



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Modelo variacional para  
microestructuras en transiciones de fase  
coherentes

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO  
DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

ARTURO CABALLERO ALTAMIRANO

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ANTONIO CAPELLA KORT

2010





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Modelo variacional para microestructuras en  
transiciones de fase coherentes

April 14, 2011



---

## Agradecimientos

*Quiero agradecerle Antonio Capella por su apoyo, sus enseñanzas, su paciencia y guía.*

*A Nils por su ayuda.*

*A mi familia y amigos por su comprensión y cariño.*

*Y finalmente a mis sinodales por el tiempo que me dedicaron y su paciencia.*



# Indice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Microestructuras en Martensitas . . . . .	1
1.2	El funcional de energía . . . . .	5
1.3	Estrategia de solución y resultados . . . . .	7
<b>2</b>	<b>El modelo de energía con una condición de frontera rígida.</b>	<b>9</b>
2.1	Existencia de mínimos . . . . .	9
2.2	Cota superior para el mínimo de la energía . . . . .	12
2.3	Equipartición de la energía . . . . .	17
2.4	Lema de interpolación . . . . .	23
2.5	Cotas inferior y superior para la energía . . . . .	27
<b>3</b>	<b>El modelo de energía con una condición de frontera suave</b>	<b>37</b>
3.1	Existencia de mínimos . . . . .	38
3.2	Cota superior y equipartición de la energía . . . . .	39
3.3	Cota superior localizada para la energía . . . . .	41
3.4	Cota inferior y superior para la energía . . . . .	43
<b>A</b>	<b>Teorema de Murat</b>	<b>49</b>
<b>B</b>	<b>Medidas de Radón</b>	<b>59</b>
<b>C</b>	<b>Espacio <math>H^{1/2}</math></b>	<b>63</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>



# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo, basado en un artículo de R. V. Kohn y S. Müller [9], se estudian modelos variacionales para materiales que presentan una transición de fase martensítica y las microestructuras que se observan en dichos materiales. En este capítulo se describe el fenómeno estudiado y el problema variacional que lo modela.

### 1.1 Microestructuras en Martensitas

La transición de fase martensítica es una transición de fase sólido a sólido donde la estructura cristalina de un material cambia abruptamente a cierta temperatura. Esto se ilustra esquemáticamente en la Figura 1.1. Supóngase que los átomos del sólido forman un cristal donde la celda unitaria es un cuadrado a una temperatura alta. Si bajamos la temperatura, lo que se observa es una simple contracción térmica hasta una cierta temperatura crítica  $t_c$ , conocida como la temperatura de Curie. A esta temperatura la estructura cristalina del material se transforma abruptamente, cambiando de una celda unitaria cuadrada a una rectangular (ver Figura 1.1). Supongamos que los átomos de nuestro sólido están ordenados en una retícula cuadrada como en la Figura 1.1(a) en alta temperatura. Cuando enfriamos este sólido podemos ver una contracción térmica ordinaria pero nada interesante o inusual hasta que nos encontramos con la temperatura  $t_c$ . Aunque en este punto el cambio es abrupto y la distorsión de la celda unitaria es significativa, no hay difusión entre las distintas regiones y no hay cambio en la posición relativa de los átomos durante esta transformación. Es decir, la transformación es disipativa (sin difusión) y de primer orden (cambia abruptamente en el parámetro de la retícula). La fase de alta temperatura es conocida como la fase austenita mientras que la fase de baja temperatura es conocida como la fase martensita.

Si ahora iniciamos el calentamiento de este sólido, obtenemos una expansión térmica normal hasta que la temperatura alcanza otro punto crítico, donde la estructura del cristal regresa abruptamente a la retícula cuadrada original. Por lo tanto la transformación es cristalográficamente reversible.

La transformación de fase martensítica se puede observar en varios metales, aleaciones, cerámicas, o incluso en sistemas biológicos. Los materiales que atraviesan esta

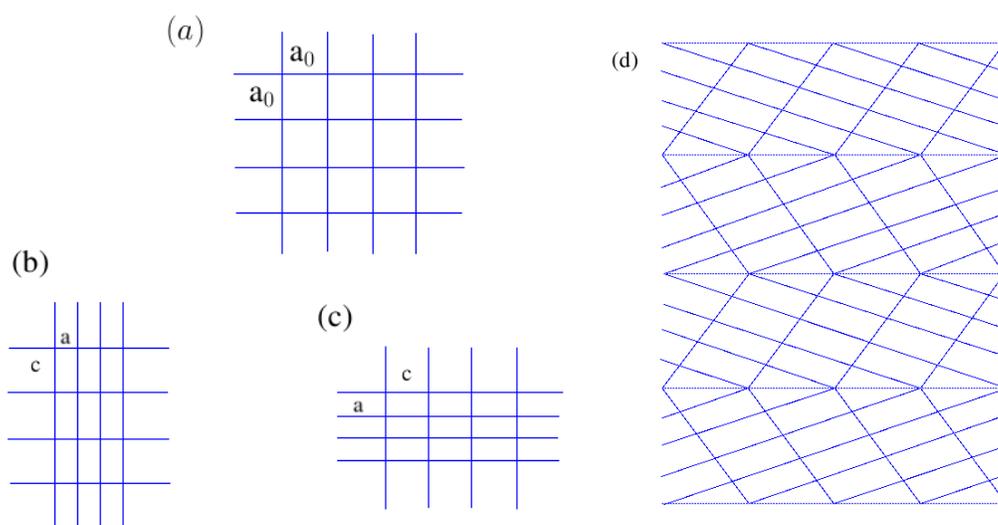


Figura 1.1: Ilustración esquemática de la transformación de fase martensítica. El inciso (a) es la austenita, el (b) y (c) son las variantes de la martensita y finalmente el (d) es un arreglo coherente de las variantes alternativas de la martensita.

transformación tienen muchas implicaciones tecnológicas importantes. Varios de los estudios recientes sobre martensitas han sido motivados por el efecto de memoria de forma, del que hablaremos un poco más adelante (ver [2, 9, 11] para más detalles).

Una característica observable de una transformación martensítica es la microestructura que esta produce. En una típica transformación, la red de la fase austenita de alta temperatura tiene mayor simetría cristalográfica que la red de fase martensita de baja temperatura. Esto también se puede observar en la Figura 1.1 donde la austenita tiene una red cuadrada y la martensita una red rectangular. Consecuentemente tenemos múltiples simetrías relacionadas de martensitas. Por ejemplo, empezando con la red cuadrada de la Figura 1.1(a), podríamos haber transformado la red en la Figura 1.1(c) en lugar de en la 1.1(b). La red cuadrada no puede decir la diferencia entre estas dos redes rectangulares. Entonces una transformación cuadrada a rectangular tiene dos variantes de martensitas (en el caso de la Figura 1.1 (b) y (c)). El número de variantes depende del cambio de simetrías durante la transformación. No hay ninguna razón por la cual el cristal entero debería transformarse de la austenita a una sola variante de martensita. En lugar de ello, diferentes partes del cristal pueden transformarse a diferentes variantes. Al hacerse la mezcla de las diferentes estructuras, los cristales pueden tomar formas que son diferentes unas de otras, sin embargo esta mezcla debe ser coherente, es decir, las posiciones de los átomos deben coincidir con la interfaz entre las variantes (ver Figura 1.1(d)). La necesidad de los cristales para formar mezclas de variantes que simultáneamente mantengan la coherencia induce patrones complejos y característicos a escalas de longitud mucho más pequeña que el tamaño del espécimen. A estos patrones se les conoce como la

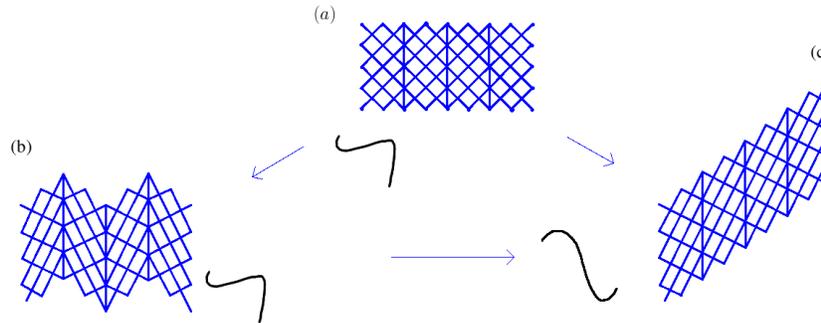


Figura 1.2: *Explicación esquemática del efecto de memoria de forma en términos de la transformación de fase martensítica. Un alambre es deformado al enfriarse, (b) y (c). Después recobra la deformación al calentarse, de (c) a (a).*

microestructura de la martensita. La habilidad de un material de formar microestructuras y la habilidad para cambiarlas da a los materiales martensíticos sus propiedades únicas.

