \dots, c_n constantes). En estas coordenadas, la única forma de que el punto $\mathbf{y} \in \mathcal{L}$ sea un α -límite de puntos en \mathcal{L}' , es que la hoja \mathcal{L}' se vea localmente como un conjunto de planos que convergen al d -plano que representa a \mathcal{L} (localmente) como se muestra en la figura 4.1. Lo anterior implica que existe W una vecindad abierta de \mathbf{y} en \mathcal{L} tal que todos sus puntos corresponden al α -límite de algún punto en \mathcal{L}' . Por el lema 4.3.1 tenemos que $W \subset \mathcal{L} \cap M$, pero esto contradice el hecho de que la intersección de M con una hoja de \mathcal{F} consiste de un conjunto discreto de puntos (ver corolario 4.1.4), lo cual demuestra la afirmación.

Supongamos entonces que $\mathbf{z} \in K$, por el lema 4.3.1 tenemos que el α -límite de \mathbf{z} está en M y la afirmación anterior demuestra que $\alpha(\mathbf{z})$ no está en M^* , por tanto, el α -límite de \mathbf{z} es el origen. El resto de la demostración se sigue de la afirmación que acabamos de demostrar. \square

Teorema 4.3.3. *Supongamos que \mathcal{F} tiene un contacto analítico en $\mathbf{0}$ con respecto a g y \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g . Consideremos la restricción de \mathcal{F} a \mathbb{B}_ε la bola cerrada, centrada en $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$. Sea M la intersección con \mathbb{B}_ε de la correspondiente variedad polar en U , sea \widehat{M}^* el saturado de M^* por \mathcal{F} en \mathbb{B}_ε y sea $K := \mathbb{B}_\varepsilon \setminus \widehat{M}^*$. Entonces:*

1. *El flujo gradiente dota a K de la estructura de un cono foliado con vértice borrado en $\mathbf{0}$. De hecho, cada hoja $\mathcal{L} \subset K$ es transversal a todas las g -esferas alrededor del origen, éstas son difeomorfas a $(\mathcal{L} \cap \mathbb{S}_\varepsilon) \times \mathbb{R}$ y tiene al origen en su cerradura.*
2. *Sea $\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ compacta y supongamos que la intersección de M con la frontera de $\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ es vacía, entonces su característica de Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$ es igual al número de puntos de intersección en $(\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon) \cap M$ contados con signo. El signo es negativo cuando el correspondiente índice de Morse es impar y positivo en caso contrario.*

Demostración. El inciso (1) es una consecuencia directa del lema 4.3.2, por lo que sólo resta dar la demostración del inciso (2). Sea $\nu(\mathbf{z}) := \text{grad}(g|_{\mathcal{L}})(\mathbf{z})$ el campo vectorial gradiente de la función g sobre la hoja \mathcal{L} restringida a la bola cerrada \mathbb{B}_ε . Las singularidades del campo ν son precisamente los puntos críticos de $g|_{\mathcal{L}}$, es decir, las singularidades de ν corresponden a la intersección $(\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon) \cap M$, por lo tanto ν no se anula en \mathbb{S}_ε . Por otra parte, por la definición del campo $\nu(\mathbf{z})$ la diferencial $D_{\mathbf{z}}\nu$ es precisamente la hessiana de la función $g|_{\mathcal{L}}$, es decir, $D_{\mathbf{z}}\nu = \text{Hess}_{\mathbf{z}}(g|_{\mathcal{L}})$. Por lo tanto, si el índice de Morse en un punto crítico \mathbf{p}_j de $g|_{\mathcal{L}}$ es impar, entonces el determinante de $D_{\mathbf{p}_j}\nu$ es negativo (ver definición 1.1.2), por el lema 1.3.4 tenemos que el índice de Poincaré Hopf en este caso es -1 . De igual forma, si el índice de Morse en un punto \mathbf{p}_j es par, el índice de Poincaré-Hopf en \mathbf{p}_j es $+1$. Por lo tanto, si $(\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon) \cap M = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r\}$, el índice de Poincaré-Hopf global,

$Ind_{PH}(\nu, \mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$, es

$$Ind_{PH}(\nu, \mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon) = \sum_{j=1}^r (-1)^{I(\mathbf{p}_j)},$$

donde $I(\mathbf{p}_j)$ denota al índice de Morse de $g|_{\mathcal{L}}$ en \mathbf{p}_j . Finalmente, observemos que ν es un campo definido sobre la variedad con frontera $\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon$, además, por construcción, el campo $\nu(\mathbf{z}) := \text{grad}(g|_{\mathcal{L}})(\mathbf{z})$ es transversal a la frontera y apunta siempre al exterior de la variedad, por tanto, podemos aplicar el teorema de Poincaré-Hopf para variedades con frontera (Teo. 1.3.3) el cual nos dice que

$$Ind_{PH}(\nu, \mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon) = \chi(\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon),$$

lo cual concluye la demostración. □

Notemos que la teoría de Morse clásica nos dice que la topología de cada hoja $\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon \subset \widehat{M^*}$ está determinada, en algún sentido, por su intersección con la esfera frontera, $\mathcal{L} \cap \mathbb{S}_\varepsilon$, por los puntos donde \mathcal{L} interseca a M y por sus correspondientes índices de Morse.

En la sección 6.1 mostraremos algunas aplicaciones del teorema anterior.

4.4. Foliaciones sobre las esferas

Sea g una función analítica sobre una vecindad U del origen en \mathbb{C}^n y \mathcal{F} una foliación con las características mencionadas al inicio del capítulo. Como se mencionó en la sección anterior vamos a denotar por \mathbb{S}_ε a la g -esfera de radio ε definida por $g^{-1}(\varepsilon)$ y por \mathbb{B}_ε a la bola cerrada definida por g cuya frontera es \mathbb{S}_ε , de igual forma, cada vez que hablemos de la distancia de un punto \mathbf{x} al origen nos estaremos refiriendo a la distancia definida por g .

Notemos que la restricción de la foliación \mathcal{F} a la esfera \mathbb{S}_ε define una foliación de la esfera \mathbb{S}_ε , a la cual denotaremos por \mathcal{F}_ε . Dicha foliación tiene como conjunto singular a $M_\varepsilon := M(\mathcal{F}, g) \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ y fuera de M sus hojas son suaves y de dimensión real $2d - 1$. Por otra parte, la intersección de una hoja \mathcal{L} de \mathcal{F} con una esfera \mathbb{S}_ε puede consistir de varias componentes conexas, por lo que a lo largo de esta sección cuando hablemos de las hojas de la foliación \mathcal{F}_ε nos estaremos refiriendo a las componentes conexas de la intersección de las hojas de \mathcal{F} con \mathbb{S}_ε .

Asumamos que \mathcal{F} tiene un contacto analítico en $\mathbf{0}$ y que preserve la estructura de Morse de g . Sean M^1, \dots, M^r las componentes irreducibles del germen de M en $\mathbf{0}$. Si ε es suficientemente pequeño, entonces cada componente M^j interseca a \mathbb{S}_ε transversalmente

en una subvariedad de la esfera, $L_{j,\varepsilon} := M^j \cap \mathbb{S}_\varepsilon$, llamada la aureola de M^j . Entonces, el teorema de estructura cónica 1.2.11 aplicado a cada componente de M nos dice que existe un homeomorfismo que envía $(\mathbb{B}_\varepsilon, \mathbb{B}_\varepsilon \cap (\cup M^j))$ en el cono sobre $(\mathbb{S}_\varepsilon, \cup L_{j,\varepsilon})$. Por otra parte, debido a la estructura cónica de M alrededor del origen, tenemos que si $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ son suficientemente pequeños, entonces existe un difeomorfismo que envía \mathbb{S}_ε en $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$ y envía el conjunto singular de la foliación \mathcal{F}_ε en el conjunto singular de $\mathcal{F}_{\varepsilon'}$, es decir

$$(\mathbb{S}_\varepsilon, \cup L_{j,\varepsilon}) \rightarrow (\mathbb{S}_{\varepsilon'}, \cup L_{j,\varepsilon'}).$$

Dadas las relaciones anteriores, una pregunta que surge de manera natural es ¿las foliaciones definidas sobre dos esferas de radio suficientemente pequeño son equivalentes topológicamente? es decir ¿el tipo topológico de la foliación sobre \mathbb{S}_ε depende de la elección de la esfera? o visto de otra forma ¿existe un homeomorfismo o difeomorfismo de \mathbb{S}_ε en $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$ que envíe las hojas de la foliación \mathcal{F}_ε en hojas de la foliación $\mathcal{F}_{\varepsilon'}$?

En general, la respuesta parece ser negativa, sin embargo, el teorema que se muestra a continuación nos da una respuesta positiva en el caso de que la variedad polar conste únicamente de puntos mínimos de la función distancia al origen. Dicho resultado es una generalización del teorema 4.2 de [13], en el cual se trata el caso de foliaciones holomorfas de dimensión compleja 1.

Teorema 4.4.1. *Asumamos que \mathcal{F} tiene un contacto analítico en $\mathbf{0}$ y que preserva la estructura de Morse de g y supongamos que la variedad polar $M = M(\mathcal{F}, g)$ consiste enteramente de puntos de índice de Morse 0 en las hojas. Sea $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ suficientemente pequeños, entonces existe un homeomorfismo*

$$\Phi : (\mathbb{S}_\varepsilon, \mathcal{F}_\varepsilon, M_\varepsilon) \rightarrow (\mathbb{S}_{\varepsilon'}, \mathcal{F}_{\varepsilon'}, M_{\varepsilon'})$$

que envía las hojas de \mathcal{F}_ε sobre hojas de $\mathcal{F}_{\varepsilon'}$.

Demostración. Como todos los puntos en M^* tienen índice de Morse 0, todos ellos son puntos de g -distancia mínima local a $\mathbf{0}$ sobre su hoja. Así, cada hoja de \mathcal{F}_ε suficientemente cercana a M es compacta y difeomorfa a una esfera de dimensión $2d - 1$. Sea V_ε una vecindad tubular de M_ε en \mathbb{S}_ε tal que su frontera ∂V_ε está formada por hojas de \mathcal{F}_ε . Más aún, vamos a pedir que la vecindad tubular sea suficientemente pequeña de tal forma que cada componente conexa \mathcal{L}^j de $\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ que interseca a \mathbb{S}_ε en la cerradura de V_ε contenga un único punto de distancia mínima al origen.

Vamos ahora a dar una relación entre los puntos en M_ε y las hojas que se encuentran en la frontera de la vecindad tubular, también daremos una descomposición de la vecindad tubular en discos.

Sea \mathcal{G}_{M^*} el flujo correspondiente al campo vectorial gradiente de la función $g|_{M^*}$; para cada $\mathbf{z} \in M_\varepsilon$, sea $\gamma_{\mathbf{z}}(t)$ la línea de flujo de \mathcal{G}_{M^*} que pasa por \mathbf{z} . Notemos que $\gamma_{\mathbf{z}}(t)$ interseca a cada esfera de radio ε_t , $0 < \varepsilon_t \leq \varepsilon$, en un único punto. Por otra parte, toda hoja \mathcal{L} que interseca a \mathbb{S}_ε en la frontera de V_ε tiene un único punto de distancia mínima

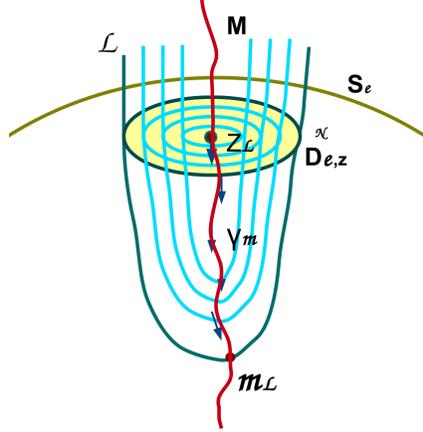


Figura 4.2: Descomposición de V_ε en discos transversales a M .

al origen, $\mathbf{m}_\mathcal{L}$, cuya distancia es menor a ε y el cual corresponde al punto de tangencia de la hoja \mathcal{L} con una g -esfera. Sea $\gamma_{\mathbf{m}_\mathcal{L}}(t)$ la línea de flujo que pasa por $\mathbf{m}_\mathcal{L}$ y sea $\mathbf{z}_\mathcal{L}$ el punto donde este arco interseca a \mathbb{S}_ε . Notemos que cada punto \mathbf{x} en el segmento $[\mathbf{m}_\mathcal{L}, \mathbf{z}_\mathcal{L}]$ de la línea de flujo $\gamma_{\mathbf{m}_\mathcal{L}}(t)$ pertenece a una hoja $\mathcal{L}_\mathbf{x}$ cuya intersección con \mathbb{S}_ε se encuentra en el interior de la vecindad tubular (ver fig. 4.2). Más aún, el arco $[\mathbf{m}_\mathcal{L}, \mathbf{z}_\mathcal{L}]$ determina una familia a un parámetro de $2d - 1$ esferas en \mathbb{S}_ε , anidadas alrededor de $\mathbf{z}_\mathcal{L}$, las cuales junto con $\mathbf{z}_\mathcal{L}$ forman un disco $\mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}_\mathcal{L}}^N$ de dimensión $2d$, transversal a M^* en $\mathbf{z}_\mathcal{L}$.

Observaciones:

1. al realizar este procedimiento sobre todo punto en M_ε , obtenemos una descomposición de V_ε en discos $\mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}_\mathcal{L}}^N$. Dicha descomposición nos brinda una forma natural de identificar a V_ε con el haz normal unitario NM_ε a M_ε en la esfera \mathbb{S}_ε , además cada fibra del haz normal $\mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}_\mathcal{L}}^N$ está foliada por esferas concéntricas correspondientes a hojas de \mathcal{F}_ε ;
2. el procedimiento anterior define una biyección entre las hojas de \mathcal{F}_ε en la frontera de la vecindad tubular y los puntos en M_ε , tal que cada hoja \mathcal{L} que interseca a \mathbb{S}_ε en ∂V_ε tiene asociado un único punto $\mathbf{z}_\mathcal{L}$ en M_ε .

Sea ε' un número positivo menor que ε tal que cada hoja $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$ que interseca a \mathbb{S}_ε en ∂V_ε interseca a $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$ transversalmente. Entonces podemos definir una vecindad tubular $V_{\varepsilon'}$ de $M_{\varepsilon'}$ en $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$ de la siguiente manera, si $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$ entonces $\mathcal{L} \cap \mathbb{S}_{\varepsilon'}$ está en $\partial V_{\varepsilon'}$ si y sólo si $\mathcal{L} \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ está en ∂V_ε .

Si ε' no cumple la condición anterior, entonces podemos elegir un número finito de esferas de radios $\varepsilon = \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \dots > \varepsilon_r = \varepsilon'$ tal que paso a paso se cumple la condición de transversalidad. La existencia de esferas intermedias que satisfacen dicha condición

se debe al hecho de que la propiedad de transversalidad es estable, lo cual nos permite definir una cubierta abierta del anillo contenido entre las esferas \mathbb{S}_ε y $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$. Por otra parte, la compacidad de dicho conjunto nos da la finitud del conjunto de ε 's.

Notemos que, definida de esta manera, la vecindad tubular $V_{\varepsilon'}$ cumple las mismas propiedades que V_ε . Sea \mathcal{L} una hoja de \mathcal{F} que interseca a \mathbb{S}_ε en la frontera de la vecindad tubular correspondiente y sean $\mathbf{m}_\mathcal{L}$ el punto de distancia mínima de la hoja \mathcal{L} y $\gamma_{\mathbf{m}_\mathcal{L}}(t)$ la línea de flujo del campo vectorial gradiente a $g|_{M^*}$ que pasa por el punto $\mathbf{m}_\mathcal{L}$. Notemos que la línea de flujo $\gamma_{\mathbf{m}_\mathcal{L}}(t)$ interseca a la esfera de radio ε' en un único punto al cual denotaremos por $\mathbf{z}'_\mathcal{L}$, más aún, el campo vectorial $\text{grad}(g|_{M^*})$ es un campo suave sin singularidades, que envía puntos de M_ε en puntos de $M_{\varepsilon'}$ mediante sus líneas de flujo, lo cual define un difeomorfismo

$$\phi : M_\varepsilon \rightarrow M_{\varepsilon'} .$$

Finalmente denotemos por $\mathbb{D}_{\varepsilon', \mathbf{z}'_\mathcal{L}}^\mathcal{N}$ al disco en $V_{\varepsilon'}$ formado (análogamente a $\mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}_\mathcal{L}}^\mathcal{N}$) por $\mathbf{z}'_\mathcal{L}$ y por las hojas en $\mathcal{F}_{\varepsilon'}$ que tienen un punto de distancia mínima local en el segmento $[\mathbf{m}_\mathcal{L}, \mathbf{z}'_\mathcal{L}]$.

La idea principal para definir el difeomorfismo Φ con las características deseadas, es definirlo primero en el complemento de la vecindad tubular y posteriormente extenderlo al interior de V_ε , sin embargo, para evitar problemas en la frontera de la vecindad tubular vamos a definir Φ en un conjunto cerrado que contenga a $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus V_\varepsilon^o$.

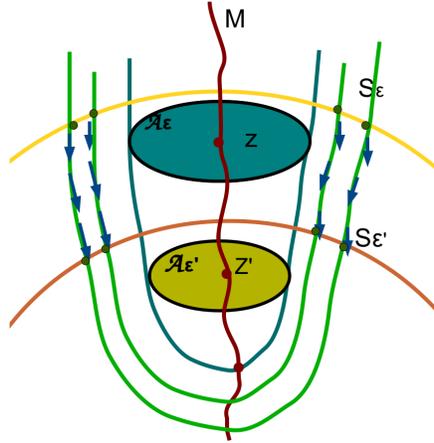
Sea δ un número real positivo menor que ε' , tal que para toda hoja \mathcal{L} que interseca a V_ε en su frontera, \mathcal{L} interseca transversalmente (en un conjunto no vacío) a la esfera centrada en el origen y de radio δ . Llamemos \mathcal{A}_ε al conjunto de puntos \mathbf{z} en V_ε para los cuales $\mathcal{L}_\mathbf{z}$ (la hoja de \mathcal{F} que contiene a \mathbf{z}) tiene un punto de g -distancia mínima al origen $\mathbf{m}_{\mathcal{L}_\mathbf{z}}$ tal que $\delta \leq g(\mathbf{m}_{\mathcal{L}_\mathbf{z}}) \leq \varepsilon$. Vamos a definir al conjunto $\mathcal{A}_{\varepsilon'}$ de manera totalmente análoga.

Consideremos ahora el flujo $\mathcal{G}_\mathcal{F}$ definido por el campo vectorial gradiente a g en su restricción a cada una de las hojas de la foliación \mathcal{F} . Éste es un flujo suave y sin singularidades fuera de M . Más aún, una línea de flujo que pasa por un punto $\mathbf{z} \in \mathbb{S}_\varepsilon \setminus \mathcal{A}_\varepsilon^o$ interseca transversalmente a todas las esferas de radio ρ , con $\varepsilon' \leq \rho \leq \varepsilon$. Esto determina un difeomorfismo

$$\Phi : (\mathbb{S}_\varepsilon \setminus \mathcal{A}_\varepsilon^o) \rightarrow (\mathbb{S}_{\varepsilon'} \setminus \mathcal{A}_{\varepsilon'}^o)$$

que lleva hojas de la foliación \mathcal{F}_ε en hojas de la foliación $\mathcal{F}_{\varepsilon'}$ (ver figura 4.3). En particular, Φ envía la frontera de V_ε en la frontera de $V_{\varepsilon'}$ y envía $\partial\mathcal{A}_\varepsilon$ en $\partial\mathcal{A}_{\varepsilon'}$. Notemos que los difeomorfismos ϕ y Φ son compatibles, es decir, dado \mathbf{z} en M_ε y $\phi(\mathbf{z})$ su imagen bajo el difeomorfismo ϕ , el mapeo Φ envía la frontera del disco $\mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}}^\mathcal{N}$ en la frontera del disco $\mathbb{D}_{\varepsilon', \phi(\mathbf{z})}^\mathcal{N}$, por tanto, haciendo un abuso en la notación, denotaremos también por Φ al mapeo ϕ .

Para definir el difeomorfismo en el resto de la vecindad tubular, vamos a definir un

Figura 4.3: Difeomorfismo fuera de una vecindad de M^*

campo vectorial en el interior de cada una de las vecindades tubulares V_ε y $V_{\varepsilon'}$ el cual usaremos para extender el difeomorfismo de la frontera de \mathcal{A}_ε al interior de ésta.

Lema 4.4.2. *Dada la vecindad tubular V_ε de M_ε en \mathbb{S}_ε como antes, existe ϑ_ε un campo vectorial integrable sobre V_ε tal que:*

1. *es no singular en $V_\varepsilon \setminus M_\varepsilon$;*
2. *es tangente a los discos $\mathbb{D}_{\varepsilon, z}^N$ y apunta siempre al interior de cada disco;*
3. *es transversal a las hojas de la foliación \mathcal{F}_ε ;*
4. *el campo envía hojas de \mathcal{F}_ε en hojas de la misma foliación.*

La demostración de este lema se dará más adelante.

Notemos que las vecindades tubulares V_ε y $V_{\varepsilon'}$ satisfacen las mismas propiedades, por lo tanto existen campos vectoriales ϑ_ε y $\vartheta_{\varepsilon'}$ sobre V_ε y $V_{\varepsilon'}$ respectivamente, que cumplen las propiedades mencionadas en el lema 4.4.2.

Vamos ahora a extender el difeomorfismo Φ haciendo uso de las líneas de flujo de los campos vectoriales ϑ_ε y $\vartheta_{\varepsilon'}$. Sean \mathbf{x} en $\mathcal{A}_\varepsilon^o$ y \mathbf{y} en $\partial\mathcal{A}_\varepsilon$ dos puntos en la línea de flujo $\alpha_{\mathbf{y}}(t)$ del campo ϑ_ε ; supongamos que $\alpha_{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}$ y $\alpha_{\mathbf{y}}(t_o) = \mathbf{x}$. Sea $\mathbf{y}' \in \partial\mathcal{A}_{\varepsilon'}$ la imagen de \mathbf{y} bajo Φ y por último sea $\beta_{\mathbf{y}'}(t)$ la línea de flujo del campo $\vartheta_{\varepsilon'}$ que pasa por \mathbf{y}' al tiempo $t = 0$. Entonces definimos Φ en \mathbf{x} como

$$\Phi(\mathbf{x}) = \beta_{\mathbf{y}'}(t_o) ;$$

claramente Φ es un difeomorfismo de $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus M_\varepsilon$ en $\mathbb{S}_{\varepsilon'} \setminus M_{\varepsilon'}$ que envía hojas de la foliación \mathcal{F}_ε en hojas de $\mathcal{F}_{\varepsilon'}$ (ver figura 4.4).

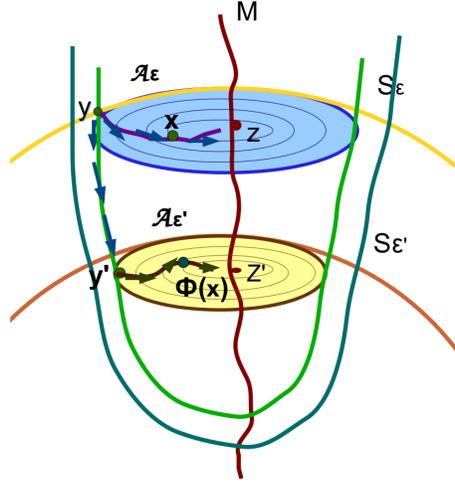


Figura 4.4: Definición del homeomorfismo dentro de la vecindad tubular.

Notemos que el mapeo Φ está bien definido en $\partial\mathcal{A}_\varepsilon$, por lo que lo único que hace falta para concluir con nuestra demostración es ver que el mapeo Φ pega bien en M_ε , es decir, vamos a demostrar que Φ es un homeomorfismo alrededor de M_ε .

