Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Introducción a Forcing y Algunas de sus Aplicaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

LUIS JESUS TURCIO CUEVAS

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO

México DF 2011

Índice general

Agradecimientos

Me parece injusto que en este trabajo sólo aparezca mi nombre cuando en realidad es el fruto del esfuerzo de muchas personas. Para empezar, mis padres que lo han dado todo por apoyarme a lo largo de mi vida. Mis hermanos, Marcos y Quetzalli, así como a Arturo y Leo por acompañarme en los buenos y los malos momentos. Mis maestros, en especial Rafa y José Alfredo que me mostraron la increíble belleza de aquel arte que la gente llama “la teoría de conjuntos”. Mis amigos, en especial Osvaldo, Manuel Zorrilla, Manuel Lara, Mao,... con quienes tuve la suerte de aprender tantas cosas y a mis amigos del pulpo de quienes aprendí el juego de Go y con quienes lo sigo jugando y con quienes he conocido tantas partes de nuestro país.

Vive como si fueras a morir mañana, aprende como si fueras a vivir para siempre
Gandhi

Introducción

La técnica de forcing fue inventada por Paul Cohen en 1963 para probar la independencia de la hipótesis del continuo de los axiomas de Zermelo–Fraenkel con elección. La idea de esta técnica es semejante, pero más elaborada, a la construcción de $\mathbb{C}$. En la construcción de $\mathbb{C}$ empezamos con un modelo de los axiomas de campo, $\mathbb{R}$ y consideramos un nuevo número i que cumple $i^2 = -1$ y cerramos a $\mathbb{R} \cup \{i\}$ bajo las operaciones algebraicas de tal forma que obtenemos otro modelo de los axiomas de campo, $\mathbb{C}$, donde todos los polinomios tienen raíces. En el caso de forcing haremos algo muy parecido: empezaremos con un modelo de ZFC (al que llamaremos modelo base), añadiremos un nuevo conjunto (es decir, un conjunto que no esta en el modelo base) y lo cerraremos bajo las operaciones conjuntistas para obtener un nuevo modelo de ZFC (que será llamado extensión genérica).

Los objetivos de este trabajo son, mostrar cómo a partir de un modelo de ZFC y un conjunto nuevo, construir otro modelo de ZFC; y hacer ver un poco del gran potencial de esta técnica, haciendo algunos ejemplos sencillos de pruebas de consistencia relativa.

Pero ese no es todo el potencial que tiene forcing, pues ha tenido modificaciones bastante interesantes. Una de ellas será vista muy brevemente es éste trabajo, el producto de forcings, que es como una forma débil de iterar forcing. Otra variante es hacer forcing con una clase propia (nosotros veremos como hacer forcing a partir de un orden parcial, que es un conjunto). También, en el camino del modelo base al modelo genérico es posible que se pierdan propiedades "buenas" y tratar de preservarlas dio origen al proper forcing.
En fin, desde su nacimiento forcing se ha ido haciendo más importante, no sólo en teoría de conjuntos sino en otras áreas como álgebra o topología. Al ver su rápido crecimiento cabe preguntarse si forcing puede resolver todos los problemas de la matemática clásica.

Para desarrollar la técnica de forcing lo haremos con una generalización del concepto de modelo llamado modelos booleano-valuados, que (a mi parecer) es la forma más intuitiva de construir el nuevo modelo de ZFC. También a lo largo de todo el trabajo haremos uso de un abuso de notación, ya que hablar de la existencia del "conjunto nuevo" del que habíamos hablado arriba no es algo fácil y veremos que si el modelo base es numerable entonces sí podemos asegurar la existencia de este conjunto. En cambio, usaremos como modelo base al universo V, pues al tomar un modelo numerable de ZFC y trabajar dentro de él las cosas se verían igual que si estuviéramos en V, pues al ser modelo de ZFC él cree que es el universo V. Con esto no hay problemas en suponer que estamos en V y aún así dar un conjunto nuevo.

Debido a que el enfoque que le daremos al forcing es con modelos booleano-valuados, el primer capítulo estará destinado a ver los resultados que necesitamos de álgebras de Boole.

En el segundo capítulo nos encargaremos de dar las nociones básicas del forcing y ver como es posible trasladarlas a álgebras de Boole. Luego será necesario generalizar el concepto de estructura para definir lo que es una estructura booleano-valuada y cómo pasar de una de estas estructuras a una estructura bivaluada. Una vez hecho esto construiremos una estructura booleano-valuada que sea modelo de ZFC y diremos qué es la relación de forcing, para que a través de esta relación podamos dar un modelo bivaluado de ZFC que cumpla lo que queremos.

En el tercer capítulo veremos un poco del potencial de la técnica de forcing haciendo algunas pruebas de consistencia relativa. Aquí no sólo veremos que una elección adecuada de un conjunto nuevo (a partir de un orden parcial) genera modelos de enunciados como la hipótesis del continuo, o su negación, o el axioma diamante, entre otros. Además veremos como hacer un cambio en la construcción de la extensión genérica para obtener un modelo de la negación del axioma de elección.

Finalmente haremos notar el parecido entre el forcing y los ultraproductos (específicamente con el teorema de Łoś, uno de los resultados más importantes para los ultraproductos), mediante el uso de estructuras booleano-valuadas.

Capítulo 1

Álgebras de Boole

Aquí daremos una introducción a las álgebras de Boole, que son una herramienta fundamental para el desarrollo de la técnica de forcing como la veremos en este trabajo.

1.1. Latices

Definición 1.1. Una *latiz* $\langle L, \leq \rangle$ es un conjunto $L \neq \emptyset$ con una relación $\leq$ reflexiva, transitiva y antisimétrica sobre L (es decir $\langle L, \leq \rangle$ es un orden parcial reflexivo) en la cual cada par de elementos $x, y \in L$ tiene ínfimo y supremo, denotados por $x \wedge y$ y $x \vee y$ respectivamente

L abreviará a $\langle L, \leq \rangle$ y diremos que L es una latiz.

Observación 1.2. Sea L una latiz, entonces, todo subconjunto finito de L tiene supremo e ínfimo.

Prueba. Se sigue de la definición y un procedimiento inductivo. $\square$

Definición 1.3. Sea κ un cardinal infinito. Decimos que una latiz L es *κ-completa* si y sólo si para cualquier subconjunto A de L tal que $|A| < \kappa$, A tiene supremo e ínfimo, denotados por $\bigvee A$ y $\bigwedge A$ respectivamente. Diremos que una latiz L es *completa* si y sólo si es κ-completa para todo cardinal κ.

Proposición 1.4. *Sea L una latiz y $x, y, z \in L$, entonces:*

$$x \vee y = y \vee x \qquad x \wedge y = y \wedge x \tag{1.1}$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \tag{1.2}$$

$$(x \vee y) \wedge y = y \qquad (x \wedge y) \vee y = y \tag{1.3}$$

Prueba. Solo se probarán las identidades de la izquierda. Las de la derecha son análogas.

(1.1) $x \leq y \vee x$, $y \leq y \vee x$ y como $x \vee y$ es el supremo de x y y, entonces $x \vee y \leq y \vee x$ y de igual forma $y \vee x \leq x \vee y$.

(1.2) Se sigue de la definición de supremo.

(1.3) $(x \vee y) \wedge y \leq y$ es clara, para la otra desigualdad basta notar que $y \leq (x \vee y)$ y $y \leq y$.

□

Ahora veamos que si una latiz tiene un elemento maximal, entonces es único, es decir, este maximal es máximo y se denota 1 y si tiene mínimo este mínimo se denota 0, es decir:

Lema 1.5. *Si una latiz L tiene un maximal,entonces es único.*

Prueba. Supongamos que x y y son elementos maximales de L, entonces $x \leq x \vee y$ y $y \leq x \vee y$ y por nuestra suposición se tiene que $x = x \vee y$ y $y = x \vee y$, por lo tanto $x = y$ □

Definición 1.6. Sea L una latiz, entonces:

(i) L se llama *complementada* si y sólo si L tiene 1 y 0 y:

$$\text{Para cada } x \in L \text{ hay } y \in L \text{ tal que } x \vee y = 1 \text{ y } x \wedge y = 0 \tag{1.4}$$

(ii) L se llama *distributiva* si y sólo si para cualesquiera $x, y, z \in L$

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \tag{1.5}$$

Proposición 1.7. *Sea L una latiz distributiva, entonces para cualesquiera $x, y, z \in L$, se cumple $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.*

Prueba. Sean $x, y, z \in L$ y supongamos que $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$, así se tiene que:

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [x \wedge (x \vee z)] \vee [y \wedge (x \vee z)] \\
&= x \vee [(y \wedge x) \vee (y \wedge z)] \\
&= [x \vee (y \wedge x)] \vee (y \wedge z) \\
&= x \vee (y \wedge z)
\end{aligned}$$

Esto termina la demostración □

Lema 1.8. *En una latiz L complementada y distributiva todo elemento tiene un único complemento.*

Prueba. Supongamos que y y z son complementos de x en L, entonces:

$$\begin{aligned}
y &= y \wedge 1 & & \\
&= y \wedge (z \vee x) & & z \text{ es complemento de } x \\
&= (y \wedge z) \vee (y \wedge x) & & \text{distributividad} \\
&= (y \wedge z) \vee 0 & & y \text{ es complemento de } x \\
&= (y \wedge z) \vee (x \wedge z) & & z \text{ es complemento de } x \\
&= (y \vee x) \wedge z & & \text{distributicidad} \\
&= z & & y \text{ es complemento de } x
\end{aligned}$$

□

Con esto ya podemos dar una notación al complemento, si $x \in L$, entonces $\neg x$ o x^* denotarán al complemento de x.

Lema 1.9. *Sea L una latiz distributiva y complementada y $x, y \in L$, entonces $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ y $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.*

Prueba. Solo probaremos la primer identidad pues la otra se prueba de forma análoga. Entonces:

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) &= [(x \vee y) \wedge \neg x] \wedge \neg y \\ &= [(x \wedge \neg x) \vee (y \wedge \neg x)] \wedge \neg y \\ &= (y \wedge \neg x) \wedge \neg y = 0\end{aligned}$$

Y $(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = 1$ se prueba de forma análoga, por lo tanto $\neg x \wedge \neg y$ es el complemento de $x \vee y$ y por 1.8 los complementos son únicos, entonces $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ □

1.2. Álgebras de Boole

Definición 1.10. B se llama *álgebra de Boole* si y sólo si B es una latiz distributiva y complementada.

Hemos introducido la noción de álgebra de Boole dando un orden parcial y construyendo gradualmente su estructura. Pero ahora veremos otra forma de definir un álgebra de Boole, que es como una estructura algebraica y es de aquí de donde se toma el nombre de 'álgebra' de Boole.

Definición 1.11. Un *álgebra de Boole* es una estructura $\mathscr{B} = \langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ que satisface las propiedades (1.1)-(1.5).

Para ver que el objeto que se definió en 1.10 y en 1.11 es el mismo lo que debemos hacer por un lado es, por un lado, dada una estructura definir un orden parcial reflexivo que cumpla (1.1)-(1.5) y, por otro lado, definir las operaciones por medio del orden, que es la construcción que ya hicimos. Entonces definamos un orden para la estructura $\mathscr{B}$, diremos que $x \leq y$ si y sólo si $x \wedge y = x$. Es fácil ver que un orden definido así hace que B sea una latiz complementada y distributiva donde el ínfimo, supremo y complemento coinciden con las operaciones algebraicas con las que habíamos empezado.

Ahora veamos otra forma de definir un orden equivalente a la nuestra.

Proposición 1.12. *Sea B un álgebra de Boole y $x, y \in B$, entonces $x \leq y$ si y sólo si $x \wedge \neg y = 0$.*

Prueba.

($\Rightarrow$) Como $x \leq y$ entonces $x = x \wedge y$ y así tenemos que $x \wedge \neg y = (x \wedge y) \wedge \neg y = 0$

($\Leftarrow$) $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \neg y) = y \vee x \geq x$.

□

Observación 1.13. Sea B un álgebra de Boole y $x, y \in B$, entonces $x \leq y$ si y sólo si $\neg x \vee y = 1$.

Ahora definiremos una operación en un álgebra de Boole ya que nos abreviará la escritura.

Definición 1.14. Sean B un álgebra de Boole y $x, y \in B$, definimos $(x \Rightarrow y)$ (*la implicación de x con y*) como $\neg x \vee y$.

Otra forma de describir esta operación es diciendo que el elemento $(x \Rightarrow y)$ es el más grande que al hacer ínfimo con x es menor o igual que y, como lo afirma el siguiente lema.

Lema 1.15. *Sean $x, y, z \in B$, entonces:*

$$z \leq (x \Rightarrow y) \quad \textit{si y sólo si} \quad z \wedge x \leq y \tag{1.6}$$

Prueba. $(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} z \leq (x \Rightarrow y) &\Longleftrightarrow z \leq \neg x \vee y \\ &\Longrightarrow z \wedge x \leq (\neg x \vee y) \wedge x \\ &\Longrightarrow z \wedge x \leq x \wedge y \\ &\Longrightarrow z \wedge x \leq y \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned} z \wedge x \leq y &\Longrightarrow (z \wedge x) \vee \neg x \leq \neg x \vee y \\ &\Longrightarrow z \vee \neg x \leq (x \Rightarrow y) \\ &\Longrightarrow z \leq (x \Rightarrow y) \end{aligned}$$

□

Proposición 1.16. *Sean B un álgebra de Boole y $x, y, z \in B$, entonces:*

(i) Si $x \leq y$, entonces $\neg y \leq \neg x$.

(ii) Si $x \leq y$, entonces $(z \Rightarrow x) \leq (z \Rightarrow y)$.

(iii) Si $x \leq y$, entonces $(y \Rightarrow z) \leq (x \Rightarrow z)$.

(iv) $(x \Rightarrow y) = 1$ si y sólo si $x \leq y$.

Prueba. (i) Se sigue de 1.12

(ii) Sea $a \in B$, entonces $a \leq (z \Rightarrow x)$ si y sólo si $a \wedge z \leq x \leq y$, por lo que $a \leq (z \Rightarrow y)$.

(iii) Sea $a \in B$, entonces $a \leq (y \Rightarrow z)$ si y sólo si $a \wedge y \leq z$, así $a \wedge x \leq z$, por lo tanto $a \leq (x \Rightarrow z)$.

(iv) Se sigue de la observación 1.13

□

1.3. Filtros y Ultrafiltros

Definición 1.17. Un *filtro* sobre una latiz L, es un subconjunto F de L, propio y no vacío que satisface:

(a) para todo $x, y \in F$, $x \wedge y \in F$

(b) para todo $x \in F$ y $y \in L$, si $x \leq y$ entonces $y \in F$

Un *ideal* en una latiz L es un subconjunto I de L, propio y no vacío que satisface:

(a) para todo $x, y \in I$, $x \vee y \in I$

(b) para todo $x \in I$ y $y \in L$, si $y \leq x$ entonces $y \in I$

Si $x \in L$, el conjunto $\{y \in L | x \leq y\}$ es un filtro llamado el filtro principal generado por x, y $\{y \in L | y \leq x\}$ es un ideal llamado el ideal principal generado por x.

Si L es una latiz complementada y F es un filtro sobre L, entonces $\{x \in L | \neg x \in F\}$ es un ideal. Y si I es un ideal, $\{x \in L | \neg x \in I\}$ es un filtro.

Definición 1.18. Un subconjunto A de un álgebra de Boole tiene la *propiedad de la intersección finita* (pif) si y sólo si el ínfimo de cualquier subconjunto finito de A no es 0.

Observación 1.19. Si A tiene la pif, entonces para cualquier elemento x del álgebra de Boole, $A \cup \{x\}$ o $A \cup \{\neg x\}$ tiene la pif.

Prueba. Para esto primero veamos que $(\bigwedge X) \wedge (\bigwedge Y) = \bigwedge (X \cup Y)$. Una desigualdad es porque $\bigwedge (X \cup Y) \leq \bigwedge X$ y $\bigwedge (X \cup Y) \leq \bigwedge Y$, y la otra se da porque $\forall x \in X \cup Y ((\bigwedge X) \wedge (\bigwedge Y) \leq x)$. Ahora supongamos que $A \cup \{x\}$ y $A \cup \{\neg x\}$ no tienen la pif, así hay $b, c \subseteq A$ finitos tales que $\bigwedge (b \cup \{x\}) = 0$ y $\bigwedge (c \cup \{\neg x\}) = 0$, entonces por lo que acabamos de ver, se tiene que $(\bigwedge b) \wedge x = 0$ y $(\bigwedge c) \wedge \neg x = 0$ y como los complementos son únicos, entonces $\bigwedge b = \neg x$ y $\bigwedge c = x$, así tenemos que $b \cup c \subseteq A$ es finito y $\bigwedge (b \cup c) = (\bigwedge b) \wedge (\bigwedge c) = x \wedge \neg x = 0$ que es una contradicción. $\square$

Observación 1.20. Si F es un filtro, entonces F tiene la pif.

Prueba. Es fácil probar por inducción que para cualquier subconjunto finito de F su ínfimo esta en F, y con esto tenemos que el ínfimo de cualquier subconjunto finito de F no es 0. $\square$

Definición 1.21. Sea A un subconjunto de un álgebra de Boole B. Entonces definimos:

(i) $A^0 = \{x \in B | \text{para alguna } a \in A,\ a \leq x\}$

(ii) $A^c = \{\bigwedge X | X \in \mathscr{P}_\omega(A)\}$, donde $\mathscr{P}_\kappa(A) = \{x \in \mathscr{P}(A) : |x| < \kappa\}$.

Notemos que $A \subseteq A^c \subseteq (A^c)^0$.

Lema 1.22. *Para cualquier subconjunto A de un álgebra de Boole, $(A^c)^0$ es un filtro si y sólo si A tiene la pif.*

Prueba. ($\Leftarrow$) Notemos primero que $x \in (A^c)^0$ si y sólo si para algún $X \in \mathscr{P}_\omega(A)$, $\bigwedge X \leq x$. Ahora supongamos que $x, y \in (A^c)^0$ así hay $X, Y \in \mathscr{P}_\omega(A)$ tales que $\bigwedge X \leq x$ y $\bigwedge Y \leq y$, además $X \cup Y \in \mathscr{P}_\omega(A)$ y sabemos que $\bigwedge (X \cup Y) = (\bigwedge X) \wedge (\bigwedge Y) \leq x \wedge y$, por lo tanto $x \wedge y \in (A^c)^0$. Es fácil ver que si $x \in (A^c)^0$ y $x \leq y$ entonces $y \in (A^c)^0$ y como A tiene la pif no hay $X \in S_\omega(A)$ tal que $\bigwedge X = 0$, es decir, $0 \notin (A^c)^0$. Con esto tenemos que $(A^c)^0$ es un filtro.

($\Rightarrow$) Supongamos que $(A^c)^0$ es un filtro y como $A \subseteq (A^c)^0$, entonces todo subconjunto finito de A es un subconjunto finito del filtro $(A^c)^0$ y por 1.20 el ínfimo de este subconjunto es distinto de 0, por lo que A tiene la pif

$\square$

Lema 1.23. *Sea A un subconjunto de un álgebra de Boole tal que A tiene la pif, entonces $(A^c)^0$ es el filtro más chico que contiene a A.*

Prueba. Supongamos que F es un filtro tal que $A \subseteq F$, entonces sea $x \in (A^c)^0$, así hay $X \in S_\omega(A)$ tal que $\bigwedge X \leq x$ y además para este X se tiene que $\bigwedge X \in F$ y usando que F es filtro tenemos que $x \in F$ lo cual termina la prueba □

Los filtros se definieron como subconjuntos de un álgebra de Boole que cumplen ciertas propiedades, y como tales pueden ser parcialmente ordenados por $\subseteq$, con esta idea pasamos a una definición que será muy importante en los siguientes capítulos, y como veremos pueden ser caracterizados por otra condición.

Definición 1.24. Un *ultrafiltro* es un filtro maximal con respecto a la contención.

Lema 1.25. *Si F es un filtro en un álgebra de Boole B, entonces F es un ultrafiltro si y sólo si para cada $x \in B$ se tiene que $x \in F$ o $\neg x \in F$ pero no los dos.*

Prueba. ($\Leftarrow$) Supongamos que hay un filtro G tal que $F \subsetneq G$, entonces hay $x \in G \setminus F$ y por nuestra suposición se tiene que $\neg x \in F$ y así $x, \neg x \in G$ que es una contradicción.

($\Rightarrow$) Es claro que x y $\neg x$ no pueden estar ambos en F, ya que si estuvieran tendríamos que $0 = x \wedge \neg x \in F$ obteniendo una contradicción. Sea F un filtro que cumple que hay $x \in B$ tal que $x, \neg x \notin F$ y sea $G = F \cup \{x\}$ y así G tiene la pif ya que si $y \in F$ entonces $x \wedge y \neq 0$ (de otra forma tendríamos que $y \leq \neg x$ y así que $\neg x \in F$ que no es posible), entonces si $A \subseteq G$ es finito, entonces $B = A \setminus \{x\}$ es un subconjunto finito de F por lo tanto $\bigwedge B \in F$ y así $\bigwedge A = (\bigwedge B) \wedge x$ que como habíamos visto no puede ser 0. Entonces por 1.22 hay un filtro F' tal que $G \subseteq F'$ y además $x \in F' \setminus F$ por lo que F no es ultrafiltro

□

Ahora haremos uso del Axioma de Elección para establecer la existencia de una familia bastante rica de ultrafiltros en un álgebra de Boole arbitraria.

Teorema 1.26 (Teorema del ultrafiltro)**.** *Todo filtro en un álgebra de Boole puede ser extendido a un ultrafiltro.*

Prueba. Sea F un filtro sobre un álgebra de Boole B. Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de todos los filtros sobre B que contienen a F, y notamos que $\mathscr{F} \neq \emptyset$ pues $F \in \mathscr{F}$ y ordenamos parcialmente a $\mathscr{F}$ con la inclusión, ahora veamos que toda cadena en $\mathscr{F}$ esta acotada superiormente.

Sea $\mathscr{D} = \{D_i | i \in I\}$ una cadena en $\mathscr{F}$, y sea $D = \bigcup_{i \in I} D_i$. Entonces, sean $x, y \in D$ así hay $i, j \in I$ tales que $x \in D_i$ y $y \in D_j$, y como $\mathscr{D}$ es una cadena supongamos que $D_j \subseteq D_i$, así $x, y \in D_i$, y como D_i es un filtro entonces $x \wedge y \in D_i \subseteq D$, si $z \in B$ es tal que $x \leq z$ entonces $z \in D_i \subseteq D$ y como $0 \notin D_i$ para toda $i \in I$, entonces $0 \notin D$. Así hemos probado que D es un filtro y como $F \subseteq D$ entonces $D \in \mathscr{F}$, por lo tanto D es una cota superior de $\mathscr{D}$ en $\mathscr{F}$. Entonces por el lema de Zorn $\mathscr{F}$ tiene elemento maximal, digamos G. Así G es un ultrafiltro que extiende a F. □

Corolario 1.27. *Cada subconjunto de un álgebra de Boole que tiene la pif puede ser extendido a un ultrafiltro.*

Prueba. Es inmediato de 1.22 y 1.26 □

Corolario 1.28. *Cada elemento no 0 de un álgebra de Boole está en un ultrafiltro.*

Prueba. Sea $x \in B$ con $x \neq 0$ y sea $F = \{y \in B | x \leq y\}$, veamos que F es un filtro. Como $x \neq 0$ entonces $0 \notin F$, si $y, z \in F$ entonces $x \leq y$ y $x \leq z$, por lo tanto $x \leq y \wedge z$ y así $y \wedge z \in F$ y por último si $y \in F$ y $y \leq z$ entonces $x \leq y \leq z$ y entonces $z \in F$.

Ahora como ya tenemos que F es un filtro y es claro que $x \in F$, por el teorema del ultrafiltro F se puede extender a un ultrafiltro U y así $x \in U$ □

Corolario 1.29. *Sea B un álgebra de Boole, si $x, y \in B$ $(x \neq y)$, entonces hay un ultrafiltro que tiene a uno de estos elementos y no al otro.*

Prueba. Si $x \neq y$ entonces no es cierto que $x \leq y$ o no es cierto que $y \leq x$. Supongamos que no es cierto que $x \leq y$, así $x \wedge \neg y \neq 0$ por lo tanto $\{x, \neg y\}$ tiene la pif y por 1.27 puede ser extendido a un ultrafiltro F que tiene a x y no tiene a y pues $\neg y \in F$ □

1.4. Homomorfismos de álgebras

Definición 1.30. Sea B un álgebra de Boole, una *subálgebra* de B es un subconjunto no vacío que es cerrado bajo supremos, ínfimos y complementos de B.

Dado que una subálgebra es cerrada bajo supremos e ínfimos un argumento sencillo nos da el siguiente resultado

Observación 1.31. (i) Si B' es una subálgebra de B, entonces $0, 1 \in B'$.

(ii) Si B es un álgebra de Boole, entonces $\{0, 1\}$ es una subálgebra de B.

Ahora entonces veamos el concepto principal de esta sección

Definición 1.32. Sean B_1, B_2 álgebras de Boole y una función $h : B_1 \to B_2$

(i) h se llama *homomorfismo* si y sólo si preserva la estructura algebraica, es decir:

  (a) $h(0_{B_1}) = 0_{B_2}$ y $h(1_{B_1}) = 1_{B_2}$.

  (b) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$.

  (c) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$.

  (d) $h(\neg x) = \neg h(x)$.

(ii) h se llama *monomorfismo* si y sólo si h es un homomorfismo inyectivo.

(iii) h se llama *epimorfismo* si y sólo si h es un homomorfismo suprayectivo.

(iv) h se llama *isomorfismo* si y sólo si h es un homomorfismo biyectivo.

Observación 1.33. Si $h : B_1 \to B_2$ es un homomorfismo, entonces $h[B_1]$ es una subálgebra de B_2

Proposición 1.34. *Si $h : B_1 \to B_2$ es un monomorfismo entonces, $x \leq y$ si y sólo si $h(x) \leq h(y)$.*

Prueba.

$$\begin{aligned} x \leq_{B_1} y &\iff x \wedge y = x \\ &\iff h(x \wedge y) = h(x) && \text{aquí se usa que } h \text{ es monomorfismo} \\ &\iff h(x) \wedge h(y) = h(x) \\ &\iff h(x) \leq_{B_2} h(y). \end{aligned}$$

□

Ahora veamos que si B es un álgebra de Boole completa y $\{a\} \cup \{b_i | i \in I\} \subseteq B$ entonces $a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i)$. Pero para esto veamos algunas nociones y resultados previos.

Definición 1.35. Sean $f \colon B_1 \to B_2$ y $g \colon B_2 \to B_1$ homomorfismos, decimos que f es *adjunto derecho* de g, o que g es *adjunto izquierdo* de f ($g \dashv f$) si y sólo si se cumple:

$$f(b_1) \leq b_2 \text{ si y sólo si } b_1 \leq g(b_2) \tag{1.7}$$

Lema 1.36. *Sean B_1 y B_2 álgebras de Boole y $f \colon B_1 \to B_2$ un homomorfismo, si f tiene adjunto izquierdo, entonces es único.*

Prueba. Supongamos que $g, g' \colon B_2 \to B_1$ son adjuntos izquierdos de f, entonces

$$\begin{aligned} b_1 \leq g(b_2) &\iff f(b_1) \leq b_2 \\ &\iff b_1 \leq g'(b_2). \end{aligned}$$

□

Lema 1.37. *Sean B_1, B_2 álgebras de Boole completas y $f : B_1 \to B_2$ un homomorfismo, si f tiene adjunto izquierdo entonces f preserva supremos.*

Prueba. Sea $g : B_2 \to B_1$ adjunto izquierdo de f y sean $\{b_i | i \in I\} \subseteq B_1$ y $a \in B_2$, entonces:

$$\begin{aligned} f\Big(\bigvee_{i \in I} b_i\Big) \leq a &\iff \bigvee_{i \in I} b_i \leq g(a) && \text{pues } f \dashv g \\ &\iff \forall i \in I (b_i \leq g(a)) && \text{definición de supremo} \\ &\iff \forall i \in I (f(b_i) \leq a) && f \dashv g \\ &\iff \bigvee_{i \in I} f(b_i) \leq a && \text{definición de supremo} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(\bigvee_{i \in I} b_i) = \bigvee_{i \in I} f(b_i)$. □

Teorema 1.38. *Sea B un álgebra de Boole completa y $c \in B$, entonces la función $c \wedge \_ : B \to B$ tal que $a \mapsto c \wedge a$ tiene adjunto izquierdo.*

Prueba. El adjunto izquierdo de $c \wedge \_$ es la función $c \Rightarrow \_$, pues por (1.6), esta última se definió justo como adjunto izquierdo de $c \wedge \_$. □

Con esto la distributividad es un corolario fácil de lo anterior.

Corolario 1.39. *Si B es un álgebra de Boole completa y $\{a\} \cup \{b_i | i \in I\} \subseteq B$ entonces*

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i) \tag{1.8}$$

Corolario 1.40. *Si B es un álgebra de Boole completa y $\{a\} \cup \{b_i | i \in I\} \subseteq B$ entonces*

$$a \vee \bigwedge_{i \in I} b_i = \bigwedge_{i \in I} (a \vee b_i) \tag{1.9}$$

Prueba. Como $\{a\} \cup \{b_i | i \in I\} \subseteq B$, entonces $\{\neg a\} \cup \{\neg b_i | i \in I\} \subseteq B$ y así por (1.8) se tiene que

$$\neg a \wedge \bigvee_{i \in I} \neg b_i = \bigvee_{i \in I} (\neg a \wedge \neg b_i)$$

de donde se tiene que

$$\begin{array}{rrcl} & \neg \left(\neg a \wedge \bigvee_{i \in I} \neg b_i \right) & = & \neg \left(\bigvee_{i \in I} (\neg a \wedge \neg b_i) \right) \\ \therefore & a \vee \neg \bigvee_{i \in I} \neg b_i & = & \bigwedge_{i \in I} \neg(\neg a \wedge \neg b_i) \\ \therefore & a \vee \bigwedge_{i \in I} b_i & = & \bigwedge_{i \in I} (a \vee b_i) \end{array}$$

□

Hay que notar que en esta prueba se usa una generalización de 1.9 la cual es muy fácil de probar usando las propiedades de supremos (e ínfimos) y el inciso (i) de 1.16.

Capítulo 2

Forcing

2.1. Forcing y Conjuntos Genéricos

Definición 2.1. Un *orden parcial con máximo* es una tripleta $\langle P, \leq, 1 \rangle$ donde $\leq$ es una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica sobre P y el 1 es el $\leq$-máximo de P.

Nota: P abreviará a $\langle P, \leq, 1 \rangle$ y diremos que P es una noción de forcing o sólo forcing, y a sus elementos los llamaremos condiciones de forcing.

Definición 2.2. G es un *filtro* sobre P si y sólo si $G \subseteq P$, $G \neq \emptyset$ y además:

(i) $\forall p, q \in G \exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$ y

(ii) $\forall p \in G \forall q \in P(p \leq q \rightarrow q \in G)$.