## Efecto de memoria de forma

El efecto de memoria de forma se puede explicar en términos de la transformación de fase martensítica y la microestructura martensítica. Esto se ilustra esquemáticamente en la Figura 1.2. En la Figura 1.2(a) se muestra un material en fase austenítica a alta temperatura. Cuando enfriamos el material, la austenita se transforma en la martensita. Sin embargo, esto se hace de una manera especial como se muestra en la Figura 1.2(b). Las diferentes regiones del cristal se transforman en diferentes variantes de martensita de tal forma que no hay cambio macroscópico en la forma del cristal. Es decir, aunque cada cuadrado se transforma en un rectángulo, formamos rectángulos que tienen la suficiente orientación para que no haya distorsión neta. Esta transformación de la austenita a una microestructura de martensita sin cambio neto es conocida como auto-acomodamiento.

Ahora deformamos el cristal. Se puede acomodar la deformación distorsionando la red del cristal, o simplemente reordenando las variantes y haciendo una nueva microestructura. Energéticamente esta última opción es más favorable. Las diferentes variantes vienen del mismo acomodamiento y consecuentemente tienen la misma energía. Por lo tanto cambiar la microestructura le permite al cristal cambiar su forma sin cambiar su energía. En contraste distorsionar la red cuesta energía. Luego, se prefiere dar cabida a la deformación cambiando la microestructura, como se muestra en la Figura 1.2(c). Además, ya que ambos estados, el auto-acomodado como en la Figura 1.2(b), y el deformado, como en la Figura 1.2(c), tienen la misma energía, no hay ninguna razón por la cual el cristal quiera regresar al estado auto-acomodado

cuando las cargas son liberadas. Por lo tanto el comportamiento del material es dúctil, se deforma fácilmente y con poco retroceso.

Ahora calentamos el cristal. Cada variante de la transformación regresa a la austenita. Sin embargo, solo hay una variante de austenita, luego el cristal, independientemente de su microestructura y de su forma en baja temperatura, tiene que volver a su configuración inicial como se muestra en la Figura 1.2(a). Entonces vemos que el efecto de memoria de forma es resultado de tener un único estado de baja energía en alta temperatura, numerosos estados de baja energía en poca temperatura, de la capacidad del material de formar una microestructura específica y finalmente de la capacidad del material para cambiar la microestructura libremente.

Además, las variantes que son recuperables por el efecto de memoria de forma están limitadas a aquellas que pueden ser acomodadas por el reordenamiento de las variantes martensíticas. En resumen, hay una relación entre la cristalografía, la microestructura y las propiedades macroscópicas.

## Transiciones austenita-martensita

En este trabajo nos enfocaremos particularmente a las microestructuras que se observan en las transiciones de austenita-martensita. Un ejemplo de este tipo de transiciones puede observarse en la Figura 1.3. Cuando el material se encuentra a la temperatura de

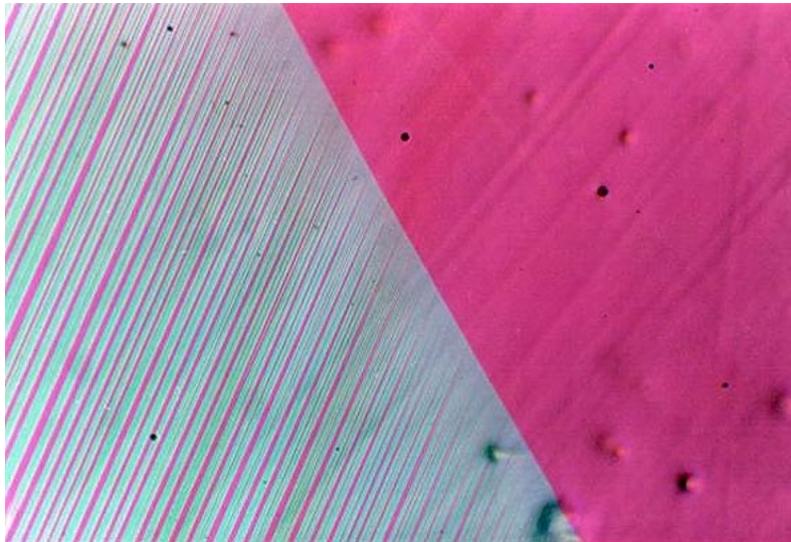


Figura 1.3: *Ejemplo de una transición austenita-martensita.*

Curie, tanto la austenita como las diferentes variantes de martensitas pueden estar presentes. Sin embargo, la austenita no puede formar ninguna transición de fase coherente con las distintas variantes de la martensita. Es decir la austenita no es compatible con ninguna de las variantes de la martensita. Para conseguir dicha compatibilidad es necesario que las martensitas formen una microestructura que en promedio sea compatible

con la austenita. En la Figura 1.3 podemos observar como del lado de la martensita (parte inferior izquierda de la foto) regiones de las dos distintas variantes de la martensita, oscilan mucho mas rápidamente a medida que nos acercamos a la transición con la austenita. Este aumento en la frecuencia de oscilación se logra a través de un patrón de bifurcación.

El objetivo de esta tesis consiste en plantear un modelo energético que describa a este tipo de materiales y utilizar las herramientas del cálculo de variaciones para explicar como microestructuras de bifurcación como las que se observan en la Figura 1.3 aparecen de forma natural cuando se minimiza la energía del modelo.

## 1.2 El funcional de energía

En estas sección proponemos el modelo variacional que describe la transición de fase austenita-martensita. Este modelo es simplificado, ya que no incluye directamente al funcional de la energía de elasticidad, sin embargo contiene los elementos comunes necesarios y que son propios del fenómeno que se quiere estudiar. Para abundar en el tema se pueden ver [8,9].

La región que ocupa la parte martensítica del espécimen o muestra a estudiar está descrita por un rectángulo  $R_L$  definido por  $0 < x < L$ ,  $0 < y < 1$ . La parte que ocupa la austenita esta definida por  $x < 0$ . La función  $u : R_L \rightarrow \mathbb{R}$  representa un

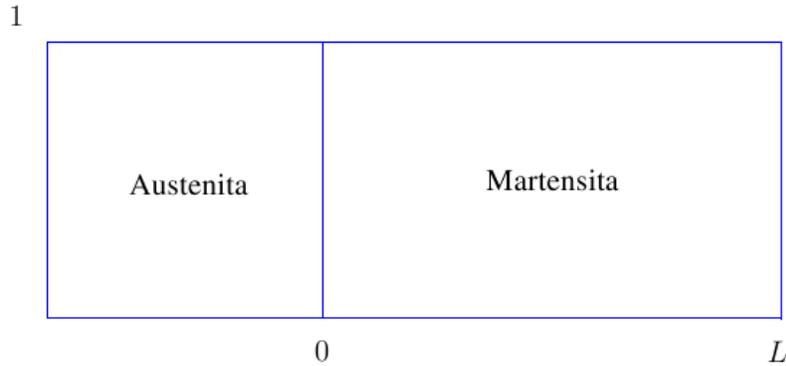


Figura 1.4: *Interfaz entre la martensita y la austenita*

parámetro de orden donde  $u_y = -1$  y  $u_y = +1$  corresponden a dos distintas variantes de la martensita.

La energía propuesta es:

$$I^\varepsilon(u) = \int_{R_L} u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dx dy \quad (1.1)$$

sujeta a la restricción

$$|u_y| = 1 \text{ c.d. en } R_L,$$

donde  $\varepsilon > 0$  es un parámetro que depende del material.