Sea \mathbf{z} en M_ε y $\mathbf{z}' = \Phi(\mathbf{z})$, ya habíamos visto que en este caso Φ envía la frontera del disco $\mathbb{D}_{\varepsilon,\mathbf{z}}^N$ en la frontera de $\mathbb{D}_{\varepsilon',\mathbf{z}'}^N$, más aún, por la propiedad (2) del lema 4.4.2 tenemos que Φ envía todos los puntos del disco $\mathbb{D}_{\varepsilon,\mathbf{z}}^N$ en el disco $\mathbb{D}_{\varepsilon',\mathbf{z}'}^N$.

Consideremos \mathbf{y} en $\partial\mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathbb{D}_{\varepsilon,\mathbf{z}}^N$ y sea $\mathbf{y}' = \Phi(\mathbf{y})$ en $\partial\mathcal{A}_{\varepsilon'} \cap \mathbb{D}_{\varepsilon',\mathbf{z}'}^N$. Por el lema 4.4.2 sabemos que las líneas de flujo del campo ϑ_ε en el disco $\mathbb{D}_{\varepsilon,\mathbf{z}}^N$ convergen a \mathbf{z} (análogamente en $\mathbb{D}_{\varepsilon',\mathbf{z}'}^N$), por tanto, si $\alpha_{\mathbf{y}}$ es la línea de flujo del campo ϑ_ε que pasa por \mathbf{y} y $\beta_{\mathbf{y}'}$ es la línea de flujo del campo $\vartheta_{\varepsilon'}$ que pasa por \mathbf{y}' tenemos

$$\Phi\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_{\mathbf{y}}(t)\right) = \Phi(\mathbf{z}) = \mathbf{z}' = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_{\mathbf{y}'}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(\alpha_{\mathbf{y}}(t))$$

como esto es válido sobre todas las líneas de flujo, entonces Φ es continuo en M_ε . La demostración de la continuidad de Φ^{-1} es totalmente análoga a la demostración para Φ . \square

Vamos ahora a dar la demostración del lema 4.4.2.

Demostración. Identifiquemos la vecindad tubular V_ε de M_ε con NM_ε , el haz normal de M_ε en la esfera de radio ε , y al disco $\mathbb{D}_{\varepsilon,\mathbf{z}}^N$ con la fibra del haz normal del punto $\mathbf{z} \in M_\varepsilon$.

Fijemos un punto \mathbf{z}_o en M_ε y consideremos una vecindad $U_{\varepsilon,\mathbf{z}_o}$ de \mathbf{z}_o en M_ε , vecindad trivializadora del haz normal a M_ε en la esfera correspondiente. Dicha vecindad satisface

que si π es la proyección del haz NM_ε sobre M_ε y $W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} := \pi^{-1}(U_{\varepsilon, \mathbf{z}_0})$, entonces $W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} \cong U_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} \times \mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}^{\mathcal{N}}$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} NM_\varepsilon & \supset & W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{z}_0}} U_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} \times \mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}^{\mathcal{N}} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \swarrow p \\ M_\varepsilon & \supset & U_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} \end{array}$$

donde $\varphi_{\mathbf{z}_0}$ es el difeomorfismo entre los abiertos $W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$ y $U_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} \times \mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}^{\mathcal{N}}$ y p es la proyección sobre el primer factor. Observemos que podemos descomponer a $W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$ como

$$W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} = \bigcup_{\mathbf{z} \in U_{\mathbf{z}_0, \varepsilon}} \mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}}^{\mathcal{N}},$$

lo cual define una foliación sobre $W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$ donde las hojas corresponden a los discos $\mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}}^{\mathcal{N}}$ de dimensión $2d$ (lo anterior es una consecuencia directa de la existencia del difeomorfismo $\varphi_{\mathbf{z}_0} : W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} \rightarrow U_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} \times \mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}^{\mathcal{N}}$ tal que $\varphi_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{x}) = (\mathbf{z}, \mathbf{y})$ donde $\mathbf{x} \in W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$, $\mathbf{z} \in U_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}^{\mathcal{N}}$).

Definamos la función $R_{\mathcal{F}} : W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} \rightarrow M$ como la función tal que a cada punto \mathbf{x} en $W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$ lo envía al punto de distancia mínima sobre la hoja $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ a través de las líneas de flujo de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. Notemos que dicha aplicación es diferenciable. Definamos ahora la función diferenciable H de $W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$ en el intervalo $(0, \varepsilon^2]$ como $H(\mathbf{x}) := g \circ R_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$. Consideremos la restricción de H a cada una de las hojas de la foliación definida por discos sobre $W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$, es decir,

$$\begin{aligned} H &: W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} \longrightarrow (0, \varepsilon^2), \\ h_{\mathbf{z}} &:= H|_{\mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}}^{\mathcal{N}}} : \mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}}^{\mathcal{N}} \longrightarrow (0, \varepsilon^2). \end{aligned}$$

Sea $(z_1, \dots, z_{2n-2d-1}, y_1, \dots, y_{2d})$ el sistema de coordenadas alrededor de un punto \mathbf{z} en $W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$ dado por su foliación por discos. Notemos que en este sistema coordenado la función $h_{\mathbf{z}}$ satisface $h_{\mathbf{z}}(y_1, \dots, y_{2d}) = H(z_1, \dots, z_{2n-2d-1}, y_1, \dots, y_{2d})$ donde $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{2n-2d-1})$ en $U_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$ es fijo. Como H es diferenciable en todas sus coordenadas, podemos considerar, para todo \mathbf{z} en $U_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$, el gradiente de $h_{\mathbf{z}}$ en coordenadas (y_1, \dots, y_{2d}) , $\text{grad}(h_{\mathbf{z}})$. Dicho campo cumple

1. es tangente al disco $\mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}}^{\mathcal{N}}$;
2. es transversal a las hojas de la foliación \mathcal{F}_ε que se encuentran en $\mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}}^{\mathcal{N}}$, además, podemos asumir que el campo apunta siempre al interior del disco (la otra posibilidad es que el campo apunte siempre hacia la frontera del disco, en cuyo caso bastará con considerar el campo $-\text{grad}(h_{\mathbf{z}})$);
3. se anula únicamente en \mathbf{z} , el “centro” del disco;
4. el conjunto de vectores $\{\text{grad}(h_{\mathbf{z}})\}_{\mathbf{z} \in U_{\mathbf{z}_0, \varepsilon}}$ varía suavemente con respecto a \mathbf{z} en $U_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$.

Notemos que la función $h_{\mathbf{z}}$ es una función que crece conforme nos acercamos al origen, además tiene un único máximo en el centro del disco, por lo tanto, el campo $\text{grad}(h_{\mathbf{z}})$ únicamente se anula en \mathbf{z} , lo cual demuestra la propiedad 3. Por otra parte, notemos que las fibras de $h_{\mathbf{z}}$ coinciden con las hojas de \mathcal{F}_ε en $\mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}}^N$, lo cual implica la propiedad 2. Finalmente, las propiedades 1 y 4 se deducen de la definición de $h_{\mathbf{z}}$.

Sea $v_{\varepsilon, \mathbf{z}}(\mathbf{y}) := \frac{\text{grad}(h_{\mathbf{z}})(\mathbf{y})}{|\text{grad}(h_{\mathbf{z}})(\mathbf{y})|^2}$. Dicho campo está definido en $\mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}}^N \setminus \{\mathbf{z}\}$ y es una reparametrización del campo vectorial gradiente a $h_{\mathbf{z}}$, por lo tanto satisface las propiedades 1, 2 y 4 mencionadas en el párrafo anterior, además, el campo $v_{\varepsilon, \mathbf{z}}$ envía hojas de la foliación \mathcal{F}_ε en hojas de \mathcal{F}_ε y todas sus líneas de flujo convergen a \mathbf{z} .

Para demostrar esta última propiedad consideremos $\alpha_{\mathbf{x}}(t)$ la línea de flujo del campo $v_{\varepsilon, \mathbf{z}}$ que pasa por el punto \mathbf{x} en $\mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}}^N$ al tiempo t_0 , $\alpha_{\mathbf{x}}(t)$ satisface

$$\frac{d\alpha_{\mathbf{x}}}{dt}(t_1) = v_{\varepsilon, \mathbf{z}}(\alpha_{\mathbf{x}}(t_1)) = \frac{\text{grad}(h_{\mathbf{z}})(\alpha_{\mathbf{x}}(t_1))}{|\text{grad}(h_{\mathbf{z}})(\alpha_{\mathbf{x}}(t_1))|^2}$$

para todo t_1 en \mathbb{R} . Derivando la composición $h_{\mathbf{z}} \circ \alpha_{\mathbf{x}}$ tenemos

$$\frac{d(h_{\mathbf{z}} \circ \alpha_{\mathbf{x}})}{dt} = \left\langle \text{grad } h_{\mathbf{z}}(\alpha_{\mathbf{x}}), \frac{d\alpha_{\mathbf{x}}}{dt} \right\rangle = 1,$$

lo cual implica que $h_{\mathbf{z}} \circ \alpha_{\mathbf{x}}$ es una función que depende linealmente del tiempo. Consideremos ahora \mathbf{x} y \mathbf{y} dos puntos en la misma fibra de $h_{\mathbf{z}}$ y sean $\alpha_{\mathbf{x}}$ y $\alpha_{\mathbf{y}}$ las curvas integrales del campo $v_{\varepsilon, \mathbf{z}}$ que pasan por \mathbf{x} y \mathbf{y} al tiempo $t = 0$ (respectivamente). Entonces

$$h_{\mathbf{z}}(\alpha_{\mathbf{x}}(t)) = t + h_{\mathbf{z}}(\alpha_{\mathbf{x}}(0)) = t + h_{\mathbf{z}}(\alpha_{\mathbf{y}}(0)) = h_{\mathbf{z}}(\alpha_{\mathbf{y}}(t)).$$

Lo anterior implica que si empezamos con dos puntos en la misma fibra de $h_{\mathbf{z}}$ y nos movemos el mismo tiempo t a través de sus curvas integrales, llegamos a puntos en la misma fibra.

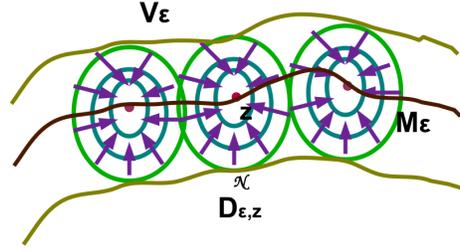
Tenemos ahora que el conjunto de vectores

$$\left\{ v_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}(\mathbf{x}) := \frac{\text{grad}(h_{\mathbf{z}})(\mathbf{y})}{|\text{grad}(h_{\mathbf{z}})(\mathbf{y})|^2} \right\}_{\mathbf{x} \in W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}}$$

(donde $\mathbf{x} \in W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$, $\mathbf{z} \in U_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{D}_{\varepsilon, \mathbf{z}}^N$ están relacionados por el difeomorfismo $\varphi_{\mathbf{z}_0}(\mathbf{x}) = (\mathbf{z}, \mathbf{y})$), define un campo vectorial sobre $W_{\varepsilon, \mathbf{z}_0} \setminus M_\varepsilon$ que varía suavemente respecto a M_ε y que satisface las mismas propiedades que los campos $v_{\varepsilon, \mathbf{z}_0}(\mathbf{x})$ sobre cada disco.

Vamos a usar estos campos para definir un campo vectorial global sobre la vecindad tubular.

Notemos que el conjunto de abiertos $\mathcal{W} := \{W_{\varepsilon, \mathbf{z}}\}_{\mathbf{z} \in M_\varepsilon}$ definidos como antes forma una cubierta abierta de V_ε , de igual forma, el conjunto $\mathcal{U} := \{U_{\varepsilon, \mathbf{z}}\}_{\mathbf{z} \in M_\varepsilon}$ forma una cubierta abierta de la variedad M_ε . Como M_ε es paracompacto, podemos considerar una partición

Figura 4.5: Campos vectoriales en $W_{z, \epsilon}$

de la unidad subordinada a la cubierta \mathcal{U} de M_{ϵ} , a la cual denotaremos por $\{\psi_{\mathbf{z}}\}_{\mathbf{z} \in M_{\epsilon}}$, a partir de ésta vamos a definir una partición de la unidad subordinada a la cubierta \mathcal{W} como $\phi_{\mathbf{z}_o}(\mathbf{x}) := \psi_{\mathbf{z}_o}(\mathbf{z})$, donde $\mathbf{x} \in W_{\epsilon, \mathbf{z}_o}$, $\mathbf{z} \in U_{\epsilon, \mathbf{z}_o}$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{D}_{\epsilon, \mathbf{z}}^{\mathcal{N}}$ están relacionados por el difeomorfismo $\varphi_{\mathbf{z}_o}(\mathbf{x}) = (\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Vamos a usar la partición de la unidad $\{\phi_{\mathbf{z}}\}$ para pegar los campos vectoriales sobre V_{ϵ} . Sea

$$\vartheta_{\epsilon}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{z} \in M_{\epsilon}} \phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) v_{\epsilon, \mathbf{z}}(\mathbf{x}). \quad (4.4)$$

El campo $\vartheta_{\epsilon}(\mathbf{x})$ está definido en $V_{\epsilon} \setminus M_{\epsilon}$ y satisface:

1. es tangente al disco $\mathbb{D}_{\epsilon, \mathbf{z}}^{\mathcal{N}}$;
2. es transversal a las hojas de la foliación \mathcal{F}_{ϵ} que se encuentran en V_{ϵ} y apunta siempre hacia el centro del disco;
3. no se anula en ningún punto;
4. el campo envía hojas de la foliación \mathcal{F}_{ϵ} en hojas de \mathcal{F}_{ϵ} .

Las propiedades anteriores son una consecuencia directa de las propiedades del campo $v_{\epsilon, \mathbf{z}}(\mathbf{x})$ y de la forma en que se definió la partición de la unidad sobre la cubierta \mathcal{W} de V_{ϵ} . \square

La demostración del teorema análogo a 4.4.1 dado en [13] para el caso de foliaciones de dimensión 1 consta de dos partes. En la primera parte, se define el homeomorfismo fuera del interior de la vecindad tubular exactamente de la misma manera en que hicimos para el caso de foliaciones complejas de dimensión d , sin embargo, para extender el homeomorfismo al resto de la esfera es indispensable que el haz normal a M_{ϵ} en \mathbb{S}_{ϵ} sea trivial, o más específicamente, los autores hacen uso de la existencia de una sección global del haz normal que no se anula en ningún punto. En el caso general, el haz normal no es trivial, lo cual nos impide generalizar directamente la demostración dada en [13].

En el caso de foliaciones de codimensión 1, se puede demostrar que la variedad polar M_ε es una variedad diferenciable real, compacta y de dimensión 1 y por tanto M_ε es equivalente a una unión finita de variedades difeomorfas a la esfera \mathbb{S}^1 . Como consecuencia de lo anterior, el haz normal a M_ε es trivial, lo cual implica que la demostración dada en [13] se puede adaptar a este caso.

Capítulo 5

Foliaciones de codimensión 1

En este capítulo vamos a hacer un análisis de las propiedades de la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g , $M(\mathcal{F}, g)$, donde \mathcal{F} es una foliación holomorfa de \mathbb{C}^n de codimensión uno, con singularidad aislada en el origen y g es una función de Morse que tiene un único punto crítico en el origen con índice de Morse 0. En particular vamos a considerar foliaciones definidas por las fibras de una función holomorfa $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Recordemos que si \mathcal{F} es una foliación de \mathbb{C}^n de codimensión uno con singularidades aisladas, el teorema de Malgrange nos dice que para $n \geq 3$ existe una función holomorfa $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que las hojas $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ de la foliación \mathcal{F} se pueden ver como fibras de f , es decir, $\mathcal{L}_{\mathbf{z}} = f^{-1}(f(\mathbf{z}))$ (ver [23, Teo. 0.1]). Notemos que en el caso $n = 2$, el considerar únicamente foliaciones definidas por las fibras de una función holomorfa si es una restricción importante, sin embargo, para dimensiones más grandes, éste es el caso general. Por lo que, en este capítulo vamos a trabajar únicamente con foliaciones definidas por las fibras de una función holomorfa f con singularidad aislada en el origen y tal que $f(\mathbf{0}) = 0$.

Por otra parte, haremos amplio uso de la función de Morse cuadrado de la distancia al origen (con la métrica Euclidiana), $Q(\mathbf{z})$, ya que es una función de Morse que reúne las características indicadas y la cual es fácil de trabajar. También analizaremos a través de diversas familias de ejemplos la topología de las hojas de la foliación \mathcal{F} usando teoría de Morse.

5.1. Ecuaciones de la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g .

Una de nuestras primeras metas es describir específicamente a la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g , para esto necesitamos definir al espacio tangente a las hojas de la foliación \mathcal{F} .

Notemos que una singularidad de la foliación \mathcal{F} es también un punto crítico de la función f , por tanto cualquier $s \neq 0$ en \mathbb{C} es un valor regular de f .

Consideremos \mathbf{z} un punto en la fibra de $s \neq 0$ y (z_1, z_2, \dots, z_n) un sistema de coordenadas definido en una vecindad de \mathbf{z} en \mathbb{C}^n . En el caso de dimensión par, los campos Hamiltonianos asociados a una función f forman un conjunto de vectores contenidos en el espacio tangente $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$, inspirados en esta idea, consideremos el conjunto de vectores

$$v_{j,k}(\mathbf{z}) := \left(0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}), 0, \dots, 0, -\frac{\partial f}{\partial z_j}(\mathbf{z}), 0, \dots, 0 \right),$$

donde $\frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z})$ y $-\frac{\partial f}{\partial z_j}(\mathbf{z})$ corresponden a las entradas j y k del vector $v_{j,k}(\mathbf{z})$ para todo $1 \leq j < k \leq n$.

Lema 5.1.1. *El conjunto de vectores $\{v_{j,k}\}_{1 \leq j < k \leq n}$ definidos en el párrafo anterior, forma un conjunto de generadores del espacio tangente $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ para todo $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.*

Demostración. Primero, observemos que cada uno de los vectores $v_{j,k}(\mathbf{z})$ satisface la ecuación $D_{\mathbf{z}}f(v_{j,k}(\mathbf{z})) = 0$, es decir, están contenidos en el kernel de la aplicación $D_{\mathbf{z}}f$, el cual corresponde precisamente al espacio $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$.

Sea $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ un punto en \mathbb{C}^n . Por ser punto regular de f sabemos que existe alguna k en $\{1, \dots, n\}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}) \neq 0$, entonces los vectores

$$\begin{aligned} v_{1,k}(\mathbf{z}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}), 0, 0, \dots, 0, -\frac{\partial f}{\partial z_1}(\mathbf{z}), 0, 0, \dots, 0 \right), \\ v_{2,k}(\mathbf{z}) &= \left(0, \frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}), 0, \dots, 0, -\frac{\partial f}{\partial z_2}(\mathbf{z}), 0, 0, \dots, 0 \right), \\ &\vdots \\ v_{k-1,k}(\mathbf{z}) &= \left(0, 0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}), -\frac{\partial f}{\partial z_{k-1}}(\mathbf{z}), 0, 0, \dots, 0 \right), \\ v_{k,k+1}(\mathbf{z}) &= \left(0, 0, \dots, 0, 0, \frac{\partial f}{\partial z_{k+1}}(\mathbf{z}), -\frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}), 0, \dots, 0 \right), \\ &\vdots \\ v_{k,n}(\mathbf{z}) &= \left(0, 0, \dots, 0, 0, \frac{\partial f}{\partial z_{k+1}}(\mathbf{z}), 0, \dots, 0, -\frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}) \right) \end{aligned}$$

forman un conjunto de $n-1$ vectores linealmente independientes en $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$. Lo cual concluye la demostración. \square

Observemos que el conjunto $\{v_{1,k}(\mathbf{z}), \dots, v_{k-1,k}(\mathbf{z}), v_{k,k+1}(\mathbf{z}), \dots, v_{k,n}(\mathbf{z})\}$ forma una base del espacio tangente a $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ en \mathbf{z} , sin embargo, esto sólo se da de manera local (en los puntos que satisfacen la condición $\frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}) \neq 0$), por lo que, para asegurar que los campos

datos generan al espacio tangente $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ en todo punto $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ en \mathbb{C}^n es necesario considerar el conjunto $\{v_{j,k}(\mathbf{z})\}_{1 \leq j < k \leq n}$.

Cabe mencionar que hay más de una forma de dar un conjunto de generadores del espacio tangente, sin embargo, una de las ventajas de considerar los campos mencionados, es el hecho de que al usar estos, las ecuaciones que definen a la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g toman una forma muy sencilla.

Recordemos que la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g , $M = M(\mathcal{F}, g)$, se define como el conjunto de puntos críticos de la restricción de g a cada una de las hojas de la foliación \mathcal{F} , o de manera equivalente (ver lema (3.1.2)) como el conjunto de puntos de tangencia entre la foliación \mathcal{F} y la foliación definida por la fibras de g , es decir

$$M := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \subset T_{\mathbf{z}}g^{-1}(g(\mathbf{z}))\} . \quad (5.1)$$

Analicemos en primer lugar que sucede cuando consideramos a la función de Morse cuadrado de la función distancia al origen, a la cual denotaremos por $Q(\mathbf{z})$, específicamente

$$Q(z_1, \dots, z_n) := |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 . \quad (5.2)$$

Notemos que las fibras de Q corresponden precisamente a las esferas canónicas de radio r , \mathbb{S}_r , centradas en el origen, por lo tanto, cualquier vector $v(\mathbf{z})$ en el tangente a la esfera correspondiente debe ser ortogonal al vector radial \mathbf{z} . Por otra parte, sabemos que si $v(\mathbf{z})$ pertenece al espacio vectorial complejo $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$, entonces también $iv(\mathbf{z})$. Las condiciones anteriores implican que para cualquier $\mathbf{z} \in M$ todo vector $v(\mathbf{z}) \in T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ debe de satisfacer las ecuaciones

$$\langle v(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle_{\mathbb{R}} = 0 \quad \text{y} \quad \langle iv(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle_{\mathbb{R}} = 0 ,$$

donde los productos corresponden al producto interno real. Podemos resumir dichas ecuaciones en

$$\langle v(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle_{\mathbb{C}} = 0 .$$

En particular, si usamos el conjunto de generadores del espacio $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ dado por el lema 5.1.1 tenemos

$$M(\mathcal{F}, Q) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid \langle v_{j,k}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle_{\mathbb{C}} = 0, \quad 1 \leq j < k \leq n\} ,$$

o de manera equivalente

$$M(\mathcal{F}, Q) := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid \bar{z}_k \frac{\partial f}{\partial z_j}(\mathbf{z}) = \bar{z}_j \frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}), \quad 1 \leq j < k \leq n \right\} . \quad (5.3)$$

Proposición 5.1.2. Si \mathcal{F} es una foliación de codimensión 1, con singularidad aislada en el origen, definida por las curvas de nivel de una función holomorfa $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, entonces la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g , $M = M(\mathcal{F}, g)$, está definida por las ecuaciones

$$\frac{\partial g}{\partial z_k} \frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{\partial g}{\partial z_j} \frac{\partial f}{\partial z_k} \quad (5.4)$$

para todo j, k en $\{1, \dots, n\}$.