Definición 2.3. Sea P una noción de forcing.

(i) Una *cadena* en P es un conjunto $C \subseteq P$ tal que $\forall p, q \in C(p \leq q \vee q \leq p)$.

(ii) p y q son *compatibles* en P ($p \| q$) si y sólo si tienen una extensión común, es decir, $\exists r \in P(r \leq p \wedge r \leq q)$. En caso contrario diremos que p y q son *incompatibles* ($p \perp q$).

(iii) Una *anticadena* en P es un conjunto $A \subseteq P$ tal que $\forall p, q \in A(p \neq q \rightarrow p \perp q)$.

(iv) D es *denso* en P si y sólo si $D \subseteq P$ y $\forall p \in P \exists q \in D(q \leq p)$.

(v) Si $E \subseteq P$ y $p \in P$, entonces E es *denso bajo* p si y sólo si $\forall q \leq p \exists r \in E(r \leq q)$.

Observación 2.4. Si $A \subseteq P$ es una anticadena, entonces A es maximal (con respecto a $\subseteq$) si y sólo si para todo $b \in P$ hay $a \in A$ tal que $a \| b$.

Prueba. Ambas implicaciones las haremos por contrapuesta.

($\Rightarrow$) Supongamos que hay $b \in P$ tal que para $a \perp b$ para todo $a \in A$ (con esto es claro que $b \notin A$), así $A \cup \{b\}$ es una anticadena, por lo que A no es maximal.

($\Leftarrow$) Supongamos que A no es maximal, es decir, que hay una anticadena B tal que $A \subsetneq B$. Sea $b \in B \setminus A$, como B es anticadena se tiene que para todo $c \in B$ si $c \neq b$ entonces $b \perp c$, por lo que $b \perp a$ para toda $a \in A$.

$\square$

Definición 2.5. Sea $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos de P. $G \subseteq P$ es *$\mathcal{D}$-genérico* si y sólo si para todo $D \in \mathcal{D}$ tal que D es denso se tiene que $G \cap D \neq \emptyset$. También decimos que $G \subseteq P$ es *genérico* si y sólo si para todo $D \subseteq P$ denso, $G \cap D \neq \emptyset$.

Una observación a esta última definición es que en este trabajo la familia $\mathcal{D}$ de densos será la familia que tiene a todos los subconjuntos densos del orden parcial, por lo que diremos que G es un genérico a secas y entenderemos por genérico un filtro genérico, pues estos son los únicos conjuntos genéricos que nos interesan.

Además es posible hablar de genericidad en términos de anticadenas.

Lema 2.6. *Sea $G \subseteq P$ un filtro. G es genérico si y sólo si para toda A anticadena maximal, $G \cap A \neq \emptyset$.*

Prueba.

($\Rightarrow$) Sea A una anticadena maximal y consideramos el conjunto $D_A = \{x \in P | \exists a \in A(x \leq a)\}$, entonces afirmamos que D_A es denso. Para esto sea $p \in P$, entonces como A es maximal hay $a \in A$ tal que $p \| a$ y entonces hay $r \leq p, a$ con lo cual $r \in D_A$ y así tenemos que D_A es denso, por lo tanto hay $q \in G \cap D_A$ y como $q \in D_A$ hay $a \in A$ tal que $q \leq a$ y así $a \in G \cap A$.

($\Leftarrow$) Sea $D \subseteq P$ denso. Usando AE sea $A \subseteq D$ una anticadena maximal en D. Primero veamos que esta anticadena es una anticadena maximal en P. Para esto sea $p \in P$, como D es denso hay $d \in D$ tal que $d \leq p$ y como A es anticadena maximal en D entonces hay $a \in A$ tal que $d \| a$, es decir, $p \| a$ por lo que A es una anticadena maximal en P. Por lo tanto $\emptyset \neq G \cap A \subseteq G \cap D$.

$\square$

Observación 2.7. Si P es un orden parcial y $G \subseteq P$ es un filtro genérico, entonces es un ultrafiltro (es decir, un filtro maximal con respecto a $\subseteq$).

Prueba. La prueba es fácil. Sólo hay que suponer que hay un filtro H tal que $G \subsetneq H$, es decir, hay $p \in H \setminus G$ y notar que $D = \{q \in P | q \leq p \text{ o } q \perp p\}$ es denso. $\square$

Esta noción de genérico también depende del universo de la teoría de conjuntos. Por ejemplo si M es un modelo transitivo de ZFE (a este M lo llamaremos un *modelo base*), $P \in M$ y $G \subseteq P$ es un filtro podemos hablar de genericidad en M diciendo que G es *genérico sobre* M si $G \cap D \neq \emptyset$ para cualquier denso $D \subseteq P$ tal que $D \in M$.

Algo que podemos notar acerca de los genéricos sobre M es que si el orden parcial es suficientemente interesante no hay genéricos en M.

Definición 2.8. Sea P un orden parcial. Decimos que P es *frondoso* si para todo $p \in P$ hay $q, r \in P$ tales que $q \leq p$, $r \leq p$ y $q \perp r$

Proposición 2.9. *Sea M un modelo base y $P \in M$. Si P es frondoso y G es P-genérico sobre M entonces $G \notin M$.*

Prueba. Supongamos que $G \in M$, entonces por separación en M tendríamos que $D = P \setminus G \in M$. Entonces basta ver que este D es denso, ya que de serlo tendríamos que $G \cap D \neq \emptyset$ obteniendo así una contradicción. Para ver que es denso sea $p \in P$ y por nuestra suposición tenemos que hay $q, r \in P$ tales que $q \leq p$, $r \leq p$ y $q \perp r$. Así q y r no pueden estar simultáneamente en G, pues G es filtro por lo que uno de los dos está en D y es menor o igual a p. □

Ya hemos visto que los genéricos intersecan a los densos y a las anticadenas maximales, ahora veamos qué pasa con los densos bajo alguien, pero para esto necesitaremos antes un lema.

Lema 2.10. *Sea P una noción de forcing y $E \subseteq P$ no vacío. Si $G \subseteq P$ es un genérico, entonces*

$$G \cap E \neq \emptyset \quad \text{ó} \quad \exists g \in G \forall r \in E (g \perp r) \tag{2.1}$$

Prueba. Sea $D = \{p \in P | \exists r \in E(p \leq r)\} \cup \{p \in P | \forall r \in E(r \perp p)\}$ y veamos que es denso. Sea $p \in P$ y supongamos que $p \notin D$, por lo que hay $r \in E$ tal que $r \| p$, sea entonces $d \leq p, r$ así $d \in D$ y $d \leq p$. Con esto podemos tomar $g \in G \cap D$, por lo que o bien hay $r \in E$ tal que $g \leq r$, lo cual implica que $r \in G \cap E$, o $\forall r \in E(g \perp r)$. □

Y ahora sí veamos bajo qué condiciones un genérico interseca a los densos bajo alguien.

Proposición 2.11. *Sean P un forcing, $G \subseteq P$ un genérico y $E \subseteq P$ denso bajo $p \in G$, entonces $G \cap E \neq \emptyset$.*

Prueba. Supongamos que $G \cap E = \emptyset$, entonces por (2.1) hay $g \in G$ tal que $g \perp r$ para todo $r \in E$. Entonces tomando $q \in G$ tal que $q \leq g, p$ y usando que E es denso bajo p se tiene que hay $s \in E$ tal que $s \leq q$ lo cual es una contradicción. □

Otra equivalencia de filtro genérico es la siguiente

Lema 2.12. *Sea P un forcing. $G \subseteq P$ es genérico si y solo si:*

(a) Si $p \in G$ y $q \leq p$, entonces $q \in G$

(b) Si $p, q \in G$, entonces hay $r \in P$ tal que $r \leq p, q$, es decir, $p \| q$

(c) Si $D \subseteq P$ es denso, entonces $G \cap D \neq \emptyset$

Prueba. Es claro que si G es un filtro genérico cumple (a), (b) y (c). Para el regreso el único punto que es distinto a la definición original es (b). Sean $p, q \in G$ y veamos que (b) implica la existencia de alguien en G menor o igual que p y q. Consideramos

$$D = \{r \leq p | r \leq q \text{ o } r \perp q\}$$

y veamos que D es denso bajo p. Sea $s \leq p$ y supongamos que $s \notin D$, entonces $s \| q$ por lo que hay $r \leq s, q$, así $r \in D$ y $r \leq s$.

Como D es denso bajo p y $p \in G$ por 2.11 hay $r \in G \cap D$, entonces $r \in G$, $r \leq p$ y como $q \in G$ no puede pasar que $r \perp q$, por lo que $r \leq q$. □

Una pregunta importante es si existen o no estos filtros genéricos y si existen, bajo qué condiciones se da su existencia y la respuesta está en el tamaño de las familias de densos.

Proposición 2.13. *Si P es una noción de forcing y $\mathcal{D}$ es una colección contable de subconjuntos densos en P, entonces hay un filtro $\mathcal{D}$-genérico sobre P. Además, si $p_0 \in P$ hay un filtro $\mathcal{D}$-genérico G sobre P tal que $p_0 \in G$.*

Prueba. Consideremos una enumeración de todos los subconjuntos densos de P que pertenecen a $\mathcal{D}$, sea $\{D_n | n \in \omega\}$ dicha enumeración. Definamos recursivamente la siguiente sucesión $q_0 = p_0$ y $q_{n+1} \in D_n$ tal que $q_{n+1} \leq q_n$.

Sea $G = \{p \in P | \exists n \in \omega (q_n \leq p)\}$, así, es fácil ver que $p_0 \in G$, solo falta ver que $G \subseteq P$ es $\mathcal{D}$-genérico.

(i) Sean $p, q \in G$ entonces hay $n, m \in \omega$ tales que $q_n \leq p$ y $q_m \leq q$ y supongamos que $m \leq n$, entonces $q_{n+1} \leq p$ y $q_{n+1} \leq q$ y además $q_{n+1} \in D_n \subseteq P$, por lo tanto $q_{n+1} \in G$.

(ii) Sean $p \in G$ y $q \in P$ tales que $p \leq q$, entonces hay $n \in \omega$ tal que $q_n \leq p \leq q$, así $q \in G$

(iii) Sea D denso en P tal que $D \in \mathcal{D}$, entonces hay $n \in \omega$ tal que $D = D_n$, así $q_{n+1} \in D_n$ y $q_{n+1} \in G$, por lo tanto $D_n \cap G \neq \emptyset$

Con esto tenemos que G es $\mathcal{D}$-genérico y $p_0 \in G$ lo cual termina la prueba □

Ahora veamos uno de los objetivos de este trabajo

Teorema 2.14 (El Teorema del Modelo Genérico)**.** *Sea M un modelo transitivo de ZFC y sea P una noción de forcing en el modelo base M. Si $G \subseteq P$ es P-genérico sobre M, entonces hay un modelo transitivo $M[G]$ tal que:*

(i) $M[G]$ es modelo de ZFC,

(ii) $M \subseteq M[G]$ y $G \in M[G]$,

(iii) $Ord^{M[G]} = Ord^M$,

(iv) Si N es un modelo transitivo de ZF tal que $M \subseteq N$ y $G \in N$, entonces $M[G] \subseteq N$.

El modelo $M[G]$ es llamado una *extensión genérica* de M, y sus elementos son definibles desde G por una cantidad finita de elementos de M. Cada elemento de $M[G]$ tiene un nombre en M describiendo cómo fue construido.

La relación de forcing es una relación entre condiciones de forcing y enunciados del lenguaje de forcing: $p \Vdash \sigma$ (p fuerza σ). La relación de forcing es definida en M y es una generalización de la noción de satisfacción. Es decir, si $p \Vdash \sigma$ y si σ' es consecuencia lógica de σ, entonces $p \Vdash \sigma'$.

Entonces el segundo teorema importante de modelos genéricos establece la relación entre forzar y verdad en $M[G]$.

Teorema 2.15 (El Teorema de Forcing)**.** *Sea $P \in M$ una noción de forcing en el modelo base. Si σ es un enunciado del lenguaje de forcing, entonces si $G \subseteq P$ genérico sobre M,*

$$M[G] \models \sigma \quad \textit{si y sólo si} \quad \exists p \in G (p \Vdash \sigma)$$

Y el tercer teorema de forcing, que habla de algunas de las propiedades más importantes de esta relación.

Teorema 2.16 (Propiedades de Forcing). *Sea $P \in M$ una noción de forcing en el modelo base y sea M^P la clase (en M) de todos los nombres*[1].

(i) (a) *Si $p \Vdash \sigma$ y $q \leq p$, entonces $q \Vdash \sigma$.*

(b) *No hay p tal que $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \neg\varphi$.*

(c) *Para cada $p \in P$ hay $q \leq p$ tal que q decide a φ, es decir, $q \Vdash \varphi$ o $q \Vdash \neg\varphi$.*

(ii) (a) *$p \Vdash \neg\varphi$ si y sólo si no hay $q \leq p$ tal que $q \Vdash \varphi$.*

(b) *$p \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \psi$*
$p \Vdash \forall x\varphi$ si y sólo si $p \Vdash \varphi(\dot{a})$ para todo $\dot{a} \in M^P$.

(c) *$p \Vdash \varphi \vee \psi$ si y sólo si $\forall q \leq p \exists r \leq q (r \Vdash \varphi$ o $r \Vdash \psi)$.*

(iii) *$p \Vdash \exists x\varphi$ si y sólo si hay $\dot{a} \in M^P$, $p \Vdash \varphi(\dot{a})$.*

2.2. Cocientes Separativos

Como la relación de forcing se define a partir de un orden parcial arbitrario, nosotros intentaremos definir un orden parcial con más propiedades a partir de él, a saber, un álgebra de Boole en la cual el orden parcial se verá como un subconjunto denso. Para lograr esto necesitamos notar cierto comportamiento de estas álgebras con respecto al orden.

Definición 2.17. Sea B un álgebra de Boole, definimos $B^+ = B \setminus \{0\}$

Proposición 2.18. *Sea B un álgebra de Boole, si $a \nleq b$, entonces hay $c \in B^+$ tal que $c \leq a$ y $c \wedge b = 0$.*

Prueba. Sean $a, b \in B$ tales que $a \nleq b$, entonces $a \wedge \neg b \neq 0$, es decir, $a \wedge \neg b \in B^+$ y además se cumple que $a \wedge \neg b \leq a$ y $(a \wedge \neg b) \wedge b = 0$. $\square$

Además esto mismo sucede en los subconjuntos densos de el álgebra.

Definición 2.19. Diremos que $D \subseteq B$ es denso en B si y sólo si $D \setminus \{0\}$ es denso en B^+ como orden parcial.

Proposición 2.20. *Si D es un subconjunto denso de un álgebra de Boole B, entonces en D se tiene que si $a \nleq b$, entonces hay $c \in D$ tal que $c \leq a$ y $c \wedge b = 0$*

Prueba. Sean $a, b \in D \subseteq B$ tales que $a \nleq b$, entonces por 2.18 hay $c \in B^+$ tal que $c \leq a$ y $c \wedge b = 0$, y como D es denso, hay $d \in D$ tal que $d \leq c$, así $d \leq c \leq a$ y $d \wedge b = 0$. $\square$

Entonces si B es un álgebra de Boole y $D \subseteq B$ es denso entonces D es un orden parcial que cumple que si $a, b \in D$ y si $a \nleq b$, entonces hay $c \in D$ tal que $c \leq a$ y $c \wedge b = 0$. Como un orden parcial no necesariamente tiene ínfimos, entonces podemos traducir esta propiedad a decir que $c \perp b$, dando como resultado la siguiente definición.

Definición 2.21. Un conjunto parcialmente ordenado P es *separativo* si y sólo si para toda $p, q \in P$, si $p \nleq q$ entonces hay $r \leq p$ tal que $r \perp q$.

[1] Mas adelante se definirá lo que es un nombre

Aquí no se pidió explícitamente que P sea no vacío, pero todos los órdenes que estemos considerando serán no vacíos. Además serán este tipo de órdenes los que intentaremos completar para obtener un álgebra de Boole.

Teorema 2.22. *Sea P un orden parcial separativo, entonces hay un álgebra de Boole completa B y una función $f : P \to B$ tales que:*

(i) $f[P] \subseteq B^+$ *y* $\forall p, q \in P(p \leq q \leftrightarrow f(p) \leq f(q))$,

(ii) $f[P]$ *es denso en* B^+,

(iii) $\forall p, q \in P(p \perp q \leftrightarrow f(p) \wedge f(q) = 0)$.

***Prueba*.** Sea P un orden parcial separativo. Decimos que $U \subseteq P$ es una *cortadura* si y sólo si $\forall p \in U \forall q \in P(q \leq p \to q \in U)$. Así para cada $p \in P$, $U_p = \{x|x \leq p\}$ es una cortadura. Decimos que una cortadura U es *regular* si y sólo si para cualquier $p \in P$ tal que $p \notin U$ hay $q \leq p$ tal que $U_q \cap U = \emptyset$, entonces es claro que cada U_p es regular y que toda cortadura no vacía contiene a algún U_p. Sea B el conjunto de todas las cortaduras regulares en P ordenado por la inclusión y afirmamos que B es un álgebra de Boole completa.

Primero veamos que toda cortadura no vacía U esta contenida en una cortadura regular $\overline{U} = \{p|\forall q \leq p(U \cap U_q \neq \emptyset)\}$. Sea $p \in U$ y supongamos que $q \leq p$, entonces $q \in U$ y $q \in U_q$ por lo tanto $U \subseteq \overline{U}$. Ahora sea p tal que $p \notin \overline{U}$, entonces hay $q \leq p$ tal que $U \cap U_q = \emptyset$ y así $U_q \cap \overline{U} = \emptyset$, pues si $U_q \cap \overline{U} \neq \emptyset$, sea $r \in U_q \cap \overline{U}$ entonces $r \leq q$ y $\forall s \leq r(U \cap U_s \neq \emptyset)$ y además $U \cap U_r \subseteq U \cap U_t$ para toda $t \geq r$ por lo tanto $U \cap U_q \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción.

Veamos que la intersección de cualquier familia de cortaduras regulares es una cortadura regular, sea A una familia de cortaduras regulares, es claro que la intersección es una cortadura, entonces veamos que es regular. Sea $p \notin \bigcap A$, entonces hay $a \in A$ tal que $p \notin a$ y como a es una cortadura regular hay $q \leq p$ tal que $U_q \cap a = \emptyset$, por lo tanto $U_q \cap (\bigcap A) = \emptyset$, así $\bigcap A$ es una cortadura regular.

Ahora para ver que $\langle B, \subseteq \rangle$ es un álgebra de Boole, para cualesquiera $a, b \in B$ definimos $a \wedge b = a \cap b$, $a \vee b = \overline{a \cup b}$ y $\neg a = \{p|U_p \cap a = \emptyset\}$, además el mínimo de B es $\emptyset$ y el máximo es P. Entonces hay que ver que el ínfimo, el supremo y el complemento así definidos son cortaduras regulares, es claro que los tres conjuntos son cortaduras, entonces solo hay que ver que son regulares. Para el caso del ínfimo lo anterior muestra que $a \wedge b = a \cap b$ es regular y en el caso del supremo no hace falta hacer algo. Para ver que el complemento de una cortadura regular a es una cortadura regular, sea p tal que $U_p \cap a \neq \emptyset$, así sea $q \in U_p \cap a$ y como a es una cortadura $U_q \subseteq a$, por lo tanto $U_q \cap \neg a = \emptyset$, así $\neg a \in B$.

Para ver que es álgebra de Boole tenemos que ver las propiedades (1.1)-(1.5). Para (1.4) basta notar que $a \cap \neg a = 0$ y que $\overline{a \cup \neg a} = 1$. La propiedad (1.3) es fácil al igual que las propiedades que sólo hablan de ínfimos y (1.1) también es fácil. Para (1.5) hay que notar que $a \leq a \vee b$ por lo que $c \wedge a \leq c \wedge (a \vee b)$, análogamente tenemos $c \wedge b \leq c \wedge (a \vee b)$, así $(c \wedge a) \vee (c \wedge b) \leq c \wedge (a \vee b)$, para la otra desigualdad hay que hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} c \wedge (a \vee b) &= c \cap \overline{a \cup b} \\ &\subseteq \overline{c \cap (a \cup b)} \\ &= \overline{(c \cap a) \cup (c \cap b)} \\ &= (c \wedge a) \vee (c \wedge b) \end{aligned}$$

Para ver que es completa sea $A \subseteq B$ entonces $\bigwedge A = \bigcap A$ que como ya vimos es una cortadura regular, por lo tanto $\bigwedge A \in B$. Con esto no es necesario ver que tiene supremo, pues un supremo es el ínfimo de las cotas superiores. Además es claro que el orden inducido por la operaciones algebraicas es la contención, pues diremos que $a \leq b$ si y sólo si $a \wedge b = a$ si y sólo si $a \cap b = a$ si y sólo si $a \subseteq b$.

Sea $f : P \to B^+$ dada por $f(p) = U_p$ para toda $p \in P$. Entonces es claro que $f[P] \subseteq B^+$ y que $p \leq q$ si y sólo si $U_p \subseteq U_q$, es decir, $f(p) \leq f(q)$. Además $f[P]$ es denso en B ya que como habíamos visto toda cortadura no vacía contiene a algún U_p, por lo tanto si $a \in B^+$ entonces hay $p \in P$ tal que $U_p \subseteq a$ lo cual prueba que $f[P]$ es denso en B^+. Para ver el punto (iii) primero supongamos que $p \| q$ y sea r una extensión común, es decir, $r \leq p, q$ por lo tanto $f(r) \leq f(p), f(q)$, es decir, $f(p) \wedge f(q) \neq 0$. Ahora supongamos que $p \perp q$, entonces $U_p \cap U_q = \emptyset$ por lo que $f(p) \wedge f(q) = 0$. $\square$

Lo que hicimos en esta prueba fue, a partir de un orden parcial definir un espacio topológico (a través de la topología del orden) y luego tomar las cortaduras regulares o abiertos regulares[2] de este espacio y observar que éstos forman un álgebra de Boole completa.

Con esto tenemos que si empezamos con un orden parcial separativo, entonces es posible construir un álgebra de Boole completa tal que se cumplen las condiciones (i)-(iii) de 2.22. Entonces lo que hace falta ver es cómo definir un orden parcial separativo a partir de un orden parcial cualquiera. Para esto hay que notar que si P es un orden parcial arbitrario, si no es separativo es porque hay $p, q \in P$ tales que $p \nleq q$ y todos los elementos de P menores o iguales que p son compatibles con q, entonces en este sentido lo que "estorba" es la compatibilidad de ciertos elementos de P. Para tratar de evitar esto definamos la función *comp*: $P \to \mathcal{P}(P)$ dada por: si $p \in P$, $comp(p) = \{x \in P : x \| p\}$.

Con esto definimos un orden parcial $\langle Q, \preceq \rangle$, donde $Q = comp[P]$ y "$\preceq$"="$\subseteq$" y afirmamos que este nuevo orden parcial es separativo.

Lema 2.23. *Sea P un orden parcial, entonces hay un orden parcial separativo Q y una función h de P sobre Q tal que:*

(a) h es suprayectiva,

(b) Si $x \leq y$, entonces $h(x) \preceq h(y)$,

(c) $x \| y$, si y sólo si $h(x) \| h(y)$.

Prueba. Sean $h = comp$, $Q = comp[P]$ y $\preceq = \subseteq$. Es claro que h es suprayectiva, si $p \leq q$ y $r \| p$ entonces $r \| q$, por lo que $comp(p) \subseteq comp(q)$, es decir, $comp(p) \preceq comp(q)$ por lo que solo hace falta ver el punto (c). La implicación de izquierda a derecha se tiene por el inciso (b), para el regreso supongamos que $h(x) \| h(y)$, entonces hay $h(z) \leq h(x), h(y)$, es decir, $\{a : a \| z\} \subseteq \{b : b \| x\}$ y $\{a : a \| z\} \subseteq \{c : c \| y\}$, así tenemos que $z \| x$ y tomando $w \leq z, x$ se tiene que $w \| y$ con lo cual concluimos que $x \| y$. $\square$

A este orden parcial Q que definimos a partir de P lo llamaremos *cociente separativo*.

Corolario 2.24. *Para cada orden parcial P hay un álgebra de Boole completa $B = B(P)$ y una función $e : P \to B^+$ tal que:*

(i) Si $x \leq y$, entonces $e(x) \leq e(y)$

(ii) $x \perp y$ si y sólo si $e(x) \wedge e(y) = 0$

(iii) $e[P]$ es denso en B^+

[2] Si $\langle X, \tau \rangle$ es un espacio topológico y $A \subseteq X$, decimos que A es un abierto regular si el interior de la cerradura de A es igual a A que en símbolos es $(\overline{A})^\circ = A$

Prueba. Sea P un orden parcial, por 2.23 hay Q un orden parcial separativo y una función h de P sobre Q tal que:

(a) Si $x \leq y$, entonces $h(x) \preceq h(y)$,

(b) Si $x \leq y$, entonces $h(x) \preceq h(y)$,

(c) $x \| y$ si y sólo si $h(x) \| h(y)$.

Luego, como Q es separativo por 2.22 hay un álgebra de Boole completa B y una función $f : P \to B$ tal que:

1 $f[Q] \subseteq B^+$ y si $h(y) \preceq h(x)$, entonces $f(h(x)) \leq f(h(y))$.

2 $f[Q]$ es denso en B.

Entonces, definimos $e : P \to B$ como sigue: $e(x) = f(h(x))$. Así es claro que si $x \leq y$ entonces $e(x) \leq e(y)$ y que $x \perp y$ si y sólo si $e(x) \wedge e(y) = 0$, además $e[P] = f[h[P]] = f[Q]$ que es denso en B^+. □

Como la función h de 2.23 sólo preserva el orden, entonces también e sólo preserva el orden, pero por la propiedad (ii) de 2.24 casi lo refleja, pues se tiene

Observación 2.25. Sean P un orden parcial y $e\colon P \to B^+$ como en 2.24 y sean $p, q' \in P$ tales que $e(q') \leq e(p)$, entonces hay $q \leq p$ tal que $e(q) \leq e(q')$.

Prueba. Como $e(q') \leq e(p)$, entonces $e(q') \wedge e(p) \neq 0$ por lo que $q' \| p$, así hay $q \leq q', p$ que es la q que buscábamos. □

Además dado un orden parcial P el álgebra $B = B(P)$ es única salvo isomorfismo. Para probar esto supongamos que hay álgebras de Boole B, B' y funciones $e\colon P \to B$ y $e'\colon P \to B'$ que cumplen (i)-(iii) de 2.24 y haremos la prueba en una serie de lemas.

Lema 2.26. *Para todo $b \in B$, $b = \bigvee_{e(p) \leq b} e(p)$.*

Prueba. Sólo veremos $b \leq \bigvee_{e(p) \leq b} e(p)$, pues la otra desigualdad es fácil. Supongamos que $b \not\leq \bigvee_{e(p) \leq b} e(p)$, entonces $b \wedge \neg \bigvee_{e(p) \leq b} e(p) \neq 0$, con lo cual podemos dar $q \in P$ tal que $e(q) \leq b \wedge \neg \bigvee_{e(p) \leq b} e(p)$ y entonces tenemos que

$$e(q) = e(q) \wedge \neg \bigvee_{e(p) \leq b} e(p) \leq \bigvee_{e(p) \leq b} e(p) \wedge \neg \bigvee_{e(p) \leq b} e(p) = 0$$

lo cual es una contradicción. □

Para dar el isomorfismo daremos $h\colon B \to B'$ y $h'\colon B' \to B$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & B \arrow[d, shift right, "h"'] \\ & B' \arrow[u, shift right, "h'"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Esta conmutatividad y 2.26 nos sugieren como debemos definir a h y h', pues de ya tener lo anterior tendríamos que

$$h(b) = h\left(\bigvee_{e(p)\leq b} e(p)\right) = \bigvee_{e(p)\leq b} he(p) = \bigvee_{e(p)\leq b} e'(p)$$

y análogamente

$$h'(b') = \bigvee_{e'(p)\leq b'} e(p)$$

Así definidos veremos que h es un homomorfismo de álgebras. Análogamente tendríamos que h' también es un homomorfismo de álgebras.

Lema 2.27. *Si $a, b \in B$ entonces, $a \leq b$ si y sólo si $h(a) \leq h(b)$.*

Prueba. La implicación de izquierda a derecha es fácil. Supongamos que $h(a) \leq h(b)$, es decir,

$$\bigvee_{e(p)\leq a} e'(p) \leq \bigvee_{e(q)\leq b} e'(q)$$

Y supongamos que $a \nleq b$, es decir, $a \wedge \neg b \neq 0$. Como $e[P]$ es denso en B hay $p \in P$ tal que $e(p) \leq a \wedge \neg b$ y así $e'(p) \leq \bigvee_{e(q)\leq b} e'(q)$. Además si $e(q) \leq b$, entonces $e(p) \wedge e(q) = 0$, que recordando 2.24, quiere decir que $p \perp q$ y esto a su vez significa que $e'(p) \wedge e'(q) = 0$. Por lo tanto, tenemos:

$$e'(p) = e'(p) \wedge \bigvee_{e(q)\leq b} e'(q) = \bigvee_{e(q)\leq b} (e'(q) \wedge e'(p)) = 0$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 2.28. *h y h' son homomorfismos de álgebras.*

Algo más que se puede decir de h (y análogamente de h') es lo siguiente.

Lema 2.29. *$h \circ e = e'$.*

Prueba. Sea $p \in P$ y veamos que $h \circ e(p) = e'(p)$. $e'(p) \leq h(e(p))$ se sigue de la definición de h. Para la otra desigualdad basta ver que si $e(q) \leq e(p)$ entonces $e'(q) \leq e'(p)$, pues de tener esto último bastaría notar que

$$h(e(p)) = \bigvee_{e(q)\leq e(p)} e'(q) \leq e'(p)$$

Entonces para probar la afirmación supongamos que $e(q) \leq e(p)$ y $e'(q) \nleq e'(p)$, esto quiere decir que $e'(q) \wedge \neg e'(p) \neq 0$. Así podemos dar $r \in P$ tal que $e'(r) \leq e'(q) \wedge \neg e'(p)$, lo que por el punto (ii) de 2.24 nos dice que $r \| q$. Sea $s \in P$ tal que $s \leq r, q$, entonces $e(s) \leq e(q) \leq e(p)$ y de nuevo se tiene que $s \| p$ por lo que al dar $t \in P$ tal que $t \leq s, p$ tenemos

$$e'(t) \leq e'(r) \leq \neg e'(p)$$

y

$$e'(t) \leq e'(p)$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Para ver que B y B' son isomorfas, sólo hace falta ver que $h \circ h' = id_{B'}$ y $h' \circ h = id_B$, lo cual se basa en el siguiente hecho.