El término  $\int \int u_x^2$  es la energía elástica de la martensita, observamos que ésta se anula solamente cuando  $u_x = 0$ , es decir, si la interfaz entre las variantes es horizontal. El término  $\varepsilon \int \int |u_{yy}|$  corresponde a la energía de superficie; ya que  $u_y$  salta de  $-1$  a  $+1$ ,  $|u_{yy}|$  es como una función  $\delta$  concentrada sobre la interfaz entre las variantes y la podemos expresar como

$$\varepsilon \int \int |u_{yy}| dx dy = 2\varepsilon \int N(x) dy, \quad (1.2)$$

donde  $N(x_0)$  es el número de fronteras entre variantes que cruzan la línea  $x = x_0$ . Si  $\varepsilon$  es muy pequeña (como supondremos), el minimizador de la energía tendrá muchas transiciones de fase y su amplitud será proporcional a  $\varepsilon$ . La frontera  $x = 0$  representa la interfaz austenita, como podemos ver en la Figura 1.4, y sobre esta frontera se toma la energía elástica de la austenita. Dividiremos el modelo en dos casos. El primer caso será cuando la fase austenita es completamente rígida, es decir, cuando  $u = 0$  en  $x = 0$ . El segundo caso será más general y estará dado por una condición suave. La cual explícitamente está modelada como la banda infinita  $-\infty < x < 0$ ,  $0 < y < 1$ , con energía elástica

$$\frac{\beta}{2\pi} \int_0^1 \int_{-\infty}^0 u_x^2 + u_y^2 dx dy.$$

Por simplicidad, para este caso, supondremos las condiciones de frontera periódicas en  $y$

$$u(x, 0) = u(x, 1) \quad \text{para cada } x \in (0, L). \quad (1.3)$$

Con lo que después de un breve cálculo, que se hace en el Apéndice C, el problema de minimización se reduce a minimizar el funcional no convexo

$$J^\varepsilon(u) := \int_{R_L} \left( u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| \right) dx dy + \beta \|u_0\|_{1/2}^2, \quad u_0(y) = u(0, y), \quad (1.4)$$

sujeto a  $|u_y| = 1$  cd y a la condición de frontera periódica (1.3). Pero con este funcional no es posible hallar una cota inferior de la forma que se busca, por lo que usando una norma equivalente para  $u_0$ , el problema de minimización consiste en minimizar el funcional

$$\tilde{J}^\varepsilon(u) = \int_{R_L} \left( u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| \right) dx dy + \frac{\beta}{2\pi} \|u_0\|_{L^2}. \quad (1.5)$$

Podemos observar que si el parámetro  $\beta$ , que depende del material, tiende a infinito, entonces la norma  $L^2$  de  $u_0$  tiende a cero al minimizar el problema, por lo que regresaríamos al primer caso. Además si  $u = 0$  en  $x = 0$ , tenemos que la energía (1.4) es la misma que la energía (1.1).

### 1.3 Estrategia de solución y resultados

Dado que el funcional no es convexo, debido a la restricción  $|u_y| = 1$ , el problema no tiene una solución única. La estrategia para estudiar este problema consiste en demostrar como escala la energía en términos de los parámetros adimensionales del problema. El objetivo será demostrar cotas superiores e inferiores para la energía en cada caso. Para obtener las cotas superiores, lo que haremos será proponer una función que tenga una energía suficientemente chica. Para las cotas inferiores necesitamos un argumento que únicamente dependa de las condiciones de frontera del problema y sea independiente de cualquier suposición sobre la forma o estructura de los mínimos del funcional de energía. En particular usaremos algunos resultados técnicos como el lema de la equipartición de la energía.

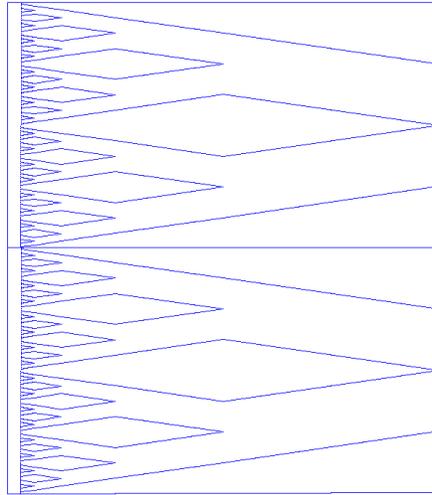


Figura 1.5: *Patron de bifurcación*

El resultado principal de esta tesis consiste en demostrar que existen ciertas constantes  $c$  y  $C$ , independientes de  $\varepsilon$ ,  $L$  y  $\beta$ , tales que acotan la energía de la siguiente forma

$$c \min \left\{ \varepsilon^{1/2} \beta^{1/2} L^{1/2}, \varepsilon^{2/3} L^{1/3} \right\} \leq \min_{\mathcal{A}} \tilde{J}^\varepsilon \leq C \min \left\{ \varepsilon^{1/2} \beta^{1/2} L^{1/2}, \varepsilon^{2/3} L^{1/3} \right\}. \quad (1.6)$$

Obsérvese que la función propuesta como cota superior da una idea de la estructura de los mínimos de la energía, y que la cota inferior permite asegurar que la energía de esta función realmente corresponde con la de los mínimos.

La tesis está dividida en dos partes, la primera abarca el caso de la condición con frontera rígida y la segunda la condición con frontera suave. En la primera parte (segundo capítulo) comenzamos demostrando la existencia de mínimos para el funcional de energía y en particular un resultado de compacidad para las sucesiones minimizantes. La cota superior se demuestra usando una función que tiene la estructura como la que se ilustra en la Figura 1.5. Compárese esta Figura con la fotografía de la Figura 1.4.

Para obtener la cota inferior empezamos demostrando el Lema 2.3.1 de equipartición de la energía y con ayuda de él probamos el resultado sobre las cotas inferiores y superiores de la energía. En la segunda parte (tercer capítulo) abordamos el modelo de energía con una condición de frontera suave, para el también damos una función sierra que brinda una cota superior para el mínimo de energía del modelo y se demuestra con ayuda de un par de lemas técnicos y del lema de equipartición de la energía el Teorema 3.4.1. Usando los resultados obtenidos en ambos casos se demuestra la validez de (1.6).

Finalmente la tesis se completa con unos apéndices técnicos que incluyen el material necesario para las demostraciones de los capítulos anteriores.

# Capítulo 2

## El modelo de energía con una condición de frontera rígida.

En este capítulo estudiamos el modelo con frontera rígida descrito en la introducción. Primero, demostramos la existencia de mínimos para la energía, segundo demostramos una cota superior para la energía y el Lema de equipartición de la energía. Tercero, se prueba un Lema de interpolación que se utiliza para demostrar una cota superior localizada. Finalmente, el capítulo concluye con la cota inferior para la energía.

### 2.1 Existencia de mínimos

Como vimos en la introducción, minimizaremos el siguiente modelo de energía.

$$I^\varepsilon(u) = \int_{R_L} \left( u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| \right) dx dy \quad (2.1)$$

sujeto a  $|u_y| = 1$  cds. y  $u = 0$  en  $x = 0$ . La clase de funciones admisibles para el funcional de energía  $I^\varepsilon$  es

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ u \in H^1(R_L) : \begin{array}{l} |u_y| = 1 \text{ cds, } u_{yy} \text{ es una medida de Radón} \\ \text{sobre } R_L \text{ de variación total finita y } u = 0 \text{ en } x = 0 \end{array} \right\}$$

Para comenzar demostramos un Lema sobre la compacidad de las sucesiones en  $\mathcal{A}_0$ .