Demostración. Recordemos que M está formada por los puntos críticos de la restricción de la función g a cada una de las hojas de \mathcal{F} . Sea \mathcal{L} una hoja no singular de \mathcal{F} . Alrededor de cada punto \mathbf{z} en \mathcal{L} existe un entero k tal que $\frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}) \neq 0$, entonces el teorema de la función implícita nos dice que existe una vecindad abierta U de \mathbf{z} en \mathbb{C}^n tal que $\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \cap U$ se puede parametrizar de manera holomorfa por las coordenadas $(z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)$, en otras palabras, tenemos $z_k = z_k(z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)$. Entonces, podemos derivar implícitamente la ecuación $f(\mathbf{z}) = c$ (donde c es una constante) en términos de z_j para ver como se relacionan las variables z_k y z_j sobre cada hoja de la foliación en U . La ecuación resultante es

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial z_j} = 0,$$

o de manera equivalente tenemos

$$\frac{\partial z_k}{\partial z_j} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z_j}}{\frac{\partial f}{\partial z_k}} \quad (5.5)$$

para cada punto en $\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \cap U$. Vamos entonces a calcular las primeras derivadas parciales de g en coordenadas reales z_j, \bar{z}_j , tomando en cuenta la relación que existe entre las coordenadas z_j y z_k ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z_j} &= \frac{\partial g}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial z_j} + \frac{\partial g}{\partial z_j} = \frac{\partial g}{\partial z_k} \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial z_j}}{\frac{\partial f}{\partial z_k}} \right) + \frac{\partial g}{\partial z_j}, \\ \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} &= \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_k} \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}} \right) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j}. \end{aligned}$$

Notemos que las ecuaciones anteriores son el conjugado una de la otra, por lo que para calcular los puntos críticos de $g|_{\mathcal{L}}$ podemos considerar sólo una de las ecuaciones. Por tanto los puntos de M en U están dados por

$$\frac{\partial g}{\partial z_k} \left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial z_j}}{\frac{\partial f}{\partial z_k}} \right) + \frac{\partial g}{\partial z_j} = 0$$

para todo $j = 1, \dots, n$.

Recordemos que habíamos supuesto que $\frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z}) \neq 0$ lo cual no se cumple globalmente, sin embargo, es fácil ver que las ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial g}{\partial z_j} \frac{\partial f}{\partial z_k} = \frac{\partial g}{\partial z_k} \frac{\partial f}{\partial z_j} \quad (5.6)$$

resumen el caso en que $\frac{\partial f}{\partial z_j} \neq 0$ o $\frac{\partial f}{\partial z_k} \neq 0$ y si ambas derivadas se anulan al mismo tiempo las ecuaciones se vuelven triviales, por lo que M está globalmente definida por las ecuaciones de la forma ((5.6)) para todo $1 \leq j < k \leq n$. \square

Corolario 5.1.3. *Si g es analítica y \mathcal{F} es una foliación holomorfa de \mathbb{C}^n de codimensión uno con singularidad aislada en el origen y $n \geq 3$, entonces \mathcal{F} tiene un contacto analítico con respecto a g .*

El corolario 5.1.3 es una consecuencia inmediata de la proposición anterior, ya que M corresponde al cero de un conjunto finito de funciones analíticas reales.

5.2. Polinomios de Pham-Brieskorn

Vamos ahora a analizar las características de la variedad polar relativa a \mathcal{F} y g en el caso en que la foliación está definida por las fibras de un polinomio de Pham-Brieskorn.

5.2.1. Polinomios de Pham-Brieskorn en \mathbb{C}^2

Consideremos el polinomio $f(\mathbf{z}) = z_1^p + z_2^q$ donde $p, q \geq 2$. Sea \mathcal{F} la foliación definida por las fibras de f y $Q(\mathbf{z}) = |z_1|^2 + |z_2|^2$. Por la proposición 5.1.2 sabemos que la variedad polar $M = M(\mathcal{F}, Q)$ está definida por la ecuación

$$pz_1^{p-1}\bar{z}_2 = qz_2^{q-1}\bar{z}_1. \quad (5.7)$$

Notemos que los ejes coordenados complejos z_1 y z_2 pertenecen a la variedad polar relativa a \mathcal{F} y Q , fuera de los ejes la ecuación anterior la podemos descomponer en su forma polar

$$\begin{aligned} p|z_1|^{p-2} &= q|z_2|^{q-2}, \\ e^{ip\theta_1} &= e^{iq\theta_2}, \end{aligned}$$

donde θ_1 y θ_2 corresponden a los argumentos principales de z_1 y z_2 respectivamente. De las ecuaciones anteriores podemos notar que el caso en que $p = 2$ o $q = 2$ es un caso especial y por tanto trataremos de manera independiente las funciones $z_1^2 + z_2^2$, $z_1^2 + z_2^q$ y $z_1^p + z_2^q$.

- Caso 1.** Sea $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2$. En este caso la ecuación (5.7) se ve como $2z_1\bar{z}_2 = 2z_2\bar{z}_1$, la cual se reduce a la ecuación real $\text{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0$, de donde podemos ver que M es una subvariedad real de \mathbb{C}^2 de dimensión 3.
- Caso 2.** Sea $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^q$, con $q > 2$. La variedad polar consta de los ejes coordenados z_1 y z_2 y una tercera componente definida por las ecuaciones $|z_2|^{q-2} = \frac{2}{q}$ y $e^{i2\theta_1} = e^{iq\theta_2}$ a la cual denotaremos por M_3 . La distancia mínima al origen de esta tercera componente es $\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{q-2}}$ y se alcanza en los puntos de intersección de M_3 con el eje z_2 .
- Caso 3.** Sea $f(\mathbf{z}) = z_1^p + z_2^q$ con $p, q > 2$. La variedad polar consta de los ejes coordenados z_1 y z_2 y de una tercera componente definida por las ecuaciones $p|z_1|^{p-2} = q|z_2|^{q-2}$ y $e^{ip\theta_1} = e^{iq\theta_2}$. Notemos que esta tercera componente, a la cual denotaremos por M_3 , únicamente interseca a los ejes coordenados en el origen.

Vamos ahora a calcular la matriz hessiana de la función $Q|_{\mathcal{L}_z}$ en cada uno de los casos anteriores para ver si la foliación \mathcal{F} , definida por el polinomio $f(\mathbf{z}) = z_1^p + z_2^q$, preserva la estructura de Morse de Q o no. Para esto, vamos a emplear el método usado en la demostración de la proposición 5.1.2 para calcular las segundas derivadas parciales de Q sobre las hojas de \mathcal{F} . En esta sección denotaremos por $\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})$ a la matriz hessiana de la función $Q|_{\mathcal{L}_z}$.

Asumamos que $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ es un punto en M tal que $z_2 \neq 0$, entonces $\frac{\partial f}{\partial z_2}(\mathbf{z}) \neq 0$. En este caso podemos aplicar el teorema de la función implícita para variables complejas (ver teo. 1.1.10), el cual nos dice que existe una vecindad U de \mathbf{z} en la cual las fibras de f están parametrizadas de manera holomorfa por z_1 . Derivando implícitamente la ecuación de las fibras de f , $z_1^p + z_2^q = c$, en términos de z_1 tenemos

$$\frac{\partial z_2}{\partial z_1} = -\frac{pz_1^{p-1}}{qz_2^{q-1}}.$$

Vamos a emplear la ecuación anterior para calcular las primeras y segundas derivadas de la función $Q|_{\mathcal{L}_z}$ en U .

Notemos que dentro de U podemos ver a la función $Q|_{\mathcal{L}_z} = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$ parametrizada por las coordenadas reales z_1 y \bar{z}_1 , entonces las primeras derivadas parciales se ven como

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_1} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \frac{\partial z_2}{\partial z_1} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \frac{pz_1^{p-1}}{qz_2^{q-1}}, \\ \frac{\partial Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_1} &= z_1 + z_2 \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \bar{z}_1} = z_1 - z_2 \frac{p\bar{z}_1^{p-1}}{q\bar{z}_2^{q-1}}. \end{aligned}$$

Siguiendo la misma idea, las segundas derivadas parciales se ven como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_1 \partial z_1} &= -\bar{z}_2 \left(\frac{p(p-1)z_1^{p-2}}{qz_2^{q-1}} + \frac{pz_1^{p-1}(1-q)}{qz_2^q} \frac{\partial z_2}{\partial z_1} \right) \\ &= -\bar{z}_2 \left(\frac{p(p-1)z_1^{p-2}}{qz_2^{q-1}} + \frac{pz_1^{p-1}(q-1)}{qz_2^q} \frac{pz_1^{p-1}}{qz_2^{q-1}} \right), \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} &= 1 - \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \bar{z}_1} \cdot \frac{pz_1^{p-1}}{qz_2^{q-1}} \\ &= 1 + \left| \frac{pz_1^{p-1}}{qz_2^{q-1}} \right|^2. \end{aligned}$$

Notemos que una función $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con imagen en \mathbb{R} satisface $g(\mathbf{z}) = \overline{g(\mathbf{z})}$ y por lo tanto, sus primeras y segundas derivadas parciales se relacionan mediante las fórmulas

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} = \overline{\frac{\partial g}{\partial z_j}}, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{z}_k \partial z_j} = \overline{\frac{\partial^2 g}{\partial z_k \partial \bar{z}_j}}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{z}_k \partial \bar{z}_j} = \overline{\frac{\partial^2 g}{\partial z_k \partial z_j}}, \quad (5.10)$$

para $1 \leq j, k \leq n$. La observación anterior, nos dice que las derivadas parciales $\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_1 \partial z_1}$ y $\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1}$ determinan completamente a la hessiana de $Q|_{\mathcal{L}_z}$.

De las fórmulas obtenidas para las segundas derivadas parciales es claro que hay una diferencia relevante en el cálculo de la hessiana, entre el caso en que alguna de las potencias en el polinomio $f(\mathbf{z})$ sea dos y el caso en que ambas son mayores que dos.

Caso 1: sea $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2$.

Las segundas derivadas parciales se ven como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_1 \partial z_1} &= -\bar{z}_2 \left(\frac{2}{2z_2} + \frac{2z_1}{2z_2^2} \frac{2z_1}{2z_2} \right) = -\bar{z}_2 \left(\frac{1}{z_2} + \frac{z_1^2}{z_2^3} \right), \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} &= 1 + \left| \frac{2z_1}{2z_2} \right|^2 = 1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2, \end{aligned}$$

y el determinante de la matriz hessiana

$$|\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})| = \left(\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_1 \partial z_1} \right) \left(\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_1} \right) - \left(\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} \right) \left(\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} \right),$$

se ve como

$$\begin{aligned}
|\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})| &= \left(-\bar{z}_2 \left(\frac{1}{z_2} + \frac{z_1^2}{z_2^3} \right) \right) \overline{\left(-\bar{z}_2 \left(\frac{1}{z_2} + \frac{z_1^2}{z_2^3} \right) \right)} - \left(1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right)^2 \\
&= \frac{\bar{z}_2}{z_2} \left(1 + \frac{z_1^2}{z_2^2} \right) \frac{z_2}{\bar{z}_2} \left(1 + \frac{\bar{z}_1^2}{\bar{z}_2^2} \right) - \left(1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right)^2 \\
&= \left(1 + \frac{z_1^2}{z_2^2} \right) \left(1 + \frac{\bar{z}_1^2}{\bar{z}_2^2} \right) - \left(1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right)^2 \\
&= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 - 1 - 2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 - \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^4 \\
&= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 - 2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2.
\end{aligned}$$

Recordemos que los puntos sobre la variedad polar relativa a \mathcal{F} y Q deben satisfacer la ecuación $z_1 \bar{z}_2 = z_2 \bar{z}_1$, la cual, siempre que $z_2 \neq 0$, se puede ver como $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. Esta última ecuación implica que $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2$, por lo que la matriz hessiana en un punto $\mathbf{z} \in M$ se reduce a

$$|\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})| = 2 \operatorname{Re} \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 - 2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 = 0.$$

Es decir, cualquier punto \mathbf{z} dentro de la variedad polar que satisface que su segunda coordenada es no nula es un punto de degeneración de la función $Q|_{\mathcal{L}_z}$.

Notemos que si la segunda coordenada de \mathbf{z} es nula y \mathbf{z} es un punto regular de la foliación \mathcal{F} , entonces $z_1 \neq 0$, por lo que el desarrollo de este caso es totalmente análogo.

Caso 2: sea $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}_1^2 + \mathbf{z}_2^q$ con $q > 2$.

Las segundas derivadas parciales se ven como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_1 \partial z_1} &= -\bar{z}_2 \left(\frac{2}{q z_2^{q-1}} + \frac{2(q-1)z_1}{q z_2^q} \frac{2z_1}{q z_2^{q-1}} \right), \\
\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} &= 1 + \left| \frac{2z_1}{q z_2^{q-1}} \right|^2.
\end{aligned}$$

Vamos ahora a evaluar la hessiana en los puntos de la variedad polar. Recordemos que M consiste de los dos ejes coordenados complejos y de una tercera componente M_3 definida por $M_3 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid 2z_1 \bar{z}_2 = q z_2^{q-1} \bar{z}_1, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0\}$.

Al evaluar las segundas derivadas parciales en los puntos de M que se encuentran sobre el eje z_2 tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_1 \partial z_1}(0, z_2) &= -\bar{z}_2 \left(\frac{2}{qz_2^{q-1}} \right), \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1}(0, z_2) &= 1,\end{aligned}$$

por lo que el determinante de la hessiana se ve como

$$|\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})(0, z_2)| = \left| \frac{2\bar{z}_2}{qz_2^{q-1}} \right|^2 - 1 = \left| \frac{2}{qz_2^{q-2}} \right|^2 - 1. \quad (5.11)$$

Si suponemos que $(0, z_2)$ es un punto de degeneración de $Q|_{\mathcal{L}_z}$ entonces $\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})$ es una matriz singular, por lo que la ecuación (5.11) se transforma en

$$|z_2| = \left(\frac{2}{q} \right)^{\frac{1}{q-2}},$$

que corresponde precisamente al conjunto de puntos donde el eje z_2 interseca a la tercera componente de la variedad polar.

Para evaluar la hessiana en los puntos que se encuentran fuera de los ejes coordenados, notemos que estos deben satisfacer la ecuación $2z_1\bar{z}_2 = qz_2^{q-1}\bar{z}_1$ o vista de otra forma $\frac{2z_1}{qz_2^{q-1}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. Vamos a emplear esta última ecuación para simplificar las segundas derivadas parciales de $Q|_{\mathcal{L}_z}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_1 \partial z_1} &= -\bar{z}_2 \left(\frac{2}{qz_2^{q-1}} + \frac{2z_1(q-1)}{qz_2^q} \frac{2z_1}{qz_2^{q-1}} \right) = -\frac{\bar{z}_2}{z_1} \frac{2z_1}{qz_2^{q-1}} \left(1 + (q-1) \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{2z_1}{qz_2^{q-1}} \right) \\ &= -\frac{\bar{z}_2 \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_2} \left(1 + (q-1) \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \right) = -\frac{\bar{z}_1}{z_1} \left(1 + (q-1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right), \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} &= 1 + \left| \frac{2z_1}{qz_2^{q-1}} \right|^2 = 1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2,\end{aligned}$$

por lo tanto, el determinante de la hessiana se ve como

$$\begin{aligned}|\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})| &= \frac{\bar{z}_1}{z_1} \left(1 + (q-1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right) \frac{z_1}{\bar{z}_1} \left(1 + (q-1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right) - \left(1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right)^2 \\ &= \left(1 + (q-1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right)^2 - \left(1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right)^2 \\ &= 1 + 2(q-1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 + (q-1)^2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^4 - 1 - 2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 - \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^4 \\ &= 2(q-2) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 + q(q-2) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^4.\end{aligned}$$

Como estamos suponiendo $q > 2$ y $z_1 \neq 0$ entonces $|\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})| \neq 0$ y por tanto los puntos en la variedad polar que se encuentran fuera de los ejes coordenados son no degenerados.

El siguiente paso es ver que sucede sobre el eje coordenado z_1 , para lo cual vamos a ver que forma toman las segundas derivadas parciales. Para evitar hacer todos los cálculos nuevamente, veamos que en este caso las coordenadas z_1 y z_2 al igual que sus potencias se intercambian dando como resultado

$$\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_2 \partial z_2} = -\bar{z}_1 \left(\frac{q(q-1)z_2^{q-2}}{pz_1^{p-1}} + \frac{qz_2^{q-1}(p-1)qz_2^{q-1}}{pz_1^p} \right), \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_2 \partial z_2} = 1 + \left| \frac{qz_2^{q-1}}{pz_1^{p-1}} \right|^2, \quad (5.13)$$

en particular cuando $p = 2$ tenemos

$$\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_2 \partial z_2} = -\bar{z}_1 \left(\frac{q(q-1)z_2^{q-2}}{2z_1} + \frac{qz_2^{q-1}(p-1)qz_2^{q-1}}{2z_1^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_2 \partial z_2} = 1 + \left| \frac{qz_2^{q-1}}{2z_1} \right|^2.$$

Al evaluar las derivadas en puntos sobre el eje z_1 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_2 \partial z_2}(z_1, 0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_2 \partial z_2}(z_1, 0) &= 1. \end{aligned}$$

Entonces, el determinante de la matriz hessiana es $|\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})(z_1, 0)| = -1$ y por tanto, todos los puntos sobre el eje z_1 son no degenerados.

Caso 3: sea $f(z) = z_1^p + z_2^q$ con $p, q > 2$.

Vamos a ver que tipo de contactos tenemos sobre cada una de las tres componentes de M . Al evaluar las segundas derivadas parciales en puntos de la forma $(0, z_2)$, éstas toman la forma

$$\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_1 \partial z_1}(0, z_2) = -\bar{z}_2 \left(\frac{p(p-1)z_1^{p-2}}{qz_2^{q-1}} + \frac{pz_1^{p-1}(q-1)pz_1^{p-1}}{qz_2^q} \frac{pz_1^{p-1}}{qz_2^{q-1}} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1}(0, z_2) = 1 + \left| \frac{pz_1^{p-1}}{qz_2^{q-1}} \right|^2 = 1,$$

por tanto, el determinante de la hessiana es

$$|\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})(0, z_2)| = -1,$$

lo que implica que todos los puntos críticos de $Q|_{\mathcal{L}_z}$ que se encuentran sobre el eje z_2 son no degenerados.

De manera totalmente análoga podemos usar las ecuaciones (5.12) y (5.13) para calcular la hessiana en los puntos del eje z_1 , de donde obtenemos nuevamente que

$$|\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})(z_1, 0)| = -1 ,$$

por lo que, los puntos sobre el eje z_1 son no degenerados.

Observemos que los puntos en la tercera componente de M satisfacen la ecuación $pz_1^{p-1}\bar{z}_2 = qz_2^{q-1}\bar{z}_2$. Como en este caso ninguna de sus coordenadas se anula podemos reescribir la ecuación anterior como $\frac{pz_1^{p-1}}{qz_2^{q-1}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. Vamos a emplear esta última ecuación para simplificar las segundas derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial z_1 \partial z_1} &= -\bar{z}_2 \left(\frac{p(p-1)z_1^{p-2}}{qz_2^{q-1}} + \frac{pz_1^{p-1}(q-1)pz_1^{p-1}}{qz_2^q qz_2^{q-1}} \right) \\ &= -\frac{\bar{z}_2}{z_1} \frac{pz_1^{p-1}}{qz_2^{q-1}} \left(p-1 + (q-1) \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{pz_1^{p-1}}{qz_2^{q-1}} \right) \\ &= -\frac{\bar{z}_2}{z_1} \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \left(p-1 + (q-1) \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \right) \\ &= -\frac{\bar{z}_1}{z_1} \left(p-1 + (q-1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right) , \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}_z}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} &= 1 + \left| \frac{pz_1^{p-1}}{qz_2^{q-1}} \right|^2 = 1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 . \end{aligned}$$

Entonces, el determinante de la hessiana es

$$\begin{aligned} |\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})| &= \frac{\bar{z}_1}{z_1} \left(p-1 + (q-1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right) \frac{z_1}{\bar{z}_1} \left(p-1 + (q-1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right) - \left(1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right)^2 \\ &= (p-1)^2 + 2(p-1)(q-1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 + (q-1)^2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^4 - 1 - 2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 - \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^4 \\ &= p(p-2) + 2(pq-p-q) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 + q(q-2) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^4 . \end{aligned}$$

Notemos que cada uno de los sumandos es no negativo, más aún, $|\text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})| > 0$.

Resumiremos los resultados obtenidos en esta sección en la siguiente proposición.

Proposición 5.2.1. *Sea $f(\mathbf{z}) = z_1^p + z_2^q$ con $p, q \geq 2$. Sea \mathcal{F} la foliación definida por f y $M(\mathcal{F}, Q)$ la variedad polar relativa a \mathcal{F} y Q . Entonces tenemos:*

1. Si $p = q = 2$, entonces la variedad polar M es un conjunto de dimensión real 3 definido por la ecuación $\text{Im}(z_1 \bar{z}_2) = 0$. Además, todos los contactos en M son degenerados.
2. Si $p = 2$ y $q > 2$, entonces la variedad polar es de dimensión real 2 y contiene a ambos ejes coordenados. Los puntos que se encuentran en la intersección del eje z_2 con la componente M_3 de M (descrita en esta sección) son puntos de degeneración, dichos puntos están definidos por la ecuación

$$|z_2| = \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{q-2}}.$$

El resto de los puntos de M son no degenerados.

3. Si $p, q > 2$, entonces la variedad polar es de dimensión real dos y no contiene puntos de degeneración.

5.2.2. Foliaciones definidas por polinomios de Pham-Brieskorn en \mathbb{C}^n

En la sección anterior vimos que el comportamiento de foliaciones de \mathbb{C}^2 definidas por funciones de la forma $f(\mathbf{z}) = z_1^p + z_2^q$ cambia radicalmente en el caso de que alguna de las potencias del polinomio sea igual a dos, específicamente, si alguna de las potencias es dos, la foliación \mathcal{F} asociada a f ya no preserva la estructura de Morse de Q , pero ¿este comportamiento se conserva para polinomios de Pham-Brieskorn en cualquier dimensión?

Sea $f(\mathbf{z}) = z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \cdots + z_n^{a_n}$ con $a_1 = 2$, $a_2, \dots, a_n \geq 2$ y denotemos por \mathcal{F} a la foliación de \mathbb{C}^n definida por f . Vamos a analizar las propiedades de la variedad polar relativa a \mathcal{F} y Q , $M = M(\mathcal{F}, Q)$.