Lema 2.30. *Si $p \in P$ y $b \in B$, entonces $e(p) \leq b$ si y sólo si $e'(p) \leq h(b)$.*

Prueba. La definición de h nos da la implicación de izquierda a derecha. Para la otra implicación supongamos que $e'(p) \leq h(b)$ y $e(p) \nleq b$, entonces hay $q \in P$ tal que $e(q) \leq e(p) \wedge \neg b$ y así $p \| q$. Sea $r \in P$ tal que $r \leq p, q$ por lo tanto

$$e'(r) \leq e'(p) \leq h(b) = \bigvee_{e(s) \leq b} e'(s).$$

Así hay $s \in P$ tal que $e(s) \leq b$ y $e'(r) \wedge e'(s) \neq 0$ por lo que $r \| s$ y dando $t \in P$ tal que $t \leq r, s$ se tiene que

$$e(t) \leq e(r) \leq e(q) \leq \neg b$$

y

$$e(t) \leq e(s) \leq b$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 2.31. *$h \circ h' = id_{B'}$ y $h' \circ h = id_B$. En consecuencia B y B' son isomorfas*

Prueba.

$$h'(h(b)) = \bigvee_{e'(p) \leq h(b)} e(p) = \bigvee_{e(p) \leq b} e(p) = b$$

$$h(h'(b')) = h\left(\bigvee_{e'(p) \leq b'} e(p)\right) = \bigvee_{e'(p) \leq b'} h(e(p)) = \bigvee_{e'(p) \leq b'} e'(p') = b'$$

$\square$

Ahora veamos como pasamos un filtro genérico desde un orden parcial hasta un álgebra de Boole, para esto primero pasemos al genérico de un orden parcial a un orden parcial separativo.

Lema 2.32. *En el modelo base M, sea Q el cociente separativo de P y sea h un mapeo de P sobre Q como en 2.23. Si $G \subseteq P$ es filtro P-genérico sobre M, entonces $h[G] \subseteq Q$ es filtro Q-genérico sobre M. Inversamente si $H \subseteq Q$ es filtro Q-genérico sobre M, entonces $h^{-1}(H)$ es filtro P-genérico sobre M.*

Prueba. Para ver que $h[G]$ es filtro genérico hay que ver tres cosas:

1. Si $h(p), h(q) \in h[G]$, entonces $p, q \in G$ así hay $r \in G$ tal que $r \leq p, q$ por lo que $h(r) \in h[G]$ y $h(r) \preceq h(p), h(q)$
2. Si $h(p) \in h[G]$ y $h(p) \preceq h(q)$, entonces $p \in G$ y definimos $D = \{x \in P | x \leq q \vee x \perp p\}$, veamos que D es denso. Sea $r \in P$, entonces

a) Si $r \| q$ entonces hay $d \leq r, q$ por lo que $d \in D$ y $d \leq r$

b) Si $r \perp q$ entonces $h(r) \perp h(q)$ por lo que $h(r) \perp h(p)$ y entonces $r \perp p$, por lo que $r \in D$.

así D es denso y entonces sea $s \in G \cap D$, entonces $s \in G$ por lo que $h(s) \in h[G]$ y como $s, p \in G$, entonces $s \leq q$, así $q \in G$ por lo que $h(q) \in h[G]$.

3. Para ver que es genérico usaremos la equivalencia de 2.6. Dado $A \subseteq Q$ una anticadena maximal en M, entonces usando elección podemos dar $A' \subseteq h^{-1}(A)$ tal que A' es anticadena maximal, que se obtiene de tomar solo un elemento de $h^{-1}(a)$ para cada $a \in A$, para ver que es maximal en P sea $p \in P$ entonces $h(p) \in Q$ y como A es maximal hay $a \in A$ tal que $h(p) \| a$ y entonces hay $a' \in A'$ tal que $h(p) \| h(a')$, es decir $p \| a'$ por lo que A' es maximal en P. Entonces hay $g \in G \cap A'$, por lo tanto $h(g) \in h[G] \cap A$.

Para el inverso, tenemos que ver que si $p \in h^{-1}(H)$ y $p \leq q$ implica que $q \in h^{-1}(H)$ lo cual se sigue del punto (b) de 2.23. Para ver que si $D \subseteq P$ es denso entonces $h^{-1}(H) \cap D \neq \emptyset$, basta ver que $h[D]$ es denso en Q y por tanto $H \cap h[D] \neq \emptyset$ y de aquí se sigue lo que queremos. Finalmente por 2.12 basta ver que si $p, q \in h^{-1}(H)$ entonces $p \| q$. Supongamos que no, es decir, que $p \perp q$. Esto quiere decir que $h(p) \in H$, $h(q) \in H$ y por el inciso (c) de 2.23 $h(p) \perp h(q)$ lo cual es una contradicción. □

Con esto tenemos que, un filtro genérico en un orden parcial lo podemos llevar a su cociente separativo preservando la genericidad. Lo que hace falta es llevarlo al álgebra de Boole y ver que se preserva su genericidad.

Lema 2.33. *Sean Q un orden parcial, $P \subseteq Q$ denso y G un filtro genérico sobre Q, entonces $H = P \cap G$ es un filtro genérico sobre P*

Prueba.

1. Si $p \in P \cap G$ y $q \in P$ es tal que $p \leq q$, entonces $q \in G$ por lo que $q \in P \cap G$.

2. Si $D \subseteq P$ es denso, entonces D es un subconjunto denso de Q y por tanto $G \cap D \neq \emptyset$ y como $D \subseteq P$, entonces $(P \cap G) \cap D \neq \emptyset$.

3. Si $p, q \in P \cap G$, entonces hay $r \in G$ tal que $r \leq p, q$ y como P es denso en Q, entonces $\{s \in P | s \leq r\}$ es denso bajo r y como $r \in G$, entonces hay $s \in P \cap G$ tal que $s \leq r$.

□

Además algo que será importante es tener alguna equivalencia de filtros genéricos sobre todo en álgebras de Boole que es donde los estaremos usando, ya tenemos que G es genérico si y sólo si interseca las anticadenas maximales, pero para esto veamos antes un pequeño lema.

Definición 2.34. Sean B un álgebra de Boole y $A \subseteq B$. A es una anticadena en B si y sólo si A es una anticadena en B^+.

Lema 2.35. *Sea B un álgebra de Boole completa y A una anticadena en B. A es maximal si y sólo si $\bigvee A = 1$.*

Prueba.

(⇒) Supongamos que $1 \not\leq \bigvee A$, es decir, $\neg(\bigvee A) = 1 \wedge \neg(\bigvee A) \in B^+$ y para toda $a \in A$, $a \wedge \neg(\bigvee A) \leq \bigvee A \wedge \neg(\bigvee A) = 0$ y entonces A no es maximal.

(⇐) Supongamos que A no es maximal, es decir, que hay $b \in B^+$ tal que $b \wedge a = 0$ para toda $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned} b &= b \wedge 1 \\ &= b \wedge \bigvee_{a \in A} a \\ &= \bigvee_{a \in A} b \wedge a \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

□

Teorema 2.36. *Sea B un álgebra de Boole completa y G un ultrafiltro en B, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) G es genérico.

(ii) Si $X \subseteq B$ es tal que $\bigvee X \in G$, entonces $X \cap G \neq \emptyset$

Prueba. Usando 2.6 y 2.35 (ii)⇒(i) es fácil por lo que sólo veremos (i)⇒(ii). Sea $X \subseteq B$ y por AE $X \cup \{\neg \bigvee X\} = \{x_\xi | \xi < \kappa\}$, entonces $\bigvee_{\xi<\kappa} x_\xi = 1$. Y ahora definimos recursivamente $a_\xi = x_\xi \wedge \neg \bigvee_{\eta<\xi} x_\eta$, entonces $\{a_\xi | \xi < \kappa\}$ es una anticadena cuyo supremo es 1 por lo que hay $\xi < \kappa$ tal que $a_\xi \in G$ y entonces como $\bigvee X \in G$ se tiene que $x_\xi \in X \cap G$. □

2.3. Estructuras booleano-valuadas

Aquí veremos una pequeña introducción a esta generalización de la idea de estructura. Si ρ es un tipo de semejanza, entonces una ρ-estructura (2-valuada) es una pareja $\mathfrak{A} = \langle A, I\rangle$ donde A es el universo de interpretación e I es una función con dominio ρ que cumple:

$$\begin{gathered} \text{Si } c \in \rho, \text{ entonces } c^{\mathfrak{A}} = I(c) \in A \\ \text{Si } f^n \in \rho, \text{ entonces } f^{\mathfrak{A}} = I(f^n)\colon A^n \to A \\ \text{Si } R^n \in \rho, \text{ entonces } R^{\mathfrak{A}} = I(R^n) \subseteq A^n \end{gathered}$$

donde c es una constante individual, f^n una letra funcional de aridad n y R^n una letra predicativa de aridad n.

De aquí, que si R^n es una letra predicativa de aridad n entonces podemos identificar a $R^{\mathfrak{A}}$ con su función característica $\chi_R\colon A^n \to 2$ que cumple: $\chi_R(a_1, \ldots, a_n) = 1$ si y sólo si $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$. De la misma manera podemos dar una función característica para las letras funcionales como sigue: si f^n es una letra funcional, entonces podemos ver a $f^{\mathfrak{A}}$ como una relación de aridad $n+1$, digamos $R_{f^{\mathfrak{A}}}$, donde $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in R_{f^{\mathfrak{A}}}$ si y sólo si $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_{n+1}$ y así $\chi_f = \chi_{R_f}$ y por último la función característica $\chi_c(a) = 1$ si y sólo si $c^{\mathfrak{A}} = a$.

Así la interpretación del tipo de semejanza queda en términos de funciones cuyo codominio es el álgebra de Boole 2, entonces podemos generalizar esta idea cambiando al álgebra 2 por cualquier álgebra de Boole completa obteniendo una estructura que llamaremos *booleano-valuada* .

Primero empecemos viendo cómo deben ser y cómo es la verdad en las estructuras booleano-valuadas y dejemos a un lado la definición del valor booleano de verdad de las fórmulas atómicas. Entonces lo que queremos es que las fórmulas universalmente válidas sigan siendo verdaderas en estas estructuras, entonces necesitamos pedir lo básico para las atómicas. Si $\mathfrak{A}$ es una estructura booleano valuada y $a_1, \ldots, a_n \in A$, escribiremos $\varphi(\overline{a})$ en lugar de $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Además denotaremos con $\|\varphi\|$ el valor booleano de φ, que debe un elemento de algún álgebra de Boole.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \|a = a\| = 1 \\ \text{(ii)} & \|a = b\| = \|b = a\| \\ \text{(iii)} & \|a = b\| \wedge \|b = c\| \leq \|a = c\| \\ \text{(iv)} & \text{Si } \varphi \text{ es atómica } \|a = b\| \wedge \|\varphi(a, \overline{a})\| \leq \|\varphi(b, \overline{a})\| \end{array} \tag{2.2}$$

Y con esto podemos definir recursivamente el valor booleano de verdad de las fórmulas a partir de una definición de las fórmulas atómicas como sigue:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \|\neg\varphi(\overline{a})\| = \neg\|\varphi(\overline{a})\|. \\ \text{(ii)} & \|\varphi(\overline{a}) \wedge \psi(\overline{a})\| = \|\varphi(\overline{a})\| \wedge \|\psi(\overline{a})\|. \\ \text{(iii)} & \|\exists x\varphi(x, \overline{a})\| = \bigvee_{a \in A} \|\varphi(a, \overline{a})\|. \end{array} \tag{2.3}$$

De esto último es claro que si φ y ψ son fórmulas, entonces:

(iv) $\|\varphi(\overline{a}) \vee \psi(\overline{a})\| = \|\varphi(\overline{a})\| \vee \|\psi(\overline{a})\|$.

(v) $\|\varphi(\overline{a}) \rightarrow \psi(\overline{a})\| = \|\varphi(\overline{a})\| \Rightarrow \|\psi(\overline{a})\|$. [3]

(vi) $\|\varphi(\overline{a}) \leftrightarrow \psi(\overline{a})\| = \|(\varphi(\overline{a}) \rightarrow \psi(\overline{a})) \wedge (\psi(\overline{a}) \rightarrow \varphi(\overline{a}))\|$.

(vii) $\|\forall x(x, \overline{a})\| = \bigwedge_{a \in A} \|\varphi(a, \overline{a})\|$.

Entonces con esto ya podemos decir cuándo una fórmula es verdadera en una estructura booleano-valuada.

Definición 2.37. Sean $\mathfrak{A}$ una estructura booleano-valuada y $a_1, \ldots, a_n \in A$. $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ es *verdadera* en $\mathfrak{A}$ o bien $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ si y sólo si $\|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\| = 1$.

Ahora veamos un lema que nos será de utilidad para el resto del capítulo

Lema 2.38. *Sea $\mathfrak{A}$ una estructura booleano-valuada y φ, ψ fórmulas, entonces $\mathfrak{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)$ si y sólo si $\|\varphi\| \leq \|\psi\|$.*

Prueba. $\mathfrak{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)$ si y sólo si $(\|\varphi\| \Rightarrow \|\psi\|) = 1$ si y sólo si (por el inciso (iv) de 1.16) $\|\varphi\| \leq \|\psi\|$. □

Ya que hemos dicho lo que son las estructuras booleano-valuadas, algo que se ocurre pensar es, cómo son sus subestructuras, lo cual haremos explicito en la siguiente definición.

[3] Ver 1.14.

Definición 2.39. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$ estructuras booleano-valuadas, con las álgebras completas B y B' respectivamente. $\mathfrak{A}'$ es *subestructura* de $\mathfrak{A}$ si y sólo si B' es una subálgebra completa de B, $A' \subseteq A$ y si $a_1, \ldots, a_n \in A'$ y φ es una fórmula atómica, entonces

$$\|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\|^{B'} = \|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\|^B$$

Otra cosa importante en qué pensar es, si tenemos B un álgebra de Boole completa y $\mathfrak{A}$ una estructura booleano-valuada (con esa álgebra), cómo encontrar una forma de convertir esta estructura booleano-valuada en una estructura bivaluada. Para esto usaremos un truco muy común, que consiste en tomar un ultrafiltro F sobre B y construir una nueva estructura $\mathfrak{A}/F$ donde lo que queremos es que:

$$\mathfrak{A}/F \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \|\varphi\| \in F. \tag{2.4}$$

Para esto empezaremos definiendo la relación $a \equiv b$ si y sólo si $\|a = b\| \in F$ y $([a_1], \ldots, [a_n]) \in R^{\mathfrak{A}/F}$ si y sólo si $\|R(a_1 \ldots, a_n)\| \in F$. Lo primero que hay que ver es que "$\equiv$" es una relación de equivalencia lo cual es una fácil consecuencia de que $\mathfrak{A}$ es booleano-valuado y de que F es filtro. Como estamos en un cociente también hay que ver que tanto las relaciones como las funciones estén bien definidas, es decir, que no dependan de representantes, lo cual es una consecuencia de que $\mathfrak{A}$ es booleano-valuado y el hecho de que F es filtro. Con esto tenemos la estructura $\mathfrak{A}/F$ y para ver que (2.4) es cierto tendríamos que hacerlo por inducción. Para fórmulas atómicas ya se tiene por definición. Para la negación $\mathfrak{A}/F \vDash \neg\varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A}/F \nvDash \varphi$ si y sólo si $\|\varphi\| \notin F$ si y sólo si $\neg\|\varphi\| \in F$. Para la conjunción $\mathfrak{A}/F \vDash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $\mathfrak{A}/F \vDash \varphi$ y $\mathfrak{A}/F \vDash \psi$ si y sólo si $\|\varphi\| \in F$ y $\|\psi\| \in F$ si y sólo si $\|\varphi \wedge \psi\| \in F$. Y por último para ver el caso cuantificado $\mathfrak{A}/F \vDash \exists x\varphi(x)$ si y sólo si hay $a \in A/\equiv$ tal que $\mathfrak{A}/F \vDash \varphi(a)$ si y sólo si hay $a \in A/\equiv$ tal que $\|\varphi(a)\| \in F$, entonces $\|\exists x\varphi(x)\| \in F$, pero el regreso de esta última implicación no es necesariamente cierto, lo cual nos lleva a definir una clase de estructuras booleano-valuadas (las que cumplen el regreso).

Definición 2.40. Sea $\mathfrak{A}$ estructura booleano-valuada, $\mathfrak{A}$ es *lleno* si y sólo si para cualquier fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ se tiene que: Para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A$ hay $a \in A$ tal que

$$\|\exists x\varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\| = \|\varphi(a, a_1, \ldots, a_n)\| \tag{2.5}$$

Con esto tenemos lo necesario para probar el siguiente teorema

Teorema 2.41. *Sean $\mathfrak{A}$ llena y F un ultrafiltro sobre el álgebra de Boole B. Para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A$ se tiene que:*

$$\mathfrak{A}/F \vDash \varphi([a_1], \ldots, [a_n]) \textit{ si y sólo si } \|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\| \in F. \tag{2.6}$$

Y por último es importante saber que con modelos booleano-valuados sí se esta haciendo una prueba de consistencia relativa como lo dice el siguiente teorema.

Teorema 2.42. *Sean T, T' dos conjuntos de enunciados que extienden a ZF tales que $cons(ZF) \Rightarrow cons(T')$ y supongamos que en el lenguaje de la teoría de conjuntos se pueden definir términos B y $\mathfrak{A}$ tales que:*

(i) $T' \vdash$ (B es un álgebra de Boole completa y $\mathfrak{A}$ es una estructura B-valuada).

(ii) Para cada $\tau \in T$, $T' \vdash (\mathfrak{A} \vDash \tau)$.

Entonces $cons(ZF) \Rightarrow cons(T)$.

Prueba. Por contrapuesta.

Supongamos que T es inconsistente, entonces hay $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T$ tales que $\tau_1, \ldots, \tau_n \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$ para algún enunciado σ y entonces $T' \vdash (\mathfrak{A} \vDash \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n)$ y así $T' \vdash (\mathfrak{A} \vDash \sigma \wedge \neg\sigma)$ y $\|\sigma \wedge \neg\sigma\| = 0$. Por lo tanto T' es inconsistente y entonces ZF es inconsistente. $\square$

2.4. El Modelo booleano-valuado $V^{(B)}$

La intención de esta sección es dar un modelo booleano-valuado de ZFC. Para ello notemos que cada $x \in V$ puede ser visto como una función característica χ_x tal que $x \subseteq dom(\chi_x)$, es decir, esta función toma valores en el álgebra de Boole $2 = \{0, 1\}$ y para toda $y \in dom(\chi_x)$, $\chi_x(y) = 1$ si y sólo si $y \in x$. Así V puede ser visto como una clase de funciones 2-valuadas y para que preserve la homogeneidad (que toda función 2-valuada tenga como dominio un conjunto de funciones 2-valuadas), hacemos una definición por recursión sobre ordinales de un universo 2-valuado como sigue:

$$\begin{aligned}
V_0^{(2)} &= \emptyset \\
V_{\alpha+1}^{(2)} &= \{x | fun(x) \ \wedge \ dom(x) \subseteq V_\alpha^{(2)} \ \wedge \ Im(x) \subseteq 2\} \\
V_\alpha^{(2)} &= \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{(2)} \quad \text{Si } \alpha \in LIM \\
V^{(2)} &= \bigcup_{\alpha \in OR} V_\alpha^{(2)}
\end{aligned}$$

Así $V^{(2)}$ es la clase de todas las funciones homogéneas 2-valuadas, además a $V^{(2)}$ se le llama el universo de los conjuntos 2-valuados. Análogamente podemos definir el universo de los conjuntos B-valuados sustituyendo 2 por un álgebra de Boole completa B definiendo recursivamente:

$$\begin{aligned}
V_0^{(B)} &= \emptyset \\
V_{\alpha+1}^{(B)} &= \{x | fun(x) \ \wedge dom(x) \subseteq V_\alpha^{(B)} \ \wedge \ Im(x) \subseteq B\} \\
V_\alpha^{(B)} &= \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{(B)} \quad \text{Si } \alpha \in LIM \\
V^{(B)} &= \bigcup_{\alpha \in OR} V_\alpha^{(B)}
\end{aligned}$$

La idea de este universo booleano es que ahora no solo tenemos que $x \in y$ ó $x \notin y$, sino que dado $x \in dom(y)$ $y(x) \in B$ nos dice qué tanto "x" es elemento de "y", o bien, que tan probable es que cuando veamos cómo es y nos encontremos a x como un elemento suyo. Ademaś con está definición, para cada $x \in V^{(B)}$ es posible hablar de su rango, tomando el mínimo ordinal tal que x esta en el estrato siguiente a ese ordinal, es decir, $rank(x) = min\{\alpha \in OR | x \in V_{\alpha+1}^{(B)}\}$.

Observación 2.43. (i) Sean $x, y \in V^{(B)}$, si $x \in dom(y)$ entonces $rank(x) < rank(y)$.

(ii) Si $\alpha < \beta$, entonces $V_\alpha^{(B)} \subseteq V_\beta^{(B)}$.

(iii) Para todo $\alpha \in OR$, $V_\alpha^{(B)}$ es un conjunto.

Proposición 2.44. *Sean $x, y \in V^{(B)}$, la relación $x \in dom(y)$ ("estar en el dominio de") es una relación bien fundada e izquierda limitada sobre $V^{(B)}$.*

Prueba. Sea A un subconjunto de $V^{(B)}$ distinto de $\emptyset$, así $\{rank(x)|x \in A\}$ es un conjunto no vacío de ordinales y por tanto tiene mínimo, digamos α, entonces tomando $x_0 \in A$ tal que $rank(x_0) = \alpha$ se tiene que x_0 es minimal de A. Por lo tanto la relación "estar en el dominio de" es bien fundada sobre $V^{(B)}$.

Para ver que la relación "estar en el dominio de" es izquierda limitada hay que notar que $dom(y)$ es un conjunto para cualquier $y \in V^{(B)}$ pues y es una función. □

Teorema 2.45 (Inducción para $V^{(B)}$)**.** *Sea φ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos, entonces:*

$$\forall x \in V^{(B)}(\forall y \in V^{(B)}(y \in dom(x) \to \varphi(y)) \to \varphi(x)) \to \forall x \in V^{(B)}\varphi(x)$$

Prueba. Como la relación "estar en el dominio de" es bien fundada e izquierda limitada, este teorema es un corolario del teorema de inducción para relacionales bien fundados e izquierda limitados. Ver [Ku] sección III.5. □

Para definir el valor booleano de verdad de las fórmulas atómicas en $V^{(B)}$, es decir, $x \in y$ y $x = y$ lo haremos simultáneamente y usando recursión sobre los pares $\langle rank(x), rank(y)\rangle$ ordenados con el orden canónico, es decir, supongamos definido $\|z \in w\|$ y $\|z = w\|$ para cualesquiera $z, w \in V^{(B)}$ tales que $\langle rank(z), rank(w)\rangle < \langle rank(x), rank(y)\rangle$.

Una forma de decir que $x \in y$ es diciendo que hay un elemento de y que es igual a x, es decir, $\exists t \in y(t = x)$. Para decir que $x = y$ lo haremos diciendo que $x \subseteq y$ y $y \subseteq x$. Con esto tenemos la siguiente definición.

Definición 2.46. Sean $x, y \in V^{(B)}$, definimos:

$$\|x \in y\| = \bigvee_{t \in dom(y)} y(t) \wedge \|x = t\| \tag{2.7}$$

$$\|x \subseteq y\| = \bigwedge_{t \in dom(x)} x(t) \Rightarrow \|t \in y\| \tag{2.8}$$

$$\|x = y\| = \|x \subseteq y\| \wedge \|y \subseteq x\| \tag{2.9}$$

Esta definición nos dice para el caso de la pertenencia qué tanto x es igual a un elemento de $dom(y)$ y qué tanto ese elemento es un elemento de y. Para el caso de la contención dice qué tanto todos los posibles elementos de x están en y.

Entonces lo que resta por hacer es ver que $V^{(B)}$ es un modelo booleano-valuado de ZFC, para lo cual empezaremos viendo que es un modelo booleano-valuado.

Teorema 2.47. *Sean $x, y, z \in V^{(B)}$, entonces:*

(i) $\|x = x\| = 1$

(ii) *Si* $t \in dom(x)$ $x(t) \leq \|t \in x\|$

(iii) $\|x = y\| = \|y = x\|$

(iv) $\|x = y\| \wedge \|y = z\| \leq \|x = z\|$

(v) $\|x = y\| \wedge \|x \in z\| \leq \|y \in z\|$

(vi) $\|x = y\| \wedge \|z \in x\| \leq \|z \in y\|$

(vii) $\|x = y\| \wedge \|\varphi(x)\| \leq \|\varphi(y)\|$

Prueba. (i) La prueba se hará por inducción, supongamos que para todo $t \in dom(x)$ $\|t = t\| = 1$ y basta ver que $\|x \subseteq x\| = 1$. Por (2.8) sólo hay que ver que para cada $t \in dom(x)$, $x(t) \Rightarrow \|t \in x\| = 1$ y por 1.16 (iv) lo que hay que ver es que $x(t) \leq \|t \in x\|$, entonces:

$$\begin{aligned} \|t \in x\| &= \bigvee_{s \in dom(x)} x(s) \wedge \|t = s\| \\ &\geq x(t) \wedge \|t = t\| \\ &= x(t) \end{aligned} \tag{2.10}$$

(ii) (2.10) y (i) es una prueba de este inciso.

(iii) Se da por simetría.

(iv) Esta prueba se hará por inducción en $V^{(B)}$. Supongamos que para todo $t \in dom(x)$

$$\forall y, z \in V^{(B)} \big(\|t = y\| \wedge \|y = z\| \leq \|t = z\|\big)$$

por lo tanto si $s \in dom(y)$ y $r \in dom(z)$ se tiene que

$$\|t = s\| \wedge \|s = r\| \wedge z(r) \leq \|t = r\| \wedge z(r)$$

y tomando supremo sobre $dom(z)$

$$\|t = s\| \wedge \|s \in z\| \leq \|t \in z\|. \tag{2.11}$$

Ahora, basta ver que $\|x \subseteq y\| \wedge \|y \subseteq z\| \leq \|x \subseteq z\|$ pues la otra parte se haría de forma análoga. Entonces lo que hay que ver es que si $t \in dom(x)$, $(x(t) \Rightarrow \|t \in y\|) \wedge \|y \subseteq z\| \leq (x(t) \Rightarrow \|t \in z\|)$ lo cual es equivalente a ver que $a = (x(t) \Rightarrow \|t \in y\|) \wedge \|y \subseteq z\| \wedge x(t) \leq \|t \in z\|$, entonces:

$$\begin{aligned} a &\leq \bigvee_{s \in dom(y)} y(s) \wedge \|t = s\| \wedge \|y \subseteq z\| && \text{por 1.14} \\ &\leq \bigvee_{s \in dom(y)} y(s) \wedge \|t = s\| \wedge (y(s) \Rightarrow \|s \in z\|) \\ &\leq \bigvee_{s \in dom(y)} \|t = s\| \wedge \|s \in z\| \\ &\leq \|t \in z\| && \text{por (2.11)} \end{aligned}$$

(v) Hay que ver que para todo $r \in dom(z)$, $z(r) \wedge \|x = r\| \wedge \|x = y\| \leq z(r) \wedge \|r = y\|$ lo cual se tiene por (iv).

(vi) Si $s \in dom(y)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|y = z\| \wedge y(s) &\leq \|y \subseteq z\| \wedge y(s)\\ &= \bigwedge_{p \in dom(y)} (y(p) \Rightarrow \|p \in z\|) \wedge y(s)\\ &\leq (y(s) \Rightarrow \|s \in z\|) \wedge y(s)\\ &\leq \|s \in z\|\end{aligned}$$

y por (v) se tiene que $\|y = z\| \wedge \|x = s\| \wedge y(s) \leq \|x \in z\|$ y tomando supremo sobre $dom(y)$ se tiene que

$$\|y = z\| \wedge \|x \in y\| \leq \|x \in z\|$$

(vii) Por inducción sobre la formación de φ. Si φ es una fórmula atómica la prueba esta dada en los incisos (iv) y (v), ahora supongamos que el resultado es cierto para ψ y χ, entonces:

(a)

$$\begin{aligned}\|x = y\| \wedge \|\psi(x) \wedge \chi(x)\| &= \|x = y\| \wedge \|\psi(x)\| \wedge \|\chi(x)\|\\ &\leq \|\psi(y)\| \wedge \|\chi(y)\|\\ &= \|\psi(y) \wedge \chi(y)\|\end{aligned}$$

(b) $\|x = y\| \wedge \|\neg\psi(x)\| = \|x = y\| \wedge \neg\|\psi(x)\|$. Y además $\|x = y\| \wedge \|\psi(y)\| \wedge \neg\|\psi(x)\| \leq \|\psi(x)\| \wedge \neg\|\psi(x)\| = 0$, por lo que $\|x = y\| \wedge \neg\|\psi(x)\| \leq \neg\|\psi(y)\|$.

(c) $\|x = y\| \wedge \|\exists x \psi(x)\| = \bigvee_{a \in V^{(B)}} (\|x = y\| \wedge \|\psi(a)\|)$

$\square$

Corolario 2.48. *Si $\varphi(x)$ es una fórmula, entonces para todo $a \in V^{(B)}$:*

(i) $\|\exists x \in a \varphi(x)\| = \bigvee_{x \in dom(a)} (a(x) \wedge \|\varphi(x)\|)$.

(ii) $\|\forall x \in a \varphi(x)\| = \bigwedge_{x \in dom(a)} (a(x) \Rightarrow \|\varphi(x)\|)$.

Prueba. (i)

$$
\begin{aligned}
\|\exists x \in a\varphi(x)\| &= \|\exists x(x \in a \wedge \varphi(x))\| \\
&= \bigvee_{y \in V^{(B)}} \|y \in a \wedge \varphi(y)\| \\
&= \bigvee_{y \in V^{(B)}} \bigvee_{x \in dom(a)} (\|x = y\| \wedge a(x) \wedge \|\varphi(y)\|) \\
&= \bigvee_{x \in dom(a)} \Big(a(x) \wedge \bigvee_{y \in V^{(B)}} (\|x = y\| \wedge \|\varphi(y)\|)\Big) \\
&= \bigvee_{x \in dom(a)} (a(x) \wedge \|\exists y(x = y \wedge \varphi(y))\|) \\
&= \bigvee_{x \in dom(a)} (a(x) \wedge \|\varphi(x)\|).
\end{aligned}
$$

(ii) Este inciso se sigue del anterior y de la definición de valor booleano de verdad para la negación.

□

Entonces pasemos a la parte más importante de esta sección, que es ver que el modelo booleano-valuado $V^{(B)}$ es modelo de ZFC.