**Lema 2.1.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto,  $w^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \geq 1$ , una sucesión de funciones tal que  $w^j \rightharpoonup u$  en  $H^1(\Omega)$  y tal que  $w_{yy}^j$  está en un subconjunto compacto de  $H^{-1}(\Omega)$ . Entonces*

$$w_y^j \rightarrow w_y \quad \text{en } L_{loc}^2(\Omega).$$

*Demostración.* Supongamos sin pérdida de generalidad que  $u \equiv 0$ . Sea  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Entonces

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \varphi^2 |u_y^j|^2 dx dy &= - \left\langle \varphi^2 u_y^j, u_y^j \right\rangle_{L^2} \\ &= \left\langle 2\varphi\varphi_y u_y^j + \varphi^2 u_{yy}^j, u^j \right\rangle_{L^2} \\ &= \left\langle 2\varphi_y u_y^j + \varphi u_{yy}^j, \varphi u^j \right\rangle_{L^2} \\ &= \left\langle 2\varphi_y u_y^j, \varphi u^j \right\rangle + \left\langle \varphi u_{yy}^j, \varphi u^j \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \end{aligned}$$

Luego por el Teorema de Rellich-Kondrakov [1, pag. 167]  $u^j \rightarrow 0$  en  $L_{loc}^2(\Omega)$ , entonces el primer sumando tiende a cero. Además  $\varphi u^j \rightarrow 0$  en  $H_0^1$  y dado que  $\{u_{yy}^j\}_j$  está en un compacto de  $H^{-1}(\Omega)$  existe  $C > 0$  tal que  $\|u_{yy}^j\|_{H^{-1}} \leq C$ ,  $j \geq 1$ , se sigue que el segundo sumando tiende a cero y

$$\int_{\Omega} \varphi^2 |u_y^j|^2 dx dy \rightarrow 0$$

cuando  $j \rightarrow \infty$ . Ahora para cada compacto  $K \subset \Omega$  tomamos  $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $\varphi_k = 1$  en  $K$ , se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_K |u_y^j|^2 dx dy \\ &= \int_K \varphi^2 |u_y^j|^2 dx dy \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando  $j \rightarrow \infty$ , es decir

$$u_y^j \rightarrow u_y \quad \text{en } L_{loc}^2(\Omega).$$

□

A continuación mostramos la existencia de mínimos para el funcional de energía.

**Teorema 2.1.2.** *Supongamos que  $\varepsilon > 0$ . Entonces  $I^\varepsilon$  alcanza su mínimo en  $\mathcal{A}_0$ .*

*Demostración.* Para mostrar la existencia de mínimos aplicaremos el método directo del cálculo de variaciones (Capítulo 8 en [4]). Para esto basta mostrar dos cosas: primero la semicontinuidad inferior con respecto a la convergencia débil, y segundo que  $\mathcal{A}_0$  es débilmente cerrado.

Fijamos  $\varepsilon > 0$ . Sea  $\{u^j\} \subset \mathcal{A}_0$  una sucesión minimizante para  $I^\varepsilon$ . Luego  $\{u^j\}$  esta acotada en  $H^1$  y  $\{u_{yy}^j\}$  esta acotada en  $\mathcal{M}(R_L)$  (el espacio de las medidas de Radón sobre  $R_L$ ). Ya que los dos términos de la energía son positivos y como la sucesión es minimizante, es decreciente y acotada.

Dado que en espacios de Hilbert cada sucesión acotada contiene una subsucesión débilmente convergente, tenemos pasando a una subsucesión que

$$u^j \rightharpoonup u \quad \text{en } H^1(R_L).$$

y dado que el funcional  $F(Du) := u_x^2$  es convexo

$$\int_{R_L} u_x^2 dx dy \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{R_L} (u_x^j)^2 dx dy. \quad (2.2)$$

Por otro lado, el Teorema B.0.7 de Prohorov dice que para una subsucesión de  $\{u_{yy}^j\}$  se tiene que

$$u_{yy}^j \xrightarrow{*} u_{yy} \quad \text{en } \mathcal{M}(R_L).$$

Si aplicamos el Teorema B.0.6 de Portmanteau vemos que

$$\int_{R_L} |u_{yy}| dx dy \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{R_L} |u_{yy}^j| dx dy. \quad (2.3)$$

Juntando (2.2) y (2.3) se ve que

$$\begin{aligned} I^\varepsilon(u) &= \int_{R_L} u_x^2 dx dy + \varepsilon \int_{R_L} |u_{yy}| dx dy \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{R_L} (u_x^j)^2 dx dy + \liminf_{j \rightarrow \infty} \varepsilon \int_{R_L} |u_{yy}^j| dx dy \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I^\varepsilon(u^j). \end{aligned}$$

Ahora sólo falta mostrar que  $u \in \mathcal{A}_0$ . Por hipótesis la sucesión  $\{u_y^j\}$  es acotada en  $L^\infty$  entonces

$$\begin{aligned} \|u_{yy}^j\|_{W^{-1,\infty}} &= \sup_{\varphi \in W_0^{1,\infty}(R_L), \|\varphi\|_{W_0^{1,\infty}}=1} \left| \langle u_{yy}^j, \varphi \rangle \right| \\ &= \sup_{\varphi \in W_0^{1,\infty}(R_L), \|\varphi\|_{W_0^{1,\infty}}=1} \left| \int_{R_L} \varphi u_{yy}^j dx dy \right| \\ &= \sup_{\varphi \in W_0^{1,\infty}(R_L), \|\varphi\|_{W_0^{1,\infty}}=1} \left| - \int_{R_L} \varphi_y u_y^j dx dy \right| \\ &\leq \|u_y^j\|_{L^\infty} |R_L| \sup_{\varphi \in W_0^{1,\infty}(R_L), \|\varphi\|_{W_0^{1,\infty}}=1} \|\varphi_y\|_{L^\infty} \\ &\leq \|u_y^j\|_{L^\infty} |R_L|, \end{aligned}$$

y se sigue que  $\{u_{yy}^j\}$  está acotada en  $\mathcal{M}(\mathcal{R}_L) \cap W^{-1,\infty}$ . Por el Lema A.0.4 de Murat  $\{u_{yy}^j\}$  esta en un conjunto compacto de  $H^{-1}$ . Entonces del Lema 2.1.1 tenemos que

$u_y^j \rightarrow u_y$  en  $L^2_{loc}(R_L)$ . Y como  $|u_y^j| = 1$  cds, para toda  $j$ , al pasar a una subsucesión se ve que  $|u_y| = 1$  cds. Por último, la traza  $T$  de  $u$  en  $\{0\} \times (0, 1)$  es cero ya que

$$\begin{aligned} \|T(u)\|_{L^2(\{0\} \times (0,1))} &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|T(u^j)\|_{L^2(\{0\} \times (0,1))} \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|u^j(0, \cdot)\|_{L^2(\{0\} \times (0,1))} \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 |u^j(0, y)|^2 dy \right)^{1/2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces  $u = 0$  cds en  $x = 0$  y por lo tanto  $u \in \mathcal{A}_0$ . □

## 2.2 Cota superior para el mínimo de la energía

En esta sección se mostrará la existencia de una cota superior para la energía. Para ello supondremos que  $\varepsilon$  es suficientemente pequeña. Precisamente pediremos que

$$\varepsilon^{1/3} L^{2/3} < c_0 < 1 \tag{2.4}$$

para una constante  $c_0$  que es suficientemente pequeña. Lo cual implica que el número de “twins” (número de cambios de signo de  $u_y$ ) es grande.

**Lema 2.2.1.** *Existe una constante  $C$  tal que*

$$\min \{I^\varepsilon(u) : u \in \mathcal{A}_0\} \leq C\varepsilon^{2/3} L^{1/3}. \tag{2.5}$$

*Demostración.* Subdividimos el intervalo  $0 < x < L$  geoméricamente como se muestra en la Figura 2.2. Los puntos de la división son  $x_i = \theta^i L$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , donde  $0 < \theta < 1$ . El paso principal será construir una función  $u$  sobre  $[x_1, x_0] \times \mathbb{R}$  con las propiedades:

$$|u_y| = 1 \tag{2.6}$$

cd,

$$u(x, y + 1) = u(x, y) \tag{2.7}$$

para toda  $(x, y)$  en  $[x_1, x_0] \times \mathbb{R}$ ,

$$u(x_1, y) = \frac{1}{2} u(x_0, 2y) \tag{2.8}$$

para toda  $y$  en  $\mathbb{R}$ , además

$$\int_{x_1}^{x_0} \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx \leq C\varepsilon^{2/3} L^{1/3}. \tag{2.9}$$