Notemos que $\text{grad } f(\mathbf{z}) = (2z_1, a_2 z_2^{a_2-1}, \dots, a_n z_n^{a_n-1})$, de aquí podemos observar que todos los puntos $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ distintos del origen son puntos regulares de f , por lo tanto, para cualquier $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ existe un índice m tal que $\frac{\partial f}{\partial z_m}(\mathbf{z}) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita tenemos que en este caso existe una vecindad U de \mathbf{z} tal que en $\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \cap U$ la m -ésima función coordenada depende de manera holomorfa del resto de las coordenadas. Por tanto, podemos derivar implícitamente la ecuación de las fibras de f , $z_1^2 + z_2^{a_2} + \cdots + z_n^{a_n} = c$, en términos de z_j , donde c es una constante.

$$a_j z_j^{a_j-1} + a_m z_m^{a_m-1} \frac{\partial z_m}{\partial z_j} = 0 \quad \text{para toda } j = 1, \dots, n \quad \text{tal que } j \neq m,$$

o de manera equivalente

$$\frac{\partial z_m}{\partial z_j} = -\frac{a_j z_j^{a_j-1}}{a_m z_m^{a_m-1}} \quad \text{para toda } j = 1, \dots, n \quad \text{tal que } j \neq m.$$

Vamos a emplear estas ecuaciones para calcular las primeras y segundas derivadas parciales de Q restringida a las hojas de la foliación \mathcal{F} en coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$:

$$\frac{\partial Q|_{\mathcal{L}}}{\partial z_j} = \bar{z}_m \frac{\partial z_m}{\partial z_j} + \bar{z}_j = -\frac{a_j z_j^{a_j-1}}{a_m z_m^{a_m-1}} \bar{z}_m + \bar{z}_j .$$

Notemos que la variedad polar está dada por las ecuaciones $a_j z_j^{a_j-1} \bar{z}_k = a_k z_k^{a_k-1} \bar{z}_j$ para todo $1 \leq j, k \leq n$ (ver proposición 5.1.2), de donde podemos observar que los ejes coordenados pertenecen a M . Por otra parte, las segundas derivadas parciales se ven como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial z_k \partial z_j} &= -\frac{a_j(a_j-1)z_j^{a_j-2}}{a_m z_m^{a_m-1}} \bar{z}_m \delta_{jk} - \frac{a_j z_j^{a_j-1}}{a_m} \frac{(-1)(a_m-1)}{z_m^{a_m}} \bar{z}_m \frac{\partial z_m}{\partial z_k} \\ &= -\frac{a_j(a_j-1)z_j^{a_j-2}}{a_m z_m^{a_m-1}} \bar{z}_m \delta_{jk} - \frac{a_j z_j^{a_j-1}}{a_m} \frac{(a_m-1)}{z_m^{a_m}} \frac{a_k z_k^{a_k-1}}{a_m z_m^{a_m-1}} \bar{z}_m , \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_k \partial z_j} &= -\frac{a_j z_j^{a_j-1}}{a_m z_m^{a_m-1}} \frac{\partial \bar{z}_m}{\partial \bar{z}_k} + \delta_{jk} \\ &= \frac{a_j z_j^{a_j-1}}{a_m z_m^{a_m-1}} \frac{a_k \bar{z}_k^{a_k-1}}{a_m \bar{z}_m^{a_m-1}} + \delta_{jk} . \end{aligned}$$

Supongamos por simplicidad que $m = n$. Notemos que las derivadas respecto a la coordenada z_1 tienen una forma especial debido a que la potencia de z_1 en f es $a_1 = 2$, entonces tenemos

$$\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial z_k \partial z_j} = \begin{cases} -\frac{2}{a_n z_n^{a_n-1}} \bar{z}_n - \frac{2z_1}{a_n} \frac{(a_n-1)}{z_n^{a_n}} \bar{z}_n \frac{2z_1}{a_n z_n^{a_n-1}} & \text{si } j = k = 1 , \\ -\frac{a_j(a_j-1)z_j^{a_j-2}}{a_n z_n^{a_n-1}} \bar{z}_n \delta_{jk} - \frac{a_j z_j^{a_j-1}}{a_n} \frac{(a_n-1)}{z_n^{a_n}} \bar{z}_n \frac{a_k z_k^{a_k-1}}{a_n z_n^{a_n-1}} & \text{en otro caso ,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_k \partial z_j} = \begin{cases} \left| \frac{2z_1}{a_n z_n^{a_n-1}} \right|^2 + 1 & \text{si } j = k = 1 , \\ \frac{a_j z_j^{a_j-1}}{a_n z_n^{a_n-1}} \frac{a_k \bar{z}_k^{a_k-1}}{a_n \bar{z}_n^{a_n-1}} + \delta_{jk} & \text{en otro caso ,} \end{cases}$$

para todo $1 \leq j, k < n$. Sobre el eje coordenado z_n las segundas parciales se ven como:

$$\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial z_k \partial z_j}(0, \dots, 0, z_n) = \begin{cases} -\frac{2\bar{z}_n}{a_n z_n^{a_n-1}} & \text{si } j = k = 1 , \\ 0 & \text{en otro caso ,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_k \partial z_j}(0, \dots, 0, z_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k = 1 , \\ \delta_{jk} & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Por lo tanto la matriz $H := \text{Hess}(Q|_{\mathcal{L}_z})$ toma la forma

$$H = \begin{pmatrix} \frac{-2\bar{z}_n}{a_n z_n^{a_n-1}} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{-2z_n}{a_n \bar{z}_n^{a_n-1}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces el determinante de H es

$$|H| = (-1)^{n-2} \left(\frac{-2\bar{z}_n}{a_n z_n^{a_n-1}} \cdot \frac{-2z_n}{a_n \bar{z}_n^{a_n-1}} - 1 \right) = (-1)^{n-2} \left(\frac{4}{a_n^2 |z_n|^{2(a_n-2)}} - 1 \right).$$

Supongamos que el punto $(0, \dots, 0, z_n)$ es un punto de degeneración de $Q|_{\mathcal{L}}$, entonces

$$(-1)^{n-2} \left(\frac{4}{a_n^2 |z_n|^{2(a_n-2)}} - 1 \right) = 0,$$

despejando $|z_n|$ tenemos

$$|z_n| = \left(\frac{2}{a_n} \right)^{\frac{1}{a_n-2}}.$$

Es decir, los puntos sobre el eje z_n que cumplen $|z_n| = \left(\frac{2}{a_n} \right)^{\frac{1}{a_n-2}}$ son puntos de degeneración de $Q|_{\mathcal{L}}$. Por lo tanto, \mathcal{F} no preserva la estructura de Morse de Q .

Notemos que en la demostración anterior, para simplificar la notación, nos limitamos al caso en que el índice $m = n$, sin embargo la demostración es válida para cualquier índice $m \neq 1$, lo que implica que tenemos puntos de degeneración sobre todos los ejes coordenados salvo quizá el eje z_1 . De hecho, se puede demostrar, usando las derivadas que calculamos, que el eje z_1 no tiene puntos de degeneración.

Proposición 5.2.2. *Sea $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^{a_2} + \dots + z_n^{a_n}$ y \mathcal{F} la foliación asociada a f . La variedad polar $M = M(\mathcal{F}, Q)$ contiene cada uno de los ejes coordenados complejos y tiene puntos de degeneración sobre el eje z_k en los puntos que cumplen $|z_k| = \left(\frac{2}{a_k} \right)^{\frac{1}{a_k-2}}$ para $1 < k \leq n$. Por lo tanto, la foliación \mathcal{F} no preserva la estructura de Morse de Q .*

En [18] Ito, Scardua y Yamagishi estudian la variedad polar asociada a la función $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^3 + z_3^5$ y encuentran el conjunto total de sus puntos de degeneración, el cual consiste de los puntos sobre el eje z_2 que cumplen que $|z_2| = \frac{2}{3}$, los puntos en el eje z_3 tal que $|z_3| = \left(\frac{2}{5} \right)^{\frac{1}{3}}$ y puntos de la forma $(0, \frac{5}{3}r^3 e^{i5\theta}, r e^{i3\theta})$ tal que $|r| = \left(\frac{2}{5} \right)^{\frac{1}{3}}$.

Por otra parte, haciendo el mismo tipo de cálculos que hemos venido empleando hasta el momento, se puede demostrar que si \mathcal{F} es la foliación lineal definida por el polinomio $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$, entonces la variedad polar $M(\mathcal{F}, Q)$ contiene a los ejes coordenados, los cuales constan únicamente de puntos de degeneración de la función $Q|_{\mathcal{L}}$.

5.3. Polinomios homogéneos en \mathbb{C}^n

Antes de considerar foliaciones homogéneas asociadas a polinómios de grado $k > 2$ vamos a considerar el caso especial de las foliaciones lineales, el cual ha sido estudiado en parte por Ito, Scardua y Yamagishi en [18] y [19].

Sea $A = (a_{jk})_{j,k}$ una matriz simétrica compleja de $n \times n$ con $\det(A) \neq 0$. Si $n \geq 3$, la 1-forma lineal compleja $\omega_A = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n a_{jk} z_k) dz_j$ define una foliación $\mathcal{F}(\omega_A)$ de codimensión 1 en \mathbb{C}^n . Denotemos por $M(\omega_A, Q)$ a la variedad polar de la foliación $\mathcal{F}(\omega_A)$ relativa a Q . En [19] Ito y Scardua demuestran, a través del análisis del conjunto de matrices A asociadas a una foliación $\mathcal{F}(\omega_A)$, que el conjunto de foliaciones \mathcal{F} que preservan la estructura de Morse de Q son densas en el conjunto de foliaciones lineales.

Teorema 5.3.1. (*[19, Teo. 1.2]*) *Cualquier foliación lineal $\mathcal{F}(\omega_A)$ sobre \mathbb{C}^n puede ser arbitrariamente aproximada por foliaciones lineales que preservan la estructura de Morse de Q . Para un subconjunto de Zariski denso de foliaciones lineales sobre \mathbb{C}^n la variedad polar es una unión de n líneas complejas que pasan por el origen.*

Consideremos los siguientes conjuntos de matrices.

- $\text{sim}(n)$ es el espacio de matrices complejas simétricas de tamaño $n \times n$.
- $\text{sim}(n)^*$ es el subespacio de $\text{sim}(n)$ de matrices simétricas invertibles.
- $M(n)$ es el conjunto de matrices simétricas invertibles que preservan la estructura de Morse de Q .
- $MRS(n)$ es el conjunto de matrices simétricas reales con valores propios λ_i (para $1 \leq i \leq n$) tales que $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$ para $i \neq j$.

La demostración del teorema 5.3.1 consiste en demostrar que las contenciones $\text{sim}(n)^* \subset \text{sim}(n)$ y $MRS(n) \subset \text{sim}(n)^*$ son densas y además $MRS(n) \subset M(n)$.

Por otra parte, Ito, Scardua y Yamagishi en [18] dan una caracterización de las foliaciones que preservan la estructura de Morse de Q en el caso lineal usando propiedades de la matriz A asociada a la foliación $\mathcal{F}(\omega_A)$.

Teorema 5.3.2. ([18, Teo. 1]) *Supongamos que ω_A es una 1-forma lineal integrable en \mathbb{C}^n . La foliación $\mathcal{F}(\omega_A)$ preserva la estructura de Morse de Q si y sólo si los valores propios de \overline{AA} son distintos por pares. En ese caso, la variedad de contactos $M(\omega_A, Q)$ es la unión de n líneas complejas dadas por los valores propios de \overline{AA} .*

En la sección 5.2 vimos que la variedad $M(\mathcal{F}, Q)$ asociada a una foliación definida por un polinomio homogéneo de la forma $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$ contiene puntos de degeneración sobre los ejes coordenados, sin embargo, el teorema 5.3.1 nos muestra que al perturbar dicha foliación es posible eliminar las degeneraciones. Por otra parte, el teorema 5.3.2 nos brinda una forma de caracterizar a las foliaciones lineales que preservan la estructura de Morse en términos de los coeficientes de la 1-forma que las definen. Veamos ahora que podemos decir de los polinomios homogéneos de grado $k > 2$.

Sea \mathbf{z} un punto en \mathbb{C}^n no cero y (z_1, z_2, \dots, z_n) un sistema de coordenadas complejas en una vecindad U de \mathbf{z} . Sean h_k y h_k^n un polinomio homogéneo general y un polinomio homogéneo de Fermat respectivamente, ambos de grado k en n -variables complejas, es decir,

$$\begin{aligned} h_k(\mathbf{z}) &= \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}, \\ h_k^n(\mathbf{z}) &= \lambda_1 z_1^k + \cdots + \lambda_n z_n^k, \end{aligned}$$

donde los λ_j 's y los $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$'s son números complejos distintos de cero y k es un entero mayor o igual que dos. Denotemos por \mathcal{H}_k y \mathcal{H}_k^n a las foliaciones de \mathbb{C}^n definidas por los polinomios h_k y h_k^n respectivamente.

Vamos a analizar las propiedades de los contactos entre la foliación \mathcal{H}_k y la foliación definida por la función cuadrado de la distancia al origen, $M = M(\mathcal{H}_k, Q)$.

Proposición 5.3.3. *Sean h_k y \mathcal{H}_k como antes. La variedad polar relativa a \mathcal{H}_k y Q , $M = M(\mathcal{H}_k, Q)$, está formada por líneas complejas que pasan por el origen.*

Demostración. Por la proposición 5.1.2 sabemos que la variedad polar M está definida como el conjunto de ceros de los polinomios

$$P_{j,l}(\mathbf{z}) := \frac{\partial h_k}{\partial z_j} \bar{z}_l - \frac{\partial h_k}{\partial z_l} \bar{z}_j,$$

para $1 \leq j < l \leq n$. Notemos que $\frac{\partial h_k}{\partial z_j}$ es un polinomio homogéneo complejo de grado $k-1$, por lo tanto, si evaluamos $P_{j,l}$ en $t \cdot \mathbf{z}$ para t en \mathbb{C} y \mathbf{z} en M tenemos

$$P_{j,l}(t \cdot \mathbf{z}) = \frac{\partial h_k}{\partial z_j}(t \cdot \mathbf{z}) \overline{t \cdot z_l} - \frac{\partial h_k}{\partial z_l}(t \cdot \mathbf{z}) \overline{t \cdot z_j} = t^{k-1} \bar{t} P_{j,l}(\mathbf{z}).$$

Entonces, si \mathbf{z} está en M , toda la línea compleja que contiene a \mathbf{z} y que pasa por el origen está contenida en M . \square

Notemos que el resultado anterior nos dice que la variedad polar definida por una foliación homogénea y por las esferas definidas por la métrica usual, es un conjunto con estructura cónica no sólo local, sino globalmente. Ito y Scardua en [19] dan un resultado análogo a la proposición 5.3.3, sin embargo hemos decidido incluirlo (con una demostración alternativa) por completitud en el estudio de polinomios homogéneos.

En el caso de tener un polinomio de Fermat,

$$h_k^n(\mathbf{z}) = \lambda_1 z_1^k + \cdots + \lambda_n z_n^k,$$

la variedad polar definida por la foliación \mathcal{H}_k^n (asociada a h_k^n) y la función de Morse Q está definida por

$$M := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid \lambda_l z_l^{k-1} \bar{z}_j = \lambda_j z_j^{k-1} \bar{z}_l, \ 1 \leq j < l \leq n \}.$$

Denotemos por $\text{Hess}_{n,k}(\mathbf{z})$ a la matriz hessiana de la función $Q|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}$ en $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, donde $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ es la hoja de la foliación \mathcal{H}_k^n que contiene a \mathbf{z} . Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.3.4. *Sea h_k^n un polinomio de Fermat de grado $k > 2$, entonces la foliación \mathcal{H}_k^n es compatible con la estructura de Morse de Q .*

La demostración de este teorema está basada en los siguientes tres lemas.

Lema 5.3.5. *Sea $h_k^n(\mathbf{z}) = \lambda_1 z_1^k + \lambda_2 z_2^k + \cdots + \lambda_n z_n^k$ con $k > 2$. Si \mathbf{z} está en $M = M(\mathcal{H}_k^n, Q)$ entonces $\det(\text{Hess}_{n,k}(z_1, \dots, z_{n-1}, 0)) = \det(\text{Hess}_{n-1,k}(z_1, \dots, z_{n-1}))$.*

Demostración. Vamos primero a calcular la matriz hessiana de la función $Q|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}$. Recordemos que el único punto singular de Q es el origen, por lo tanto para cualquier $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ existe un índice m tal que $\frac{\partial h_k^n}{\partial z_m}(\mathbf{z}) \neq 0$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m = 1$. Empleando el mismo método que se usó en la demostración de la proposición 5.1.2 para calcular las segundas derivadas parciales de $Q|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}$, obtenemos que las ecuaciones que describen la relación entre las coordenadas z_1 y z_j en cada hoja no singular son:

$$\frac{\partial z_1}{\partial z_j} = -\frac{\lambda_j z_j^{k-1}}{\lambda_1 z_1^{k-1}}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial z_1}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad j = 2, \dots, n. \quad (5.14)$$

Entonces, las primeras derivadas parciales de $Q|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}$ toman la forma

$$\frac{\partial}{\partial z_j} Q|_{\mathcal{L}} = \frac{\partial z_1}{\partial z_j} \bar{z}_1 + \bar{z}_j = -\frac{\lambda_j z_j^{k-1}}{\lambda_1 z_1^{k-1}} \bar{z}_1 + \bar{z}_j,$$

para todo $j = 2, \dots, n$. De igual forma, las segundas parciales son

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z_l \partial z_j} Q|_{\mathcal{L}} &= -\frac{(k-1)\lambda_j z_j^{k-2}}{\lambda_1 z_1^{k-1}} \cdot \bar{z}_1 \delta_{j,l} - (k-1) \frac{\lambda_j z_j^{k-1}}{\lambda_1 z_1^k} \cdot \frac{\lambda_l z_l^{k-1}}{\lambda_1 z_1^{k-1}} \cdot \bar{z}_1, \\ \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_l \partial z_j} Q|_{\mathcal{L}} &= -\frac{\lambda_j z_j^{k-1}}{\lambda_1 z_1^{k-1}} \cdot \left(-\frac{\bar{\lambda}_l \bar{z}_l^{k-1}}{\bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{k-1}} \right) + \delta_{j,l}. \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones anteriores y las relaciones entre las segundas derivadas mostradas en las ecuaciones (5.9) y (5.10) tenemos que la matriz hessiana $\text{Hess}_{n,k}(\mathbf{z})$ en un punto $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n-1}, 0)$ en M es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_2} Q_{\mathcal{L}} & \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_2 \partial z_2} Q_{\mathcal{L}} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial z_{n-1} \partial z_2} Q_{\mathcal{L}} & \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_{n-1} \partial z_2} Q_{\mathcal{L}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} Q_{\mathcal{L}} & \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_2 \partial \bar{z}_2} Q_{\mathcal{L}} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial z_{n-1} \partial \bar{z}_2} Q_{\mathcal{L}} & \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_{n-1} \partial \bar{z}_2} Q_{\mathcal{L}} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_{n-1}} Q_{\mathcal{L}} & \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_2 \partial z_{n-1}} Q_{\mathcal{L}} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial z_{n-1} \partial z_{n-1}} Q_{\mathcal{L}} & \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_{n-1} \partial z_{n-1}} Q_{\mathcal{L}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_{n-1}} Q_{\mathcal{L}} & \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_2 \partial \bar{z}_{n-1}} Q_{\mathcal{L}} & \dots & \frac{\partial^2}{\partial z_{n-1} \partial \bar{z}_{n-1}} Q_{\mathcal{L}} & \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_{n-1} \partial \bar{z}_{n-1}} Q_{\mathcal{L}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al calcular el determinante tenemos el resultado deseado. \square

Lema 5.3.6. *Sea $h_k^n(\mathbf{z}) = \lambda_1 z_1^k + \lambda_2 z_2^k + \dots + \lambda_n z_n^k$ con grado $k > 2$ y \mathbf{z} en $M = M(\mathcal{H}_k^n, Q)$. Si $z_1, z_2, \dots, z_n \neq 0$, entonces $\det(\text{Hess}_{n,k}(\mathbf{z})) = c \cdot \det(A_n(\mathbf{z}))$ donde c es una constante no nula y A_n es la matriz*

$$A_n(\mathbf{z}) := \begin{pmatrix} \frac{a_1+a_2}{a_2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_1+a_2}{a_2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{a_1+a_3}{a_3} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_1+a_3}{a_3} & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{a_1+a_n}{a_n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{a_1+a_n}{a_n} \end{pmatrix}$$

con $a_j = |z_j|^2$.

Demostración. Vamos a emplear las ecuaciones para las primeras y segundas derivadas parciales obtenidas en la demostración del lema anterior. Recordemos que los puntos de la variedad polar satisfacen las ecuaciones $\lambda_1 z_1^{k-1} \bar{z}_j = \lambda_j z_j^{k-1} \bar{z}_1$ con $2 \leq j \leq n$. Como $z_1, z_2, \dots, z_n \neq 0$, las ecuaciones se pueden reescribir como $\frac{\lambda_j z_j^{k-1}}{\lambda_1 z_1^{k-1}} = \frac{\bar{z}_j}{\bar{z}_1}$ para todo $2 \leq j \leq n$. Sustituyendo dichas ecuaciones en las correspondientes a las segundas derivadas

se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z_l \partial z_j} Q|_{\mathcal{L}_z} &= -(k-1) \frac{\bar{z}_1}{z_j} \cdot \frac{\lambda_j z_j^{k-1}}{\lambda_1 z_1^{k-1}} \delta_{j,l} - (k-1) \frac{\bar{z}_1}{z_1} \cdot \frac{\lambda_j z_j^{k-1}}{\lambda_1 z_1^{k-1}} \cdot \frac{\lambda_l z_l^{k-1}}{\lambda_1 z_1^{k-1}} \\
&= -(k-1) \left[\frac{\bar{z}_1}{z_j} \cdot \frac{\bar{z}_j}{\bar{z}_1} \delta_{j,l} + \frac{\bar{z}_1}{z_1} \cdot \frac{\bar{z}_j}{\bar{z}_1} \cdot \frac{\bar{z}_l}{\bar{z}_1} \right] \\
&= -(k-1) \left[\frac{\bar{z}_j}{z_j} \delta_{j,l} + \frac{\bar{z}_j \bar{z}_l}{|z_1|^2} \right], \\
\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_l \partial z_j} Q|_{\mathcal{L}_z} &= -\frac{\lambda_j z_j^{k-1}}{\lambda_1 z_1^{k-1}} \cdot \left(-\frac{\bar{\lambda}_l \bar{z}_l^{k-1}}{\bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{k-1}} \right) + \delta_{j,l} \\
&= \frac{\bar{z}_j z_l}{|z_1|^2} + \delta_{j,l}.
\end{aligned}$$

Denotemos por t a la constante $1 - k$. Entonces, el determinante de la matriz hessiana sobre los puntos de M se ve como

$$\begin{vmatrix}
t \cdot \bar{z}_2^2 \left(\frac{1}{|z_2|^2} + \frac{1}{|z_1|^2} \right) & 1 + \frac{|z_2|^2}{|z_1|^2} & \dots & t \cdot \frac{\bar{z}_2 \bar{z}_n}{|z_1|^2} & \frac{\bar{z}_2 z_n}{|z_1|^2} \\
1 + \frac{|z_2|^2}{|z_1|^2} & t \cdot z_2^2 \left(\frac{1}{|z_2|^2} + \frac{1}{|z_1|^2} \right) & \dots & \frac{z_2 \bar{z}_n}{|z_1|^2} & t \cdot \frac{z_2 z_n}{|z_1|^2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
t \cdot \frac{\bar{z}_2 \bar{z}_n}{|z_1|^2} & \frac{z_2 \bar{z}_n}{|z_1|^2} & \dots & t \cdot \bar{z}_n^2 \left(\frac{1}{|z_n|^2} + \frac{1}{|z_1|^2} \right) & 1 + \frac{|z_n|^2}{|z_1|^2} \\
\frac{\bar{z}_2 z_n}{|z_1|^2} & t \cdot \frac{z_2 z_n}{|z_1|^2} & \dots & 1 + \frac{|z_n|^2}{|z_1|^2} & t \cdot z_n^2 \left(\frac{1}{|z_n|^2} + \frac{1}{|z_1|^2} \right)
\end{vmatrix}$$

Vamos ahora a realizar operaciones sobre los renglones y las columnas de $\det(\text{Hess}_{n,k})$ para simplificar la matriz dentro del determinante. Factoricemos los valores \bar{z}_j y z_j de los renglones $2j - 3$ y $2j - 2$ (respectivamente) para todo $j = 2, \dots, n$ y saquemos dichos valores del determinante. Entonces $\det(\text{Hess}_{n,k})$ se ve como $c_1 := |z_2|^2 |z_3|^2 \dots |z_n|^2$ por el determinante

$$\begin{vmatrix}
t \cdot \bar{z}_2 \left(\frac{1}{|z_2|^2} + \frac{1}{|z_1|^2} \right) & \frac{z_2}{|z_2|^2} \left(1 + \frac{|z_2|^2}{|z_1|^2} \right) & \dots & t \cdot \frac{\bar{z}_n}{|z_1|^2} & \frac{z_n}{|z_1|^2} \\
\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} \left(1 + \frac{|z_2|^2}{|z_1|^2} \right) & t \cdot z_2 \left(\frac{1}{|z_2|^2} + \frac{1}{|z_1|^2} \right) & \dots & \frac{\bar{z}_n}{|z_1|^2} & t \cdot \frac{z_n}{|z_1|^2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
t \cdot \frac{\bar{z}_2}{|z_1|^2} & \frac{z_2}{|z_1|^2} & \dots & t \cdot \bar{z}_n \left(\frac{1}{|z_n|^2} + \frac{1}{|z_1|^2} \right) & \frac{z_n}{|z_n|^2} \left(1 + \frac{|z_n|^2}{|z_1|^2} \right) \\
\frac{\bar{z}_2}{|z_1|^2} & t \cdot \frac{z_2}{|z_1|^2} & \dots & \frac{\bar{z}_n}{|z_n|^2} \left(1 + \frac{|z_n|^2}{|z_1|^2} \right) & t \cdot z_n \left(\frac{1}{|z_n|^2} + \frac{1}{|z_1|^2} \right)
\end{vmatrix}$$