Lema 2.49. *Sea B un álgebra de Boole completa. Si $W \subseteq B$ es tal que $\forall x, y \in W(x \neq y \to x \wedge y = 0)$ (es decir, $W \setminus 0$ es una anticadena en B) y si $\{a_x | x \in W\} \subseteq V^{(B)}$, entonces hay $a \in V^{(B)}$ tal que $x \leq \|a = a_x\|$ para todo $x \in W$.*

Prueba. Sea $D = \bigcup_{x \in W} dom(a_x)$ y para cada $x \in W$ definimos $b_x \in V^{(B)}$ como sigue:

$$dom(b_x) = D,$$

$$b_x(t) = \begin{cases} a_x(t) & \text{si } t \in dom(a_x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y con esto definimos $a \in V^{(B)}$ como $dom(a) = D$ y $a(t) = \bigvee_{y \in W}(y \wedge b_y(t))$. Ahora, notemos que para cada $t \in D$ y $x \in W$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
x \wedge a(t) &= x \wedge \bigvee_{y \in W} y \wedge b_y(t) \\
&= \bigvee_{y \in W} (x \wedge y \wedge b_y(t)) \\
&= x \wedge b_x(t) \\
&\leq b_x(t)
\end{aligned}
$$

Entonces para cualesquiera $t \in D$ y $x \in W$ se tiene por lo que acabamos de hacer y (1.6) que $x \leq (a(t) \Rightarrow b_x(t))$, y por la definición de a, $x \wedge b_x(t) \leq a(t)$, es decir, $x \leq (b_x(t) \Rightarrow a(t))$. Entonces con estas dos desigualdades, el inciso (ii) de 2.47, el inciso (ii) de 1.16 y 2.46 se tiene que $x \leq \|a = b_x\|$.

Sólo falta ve que $x \leq \|b_x = a_x\|$ para concluir que $x \leq \|a = a_x\|$. Es fácil ver que $\|a_x \subseteq b_x\| = 1$. Para la otra contención basta ver que $x \leq (b_x(t) \Rightarrow \|t \in a_x\|)$ para toda $t \in dom(b_x)$, es decir, $x \wedge b_x(t) \leq \|t \in a_x\|$ lo cual se hace por casos:

(i) Si $t \in dom(a_x)$, entonces $x \wedge b_x(t) \leq a_x(t) \leq \|t \in a_x\|$.

(ii) Si $t \notin dom(a_x)$, entonces $x \wedge b_x(t) = 0 \leq \|t \in a_x\|$.

□

Lema 2.50. *$V^{(B)}$ es lleno.*

***Prueba*.** Es claro que para todo $a \in V^{(B)}$

$$\|\varphi(a)\| \leq \bigvee_{b \in V^{(B)}} \|\varphi(b)\| = \|\exists x \varphi(x)\|.$$

Por lo que sólo hace falta encontrar $a \in V^{(B)}$ tal que $\|\exists x \varphi(x)\| \leq \|\varphi(a)\|$. Como el álgebra de Boole B es un conjunto, entonces $\{\|\varphi(x)\| : x \in V^{(B)}\}$ es un conjunto, por lo tanto (usando el Axioma de Elección) hay un ordinal α y un conjunto $\{a_\xi | \xi < \alpha\} \subseteq V^{(B)}$ tal que $\{\|\varphi(x)\| : x \in V^{(B)}\} = \{\|\varphi(a_\xi)\| : \xi < \alpha\}$. Por lo tanto $\|\exists x \varphi(x)\| = \bigvee_{\xi<\alpha} \|\varphi(a_\xi)\|$, ahora para cada $\xi < \alpha$ sea

$$u_\xi = \|\varphi(a_\xi)\| \wedge \neg\Big(\bigvee_{\eta<\xi} \|\varphi(a_\eta)\|\Big)$$

Así $\{u_\xi | \xi < \alpha\} \setminus \{0\}$ es una anticadena en B pues si $\delta < \gamma < \alpha$ y $u_\delta \neq u_\gamma$ entonces $\|\varphi(a_\delta)\| \leq \bigvee_{\eta<\gamma} \|\varphi(a_\eta)\|$ y así $u_\gamma \leq \neg(\bigvee_{\eta<\gamma} \|\varphi(a_\eta)\|) \leq \neg\|\varphi(a_\delta)\|$ por lo tanto $u_\gamma \wedge \|\varphi(a_\delta)\| \leq \neg\|\varphi(a_\delta)\| \wedge \|\varphi(a_\delta)\| = 0$ y como $u_\delta \leq \|\varphi(a_\delta)\|$, entonces $u_\gamma \wedge u_\delta = 0$, y entonces por 2.49 hay $a \in V^{(B)}$ tal que para todo $\xi < \alpha$, $u_\xi \leq \|a = a_\xi\|$ y así

$$u_\xi \leq \|a = a_\xi\| \wedge \|\varphi(a_\xi)\| \leq \|\varphi(a)\|.$$

Y por lo tanto

$$\|\varphi(a)\| \geq \bigvee_{\xi<\alpha} u_\xi = \bigvee_{\xi<\alpha} \|\varphi(a_\xi)\| = \|\exists x \varphi(x)\|.$$

□

Ahora veamos qué tanto se preserva la verdad en la estructura $V^{(B)}$, es decir, para qué fórmulas si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, entonces $V^{(B)} \vDash \varphi(x_1, \ldots, x_1)$. Para esto empecemos comparando a V con el modelo booleano-valuado que más se le parece, es decir, $V^{(2)}$, entonces empecemos con la siguiente definición.

Definición 2.51. Definimos el *nombre canónico* de cada $x \in V$ en el modelo booleano-valuado $V^{(B)}$ recursivamente como sigue:

(i) $\check{\emptyset} = \emptyset$

(ii) Para cada $x \in V$ sea $\check{x}$ la función cuyo dominio es $\{\check{y} | y \in x\}$ y para cada $y \in x$, $\check{x}(\check{y}) = 1$

Estos nombres canónicos son la representación más fiel de los conjuntos, por lo que si tomamos lo nombres canónicos en $V^{(2)}$ debemos tener algo muy parecido a V. Veamos que tanto se parecen.

Proposición 2.52. *Si $x, y \in V$, entonces*

$$(i)\; x \in y \text{ si y sólo si } \|\check{x} \in \check{y}\|^2 = 1$$
$$(ii)\; x = y \text{ si y sólo si } \|\check{x} = \check{y}\|^2 = 1$$

Prueba. La prueba se hará por inducción simultáneamente sobre los pares $(rank(y), rank(x))$

(i) Si $x \in y$, entonces

$$\begin{aligned}\|\check{x} \in \check{y}\|^2 &= \bigvee_{t \in y} \|\check{t} = \check{x}\|^2 \\ &\geq \|\check{x} = \check{x}\|^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

Y para el otro lado, si $\bigvee_{t\in y} \|\check{t} = \check{x}\|^2 = \|\check{x} \in \check{y}\|^2 = 1$, entonces, como los valores de verdad son 0 ó 1, hay $t \in y$ tal que $\|\check{t} = \check{x}\|^2 = 1$, entonces hay $t \in y$ tal que $t = x$, es decir, $x \in y$.

(ii) Basta ver que $x \subseteq y$ si y sólo si $\|\check{x} \subseteq \check{y}\|^2 = 1$. La otra contención es análoga. Supongamos que $y \subseteq x$, entonces

$$\begin{aligned}\|\check{y} \subseteq \check{x}\|^2 &= \bigwedge_{t\in y} \check{y}(\check{t}) \Rightarrow \|\check{t} \in \check{x}\|^2 \\ &= \bigwedge_{t\in y} 1 \Rightarrow \|\check{t} \in \check{x}\|^2\end{aligned}$$

que es 1 si y sólo si para cualquier $t \in y$, $\|\check{t} \in \check{x}\|^2 = 1$ lo cual es cierto por la hipótesis de inducción y la suposición.

Y si $\|\check{y} \subseteq \check{x}\|^2 = 1$, entonces para todo $t \in y$, $\check{y}(\check{t}) \leq \|\check{t} \in \check{x}\|^2$, es decir, $1 \leq \|\check{t} \in \check{x}\|^2$ por lo que si $t \in y$, entonces $\|\check{t} \in \check{x}\|^2 = 1$, y así $t \in x$.

□

Teorema 2.53. *$f\colon V \to V^{(2)}$ dada por $f(x) = \check{x}$ es un monomorfismo que cumple que para cada $x \in V^{(2)}$ hay $y \in V$ tal que $\|x = \check{y}\|^2 = 1$.*

Prueba. Por 2.52 f es monomorfismo, por lo que solo falta ver la segunda condición.

Sea $x \in V^{(2)}$ y veamos que hay $y \in V$ tal que $\|x = \check{y}\|^2 = 1$ por inducción. Entonces supongamos que para todo $t \in dom(x)$ hay $z \in V$ tal que $\|t = \check{z}\|^2 = 1$. Entonces para ver que

$$\bigwedge_{u\in dom(x)} x(u) \Rightarrow \|u \in \check{y}\|^2 \wedge \bigwedge_{v \in y} 1 \Rightarrow \|\check{v} \in x\|^2 = \|x = \check{y}\|^2 = 1$$

basta ver dos cosas:

$$\text{Si } u \in dom(x), \text{ entonces } x(u) \leq \|u \in \check{y}\|^2 \tag{2.12}$$

$$\text{Si } v \in y, \text{ entonces } 1 = \|\check{v} \in x\|^2 = \bigvee_{u\in dom(x)} x(u) \wedge \|u = \check{v}\|^2 \tag{2.13}$$

de donde definimos $y = \{v \in V | \exists u \in dom(x)(x(u) = 1 \wedge \|u = \check{v}\|^2 = 1)\}$, así (2.13) es claro. Para ver (2.12) tomamos $u \in dom(x)$. Si $x(u) = 0$, entonces es claro que $x(u) \leq \|u \in \check{y}\|$; y si $x(u) = 1$, entonces por la hipótesis de inducción hay $z \in V$ tal que $\|u = \check{z}\|^2 = 1$, así $z \in y$, por lo que $1 = \|u = \check{z}\|^2 \leq \bigvee_{v \in y} \|u = \check{v}\|^2 = \|u \in \check{y}\|^2$. □

Y con esto se tiene el siguiente resultado que nos dice qué tanto se preservan las fórmulas en la estructura $V^{(2)}$.

Corolario 2.54. *Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de la teoría de conjuntos, entonces:*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \|\varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)\|^2 = 1 \tag{2.14}$$

Prueba. La prueba es por inducción sobre la construcción de φ. Ya hemos visto en 2.52 que pasa con las atómicas. La negación y la conjunción son fáciles por lo que sólo veremos el caso cuantificado. Supongamos que el resultado es cierto para ψ y entonces

$$\begin{aligned}
\exists x \psi(x, x_1, \ldots, x_n) &\iff \text{hay } y \in V \text{ tal que } \psi(y, x_1, \ldots, x_n) \\
&\iff \text{hay } y \in V \text{ tal que } \|\psi(\check{y}, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)\|^2 = 1 && \text{por H.I.} \\
&\iff \text{hay } a \in V^{(2)} \text{ tal que } \|\varphi(a, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)\|^2 = 1 && \text{por 2.53} \\
&\iff \bigvee_{a \in V^{(B)}} \|\varphi(a, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)\|^2 = 1 && \text{por 2.50}
\end{aligned}$$

□

Así hasta $V^{(2)}$ todas las fórmulas se preservan y de hecho según 2.53 V y $V^{(2)}$ son casi isomorfos y de nuevo cambiemos el álgebra 2 por cualquier álgebra completa, pero antes veamos el siguiente lema.

Lema 2.55. *Sea B' una subálgebra completa de B. Entonces*

(i) $V^{(B')} \subseteq V^{(B)}$

(ii) Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es atómica y $x_1, \ldots x_n \in V^{(B')}$, entonces

$$\|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\|^{B'} = \|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\|^{B} \tag{2.15}$$

Prueba. La prueba de (i) es fácil. Para la prueba de (ii) basta notar que como B' es subálgebra completa de B, por lo que supremos e ínfimos son iguales en cualquiera de las dos y la prueba es fácil por inducción simultánea sobre $(rank(x), rank(y))$. □

Por lo tanto subálgebras completas de B generan subestructuras de $V^{(B)}$. Además, una vez que ya tenemos (2.15) para las atómicas, es fácil extender el resultado (por inducción) a las fórmulas sin cuantificadores y no sólo a estas, sino a también a fórmulas con cuantificadores acotados, es decir, a fórmulas Δ_0.

Teorema 2.56. *Sean B' una subálgebra completa de B y φ una fórmula Δ_0, entonces*

$$\|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\|^{B'} = \|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\|^{B} \tag{2.16}$$

Prueba. La prueba es por inducción sobre la construcción de φ y cada caso es fácil. $\square$

Con esto se tiene el siguiente corolario inmediato.

Corolario 2.57. *Si B es un álgebra de Boole completa y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es Δ_0, entonces*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \|\varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)\|^B = 1.$$

Prueba. La prueba se sigue de (2.14) y 2.56. $\square$

Entonces si φ es una fórmula Δ_0, ésta "sube" y "baja" no importando qué álgebra de Boole completa se esté usando. Pero podemos dar un nuevo tipo de fórmulas que solo irán de V a $V^{(B)}$.

Definición 2.58. Definimos recursivamente las *fórmulas* Π_n *y* Σ_n como sigue: Las fórmulas Π_0 y Σ_0 son las que tienen todos sus cuantificadores acotados, es decir, las fórmulas Δ_0. Si φ es Π_n, entonces $\exists x\varphi$ es Σ_{n+1} y si φ es Σ_n, entonces $\forall x\varphi$ es Π_{n+1}. Además una fórmula es Δ_n si es Π_n y Σ_n.

Corolario 2.59. *Si φ es Σ_1 se tiene que:*

$$\textit{Si } \varphi(x_1, \ldots, x_n) \textit{ entonces } \|\varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)\| = 1$$

Prueba. Sea φ una fórmula Σ_1, así $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \rightleftharpoons \exists x\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$, donde $\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula Δ_0. Supongamos que $\exists x\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$, si y sólo si hay $y \in V$ tal que $\psi(y, x_1, \ldots, x_n)$ si y sólo si (por 2.57) hay $y \in V$ tal que $\|\psi(\check{y}, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)\| = 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\exists x\psi(\check{x}, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)\| &= \bigvee_{a \in V^{(B)}} \|\psi(a, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)\| \\
&\geq \bigvee_{x \in V} \|\psi(\check{x}, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)\| \\
&\geq \|\psi(\check{y}, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)\| \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Ahora con esto podemos ver cómo son los ordinales en $V^{(B)}$

Lema 2.60. *Para cada $x \in V^{(B)}$*

$$\|x \textit{ es un ordinal}\| = \bigvee_{\alpha \in OR} \|x = \check{\alpha}\| \tag{2.17}$$

Prueba. Como la fórmula "α es un ordinal" es Δ_0, entonces por 2.57 se tiene que para todo $\alpha \in OR$ $\|x = \check{\alpha}\| = \|x = \check{\alpha}\| \wedge \|\check{\alpha} \text{ es un ordinal}\| \leq \|x \text{ es un ordinal}\|$ por lo que

$$\bigvee_{\alpha \in OR} \|x = \check{\alpha}\| \leq \|x \text{ es un ordinal}\|.$$

Por otro lado si $\|x \text{ es un ordinal}\| = u$, notemos que si $\xi \neq \eta$ entonces $\|\check{\xi} = \check{\eta}\| = 0$, por lo que si $t \in dom(x)$ entonces la función

$$f : D_t \to B$$
$$f(\xi) = \|t = \check{\xi}\|$$

donde $D_t = \{\xi : \|t = \check{\xi}\| \neq 0\}$ es inyectiva, por lo que D_t es un conjunto y así tomando

$$D = \bigcup_{t \in dom(x)} D_t$$

tenemos que D es un conjunto de ordinales por lo que podemos tomar un ordinal $\gamma \notin D$ y entonces para toda $t \in dom(x)$, $\|t = \check{\gamma}\| = 0$ y así $\|\check{\gamma} \in x\| = 0$. Además sabemos que

$$u \leq \|x \in \check{\gamma}\| \vee \|x = \check{\gamma}\| \vee \|\check{\gamma} \in x\|$$

y como $\|\check{\gamma} \in x\| = 0$, entonces

$$\begin{aligned} u &\leq \|x \in \check{\gamma}\| \vee \|x = \check{\gamma}\| \\ &= \left(\bigvee_{\delta < \gamma} \|x = \check{\delta}\| \right) \vee \|x = \check{\gamma}\| \\ &= \bigvee_{\delta \leq \gamma} \|x = \check{\delta}\| \\ &\leq \bigvee_{\alpha \in OR} \|x = \check{\alpha}\| \end{aligned}$$

□

Corolario 2.61. *Sea φ una fórmula y $\alpha \in OR$, entonces*

$$\|\exists \alpha \varphi(\alpha)\| = \bigvee_{\alpha \in OR} \|\varphi(\check{\alpha})\| \tag{2.18}$$

$$\|\forall \alpha \varphi(\alpha)\| = \bigwedge_{\alpha \in OR} \|\varphi(\check{\alpha})\| \tag{2.19}$$

Prueba. Sólo veremos el cuantificador existencial, el universal se prueba de forma análoga y usaremos $ord(x)$ para abreviar la fórmula que dice "x es un ordinal"

$$\begin{aligned} \|\exists \alpha \varphi(\alpha)\| &= \|\exists x (ord(x) \wedge \varphi(x))\| \\ &= \bigvee_{a \in V^{(B)}} \|ord(a) \wedge \varphi(a)\| \\ &= \bigvee_{a \in V^{(B)}} \left(\bigvee_{\alpha \in OR} \|a = \check{\alpha}\| \wedge \|\varphi(a)\| \right) \\ &= \bigvee_{a \in V^{(B)}} \bigvee_{\alpha \in OR} \|\varphi(\check{\alpha})\| \\ &= \bigvee_{\alpha \in OR} \|\varphi(\check{\alpha})\| \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.62. *$V^{(B)}$ es modelo de ZFC.*

Prueba.

Extensionalidad. Sean $a, b \in V^{(B)}$, entonces por 1.16 se tiene que para cualquier $c \in dom(a)$, $(\|c \in a\| \Rightarrow \|c \in b\|) \leq (a(c) \Rightarrow \|c \in b\|)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\|\forall c(c \in a \to c \in b)\| &= \bigwedge_{c \in V^{(B)}} \|c \in a\| \Rightarrow \|c \in b\| \\ &\leq \bigwedge_{c \in dom(a)} \|c \in a\| \Rightarrow \|c \in b\| \\ &\leq \bigwedge_{c \in dom(a)} a(c) \Rightarrow \|c \in b\| \\ &= \|a \subseteq b\|\end{aligned}$$

y por simetría $\|\forall c(c \in b \to c \in a)\| \leq \|b \subseteq a\|$. Por lo tanto $\|\forall c(c \in a \leftrightarrow c \in b)\| \leq \|a = b\|$.

Par. Sean $a, b \in V^{(B)}$ y sea $c \in V^{(B)}$ definido como sigue, $dom(c) = \{a, b\}$ y $c(a) = c(b) = 1$, entonces $\|a \in c \wedge b \in c\| = 1$ y por 2.48 $\|\forall x \in c(x = a \vee x = b)\| = \bigwedge_{x \in dom(c)}(c(x) \Rightarrow \|x = a \vee x = b\|) = (c(a) \Rightarrow \|a = a \vee a = b\|) \wedge (c(b) \Rightarrow \|b = a \vee b = b\|) =1$.

Separación. Sean $x \in V^{(B)}$ y φ una fórmula de la teoría de conjuntos, veamos que hay $y \in V^{(B)}$ tal que $\|y \subseteq x\| = 1$ y $\|\forall z \in x(\varphi(z) \leftrightarrow z \in y)\| = 1$. Sea $y \in V^{(B)}$ definido por $dom(y) = dom(x)$ y $y(t) = x(t) \wedge \|\varphi(t)\|$, como para cada $t \in dom(y)$ se tiene que $y(t) \leq x(t) \leq \|t \in x\|$ entonces $\|y \subseteq x\| = 1$. Además para cada $z \in V^{(B)}$

$$\begin{aligned}\|z \in y\| &= \bigvee_{w \in dom(y)} (y(w) \wedge \|w = z\|) \\ &= \bigvee_{w \in dom(x)} (x(w) \wedge \|\varphi(w)\| \wedge \|w = z\|) \\ &= \bigvee_{w \in dom(x)} (x(w) \wedge \|\varphi(z)\| \wedge \|w = z\|) \\ &= \|z \in x\| \wedge \|\varphi(z)\|.\end{aligned}$$

Ahora para ver que $\|\forall w \in x(\varphi(w) \leftrightarrow w \in y)\| = 1$ basta ver, por 2.48, que para todo $w \in dom(x)$, $x(w) \leq \|\varphi(w) \leftrightarrow w \in y\|$, que es lo mismo que ver que $x(w) \leq \|\varphi(w)\| \Rightarrow \|w \in y\|$ y que $x(w) \leq \|w \in y\| \Rightarrow \|\varphi(w)\|$. Para la primer desigualdad basta notar que $\|w \in y\| = \|w \in x\| \wedge \|\varphi(w)\| \geq x(w) \wedge \|\varphi(w)\|$. Y para la segunda $x(w) \leq \|w \in y\| \Rightarrow \|\varphi(w)\|$ si y sólo si $x(w) \wedge \|w \in y\| \leq \|\varphi(w)\|$ lo cual pasa si y sólo si $x(w) \wedge \|w \in x\| \wedge \|\varphi(w)\| \leq \|\varphi(w)\|$.

Unión. Sea $x \in V^{(B)}$, por Separación basta ver que hay $y \in V^{(B)}$ tal que $\|\forall z \in x(\forall w \in z(w \in y))\| = 1$. Entonces proponemos $y \in V^{(B)}$ como sigue:

$$dom(y) = \bigcup_{z \in dom(x)} dom(z)$$

$$y(t) = 1 \text{ para toda } t \in dom(y)$$

Para ver que $\bigwedge_{z\in dom(x)}(x(z) \Rightarrow \|\forall w \in z(w \in y)\|) = 1$, sea $z \in dom(x)$ y veamos que $x(z) \leq \|\forall w \in z(w \in y)\|$, es decir, $x(z) \leq \bigwedge_{w\in dom(z)}(z(w) \Rightarrow \|w \in y\|)$ y para esto basta ver que para todo $w \in dom(z)$, $x(z) \leq (z(w) \Rightarrow \|w \in y\|)$. Ahora como $w \in dom(z)$ y $z \in dom(x)$, entonces $w \in dom(y)$ así $\|w \in y\| \geq y(w) = 1$, por lo que $x(z) \wedge z(w) \leq \|w \in y\|$ y entonces por (1.6) $x(z) \leq (z(w) \Rightarrow \|w \in y\|)$.

Potencia. Sea $x \in V^{(B)}$ y veamos que hay $y \in V^{(B)}$ tal que $\|\forall z(z \subseteq x \to z \in y)\| = 1$. Para lo cual definimos $y \in V^{(B)}$ por, $dom(y) = \{u \in V^{(B)} | dom(u) = dom(x)\}$ y $y(u) = \|u \subseteq x\|$. Dado $z \in V^{(B)}$ hay que ver que $\|z \subseteq x\| \leq \|z \in y\|$. Para esto, dado $z \in V^{(B)}$ definimos $z' \in V^{(B)}$ por $dom(z') = dom(x)$ y $z'(t) = \|t \in z\|$ (así $z' \in dom(y)$) y veamos que $\|z \subseteq x\| \leq \|z = z'\| \wedge \|z' \in y\|$.

Para esto primero notemos que

$$\begin{aligned} \|z' \subseteq z\| &= \bigwedge_{t\in dom(z')} z'(t) \Rightarrow \|t \in z\| \\ &= \bigwedge_{t\in dom(z')} \|t \in z\| \Rightarrow \|t \in z\| \\ &= 1 \end{aligned}$$

y ahora veamos que

$$\|z \subseteq x\| \leq \|x \cap z \subseteq z' \wedge z' \subseteq z \wedge z \subseteq x\| \leq \|z = z'\|$$

Para ello sólo hace falta ver que $\|x \cap z \subseteq z'\| = 1$.

$$\begin{aligned} \|w \in x \cap z\| &= \|w \in x\| \wedge \|w \in z\| \\ &= \bigvee_{t\in dom(x)} x(t) \wedge \|t = w\| \wedge \|w \in z\| \\ &\leq \bigvee_{t\in dom(x)} \|t = w\| \wedge \|t \in z\| \\ &= \bigvee_{t\in dom(x)} \|t = w\| \wedge z'(t) \\ &= \|w \in z'\| \end{aligned}$$

Ya sólo falta ver que $\|z \subseteq x\| \leq \|z' \in y\|$.

$$\begin{aligned} \|z \subseteq x\| &= \|\forall w(w \in z \to w \in x)\| \\ &= \bigwedge_{w\in V^{(B)}} (\|w \in z\| \Rightarrow \|w \in x\|) \\ &\leq \bigwedge_{w\in dom(z')} (z'(w) \Rightarrow \|w \in x\|) \\ &= \|z' \subseteq x\| \\ &= y(z') \\ &\leq \|z' \in y\| \end{aligned}$$

Infinito. Como ser inductivo es equivalente a una fórmula Δ_0, usando 2.57 se tiene que

$$\|\breve{\omega} \text{ es inductivo}\| = 1.$$

Reemplazo. Sea $x \in V^{(B)}$ y φ una fórmula con dos variables libres como en [Je] página 65. Basta ver que hay $y \in V^{(B)}$ tal que:

$$\|\forall u \in x(\exists v\varphi(u,v) \to \exists v \in y\varphi(u,v))\| = 1$$

Tomemos $y \in V^{(B)}$ tal que $dom(y) = \bigcup\{S_u | u \in dom(x)\}$ con $y(t) = 1$ para todo $t \in dom(y)$, donde $S_u \subseteq V^{(B)}$ es un conjunto que cumple $\bigvee_{v \in V^{(B)}} \|\varphi(u,v)\| = \bigvee_{v \in S_u} \|\varphi(u,v)\|$ (S_u es un conjunto por elección en V).

Sea $u \in dom(x)$, por 2.48 hay que ver que $x(u) \leq \|\exists v\varphi(u,v) \to \exists v \in y\varphi(u,v)\| = (\|\exists v\varphi(u,v)\| \Rightarrow \|\exists v \in y\varphi(u,v)\|)$. Entonces si probamos que lo último es igual a 1, es decir, $\|\exists v\varphi(u,v)\| \leq \|\exists v \in y\varphi(u,v)\|$ ya habríamos acabado, entonces:

$$\begin{aligned}
\|\exists v\varphi(u,v)\| &= \bigvee_{a \in V^{(B)}} \|\varphi(u,a)\| \\
&= \bigvee_{a \in S_u} \|\varphi(u,a)\| \\
&\leq \bigvee_{a \in dom(y)} \|\varphi(u,a)\| \\
&= \bigvee_{a \in dom(y)} (y(a) \wedge \|\varphi(u,a)\|) \\
&= \|\exists v \in y\varphi(u,v)\| && \text{por 2.48.}
\end{aligned}$$

Buena Fundación. Sea $x \in V^{(B)}$, veamos que

$$\|\exists u(u \in x) \to \exists y \in x\forall z \in y(z \notin x)\| = 1.$$

Supongamos que no, es decir:

$$\|\exists u(u \in x) \wedge \forall y \in x\exists z \in y(z \in x)\| = b \neq 0.$$

Sea $y \in V^{(B)}$ de rango mínimo tal que $\|y \in x\| \wedge b \neq 0$, entonces $\|y \in x\| \wedge b \leq \|\exists z \in y(z \in x)\|$ y así hay $z \in dom(y)$ tal que $\|z \in x\| \wedge b \neq 0$ y además $rank(z) < rank(y)$ lo cual es una contradicción.

Elección. Por Elección en V y 2.59 sabemos que para cualquier $s \in V$

$$\|\check{s} \text{ es bien ordenable}\| = 1$$

Por lo que dado $x \in V^{(B)}$, veamos que hay $s \in V$ y una "función" $f \in V^{(B)}$ tales que

$$\|f \text{ es una función sobre } \check{s} \text{ y } x \subseteq Im(f)\| = 1 \tag{2.20}$$

Entonces sea $s = dom(x)$ y $f \in V^{(B)}$ definida como sigue: $dom(f) = \{(\check{y}, y)^{V^{(B)}} | y \in s\}$ y para toda $t \in dom(f)$, $f(t) = 1$. Ahora tenemos que ver dos cosas:

1. $X \subseteq Im(f)$. Para esto hay que decir quien es $Im(f)$, lo cual se hace como sigue:

$$dom(Im(f)) = \{y|(\check{y}, y) \in dom(f)\}$$
$$Im(f)(y) = f(\check{y}, y)$$

   y con esto es fácil ver que $\|x \subseteq Im(f)\| = 1$.

2. f es sobre $\check{s}$. Para esto hay que usar el corolario 2.57. En efecto, pues si en V consideramos una función g que cumple $g(\check{y}) = y$ para toda $y \in s$, entonces tendríamos que g es sobre s y entonces podríamos asegurar que $\|\check{g}$ es sobre $\check{s}\| = 1$.

□

2.5. La Relación de Forcing

En esta sección introduciremos el lenguaje de forcing usando nombres, definiremos la relación "$\Vdash$" y probaremos los tres teoremas de forcing, es decir, los teoremas 2.14, 2.15 y 2.16.

Sea M un modelo transitivo de ZFC, y sea $P \in M$ una noción de forcing, entonces hay un álgebra de Boole completa $B = B(P)$ y una función $e : P \to B^+$ que satisfacen (i)-(iii) del corolario 2.24 y denotaremos M^B al modelo booleano-valuado definido en la sección anterior relativizado a M.

Definición 2.63. $M^P = M^{B(P)} = M^B$. Los elementos de M^P se llaman *P-nombres* o sólo *nombres* y se denotarán por letras punteadas. El *lenguaje de forcing* es el lenguaje de la teoría de conjuntos añadiendo a los nombres como constantes. La *relación de forcing* $\Vdash_P$ (o sólo $\Vdash$ cuando sea claro quién es P) se define como:

$$p \Vdash \varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n) \text{ si y sólo si } e(p) \leq \|\varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)\|$$

donde φ es una fórmula de la teoría de conjuntos, $\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n$ son nombres y e es la función descrita en 2.24.

Prueba del Teorema 2.16.

(i)
   (a) Si $p \Vdash \varphi$ y $q \leq p$, entonces $e(q) \leq e(p) \leq \|\varphi\|$, por lo que $q \Vdash \varphi$.
   (b) Supongamos que $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \neg\varphi$, entonces $e(p) \leq \|\varphi\| \wedge \neg\|\varphi\| = 0$ lo cual es una contradicción.
   (c) Sea $p \in P$, si $e(p) \wedge \|\varphi\| \neq 0$ entonces como $e[P] \subseteq B^+$ es denso hay $q' \in P$ tal que $e(q') \leq e(p) \wedge \|\varphi\|$ y por 2.25 hay $q \leq p$ tal que $e(q) \leq \|\varphi\|$. El otro caso ($e(p) \wedge \|\varphi\| = 0$) implica $e(p) \leq \|\neg\varphi\|$.