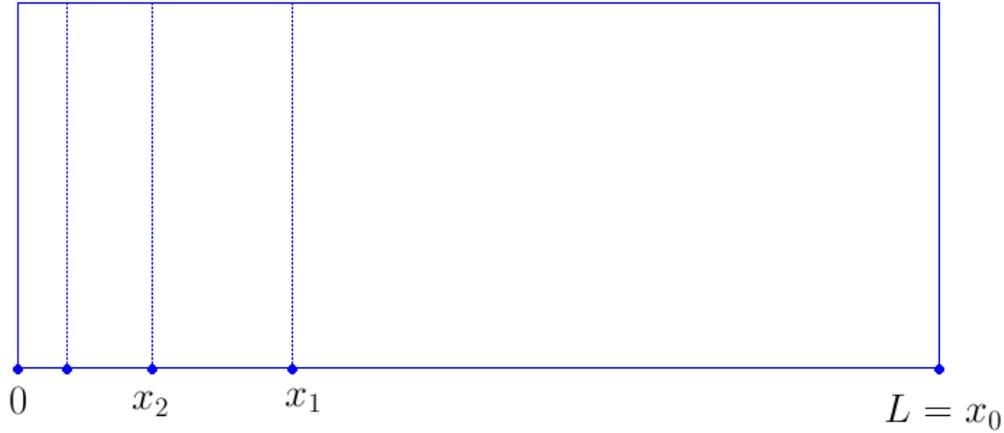


Figura 2.1: Puntos de la subdivisión

Supongamos por el momento que tal función  $u$  existe. Luego,  $u$  puede ser extendida a  $(0, 1) \times \mathbb{R}$  reescalando:

$$\tilde{u}(x, y) = 2^{-i}u(\theta^{-i}x, 2^i y) \quad \text{si } x \in [x_{i+1}, x_i].$$

Luego  $\frac{\partial}{\partial y} \left( 2^{-i}u(\theta^{-i}x, 2^i y) \right) = \tilde{u}_y$  cumple (2.6),  $\tilde{u}(0, y) = 0$  y

$$\begin{aligned} \int_{x_{i+1}}^{x_i} \int_0^1 \tilde{u}_x^2 + \varepsilon |\tilde{u}_{yy}| dy dx &= \int_{\theta^i x_1}^{\theta^i x_0} \int_0^1 \tilde{u}_x^2 + \varepsilon |\tilde{u}_{yy}| dy dx \\ &= \int_{x_1}^{x_0} \int_0^{2^i} (2\theta)^{-2i} u_x^2 + 2^i \varepsilon |u_{yy}| \frac{dy}{2^i} \frac{dx}{\theta^{-i}} \\ &= \int_{x_1}^{x_0} 2^{-i} \int_0^{2^i} (4\theta)^{-i} u_x^2 + (2\theta)^i \varepsilon |u_{yy}| dy dx \\ &= \int_{x_1}^{x_0} \int_0^1 \frac{1}{(4\theta)^i} u_x^2 + (2\theta)^i \varepsilon |u_{yy}| dy dx. \end{aligned}$$

Para hacer la integral sobre todo el intervalo, necesitamos que  $0 < \frac{1}{4\theta} < 1$  y  $0 < 2\theta < 1$ , por lo que  $\theta$  debe de satisfacer  $\frac{1}{4} < \theta < \frac{1}{2}$ . Entonces por (2.9)

$$I^\varepsilon(\tilde{u}) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{x_{i+1}}^{x_i} \int_0^1 \tilde{u}_x^2 + \varepsilon |\tilde{u}_{yy}| dy dx \leq C_1 \varepsilon^{2/3} L^{1/3}. \quad (2.10)$$

Ahora construimos una función  $u : [x_1, x_0] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaga de (2.6) a (2.9). Definamos  $v : [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$v(x, y) = \begin{cases} y, & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{1}{8} + \frac{x}{8}, \\ \frac{1}{4} + \frac{x}{4} - y, & \text{si } \frac{1}{8} + \frac{x}{8} \leq y \leq \frac{3}{8} + \frac{x}{8}, \\ -\frac{1}{2} + y, & \text{si } \frac{3}{8} + \frac{x}{8} \leq y \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Enseguida extendemos  $v$  reflejandola en el plano  $y = \frac{1}{2}$ . Con lo que  $v$  queda definida

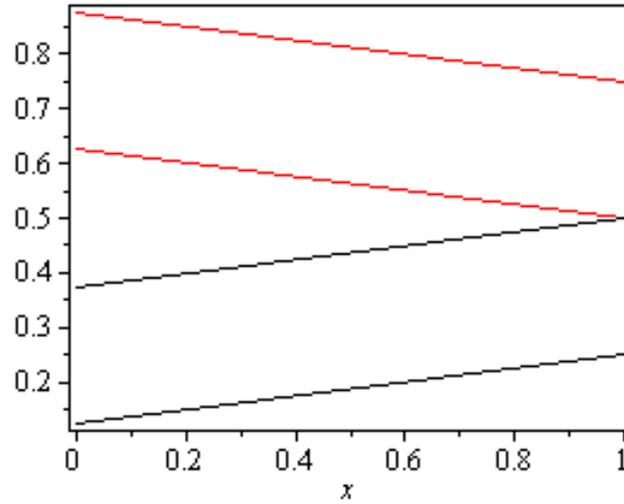


Figura 2.2: Dominio de la función  $v(x, y)$ , de la demostración del Lema 2.2.1

del  $[0, 1] \times [0, 1]$  en  $\mathbb{R}$  por

$$v(x, y) = \begin{cases} y, & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{1}{8} + \frac{x}{8}, \\ \frac{1}{4} + \frac{x}{4} - y, & \text{si } \frac{1}{8} + \frac{x}{8} \leq y \leq \frac{3}{8} + \frac{x}{8}, \\ -\frac{1}{2} + y, & \text{si } \frac{3}{8} + \frac{x}{8} \leq y \leq \frac{5}{8} - \frac{x}{8}, \\ -\frac{x}{4} - y + \frac{6}{8}, & \text{si } \frac{5}{8} - \frac{x}{8} \leq y \leq \frac{7}{8} - \frac{x}{8}, \\ y - 1, & \text{si } \frac{7}{8} - \frac{x}{8} \leq y \leq 1, \end{cases}$$

Su dominio y su gráfica pueden verse en las Figuras 2.2 y 2.3 respectivamente. Como podemos observar  $|v_y| = 1$  cds, luego  $|v_{yy}|$  es una delta de Dirac que solo cuenta los

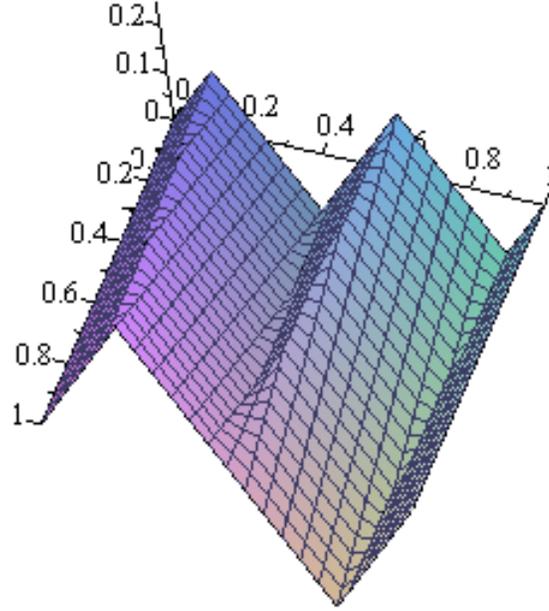


Figura 2.3: Gráfica de  $v$  en  $[0, 1] \times [0, 1]$

cambios de signo de  $v_y$ . Entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
 v(x, y + 1) &= v(x, y), \\
 v(0, y) &= \frac{1}{2}v(1, 2y), \\
 \int_0^1 \int_0^1 v_x^2 + \varepsilon |v_{yy}| \, dy \, dx &= \int_0^1 \left[ \int_{\frac{1}{8} + \frac{x}{8}}^{\frac{3}{8} + \frac{x}{8}} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \, dy + \int_{\frac{5}{8} - \frac{x}{8}}^{\frac{7}{8} - \frac{x}{8}} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \, dy + \int_0^1 \varepsilon |v_{yy}| \, dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \int_0^1 \varepsilon |v_{yy}| \, dy \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 8\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Para cada  $N \in \mathbb{N}$  definimos, vease Figura 2.2,

$$u(x, y) := \frac{1}{N} v \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, Ny \right). \quad (2.11)$$

Ahora comprobemos que  $u$  satisface las propiedades de (2.6) a (2.8).