De igual forma, vamos a factorizar $\frac{\bar{z}_j}{|z_1|^2}$ y $\frac{z_j}{|z_1|^2}$ de las columnas $2j - 3$ y $2j - 2$ (respectivamente) para todo $j = 2, \dots, n$ y vamos a sacarlos del determinante, en consecuencia, $\det(\text{Hess}_{n,k})$ es igual a $c_2 := \frac{|z_2|^4 |z_3|^4 \dots |z_n|^4}{|z_1|^{4(n-1)}}$ por el determinante

$$\begin{vmatrix} t \cdot |z_1|^2 \left(\frac{1}{|z_2|^2} + \frac{1}{|z_1|^2} \right) & \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} \left(1 + \frac{|z_2|^2}{|z_1|^2} \right) & \dots & t & 1 \\ \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} \left(1 + \frac{|z_2|^2}{|z_1|^2} \right) & t \cdot |z_1|^2 \left(\frac{1}{|z_2|^2} + \frac{1}{|z_1|^2} \right) & \dots & 1 & t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t & 1 & \dots & t \cdot |z_1|^2 \left(\frac{1}{|z_n|^2} + \frac{1}{|z_1|^2} \right) & \frac{|z_1|^2}{|z_n|^2} \left(1 + \frac{|z_n|^2}{|z_1|^2} \right) \\ 1 & t & \dots & \frac{|z_1|^2}{|z_n|^2} \left(1 + \frac{|z_n|^2}{|z_1|^2} \right) & t \cdot |z_1|^2 \left(\frac{1}{|z_n|^2} + \frac{1}{|z_1|^2} \right) \end{vmatrix}$$

Denotemos por H'_n a la matriz en el interior del determinante anterior y sea R_j el j -ésimo renglón de H'_n . Recordemos que $t = 1 - k$. Vamos a definir una matriz equivalente por renglones a H'_n , a la cual denotaremos H''_n , de tal forma que los renglones $2j - 1$ y $2j$ de H''_n correspondan respectivamente a las combinaciones $(k - 1)R_{2j-1} + R_{2j}$ y $R_{2j-1} + (k + 1)R_{2j}$ de los renglones de la matriz H'_n para todo $j = 2, \dots, n$. El determinante de la matriz H''_n es

$$\begin{vmatrix} k(2 - k) \left(1 + \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} \right) & 0 & \dots & k(2 - k) & 0 \\ 0 & k(2 - k) \left(1 + \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} \right) & \dots & 0 & k(2 - k) \\ k(2 - k) & 0 & \dots & k(2 - k) & 0 \\ 0 & k(2 - k) & \dots & 0 & k(2 - k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k(2 - k) & 0 & \dots & k(2 - k) \left(1 + \frac{|z_1|^2}{|z_n|^2} \right) & 0 \\ 0 & k(2 - k) & \dots & 0 & k(2 - k) \left(1 + \frac{|z_1|^2}{|z_n|^2} \right) \end{vmatrix}$$

Recordemos que las operaciones de renglones a partir de las cuales definimos H''_n únicamente modifican el determinante por una constante no nula, es decir,

$$\det(H'_n) = c_3 \cdot \det(H''_n).$$

Finalmente, si factorizamos de cada uno de los renglones del determinante de H''_n la constante $k(2 - k)$ y denotamos por $a_j := |z_j|^2$, para todo $j = 1, \dots, n$, la matriz resultante es precisamente $A_n(\mathbf{z})$. Por tanto

$$\det(\text{Hess}_{n,k}) = c_2 \cdot c_3 k^{2n-2} (2 - k)^{2n-2} \cdot \det(A_n(\mathbf{z})).$$

□

Lema 5.3.7. *Cualquier matriz de la forma*

$$A_n := \begin{pmatrix} \frac{a_1+a_2}{a_2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_1+a_2}{a_2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{a_1+a_3}{a_3} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_1+a_3}{a_3} & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{a_1+a_n}{a_n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{a_1+a_n}{a_n} \end{pmatrix}$$

con $a_1, \dots, a_n > 0$ es no singular.

Demostración. La demostración de este lema se hará por inducción. Consideremos $n = 2$, el determinante de la matriz A_2 es $\left(\frac{a_1+a_2}{a_2}\right)^2$, como $a_1, a_2 > 0$ entonces $\det(A_2) > 0$.

Por hipótesis de inducción vamos a asumir que todas las matrices de la forma

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{b_1+b_2}{b_2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \frac{b_1+b_2}{b_2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{b_1+b_3}{b_3} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b_1+b_3}{b_3} & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{b_1+b_{n-1}}{b_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{b_1+b_{n-1}}{b_{n-1}} \end{pmatrix}$$

son no singulares siempre que cada b_j sea positivo.

Consideremos la matriz

$$A_n := \begin{pmatrix} \frac{a_1+a_2}{a_2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_1+a_2}{a_2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{a_1+a_3}{a_3} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_1+a_3}{a_3} & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{a_1+a_n}{a_n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{a_1+a_n}{a_n} \end{pmatrix}$$

y usemos reducción por renglones para cancelar las entradas de la matriz por debajo de la diagonal en las primeras dos columnas. De esto se obtiene que A_n es equivalente por renglones a la matriz B_n

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1+a_2}{a_2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_1+a_2}{a_2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{a_2}{a_1+a_2} - \frac{a_1+a_3}{a_3} & 0 & \dots & \frac{a_2}{a_1+a_2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_2}{a_1+a_2} - \frac{a_1+a_3}{a_3} & \dots & 0 & \frac{a_2}{a_1+a_2} - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{a_2}{a_1+a_2} - 1 & 0 & \dots & \frac{a_2}{a_1+a_2} - \frac{a_1+a_n}{a_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_2}{a_1+a_2} - 1 & \dots & 0 & \frac{a_2}{a_1+a_2} - \frac{a_1+a_n}{a_n} \end{pmatrix},$$

esto implica que $\det(A_n) = c_1 \cdot \det(B_n)$ con c_1 una constante no nula. Notemos que los elementos de B_n de la forma $\frac{a_2}{a_1+a_2} - \frac{a_1+a_j}{a_j}$ se pueden reescribir como $\frac{-a_1}{(a_1+a_2)} \cdot \frac{(a_1+a_2+a_j)}{a_j}$; por lo que el determinante de B_n se ve como

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1+a_2}{a_2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_1+a_2}{a_2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-a_1}{a_1+a_2} \cdot \frac{a_1+a_2+a_3}{a_3} & 0 & \dots & \frac{-a_1}{a_1+a_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a_1}{a_1+a_2} \cdot \frac{a_1+a_2+a_3}{a_3} & \dots & 0 & \frac{-a_1}{a_1+a_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{-a_1}{a_1+a_2} & 0 & \dots & \frac{-a_1}{a_1+a_2} \cdot \frac{a_1+a_2+a_n}{a_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a_1}{a_1+a_2} & \dots & 0 & \frac{-a_1}{a_1+a_2} \cdot \frac{a_1+a_2+a_n}{a_n} \end{vmatrix}$$

Vamos a factorizar y sacar de cada uno de los renglones del determinante de B_n el factor $\frac{-a_1}{a_1+a_2}$ empezando por el tercer renglón. Entonces, $\det(B_n)$ es igual a

$$\left(\frac{-a_1}{a_1+a_2}\right)^{2(n-2)} \begin{vmatrix} \frac{a_1+a_2}{a_2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_1+a_2}{a_2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{a_1+a_2+a_3}{a_3} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_1+a_2+a_3}{a_3} & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{a_1+a_2+a_n}{a_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{a_1+a_2+a_n}{a_n} \end{vmatrix},$$

por lo tanto $\det(B_n) = \left(\frac{-a_1}{a_1+a_2}\right)^{2(n-2)} \cdot \left(\frac{a_1+a_2}{a_2}\right)^2 \det(A'_{n-1})$, donde

$$A'_{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{b_2+a_3}{a_3} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \frac{b_2+a_3}{a_3} & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \frac{b_2+a_n}{a_n} & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{b_2+a_n}{a_n} \end{pmatrix}$$

y $b_2 := a_1 + a_2$. Es decir, hemos demostrado que $\det(A_n) = c \cdot \left(\frac{a_1+a_2}{a_2}\right)^2 \cdot \det(A'_{n-1})$ donde c es una constante no nula y $\det(A'_{n-1}) \neq 0$ por hipótesis de inducción, por consiguiente $\det(A_n) \neq 0$. \square

Demostración del teorema 5.3.4. Para demostrar el teorema 5.3.4 notemos que si \mathbf{z} es un punto en M con todas sus coordenadas no nulas, los lemas 5.3.6 y 5.3.7 implican directamente que \mathbf{z} es un punto crítico no degenerado de $Q|_{\mathcal{L}}$. Por otra parte, supongamos que \mathbf{z} en M es tal que $z_1, \dots, z_m \neq 0$ y $z_{m+1} = \dots = z_n = 0$ para algún índice m , entonces al aplicar el lema 5.3.5 $n - m$ veces llegamos a que

$$\det(\text{Hess}_{n,k}(z_1, \dots, z_m, 0, \dots, 0)) = \det(\text{Hess}_{m,k}(z_1, \dots, z_m)),$$

nuevamente, los lemas 5.3.6 y 5.3.7 implican que el determinante $\det(\text{Hess}_{m,k}(z_1, \dots, z_m))$ es no nulo y por tanto \mathbf{z} es un punto no degenerado. \square

A continuación vamos a dar una demostración alternativa al teorema 5.3.4 haciendo uso del teorema 4.1.3 en el cual se dan condiciones suficientes y necesarias para que una foliación \mathcal{F} preserve la estructura de Morse de una función de Morse g . En primer lugar, vamos a demostrar que la variedad polar relativa a \mathcal{H}_k^n y Q , $M = M(\mathcal{H}_k^n, Q)$, es suave y la intersección de \mathcal{H}_k^n y M es transversal.

Proposición 5.3.8. *Sea $h_k^n = \lambda_1 z_1^k + \lambda_2 z_2^k + \dots + \lambda_n z_n^k$ y $k > 2$. La variedad polar $M = M(\mathcal{H}_k, Q)$ es una subvariedad de \mathbb{R}^{2n} real y diferenciable fuera del origen de dimensión 2.*

Demostración. Sea $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ en \mathbb{C}^n un punto distinto del origen. Por simplicidad podemos suponer que $z_1 \neq 0$ (por la simetría del problema los demás casos son totalmente análogos), entonces el conjunto de vectores

$$\begin{aligned} v_2 &= (\lambda_2 z_2^{k-1}, -\lambda_1 z_1^{k-1}, 0, 0, \dots, 0), \\ v_3 &= (\lambda_3 z_3^{k-1}, 0, -\lambda_1 z_1^{k-1}, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ v_n &= (\lambda_n z_n^{k-1}, 0, 0, \dots, 0, -\lambda_1 z_1^{k-1}), \end{aligned}$$

forman una base del espacio $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$. En consecuencia, la variedad polar está definida por las ecuaciones $G_j(\mathbf{z}) := \lambda_1 z_1^{k-1} \bar{z}_j - \lambda_j z_j^{k-1} \bar{z}_1 = 0$ para todo $j = 2, \dots, n$, o de manera equivalente, M corresponde al conjunto de ceros de las ecuaciones reales

$$\begin{aligned}\psi_j(\mathbf{z}) &:= 2 \operatorname{Re} G_j(\mathbf{z}), \\ \phi_j(\mathbf{z}) &:= 2 \operatorname{Im} G_j(\mathbf{z}),\end{aligned}$$

para $j = 2, \dots, n$. Definamos $\Phi := (\psi_2, \phi_2, \dots, \psi_n, \phi_n)$. El siguiente paso es calcular la matriz jacobiana de las funciones que definen a M , para lo cual vamos a calcular las primeras derivadas parciales de los elementos de Φ en coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_2, \bar{z}_2)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_j}{\partial z_l} &= \begin{cases} \lambda_1(k-1)z_1^{k-2}\bar{z}_j - \bar{\lambda}_j \bar{z}_j^{k-1} & l = 1, \\ -\lambda_j(k-1)z_j^{k-2}\bar{z}_1 + \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{k-1} & l = j, \\ 0 & l \neq j, 1; \end{cases} \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial z_l} &= \begin{cases} i[\lambda_1(k-1)z_1^{k-2}\bar{z}_j + \bar{\lambda}_j \bar{z}_j^{k-1}] & l = 1, \\ i[-\lambda_j(k-1)z_j^{k-2}\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{k-1}] & l = j, \\ 0 & l \neq j, 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Recordemos que cualquier función real g cumple $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j} = \overline{\frac{\partial g}{\partial z_j}}$. Consideremos la siguiente notación

$$\begin{aligned}a_j(\mathbf{z}) &:= \lambda_1(k-1)z_1^{k-2}\bar{z}_j, \\ b_j(\mathbf{z}) &:= \lambda_j z_j^{k-1}, \\ c_j(\mathbf{z}) &:= \lambda_j(k-1)z_j^{k-2}\bar{z}_1, \\ d(\mathbf{z}) &:= \lambda_1 z_1^{k-1}.\end{aligned}$$

Por simplicidad en la notación escribiremos a_j , b_j , c_j y d en lugar de $a_j(\mathbf{z})$, $b_j(\mathbf{z})$, $c_j(\mathbf{z})$ y $d(\mathbf{z})$ respectivamente. Con esta notación la matriz jacobiana de Φ , $D_{\mathbf{z}}\Phi$ se ve como

$$\begin{pmatrix} a_2 - \bar{b}_2 & -b_2 + \bar{a}_2 & -c_2 + \bar{d} & d - \bar{c}_2 & \dots & 0 & 0 \\ i[a_2 + \bar{b}_2] & i[-b_2 - \bar{a}_2] & i[-c_2 - \bar{d}] & i[d + \bar{c}_2] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n - \bar{b}_n & -b_n + \bar{a}_n & 0 & 0 & \dots & -c_n + \bar{d} & d - \bar{c}_n \\ i[a_n + \bar{b}_n] & i[-b_n - \bar{a}_n] & 0 & 0 & \dots & i[-c_n - \bar{d}] & i[d + \bar{c}_n] \end{pmatrix}.$$

Para probar que la matriz $D_{\mathbf{z}}\Phi$ tiene rango $2n - 2$ consideremos la matriz B_n que resulta de eliminar las primeras dos columnas de $D_{\mathbf{z}}\Phi$. Nota que si el determinante de B_n es distinto de cero, entonces $D_{\mathbf{z}}\Phi$ tiene rango $2n - 2$.

Lema 5.3.9. *El determinante de la matriz B_n mencionada en el párrafo anterior es $\det(B_n) = (2i)^{n-1} \prod_{j=2}^n [|d|^2 - |c_j|^2]$.*

La demostración del lema anterior se hará por inducción. Supongamos que $n = 2$, entonces el determinante de B_2 es

$$\det(B_2) = \begin{vmatrix} -c_2 + \bar{d} & d - \bar{c}_2 \\ -ic_2 - i\bar{d} & id + i\bar{c}_2 \end{vmatrix} = i(-c_2 + \bar{d})(d + \bar{c}_2) - (-c_2 - \bar{d})(d - \bar{c}_2) = 2i(|d|^2 - |c_2|^2).$$

Supongamos por hipótesis de inducción que cada matriz B_{n-1} en $n - 1$ variables de la forma

$$B_{n-1} = \begin{pmatrix} -c_2 + \bar{d} & d - \bar{c}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -ic_2 - i\bar{d} & id + i\bar{c}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 + \bar{d} & d - \bar{c}_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ic_3 - i\bar{d} & id + i\bar{c}_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{n-1} + \bar{d} & d - \bar{c}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -ic_{n-1} - i\bar{d} & id + i\bar{c}_{n-1} \end{pmatrix}$$

satisface $\det(B_{n-1}) = (2i)^{n-2} \prod_{j=2}^{n-1} [|d|^2 - |c_j|^2]$.

Consideremos la matriz

$$B_n = \begin{pmatrix} -c_2 + \bar{d} & d - \bar{c}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -ic_2 - i\bar{d} & id + i\bar{c}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 + \bar{d} & d - \bar{c}_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ic_3 - i\bar{d} & id + i\bar{c}_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_n + \bar{d} & d - \bar{c}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -ic_n - i\bar{d} & id + i\bar{c}_n \end{pmatrix}.$$

Usando las últimas dos columnas para calcular el determinante de B_n tenemos

$$\det(B_n) = i [(-c_n + \bar{d})(d + \bar{c}_n) - (d - \bar{c}_n)(-c_n - \bar{d})] \det(B_{n-1}) = 2i[|d|^2 - |c_n|^2] \det(B_{n-1}).$$

Por hipótesis de inducción $\det(B_{n-1}) = (2i)^{n-2} \prod_{j=2}^{n-1} [|d|^2 - |c_j|^2]$, por lo tanto

$$\det(B_n) = 2i[|d|^2 - |c_n|^2] (2i)^{n-2} \prod_{j=2}^{n-1} [|d|^2 - |c_j|^2] = (2i)^{n-1} \prod_{j=2}^n [|d|^2 - |c_j|^2],$$

lo cual concluye la demostración del lema 5.3.9.

Vamos a sustituir los valores de las funciones $c_j(\mathbf{z})$ y $d(\mathbf{z})$ en la ecuación del determinante de B_n para ver cual es el rango máximo de la matriz jacobiana, $D_{\mathbf{z}}\Phi$, en los puntos de la variedad polar.

Consideremos un punto \mathbf{z} en M . Podemos suponer que las coordenadas de \mathbf{z} son tales que $z_1, z_2, \dots, z_m \neq 0$ y $z_{m+1} = \dots = z_n = 0$ para algún índice m , en caso contrario bastará con considerar un reordenamiento de las coordenadas de \mathbf{z} . Notemos que $c_j(\mathbf{z}) = 0$ para todo $j > m$ y $d(\mathbf{z}) \neq 0$, por lo que el determinante de B_n se ve como

$$\det B_n = (2i)^{n-1} |d|^{2(n-m)} \prod_{j=2}^m [|d|^2 - |c_j|^2].$$

Para evaluar $|c_j(\mathbf{z})|$ en un punto \mathbf{z} de M , recordemos que los puntos de M satisfacen las ecuaciones $|\lambda_1| |z_1|^{k-2} = |\lambda_j| |z_j|^{k-2}$ para todo $j = 2, \dots, m$, por lo tanto

$$\begin{aligned} |c_j(\mathbf{z})| &= (k-1) |\lambda_j| |z_j|^{k-2} |\bar{z}_1| = (k-1) |\lambda_1| |z_1|^{k-2} |z_1| = (k-1) |\lambda_1| |z_1|^{k-1}, \\ |d(\mathbf{z})| &= |\lambda_1| |z_1|^{k-1}, \end{aligned}$$

entonces el determinante de B_n toma la forma

$$\begin{aligned} \det(B_n) &= (2i)^{n-1} (|\lambda_1| |z_1|^{k-1})^{2(n-m)} \prod_{j=2}^m [|\lambda_1|^2 |z_1|^{2(k-1)} - (k-1)^2 |\lambda_1|^2 |z_1|^{2(k-1)}] \\ &= (2i)^{n-1} (|\lambda_1| |z_1|^{k-1})^{2(n-m)} \prod_{j=2}^m |\lambda_1|^2 |z_1|^{2(k-1)} (2k - k^2) \\ &= (2i)^{n-1} |\lambda_1|^{2n} |z_1|^{2(k-1)n} [2k - k^2]^m. \end{aligned}$$

En consecuencia, si $k > 2$ entonces $\det(B_n) \neq 0$ y por tanto la matriz $D_{\mathbf{z}}\Phi$ es no singular y de rango $2n - 2$, esto implica que M^* es una variedad real suave de dimensión 2 (ver el capítulo 2 de [30]). \square

El siguiente paso para probar que \mathcal{H}_k^n es compatible con la estructura de Morse de Q es demostrar que la foliación \mathcal{H}_k^n interseca transversalmente a la variedad polar.

Proposición 5.3.10. *Sea h_k^n un polinomio de homogéneo de Fermat de grado $k > 2$ como en la proposición anterior, entonces la foliación \mathcal{H}_k^n interseca transversalmente a la variedad polar $M = M(\mathcal{H}_k^n, Q)$ fuera del origen.*

Demostración. La demostración se hará alrededor de un punto \mathbf{z} en M tal que $z_1 \neq 0$, los demás casos son totalmente análogos. Sean ψ_j, ϕ_j y v_j para todo $j = 2, \dots, n$ como en la demostración de la proposición anterior. Recordemos que M es el conjunto de ceros de las funciones $\psi_j(\mathbf{z})$ y $\phi_j(\mathbf{z})$ para $j = 2, \dots, n$, por lo tanto, un vector $v(\mathbf{z})$ pertenece al tangente de M en \mathbf{z} si y sólo si $v(\mathbf{z})$ es ortogonal a los gradientes $\text{grad}(\psi_j(\mathbf{z}))$ y $\text{grad}(\phi_j(\mathbf{z}))$ para todo $j = 2, \dots, n$. Por otra parte, como \mathcal{H}_k^n es una foliación holomorfa y $\{v_2(\mathbf{z}), \dots, v_n(\mathbf{z})\}$

forma una base del espacio tangente complejo a una hoja $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ de \mathcal{H}_k^n , entonces el conjunto $\{v_2(\mathbf{z}), iv_2(\mathbf{z}), \dots, v_n(\mathbf{z}), iv_n(\mathbf{z})\}$ forma una base del espacio tangente real a $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$. Por tanto, para demostrar la transversalidad entre \mathcal{H}_k^n y M^* tenemos que demostrar que cualquier elemento $w(\mathbf{z})$ de $\{v_2, iv_2, \dots, v_n, iv_n\}$ satisface

$$\langle w(\mathbf{z}), \text{grad}(\psi_j(\mathbf{z})) \rangle_{\mathbb{R}} \neq 0 \quad \text{o} \quad \langle w(\mathbf{z}), \text{grad}(\phi_j(\mathbf{z})) \rangle_{\mathbb{R}} \neq 0$$

para alguna j .