(ii)
   (a) Izquierda-Derecha: si $p \Vdash \neg\varphi$ supongamos que hay $q \leq p$ tal que $q \Vdash \varphi$, entonces por (i)(a) $q \Vdash \varphi$ y $q \Vdash \neg\varphi$ que por (i)(b) es una contradicción. Derecha-Izquierda: si $p \nVdash \neg\varphi$, entonces $e(p) \nleq \neg\|\varphi\|$, entonces $e(p) \wedge \|\varphi\| \neq 0$ por lo tanto hay $q \leq p$ tal que $e(q) \leq \|\varphi\|$, es decir, $q \Vdash \varphi$
   (b) $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $e(p) \leq \|\varphi\| \wedge \|\psi\|$ si y sólo si $e(p) \leq \|\varphi\|$ y $e(p) \leq \|\psi\|$ si y sólo si $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \psi$.
   $p \Vdash \forall x\varphi$ si y sólo si $e(p) \leq \|\forall x\varphi\| = \bigwedge_{\dot{a} \in M^P} \|\varphi(\dot{a})\|$ si y sólo si para toda $\dot{a} \in M^P$ $e(p) \leq \|\varphi(\dot{a})\|$, es decir, para toda $\dot{a} \in M^P$, $p \Vdash \varphi(\dot{a})$.

(c) Este inciso se sigue de (ii) (a) y (b).

(iii) Si $p \Vdash \exists x\varphi$, entonces $e(p) \leq \|\exists x\varphi\|$ y por 2.50 y (2.5) M^P es lleno, por lo que $e(p) \leq \|\varphi(\dot{a})\|$ para algún $\dot{a} \in M^P$. El reciproco es fácil , por (ii)(a) y (b).

□

Una aplicación de estas propiedades es la siguiente.

Proposición 2.64. *Sean P un forcing y φ una fórmula, entonces $D = \{p \in P | p \Vdash \varphi$ o $p \Vdash \neg\varphi\}$ es denso.*

Prueba. Sea $q \in P$ por 2.16(i)(c) se tiene que hay $p \leq q$ tal que p decide a φ, es decir, $p \in D$. Por lo tanto D es denso. □

Y ahora empecemos a construir el modelo que nos interesa, es decir, la extensión genérica de nuestro modelo base M y probar los teoremas 2.14 y 2.15.

Definición 2.65. Sea M un modelo transitivo de ZFC y B un álgebra de Boole completa, $B \in M$ y sea G un ultrafiltro M-genérico sobre B. Para cada $x \in M^B$ definimos x^G por recursión sobre $rank(x)$ y $M[G]$ como sigue:

(i) $\emptyset^G = \emptyset$.

(ii) $x^G = \{y^G | x(y) \in G\}$.

(iii) $M[G] = \{x^G | x \in M^B\}$.

Observación 2.66. $M[G]$ es transitivo.

Prueba. Sea $a \in M[G]$ y $b \in a$, como $a \in M[G]$ entonces $a = x^G = \{y^G | x(y) \in G\}$ para algún $x \in M^B$ y como $b \in a$, entonces $b = y^G$ para algún $y \in dom(x)$ tal que $x(y) \in G$, así $dom(x) \subseteq M^B$ y por lo tanto $y \in M^B$, entonces $b \in M[G]$. □

Ahora podemos dar un nombre $\dot{G}$ para el filtro genérico, lo que queremos es que $G \in M[G]$, por lo que dicho nombre debe cumplir $\dot{G}^G = G$ por lo que un candidato bastante natural sería tomar su nombre canónico, es decir

$$dom(\check{G}) = \{\check{u} | u \in G\}$$
$$\check{G}(\check{u}) = 1$$

pero si lo definimos así, como el dominio de un nombre debe estar en el modelo base, en nuestro caso M, usando reemplazo en M tendríamos que $G \in M$ y una vez que tengamos el teorema 2.14 tendríamos que $M = M[G]$ y no habríamos hecho nada. Por lo que tenemos que definirlo de la siguiente manera

Definición 2.67. El *nombre "canónico" $\dot{G}$ para un ultrafiltro genérico* es la función booleano-valuada definida por:

$$dom(\dot{G}) = \{\check{u} | u \in B\}, \quad \dot{G}(\check{u}) = u \text{ para todo } u \in B.$$

Además también es posible definir un nombre para M usando que $a \in M$ si y sólo si $\exists x \in M(a = x)$. Así es posible decir cuándo una condición fuerza que alguien esté en M o bien en G.

Definición 2.68. (i) $p \Vdash \dot{a} \in \check{M}$ si y sólo si $\forall q \leq p \exists r \leq q \exists x (r \Vdash \dot{a} = \check{x})$.

(ii) $p \Vdash q \in \dot{G}$ si y sólo si $\forall r \leq p \exists s \leq r (s \leq q)$.

Con todo esto ya podemos ver cómo es la verdad en $M[G]$, pero empecemos por las atómicas.

Lema 2.69. *Sea G un ultrafiltro M-genérico sobre B, entonces para todo $x, y \in M^B$ nombres*

(i) $x^G \in y^G$ *si y sólo si* $\|x \in y\| \in G$.

(ii) $x^G = y^G$ *si y sólo si* $\|x = y\| \in G$.

Prueba. Se probará (i) y (ii) simultáneamente por inducción sobre los pares $\langle rank(x), rank(y) \rangle$.

(i)

$$\begin{aligned}
\|x \in y\| \in G &\Longleftrightarrow \bigvee_{t \in dom(y)} (y(t) \wedge \|x = t\|) \in G \\
&\Longleftrightarrow \exists t \in dom(y)(y(t) \wedge \|x = t\| \in G) && \text{por 2.36} \\
&\Longleftrightarrow \exists t \in dom(y)(y(t) \in G \text{ y } x^G = t^G) && \text{por H.I.} \\
&\Longleftrightarrow x^G \in \{t^G | y(t) \in G\} = y^G
\end{aligned}$$

(ii) Solo se probará una contención, la otra es análoga.

$$\begin{aligned}
\|x \subseteq y\| \in G &\Longleftrightarrow \bigwedge_{t \in dom(x)} (x(t) \Rightarrow \|t \in y\|) \in G \\
&\Longleftrightarrow \forall t \in dom(x)(x(t) \in G \;\rightarrow\; \|t \in y\| \in G) \\
&\Longleftrightarrow \forall t(x(t) \in G \;\rightarrow\; t^G \in y^G) \\
&\Longleftrightarrow \{t^G | x(t) \in G\} \subseteq y^G \\
&\Longleftrightarrow x^G \subseteq y^G.
\end{aligned}$$

□

Ya que tenemos esto es fácil ver que $M^{(B)}/G \cong M[G]$ y por (2.4) se tiene que si φ es una fórmula y $x_1, \ldots, x_n \in M^{(B)}$, entonces

$$M[G] \vDash \varphi(x_1^G, \ldots, x_n^G) \text{ si y sólo si } \|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\| \in G \tag{2.21}$$

Y con este ya es fácil ver que

Corolario 2.70. $M[G]$ *es modelo de* ZFC.

Prueba. Por el teorema 2.62, M^B es modelo de ZFC, por lo tanto $\|\sigma\| = 1 \in G$ para todo σ axioma de ZFC y todo filtro G en B por lo tanto $M[G] \models \sigma$ para todo σ axioma de ZFC. □

Por fin podemos ver los teoremas del principio del capitulo que no hemos probado, pero antes una observación que nos será de gran ayuda, ya que los teoremas del principio del capitulo están enunciados para órdenes parciales e hicimos forcing con álgebras de Boole. Entonces tenemos que ver que dar una interpretación de lo nombres que no dependa del álgebra y ver que la extensiones genéricas que se obtienen son las mismas.

Dado M un modelo base, $P \in M$ una noción de forcing y $G \subseteq P$ un filtro genérico sobre M consideramos $B = B(P)$ y $e : P \to B$ como en 2.24. Así, definimos $M^P = M^{B(P)}$ y definimos una G-interpretación para para los P-nombres como sigue:

$$(i) \quad \emptyset^G = \emptyset$$
$$(ii) \quad x^G = \{y^G | \exists p \in G(e(p) \leq x(y)\}$$
$$(iii) \quad M[G] = \{x^G | x \in M^P\}.$$

Ahora veamos que usando a la función e estas definiciones dicen lo mismo y por tanto las extensiones genéricas que se obtienen serán las mismas.

Sea H el ultrafiltro genérico sobre B generado por $e(G)$, es decir, $H = \{u \in B | \exists p \in G(e(p) \leq u)\}$. Es fácil ver que H es filtro, y para ver que es genérico hay que tomar $D \subseteq B$"+ denso y observar, usando 2.25, que $E = \{p \in P | e(p) \leq d$ para algún $d \in D\}$ es denso en P. Así hay $p \in G \cap E$ con lo que obtenemos que $e(p) \leq d$ para algún $d \in D$ y $p \in G$, es decir, $d \in H$.

Finalmente veamos que las extensiones genéricas son las mismas. Supongamos que para toda $y \in dom(x)$ $y^H = y^G$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} y^H \in x^H &\iff x(y) \in H \\ &\iff \exists p \in G(e(p) \leq x(y)) \\ &\iff y^H \in x^G \end{aligned}$$

Con lo cual ya podemos probar lo que se había prometido.

Prueba del Teorema 2.14. (i) Por 2.70 $M[G]$ es modelo de ZFC.

(ii) Para ver que $M \subseteq M[G]$ veamos por inducción que $\check{x}^G = x$. Supongamos que $\check{y}^G = y$ para todo $\check{y} \in dom(\check{x})$, por lo tanto $\check{x}^G = \{\check{y}^G | \check{x}(\check{y}) \in G\}$ y como $\check{x}(\check{y}) = 1 \in G$ para todo $\check{y} \in dom(\check{x})$, es decir, para todo $y \in x$, entonces $\check{x}^G = \{y | y \in x\} = x$. Además $\dot{G}^G \in M[G]$ y $\dot{G}^G = \{\check{u}^G | \dot{G}(\check{u}) \in G\} = \{u | u \in G\} = G$.

(iii) Para ver que $Ord^M = Ord^{M[G]}$, sabemos que todo ordinal de M también es un ordinal en $M[G]$ por lo que sólo hay que ver que si tenemos un ordinal en $M[G]$ éste también está en M.

$$\begin{aligned} M[G] \vDash x \text{ es un ordinal} &\iff M[G] \vDash y^G \text{ es un ordinal} && \text{con } y \in M^B \\ &\iff \|y \text{ es un ordinal}\| \in G && \text{por (2.21)} \\ &\iff \bigvee_{\alpha \in OR^M} \|y = \check{\alpha}\| \in G && \text{por (2.17)} \\ &\iff \exists \alpha \in OR^M(\|y = \check{\alpha}\| \in G) && \text{por 2.36} \\ &\iff \exists \alpha \in OR^M(x = y^G = \check{\alpha}^G = \alpha) && \text{por 2.69} \\ &\iff x \in OR^M \end{aligned}$$

(iv) Si M y N son modelos transitivos de ZFC tales que $M \subseteq N$ y $G \in N$ entonces toda la construcción de $M[G]$ se puede hacer dentro de N por lo que $M[G] \subseteq N$.

$\square$

Prueba del Teorema 2.15. Basta notar que

$$\begin{aligned} M[G] \vDash \sigma &\iff M[H] \vDash \sigma \\ &\iff \|\sigma\| \in H && \text{por (2.21)} \\ &\iff \exists p \in G(e(p) \leq \|\sigma\|) \\ &\iff \exists p \in G(p \Vdash \sigma) && \text{por definición de } \Vdash \end{aligned}$$

$\square$

Finalmente veamos una interesante equivalencia de la noción de forzar.

Proposición 2.71. *Sean P una noción de forcing, $p \in P$ y φ una fórmula. $p \Vdash \varphi$ si y sólo si para todo G P-genérico sobre V tal que $p \in G$ se tiene que $V[G] \vDash \varphi$.*

Prueba. Sea $e\colon P \to P(B)$ como en 2.24 y $H = \{a \in B(P) | \exists p \in G(e(p) \leq a)\}$. De la misma manera que en la prueba anterior (la prueba del teorema 2.14) tenemos que $V[G] = V[H]$. Entonces usando esto haremos las dos implicaciones.

($\Rightarrow$) Sea G un P-genérico sobre V tal que $p \in G$. Esto quiere decir que $e(p) \in H$ y como $p \Vdash \varphi$, entonces $\|\varphi\| \in H$ y por (2.21) se tiene que $V[H] \vDash \varphi$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $e(p) \not\leq \|\varphi\|$. Entonces hay $q' \in P$ tal que $e(q') \leq e(p) \wedge \neg\|\varphi\|$. Entonces, por 2.25 hay $q \leq p$ tal que $e(q) \leq e(q')$. Si G es un P-genérico tal que $q \in G$, entonces por un lado tenemos que $p \in G$ y por otro lado tenemos que $\|\neg\varphi\| = \neg\|\varphi\| \in H$, con lo cual $V[H] \vDash \neg\varphi$.

$\square$

Capítulo 3

Aplicaciones de Forcing

3.1. Reales de Cohen

El primer ejemplo será cómo añadir un nuevo real en la extensión genérica. En esta sección introduciremos ideas que serán importantes en los siguientes ejemplos, por lo que empezaremos dando nombres a lo que haremos.

Definición 3.1. Sean I y J dos conjuntos, definimos el siguiente forcing, $Fun_\omega(I,J) = \{f : I \to J | f \text{ es finita}\}$[1] donde $f \le g$ si y sólo si $g \subseteq f$.

Proposición 3.2. *Sean I infinito y $J \neq \emptyset$. Si $G \subseteq Fun_\omega(I,J)$ es un filtro genérico, entonces en $V[G]$, $\bigcup G$ es una función suprayectiva de I en J.*

Prueba. Como G es filtro, entonces es una familia compatible de funciones, por lo que $\bigcup G$ es función. Para ver que su dominio es I basta notar que para todo $i \in I$, $D_i = \{p \in Fun_\omega(I,J) | i \in dom(p)\}$ es denso y para ver que su imagen es todo J hay que observar que para todo $j \in J$, $D_j = \{p \in Fun_\omega(I,J) | j \in Im(p)\}$ es denso.

1. D_i es denso. Sea $p \in Fun_\omega(I,J)$ y supongamos que $i \notin dom(p)$, como $J \neq \emptyset$ sea $j \in J$ y definimos $q = p \cup \{(i,j)\}$, así es claro que $q \in D_i$ y $q \le p$.

2. D_j es denso. Sea $p \in Fun_\omega(I,J)$ y supongamos que $j \notin Im(p)$ como I es infinito y $dom(p)$ es finito sea $i \in I \setminus dom(p)$, así la condición que buscamos es $q = p \cup \{(i,j)\}$.

$\square$

Si consideramos $Fun_\omega(\omega, 2)$ y $G \subseteq Fun_\omega(\omega,2)$ un genérico, entonces $f = \bigcup G$ es una función suprayectiva de ω en 2, es decir, representa a un subconjunto de ω y lo que hace falta ver es que este subconjunto no está en el modelo base.

Proposición 3.3. *Para toda $g \in {}^\omega 2$ tal que $g \in V$ se tiene que $f \neq g$.*

Prueba. Para esto basta ver que $D_g = \{p \in Fun_\omega(\omega,2) | p \nsubseteq g\}$ es denso, ya que si este conjunto es denso podemos tomar $p \in G \cap D_g$ y así habría $n \in \omega$ tal que $p(n) \neq g(n)$ concluyendo que $f(n) \neq g(n)$ como se quiere. La prueba de que D_g es denso es fácil y será omitida. $\square$

[1] es decir, $dom(f) \subseteq I$, $Im(f) \subseteq J$ y $|f| < \omega$

Con esto ya tenemos que $Fun_\omega(\omega, 2)$ añade un nuevo subconjunto de ω a la extensión genérica, es decir, un nuevo número real al que llamaremos *real de Cohen*.

Además si I es infinito y J tiene al menos dos elementos es fácil ver que $Fun_\omega(I, J)$ es frondoso y por lo tanto las extenciones genéricas con este orden parcial son extensiones propias del universo.

3.2. Hipótesis del Continuo primera parte

Para este ejemplo generalicemos un poco la idea de antes, es decir, ahora añadamos κ reales de Cohen para algún cardinal κ. Pero para esto necesitamos que el forcing preserve cardinales, pues estamos añadiendo nuevos conjuntos al universo y al hacer esto podríamos añadir una función inyectiva de κ en α con $\alpha < \kappa$ y entonces en la extensión genérica el "cardinal" κ^V ya no sería un cardinal, entonces empezaremos viendo algunas propiedades de los forcing $Fun_\omega(I, J)$.

Corolario 3.4. *En el modelo base sea $\kappa > \omega$, entonces hay una extensión genérica en la que κ es un ordinal numerable.*

Prueba. Basta tomar $Fun_\omega(\omega, \kappa)$ que por la proposición anterior, si $G \subseteq Fun_\omega(\omega, \kappa)$ es un filtro genérico, entonces $\bigcup G$ es una función suprayectiva de ω en κ, por lo que en esta extensión κ es un ordinal numerable. □

A esto se le llama *colapso de cardinales*, ahora veamos cómo evitar que esto suceda, pues nos gustaría que tuviéramos $\omega_2^V = \omega_2^{V[G]}$. Para esto necesitamos la

Definición 3.5. Un orden parcial P cumple la *condición de la cadena contable* (*ccc*) si toda anticadena en P es contable.

El objetivo es ver que si un forcing cumple *ccc* entonces preserva cardinales y como esto se basa en la existencia de ciertas funciones, entonces empezaremos viendo qué tanto podemos saber de una función en $V[G]$.

Lema 3.6. *Sean P un forcing que cumple ccc, $A, B \in V$ y $f\colon A \to B$ una función en $V[G]$. Entonces hay $\{B_a \subseteq B | a \in A\} \in V$ tal que $f(a) \in B_a$ y $|B_a| \leq \aleph_0$.*

Prueba. Como la función $f \in V[G]$ entonces hay $p \in G$ tal que $p \Vdash \dot{f}$ es una función de $\check{A}$ en $\check{B}$. Ahora para cada $a \in A$ definimos

$$B_a = \{b \in B | \exists q \leq p (q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b})\}$$

y entonces para ver que $f(a) \in B_a$ sea $b = f(a)$, así hay $r \in G$ tal que $r \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}$ y tomando $q \in G$ una extensión común de p y r se tiene que $q \leq p$ y $q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}$, así $f(a) = b \in B_a$.

Para ver que $|B_a| \leq \aleph_0$ para cada $b \in B_a$ sea

$$Q_b = \{q \leq p | q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}\}$$

y si $b \neq b'$ están en B_a entonces $Q_b \cap Q_{b'} = \emptyset$ y no sólo eso sino que si $q \in Q_b$ y $q' \in Q_{b'}$ entonces $q \perp q'$. Por lo tanto, usando AE, para cada $b \in B_a$ sea $q_b \in Q_b$ y así $Q = \{q_b | b \in B_a\}$ es una anticadena en P por lo que $|B_a| = |Q| \leq \aleph_0$.

Y para terminar sólo hay que notar que B_a es definible para todo $a \in A$ por lo que $\{B_a \subseteq B | a \in A\} \in V$. □

Para ver que un forcing que cumple *ccc* preserva cardinales basta ver que preserva cofinalidades, ya que si preserva cofinalidades tenemos que si κ es regular entonces $\kappa^V = cf^V(\kappa) = cf^{V[G]}(\kappa)$, así κ^V es un cardinal (regular) en $V[G]$ y si κ es singular entonces hay un ordinal límite α tal que $\kappa = \aleph_\alpha$ y así

$$(\aleph_\alpha)^V = \bigcup_{\beta<\alpha} (\aleph_\beta)^V$$

y por hipótesis cada $(\aleph_\beta)^V$ con $\beta < \alpha$ es un cardinal en $V[G]$. Con lo cual, en $V[G]$, κ^V es el supremo de un conjunto de cardinales y por tanto un cardinal.

Entonces lo hay que ver es que preserva cofinalidades pero para esto basta ver que preserva regularidad, es decir, que si en V tenemos que κ es regular entonces, en $V[G]$, κ^V es regular. En efecto, si P preserva la regularidad y γ es un ordinal límite[2] sea $(\kappa = cf(\gamma))^V$ entonces hay, en V, una función cofinal y estrictamente creciente de κ en γ y como esta función está en V también está en $V[G]$ y además también es cofinal y creciente pues todo se puede escribir con fórmulas Δ_0. Ahora como se preserva la regularidad tenemos que en $V[G]$, κ^V es regular y con esto se tiene que[3] en $V[G]$, $\kappa^V = cf^{V[G]}(\kappa^V) = cf^{V[G]}(\gamma)$. Por lo tanto $cf^V(\gamma) = cf^{V[G]}(\gamma)$.
Entonces sólo hay que ver

Teorema 3.8. *Si P satisface ccc entonces preserva regularidad.*

Prueba. Sea κ un cardinal regular según V y $\lambda < \kappa$ para ver que κ es regular según $V[G]$ hay que ver que toda función $f \in V[G]$ de λ en κ es acotada. Por 3.6 para cada $\alpha < \lambda$ sea $B_\alpha \subseteq \kappa$ tal que $f(\alpha) \in B_\alpha$ y $|B_\alpha| \leq \aleph_0$, como κ es regular en V, entonces $\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$ está acotado por algún $\gamma \in \kappa$ por lo que en $V[G]$ $f(\alpha) < \gamma$ para todo $\alpha < \lambda$, así f está acotada en $V[G]$ y en consecuencia κ es regular en $V[G]$ □

Como ya hemos visto antes los forcing del tipo $Fun_\omega(I, J)$ son de gran importancia y la siguiente proposición los hará más importantes para violar HC. Pero para esto necesitaremos

Definición 3.9. Una familia de conjuntos A es llamada un Δ-*sistema* si y sólo si hay un conjunto r llamado la raíz del Δ-sistema tal que para cualesquiera $a, b \in A$, si $a \neq b$ entonces $a \cap b = r$.

Lema 3.10 (Lema del Δ-sistema)**.** *Si A es una familia incontable de conjuntos finitos, entonces hay $B \subseteq A$ incontable que forma un Δ-sistema.*

Prueba. Como A es incontable y sus elementos son finitos hay $C \subseteq A$ tal que C es incontable y todos sus elementos tienen el mismo cardinal, digamos n, entonces veamos por inducción sobre n que hay un Δ-sistema incontable contenido en C y por tanto en A.

Si $\forall c \in C(|c| = 1)$, entonces C es un Δ-sistema con raíz $\emptyset$. Si $\forall c \in C(|c| = n + 1)$ lo haremos por casos:

(i) Si hay $a \in \bigcup A$ tal que $a \in c$ para una cantidad no numerable de elementos de C, digamos D, entonces sea $C' = \{c \setminus \{a\} | c \in D\}$ y por hipótesis de inducción hay $B' \subseteq C'$ un Δ-sistema con raíz r', así $B = \{b \cup \{a\} | b \in B'\} \subseteq C$ es un Δ-sistema con raíz $r = r' \cup \{a\}$.

[2]basta hacerlo para los ordinales límite pues ser ordinal sucesor es Δ_0 y la cofinalidad de un sucesor es 1.
[3]Usando el siguiente resultado:

Teorema 3.7. *Si $F: \alpha \to \beta$ es cofinal y creciente entonces $cf(\alpha) = cf(\beta)$*

(ii) Si no hay $a \in \bigcup A$ tal que $a \in c$ para una cantidad no numerable de elementos de C, entonces definimos $D = \{z_\alpha | \alpha < \omega_1\} \subseteq C$ tal que si $\alpha \neq \beta$ entonces $z_\alpha \cap z_\beta = \emptyset$ recursivamente como sigue: supongamos definido z_β para todo $\beta < \alpha$ y sea $S_\alpha = \{c \in C | \exists \beta < \alpha(c \cap z_\beta \neq \emptyset)\}$ y por nuestra hipótesis y $|z_\beta| = n+1$ se tiene que $|S_\alpha| \leq \omega$ y así basta tomar $z_\alpha \in C \setminus S_\alpha$. Por construcción si $\alpha \neq \beta$ entonces $z_\alpha \cap z_\beta = \emptyset$ por lo tanto D es un Δ-sistema con raíz $\emptyset$.

□

Proposición 3.11. *Si J es contable entonces $Fun_\omega(I, J)$ cumple ccc.*

Prueba. Sea A un subconjunto incontable de $Fun_\omega(I, J)$ y sea $W = \{dom(p) | p \in A\}$, como J es contable W debe ser incontable [4] y entonces por 3.10 hay un Δ-sistema incontable $B \subseteq W$ y sea r su raíz. Sea $A' = \{p \in A | dom(p) \in B\}$. Así como r es finito y J es contable, se tiene que ${}^rJ$ y $\{p \restriction_r | p \in A'\}$ son contables, pues ambos son conjuntos de funciones de un finito en un contable, y entonces hay $X \subseteq A'$ incontable tal que $p \restriction_r = q \restriction_r$ para todo $p, q \in X$, por lo que X es un conjunto compatible de funciones. Por lo tanto A contiene un conjunto incontable de funciones compatibles 2 a 2 (a saber, X) por lo que A no puede ser una anticadena. □

Y entonces veamos cómo añadir “muchos” reales de Cohen, por ejemplo si $A \in V$ y queremos que los reales de la extensión genérica tengan al menos tantos elementos como A, lo que hay que hacer es construir una función inyectiva $g \colon A \to {}^\omega 2$, que es lo mismo[5] que construir una función $f \colon \omega \times A \to 2$.

Teorema 3.12. *Si $A \in V$ entonces hay un orden parcial que cumple ccc y si G es un genérico, entonces*

$$A \preccurlyeq ({}^\omega 2)^{V[G]6} \tag{3.1}$$

Prueba. Sea $P = Fun_\omega(\omega \times A, 2)$, que por 3.11 cumple *ccc*. Si $G \subseteq P$ es un genérico entonces sea $f = \bigcup G \in V[G]$. Por 3.2 f es una función de $\omega \times A$ en 2. Lo que falta ver es que $g_f \colon A \to {}^\omega 2$ es inyectiva, para lo cual dados $a \neq b$ en A queremos ver que $g_f(a) \neq g_f(b)$, es decir, debemos encontrar $n \in \omega$ tal que $g_f(a)(n) \neq g_f(b)(n)$ que recordando quién es g_f queremos que $f(n, a) \neq f(n, b)$, para lo cual basta encontrar $p \in G$ que cumpla lo que queremos, y para lograr esto consideramos

$$D = \{p \in P | \exists n \in \omega (p(n, a) \neq p(n, b))\}$$

y si vemos que D es denso ya habríamos acabado. Sea entonces $q \in P$ y como $dom(q) \subseteq \omega \times A$ es finito entonces hay $n \in \omega$ tal que $(n, a), (n, b) \notin dom(q)$[7] y definimos $p = q \cup \{\langle (n, a), 1\rangle, \langle (n, b), 0\rangle\}$ y es claro que $p \leq q$ y que $p \in D$ por lo que D es denso. □

---

[4]Si W es contable, entonces $W = \{d_n | n \in \omega \, y \, \exists p \in A(d_n = dom(p))\}$ y así $|A| \leq \sum_{n\in\omega} |{}^{d_n}J| \leq \sum_{n\in\omega} \aleph_0^{|p_n|} = \aleph_0$ que es una contradicción.

[5]si $f \colon A \times B \to C$ definimos $g_f \colon B \to {}^AC$ como sigue

$$g_f(b)(a) = f(a, b)$$

y si $g \colon B \to {}^AC$ definimos $f_g \colon A \times B \to C$ como

$$f_g(a, b) = g(b)(a)$$

[6]esto significa que $V[G] \models (v_0 \preccurlyeq {}^\omega 2)[A]$.

[7]de lo contrario $dom(q)$ sería infinito

Un argumento similar al de 3.3 nos dice que este forcing agrega $|A|$ reales nuevos. En este Teorema tomando $A = \kappa > \omega_1$, como se obtiene un orden parcial que cumple *ccc* entonces preserva cardinales, por lo que se tiene que

$$(\kappa \leq 2^{\aleph_0})^{V[G]} \tag{3.2}$$

que esto implica $\neg HC$. Aquí es importante observar que aunque el orden parcial preserva cardinales no preserva la exponenciación cardinal ya que como el teorema es para todo $A \in V$, en particular tomando $A = (2^{\aleph_0})^+$, o para $A = \aleph_{2^{\aleph_0}}$, entonces aunque el teorema sigue siendo cierto tendríamos que $A^V \neq A^{V[G]}$.

Hasta ahora aunque ya tenemos la consistencia de $\neg HC$, sólo tenemos una cota para $2^{\aleph_0}$, pero si queremos decidir quién es, veamos la siguiente proposición.

Proposición 3.13. *Sea λ un cardinal en V. Si B es un álgebra de Boole completa en V y G es un ultrafiltro genérico, entonces*

$$(2^\lambda)^{V[G]} \leq (|B|^\lambda)^V$$

Prueba. Cada $A \subseteq \lambda$ en $V[G]$ tiene un nombre $\dot{A} \in V^{(B)}$ y cada $\dot{A}$ determina una función $f_{\dot{A}} \colon \lambda \to B$ de la siguiente manera: para todo $\alpha < \lambda$

$$f_{\dot{A}}(\alpha) = \|\check{\alpha} \in \dot{A}\|$$

y es fácil ver que diferentes subconjuntos determinan diferentes funciones, por lo que el número de subconjuntos de λ en $V[G]$ es menor o igual que el número de funciones de λ en B en V. □

Entonces gracias a esta proposición para terminar de decidir el cardinal del continuo debemos ver qué pasa con el cardinal de un álgebra de Boole y sus potencias, que el caso cuando $\lambda = \aleph_0$ será el único que nos interesará. Además el único caso que nos interesa es cuando el álgebra es infinita y completa, pues son así las álgebras que se obtienen de los órdenes parciales que hemos estado usando (la completud se debe a 2.24 y la infinitud es un resultado fácil de que nuestro orden parcial es de la forma $Fun_\omega(I, J)$ con I infinito y J con al menos dos elementos), entonces en esta parte el álgebra de Boole B siempre será completa e infinita. También introduciremos algo de notación, si B es un álgebra de Boole y $a \in B$, entonces

$$a_\leq = \{b \in B | b \leq a\}$$

y haremos dos casos uno en el que el B es atómica en cuyo caso $B \cong \mathscr{P}(A)$ (ver [BA] corolario 2.7) donde $A = \{a_\alpha | \alpha < \kappa\}$ y entonces $|B|^{\aleph_0} = (2^\kappa)^{\aleph_0} = 2^\kappa = |B|$ y el otro es cuando B no es atómica, para lo cual usaremos.

Lema 3.14. *Sea B un álgebra de Boole completa, si $A \subseteq B$ es una anticadena maximal, entonces la función $f \colon B \to \prod_{a \in A} a_\leq$ dada por $f(b) = \langle b \wedge a \rangle_{a \in A}$ es una biyección. En particular se tiene que*

$$|B| = \prod_{a \in A} |a_\leq| \tag{3.3}$$

Prueba. Si $\langle b_a \rangle_{a \in A} \in \prod_{a \in A} a_\leq$, sea $b = \bigvee_{a \in A} b_a$ y entonces $f(b) = \langle b_a \rangle_{a \in A}$, pues como A es anticadena $b \wedge a = b_a$ para todo $a \in A$, por lo que f es suprayectiva.