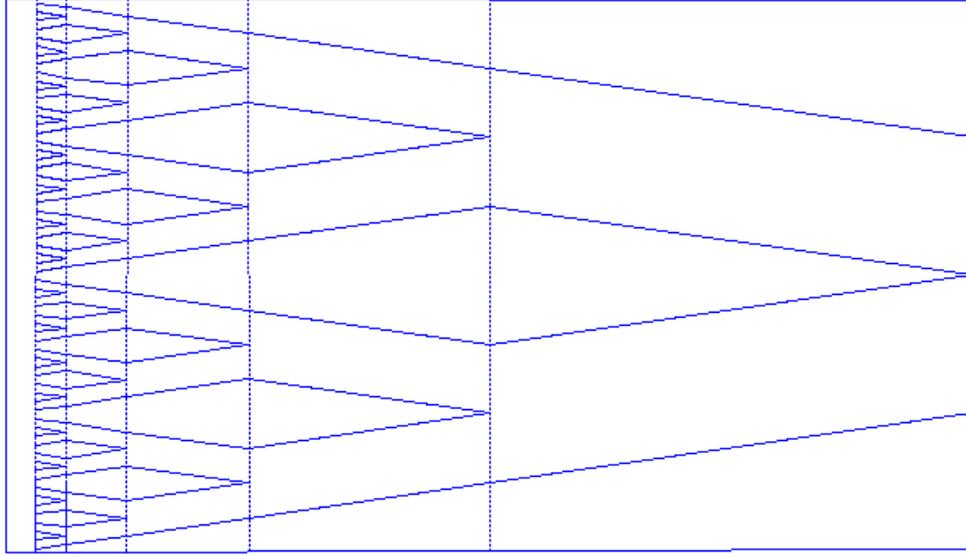


Figura 2.4: Dominio de  $u$  en  $[0, L] \times [0, 1]$  con  $N = 1$  y  $\theta = 1/2$ . Cada línea representa un cambio de signo de  $u_y$

$$\begin{aligned}
 |u_y| &= |v_y| = 1 \quad \text{c.d.s.}, \\
 u(x_1, y) &= \frac{1}{N}v(0, Ny) = \frac{1}{2N}v(1, 2Ny) \\
 &= \frac{1}{2}u(x_0, 2y), \\
 \int_{x_1}^{x_0} \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| \, dy \, dx &= \int_{x_1}^{x_0} \int_0^1 \frac{1}{N^2} \frac{1}{(x_0 - x_1)^2} v_x^2 \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, Ny \right) + \varepsilon N |v_{yy}| \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{N^2} \frac{1}{(x_0 - x_1)} \frac{1}{32} + 8(x_0 - x_1)\varepsilon N. \\
 &= \frac{1}{N^2} \frac{1}{L(1 - \theta)} \frac{1}{32} + 8L(1 - \theta)\varepsilon N.
 \end{aligned}$$

Si escogemos  $N \approx L^{-2/3}\varepsilon^{-1/3}$ , entonces

$$\int_{x_1}^{x_0} \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| \, dy \, dx \leq C\varepsilon^{2/3}L^{1/3}.$$

Con lo que se cumple (2.9), para  $u$  definida en (2.11). □

## 2.3 Equipartición de la energía

El siguiente resultado será de gran importancia para demostrar la cota inferior de  $I^\varepsilon$ . En él se muestra que para un minimizador del funcional  $I^\varepsilon$ , los términos  $u_x^2$  y  $\varepsilon|u_{yy}|$  contribuyen casi con la misma cantidad de energía.

**Lema 2.3.1.** (*Equipartición de energía*). *Sea  $u$  un minimizador de  $I^\varepsilon$  sobre  $\mathcal{A}_0$ . Entonces existe una constante  $\lambda$  (que solo depende de  $\varepsilon$ ,  $L$  y  $U$ ) tal que*

$$\int_0^1 \varepsilon|u_{yy}(x, y)| dy - \int_0^1 u_x^2(x, y) dy = \lambda, \quad (2.12)$$

para casi toda  $x \in (0, L)$ . El valor de  $\lambda$  depende de  $u$  y entonces, implícitamente de  $\varepsilon$  y  $L$ , sin embargo esta siempre satisface

$$|\lambda| \leq C\varepsilon^{2/3}L^{-2/3}, \quad (2.13)$$

donde  $C$  es independiente de  $u$ ,  $\varepsilon$  y  $L$ . Por lo tanto, la traza de  $u^L(y) = u(L, y)$  satisface  $|u_y^L| = 1$  cds. en  $(0, 1)$ ,  $u_{yy}^L$  es una medida de Radón sobre  $(0, 1)$  y

$$\int_0^1 \varepsilon|u_{yy}^L| dy = \lambda.$$

Finalmente tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{L-t}^L \int_0^1 u_x^2 dy dx = 0.$$

*Demostración.* Para alguna  $\varphi \in C_0^\infty(0, L)$ ,  $(Id + t\varphi)$  es un difeomorfismo de  $(0, L)$  en si mismo para  $t < \|\varphi'\|_\infty$ . Sea  $\psi^t = (Id + t\varphi)^{(-1)}$  su inversa, es decir  $(\psi^t)^{-1} = Id + t\varphi$ . Ahora consideramos para algún minimizador  $u$  de  $I^\varepsilon$ , las variaciones

$$u^t(x, y) := u(\psi^t(x), y).$$

Luego observamos que  $|(u^t(x, y))_y| = |u_y(x, y)| = 1$  cds y dado que  $\psi^t \approx Id$  cerca del cero tenemos que  $u^t|_{x=0} = 0$ . Además

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^1 (u_x^t)^2(x, y) dy dx &= \int_0^L \int_0^1 u_x^2(\psi^t(x), y) [(\psi^t)']^2(x) dy dx \\ &\stackrel{\text{cambio de variable}}{=} \int_{s=\psi^t(x)}^L \int_0^1 u_x^2(s, y) (\psi^t)'(x) dy ds \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^L \int_0^1 u_x^2(s, y) \frac{1}{[(\psi^t)^{-1}]'(s)} dy ds \\ &= \int_0^L \int_0^1 u_x^2(x, y) \frac{1}{1 + t\varphi'(x)} dy dx, \end{aligned} \quad (2.15)$$

y similarmente

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \int_0^1 |u_{yy}^t|(x, y) dy dx &= \int_0^L \int_0^1 |u_{yy}|(\psi^t(x), y) dy dx \\
 &= \int_0^L \int_0^1 |u_{yy}|(s, y) [(\psi^t)^{-1}]'(s) dy ds \\
 &= \int_0^L \int_0^1 |u_{yy}|(x, y) (1 + t\varphi'(x)) dy dx. \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Para deducir (2.12) sea  $\Psi^t(x, y) := (\psi^t(x), y)$  y su inversa  $\widehat{\Psi}^t(x, y) := (x + t\varphi(x), y)$ . Definamos  $\mu := u_{yy}$  y  $\mu^t$  como la distribución

$$\mu^t := u_{yy}^t = (u_y \circ \Psi^t)_y.$$

Luego para toda  $\eta \in C_0^1(R_L)$  se cumple

$$\langle \mu^t, \eta \rangle = \int_{\widehat{R}_L} (\eta \circ \widehat{\Psi}^t) |\det D\widehat{\Psi}^t| d\mu. \tag{2.17}$$

Dado que  $t < \|\varphi'\|_\infty$  se sigue que  $|\det D\widehat{\Psi}^t(x, y)| = |1 + t\varphi'(x)| = 1 + t\varphi'(x) > 0$  en  $R_L$ , además de que

$$\begin{aligned}
 \langle \mu^t, \eta \rangle &= \int_{\widehat{R}_L} \eta d\mu^t = \int_{\widehat{R}_L} \eta u_{yy}^t dx dy \\
 &= - \int_{\widehat{R}_L} \eta_y u_y^t dx dy \\
 &= - \int_{\widehat{R}_L} u_y (\eta_y \circ \widehat{\Psi}^t) (1 + t\varphi'(x)) dx dy \\
 &= - \int_{\widehat{R}_L} u_y [\eta(x + t\varphi(x), y) (1 + t\varphi'(x))]_y dx dy \\
 &= \int_{\widehat{R}_L} u_{yy} \eta(x + t\varphi(x), y) (1 + t\varphi'(x)) dx dy \\
 &= \int_{\widehat{R}_L} (\eta \circ \widehat{\Psi}^t) (1 + t\varphi'(x)) d\mu \\
 &\leq \|\eta\|_{L^\infty(\widehat{R}_L)} \|\widehat{\Psi}^t\|_{L^\infty(\widehat{R}_L)} \|1 + t\varphi'(x)\|_{L^\infty(0,L)} \mu(R_L) < \infty.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mu^t$  es una medida de Radón y entonces  $u^t \in \mathcal{A}_0$ . Dividiendo a  $\mu^t$  en su

parte positiva y negativa tenemos que su variación total esta dada por

$$\begin{aligned} |\mu^t|(R_L) &= \int_{R_L} \det D\widehat{\Psi}^t d|\mu| \\ &= \int_{R_L} (1 + t\varphi'(x)) d|\mu|. \end{aligned} \quad (2.18)$$