Vamos entonces a calcular los productos de los vectores $v_l(\mathbf{z})$ y $iv_l(\mathbf{z})$ con los gradientes $\text{grad}(\psi_j(\mathbf{z}))$ y $\text{grad}(\phi_j(\mathbf{z}))$, para lo cual vamos a emplear la ecuación (4.2) dada en el lema 4.1.7. En este caso

$$\begin{aligned} \psi_j &= \lambda_1 z_1^{k-1} \bar{z}_j - \lambda_j z_j^{k-1} \bar{z}_1 + \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{k-1} z_j - \bar{\lambda}_j \bar{z}_j^{k-1} z_1, \\ \phi_j &= i[\lambda_1 z_1^{k-1} \bar{z}_j - \lambda_j z_j^{k-1} \bar{z}_1 - \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{k-1} z_j + \bar{\lambda}_j \bar{z}_j^{k-1} z_1], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \psi_j &= (-\lambda_j z_j^{k-1} + (k-1) \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{k-2} z_j, 0, \dots, 0, \lambda_1 z_1^{k-1} - (k-1) \bar{\lambda}_j \bar{z}_j^{k-2} z_1, 0, \dots, 0), \\ \bar{\nabla} \phi_j &= (i[-\lambda_j z_j^{k-1} - (k-1) \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{k-2} z_j], 0, \dots, 0, i[\lambda_1 z_1^{k-1} + (k-1) \bar{\lambda}_j \bar{z}_j^{k-2} z_1], 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Entonces los productos se ven como:

$$\begin{aligned} \langle v_l(\mathbf{z}), \bar{\nabla} \psi_j \rangle_{\mathbb{C}} &= \lambda_l z_l^{k-1} \overline{(-\lambda_j z_j^{k-1} + (k-1) \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{k-2} z_j)} \\ &\quad - \lambda_1 z_1^{k-1} \overline{(\lambda_1 z_1^{k-1} - (k-1) \bar{\lambda}_j \bar{z}_j^{k-2} z_1)} \delta_{j,l}, \\ \langle v_l(\mathbf{z}), \bar{\nabla} \phi_j \rangle_{\mathbb{C}} &= \lambda_l z_l^{k-1} \overline{(i[-\lambda_j z_j^{k-1} - (k-1) \bar{\lambda}_1 \bar{z}_1^{k-2} z_j])} \\ &\quad - \lambda_1 z_1^{k-1} \overline{(i[\lambda_1 z_1^{k-1} + (k-1) \bar{\lambda}_j \bar{z}_j^{k-2} z_1])} \delta_{j,l}. \end{aligned}$$

Consideremos $l = j$, en este caso los productos toman la forma

$$\begin{aligned} \langle v_j(\mathbf{z}), \bar{\nabla} \psi_j \rangle_{\mathbb{C}} &= -|\lambda_j|^2 |z_j|^{2k-2} + (k-1) \lambda_1 \lambda_j z_j^{k-1} \bar{z}_j z_1^{k-2} - |\lambda_1|^2 |z_1|^{2k-2} \\ &\quad + (k-1) \lambda_1 \lambda_j z_1^{k-1} \bar{z}_1 z_j^{k-2}, \\ \langle v_j(\mathbf{z}), \bar{\nabla} \phi_j \rangle_{\mathbb{C}} &= i|\lambda_j|^2 |z_j|^{2k-2} + i(k-1) \lambda_1 \lambda_j z_j^{k-1} \bar{z}_j z_1^{k-2} + i|\lambda_1|^2 |z_1|^{2k-2} \\ &\quad + i(k-1) \lambda_1 \lambda_j z_1^{k-1} \bar{z}_1 z_j^{k-2}. \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned} A_j(\mathbf{z}) &:= |\lambda_1|^2 |z_1|^{2k-2} + |\lambda_j|^2 |z_j|^{2k-2}, \\ B_j(\mathbf{z}) &:= (k-1)[\lambda_1 \lambda_j z_j^{k-1} \bar{z}_j z_1^{k-2} + \lambda_1 \lambda_j z_1^{k-1} \bar{z}_1 z_j^{k-2}]. \end{aligned}$$

Con esta notación los productos hermitianos que calculamos se ven como:

$$\begin{aligned} \langle v_j(\mathbf{z}), \bar{\nabla} \psi_j \rangle_{\mathbb{C}} &= -A_j(\mathbf{z}) + B_j(\mathbf{z}), \\ \langle v_j(\mathbf{z}), \bar{\nabla} \phi_j \rangle_{\mathbb{C}} &= iA_j(\mathbf{z}) + iB_j(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Usando la ecuación (4.2) tenemos que los productos reales son

$$\begin{aligned}\langle v_j(\mathbf{z}), \text{grad } \psi_j(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{R}} &= -2A_j(\mathbf{z}) + 2 \text{Re } B_j(\mathbf{z}) , \\ \langle iv_j(\mathbf{z}), \text{grad } \psi_j(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{R}} &= -2 \text{Im } B_j(\mathbf{z}) , \\ \langle v_j(\mathbf{z}), \text{grad } \phi_j(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{R}} &= -2 \text{Im } B_j(\mathbf{z}) , \\ \langle iv_j(\mathbf{z}), \text{grad } \phi_j(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{R}} &= 2A_j(\mathbf{z}) + 2 \text{Re } B_j(\mathbf{z}) .\end{aligned}$$

Vamos ahora a descomponer a $B_j(\mathbf{z})$ en su forma polar

$$\begin{aligned}B_j(\mathbf{z}) &= (k-1)|\lambda_1||\lambda_j|e^{i\theta_{\lambda_1}}e^{i\theta_{\lambda_j}}[|z_j|^k|z_1|^{k-2}e^{i(k-2)\theta_j}e^{i(k-2)\theta_1} + |z_1|^k|z_j|^{k-2}e^{i(k-2)\theta_1}e^{i(k-2)\theta_j}] \\ &= (k-1)|\lambda_1||\lambda_j|e^{i\theta_{\lambda_1}}e^{i\theta_{\lambda_j}}e^{i(k-2)\theta_1}e^{i(k-2)\theta_j}[|z_j|^k|z_1|^{k-2} + |z_1|^k|z_j|^{k-2}] .\end{aligned}$$

En este caso θ_j y θ_{λ_j} corresponden a los argumentos principales de z_j y λ_j respectivamente.

Recordemos que $v_j(\mathbf{z})$ pertenece a $T_{\mathbf{z}}M$ si y sólo si los productos $\langle v_l(\mathbf{z}), \text{grad } \psi_j(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{R}}$ y $\langle v_l(\mathbf{z}), \text{grad } \phi_j(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{R}}$ se anulan para todo $l = 2, \dots, n$. Supongamos entonces que

$$\langle v_j(\mathbf{z}), \text{grad } \psi_j(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{R}} = 0 \quad \text{y} \quad \langle v_j(\mathbf{z}), \text{grad } \phi_j(\mathbf{z}) \rangle_{\mathbb{R}} = 0 ,$$

o de manera equivalente $\text{Im } B_j(\mathbf{z}) = 0$ y $-A_j(\mathbf{z}) + \text{Re } B_j(\mathbf{z}) = 0$. De la descomposición polar de $B_j(\mathbf{z})$ y de la condición $\text{Im } B_j(\mathbf{z}) = 0$ tenemos que $B_j(\mathbf{z})$ se puede ver como

$$B_j(\mathbf{z}) = \pm(k-1)[|\lambda_1||\lambda_j||z_j|^k|z_1|^{k-2} + |\lambda_1||\lambda_j||z_1|^k|z_j|^{k-2}] .$$

Si evaluamos $B_j(\mathbf{z})$ en un punto \mathbf{z} de M , el cual debe de satisfacer la ecuación $|\lambda_1||z_1|^{k-2} = |\lambda_j||z_j|^{k-2}$, tenemos

$$B_j(\mathbf{z}) = \pm(k-1)[|\lambda_j|^2|z_j|^{2k-2} + |\lambda_1|^2|z_1|^{2k-2}] = \pm(k-1)A_j(\mathbf{z}) .$$

Por tanto, la ecuación $-A_j(\mathbf{z}) + \text{Re } B_j(\mathbf{z}) = 0$ se transforma en

$$0 = -A_j(\mathbf{z}) + \text{Re } B_j(\mathbf{z}) = -A_j(\mathbf{z}) \pm (k-1)A_j(\mathbf{z}) = A_j(\mathbf{z})[-1 \pm (k-1)] .$$

Como $k > 2$ la ecuación $A_j(\mathbf{z})[-1 \pm (k-1)] = 0$ sólo se satisface en los puntos en que $A_j(\mathbf{z})$ es cero, pero estamos bajo la suposición de que $z_1 \neq 0$, por tanto

$$A_j(\mathbf{z}) = |\lambda_1|^2|z_1|^{2k-2} + |\lambda_j|^2|z_j|^{2k-2}$$

es distinta de cero para todo j . Lo anterior implica que ningún vector $v_j(\mathbf{z})$ está contenido en $T_{\mathbf{z}}M$.

Por otro lado si suponemos que $iv_j(\mathbf{z})$ satisface las ecuaciones $\langle iv_j, \text{grad } \psi_j \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ y $\langle iv_j, \text{grad } \phi_j \rangle_{\mathbb{R}} = 0$, llegamos a las ecuaciones

$$\begin{aligned}\text{Im } B_j(\mathbf{z}) &= 0 , \\ A_j(\mathbf{z}) + \text{Re } B_j(\mathbf{z}) &= 0 ,\end{aligned}$$

las cuales no tiene solución simultánea cuando $k > 2$. Como esto es válido para cualquier $j = 2, \dots, n$, entonces ningún vector $iv_j(\mathbf{z})$ de la base de $T_{\mathbf{z}}\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ es tangente a M . En consecuencia \mathcal{H}_k^n interseca transversalmente a M . \square

Las dos proposiciones anteriores nos indican que la foliación \mathcal{H}_k^n y la variedad de contacto M satisfacen las condiciones del teorema 4.1.3, en consecuencia, la foliación \mathcal{H}_k^n es compatible con la estructura de Morse de Q , lo cual nos brinda una demostración alternativa del teorema 5.3.4.

Capítulo 6

Degeneraciones de la variedad polar

En el capítulo anterior vimos que las foliaciones definidas por polinomios de Pham-Brieskorn pueden presentar comportamientos muy distintos de acuerdo a si alguna de sus potencias es dos o no. En particular pudimos observar que si alguna de sus potencias es dos, entonces los contactos de la foliación con las esferas definidas por la función distancia al origen son degenerados. En la primer sección de este capítulo haremos un análisis de los índices de Morse de la función cuadrado de la distancia al origen, Q , en su restricción a las hojas de una foliación definida por $f(\mathbf{z}) = z_1^p + z_2^q$ o $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^q$. Además, en la segunda sección analizaremos que es lo que sucede con las degeneraciones si perturbamos la métrica que estamos considerando.

6.1. Análisis de índices de Morse

En la sección 3.1 definimos el índice de Morse relativo a las hojas de una foliación \mathcal{F} , vamos a retomar su definición.

Definición 6.1.1. Asumiremos que un punto \mathbf{z} en $M^* := M \setminus \{\mathbf{0}\}$ es un contacto no degenerado. Entonces definimos su *índice de Morse de g relativo a \mathcal{F}* como el índice de Morse en \mathbf{z} de la función $g|_{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}}$.

Recordemos que el índice de Morse de una función g en un punto \mathbf{z} corresponde al número de valores propios negativos de la matriz hessiana asociada a g . Por otra parte, se vió en la sección 3.2.1 que el cálculo de índices de Morse no puede hacerse directamente en coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$, debido a que la matriz de cambio de base entre los sistemas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ y $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ no es una matriz real y los índices de Morse no se preservan en este caso, sin embargo, podemos emplear la ecuación de cambio de base dada en la proposición 3.2.2 para evitar este problema.

Como estaremos trabajando con ambos sistemas coordenados, denotaremos por $\text{Hess}_x(Q|_{\mathcal{L}})$ y $\text{Hess}_z(Q|_{\mathcal{L}})$ a la matriz hessiana de $Q|_{\mathcal{L}}$ en coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ y $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ respectivamente.

Ejemplo 6.1.2. Sea $f(\mathbf{z}) = z_1^p + z_2^q$ con $p, q > 2$.

En la sección 5.2.1 vimos que la matriz hessiana en coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$ evaluada sobre cualquiera de los ejes coordenados complejos z_1 o z_2 tiene la forma

$$\text{Hess}_z(Q|_{\mathcal{L}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por la proposición 3.2.2 tenemos que la matriz hessiana de $Q|_{\mathcal{L}_z}$ en coordenadas (x_1, y_1, x_2, y_2) es

$$\text{Hess}_x(Q|_{\mathcal{L}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

de donde los valores propios de $\text{Hess}_x(Q|_{\mathcal{L}})$ son ambos iguales a 2 y por tanto, el índice de Morse correspondiente es cero, lo que nos dice que los contactos sobre cualquiera de los ejes coordenados corresponden a puntos de distancia mínima al origen.

Para analizar los índices de Morse sobre la componente M_3 vamos a emplear nuevamente los resultados obtenidos en la sección 5.2.1. Consideremos la siguiente notación

$$A(\mathbf{z}) := \frac{\bar{z}_1}{z_1} \left(p - 1 + (q - 1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right),$$

$$B(\mathbf{z}) := 1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2.$$

En esta notación podemos ver a las segundas derivadas parciales en coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$ como

$$\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial z_1 \partial z_1} = -A(\mathbf{z}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_1} = B(\mathbf{z}).$$

De aquí en adelante escribiremos A y B en lugar de $A(\mathbf{z})$ y $B(\mathbf{z})$ para simplificar la notación. Usando las ecuaciones obtenidas en la sección 3.2 para el cambio de coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ a coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial x_1 \partial x_1} &= -A + B + B - \bar{A} = 2B - 2\text{Re } A, \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial y_1 \partial x_1} &= i(-A + B - B + \bar{A}) = 2\text{Im } A, \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial x_1 \partial y_1} &= i(-A - B + B + \bar{A}) = 2\text{Im } A, \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial y_1 \partial y_1} &= A + B + B + \bar{A} = 2B + 2\text{Re } A. \end{aligned}$$

Un valor propio, λ , de $\text{Hess}_x(Q|_{\mathcal{L}})$ debe de satisfacer $|\text{Hess}_x(Q|_{\mathcal{L}}) - \lambda I| = 0$, en este caso el determinante $|\text{Hess}_x(Q|_{\mathcal{L}}) - \lambda I|$ se ve como

$$\begin{aligned} |\text{Hess}_x(Q|_{\mathcal{L}}) - \lambda I| &= [2B - \lambda - 2 \text{Re } A][2B - \lambda + 2 \text{Re } A] - [2 \text{Im } A]^2 \\ &= (2B - \lambda)^2 - 4(\text{Re } A)^2 - 4(\text{Im } A)^2 \\ &= (2B - \lambda)^2 - 4|A|^2. \end{aligned}$$

Igualando a cero el determinante y despejando λ tenemos

$$\lambda = 2B \pm 2|A|.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \left[1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 + \left| \frac{\bar{z}_1}{z_1} \right| \left(p - 1 + (q - 1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right) \right] = 2 \left[p + q \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right], \\ \lambda_2 &= 2 \left[1 + \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 - \left| \frac{\bar{z}_1}{z_1} \right| \left(p - 1 + (q - 1) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right) \right] = 2 \left[2 - p + (2 - q) \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \right], \end{aligned}$$

lo que implica que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ y por tanto el índice de Morse es 1, es decir, los puntos en la tercera componente corresponden a puntos silla.

Ahora, vamos a analizar brevemente como es la intersección de una hoja $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ de la foliación \mathcal{F} con la variedad polar. Notemos que si $f(\mathbf{z}) = c$, todos los puntos en la hoja $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ cumplen $z_1^p + z_2^q = c$, lo que implica que:

1. la hoja $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ interseca al eje z_1 en los puntos que cumplen $z_1^p = c$. Este conjunto consta de p soluciones, es decir, una hoja $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ interseca al eje z_1 en p puntos;
2. de igual forma que en el caso anterior tenemos que $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ interseca al eje z_2 en q puntos;
3. para ver cual es la intersección de M_3 con una hoja, vamos a descomponer la ecuación que define a la hoja en su forma polar

$$|z_1|^p e^{ip\theta_1} + |z_2|^q e^{iq\theta_2} = |c| e^{i\theta_c}, \quad (6.1)$$

donde θ_1 , θ_2 y θ_c corresponden a los argumentos principales de z_1 , z_2 y c respectivamente. Recordemos que los puntos de M_3 cumplen $e^{ip\theta_1} = e^{iq\theta_2}$, por lo tanto la ecuación (6.1) se puede descomponer en

$$\begin{aligned} |z_1|^p + |z_2|^q &= |c|, \\ e^{ip\theta_1} &= e^{i\theta_c}, \end{aligned}$$

de donde tenemos que los puntos de intersección de M_3 y $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ satisfacen $\theta_1 = \frac{\theta_c + 2\pi k}{p}$ para $k = 1, \dots, p$ y $\theta_2 = \frac{p\theta_1 + 2\pi k}{q}$, por lo tanto si p y q son primos relativos, la intersección $M_3 \cap \mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ consta de pq puntos.

Proposición 6.1.3. *Sea $f(\mathbf{z}) = z_1^p + z_2^q$ con p y q primos relativos mayores que 2. Cada hoja no singular \mathcal{L} de la foliación \mathcal{F} contiene $p + q$ puntos de distancia mínima al origen en los ejes coordenados y pq puntos silla de índice de Morse 1 sobre la componente M_3 . Además, la característica de Euler-Poincaré de \mathcal{L} en una bola cerrada \mathbb{B}_r de radio suficientemente grande es $\chi(\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_r) = p + q - pq$.*

Demostración. La primer parte de la proposición es consecuencia del análisis anterior. Para calcular la característica de Euler de las hojas de la foliación recordemos que el inciso (2) del teorema 4.3.3 nos habla de la relación entre la característica de Euler de una variedad N y los índices de una función de Morse sobre ésta. Elijamos $r > 0$ de tal forma que \mathbb{B}_r contenga en su interior a todos los puntos de $\mathcal{L} \cap M$, en este caso el campo vectorial $\text{grad}(g|_{\mathcal{L}})$ es transversal a la frontera de la variedad $\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_r$, por tanto podemos aplicar el teorema 4.3.3 a $\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_r$ de donde obtenemos

$$\chi(\mathcal{L} \cap \mathbb{B}_r) = p + q - pq .$$

□

Nota: recordemos que las hojas de la foliación son precisamente las fibras de f y por [30], cada fibra $f^{-1}(t)$ con $t \neq 0$, tiene el tipo de homotopía de una cuña de esferas de dimensión 1, $\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1$, de los cuales hay tantos como el número de Milnor $\mu(f)$. Se demuestra también en [30] que en este caso el número de Milnor es $(p-1)(q-1)$. Lo que implica que su característica de Euler-Poincaré es

$$\chi(f^{-1}(t)) = 1 - \mu(f) = p + q - pq$$

como se afirma en 6.1.3.

Ejemplo 6.1.4. Sea $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^q$ con $q > 2$.

Vamos a usar las ecuaciones de cambios de variable para las segundas derivadas parciales que obtuvimos en la sección 3.2 y los resultados obtenidos en la sección 5.2.1 para obtener la matriz hessiana de $Q|_{\mathcal{L}_z}$ en coordenadas (x_1, y_1, x_2, y_2) . Para simplificar los cálculos, definiremos

$$\begin{aligned} A_j(\mathbf{z}) &:= \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial z_j \partial z_j}(\mathbf{z}) , \\ B_j(\mathbf{z}) &:= \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_j \partial z_j}(\mathbf{z}) , \end{aligned}$$

para $j = 1, 2$, o los llamaremos simplemente A_j y B_j . Usando las ecuaciones de cambio

de base para las segundas derivadas parciales obtenidas en 3.2 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial x_j \partial x_j} &= A_j + B_j + B_j + \overline{A_j} = 2B_j + 2 \operatorname{Re} A_j , \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial y_j \partial x_j} &= i(A_j + B_j - B_j - \overline{A_j}) = -2 \operatorname{Im} A_j , \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial x_j \partial y_j} &= i(A_j - B_j + B_j - \overline{A_j}) = -2 \operatorname{Im} A_j , \\ \frac{\partial^2 Q|_{\mathcal{L}}}{\partial y_j \partial y_j} &= -A_j + B_j + B_j - \overline{A_j} = 2B_j - 2 \operatorname{Re} A_j .\end{aligned}$$

Si λ es un valor propio de $\operatorname{Hess}_x(Q|_{\mathcal{L}})$, entonces $|\operatorname{Hess}_x(Q|_{\mathcal{L}}) - \lambda I| = 0$, donde

$$\begin{aligned}|\operatorname{Hess}_x(Q|_{\mathcal{L}}) - \lambda I| &= (2B_j + 2 \operatorname{Re} A_j - \lambda)(2B_j - 2 \operatorname{Re} A_j - \lambda) - 4 \operatorname{Im}^2 A_j \\ &= (2B_j - \lambda)^2 - 4 \operatorname{Re}^2 A_j - 4 \operatorname{Im}^2 A_j = (2B_j - \lambda)^2 - 4|A_j|^2 .\end{aligned}$$

Igualando a cero el determinante y despejando λ tenemos

$$\lambda = 2B_j \pm 2|A_j| .$$

Vamos a analizar los valores propios de $\operatorname{Hess}_x(Q|_{\mathcal{L}})$ sobre cada una de las componentes de la variedad polar M .

1. En los puntos \mathbf{z} que pertenecen al eje z_1 tenemos que $A_2(\mathbf{z}) = 0$ y $B_2(\mathbf{z}) = 1$, entonces ambos valores propios son iguales a dos, lo que implica que su índice de Morse es cero, es decir, los puntos sobre el eje z_1 corresponden a puntos de distancia mínima al origen.
2. En los puntos $\mathbf{z} \in M$ que se encuentran sobre el eje z_2 tenemos $A_1(\mathbf{z}) = \frac{-2\overline{z_2}}{qz_2^{q-1}}$ y $B_1(\mathbf{z}) = 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2B_1 + 2|A_1| = 2 + \left| \frac{-2\overline{z_2}}{qz_2^{q-1}} \right| > 0 , \\ \lambda_2 &= 2B_1 - 2|A_1| = 2 - \left| \frac{-2\overline{z_2}}{qz_2^{q-1}} \right| = 2 - \frac{4}{q|z_2|^{q-2}} .\end{aligned}$$

Desarrollando la desigualdad en los casos en que $\lambda_2 > 0$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_2 < 0$ tenemos,

- i) $\lambda_2 > 0$ equivale a $|z_2| > \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{q-2}}$;
- ii) $\lambda_2 = 0$ equivale a $|z_2| = \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{q-2}}$;
- iii) $\lambda_2 < 0$ equivale a $|z_2| < \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{q-2}}$;

es decir, los puntos sobre el eje z_2 corresponden a puntos silla, los puntos que se encuentran a distancia $\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{q-2}}$ son puntos de degeneración y los puntos que se encuentran alejados del origen son puntos de distancia mínima al origen.

3. En la componente M_3 , $A_1 = -\frac{\bar{z}_1}{z_1} \left(1 + (q-1) \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2\right)$ y $B_1 = 1 + \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2$, por tanto

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2 \left[1 + \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 + 1 + (q-1) \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 \right] > 0, \\ \lambda_2 &= 2 \left[1 + \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 - 1 - (q-1) \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 \right] = 2(2-q) \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 < 0,\end{aligned}$$

por lo que todos los puntos en la tercera componente son puntos silla.

El análisis hecho para calcular el número de puntos de intersección de cada componente de M con las hojas de la foliación para $f(\mathbf{z}) = z_1^p + z_2^q$ funciona en este caso. Si definimos $a := \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{q-2}}$ podemos resumir la información del número y tipo de puntos críticos que tiene la función distancia al origen en una hoja no singular, $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$, en la siguiente tabla.

Tabla1: Índices de Morse

	$\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \cap \{(z_1, 0)\}$	$\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \cap \{(0, z_2)\}$	$\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \cap M_3$
$ f(\mathbf{z}) < a$	2 puntos mínimos	q puntos silla	no hay puntos de intersección
$ f(\mathbf{z}) = a$	2 puntos mínimos	q puntos de degeneración	q puntos de degeneración
$ f(\mathbf{z}) > a$	2 puntos mínimos	q puntos mínimos	2q puntos silla

Finalmente, vamos a emplear de nuevo el teorema 4.3.3 para calcular la característica de Euler de una hoja no singular en cada uno de los casos mencionados.

Consideremos nuevamente una bola cerrada \mathbb{B}_r centrada en el origen y de radio $r > 0$ tal que \mathbb{B}_r contenga en su interior a todos los puntos en $\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \cap M$. En este caso, si $|f(\mathbf{z})| \neq a$, la variedad $\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \cap \mathbb{B}_r$ satisface las hipótesis de 4.3.3. Aplicando dicho teorema tenemos:

i) si las hojas cumplen $|f(\mathbf{z})| < a$, entonces

$$\chi(\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \cap \mathbb{B}_r) = 2 - q .$$

ii) si $|f(\mathbf{z})| > a$ tenemos

$$\chi(\mathcal{L}_{\mathbf{z}} \cap \mathbb{B}_r) = 2 + q - 2q = 2 - q .$$

Los resultados que obtuvimos nos dicen que apesar de que la topología de las hojas no cambia, lo cual es sabido por el teorema de fibración de Milnor, su geometría si puede cambiar. De hecho lo que podemos ver en este caso es que si nos movemos sobre las hojas de la foliación \mathcal{F} y pasamos a través de puntos de degeneración, entonces cambia la forma en que cada hoja está encajada en el espacio ambiente, lo cual se ve reflejado en sus índices de Morse.