Si $f(b) = f(b')$, entonces $\langle b \wedge a \rangle_{a \in A} = \langle b' \wedge a \rangle_{a \in A}$ y como A es maximal su supremo es 1 y por tanto $b = \bigvee_{a \in A}(b \wedge a) = \bigvee_{a \in A}(b' \wedge a) = b'$, así f es inyectiva. □

Ahora en el camino para ver que pasa con $|B|^{\aleph_0}$ necesitaremos de una definición.

Definición 3.15. Sea B un álgebra de Boole, un elemento $a \in B$ se llama *estable* si y sólo si para todo $x \leq a$, $x \neq 0$ se tiene que $|a_{\leq}| = |x_{\leq}|$.

Observación 3.16. (i) Si $a \in B$ es estable y $b \leq a$, entonces b es estable.

(ii) Si todos los elementos de un álgebra de Boole B son estables, entonces B no tiene átomos y $|a_{\leq}| = |B|$ para todo $a \in B$

Lema 3.17. *Sea B un álgebra de Boole, si a es estable para todo $a \in B$, entonces B contiene una anticadena maximal numerable.*

Prueba. Por (ii) de 3.16 B no tiene átomos, entonces podemos tomar un elemento $b \in B$, con $b \neq 1$ y considerar la anticadena $\{b, \neg b\}$ que es maximal pues su supremo es 1 y tomar $a, c < \neg b$ tales que $a \vee c = \neg b$, los dos distintos de 0 y tomar $\{b, a, c\}$ como otra anticadena maximal que en tamaño es más grande y así ir agrandando la anticadena. Entonces construimos la anticadena por recursión como sigue, sea $a_0 \in B$

$$\begin{aligned} A_0 &= \{a_0\} & & \\ A_1 &= \{a_0, a_1\} & & \text{donde } a_0 = a_1 \vee c_1 \\ A_{n+1} &= A_n \cup \{a_{n+1}\} & & \text{donde } a_n = a_{n+1} \vee c_{n+1} \\ A' &= \bigcup_{n \in \omega} A_n & & \end{aligned}$$

Esta construcción nos da una anticadena numerable, pero quizás no sea maximal por lo que tomando $A = A' \cup \{\neg \bigvee A'\}$ obtenemos una anticadena maximal numerable. □

Entonces con este lema, el inciso (ii) de 3.16 y (3.3) se tiene que si en un álgebra de Boole B todos sus elementos son estables, entonces

$$|B| = \prod_{a \in A} |a_{\leq}| = \prod_{a \in A} |B| = |B|^{\aleph_0} \tag{3.4}$$

donde A es la anticadena encontrada en 3.17. Pero las álgebras donde todos sus elementos sean estables quizás no sean tan comunes por lo que necesitamos resolver esto para un álgebra de Boole arbitraria, para lo cual usaremos el siguiente lema

Lema 3.18. *Sea B un álgebra de Boole entonces $D = \{a \in B | a \text{ es estable}\}$ es denso.*

Prueba. Supongamos que no lo es, entonces hay $b_0 \in B$ tal que $(b_0)_{\leq} \cap D = \emptyset$ por lo que hay $b_1 \leq b_0$ tal que $|(b_1)_{\leq}| < |(b_0)_{\leq}|$, análogamente hay $b_2 \leq b_1$ tal que $|(b_2)_{\leq}| < |(b_1)_{\leq}|$ y podemos seguir así y en ω pasos habríamos construido una sucesión decreciente de cardinales que es una contradicción. □

Proposición 3.19. *Sea B un álgebra de Boole entonces B contiene una anticadena maximal A donde a es estable para todo $a \in A$.*

Prueba. La idea es copiar la construcción de 3.17 usando que el conjunto D de estables es denso. Primero tomamos $b \in B$ tal que $1 \neq b$ y no hay átomos menores que b, entonces en el álgebra de Boole $b_{\leq}$ construimos una anticadena de estables de la misma manera que en 3.17 salvo porque en cada paso debemos usar que el conjunto D de estables es denso para asegurar que todos los elementos de la anticadena son estables y a esta anticadena la llamamos A_0. Luego si ya tenemos A_α para definir $A_{\alpha+1}$ hay que hacer lo mismo en el álgebra $(\neg \bigvee A_0)_{\leq}$ obteniendo una anticadena A'_α y hacemos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup A'_\alpha$ y en el límite hay que tomar la unión de las anteriores. Entonces si $b < \alpha$ tenemos que $\neg \bigvee A_\alpha < \neg \bigvee A_\beta$. De esta manera en a lo más $|B|$ pasos llegamos a que $\neg \bigvee A_\alpha$ es estable o cero. En cualquiera de los dos casos habríamos construido una anticadena maximal de estables bajo b, digamos A.

Ahora repetimos este proceso en el álgebra $(\neg b)_{\leq}$. La diferencia es que ahora podríamos llegar a un átomo en algún momento de la construcción, pero no es ningún problema ya que un átomo es estable y en la construcción empezábamos tomando $a_0 \leq \neg b$ estable y considerábamos $\neg a_0$ para dar un a_1 estable. Pero en este caso, $\neg a_0$ podría ser átomo, pero eso sólo significa que ya tenemos una anticadena maximal bajo $\neg b$, a saber $A' = \{a_0, \neg a_0\}$ con lo cual, $A \cup A'$ es una anticadena maximal en B. Entonces la construcción es la misma que antes salvo que esta vez podría detenerse a la mitad de la construcción de un "A_α" y olvidarse de lo anterior. De esta manera hemos construido una anticadena maximal de estables bajo $\neg b$ y por tanto una anticadena maximal de estables en B. $\square$

Para concluir este caso hay que observar que si tomamos $a \in B$ estable y le damos estructura, a $a_{\leq}$, de álgebra de Boole, como todos los elementos de esta álgebra serían estables pues su máximo es a, entonces por (3.4) se tiene que $|a_{\leq}| = |a_{\leq}|^{\aleph_0}$. y así podemos concluir que si B es un álgebra de Boole arbitraria y A es una anticadena maximal formada por estables, entonces:

$$|B| = \prod_{a \in A} |a_{\leq}| = \prod_{a \in A} |a_{\leq}|^{\aleph_0} = |B|^{\aleph_0} \tag{3.5}$$

donde la segunda igualdad se debe a (3.4) y la última (al igual que la primera) a (3.3).

Ahora, si tomamos un forcing P que cumple *ccc* y consideramos el álgebra $B(P)$ que construimos a partir de P, entonces si tomamos $b \in B(P)$, a b lo podemos ver como el supremo de una anticadena contable de elementos de P pues

Proposición 3.20. *Sea $e\colon P \to B(P)$ como en 2.24 y $b \in B$, entonces*

$$b = \bigvee_{p \in Q_b} e(p)$$

donde $Q_b = \{p \in P | e(p) \leq b\}$.

Prueba.

($\geq$) Ésta desigualdad es fácil.

($\leq$) Supongamos que $b \nleq \bigvee_{p \in Q_b} e(p)$, entonces $b \wedge \neg \bigvee_{p \in Q_b} e(p) \neq 0$ por lo que hay $q \in P$ tal que $e(q) \leq b \wedge \neg \bigvee_{p \in Q_b} e(p)$, así $q \in Q_b$ y $e(q) \leq \neg \bigvee_{p \in Q_b} e(p)$ por lo que $e(q) = e(q) \wedge \bigvee_{p \in Q_b} e(p) = 0$ que es una contradicción

$\square$

Un argumento similar nos da que si tomamos $A_b \subseteq Q_b$ una anticadena maximal, entonces $b = \bigvee_{p\in A_b} e(p)$ y usando que P cumple *ccc* se tiene que A_b es contable y es fácil ver que esta asociación es inyectiva. Entonces en $B(P)$ hay a lo más tantos elementos como subconjuntos contables de P, es decir, $|B(P)| \leq |P|^{\aleph_0}$ y además (Si P es separativo, como en nuestro caso) la función e asegura que $|P| \leq |B(P)|$, por lo que usando (3.5) tenemos

$$|P|^{\aleph_0} = |B(P)| \tag{3.6}$$

Para terminar este ejemplo hay que tomar un cardinal κ que en V cumpla $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$[8], y usar el forcing $Fun_\omega(\omega \times \kappa, 2)$ para tener, por (3.2), que $\kappa^V \leq (2^{\aleph_0})^{V[G]}$, como además probamos que este tipo de forcing preserva cardinales, entonces se tiene que

$$\left(\kappa \leq 2^{\aleph_0}\right)^{V[G]} \tag{3.7}$$

y el cardinal de este forcing es κ, así el cardinal de su álgebra de Boole asociada B es $\kappa^{\aleph_0}$ que por nuestra suposición es κ y tomando $\lambda = \aleph_0$ en 3.13 tenemos

$$(2^{\aleph_0})^{V[G]} \leq (|B|^{\aleph_0})^V = (\kappa^{\aleph_0})^V = \kappa^V = \kappa^{V[G]} \tag{3.8}$$

Y juntando (3.7) y (3.8) por fin tenemos

$$\left(2^{\aleph_0} = \kappa\right)^{V[G]}$$

3.3. Diamante

Para poder dar el enunciado al que llamaremos $\Diamond$ empezaremos viendo algunas propiedades combinatorias de las cuales depende este enunciado.

Definición 3.21. Sea $\kappa > \omega$ regular[9]

(i) Un conjunto $C \subseteq \kappa$ se llama *no acotado* si y sólo si $\forall\alpha \in \kappa \exists\gamma \in C(\alpha < \gamma)$.

(ii) Un conjunto $C \subseteq \kappa$ es *cerrado* si y sólo si para cualquier sucesión $\langle \beta_\xi | \xi < \gamma\rangle$ no decreciente de elementos de C de longitud $\gamma < \kappa$ se tiene que $sup_{\xi<\gamma}\beta_\xi \in C$.

A partir de aquí (hasta el teorema 3.28) supondremos que κ es un cardinal regular mayor que ω. Además con esto es posible definir el concepto del cual depende $\Diamond$.

Definición 3.22. Un conjunto $S \subseteq \kappa$ se llama *estacionario en* κ si y sólo si para todo C cerrado y no acotado de κ, $S \cap C \neq \emptyset$

Unos pequeños lemas que serán de utilidad más adelante son los siguientes:

Lema 3.23. *Sean C, D cerrados y no acotados en κ, entonces $C \cap D$ es cerrado y no acotado en κ.*

[8] por ejemplo aceptando HGC y que κ sea tal que $cf(\kappa) > \omega$.

[9] esta definición podría hacerse en general, es decir, para cualquier ordinal restringiendo la longitud de las sucesiones a $cf(\alpha)$. Pero para lo que haremos basta con dar una definición como la nuestra.

Prueba. Para ver que $C \cap D$ es cerrado, sea $\langle \beta_\xi | \xi < \gamma \rangle$ una γ-sucesión de elementos de $C \cap D$ con $\gamma < \kappa$, entonces ésta es una sucesión de elementos de C y de D, como cada uno de ellos es cerrado, entonces $sup_{\xi<\gamma}\beta_\xi \in C \cap D$.

Para ver que es no acotado sea $\alpha < \kappa$ y como C, D son no acotados construimos la siguiente ω-sucesión creciente

$$\begin{array}{rr} a_0 \in C & \text{tal que } \alpha < a_0 \\ a_n < a_{n+1} \in C & \text{si } a_n \in D \\ a_n < a_{n+1} \in D & \text{si } a_n \in C \end{array}$$

y con esto se tiene que los a_n con n par están en C y los a_n con n impar en D. Entonces hemos construido una sucesión de elementos de C y otra de elementos de D cuyo supremo es el mismo y como son cerrados ese supremo esta en $C \cap D$ y es mayor que α. $\square$

Una modificación de esta prueba nos da que si $\langle C_\xi | \xi < \gamma \rangle$ con $\gamma < \kappa$ es una colección de cerrados y no acotados en κ, entonces $\bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi$ es cerrado y no acotado. Lo único que hay que modificar es la sucesión que prueba que es no acotado. Si $\alpha < \kappa$ definamos recursivamente $a^n_\delta \in C_\delta$, para esto supongamos definido $a^r_\eta \in C_\eta$ para todo $r < n$ y $\eta < \delta$. Entonces a^n_δ es cualquier elemento de C_δ que sea mayor que $sup_{\substack{r<n \\ \eta<\delta}} a^r_\eta$. Una representación gráfica de esta definición es la siguiente.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & C_0 & & \ldots & & C_\xi & & \ldots \\ \beta & < & a^0_0 & < & \ldots & < & a^0_\xi & < & \ldots \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \\ sup_{\xi<\gamma} a^n_\xi & < & a^{n+1}_0 & < & \ldots & < & a^{n+1}_\xi & < & \ldots \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \end{array} \tag{3.9}$$

y entonces tomando $sup_{\substack{\xi<\gamma \\ n\in\omega}} a^n_\xi$, es el elemento de $\bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi$ que es mayor que α.

Lema 3.24. *Sea E un estacionario en κ y C un cerrado y no acotado en κ, entonces $E \cap C$ es estacionario en κ.*

Prueba. Sea D un cerrado y no acotado en κ, entonces por 3.23 se tiene que $C \cap D$ es cerrado y no acotado en κ y como E es estacionario, $(E \cap C) \cap D = E \cap (C \cap D) \neq \emptyset$. $\square$

Ahora si queremos que la propiedad de ser cerrado y no acotado se preserve bajo "intersección" de κ cerrados y no acotados debemos aceptar a más elementos en dicha "intersección" y lo haremos de la siguiente manera.

Definición 3.25. Sea $\alpha \in OR$ y $\langle C_\xi | \xi < \gamma \rangle$ una familia de subconjuntos de α, definimos la *intersección diagonal* de dicha familia como

$$\underset{\xi<\gamma}{\triangle} C_\xi = \left\{ \beta < \alpha \middle| \beta \in \bigcap_{\xi<\beta} C_\xi \right\}$$

Hay que notar que es mucho más fácil que alguien esté en la intersección diagonal que en la intersección, por ejemplo si $\alpha \in LIM$, mientras la intersección $\bigcap_{\xi<\alpha} [\xi, \alpha) = \emptyset$, la intersección diagonal $\underset{\xi<\alpha}{\triangle} [\xi, \alpha) = \alpha$, donde $[\xi, \alpha) = \{\beta | \xi \leq \beta < \alpha\}$. Entonces veamos el resultado que anunciábamos.

Proposición 3.26. *Sea $\langle C_\xi | \xi < \kappa\rangle$ una familia de cerrados y no acotados en κ, entonces $\underset{\xi<\kappa}{\triangle} C_\xi$ es cerrado y no acotado.*

Prueba. Para ver que es cerrado, sea $\langle \beta_\eta | \eta < \gamma\rangle$ una γ sucesión no decreciente de elementos de $\underset{\xi<\kappa}{\triangle} C_\xi$ y sea $\beta = sup_{\eta<\gamma}\beta_\eta$. Para probar que $\beta \in \underset{\xi<\kappa}{\triangle} C_\xi$ sea $\xi < \beta$ y veamos que $\beta \in C_\xi$. Como $\xi < \beta$ hay $\eta < \gamma$ tal que $\xi < \eta$. Por lo tanto, $\beta_\delta \in C_\xi$ para todo $\delta \geq \eta$ y como C_ξ es cerrado tenemos que $\beta \in C_\xi$.

Para ver que es no acotado, sea $\alpha \in \kappa$ y definimos por recursión sobre ω la siguiente sucesión.

$$\begin{aligned} &\alpha < \beta_0 && \text{con } \beta_0 \in C_0 \\ &\beta_n < \beta_{n+1} && \text{con } \beta_{n+1} \in \bigcap_{\gamma<\beta_n} C_\gamma \end{aligned}$$

sea $\beta = sup_{n\in\omega}\beta_n$ y afirmamos que $\beta \in \underset{\xi<\kappa}{\triangle} C_\xi$. La prueba de esto es muy parecida a lo que hicimos para ver que es cerrado y la omitiremos. □

Y ahora para ver el resultado que les da nombre a los conjuntos estacionarios necesitaremos la siguiente definición,

Definición 3.27. Sean f una función de ordinales y $S \subseteq OR$, f es *regresiva* en S si y sólo si $f(\xi) < \xi$ para todo $\xi \in S \setminus \{0\}$

Teorema 3.28 (Lema de Fodor)**.** *Sea f una función de ordinales regresiva en un estacionario S de κ. Entonces hay $\gamma \in OR$ y un estacionario T tal que*

$$\forall \xi \in T(f(\xi) = \gamma).$$

Prueba. Supongamos que para toda $\gamma < \kappa$ el conjunto $\{\xi < \kappa | f(\xi) = \gamma\}$ no es estacionario, sea entonces C_γ un cerrado y no acotado de κ tal que para toda $\xi \in C_\gamma$, $f(\xi) \neq \gamma$. Por 3.26, $C = \underset{\gamma<\kappa}{\triangle} C_\gamma$ es cerrado y no acotado y por 3.24, $S \cap C$ es estacionario. Sea $\alpha \in S \cap C$, entonces $\alpha \in C$ y así $\alpha \in C_\xi$ para toda $\xi < \alpha$ por lo que $f(\alpha) \geq \alpha$ que es una contradicción. □

Definición 3.29. $\lozenge$ es el enunciado: Hay conjuntos $S_\alpha \subseteq \alpha$ con $\alpha < \omega_1$ tal que para todo $A \subseteq \omega_1$, $\{\alpha < \omega_1 | A \cap \alpha = S_\alpha\}$ es estacionario.

A la sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1\rangle$ se le llama una sucesión $\lozenge$ y ésta "captura" a todos los subconjuntos de ω_1 por lo que puede ser usado para construir objetos de tamaño ω_1 que tengan ciertas propiedades. Un ejemplo es el siguiente.

Teorema 3.30. $\lozenge \Rightarrow HC$*.*

Prueba. Sabemos que $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ por lo que sólo hay que ver la otra desigualdad. Sea $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1\rangle$ una sucesión diamante, para cada $X \subseteq \omega \subseteq \omega_1$ existe $\alpha > \omega$ tal que $X = X \cap \alpha = S_\alpha$, y como el conjunto de $S_\alpha{}'s$ que cumplen esto es un estacionario podemos asignar a cada $X \subseteq \omega$ un S_α de manera inyectiva. Por lo tanto $\mathscr{P}(\omega) \subseteq \{S_\alpha | \alpha < \omega_1\}$, es decir, $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$. Por lo tanto $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. □

Ahora necesitaremos algunos conceptos más acerca de forcing

Definición 3.31. Sea P una noción de forcing.

(i) $D \subseteq P$ es *abierto* si y sólo si cada vez que tengamos $q \in D$ y $p \leq q$, entonces $p \in D$

(ii) P es κ-*distributivo* si y sólo si la intersección de κ subconjuntos abiertos densos de P es denso.

(iii) P es κ-*cerrado* si y sólo si para toda λ-sucesión no creciente de elementos de P, $\langle p_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ con $\lambda \leq \kappa$ hay $p \in P$ tal que para toda $\alpha < \lambda$, $p \leq p_\alpha$.

Lema 3.32. *Si P es κ-cerrado, entonces es κ-distributivo.*

Prueba. Sea $\{D_\alpha | \alpha < \kappa\}$ una colección de κ subconjuntos abiertos densos de P. Veamos que $D = \bigcap_{\alpha<\kappa} D_\alpha$ es denso. Sea $p \in P$ y construimos una κ-sucesión $p \geq p_0 \geq p_1, \ldots$ tal que para toda $\alpha < \kappa$, $p_\alpha \in D_\alpha$ y como P es κ-cerrado sea $q \in P$ tal que $q \leq p_\alpha$ para toda $\alpha < \kappa$, como los D_α's son abiertos se tiene que $q \in D$ y $q \leq p$. □

Ahora veremos cómo estas nuevas propiedades de los órdenes parciales aseguran que ciertos cardinales se preservan.

Teorema 3.33. *Sea κ un cardinal infinito y supongamos que P es κ-cerrado, entonces si $f \in V[G]$ es una función de κ en V, entonces $f \in V$.*

Prueba. Sea $f\colon \kappa \to V$, con $f \in V[G]$ y sea $\dot{f}$ un nombre para f, entonces como en $V[G]$, f es función hay $A \in V$ y $p_0 \in G$ tal que $p_0 \Vdash \dot{f}$ es una función de $\check{\kappa}$ en $\check{A}$. Para cada $\alpha < \kappa$ definimos $D_\alpha = \{p \leq p_0 | \exists x \in A(p \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{x})\}$. Veremos que cada D_α es abierto denso bajo p_0, así $D = \bigcap_{\alpha<\kappa} D_\alpha$ es un denso bajo p_0 y por lo tanto hay $p \in D \cap G$. Ahora en V tenemos que para cada $\alpha < \kappa$ hay x_α tal que $p \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{x}_\alpha$. Entonces definimos $g\colon \kappa \to A$ como $g(\alpha) = x_\alpha$. Con esto tenemos que $g \in V$ y entonces sólo hay que ver, en $V[G]$, que $f = g$. Sea $\alpha < \kappa$, entonces $g(\alpha) = x_\alpha$ si y sólo si $p \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{x}_\alpha$ si y sólo si en $V[G]$, $f(\alpha) = x_\alpha$. □

***Prueba* D_α *es denso bajo* p_0.** Sea $r \leq p_0$, entonces tenemos que $r \Vdash \dot{f}$ es una función de $\check{\kappa}$ en $\check{A}$ y consideremos $H \subseteq P$ un genérico tal que $r \in H$, entonces en $V[H]$ se tiene que f es una función de κ en A y por lo tanto en $V[H]$ $f(\alpha) = x$ para algún $x \in A$, por lo que hay $q \in H$ tal que $q \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \check{x}$ para algún $x \in A$ [10] y tomando $q' \in H$ tal que $q' \leq q, r$ entonces $q' \in D_\alpha$ y $q' \leq r$ por lo que D_α es denso bajo p_0. □

Corolario 3.34. *Si P es κ-cerrado, entonces κ no tiene nuevos subconjuntos en $V[G]$.*

Ahora como $\diamondsuit$ habla de ω_1, necesitamos que éste se preserve en la extensión genérica. Entonces veamos que condiciones debe cumplir un forcing para preservar a ω_1.

Corolario 3.35. *Si P es $\aleph_0$-cerrado entonces $\omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$.*

Prueba. Supongamos que $\omega_1^V < \omega_1^{V[G]}$. Entonces en $V[G]$ hay una biyección $f\colon \omega \to \omega_1^V$ y por 3.33 $f \in V$ lo cual es una contradicción. □

Notemos que lo único que se usó de ω en esta prueba es que éste se preserva en cualquier extensión genérica, por lo que podríamos generalizarlo de la siguiente manera. Si $\kappa^V = \kappa^{V[G]}$ y P es κ-cerrado, entonces $(\kappa^+)^V = (\kappa^+)^{V[G]}$ y la prueba sería una copia de lo que ya se hizo. Pero qué tan necesario será pedir que $\kappa^V = \kappa^{V[G]}$. Veamos que eso está de más.

[10] q también fuerza que $\dot{f}$ es una función de $\check{\kappa}$ en A.

Corolario 3.36. *Sea $\kappa \geq \omega$. Si P es κ-cerrado, entonces todos los cardinales infinitos menores o iguales a κ^+ se preservan, es decir,*

$$\forall \lambda \leq \kappa^+(\lambda^V = \lambda^{V[G]})$$

Prueba. Por inducción.Es claro que ω se preserva. Supongamos que λ se preserva. Como P es κ-cerrado entonces es λ-cerrado, por lo que λ^+ se preserva.
Si $\lambda < \kappa^+$ es límite entonces hay $\alpha \in LIM$ tal que $\lambda = \aleph_\alpha$. Supongamos que $\aleph_\beta$ se preserva para todo $\beta < \alpha$, entonces

$$\aleph_\alpha^V = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta^V = \bigcup_{\eta<\alpha} \aleph_\beta^{V[G]} = \aleph_\alpha^{V[G]}$$

□

Con esto se tiene que si un forcing es κ-cerrado, entonces en cualquier extensión genérica se preservan todos los cardinales hasta κ^+.

Con esto ya tenemos lo suficiente para ver la consistencia relativa de $\Diamond$.

Teorema 3.37. *$Con(ZFC) \Rightarrow Con(ZFC + \Diamond)$.*

Prueba. Sea $P = \{p|p$ es una función, $dom(p) \in \omega_1$, $Im(p) \subseteq 2\}$ y $p \leq q$ si y sólo si $p \supseteq q$. Veamos que P es $\aleph_0$-cerrado, sea $\langle p_n|n \in \omega\rangle$ una sucesión de elementos de P tal que para toda $n \in \omega$ $p_n \geq p_{n+1}$, sea $p = \bigcup_{n\in\omega} p_n$ como ω_1 es regular se tiene que $p \in P$ y además para toda $n \in \omega$ $p_n \geq p$. Entonces P es $\aleph_0$-cerrado y por lo tanto $\omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$.

Si G un P genérico sea $g = \bigcup G$. Entonces para cada $\alpha < \omega_1$ definimos $S_\alpha = \{\xi < \alpha | g(\alpha+\xi) = 1\}$ y afirmamos que $\langle S_\alpha|\alpha < \omega_1\rangle$ es una sucesión diamante en $V[G]$. Para esto, sean en $V[G]$, $X \subseteq \omega_1$ y C un cerrado y no acotado. Sea $p_0 \in G$ tal que $p_0 \Vdash \dot{X} \subseteq \check{\omega}_1$ y $\dot{C}$ es un club. Sea $S = \{\alpha < \omega_1 | X \cap \alpha = S_\alpha\}$ y veamos que

$$D = \{q \in P | q \Vdash \check{\alpha} \in \dot{C} \text{ y } \dot{X} \cap \check{\alpha} = \dot{S}_\alpha\}$$

es denso bajo p_0. Si así fuera ya habríamos acabado, pues habría $q \in G \cap D$ y como está en G tendríamos que en $V[G]$, $S \cap C \neq \emptyset$, obteniendo que S es estacionario.
Para ver que D es denso bajo p_0 sean $\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 \ldots$ y $p_0 \geq p_1 \geq p_2 \ldots$ sucesiones tales que

(i) $dom(p_n) = \alpha_n$

(ii) $\forall \xi < \alpha_n(p_{n+1} \Vdash \check{\xi} \in \dot{X} \vee p_{n+1} \Vdash \check{\xi} \notin \dot{X})$

(iii) $p_{n+1} \Vdash \check{\beta}_n \in \dot{C}$

Sea $\alpha = sup\{\alpha_n|n \in \omega\} = sup\{\beta_n|n \in \omega\}$ y sea $p = \bigcup_{n\in\omega} p_n$, así $dom(p) = \alpha$, para toda $n \in \omega$ $p \leq p_n$, $\forall \xi < \alpha(p \Vdash \check{\xi} \in \dot{X} \vee p \Vdash \check{\xi} \notin \dot{X})$ y $p \Vdash \{\check{\beta}_n|n \in \omega\} \subseteq \dot{C}$. Como $p \Vdash \dot{C}$ es un cerrado y no acotado, se tiene que $p \Vdash \check{\alpha} \in \dot{C}$. Sea $q \leq p$ tal que $dom(q) = \alpha + \alpha$ y $q(\alpha + \xi) = 1$ si y sólo si $p \Vdash \check{\xi} \in \dot{X}$, entonces por la naturaleza de q y la proposición 2.71 tenemos que $q \Vdash \dot{X} \cap \check{\alpha} = \dot{S}_\alpha$.

Con esto sólo hace falta ver la existencia de sucesiones como las que necesitamos, para esto definimos $\alpha_0 = dom(p_0)$ y $\beta_0 \in C$ tal que $\alpha_0 < \beta_0$. Luego supongamos que ya tenemos definidos α_n, β_n y p_n que cumplen lo que queremos (donde β_n siempre será tomado en C usando que es no acotado), entonces como $\beta_n \in C$ hay $q^n \in G$ tal que $q^n \Vdash \check{\beta}_n \in \dot{C}$ y usando el inciso (i)(c) de 2.16 definimos recursivamente $q_0^n \leq q^n$ tal que decide $0 \in X$, es decir

$$q_0^n \Vdash \check{0} \in \dot{X} \quad \text{ó} \quad q_0^n \Vdash \check{0} \notin \dot{X}$$

para toda $\xi < \alpha_n$ tal que $\xi + 1 < \alpha_n$ tomamos $q_{\xi+1}^n \leq q_\xi^n$ que decida $\xi + 1 \in X$ y si $\xi \in LIM$ tomamos $q' \leq q_\beta^n$ para todo $\beta < \xi$ (esto es posible, pues P es $\aleph_0$-cerrado) y luego tomamos $q_\xi^n \leq q'$ que decida $\xi \in X$. Como P es $\aleph_0$-cerrado sea $p \in P$ tal que $p \leq q_\xi^n$ para toda $\xi < \alpha_n$ y entonces definimos

$$\alpha_{n+1} = dom(p_{n+1}) = dom(p) \cup \beta_n + 1$$
$$\beta_{n+1} \in C \text{ tal que } \alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$$
$$p_{n+1}(\zeta) = \begin{cases} p(\zeta) & \text{si } \zeta \in dom(p) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y con esto es claro que estos α_{n+1}, β_{n+1} y p_{n+1} cumplen lo que queremos. □

3.4. Hipótesis del Continuo segunda parte

Ya hemos visto que es consistente $\neg HC$ y más que eso hemos construido una extensión genérica en la que el cardinal del continuo es exactamente κ para algún cardinal que cumpla $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$. En el capítulo anterior vimos que $\diamondsuit \Rightarrow HC$ y construimos una extensión genérica en la que $\diamondsuit$ es verdadero, así tenemos que con forcing podemos probar la consistencia de HC, pero hay que hacer algo intermedio, entonces veamos como la técnica de forcing puede probar la consistencia de HC directamente. Esto puede hacerse colapsando a $2^{\aleph_0}$ a ω_1 y preservando a ω_1, para lograr esto combinaremos la técnica usada en 3.4 y lo combinaremos con 3.35. Entonces análogamente a 3.1 tenemos

Definición 3.38. Sean I y J conjuntos infinitos, definimos el forcing $Fun_{\omega_1}(I, J) = \{f : I \to J | f \text{ es contable}\}$ y si $f, g \in Fun_{\omega_1}(I, J)$, entonces $f \leq g$ si y sólo si $f \supseteq g$.

Un argumento similar al de 3.2 nos da el siguiente resultado

Proposición 3.39. *Si I y J son no-numerables y $G \subseteq Fun_{\omega_1}(I, J)$ es un genérico, entonces $\bigcup G$ es una función suprayectiva de I en J.*

Y usando AE podemos probar que en algunos casos $Fun_{\omega_1}(I, J)$ es $\aleph_0$-cerrado y por tanto preserva a ω_1.