La proyección  $\sigma$  de  $|\mu|$  esta definida por

$$\sigma(A) := |\mu|(A \times (0, 1)),$$

donde  $A$  es un subconjunto medible de  $(0, L)$ . Ahora veremos que  $t \mapsto I^\varepsilon(u^t)$  es diferenciable en  $t = 0$  para toda  $\varphi$  en  $C_0^\infty(R_L)$ . Para ello definimos

$$\Lambda(u) := - \int_0^L \left( \int_0^1 u_x^2 dy \right) \varphi'(x) dx + \int_0^L \varepsilon \varphi' d\sigma, \quad (2.19)$$

entonces por (2.15) y (2.16)

$$\begin{aligned} |I^\varepsilon(u^t) - I^\varepsilon(u) - t\Lambda(u)| &= \left| \int_0^L \left( \int_0^1 u_x^2 dy \right) \frac{-t\varphi'(x)}{1 + t\varphi'(x)} dx + \int_0^L \varepsilon t\varphi' d\sigma - t\Lambda(u) \right| \\ &= \left| \int_0^L \left( \int_0^1 u_x^2 dy \right) \left( t\varphi'(x) - \frac{t\varphi'(x)}{1 + t\varphi'(x)} \right) dx \right| \\ &= |t|^2 \left\| \frac{(\varphi')^2}{1 + t\varphi'} \right\|_\infty \left| \int_{R_L} u_x^2 dy dx \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando  $t \rightarrow 0$ . Por lo tanto  $I^\varepsilon(u^t)$  es derivable en  $t = 0$  y como  $u$  es un minimizador de  $I^\varepsilon$  tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{d}{dt} I^\varepsilon(u^t) \right) \Big|_{t=0} = \Lambda(u) \\ &= - \int_0^L \left( \int_0^1 u_x^2 dy \right) \varphi'(x) dx + \int_0^L \varepsilon \varphi' d\sigma \end{aligned}$$

para toda  $\varphi$  en  $C_0^\infty(R_L)$ . Se sigue que  $\sigma$  es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en  $(0, L)$ , tenemos integrando por partes que existe una constante  $\lambda$  tal que

$$\varepsilon \sigma(x) - \int_0^1 u_x^2(x, y) dy = \lambda,$$

lo cual prueba (2.12). Para tener (2.13) integramos con respecto a  $x$  de 0 a  $L$ ,

$$\lambda L = \int_0^L \int_0^1 \varepsilon |u_{yy}| dy dx - \int_0^L \int_0^1 u_x^2(x, y) dy dx$$

entonces por el Lema 2.2.1 tenemos

$$\begin{aligned} \lambda L &\leq \int_0^L \int_0^1 \varepsilon |u_{yy}| dy dx \\ &\leq C\varepsilon^{2/3} L^{1/3}, \end{aligned}$$

y además por el Lema 2.2.1

$$\begin{aligned} -\lambda L &\leq \int_0^L \int_0^1 u_x^2(x, y) dy dx \\ &\leq C\varepsilon^{2/3} L^{1/3} \end{aligned}$$

De aquí se sigue (2.13). Para lo que resta del lema, sea

$$u^t(x, y) = u((1-t)x, y),$$

y como  $u$  está definida solo para  $x \leq L$  supondremos, por el momento, que  $0 \leq t \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq I^\varepsilon(u^t) - I^\varepsilon(u) \\ &= \int_0^L \int_0^1 (1-t)^2 (u_x^t)^2 + \varepsilon |u_{yy}^t| dy dx - \int_0^L \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx \\ &= \int_0^{L(1-t)} \int_0^1 (1-t) u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| \frac{1}{1-t} dy dx - \int_0^{L(1-t)} \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx \\ &\quad - \int_{L(1-t)}^L \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx \\ &= \int_0^{L(1-t)} \int_0^1 -t u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| \frac{t}{1-t} dy dx - \int_{L(1-t)}^L \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pasamos el segundo término en la desigualdad (2.20) al otro lado,

$$\int_{L(1-t)}^L \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx \leq \int_0^{L(1-t)} \int_0^1 -t u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| \frac{t}{1-t} dy dx$$

Sustituimos  $\tau := tL$  y dividimos sobre  $\tau$  y observamos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tau} \int_{L-\tau}^L \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| \, dy \, dx &\leq \frac{1}{\tau} \int_0^{L-\tau} \int_0^1 -u_x^2 \frac{\tau}{L} + \varepsilon |u_{yy}| \frac{\tau}{L-\tau} \, dy \, dx \\
 &= \int_0^{L-\tau} \int_0^1 -\frac{u_x^2}{L} + \frac{\varepsilon |u_{yy}|}{L-\tau} \, dy \, dx \\
 &\rightarrow \int_0^L \int_0^1 -\frac{u_x^2}{L} + \frac{\varepsilon |u_{yy}|}{L} \, dy \, dx
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

cuando  $\tau \rightarrow 0^+$  y como (2.21) es igual a  $\lambda$  se sigue que

$$\limsup_{\tau \searrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{L-\tau}^L \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| \, dy \, dx \leq \lambda. \tag{2.22}$$

Usaremos (2.22) para mostrar que la traza de  $u^L$  satisface  $|u_y^L| = 1$  cds. y que

$$\varepsilon \int_0^1 |u_{yy}^L| \leq \lambda.$$

Tomando una sucesión tal que  $t_n \rightarrow 0$ , definimos las funciones reescaladas

$$v^{(n)}(x, y) = u(L - t_n + xt_n, y)$$

y notamos que  $|v_y^{(n)}| = |u_y| = 1$  cds. Luego por (2.22) y por el Teorema de cambio de variable

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1)^2} \varepsilon |v_{yy}^{(n)}| + t_n^{-2} (v_x^{(n)})^2 \, dy \, dx = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{L-t_n}^L \int_0^1 \varepsilon \frac{|u_{yy}|}{t_n} + \frac{u_x^2}{t_n} \, dy \, dx \leq \lambda. \tag{2.23}$$

Como  $v^{(n)}(1, y) = u(L, y) = u^L(y)$ ,  $L - t_n + xt_n \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow 1$  y  $R_L$  es Lipschitz tenemos por los Teoremas de traza que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1)^2} |v^n - u^L|^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{L-t_n}^L \frac{1}{t_n} |u - u^L|^2 \, dx \, dy \rightarrow 0,$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 v^{(n)} &\rightharpoonup u^L && \text{en } H^1(0, 1)^2, \\
 v_{yy}^{(n)} &\overset{*}{\rightharpoonup} u_{yy}^L && \text{en } \mathcal{M}(0, 1)^2.
 \end{aligned}$$

Usando el Lema 2.1.1 y el Lema A.0.4 de Murat deducimos, como en la demostración del Teorema 2.1.2, que  $|u_y^L| = 1$  cds. Y por la semicontinuidad inferior de la norma y (2.23) vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varepsilon |u_{yy}^L| dy &= \int_{(0,1)^2} \varepsilon |u_{yy}^L| dy dx \\ &\leq \lambda - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_{L-t_n}^L \int_0^1 u_x^2 dx dy \leq \lambda. \end{aligned} \quad (2.24)$$

luego como  $|u_y^L| = 1$  cds. podemos extender a la función  $u$  a  $(0, \infty) \times (0, 1)$  por  $u(x, y) = u^L(y)$  si  $x \geq L$ . Esto nos permite tomar  $t < 0$  en la definición de  $u^t$ , ya que  $u$  es independiente de  $x$  en  $x > L$ . Entonces se tiene con  $s = -t$

$$\begin{aligned} 0 &\leq I^\varepsilon(u^t) - I^\varepsilon(u) \\ &= \int_0^{L(1+s)} \int_0^1 u_x^2(1+s) + \varepsilon |u_{yy}| \frac{1}{1+s} dy dx \\ &\quad - \int_0^{L(1+s)} \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx - \int_{L+Ls}^L \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx \\ &= \int_0^{L(1+s)} \int_0^1 s u_x^2 - \varepsilon s |u_{yy}| dy dx + \int_0^{L(1+s)} \int_0^1 \varepsilon |u_{yy}| dy dx \frac{s^2}{1+s} + sL \int_0^1 \varepsilon |u_{yy}^L| dy. \end{aligned}$$

luego dividiendo por  $s$  tenemos que

$$\lambda L(1+s) \leq \frac{s}{1+s} \int_0^{L(1+s)} \int_0^1 \varepsilon |u_{yy}| dy dx + L \int_0^1 \varepsilon |u_{yy}^L| dy,$$

tomando el límite cuando cuando  $s \rightarrow 0$  vemos que

$$\lambda L \leq L \int_0^1 \varepsilon |u_{yy}^L| dy.$$

Luego comparando este resultado con (2.24) se cumple que

$$\lambda = \int_0^1 \varepsilon |u_{yy}^L| dy$$

y finalmente de (2.22)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L-t_n}^L \int_0^1 u_x^2 dy dx = 0.$$