6.2. Degeneraciones bajo perturbaciones de la métrica

En el capítulo anterior estudiamos la variedad polar de una foliación \mathcal{F} , definida por un polinomio de Pham-Brieskorn, relativa a la función de Morse Q . En particular vimos que cuando consideramos foliaciones definidas por polinomios de Pham-Brieskorn en donde al menos uno de sus exponentes es dos, los contactos son degenerados. Pero ¿todas las degeneraciones son del mismo tipo?, más aún ¿podemos eliminar las degeneraciones usando perturbaciones genéricas de la métrica?

Recordemos que la teoría de Morse nos dice que cualquier función f con imagen en los reales que tiene puntos de degeneración, siempre se puede perturbar de tal manera que la función resultante no tenga degeneraciones. Pero, que sucede en el caso de foliaciones, es decir, para funciones que se encuentran definidas sobre las hojas de una foliación. Nótese que éstas se pueden pensar como un caso particular de familias de funciones de Morse que dependen de varios parámetros. Aquí tenemos una función de Morse por cada hoja y estas funciones de Morse varían diferenciablemente al moverse sobre las hojas. Entonces, ¿es posible eliminar dichas degeneraciones de la misma manera?

6.2.1. La foliación definida por $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2$

Consideremos la función Q_Λ definida en coordenadas $(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$ por

$$Q_\Lambda(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = a_1 \left(\frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} \right)^2 + b_1 \left(\frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} \right)^2 + a_2 \left(\frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} \right)^2 + b_2 \left(\frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} \right)^2 ,$$

donde los coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2 son reales positivos. Notemos que la función Q_Λ es una función de Morse con índice de Morse 0 en el origen. Estamos interesados en ver si existen coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2 tales que todos los contactos de la variedad polar relativa a \mathcal{F} y Q_Λ sean no degenerados.

Supongamos que \mathbf{z} en \mathbb{C}^n es un punto sobre $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ tal que su segunda coordenada es no nula ($z_2 \neq 0$), entonces los puntos sobre una hoja $\mathcal{L}_{\mathbf{z}}$ en una vecindad de \mathbf{z} cumplen

$$\frac{\partial z_2}{\partial z_1} = -\frac{z_1}{z_2}.$$

Vamos a usar esta relación para evaluar las primeras y segundas derivadas de $Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}$ en términos de z_1 y \bar{z}_1 . Tenemos

$$\frac{\partial Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_1} = a_1 \left(\frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} \right) - ib_1 \left(\frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} \right) + \left[a_2 \left(\frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} \right) - ib_2 \left(\frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} \right) \right] \left(-\frac{z_1}{z_2} \right).$$

Notemos que el hecho de que Q_Λ sea una función real, implica que $\frac{\partial Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_1} = \overline{\frac{\partial Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_1}}$, entonces el conjunto de contacto está determinado por la ecuación $\frac{\partial Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_1} = 0$, es decir,

$$z_2[a_1 \operatorname{Re} z_1 - ib_1 \operatorname{Im} z_1] = z_1[a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2]. \quad (6.2)$$

Es claro que los puntos en los dos ejes coordenados complejos z_1 y z_2 son puntos de contacto. Vamos a desarrollar la ecuación anterior para ver explícitamente como es en general la variedad polar M para los distintos valores de los coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2 . La ecuación (6.2) se puede ver como

$$(\operatorname{Re} z_2 + i \operatorname{Im} z_2)(a_1 \operatorname{Re} z_1 - ib_1 \operatorname{Im} z_1) = (\operatorname{Re} z_1 + i \operatorname{Im} z_1)(a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2).$$

Desarrollando ambos lados de la ecuación e igualando sus partes reales e imaginarias tenemos

$$\begin{aligned} a_1(\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2) + b_1(\operatorname{Im} z_1)(\operatorname{Im} z_2) &= a_2(\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2) + b_2(\operatorname{Im} z_1)(\operatorname{Im} z_2), \\ a_1(\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Im} z_2) - b_1(\operatorname{Im} z_1)(\operatorname{Re} z_2) &= a_2(\operatorname{Re} z_2)(\operatorname{Im} z_1) - b_2(\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Im} z_2), \end{aligned}$$

o de manera equivalente

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2)(a_1 - a_2) &= (\operatorname{Im} z_1)(\operatorname{Im} z_2)(b_2 - b_1), \\ (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Im} z_2)(a_1 + b_2) &= (\operatorname{Im} z_1)(\operatorname{Re} z_2)(a_2 + b_1). \end{aligned}$$

Como estamos considerando únicamente coeficientes positivos, ambas ecuaciones son no triviales siempre que $a_1 \neq a_2$ o $b_1 \neq b_2$. En el caso $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$ el conjunto de contacto es un conjunto de dimensión real tres definido únicamente por la ecuación

$$\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2(a_1 + b_2) = \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Re} z_2(a_2 + b_1).$$

En el caso en que alguna de las dos condiciones se cumpla pero la otra no, por ejemplo, $a_1 = a_2$ y $b_1 \neq b_2$, al desarrollar las ecuaciones podemos ver que las soluciones de estas ecuaciones están dadas por los puntos de la forma $\{(0, 0, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_2)\}$, $\{(\operatorname{Re} z_1, 0, \operatorname{Re} z_2, 0)\}$ y $\{(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, 0, 0)\}$, es decir, las soluciones están dadas por los dos ejes coordenados complejos y un plano real que pasa por el origen. Análogamente si suponemos que $a_1 \neq a_2$ y $b_1 = b_2$ las soluciones de las ecuaciones que definen a la variedad polar son: $\{(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, 0, 0)\}$, $\{(0, \operatorname{Im} z_1, 0, \operatorname{Im} z_2)\}$ y $\{(0, 0, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_2)\}$.

Finalmente, analicemos el caso $a_1 \neq a_2$ y $b_1 \neq b_2$. Si suponemos $\operatorname{Re} z_1 = 0$ las ecuaciones que definen a la variedad polar nos dicen que $\operatorname{Im} z_1 = 0$ o $\operatorname{Re} z_2 = \operatorname{Im} z_2 = 0$. Si suponemos que alguna otra coordenada se anula el resultado es totalmente análogo. Esto implica que si algún punto en la variedad de contacto tiene una coordenada nula, entonces dicho punto se encuentra sobre alguno de los ejes coordenados complejos. Supongamos entonces que $\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_2$ son todas distintas de cero y que $a_1 \neq a_2$ y $b_1 \neq b_2$. Despejando $\frac{\operatorname{Re} z_1}{\operatorname{Im} z_1}$ de las ecuaciones de la variedad polar, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Re} z_1}{\operatorname{Im} z_1} &= \frac{\operatorname{Im} z_2}{\operatorname{Re} z_2} \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}, \\ \frac{\operatorname{Re} z_1}{\operatorname{Im} z_1} &= \frac{\operatorname{Re} z_2}{\operatorname{Im} z_2} \cdot \frac{a_2 + b_1}{a_1 + b_2},\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\frac{\operatorname{Im} z_2}{\operatorname{Re} z_2} \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} = \frac{\operatorname{Re} z_2}{\operatorname{Im} z_2} \cdot \frac{a_2 + b_1}{a_1 + b_2},$$

o visto de otra forma

$$(\operatorname{Re} z_2)^2 = (\operatorname{Im} z_2)^2 \frac{(b_2 - b_1)(a_1 + b_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 + b_1)}.$$

Por lo que

$$\operatorname{Re} z_2 = \pm \operatorname{Im} z_2 \sqrt{\frac{(b_2 - b_1)(a_1 + b_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 + b_1)}}. \quad (6.3)$$

Usando la ecuación anterior en una de las ecuaciones originales, obtenemos que $\operatorname{Re} z_1$ y $\operatorname{Im} z_1$ están relacionados por

$$\operatorname{Re} z_1 = \pm \operatorname{Im} z_1 \sqrt{\frac{(a_2 + b_1)(b_2 - b_1)}{(a_1 + b_2)(a_1 - a_2)}}; \quad (6.4)$$

podemos ver que las ecuaciones anteriores tiene solución únicamente si la fracción dentro de cada raíz es positiva.

Al desarrollar todas las posibles combinaciones de los coeficientes, se obtiene que únicamente cuando los coeficientes cumplen las desigualdades $a_1 > a_2$ y $b_2 > b_1$ o las desigualdades $a_1 < a_2$ y $b_2 < b_1$ las ecuaciones (6.3) y (6.4) tienen soluciones.

Lo que hemos encontrado, es que si los coeficientes de Q_Λ no satisfacen las relaciones anteriores, entonces el conjunto de contacto consta únicamente de los ejes coordenados. En caso de que se cumplan dichas relaciones el conjunto de contacto consta de los dos ejes coordenados complejos y de los planos reales definidos por

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z_1 &= \pm \operatorname{Im} z_1 \sqrt{\frac{(a_2 + b_1)(b_2 - b_1)}{(a_1 + b_2)(a_1 - a_2)}}, \\ \operatorname{Re} z_2 &= \pm \operatorname{Im} z_2 \sqrt{\frac{(b_2 - b_1)(a_1 + b_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 + b_1)}}. \end{aligned}$$

Vamos ahora a calcular las segundas derivadas parciales para ver que tipo de puntos críticos tenemos en cada caso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_1 \partial z_1} &= \frac{a_1 - b_1}{2} + \frac{a_2 - b_2}{2} \left(-\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + \left[a_2 \left(\frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} \right) - ib_2 \left(\frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} \right) \right] \left[-\frac{1}{z_2} - \frac{z_1^2}{z_2^3} \right], \\ \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} &= \frac{a_1 + b_1}{2} + \frac{a_2 + b_2}{2} \left| -\frac{z_1}{z_2} \right|^2. \end{aligned}$$

Recordemos que todos los cálculos los estamos haciendo en una vecindad de un punto \mathbf{z} tal que su segunda coordenada es no nula. Vamos entonces a evaluar las segundas derivadas parciales en un punto del eje z_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_1 \partial z_1}(0, z_2) &= \frac{a_1 - b_1}{2} - \frac{1}{z_2} \left[a_2 \left(\frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} \right) - ib_2 \left(\frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} \right) \right] \\ &= \frac{a_1 - b_1}{2} - \frac{a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2}{z_2}, \\ \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1}(0, z_2) &= \frac{a_1 + b_1}{2}. \end{aligned}$$

En este caso el determinante de la matriz hessiana, $|\operatorname{Hess}_z(Q|_{\mathcal{L}})(0, z_2)|$, es:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a_1 - b_1}{2} - \frac{a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2}{z_2} \right) \left(\frac{a_1 - b_1}{2} - \frac{a_2 \operatorname{Re} z_2 + ib_2 \operatorname{Im} z_2}{\bar{z}_2} \right) - \left(\frac{a_1 + b_1}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{a_1 - b_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_1 + b_1}{2} \right)^2 + \frac{a_2^2 \operatorname{Re}^2 z_2 + b_2^2 \operatorname{Im}^2 z_2}{|z_2|^2} \\ &\quad - \frac{a_1 - b_1}{2} \left(\frac{a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2}{z_2} + \frac{a_2 \operatorname{Re} z_2 + ib_2 \operatorname{Im} z_2}{\bar{z}_2} \right) \\ &= -a_1 b_1 + \frac{a_2^2 \operatorname{Re}^2 z_2 + b_2^2 \operatorname{Im}^2 z_2}{|z_2|^2} - \frac{a_1 - b_1}{2} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2}{z_2} \right) \\ &= -a_1 b_1 + \frac{a_2^2 \operatorname{Re}^2 z_2 + b_2^2 \operatorname{Im}^2 z_2}{\operatorname{Re}^2 z_2 + \operatorname{Im}^2 z_2} - \frac{a_1 - b_1}{2} 2 \left(\frac{a_2 \operatorname{Re}^2 z_2 - b_2 \operatorname{Im}^2 z_2}{\operatorname{Re}^2 z_2 + \operatorname{Im}^2 z_2} \right). \end{aligned}$$

Como estamos interesados en encontrar bajo que condiciones la matriz hessiana es degenerada, vamos a suponer que su determinante es cero. Por otra parte, como $z_2 \neq 0$ podemos multiplicar la ecuación anterior por $|z_2|^2$ para eliminar los divisores:

$$\begin{aligned} 0 &= -a_1 b_1 (\operatorname{Re}^2 z_2 + \operatorname{Im}^2 z_2) + a_2^2 \operatorname{Re}^2 z_2 + b_2^2 \operatorname{Im}^2 z_2 - (a_1 - b_1)(a_2 \operatorname{Re}^2 z_2 - b_2 \operatorname{Im}^2 z_2) \\ &= \operatorname{Re}^2 z_2 (-a_1 b_1 + a_2^2 - (a_1 - b_1)a_2) + \operatorname{Im}^2 z_2 (-a_1 b_1 + b_2^2 + (a_1 - b_1)b_2) . \end{aligned}$$

Dicha ecuación se puede ver como

$$\operatorname{Re}^2 z_2 (a_2 - a_1)(a_2 + b_1) + \operatorname{Im}^2 z_2 (b_2 + a_1)(b_2 - b_1) = 0 . \quad (6.5)$$

Notemos que si los coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2 cumplen las desigualdades

- i) $a_2 > a_1$ y $b_2 > b_1$ o
- ii) $a_2 < a_1$ y $b_2 < b_1$,

entonces los coeficientes de la ecuación (6.5) tienen el mismo signo y por lo tanto su única solución es el origen, es decir, en caso de que las desigualdades mencionadas se cumplan, la ecuación tiene únicamente solución trivial y por tanto los puntos sobre el eje z_2 (salvo el origen) son no degenerados.

Vamos ahora a ver que sucede sobre el eje z_1 . Recordemos que las ecuaciones que definen a f y Q_Λ son simétricas respecto a los índices, por lo tanto, las ecuaciones para las segundas derivadas parciales (cuando $z_1 \neq 0$) se ven como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_2 \partial z_2} &= \frac{a_1 - b_1}{2} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 + \left[a_1 \left(\frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} \right) - ib_1 \left(\frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} \right) \right] \left[-\frac{1}{z_1} - \frac{z_2^2}{z_1^3} \right] + \frac{a_2 - b_2}{2} , \\ \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_2 \partial z_2} &= \frac{a_1 + b_1}{2} \left| \frac{z_2}{z_1} \right|^2 + \frac{a_2 + b_2}{2} . \end{aligned}$$

Evaluando en los puntos del eje z_1 tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_2 \partial z_2}(z_1, 0) &= -\frac{a_1 \operatorname{Re} z_1 - ib_1 \operatorname{Im} z_1}{z_1} + \frac{a_2 - b_2}{2} , \\ \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_2 \partial z_2}(z_1, 0) &= \frac{a_2 + b_2}{2} . \end{aligned}$$

Siguiendo los mismos pasos que para el eje coordenado z_2 tenemos que la ecuación $|\operatorname{Hess}_z(Q|_{\mathcal{L}})(z_1, 0)| = 0$ se puede ver como

$$\operatorname{Re}^2 z_1 (a_1 - a_2)(a_1 + b_2) + \operatorname{Im}^2 z_1 (b_1 + a_2)(b_1 - b_2) = 0 . \quad (6.6)$$

Observemos que si los coeficientes cumplen las desigualdades:

- i) $a_1 > a_2$ y $b_1 > b_2$ o

$$\text{ii)} \quad a_2 > a_1 \quad \text{y} \quad b_2 > b_1 ,$$

entonces los coeficientes de la ecuación (6.6) tienen el mismo signo y por lo tanto su única solución es el origen, lo que implica que en estos casos el eje z_1 no tiene degeneraciones. Notemos que éstas son exactamente las mismas desigualdades que se requerían para que los puntos sobre el eje z_2 fueran no degenerados, más aún, en el análisis que hicimos respecto a las componentes de la variedad polar, vimos que en este caso la variedad polar estaba formada únicamente por los ejes coordenados complejos.

De aquí en adelante vamos a asumir que los coeficientes de Q_Λ satisfacen las desigualdades $a_1 > a_2$ y $b_1 > b_2$ o $a_2 > a_1$ y $b_2 > b_1$. Y vamos a calcular en estos casos el índice de Morse de cada uno de los puntos críticos.

Recordemos que a pesar de que las coordenadas z, \bar{z} son consideradas coordenadas reales, el cálculo de los índices de Morse debe hacerse directamente en coordenadas x, y . Vamos a usar los cambios de coordenadas obtenidos en 3.2.2 para obtener la matriz hessiana $\text{Hess}_x(Q_\Lambda|_{\mathcal{L}})$ en coordenadas (x_1, y_1, x_2, y_2) y vamos a evaluar dicha matriz en los puntos del eje z_2 ; el caso de los puntos en el eje z_1 es totalmente análogo.

La matriz $\text{Hess}_x(Q_\Lambda|_{\mathcal{L}})$ en $(0, z_2)$, o de manera equivalente en $(0, 0, x_2, y_2)$, toma la forma

$$\text{Hess}_x(Q_\Lambda|_{\mathcal{L}})(0, 0, x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 2a_1 - 2\frac{a_2x_2^2 - b_2y_2^2}{x_2^2 + y_2^2} & -2\frac{(a_2 + b_2)x_2y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ -2\frac{(a_2 + b_2)x_2y_2}{x_2^2 + y_2^2} & 2b_1 + 2\frac{a_2x_2^2 - b_2y_2^2}{x_2^2 + y_2^2} \end{pmatrix} .$$

Vamos entonces a calcular sus valores propios λ_1 y λ_2 , los cuales deben de satisfacer $\det(\text{Hess}_x(Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}) - \lambda) = 0$, es decir,

$$\left(2a_1 - 2\frac{a_2x_2^2 - b_2y_2^2}{x_2^2 + y_2^2} - \lambda\right) \left(2b_1 + 2\frac{a_2x_2^2 - b_2y_2^2}{x_2^2 + y_2^2} - \lambda\right) - \left(-2\frac{(a_2 + b_2)x_2y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 = 0 .$$

La ecuación se transforma en:

$$\lambda^2 - 2(a_1 + b_1)\lambda + 4 \left[a_1b_1 + (a_1 - b_1)\frac{a_2x_2^2 - b_2y_2^2}{x_2^2 + y_2^2} - \left(\frac{a_2x_2^2 - b_2y_2^2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 - \left(\frac{(a_2 + b_2)x_2y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 \right] = 0 ,$$

por tanto los valores propios son $\lambda_{1,2} = a_1 + b_1 \pm \sqrt{D}$, donde D es

$$(a_1 + b_1)^2 - 4 \left[a_1b_1 + (a_1 - b_1)\frac{a_2x_2^2 - b_2y_2^2}{x_2^2 + y_2^2} - \left(\frac{a_2x_2^2 - b_2y_2^2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 - \left(\frac{(a_2 + b_2)x_2y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 \right] .$$

Es claro que el valor propio correspondiente a la suma de ambos términos en la expresión anterior, λ_1 , es siempre positivo. Por lo tanto el tipo de puntos críticos que tengamos depende únicamente del valor propio λ_2 .

Vamos a desarrollar un poco el discriminante, D , en la ecuación anterior para ver como es λ_2 . Tenemos que D es:

$$\frac{[(a_1 + b_1)^2 - 4a_1b_1](x_2^2 + y_2^2)^2 - 4(a_1 - b_1)(a_2x_2^2 - b_2y_2^2)(x_2^2 + y_2^2) + 4(a_2x_2^2 - b_2y_2^2)^2 + 4(a_2 + b_2)^2x_2^2y_2^2}{(x_2^2 + y_2^2)^2}$$

al desarrollar el numerador de la fracción anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} D(x_2^2 + y_2^2)^2 &= (a_1 - b_1)^2(x_2^4 + 2x_2^2y_2^2 + y_2^4) - 4(a_1 - b_1)(a_2x_2^4 + (a_2 - b_2)x_2^2y_2^2 - b_2y_2^4) \\ &\quad + 4(a_2^2x_2^4 - 2a_2b_2x_2^2y_2^2 + b_2^2y_2^4) + 4(a_2 + b_2)^2x_2^2y_2^2 \\ &= x_2^4[(a_1 - b_1)^2 - 4a_2(a_1 - b_1) + 4a_2^2] + y_2^4[(a_1 - b_1)^2 + 4b_2(a_1 - b_1) + 4b_2^2] \\ &\quad + x_2^2y_2^2[2(a_1 - b_1)^2 - 4(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) - 8a_2b_2 + 4(a_2 + b_2)^2] \\ &= x_2^4((a_1 - b_1) - 2a_2)^2 + y_2^4((a_1 - b_1) + 2b_2)^2 \\ &\quad + 2x_2^2y_2^2((a_1 - b_1) - 2a_2)((a_1 - b_1) + 2b_2) + 4x_2^2y_2^2(a_2 + b_2)^2 \\ &= [x_2^2((a_1 - b_1) - 2a_2) + y_2^2((a_1 - b_1) + 2b_2)]^2 + 4(a_2 + b_2)^2x_2^2y_2^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto el valor propio λ_2 toma la forma

$$\lambda_2 = a_1 + b_1 - \frac{\sqrt{[x_2^2((a_1 - b_1) - 2a_2) + y_2^2((a_1 - b_1) + 2b_2)]^2 + 4(a_2 + b_2)^2x_2^2y_2^2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Supongamos que $\lambda_2 < 0$ y desarrollemos la desigualdad a través de desigualdades equivalentes para ver que condiciones se necesitan para que esta desigualdad se dé,

$$a_1 + b_1 - \frac{\sqrt{[x_2^2((a_1 - b_1) - 2a_2) + y_2^2((a_1 - b_1) + 2b_2)]^2 + 4(a_2 + b_2)^2x_2^2y_2^2}}{x_2^2 + y_2^2} < 0,$$

$$(a_1 + b_1)(x_2^2 + y_2^2) - \sqrt{[x_2^2((a_1 - b_1) - 2a_2) + y_2^2((a_1 - b_1) + 2b_2)]^2 + 4(a_2 + b_2)^2x_2^2y_2^2} < 0,$$

$$(a_1 + b_1)(x_2^2 + y_2^2) < \sqrt{[x_2^2((a_1 - b_1) - 2a_2) + y_2^2((a_1 - b_1) + 2b_2)]^2 + 4(a_2 + b_2)^2x_2^2y_2^2}.$$

Vamos ahora a elevar al cuadrado cada lado de la desigualdad; observemos que como los términos en ambos lados de la desigualdad son positivos, al elevar al cuadrado la desigualdad se conserva,

$$(a_1 + b_1)^2(x_2^2 + y_2^2)^2 < [x_2^2((a_1 - b_1) - 2a_2) + y_2^2((a_1 - b_1) + 2b_2)]^2 + 4(a_2 + b_2)^2x_2^2y_2^2,$$

pasemos todos los términos del lado derecho de la desigualdad. Desarrollando los productos y factorizando tenemos

$$\begin{aligned} 0 &< x_2^4[(a_1 - b_1 - 2a_2)^2 - (a_1 + b_1)^2] + y_2^4[(a_1 - b_1 + 2b_2)^2 - (a_1 + b_1)^2] \\ &\quad + x_2^2y_2^2[2(a_1 - b_1 - 2a_2)(a_1 - b_1 + 2b_2) + 4(a_2 + b_2)^2 - 2(a_1 + b_1)^2]. \end{aligned}$$

Vamos a desarrollar los coeficientes

$$\begin{aligned}
0 &< x_2^4[a_1^2 - 2a_1b_1 - 4a_1a_2 + b_1^2 + 4a_2b_1 + 4a_2^2 - a_1^2 - 2a_1b_1 - b_1^2] \\
&+ y_2^4[a_1^2 - 2a_1b_1 + 4a_1b_2 - 4b_1b_2 + b_1^2 + 4b_2^2 - a_1^2 - 2a_1b_1 - b_1^2] + 2x_2^2y_2^2[a_1^2 - a_1b_1 + 2a_1b_2 \\
&- a_1b_1 + b_1^2 - 2b_1b_2 - 2a_1a_2 + 2b_1a_2 - 4a_2b_2 + 2a_2^2 + 4a_2b_2 + 2b_2^2 - a_1^2 - 2a_1b_1 - b_1^2] \\
&= x_2^4[-4a_1b_1 - 4a_1a_2 + 4a_2b_1 + 4a_2^2] + y_2^4[-4a_1b_1 + 4a_1b_2 - 4b_1b_2 + 4b_2^2] \\
&+ 2x_2^2y_2^2[-2a_1b_1 - 2a_1b_1 + 2a_1b_2 - 2b_1b_2 - 2a_1a_2 + 2b_1a_2 + 2a_2^2 + 2b_2^2].
\end{aligned}$$

Factorizando los coeficientes tenemos:

$$0 < x_2^4(a_2 - a_1)(b_1 + a_2) + y_2^4(a_1 + b_2)(b_2 - b_1) + x_2^2y_2^2[(a_2 - a_1)(b_1 + a_2) + (b_2 - b_1)(a_1 + b_2)],$$

o de manera equivalente

$$0 < [x_2^2(a_2 - a_1)(b_1 + a_2) + y_2^2(a_1 + b_2)(b_2 - b_1)](x_2^2 + y_2^2). \quad (6.7)$$

En resumen lo que tenemos es que la condición de que el valor propio λ_2 sea negativo equivale a encontrar los puntos que satisfagan la desigualdad (6.7). Por lo tanto $\lambda_2 > 0$ equivale a la desigualdad

$$0 > [x_2^2(a_2 - a_1)(b_1 + a_2) + y_2^2(a_1 + b_2)(b_2 - b_1)](x_2^2 + y_2^2). \quad (6.8)$$

Notemos que las desigualdades (6.7) y (6.8) dependen únicamente de los valores de $a_2 - a_1$ y $b_2 - b_1$. Por lo tanto tenemos que si $a_2 > a_1$ y $b_2 > b_1$ entonces $\lambda_2 < 0$, lo que implica que los puntos sobre el eje z_2 serán puntos silla; en el caso en que $a_2 < a_1$ y $b_2 < b_1$ entonces $\lambda_2 > 0$ lo cual indica que los puntos sobre el eje z_2 son puntos de índice de Morse cero (puntos de distancia mínima).