Lema 3.40. *Si I es no numerable, entonces $Fun_{\omega_1}(I, J)$ es $\aleph_0$-cerrado.*

Prueba. Sea $p_0 \geq p_1 \geq \ldots \geq p_n \geq \ldots$ una ω-sucesión de elementos de $Fun_{\omega_1}(I, J)$, entonces si $p = \bigcup_{n \in \omega} p_n$ sólo hay que ver que $p \in Fun_{\omega_1}(I, J)$. Entonces, $Im(p) = \bigcup_{n \in \omega} Im(p_n) \subseteq J$ y $dom(p) = \bigcup_{n \in \omega} dom(p_n) \subseteq I$ y este último es unión numerable de contables que es contable y por lo tanto $p \in Fun_{\omega_1}(I, J)$. □

Teorema 3.41. $Con(ZFC) \Rightarrow Con(ZFC + HC)$.

Prueba. Sea $P = Fun_{\omega_1}(\omega_1, 2^{\aleph_0})$, entonces por el lema anterior P es $\aleph_0$-cerrado con lo cual preserva a ω_1 y no añade subconjuntos nuevos a ω, es decir, $2^{\aleph_0}$ también se preserva. Si $G \subseteq P$ es un genérico, por 3.39 tenemos que en $V[G]$, $\bigcup G$ es una función suprayectiva de $(\omega_1)^V$ en $(2^{\aleph_0})^V$ y como estos dos se preservan, entonces $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)^{V[G]}$. □

3.5. Axioma de Elección

En esta sección veremos un interesante uso del forcing, pues hemos visto que empezando con un modelo base de ZFC la extensión genérica también es modelo de ZFC, entonces debemos quedarnos en medio de este proceso para encontrar un modelo de $\neg AE$ y para esto necesitaremos algunas definiciones de teoría de grupos.

Definición 3.42. Sea G un grupo y X un conjunto. Una *acción* de G sobre X es una función $\alpha\colon G \times X \to X$ tal que $\alpha(g, x) = g \cdot x$ que satisface

$$e \cdot x = x \quad \text{y} \quad (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$$

para todo $x \in X$, $g, h \in G$, donde e es el neutro de G. Escribiremos gx en lugar de $g \cdot x$ y diremos que G *actúa* sobre X.

Por ejemplo, si $G \leq S_X$ [11], entonces $\alpha\colon G \times X \to X$ es la evaluación $\alpha(\sigma, x) = \sigma x = \sigma(x)$, esto es, que las acciones son otra forma de ver a las permutaciones, es decir,

Teorema 3.43. *Sean G un grupo, X un conjunto y $\alpha\colon G \times X \to X$ una acción, entonces hay un homomorfismo $\tilde{\alpha}\colon G \to S_X$ dado por $\alpha_g = \alpha_g\colon x \mapsto \alpha(g, x) = gx$. Y al revés, cada homomorfismo $\varphi\colon G \to S_X$ define una acción, dada por $gx = \varphi(g)x$.*

Si B es un álgebra de Boole, una acción α de un grupo G sobre B significará una acción de G por automorfismos, es decir, que para todo $g \in G$, $\alpha_g\colon B \to B$ es un automorfismo. Y también tenemos que $Aut(B)$[12] actúa sobre B de manera natural, $\sigma b = \sigma(b)$ con $\sigma \in Aut(B)$ y $b \in B$.

Ahora la intención es extender un automorfismo de un álgebra de Boole completa B al modelo booleano-valuado $V^{(B)}$ y para hacerlo lo haremos a través de acciones.

Definición 3.44. Sean B un álgebra de Boole completa, $\mathfrak{A} = \langle A, \|\cdot = \cdot\|_A, \|\cdot \in \cdot\|_A\rangle$ una estructura B-valuada. Una acción de un grupo G sobre $\mathfrak{A}$ es un par de acciones de G sobre B y A que satisfacen

$$\|gx = gy\|_A = g\|x = y\|_A$$
$$\|gx \in gy\|_A = g\|x \in y\|_A$$

Esta definición es posible extenderla a fórmulas en general.

Proposición 3.45. *Si $\varphi(\nu_1 \dots, \nu_n)$ es una fórmula, $a_1, \dots, a_n \in A$ y $g \in G$ entonces*

$$\|\varphi(ga_1, \dots, ga_n)\|_A = g\|\varphi(a_1, \dots, a_n)\|_A \tag{3.10}$$

Prueba. La prueba es por inducción sobre la formación fórmulas, todos los casos son fáciles usando que la acción de G sobre B es por automorfismos. □

Y veamos que una acción de un grupo G sobre un álgebra de Boole completa B se puede extender a una acción de G sobre $V^{(B)}$.

[11] S_X es el grupo de permutaciones de X y $G \leq S_X$ significa que G es subgrupo de S_X

[12] $Aut(B)$ es el grupo de automorfismos de B

Teorema 3.46. *Sea G un grupo que actúa sobre un álgebra de Boole completa B. Definimos la función $\alpha\colon G\times V^{(B)}\to V^{(B)}$ por recursión sobre la relación $t\in dom(x)$*

$$gx=\{\langle gt,gx(t)\rangle | t\in dom(x)\} \tag{3.11}$$

que define una acción de G sobre $V^{(B)}$ tal que:

(i) Para todo $x\in V^{(B)}$ y $g\in G$ se tiene que, $dom(gx)=\{gt|t\in dom(x)\}$ y para cada $t\in dom(x)$, $gx(gt)=gx(t)$

(ii) $g\check{x}=\check{x}$ para todo $x\in V$.

***Prueba**.* Para ver que (3.11) es una acción de G sobre $V^{(B)}$, veamos primero que (con la notación de 3.43) para cada $g\in G$, α_g es una función inyectiva de $V^{(B)}$ en $V^{(B)}$ y para esto veamos por inducción que

$$\alpha_g\restriction_{V_\alpha^{(B)}} \text{ es una función inyectiva de } V_\alpha^{(B)} \text{ en } V^{(B)} \tag{3.12}$$

supongamos que (3.12) es cierto para todo $\beta<\alpha$. Sea $x\in V_\alpha^{(B)}$, entonces $dom(x)\subseteq V_\beta^{(B)}$ para algún $\beta<\alpha$, por lo que $\alpha_g\restriction_{dom(x)}$ es una función inyectiva de $dom(x)$ en $V^{(B)}$. Como $gx(t)\in B$, entonces $\alpha_g\restriction_{V_\alpha^{(B)}}(x)=gx$ como fue definido en (3.11) es una función de $\{gt|t\in dom(x)\}$ en B, por lo que $\alpha_g\restriction_{V_\alpha^{(B)}}$ es una función de $V_\alpha^{(B)}$ en $V^{(B)}$. Para ver que es inyectiva supongamos que $\alpha_g\restriction_{V_\alpha^{(B)}}(x)=\alpha_g\restriction_{V_\alpha^{(B)}}(y)$, es decir, $gx=gy$, por (3.11) se tiene que

$$\{\langle gt,gx(t)\rangle|t\in dom(x)\}=\{\langle gs,gy(s)\rangle|s\in dom(y)\}$$

además sabemos que hay $\beta<\alpha$ tal que $V_\beta^{(B)}$ contiene a $dom(x)$ y $dom(y)$ y como $\alpha_g\restriction_{V_\beta^{(B)}}$ es inyectiva se tiene que

$$\{\langle t,x(t)\rangle|t\in dom(x)\}=\{\langle s,y(s)\rangle|s\in dom(y)\}$$

es decir, $x=y$ y con esto tenemos (3.12).

Para probar que es una acción tenemos que hacer lo siguiente:

1. Veamos por inducción en $V^{(B)}$ que $(gh)x=g(hx)$, supongamos que $(gh)t=g(ht)$ para todo $t\in dom(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
g(hx)&=\{\langle gs,g(hx)(s)\rangle|s\in dom(hx)\} && \text{(3.11) a } g\\
&=\{\langle g(ht),g(hx)(ht)\rangle|t\in dom(x)\} && \text{por la primera parte de (i)}\\
&=\{\langle g(ht),g(hx(t))\rangle|t\in dom(x)\} && \text{por la segunda parte de (i)}\\
&=\{\langle gh(t),(gh)x(t)\rangle|t\in dom(x)\} && \text{por hipótesis de inducción}\\
&=(gh)x && \text{(3.11) a } (gh)
\end{aligned}$$

2. Si e es el neutro de G, veamos por inducción que $ex=x$.

$$\begin{aligned}
ex&=\{\langle et,ex(t)\rangle|t\in dom(x)\}\\
&=\{\langle t,x(t)\rangle|t\in dom(x)\}\\
&=x
\end{aligned}$$

3. Para ver que $g\|x \in y\| = \|gx \in gy\|$ y $g\|x = y\| = \|gx = gy\|$ lo haremos por inducción simultanea. Sólo veremos $\|gx \subseteq gy\| = g\|x \subseteq y\|$, la otra contención y la pertenencia son análogas.

$$\begin{aligned}
\|gx \subseteq gy\| &= \bigwedge_{gt \in dom(gx)} gx(gt) \Rightarrow \|gt \in gy\| \\
&= \bigwedge_{t \in dom(x)} gx(gt) \Rightarrow \|gt \in gy\| \\
&= \bigwedge_{t \in dom(x)} gx(t) \Rightarrow g\|t \in y\| && \text{por (i) e HI} \\
&= g \bigwedge_{t \in dom(x)} x(t) \Rightarrow \|t \in y\| && \alpha_g \text{ es automorfismo} \\
&= g\|x \subseteq y\|
\end{aligned}$$

Esto implica que $\alpha\colon G \times V^{(B)} \to V^{(B)}$ es una acción. Para ver el punto (ii) lo haremos por inducción sobre la relación $\in$.

$$\begin{aligned}
g\check{x} &= \{\langle gt, g\check{x}(t) | t \in dom(\check{x})\} \\
&= \{\langle g\check{t}, g1 | t \in x\} \\
&= \{\langle \check{t}, 1\rangle | t \in x\} && \alpha_g \text{ es automorfismo e HI} \\
&= \check{x}
\end{aligned}$$

□

Como ya habíamos visto que $Aut(B)$ actúa sobre B, entonces con este teorema tenemos que $Aut(B)$ actúa sobre $V^{(B)}$.

Definición 3.47. Sean B un álgebra de Boole.

(i) Un elemento $b \in B$ se llama *invariante* si y sólo si $\sigma(b) = b$ para todo $\sigma \in Aut(B)$.

(ii) B se llama *homogénea* si y sólo si sus únicos elementos invariantes son 0 y 1.

Lema 3.48. *Supongamos que B es homogénea. Entonces para toda fórmula $\varphi(\nu_1, \dots, \nu_n)$ y cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in V$ se tiene que*

$$\|\varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)\| = 1 \text{ o } \|\varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)\| = 0$$

Prueba. Veamos que $\|\varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)\|$ es invariante, sea $g \in Aut(B)$, entonces

$$\begin{aligned}
g\|\varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)\| &= \|\varphi(g\check{x}, \dots, g\check{x}_n)\| && \text{por (3.10)} \\
&= \|\varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x_n})\| && \text{por 3.46(ii)}
\end{aligned}$$

como B es homogénea entonces $\|\varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)\| = 1$ o $\|\varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)\| = 0$. □

Ya hemos visto que una acción sobre un álgebra de Boole por automorfismos se puede extender a una acción sobre una estructura booleano-valuada, entonces para hacer un modelo de no elección lo que haremos es extraer de $V^{(B)}$ los elementos más "simétricos" para crear una nueva estructura booleano-valuada, pero la desventaja que tiene esto es que quizá la estructura resultante no sea transitiva, por lo que hay que añadir ciertos elementos más a esta estructura, es decir, ampliaremos el concepto de "simétrico" para que la estructura sea transitiva.

Para definir simétrico lo haremos usando acciones pues ya sabemos que si α es una acción de G sobre X, entonces cada elemento $g \in G$ genera una permutación de X, entonces diremos que alguien es simétrico si para muchos elementos de G la permutación generada lo deja fijo y todo esto lo haremos de la siguiente manera.

Definición 3.49. Sea G un grupo. Γ es un *filtro de subgrupos* de G si cumple que para cualesquiera H_1, H_2 subgrupos de G se tiene que:

(i) $\Gamma \neq \emptyset$,

(ii) Si $H_1 \in \Gamma$ y H_1 es subgrupo de H_2, entonces $H_2 \in \Gamma$ y

(iii) Si $H_1, H_2 \in \Gamma$ entonces $H_1 \cap H_2 \in \Gamma$.

y con esto podemos definir lo que hemos estado llamando simétrico.

Definición 3.50. (i) Sean G un grupo que actúa sobre un álgebra de Boole B y $x \in V^{(B)}$ definimos el *estabilizador* de x como

$$stab(x) = \{g \in G | \alpha_g(x) = x\}$$

(ii) Si Γ es un filtro de subgrupos de G, diremos que $x \in V^{(B)}$ es *simétrico* si y sólo si $stab(x) \in \Gamma$.

Es fácil ver que $stab(x)$ es un subgrupo de G. Y con la noción de simétrico podemos construir la estructura que nos interesa análogamente a como se definió $V^{(B)}$, es decir

$$\begin{aligned}
V_0^{(\Gamma)} &= \emptyset \\
V_{\alpha+1}^{(\Gamma)} &= \{x | fun(x) \wedge dom(x) \subseteq V_\alpha^{(\Gamma)} \wedge stab(x) \in \Gamma\} && \text{con } \alpha \in OR \\
V_\gamma^{(\Gamma)} &= \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha^{(\Gamma)} && \text{si } \gamma \in LIM \\
V^{(\Gamma)} &= \bigcup_{\alpha \in OR} V_\alpha^{(\Gamma)}
\end{aligned}$$

También copiamos todas las definiciones de valores de verdad y de ser modelo, lo único que hay que cambiar es que en lugar de escribir $\|\_\|^B = \|\_\|$ escribiremos $\|\_\|^\Gamma$. Obtenemos así, que si $x, y, x_1, \ldots, x_n \in V^{(\Gamma)}$ entonces

$$\begin{aligned}
\|x \in y\|^\Gamma &= \|x \in y\|^B \\
\|x = y\|^\Gamma &= \|x = y\|^B \\
\|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\|^\Gamma &= \|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\|^B
\end{aligned}$$

Así lo que queremos ver es que si G es un grupo que actúa sobre un álgebra de Boole B y Γ es un filtro de subgrupos de G, entonces $V^{(\Gamma)}$ tiene a todos los nombres canónicos de elementos de V, G actúa sobre $V^{(\Gamma)}$ y que $V^{(\Gamma)}$ es modelo de ZF.

Pero para ver que G actúa sobre $V^{(\Gamma)}$ necesitaremos que para todo $g \in G$, $stab(gx) = gstab(x)g^{-1}$ para lo cual necesitaremos de algo más.

Definición 3.51. Sea Γ un filtro de subgrupos de G, Γ es *normal* si se cumple que

$$H \in \Gamma \Longrightarrow gHg^{-1} \in \Gamma$$

A partir de aquí G será un grupo que actúa sobre un álgebra de Boole B por automorfismos y Γ será un filtro normal de subgrupos de G.

Lema 3.52. *Si $x \in V$ entonces $\check{x} \in V^{(\Gamma)}$*

Prueba. Por el inciso (ii) de 3.46 se tiene que para todo $g \in G$, $g\check{x} = \check{x}$, es decir, $stab(\check{x}) = G \in \Gamma$ por lo que $\check{x} \in V^{(\Gamma)}$. □

Lema 3.53. *G actúa sobre $V^{(\Gamma)}$*

Prueba. Para ver esto necesitamos que α_g mande elementos de $V^{(\Gamma)}$ en elementos de $V^{(\Gamma)}$. Si $x \in V^{(\Gamma)}$, hay que ver que $stab(gx) \in \Gamma$ y como Γ es normal basta ver que $stab(gx) = g\, stab(x)g^{-1}$.

($\subseteq$) Sea $h \in stab(gx)$, entonces $gx = h(gx) = (hg)x$ y multiplicando por g^{-1} por la izquierda se tiene que $x = (g^{-1}hg)x$, es decir, $g^{-1}hg \in stab(x)$ y así tenemos $h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in g\, stab(x)g^{-1}$.

($\supseteq$) Sea $h \in stab(x)$ y veamos que $ghg^{-1} \in stab(gx)$,

$$\begin{aligned} ghg^{-1}(gx) &= (ghg^{-1}g)x \\ &= gh(x) \\ &= gx && \text{pues } h \in stab(x) \end{aligned}$$

y con esto ya sólo falta ver que la acción se lleva bien con los valores de verdad de las atómicas, lo cual se sigue de que la definición de valor de verdad es la misma para $V^{(\Gamma)}$ y $V^{(B)}$ pues:

$$\|gx \in gy\|^{\Gamma} = \|gx \in gy\|^{B} = g\|x \in y\|^{B} = g\|x \in y\|^{\Gamma}$$
$$\|gx = gy\|^{\Gamma} = \|gx = gy\|^{B} = g\|x = y\|^{B} = g\|x = y\|^{\Gamma}$$

□

Teorema 3.54. *$V^{(\Gamma)}$ es modelo de ZF.*

Prueba. La prueba de este teorema es igual que la de 2.62 salvo porque ahora tenemos que ver que el estabilizador de cada elemento de $V^{(B)}$ que se construyó, esté en Γ. Las pruebas de Extensionalidad y Buena Fundación son iguales. Por 3.52 también tenemos en axioma de Infinito y la prueba de Reemplazo es análoga a la de $V^{(B)}$.

Par. Sean $x, y \in V^{(\Gamma)}$, en 2.62 habíamos definido un z tal que

$$dom(z) = \{x, y\}$$
$$z(x) = z(y) = 1$$

entonces veamos que $stab(x) \cap stab(y) \subseteq stab(z)$. Si $g \in stab(x) \cap stab(y)$ entonces, $dom(gz) = \{gx, gy\} = \{x, y\} = dom(z)$ y $gz(x) = gz(gx) = g(z(x)) = g1 = 1$, la última igualdad se debe a que G actúa sobre B por automorfismos y la correspondiente igualdad para y se prueba de forma análoga. Así $stab(x) \cap stab(y) \subseteq stab(z)$ y por tanto $stab(z) \in \Gamma$.

Separación. Sea $x \in V^{(\Gamma)}$ y φ una fórmula, recordemos que habíamos definido y tal que

$$dom(y) = dom(x)$$
$$y(t) = x(t) \wedge \|\varphi(t)\|^{\Gamma}$$

entonces bajo la suposición de que $stab(x) \in \Gamma$ lo que hace falta ver es que $stab(y) \in \Gamma$, para lo cual veamos que $stab(x) \subseteq stab(y)$. Sea $g \in stab(x)$, entonces

$$\begin{aligned} dom(gy) &= \{gt | t \in dom(y)\} \\ &= \{gt | t \in dom(x)\} \\ &= dom(gx) \\ &= dom(x) = dom(y) \end{aligned}$$

Además con esto podemos decir que si $t \in dom(y)$, entonces hay $s \in dom(x)$ tal que $t = gs$ y así

$$\begin{aligned} gy(t) &= gy(gs) \\ &= g(y(s)) \\ &= g(x(s) \wedge \|\varphi(s)\|^{\Gamma}) \\ &= gx(gs) \wedge \|\varphi(gs)\|^{\Gamma} \\ &= x(t) \wedge \|\varphi(t)\|^{\Gamma} = y(t) \end{aligned}$$

por lo que $gy = y$, por lo que $stab(y) \in \Gamma$.

Unión. Sea $x \in V^{(\Gamma)}$ y veamos que $stab(x) \subseteq stab(y)$ donde y esta definido por

$$dom(y) = \bigcup_{t \in dom(x)} dom(t)$$
$$y(s) = 1$$

sea $g \in stab(x)$, entonces $dom(gy) = dom(y)$, pues es la misma unión y además

$$\begin{aligned} gy(t) &= gy(gs) \\ &= g(y(s)) \\ &= g(1) \\ &= 1 \\ &= y(t) \end{aligned}$$

Con esto tenemos que $stab(x) \subseteq stab(y)$ por lo que $y \in V^{(\Gamma)}$.

Potencia. Sea $x \in V^{(\Gamma)}$ y sea y definido por

$$dom(y) = \{u \in V^{(\Gamma)} | dom(u) = dom(x)\}$$
$$y(u) = \|u \subseteq x\|^{\Gamma}$$

si $g \in stab(x)$ entonces, es fácil ver que $dom(gy) = dom(y)$ y además $gy(t) = gy(gs) = g(y(s)) = \|gs \subseteq gx\|^{\Gamma} = \|t \subseteq x\|^{\Gamma} = y(t)$.

□

Ahora sí, demos B, G, Γ particulares para los cuales podamos probar que $V^{(\Gamma)} \models \neg AE$. Pero la idea para hacer esto es que con axioma de elección las nociones de infinito de Cantor y Dedekind coinciden[13] y construiremos un conjunto de reales que en $V^{(\Gamma)}$ es Cantor infinito pero Dedekind finito, lo que es llamado *amorfo*.
Entonces pasemos a hacer los detalles de esto. Como queremos "reales extraños" necesitamos usar un orden parcial que añada reales y debe añadir una cantidad infinita en el sentido de Cantor, entonces tomemos $P = Fun_{\omega}(\omega \times \omega, 2)$ que ya sabemos que añade ω reales y como se hizo en 2.22 definimos un espacio topológico X a partir de P con la topología del orden, es decir, $\{U_p | p \in P\}$ es una base para el espacio, donde $U_p = \{q \in P | q \leq p\}$ y B el álgebra de Boole de los abiertos regulares de este espacio. Tomando $G = S_{\omega}$ y $g \in G$ podemos definir una función $g^* \colon X \to X$ tal que para cada $p \in P$, $g^*p \in {}^{\omega\times\omega}2$ esta definida por

$$dom(g^*p) = (id_{\omega} \times g)^{-1}[dom(p)]$$
$$g^*p(n,m) = p(n, gm)$$

Con esta definición tenemos

Proposición 3.55. *Para cada $g \in G$, g^* es un homeomorfismo.*

Prueba. Para ver que g^* es inyectiva supongamos que $g^*p = g^*q$, entonces tenemos que $dom(p) = dom(q)$ y que para cualesquiera $n, m \in \omega$, $p(n, gm) = q(n, gm)$ y como g es una permutación de ω es lo mismo que decir que para cualesquiera $n, m \in \omega$, $p(n,m) = q(n,m)$ por lo que $p = q$.

Para la suprayectividad dado $p \in P$ definimos $q \in P$ tal que $dom(q) = (id_{\omega} \times g)[dom(p)]$ y $q(n,m) = p(n, g^{-1}m)$, con esto es claro que $g^*q = p$.

Con esto ya tenemos que g^* es biyectiva por lo que podemos darle nombre al elemento q de arriba, que llamaremos p^{-1}.

Para probar que g^* es continua basta ver que para todo $p \in P$, $g^*[U_{p^{-1}}] \subseteq U_p$, para lo cual dado $q \in g^*[U_{p^{-1}}]$ hay $r \in U_{p^{-1}}$ tal que $g^*r = q$, con lo cual se tiene

$$dom(p) = (id_{\omega} \times g)^{-1}[dom(p^{-1})] \subseteq (id_{\omega} \times g)^{-1}[dom(r)] = dom(q)$$

y si $(n,m) \in dom(p)$

$$q(n,m) = g^*r(n,m) = r(n, gm) = p^{-1}(n, gm) = p(n,m)$$

Con lo cual g^* es continua, para ver que g^{*-1} es continua basta ver que $g^{*-1}[U_{p^{-1}}] \subseteq U_p$ lo cual se hace de forma análoga a lo que ya hicimos. Por lo tanto g^* es un homeomorfismo. □

[13] Cantor define infinito como no ser biyectable con ningún número natural, mientras que Dedekind lo hace diciendo que es biyectable con un subconjunto propio de si mismo.

Además algunas propiedades de $\_^*$ son las siguientes.

Lema 3.56. *Sean $g, h \in G$, entonces*

(i) $(gh)^* = h^* g^*$.

(ii) $(g^{-1})^* = g^{*-1}$.

Prueba.

(i) Sea $p \in P$ y veamos que para todo $(n, m) \in dom(p)$, $(gh)^* p(n, m) = h^* g^* p(n, m)$.

$$(gh)^* p(n, m) = p(n, g(hm)) = g^* p(n, hm) = h^* g^* p(n, m)$$

(ii) $(g^{-1})^* p(n, m) = p(n, g^{-1} m) = p^{-1}(n, m) = g^{*-1} p(n, m)$

□

Entonces empecemos a ver lo que nos interesa.

Teorema 3.57. *$gb = g^{*-1}[b]$ define una acción de G sobre B.*

Prueba. Para ver que $eb = b$ basta notar que $e^* p = p = e^{*-1} p$. Y $g(hb) = (gh)b$ se sigue de 3.56. □

Observación 3.58. $g^{*-1}[b] = \{g^{*-1} p | p \in b\} = \{p | g^* p \in b\}$.

Definición 3.59. (i) Para cada $n \in \omega$ definimos $G_n = \{g \in G | gn = n\}$.

(ii) Γ es el filtro de subgrupos generado por los G_n.

Si añadimos como notación que para cada $J \subseteq \omega$ finito

$$G_J = \bigcap_{n \in J} G_n$$

entonces $\Gamma = \{H \leq G | G_J \leq H \text{ para algún } J \subseteq \omega \text{ finito}\}$.

Observación 3.60. (i) Para cada $n \in \omega$, G_n es subgrupo de G.

(ii) Γ es un filtro normal.

Prueba. La prueba de (i) es fácil. El que Γ es filtro se sigue de (i), por lo que sólo hay que ver que es normal.

Si $H \in \Gamma$ y $g \in G$, entonces hay $J \subseteq \omega$ finito tal que $G_J \leq H$. Queremos encontrar $I \subseteq \omega$ finito tal que $G_I \leq gHg^{-1}$. La idea para lograrlo es tomar como I el conjunto de naturales que son fijados por $gG_J g^{-1}$ y es fácil ver que $gJ \subseteq I$ lo que implica que $G_I \leq G_{gJ} = gG_J g^{-1} \leq H$. □

Si vemos a P como si fuera un subconjunto denso de B (para facilitar la notación, sólo hay que recordar que cada $p \in P$ esta identificado con U_p) tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.61. *Sean $p \in P$, $J \subseteq \omega$ finito y $n \notin J$, entonces hay $g \in G_J$ tal que $p \wedge gp \neq 0$ y $gn \neq n$.*

Prueba. Primero notemos que una de las cosas que queremos es que $U_p \cap gU_p \neq \emptyset$, es decir, $\{q \in P | q \leq p\} \cap \{q \in P | g^*q \leq p\} \neq \emptyset$. Entonces lo que estamos buscando es $q \in P$ para el cual si $(i.j) \in dom(p)$, entonces $q(i,j) = p(i,j) = q(i,gj)$, pero podría pasar que hubiera un $j \in \omega$ tal que $(i,j) \in dom(p)$ para algún $i \in \omega$ con $(i,gj) \in dom(p)$ y que $p(i,j) \neq p(i,gj)$, situación en la cual no habría $q \in P$ tal que $p(i,j) = q(i,gj) = p(i,gj)$. Para evitar esto daremos $g \in G$ para todo $(i,j) \in dom(p)$, con $gj = j$, y esto lo haremos como sigue:

Sea $n' \notin J \cup \{n\}$ tal que $(m,n') \notin dom(p)$ para todo $m \in \omega$, tal n' existe porque J y $dom(p)$ son finitos, sea $g \in G$ la permutación que cambia a n por n' y todo lo demás lo deja igual, así $g \in G_J$ y $gn \neq n$ por lo que sólo hace falta ver que $\{q \in P | q \leq p\} \cap \{q \in P | g^*q \leq p\} \neq \emptyset$ lo cual ya es fácil. □

Con esto podemos ver quién es el conjunto de reales amorfo.

Definición 3.62. Para cada $m \in \omega$ definimos $u_m \in V^{(B)}$ con

$$dom(u_m) = dom(\check{\omega})$$
$$u_m(\check{n}) = \{p \in P | p(n,m) = 1\}$$

Veamos que todos éstos son reales en $V^{(B)}$, es decir

Lema 3.63. *$V^{(B)} \vDash u_m \subseteq \check{\omega}$ para todo $m \in \omega$*

Prueba. Tenemos que ver que $\|u_m \subseteq \check{\omega}\|^B = \bigwedge_{n\in\omega} u_m(\check{n}) \Rightarrow \|\check{n} \in \check{\omega}\|^B = 1$. Pero $\|\check{n} \in \check{\omega}\|^B = 1$ por lo que $\|u_m \subseteq \check{\omega}\|^B = 1$. □

Gracias a este lema ya tenemos que los $u'_m s$ son reales, entonces lo que sigue es ver cómo se comportan con la acción de G sobre $V^{(B)}$.

Lema 3.64. *Para cualesquiera $g \in G$ y $m \in \omega$ se tiene que*

$$gu_m = u_{gm}$$

Prueba. Veamos primero que $dom(gu_m) = dom(u_{gm})$:

$$dom(gu_m) = \{g\check{n} | n \in \omega\} = \{\check{n} | n \in \omega\} = dom(u_{gm})$$

y para terminar hay que ver que $gu_m(\check{n}) = u_{gm}(\check{n})$ lo cual se hace como sigue:

$$\begin{aligned} gu_m(\check{n}) &= gu_m(g\check{n}) \\ &= g(u_m(\check{n})) \\ &= g^{*-1}[\{q \in P | q(n,m) = 1\}] \\ &= \{q \in P | g^*q(n,m) = 1\} \\ &= \{q \in P | q(n,gm) = 1\} \\ &= u_{gm}(\check{n}) \end{aligned}$$

□

Además una consecuencia inmediata de este lema es que si g deja fijo a m, entonces $gu_m = u_m$, es decir, $G_m \subseteq stab(u_m)$ por lo que $u_m \in V^{(\Gamma)}$ para todo $m \in \omega$. Si queremos que $\{u_m | m \in \omega\}$ sea amorfo entonces tenemos que asegurar que es Cantor infinito.

Lema 3.65. *Si* $m \neq m'$ *entonces* $V^{(\Gamma)} \vDash u_m \neq u_{m'}$

Prueba. Para esto primero veamos que si $p \in P$, entonces

$$p \Vdash \check{n} \in u_m \iff p(n,m) = 1$$
$$p \Vdash \check{n} \notin u_m \iff p(n,m) = 0$$

Lo cual se hace notando que si $p(n,m) = 1$ entonces $U_p \subseteq u_m(\check{n}) \leq \|\check{n} \in u_m\|$. Para el otro lado, si $p \Vdash \check{n} \in u_m$, entonces

$$p \in U_p \leq \|\check{n} \in u_m\| = \bigvee_{k \in \omega} u_m(\check{k}) \wedge \|\check{k} = \check{n}\|$$

por lo que p está en el conjunto de funciones $q \in P$ tales que $q(k,m) = 1$ y hacen que $k = n$, es decir, $p(n,m) = 1$. Con esto veamos que si $m \neq m'$ entonces $\|u_m = u_{m'}\|^\Gamma = 0$. Supongamos que no, es decir, que hay $m, m' \in \omega$ y $p \in P$ tales que $m \neq m'$ y $p \Vdash u_m = u_{m'}$, entonces tomando $n \in \omega$ tal que $(n,k) \notin dom(p)$ para todo $k \in \omega$ y considerando

$$q = p \cup \{\langle (n,m), 1\rangle, \langle (n,m'), 0\rangle\}$$

se tiene que $q \Vdash u_m = u_{m'}$, $q \Vdash \check{n} \in u_m$ y $q \Vdash \check{n} \notin u_{m'}$ lo cual es una contradicción. □

Lo que falta ver es que $\{u_m | m \in \omega\}$ es Dedekind finito, para lo cual daremos un nombre para este conjunto.

Definición 3.66. Definimos $a \in V^{(B)}$ de la siguiente manera:

$$dom(a) = \{u_m | m \in \omega\}$$
$$a(t) = 1$$

Lema 3.67. $G = stab(a)$ *y por lo tanto* $a \in V^{(\Gamma)}$.

Prueba. Sea $g \in G$ entonces

$$dom(ga) = \{gu_m | m \in \omega\} = \{u_{gm} | m \in \omega\} = \{u_m | m \in \omega\} = dom(a)$$
$$ga(u_m) = ga(gu_{m'}) = g(a(u_{m'})) = g1 = 1 = a(u_m)$$

□

Además por 3.63 se tiene que $V^{(\Gamma)} \vDash a \subseteq \check{\wp(\omega)}$ y por 3.65 se tiene que $V^{(\Gamma)} \vDash a$ es infinito [14]. Entonces veamos cómo es la relación de forcing con a.

Lema 3.68. $p \Vdash_\Gamma x \in a$ *si y sólo si* $\forall q \leq p \exists r \leq q \exists m \in \omega (r \Vdash_\Gamma x = u_m)$.

[14] Aquí es infinito en el sentido de Cantor

Prueba.

$$
\begin{aligned}
p \Vdash_\Gamma x \in a &\iff p \leq \|x \in a\|^\Gamma \\
&\iff p \leq \bigvee_{m\in\omega} \|x = u_m\|^\Gamma \\
&\iff p \wedge \neg \bigvee_{m\in\omega} \|x = u_m\|^\Gamma = 0 \\
&\iff p \wedge \bigwedge_{m\in\omega} \|x \neq u_m\|^\Gamma = 0 \\
&\iff \forall q \leq p \left(q \nleq \bigwedge_{m\in\omega} \|x \neq u_m\|^\Gamma \right) \qquad \text{es fácil por contrapuesta} \\
&\iff \forall q \leq p \exists m \in \omega (q \nleq \|x \neq u_m\|^\Gamma) \\
&\iff \forall q \leq p \exists m \in \omega \neg (q \Vdash_\Gamma x \neq u_m) \\
&\iff \forall q \leq p \exists m \in \omega \exists r \leq q (r \Vdash_\Gamma x = u_m)
\end{aligned}
$$

□

Con esto ya podemos ver que en $V^{(\Gamma)}$, a es amorfo, que lo haremos viendo que ω no entra inyectivamente en él.

Teorema 3.69. $\|fun(f) \wedge f \ \textit{es inyectiva} \wedge dom(f) = \check{\omega} \wedge Im(f) \subseteq a\|^\Gamma = 0$

Prueba. Supongamos que no, es decir, que hay $p_0 \in P$ tal que

$$p_o \Vdash fun(f) \wedge f \text{ es inyectiva} \wedge dom(f) = \check{\omega} \wedge Im(f) \subseteq a \tag{3.13}$$

Como $f \in V^{(\Gamma)}$, sea $J \subseteq \omega$ finito tal que $G_J \subseteq stab(f)$, digamos que $J = \{m_1, \ldots, m_j\}$. Por (3.13) se tiene que

$$p_0 \Vdash \exists x \in \check{\omega}(f(x) \neq u_{m_1} \wedge \ldots \wedge f(x) \neq u_{m_j})$$

así hay $n \in \omega$ y $p \leq p_0$ tales que

$$p \Vdash f(\check{n}) \neq u_{m_1} \wedge \ldots \wedge f(\check{n}) \neq u_{m_j} \tag{3.14}$$

como $p_0 \Vdash f(\check{n}) \in a$ también lo hace p y por el lema 3.68 se tiene que hay $r \leq p$ y $m \in \omega$ tales que

$$r \Vdash f(\check{n}) = u_m \tag{3.15}$$

esto junto con (3.14) nos dice que $m \notin J$ y usando el lema 3.61 hay $g \in G_J$ tal que $r \wedge gr \neq 0$ y $gm \neq m$, además como G actúa sobre $V^{(\Gamma)}$ y (3.10) tenemos que $gr \Vdash g(f(\check{n})) = gu_m$, es decir

$$gr \Vdash f(\check{n}) = u_{gm} \tag{3.16}$$

y como $r \wedge gr \neq 0$ entonces hay $q \in P$ tal que $q \leq r, gr$. Entonces, por (3.13), (3.15) y (3.16) se tiene una contradicción. □

3.6. Equivalencia Back-and-Forth

En esta sección veremos un concepto creado por Fraïssé para tratar de mejorar los conceptos de isomorfismo y equivalencia elemental. En efecto, el primero tiene la desventaja de depender de un universo para la teoría de conjuntos ya que en la teoría del orden denso sin extremos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ no pueden ser isomorfos porque no son biyectables, pero podría pasar que en una extensión de forcing que añada una biyección entre estos dos (aquí es importante notar que en la extensión hablamos de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ del modelo base), ellos serán isomorfos. Y la equivalencia elemental depende del lenguaje.

Entonces aquí veremos la noción que definió Fraïssé para comparar estructuras que de hecho esta entre isomorfismo y equivalencia elemental, pero para ello antes veamos cómo se define y cómo se usa a través de juegos.

Dado un tipo de semejanza ρ tomemos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ de tipo ρ, entonces dos personas, $\exists$loisa y $\forall$belardo (que denotaremos $\exists$ y $\forall$ respectivamente) jugaran un juego para comparar dichas estructuras, donde $\forall$ tratará de probar que las estructuras no son isomorfas y $\exists$ tratará de probar que sí lo son.

El juego se juega de la siguiente manera, dado un ordinal γ, se jugará un juego de γ pasos, donde en el α-ésimo paso $\forall$ escoge un elemento de alguna de las dos estructuras y $\exists$ escoge un elemento de la otra estructura y además cada jugador puede ver y recordar todos los movimientos anteriores del juego además de saber su longitud. Al final se habrán escogido $\bar{a} = \{a_\alpha | \alpha < \gamma\} \subseteq A$ y $\bar{b} = \{b_\alpha | \alpha < \gamma\} \subseteq B$ y llamaremos $(\bar{a}, \bar{b})$ al juego. El juego $(\bar{a}, \bar{b})$ cuenta como una victoria para $\exists$ si hay un isomorfismo $f : \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \to \langle \bar{b} \rangle_{\mathfrak{B}}$ tal que $f(\bar{a}) = \bar{b}$[15], en otro caso cuenta como una victoria para $\forall$. Este juego es el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé de longitud γ que denotaremos $EF_\gamma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ y a f se le da el nombre de isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

Un ejemplo donde $\forall$ gana consiste en tomar a $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$. Ahora $\forall$ juega $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \neq 0$, si $\exists$ no quiere perder en el primer movimiento entonces tiene que jugar alguien en $\mathbb{Z}$ distinto de cero, digamos a. Luego hay $m \in \mathbb{Z}$ tal que m no divide a a y así $\forall$ juega $r \in \mathbb{Q}$ tal que $mr = q$, es claro que $\exists$ no puede jugar $b \in \mathbb{Z}$ tal que $mb = a$ y con esto si $\gamma \geq 2$ entonces $\forall$ gana el juego $EF_\gamma(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$.

Ahora, para dar un ejemplo donde $\exists$ gana basta tomar $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, digamos que f es el isomorfismo. Entonces cada vez que $\forall$ juegue un $a \in A$, $\exists$ juega $f(a) \in B$ y si $\forall$ juega $b \in B$, $\exists$ juega $f^{-1}(b)$. De esta manera para cualquier $\gamma \in OR$, $\exists$ gana el juego $EF_\gamma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

A este conjunto de reglas para jugar les llamaremos una estrategia ganadora, entonces con base en estos juegos definimos.

Definición 3.70. Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ estructuras de tipo ρ, diremos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *back-and-forth equivalentes* si y solo si $\exists$ tiene una estrategia ganadora en el juego $EF_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ y lo denotaremos $\mathfrak{A} \sim_\omega \mathfrak{B}$.

En general podemos ver algunas propiedades de la relación $\mathfrak{A} \sim_\gamma \mathfrak{B}$ para cualquier ordinal γ.

Proposición 3.71. *$\sim_\gamma$ es una relación de equivalencia para cualquier $\gamma \in OR$.*

Prueba. La reflexividad y la simetría son fáciles por lo que solo veremos la transitividad. Supongamos que $\mathfrak{A} \sim_\gamma \mathfrak{B}$ y que $\mathfrak{B} \sim_\gamma \mathfrak{C}$, lo que tenemos que hacer es dar una estrategia ganadora para $\exists$ en el juego $EF_\gamma(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ y lo haremos de la siguiente manera. Supongamos que en el α-ésimo paso $\forall$

[15] Esto quiere decir que $f(a_\alpha) = b_\alpha$ para todo $\alpha < \gamma$

juega $a_\alpha \in A$, entonces $\exists$ juega por separado el juego $EF_\gamma(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ para dar $b_\alpha \in B$ que resulta de la estrategia ganadora para este juego y luego juega el juego $EF_\gamma(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ para dar $c_\alpha \in C$ de acuerdo con su estrategia ganadora para este juego y así la respuesta de $\exists$ al movimiento original de $\forall$ es c_α y análogamente si $\forall$ juega alguien en $\mathfrak{C}$. De esta manera tenemos una composición de isomorfismos parciales que es de nuevo un isomorfismo parcial f y ver que cumple $f(\bar{a}) = \bar{c}$ se sigue de la misma condición de los isomorfismos parciales de los que generamos a f. Así $\mathfrak{A} \sim_\gamma \mathfrak{C}$. $\square$

Para tener otra forma de ver la relación de equivalencia back-and-forth, primero notemos que los isomorfismos parciales quedan totalmente determinados por dónde mandan a los generadores, por lo que en lugar de escribir el isomorfismo parcial $f \colon \langle \bar{a} \rangle_{\mathfrak{A}} \to \langle \bar{b} \rangle_{\mathfrak{B}}$ que cumple $f(\bar{a}) = \bar{b}$, escribiremos solamente $(\bar{a}, \bar{b})$.

Ahora, si suponemos que $\mathfrak{A} \sim_\omega \mathfrak{B}$ entonces hay un isomorfismo parcial y finito $(\bar{a}, \bar{b})$, y si además damos algún elemento $a \in A$ podemos extender este isomorfismo a otro que tenga a a en su dominio, simplemente haciendo que $\forall$ juegue $\bar{a}$ y como ya sabemos que $(\bar{a}, \bar{b})$ es un isomorfismo parcial, $\exists$ puede jugar $\bar{b}$, despues $\forall$ juega en todos los turnos siguientes a y $\exists$ juega b (usando su estrategia ganadora). Así, hemos extendido $(\bar{a}, \bar{b})$ a otro isomorfismo parcial $(\bar{a}a, \bar{b}b)$. Análogamente si queremos extender la imagen del isomorfismo, entonces definimos

Definición 3.72. Un *sistema back-and-forth* para $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ es un conjunto I de isomorfismos parciales con dominio finito que cumple:

(i) $I \neq \emptyset$.

(ii) Si $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ y $a \in A$, entonces hay un isomorfismo parcial en I que extiende a $(\bar{a}, \bar{b})$ y que tiene a a en su dominio.

(iii) Si $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ y $b \in B$, entonces hay un isomorfismo parcial en I que extiende a $(\bar{a}, \bar{b})$ y que tiene a b en su imagen.

Teorema 3.73. $\mathfrak{A} \sim_\omega \mathfrak{B}$ *si y sólo si hay un sistema back-and-forth para* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$.

Prueba. La ida de este teorema ha sido esbozada arriba y los detalles que faltan son fáciles, así que sólo veremos el regreso. Dado I un sistema back-and-forth para $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ podemos dar una estrategia ganadora para $\exists$ de la siguiente manera, tomamos $(\bar{a}, \bar{b}) \in I$ (lo podemos hacer por el punto (i) de la definición de sistema back-and-forth) y en el n-ésimo paso del juego $EF_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, si $\forall$ juega $a \in A$, entonces $\exists$ toma un isomorfismo parcial en I que extiende a $(\bar{a}, \bar{b})$ y tiene a a en su dominio y juega la imagen de a bajo este isomorfismo parcial, análogamente si $\forall$ juega algún $b \in B$. Como en cada paso se creó un isomorfismo parcial, entonces al final del juego se tiene un isomorfismo parcial, con lo cual $\exists$ gana el juego. $\square$

Con esta equivalencia ya podemos ver por qué estamos viendo esta relación entre estructuras y que realmente se queda entre isomorfismo y equivalencia elemental.

Teorema 3.74. *Sean* ρ *un tipo de semejanza y* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\rho$. $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *son back-and-forth equivalentes si y sólo si hay una extensión de forcing en la que son isomorfas.*

Prueba.

($\Rightarrow$) Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son back-and-forth equivalentes, entonces hay I un sistema back-and-forth para $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$. Definimos $P = \langle I, \supseteq \rangle$ y si $G \subseteq P$ es un filtro genérico entonces en $V[G]$ se tiene que $f = \bigcup G$ es el isomorfismo buscado, para ver que es un isomorfismo basta ver que:

(i) $D_a = \{p \in P | a \in dom(p)\}$ es denso en P, por lo que $dom(f) = A$.

(ii) $D_b = \{p \in P | b \in Im(p)\}$ es denso, y así $Im(f) = B$.

(iii) Si $a_1, a_2 \in A$ son tales que $a_1 \neq a_2$, entonces $D = \{p \in P | p(a_1) \neq p(a_2)\}$ es denso con lo cual f es inyectiva.

(iv) Si $c \in \rho$ es una constante, entonces $D_c = \{p \in P | p(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}\}$ es denso.

(v) Si $R \in \rho$ es una letra predicativa de aridad n, entonces $D_R = \{p \in P | (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (p(a_1), \ldots, p(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}\}$ es denso.

(vi) Si $f \in \rho$ es una letra funcional de aridad n, entonces $D_f = \{p \in P | f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a \iff f^{\mathfrak{B}}(p(a_1), \ldots, p(a_n)) = p(a)\}$ es denso.

Ver que en cada caso el correspondiente conjunto es denso es de rutina usando que I es un sistema back-and-forth.

($\Leftarrow$) Si suponemos que hay una extensión de forcing en la que $f \colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}$,digamos que esta extensión es usando a un orden parcial P entonces el sistema compatible para $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ será el conjunto de todos los isomorfismos parciales que podrían extenderse a un isomorfismo total, es decir, definimos

$$I = \{h | \exists p \in P(p \Vdash \exists g \colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}\ y\ S \subseteq A\ finito(h = g \restriction_{\langle S \rangle_{\mathfrak{A}}}))\}$$

Si $S \subseteq A$ es finito entonces usando una cantidad finita de veces los axiomas de par y unión tendríamos que $h = g \restriction_S \in V$ y luego como la relación $\Vdash$ está escrita en V, entonces $I \in V$ y es un sistema back-and-forth para $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ pues:

(i) Como ya tenemos que $f \colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}$ entonces $f \restriction_{\langle a \rangle_{\mathfrak{A}}}$ con $a \in A$ es un isomorfismo parcial que está en I.

(ii) Si $h \in I$ y $a \in A$, entonces hay $p \in P$ tal que $p \Vdash \exists g \colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}$ y $S \subseteq A$ finito $(h = g \restriction_{\langle S \rangle_{\mathfrak{A}}})$ y con este isomorfismo y la misma condición p, tenemos que $h \cup \{\langle a, g(a) \rangle\} \in I$, y el punto (iii) para ver que I es un sistema back-and-forth para $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ es análogo a lo que acabamos de hacer.

□

Con esta equivalencia podemos volver a ver que $\sim_\omega$ es una relación de equivalencia y veremos también que esta relación se queda entre isomorfismo y equivalencia elemental, pero para lo primero necesitaremos un poco más de técnica.

Definición 3.75. Sean P y Q forcings definimos el *producto de forcing* $\langle P \times Q, \leq \rangle$ como el producto de P y Q con el siguiente orden, $(p_1, q_1) \leq (p_2, q_2)$ si y sólo si $p_1 \leq_P p_2$ y $q_1 \leq_Q q_2$.

Ahora que hemos dado un nuevo orden parcial o forcing, lo que sigue es ver cómo son sus genéricos y qué tipo de extensiones generan.

Teorema 3.76. *Sean P y Q órdenes parciales en V. $G \subseteq P \times Q$ es genérico sobre V si y sólo si $G = G_1 \times G_2$ con G_1 P-genérico sobre V y G_2 Q-genérico sobre $V[G_1]$.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Es fácil ver que $G_1 = \{p|\exists q((p,q) \in G)\}$ y $G_2 = \{q|\exists p((p,q) \in G)\}$ son filtros y que $G = G_1 \times G_2$ por lo que sólo veremos que son genéricos. Para G_1 también es fácil ver que es genérico usando que si D es denso en P entonces $D \times Q$ es denso en $P \times Q$. Así, sólo veremos que G_2 es genérico sobre $V[G_1]$.
Sea $D_2 \in V[G_1]$ un subconjunto denso de Q. Entonces sabemos que hay $p_1 \in G_1$ tal que $p_1 \Vdash \dot{D}_2$ es denso en Q. Ahora, lo que queremos es encontrar $r_1 \in G_1$ y $r_2 \in G_2$ tales que $r_1 \Vdash r_2 \in \dot{D}_2$, para lo cual basta ver que si $p_2 \in G_2$, entonces

$$D = \{(r_1, r_2)|r_1 \leq p_1,\ r_1 \Vdash r_2 \in \dot{D}_2\}$$

es denso bajo (p_1, p_2). En efecto, si fuera denso bajo (p_1, p_2) tendríamos, por 2.11, que hay $(r_1, r_2) \in G \cap D$ y de aquí es fácil ver que, en $V[G_1]$, $r_2 \in G_2 \cap D_2$. Entonces sea $(q_1, q_2) \leq (p_1, p_2)$ y como $q_2 \in Q$ y $q_1 \Vdash \dot{D}_2$ es denso en Q, debe haber $r_1 \leq q_1$ y $r_2 \leq q_2$ tales que $r_1 \Vdash r_2 \in \dot{D}_2$, así $(r_1, r_2) \in D$, por lo que es denso bajo (p_1, p_2).

($\Leftarrow$) Supongamos que G_1 es P-genérico sobre V y que G_2 es Q-genérico sobre $V[G_1]$. De nuevo ver que $G_1 \times G_2$ es filtro es fácil, entonces veamos su genericidad.
Sea $D \in M$ denso en $P \times Q$. Para ver que $(G_1 \times G_2) \cap D \neq \emptyset$ basta ver que

$$D_2 = \{p_2 \in Q|\text{hay } p_1 \in G_1 \text{ tal que } (p_1, p_2) \in D\}$$

es denso. Sea entonces $q_2 \in Q$, queremos encontrar $p_2 \leq q_2$ y $p_1 \in G_1$ tales que $(p_1, p_2) \in D$. Para esto es suficiente ver que

$$D_1 = \{p_1 \in P|\text{hay } p_2 \leq q_2 \text{ tal que } (p_1, p_2) \in D\}$$

es denso. Sea $q_1 \in P$, entonces $(q_1, q_2) \in P \times Q$ y como D es un denso en $P \times Q$ hay $(p_1, p_2) \in D$ tal que $(p_1, p_2) \leq (q_1, q_2)$ y así $p_1 \in D_1$. Con esto D_1 es denso y esto implica que $(G_1 \times G_2) \cap D \neq \emptyset$.

$\square$

Además algo que se sigue de la minimalidad de las extensiones genéricas (ver el inciso (iv) de 2.14) es que $V[G_1 \times G_2] = V[G_1][G_2]$. No sólo eso sino que G_1 también es genérico en $V[G_2]$ y con esto tenemos que $V[G_1][G_2] = V[G_2][G_1]$.

Con estos resultados por fin es posible ver que la equivalencia back-and-forth es una relación de equivalencia.

Proposición 3.77. $\sim_\omega$ *es una relación de equivalencia.*

Prueba. Igual que antes es fácil ver que esta relación es reflexiva y simétrica por lo que sólo veremos la transitividad. Supongamos que $\mathfrak{A} \sim_\omega \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B} \sim_\omega \mathfrak{C}$, entonces hay forcings P y Q con genéricos G y H (G es P-genérico sobre V y H es Q-genérico sobre $V[G]$) respectivamente tales que en $V[G]$ se tiene que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ y en $V[H]$, $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C}$. Digamos que f y g son los isomorfismos correspondientes, entonces $f, g \in V[G \times H]$ y ambos son isomorfismos por lo que en $V[G \times H]$ su composición $g \circ f$ es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ es $\mathfrak{C}$ y así $\mathfrak{A} \sim_\omega \mathfrak{C}$. $\square$

Algo que es inmediato es que estructuras isomorfas son back-and-forth equivalentes, pues el isomorfismo va a seguir siendo un isomorfismo es cualquier extensión de forcing.

Otra cosa que hace falta ver es que $\sim_\omega$ implica $\equiv$, para lo cual solamente hay que observar que la relación de equivalencia elemental no depende del universo de la teoría de conjuntos en el que se esté trabajando, pues ésta es una noción que solo hace referencia al lenguaje, entonces un argumento inductivo nos da como resultado que para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ y cualesquiera $a_1, \dots, a_n \in A$, se cumple que:

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ en } V \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ en } V[G] \tag{3.17}$$

Entonces lo que queremos es un resultado inmediato de lo que vimos usando que $\cong$ implica $\equiv$.

Corolario 3.78. *Si* $\mathfrak{A} \sim_\omega \mathfrak{B}$*, entonces* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$*.*

Con esto ya hemos visto que $\cong \Rightarrow \sim_\omega \Rightarrow \equiv$, para terminar esta sección veremos que los regresos no son ciertos. Pero antes veamos bajo que condiciones isomorfismo y back-and-forth equivalencia son lo mismo.

Proposición 3.79. *Si* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *son numerables y* $\mathfrak{A} \sim_\omega \mathfrak{B}$*, entonces* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$*.*

Prueba. La forma más fácil de ver esto es construir el isomorfismo a partir de una estrategia ganadora para $\exists$ en el juego $EF_\omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Como las estructuras son numerables podemos escribirlas de la siguiente manera, $A = \{a_n | n \in \omega\}$ y $B = \{b_n | n \in \omega\}$. Entonces, si $\forall$ siempre juega elementos de A y en el n-ésimo paso juega a_n, como $\exists$ tiene una estrategia ganadora al final del juego se obtendría un isomorfismo parcial $f \colon \langle\{a_n | n \in \omega\}\rangle_{\mathfrak{A}} \to \langle\{b_n | n \in \omega\}\rangle_{\mathfrak{B}}$, pero $\langle\{a_n | n \in \omega\}\rangle_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ y $\langle\{b_n | n \in \omega\}\rangle_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$, por lo que tenemos un isomorfismo total. $\square$

Proposición 3.80. $\sim_\omega \not\Rightarrow \cong$

Prueba. Para esto veremos que $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \sim_\omega \langle \mathbb{R}, < \rangle$. Como ambos son modelos de TOD[16] y $\mathbb{Q}$ es numerable en cualquier extensión de forcing, entonces si tomamos una extensión que añada una biyección entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ (donde estos son los $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ del modelo base) tendríamos dos modelos de TOD numerables y por tanto isomorfos. Entonces si tomamos $P = Fun_\omega(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ y $G \subseteq P$ un genérico, entonces igual que en secciones anteriores tendríamos que $\bigcup G$ es una función de $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$ teniendo el resultado. $\square$

Finalmente para ver que $\equiv \not\Rightarrow \sim_\omega$, veremos que $\mathbb{Z} \nsim_\omega \mathbb{Z} \circ \mathbb{Z}$ y que $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z} \circ \mathbb{Z}$.

Para lo primero sólo hay que notar que $\forall$ tiene estrategia ganadora en el juego $EF_\omega(\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \circ \mathbb{Z})$, pues $\mathbb{Z} \circ \mathbb{Z}$ se ve como poner un $\mathbb{Z}$ después de otro $\mathbb{Z}$ y así con los pares $\forall$ juega una sucesión creciente del primer $\mathbb{Z}$ y con los impares una sucesión decreciente del segundo $\mathbb{Z}$, obteniendo una sucesión creciente y una decreciente de elementos de $\mathbb{Z} \circ \mathbb{Z}$ tal que cada elemento de la sucesión de los pares es menor que cualquier elemento de la sucesión de los impares y viceversa, lo cual es imposible de lograr en $\mathbb{Z}$ por lo que $\mathbb{Z} \nsim_\omega \mathbb{Z} \circ \mathbb{Z}$.

Y la prueba de que $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z} \circ \mathbb{Z}$ es algo extensa por lo que sólo será referida a [Ma] sección 2.4.

Pero la idea es definir la "profundidad" de una fórmula como la cantidad de cuantificadores anidados que tiene, por ejemplo la profundidad de $\forall x \alpha(x) \to \exists y \beta(y)$ es 1, mientras que la fórmula $\forall x \exists y (R(x, y))$ tiene profundidad 2. Entonces lo que se hace es definir una relación entre estructuras llamada *equivalencia n elemental* (que denotaremos con $\equiv_n$), que es que hagan verdaderos a los mismos enunciados de profundidad a lo más n y ver que $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$. Luego observar que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \equiv_n \mathfrak{B}$ para todo $n \in \omega$ y con estas equivalencias lo que se hace es ver que $\exists$ tiene una estrategia ganadora en el juego $EF_n(\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \circ \mathbb{Z})$ para todo $n \in \omega$.

[16] TOD abrevia Teoría del Orden Denso sin extremos.

Apéndice A

El Teorema de Łoś

Recordemos que en teoría de modelos uno de los objetivos es cómo obtener nuevas estructuras a partir de otras a dadas. Una forma de hacer esto es con los ultraproductos. Éstos toman una familia de estructuras $\{\mathfrak{A}_i | i \in I\}$ de tipo ρ para luego obtener otra estructura $\mathfrak{A}$ de tipo ρ. El teorema de Łoś, que es el teorema principal de los ultraproductos, afirma que una fórmula es verdadera en el ultraproducto si es verdadera en muchos de los factores.

Entonces una forma de ver a esta técnica como una aplicación de estructuras booleano-valuadas, más específicamente de estructuras llenas (ver 2.40), es la siguiente.

Sean ρ un tipo de semejanza e I un conjunto de índices, para cada $i \in I$, $\mathfrak{A}_i$ una estructura de tipo ρ, bivaluada entonces definimos la siguiente estructura booleano-valuada, sobre el álgebra $\mathscr{P}(I)$, de la siguiente manera.

Consideramos $\mathfrak{A} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ y como los valores de verdad deben ser subconjuntos de I, entonces definimos para cualquier fórmula $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ su valor booleano de verdad como

$$\|\varphi(a_i, \ldots, a_n)\| = \{i \in I | \mathfrak{A}_i \vDash \varphi(a_{1i}, \ldots, a_{ni})\} \tag{A.1}$$

Con esto se tiene

Lema A.1. *La estructura $\mathfrak{A}$ que definimos es una estructura booleano-valuada.*

Prueba. Hay que ver que se cumplen (2.2) y (2.3). Todos los incisos son fáciles por lo que solo veremos el inciso (iii) de (2.3), para el cual basta ver que

$$\bigcup_{a \in A} \{i \in I | \mathfrak{A}_i \vDash \varphi(a_i)\} = \{i \in I | \text{hay } a_i \in A_i \text{ tal que } \mathfrak{A}_i \vDash \varphi(a_i)\}$$

donde $a_i \in A_i$ es la i-esima proyección de $a \in A$. La igualdad la veremos por doble contención. $x \in \bigcup_{a \in A} \{i \in I | \mathfrak{A}_i \vDash \varphi(a_i)\}$ si y sólo si hay $a \in A$ tal que $x \in \{i \in I | \mathfrak{A}_i \vDash \varphi(a_i)\}$ si y sólo si hay $a \in A$ tal que $\mathfrak{A}_x \vDash \varphi(a_x)$ si y sólo si (usando AE) hay $a_x \in A_x$ tal que $\mathfrak{A}_x \vDash \varphi(a_x)$ si y sólo si $x \in \{i \in I | \text{hay } a_i \in A_i \text{ tal que } \mathfrak{A}_i \vDash \varphi(a_i)\}$ □

Lema A.2. $\mathfrak{A}$ *es llena*

Prueba. Sean $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces $\|\exists x\varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\| = \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \exists x\varphi(x, a_{1i}, \ldots, a_{ni})\}$. Definimos $a \in A$ de la siguiente manera. Si $i \in \|\exists x\varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\|$ tomamos $a_i \in A_i$ tal que $\mathfrak{A}_i \models \varphi(a_i, a_{1i}, \ldots, a_{ni})$ y si $i \notin \|\exists x\varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\|$ tomamos cualquier elemento de A_i.

Con esto si $a = \langle a_i \rangle_{i \in I}$ es claro que $\|\exists x\varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\| = \|\varphi(a, a_1, \ldots, a_n)\|$. $\square$

Teorema A.3 (Łoś)**.** *Si F es un ultrafiltro sobre I, entonces para cualquier fórmula φ y para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n$ elementos de A*

$$\mathfrak{A}/F \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \textit{ si y sólo si } \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \varphi(a_{1i}, \ldots, a_{ni})\} \in F$$

Prueba. Este teorema es una consecuencia de (2.6) y (A.1). $\square$

Índice alfabético

Bibliografía

[Ch] C. C. Chang and H. J. Keisler: (1991) *Model Theory* (North Holland)

[BC] J. L. Bell: (2005) *Set Theory. Boolean-Valued Models and Independence Proofs* (Oxford Logic Guides)

[BM] J. L. Bell and A. B. Slomson: (2006) *Models and Ultraproducts* (Dover Pubications)

[Je] T. Jech: (2002) *Set Theory* (Springer)

[Ku] K. Kunen: (1995) *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs* (North Holland)

[Me] E. Mendelson: (1997) *Introduction to Mathematical Logic* (Chapman & Hall)

[Rot] Joseph J. Rotman: (1995) *An Introduction to the Toery of Groups, Fourth Edition* (Springer)

[Ma] David Marker: (2002) *Model Theory* (Springer)

[BA] Sabine Koppelberg: (1989) *Handbook of Boolean Algebras volume 1* (North-Holland)