Notemos que para calcular los índices de Morse de los puntos sobre el eje z_1 las fórmulas son totalmente simétricas a las empleadas para calcular los índices en z_2 . Es decir, las fórmulas de las segundas derivadas parciales las podríamos obtener de las correspondientes a los puntos sobre el eje z_2 únicamente intercambiando los índices 1 y 2 de las constantes a_1, b_1, a_2, b_2 y las variables x_1, y_1, x_2, y_2 . Lo anterior nos dice que: los puntos sobre el eje z_1 van a ser puntos silla si

$$0 < [x_1^2(a_1 - a_2)(b_2 + a_1) + y_1^2(a_2 + b_1)(b_1 - b_2)](x_1^2 + y_1^2), \quad (6.9)$$

es decir, cuando $a_1 > a_2$ y $b_1 > b_2$. Los puntos mínimos corresponderán a los puntos tales que

$$0 > [x_1^2(a_1 - a_2)(b_2 + a_1) + y_1^2(a_2 + b_1)(b_1 - b_2)](x_1^2 + y_1^2), \quad (6.10)$$

lo cual se cumple cuando $a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2$.

Proposición 6.2.1. Sean $Q_\Lambda(x_1, y_1, x_2, y_2) = a_1x_1^2 + b_1y_1^2 + a_2x_2^2 + b_2y_2^2$ y $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$.

1. Si $a_1 > a_2$ y $b_1 > b_2$. Entonces la variedad polar $M = M(\mathcal{F}, Q_\Lambda)$ consta únicamente de los dos ejes coordenados complejos, los cuales son no-degenerados salvo en el origen. Los índices de Morse corresponden a puntos silla sobre el eje z_1 y puntos mínimos sobre el eje z_2 .
2. Cuando $a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2$ el conjunto de contacto $M = M(\mathcal{F}, Q_\Lambda)$ consta únicamente de los dos ejes coordenados complejos, los cuales son no-degenerados salvo en el origen. Los índices de Morse en este caso corresponden a puntos mínimos sobre el eje z_1 y puntos silla sobre el eje z_2 .

6.2.2. La foliación definida por $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^q$

En la sección 5.2.1 vimos que algunos de los contactos entre la foliación \mathcal{F} definida por $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^q$ y la foliación dada por las esferas canónicas alrededor del origen, son degenerados. También vimos en el ejemplo anterior que en algunos casos es posible eliminar las degeneraciones al perturbar la métrica que define a la función de Morse Q , vamos a ver entonces si en este caso es posible eliminar las degeneraciones usando una función cuadrática genérica Q_Λ en lugar de la función cuadrado de la distancia al origen.

Sea $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^q$ con $q > 2$, sea $Q_\Lambda(\mathbf{z}) = a_1 \operatorname{Re}^2 z_1 + b_1 \operatorname{Im}^2 z_1 + a_2 \operatorname{Re}^2 z_2 + b_2 \operatorname{Im}^2 z_2$ y sea \mathcal{L}_z la hoja de la foliación \mathcal{F} que contiene a \mathbf{z} , donde \mathbf{z} es un valor regular de f . Nos interesa encontrar los puntos críticos de la función $Q_\Lambda|_{\mathcal{L}_z}$ y analizar que condiciones deben cumplir los coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2 para que los puntos críticos encontrados sean no degenerados.

En la proposición 5.1.2 vimos que los puntos en la variedad polar están determinados por las ecuaciones de la forma $\frac{\partial Q_\Lambda}{\partial z_k} \frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{\partial Q_\Lambda}{\partial z_j} \frac{\partial f}{\partial z_k}$ para todo $j, k = 1, 2$, es decir:

$$M := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid 2z_1(a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2) = qz_2^{q-1}(a_1 \operatorname{Re} z_1 - ib_1 \operatorname{Im} z_1)\} . \quad (6.11)$$

De la ecuación anterior podemos ver que la variedad polar consta nuevamente de los dos ejes coordenados complejos y de una tercera componente definida por:

$$M_3 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid 2z_1(a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2) = qz_2^{q-1}(a_1 \operatorname{Re} z_1 - ib_1 \operatorname{Im} z_1); \quad z_1, z_2 \neq 0\} .$$

Recordemos que las degeneraciones en los contactos entre la foliación \mathcal{F} y la foliación por esferas definida por la métrica euclídeana, se encontraban precisamente sobre uno de los ejes coordenados, por lo cual vamos a analizar primero que es lo que sucede sobre estos.

Supongamos que $z_1 \neq 0$. Vamos a aplicar el teorema de la función implícita de la misma forma en que se hizo en la sección 5.2.1. Por lo tanto, en una vecindad abierta alrededor un punto que satisface $z_1 \neq 0$ las coordenadas se relacionan sobre cada hoja de \mathcal{F} de manera holomorfa mediante $\frac{\partial z_1}{\partial z_2} = -\frac{qz_2^{q-1}}{2z_1}$. Entonces, las primeras derivadas parciales de $Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}$ con respecto a z_2 y \bar{z}_2 se ven como

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_2} &= \left[\frac{2a_1}{2} \left(\frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} \right) + \frac{2b_1}{2i} \left(\frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} \right) \right] \frac{\partial z_1}{\partial z_2} + \frac{2a_2}{2} \left(\frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} \right) + \frac{2b_2}{2i} \left(\frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} \right) \\ &= (a_1 \operatorname{Re} z_1 - ib_1 \operatorname{Im} z_1) \left(-\frac{qz_2^{q-1}}{2z_1} \right) + a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2, \end{aligned}$$

con $\frac{\partial Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_2} = \overline{\frac{\partial Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_2}}$. La segunda derivada parcial $\frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_2 \partial z_2}$ es igual a

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a_1 - b_1}{2} \right) \left(\frac{\partial z_1}{\partial z_2} \right)^2 - \left(\frac{q(q-1)z_2^{q-2}}{2z_1} - \frac{qz_2^{q-1}}{2z_1^2} \frac{\partial z_1}{\partial z_2} \right) (a_1 \operatorname{Re} z_1 - ib_1 \operatorname{Im} z_1) + \frac{a_2 - b_2}{2} \\ &= \frac{a_1 - b_1}{2} \left(\frac{qz_2^{q-1}}{2z_1} \right)^2 - \left(\frac{q(q-1)z_2^{q-2}}{2z_1} - \frac{qz_2^{q-1}}{2z_1^2} \left(-\frac{qz_2^{q-1}}{2z_1} \right) \right) (a_1 \operatorname{Re} z_1 - ib_1 \operatorname{Im} z_1) + \frac{a_2 - b_2}{2} \end{aligned}$$

y la derivada $\frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_2 \partial z_2}$ es igual a

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2} \right) \left(-\frac{qz_2^{q-1}}{2z_1} \right) \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \bar{z}_2} + \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2} \left| \frac{qz_2^{q-1}}{2z_1} \right|^2 + \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

Si evaluamos las parciales en los puntos del eje z_1 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_2 \partial z_2}(z_1, 0) &= \frac{a_2 - b_2}{2}, \\ \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_2 \partial z_2}(z_1, 0) &= \frac{a_2 + b_2}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el determinante de la hessiana es

$$|\operatorname{Hess}_z(Q_\Lambda|_{\mathcal{L}})| = \left(\frac{a_2 - b_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_2 + b_2}{2} \right)^2 = -a_2 b_2,$$

como los coeficientes $a_2, b_2 \neq 0$ no tenemos degeneraciones sobre el eje z_1 .

Supongamos ahora $z_2 \neq 0$, siguiendo la misma idea tenemos $\frac{\partial z_2}{\partial z_1} = -\frac{2z_1}{qz_2^{q-1}}$ y

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_1} &= a_1 \left(\frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} \right) + -ib_2 \left(\frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} \right) + \left[a_2 \left(\frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} \right) - ib_2 \left(\frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} \right) \right] \left(-\frac{2z_1}{qz_2^{q-1}} \right), \\ \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_1 \partial z_1} &= \left(\frac{a_1 - b_1}{2} \right) + \frac{a_2 - b_2}{2} \left(-\frac{2z_1}{qz_2^{q-1}} \right) \\ &\quad - \left(a_2 \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} - ib_2 \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} \right) \left(\frac{2}{qz_2^{q-1}} - \frac{2z_1(q-1)}{qz_2^q} \left(-\frac{2z_1}{qz_2^{q-1}} \right) \right), \\ \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} &= \frac{a_1 + b_1}{2} + \frac{a_2 + b_2}{2} \left| \frac{2z_1}{qz_2^{q-1}} \right|^2. \end{aligned}$$

Al evaluar las segundas derivadas parciales en los puntos del eje z_2 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial z_1 \partial z_1}(0, z_2) &= \frac{a_1 - b_1}{2} - (a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2) \frac{2}{qz_2^{q-1}}, \\ \frac{\partial^2 Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1}(0, z_2) &= \frac{a_1 + b_1}{2}.\end{aligned}$$

Por tanto, el determinante de la hessiana, $|\operatorname{Hess}_z(Q_\Lambda|_{\mathcal{L}})(0, z_2)|$, es igual a

$$\begin{aligned}& \left[\frac{a_1 - b_1}{2} - (a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2) \frac{2}{qz_2^{q-1}} \right] \left[\frac{a_1 - b_1}{2} - (a_2 \operatorname{Re} z_2 + ib_2 \operatorname{Im} z_2) \frac{2}{q\bar{z}_2^{q-1}} \right] - \left(\frac{a_1 + b_1}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{a_1 - b_1}{2} \right)^2 - \frac{a_1 - b_1}{2} \left[(a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2) \frac{2}{qz_2^{q-1}} + (a_2 \operatorname{Re} z_2 + ib_2 \operatorname{Im} z_2) \frac{2}{q\bar{z}_2^{q-1}} \right] \\ &+ |a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2|^2 \frac{2^2}{|qz_2^{q-1}|^2} - \left(\frac{a_1 + b_1}{2} \right)^2 \\ &= -a_1 b_1 - \frac{a_1 - b_1}{q} \left[(a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2) \frac{\bar{z}_2^{q-1}}{|z_2|^{2(q-1)}} + (a_2 \operatorname{Re} z_2 + ib_2 \operatorname{Im} z_2) \frac{z_2^{q-1}}{|z_2|^{2(q-1)}} \right] \\ &+ \frac{4}{q^2} \frac{(a_2^2 \operatorname{Re}^2 z_2 + b_2^2 \operatorname{Im}^2 z_2)}{|z_2|^{2(q-1)}} \\ &= \frac{1}{|z_2|^{2(q-1)}} \left\{ -a_1 b_1 |z_2|^{2(q-1)} - \frac{a_1 - b_1}{q} 2 \operatorname{Re} [(a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2) \bar{z}_2^{q-1}] \right. \\ &+ \left. \frac{4}{q^2} (a_2^2 \operatorname{Re}^2 z_2 + b_2^2 \operatorname{Im}^2 z_2) \right\}.\end{aligned}$$

La ecuación anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned}|z_2|^{2(q-1)} |\operatorname{Hess}_z(Q_\Lambda|_{\mathcal{L}})(0, z_2)| &= -a_1 b_1 |z_2|^{2(q-1)} - \frac{a_1 - b_1}{q} 2 \operatorname{Re} [(a_2 \operatorname{Re} z_2 - ib_2 \operatorname{Im} z_2) \bar{z}_2^{q-1}] \\ &+ \frac{4}{q^2} (a_2^2 \operatorname{Re}^2 z_2 + b_2^2 \operatorname{Im}^2 z_2).\end{aligned}$$

Notemos que si la función $Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}$ tiene degeneraciones sobre el eje z_2 , éstas se encuentran en los puntos que satisfacen la ecuación $|\operatorname{Hess}_z(Q_\Lambda|_{\mathcal{L}})(0, z_2)| = 0$. En particular, vamos a evaluar la ecuación anterior en los puntos sobre el eje z_2 tales que $\operatorname{Im} z_2 = 0$.

$$\begin{aligned}0 &= -a_1 b_1 (\operatorname{Re} z_2)^{2(q-1)} - \frac{a_1 - b_1}{q} 2 \operatorname{Re} [(a_2 \operatorname{Re} z_2) (\operatorname{Re} z_2)^{q-1}] + \frac{4}{q^2} (a_2^2 \operatorname{Re}^2 z_2) \\ &= \operatorname{Re}^2 z_2 \left[-a_1 b_1 (\operatorname{Re} z_2)^{2(q-2)} - \frac{2a_2}{q} (a_1 - b_1) (\operatorname{Re} z_2)^{q-2} + \frac{4}{q^2} a_2^2 \right] \\ &= \operatorname{Re}^2 z_2 \left(-a_1 (\operatorname{Re} z_2)^{q-2} + \frac{2a_2}{q} \right) \left(b_1 (\operatorname{Re} z_2)^{q-2} + \frac{2a_2}{q} \right).\end{aligned}$$

Es decir, la ecuación $|\text{Hess}_z(Q_\Lambda|_{\mathcal{L}})(0, z_2)| = 0$ se ve como

$$\text{Re}^2 z_2 \left(-a_1(\text{Re } z_2)^{q-2} + \frac{2a_2}{q} \right) \left(b_1(\text{Re } z_2)^{q-2} + \frac{2a_2}{q} \right) = 0. \quad (6.12)$$

Si q es par, la ecuación (6.12) nos da las soluciones a la igualdad $\text{Re } z_2 = \pm \sqrt[q-2]{\frac{2a_2}{qa_1}}$; si q es impar, las soluciones son $\text{Re } z_2 = \sqrt[q-2]{\frac{2a_2}{qa_1}}$ y $\text{Re } z_2 = \sqrt[q-2]{-\frac{2a_2}{qb_1}}$.

Lo que hemos demostrado es que para cualesquiera valores $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}^+$ la función $Q_\Lambda|_{\mathcal{L}}$ tiene puntos de degeneración sobre el eje z_2 , en particular existen puntos de degeneración sobre el eje real $x_2 := \text{Re } z_2$.

Proposición 6.2.2. *Sea $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^q$ y \mathcal{F} la foliación asociada a f . La variedad polar relativa a \mathcal{F} y Q_Λ tiene degeneraciones sobre el eje z_2 para cualesquiera coeficientes reales positivos a_1, b_1, a_2, b_2 . Es decir, sin importar los valores que tengan los coeficientes de Q_Λ , no es posible eliminar las degeneraciones de los contactos entre \mathcal{F} y Q .*

Notemos que en el caso de la foliación definida por $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^2$, usando la función Q_Λ , pudimos remover las degeneraciones de la variedad polar para un conjunto muy grande de coeficientes, sin embargo, en el caso $f(\mathbf{z}) = z_1^2 + z_2^q$ no fue posible eliminar las degeneraciones. Esto se debe a que las degeneraciones en este caso corresponden a una bifurcación del conjunto de puntos en M , de hecho, recordemos que los puntos de degeneración corresponden a puntos de intersección de dos componentes de la variedad polar (los cuales generan un cambio en el tipo de índices de Morse sobre el eje z_2).

Bibliografía

- [1] Aldo Andreotti and Theodore Frankel. The Lefschetz theorem on hyperplane sections. *Ann. of Math. (2)*, 69:713–717, 1959.
- [2] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, and A.Ñ. Varchenko. *Singularities of differentiable maps. Vol. I*, volume 82 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. The classification of critical points, caustics and wave fronts, Translated from the Russian by Ian Porteous and Mark Reynolds.
- [3] M.Salah Baouendi, Peter Ebenfelt, and Linda Preiss Rothschild. *Real submanifolds in complex space and their mappings*. Princeton Mathematical Series. Princeton, NJ: Princeton University Press. xii, 404 p., 1999.
- [4] Jean-Paul Brasselet, José Seade, and Tatsuo Suwa. *Vector fields on singular varieties*, volume 1987 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [5] Dan Burghelea and Andrei Verona. Local homological properties of analytic sets. *Manuscripta Math.*, 7:55–66, 1972.
- [6] Keith Burns and Marian Gidea. *Differential geometry and topology*. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005. With a view to dynamical systems.
- [7] César Camacho, Nicolaas H. Kuiper, and Jacob Palis. The topology of holomorphic flows with singularity. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (48):5–38, 1978.
- [8] César Camacho and Alcides Lins Neto. *Geometric theory of foliations*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman.
- [9] Alberto Candel and Lawrence Conlon. *Foliations. I*, volume 23 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [10] David Eisenbud and Harold I. Levine. An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ. *Ann. Math. (2)*, 106(1):19–44, 1977. With an appendix by Bernard Teissier, “Sur une inégalité à la Minkowski pour les multiplicités”.
- [11] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, and Lawrence E. Spence. *Linear algebra*. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, third edition, 1997.

- [12] Klaus Fritzsche and Hans Grauert. *From holomorphic functions to complex manifolds*, volume 213 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [13] X. Gómez-Mont, J. Seade, and A. Verjovsky. On the topology of a holomorphic vector field in a neighborhood of an isolated singularity. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 27(2):22–31, 96, 1993.
- [14] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Topología diferencial*, volume 20 of *Aportaciones Matemáticas: Textos [Mathematical Contributions: Texts]*. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2003. Translated from the 1974 English original by Oscar A. Palmas Velasco.
- [15] A. Haefliger. Deformations of transversely holomorphic flows on spheres and deformations of Hopf manifolds. *Compositio Math.*, 55(2):241–251, 1985.
- [16] Helmut A. Hamm and Le Dũng Tráng. Un théorème de Zariski du type de Lefschetz. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 6:317–355, 1973.
- [17] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.
- [18] T. Ito, B. Scardua, and Y. Yamagishi. Transversality of complex linear distributions with spheres, contact forms and Morse type foliations. *J. Geom. Phys.*, 60(10):1370–1380, 2010.
- [19] Toshikazu Ito and Bruno Scardua. A non-existence theorem for Morse type holomorphic foliations of codimension one transverse to spheres. *Int. J. Math.*, 21(4):435–452, 2010.
- [20] Santiago López de Medrano. The space of Siegel leaves of a holomorphic vector field. In *Holomorphic dynamics (Mexico, 1986)*, volume 1345 of *Lecture Notes in Math.*, pages 233–245. Springer, Berlin, 1988.
- [21] Santiago López de Medrano and Alberto Verjovsky. A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 28(2):253–269, 1997.
- [22] Ib Madsen and Jørgen Tornehave. *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [23] B. Malgrange. Frobenius avec singularités. I. Codimension un. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (46):163–173, 1976.
- [24] David B. Massey and Dũng Tráng Le. Notes on real and complex analytic and semianalytic singularities. In *Singularities in geometry and topology*, pages 81–126. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.

- [25] Yukio Matsumoto. *An introduction to Morse theory*, volume 208 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Translated from the 1997 Japanese original by Kiki Hudson and Masahico Saito, Iwanami Series in Modern Mathematics.
- [26] Laurent Meersseman. A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension. *Math. Ann.*, 317(1):79–115, 2000.
- [27] Laurent Meersseman and Alberto Verjovsky. Sur les variétés LV-M. In *Singularities II*, volume 475 of *Contemp. Math.*, pages 111–134. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [28] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [29] John Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Notes by L. Siebenmann and J. Sondow. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.
- [30] John Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.
- [31] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original.
- [32] David Mumford. *Algebraic Geometry. I: Complex projective varieties. Reprint of the corr. 2nd print. 1976*. Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag. x, 186 p. , 1995.
- [33] Raghavan Narasimhan. *Introduction to the theory of analytic spaces*. Lecture Notes in Mathematics, No. 25. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [34] José Seade. Open book decompositions associated to holomorphic vector fields. *Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser.*, 3(2):323–336, 1997.
- [35] José Seade. *On the topology of isolated singularities in analytic spaces*, volume 241 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [36] Karen E. Smith, Lauri Kahanpää, Pekka Kekäläinen, and William Traves. *An invitation to algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [37] Tatsuo Suwa. *Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations*. Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics]. Hermann, Paris, 1998.
- [38] Itiro Tamura. *Topology of foliations: an introduction*, volume 97 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. Translated from the 1976 Japanese edition and with an afterword by Kiki Hudson, With a foreword by Takashi Tsuboi.

- [39] B. Teissier. Variétés polaires. *Inventiones Math.*, (40):267–292, 1977.
- [40] René Thom. Généralisation de la théorie de Morse aux variétés feuilletées. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 14(fasc. 1):173–189, 1964.
- [41] Hassler Whitney. Tangents to an analytic variety. *Ann. of Math. (2)*, 81:496–549, 1965.

Índice alfabético

- α -límite, 45
- Cambio de base x, y a z, \bar{z}
sobre \mathbb{C} , 28
- Conjunto algebraico
irreducible, 5
- Contacto
degenerado, 25
no degenerado, 25
- Contacto analítico, 43
- Dimensión
de un conjunto analítico, 7
en un punto, 7
- Espacio tangente $T_z\mathcal{L}_z$
generadores, 60
- \mathcal{F} es compatible con la estructura de Morse
de g , 25
- \mathcal{F} preserva la estructura de Morse de g ,
25
- Fórmulas de cambio de coordenadas, 26
- Foliación
 C^r , 10
con singularidades aisladas, 10
de tipo Morse, 14
- Función de morse, 3
- Germen
de funciones, 6
de un espacio, 6
- Índice de Morse, 2
- Índice de Morse
relativo a \mathcal{F} , 25, 89
- Índice de Poincaré-Hopf, 9
- Lema de estructura cónica, 8
- Lema de Morse, 2
- Matrices congruentes, 27
- Polinomio de Fermat en n -variables, 74
- Principio del máximo, 4
- Punto crítico, 1
- Punto crítico
no degenerado, 2
- Punto regular, 7
- Punto singular, 7
- Punto suave de dimensión k , 7
- Subconjunto analítico, 5
irreducible, 5
- Teorema
de Malgrange, 59
descomposición en n -celdas, 2
función implícita sobre \mathbb{C} , 4
Poincaré-Hopf, 9
- Variedad de contacto
Foliaciones 1-dimensionales, 14
- Variedad polar relativa a \mathcal{F} y g , 19, 23
ecuaciones, 62