□

## 2.4 Lema de interpolación

En esta sección demostramos un lema sobre la existencia de una interpolación con energía controlada, que será necesario en la prueba del resultado principal de este capítulo.

**Lema 2.4.1.** *Sea  $\ell$  fija. Sean  $u_0, u_1 \in W^{1,\infty}(0,1)$  dadas, tales que  $|(u_0)'| \leq 1$  y  $|(u_1)'| \leq 1$ . Supongamos que  $\varepsilon^{1/3}\ell^{2/3} \leq 1$ . Entonces existe  $u_\varepsilon \in W^{1,2}((0,\ell) \times (0,1))$  tal que*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &= u_0, & \text{en } x &= 0, \\ u_\varepsilon &= u_1, & \text{en } x &= \ell, \\ |(u_\varepsilon)_y| &= 1 & \text{c.d.s.} \end{aligned}$$

y para alguna  $\delta > 0$ ,

$$\int_0^\ell \int_0^1 (u_\varepsilon)_x^2 + \varepsilon |(u_\varepsilon)_{yy}| dy dx \leq \frac{1+\delta}{\ell} \int_0^1 |u_1(y) - u_0(y)|^2 dy + C_\delta \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3}. \quad (2.25)$$

La constante  $C_\delta$  depende de  $\delta$ , pero es independiente de  $u_0, u_1, \ell$  y  $\varepsilon$ .

*Demostración.* Sea  $u_\ell$  el interpolante lineal entre  $u_0$  y  $u_1$ ,

$$u_\ell(x, y) = \frac{\ell - x}{\ell} u_0(y) + \frac{x}{\ell} u_1(y)$$

(Este es el minimizador del problema relajado,  $\varepsilon = 0$ ). Dividimos el intervalo  $(0, \ell)$  geoméricamente, los puntos de subdivisión son

$$\begin{aligned} x_i &= \ell - \frac{\ell}{2} \theta^i & \text{para } i &= 0, 1, 2, \dots; \\ x_i &= \frac{\ell}{2} \theta^{-i} & \text{para } i &= 0, -1, -2, \dots \end{aligned}$$

Centraremos nuestra atención sobre  $x \geq \frac{\ell}{2}$ , el caso  $x \leq \frac{\ell}{2}$  se analiza de manera similar. Para cada  $i = 0, 1, 2, \dots$  escogemos  $N_i = 2^i N_0$  puntos equidistantes sobre el segmento  $\{x_i\} \times (0, 1)$ , después elegiremos  $N_0$ . Luego para cada  $i$  escogemos una función  $v_i(y)$  tal que  $v_i(y_k) = u_\ell(x_i, y_k)$  donde  $(x_i, y_k)$  es una pareja de los puntos equidistantes en  $\{x_i\} \times (0, 1)$ , es decir  $v_i$  concuerda con  $u_\ell$  en los puntos equidistantes, y satisface que  $|(v_i)_y| = 1$  cds. Esto es posible ya que

$$\begin{aligned} |(u_\ell)_y| &\leq \left| \frac{\ell - x}{\ell} \right| |(u_0)_y| + \left| \frac{x}{\ell} \right| |(u_1)_y| \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

De hecho podemos elegir  $v_i$  tal que  $(v_i)_y$  cambie de signo a lo más una vez entre dos puntos sucesivos. Finalmente escogemos  $u_\varepsilon$  un interpolante lineal a pedazos, es decir, que cumpla ser igual a  $v_i$  sobre  $\{x_i\} \times (0, 1)$  para cada  $i$  y además que  $|(u_\varepsilon)_y| = 1$  cds. Por ejemplo podemos escogerla tal que  $u_\varepsilon$  sea lineal en cada triángulo obtenido de la

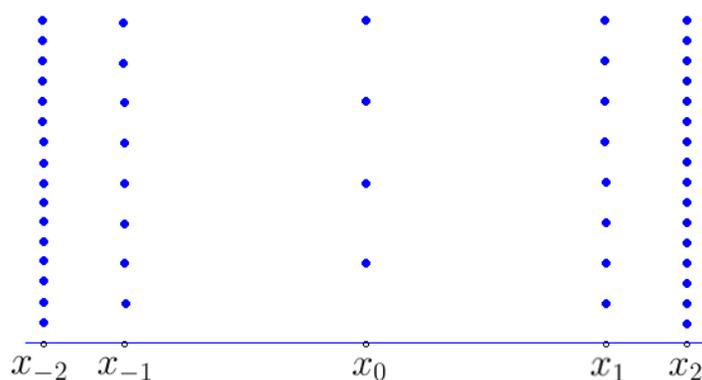


Figura 2.5: *Puntos equidistantes*

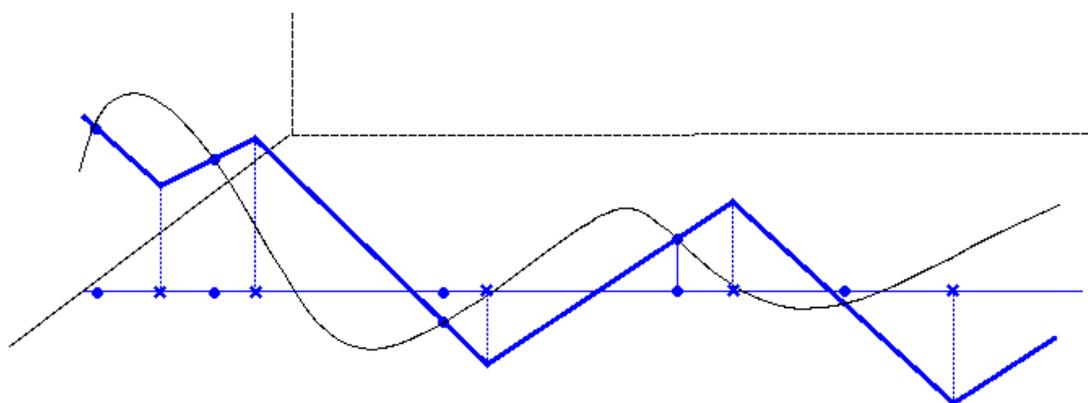


Figura 2.6: *Aproximación de una función con pendiente  $\leq 1$  por una con pendiente  $\pm 1$ . Donde los puntos equiespaciados  $y_k$  están marcados con  $\bullet$  y los  $z_k$ , donde  $(v_i)_y$  cambia de signo, están marcados por  $\times$*

triángulación que resulta de dibujar una línea horizontal en cada  $z_i$  (puntos donde  $(u_\varepsilon)_y$  cambie de signo) al otro lado y luego subdividir cada rectángulo en dos triángulos, de tal manera que dejemos a cada punto  $y_k$  (puntos donde  $u_\varepsilon$  coincide con  $u_\ell$ ) en un solo triángulo, como en la Figura 2.6. Por lo tanto

$$\left| (u_\varepsilon(x, y))_y \right| = \left| (v_1(y))_y \right| = 1 \quad \text{cds.}$$

Como la cantidad de puntos equidistantes donde  $v_i$  y  $u_\ell(x_i, \cdot)$  coinciden tiende a infinito cuando  $i \rightarrow \infty$ , notamos que  $|v_i - u_\ell(x_i, \cdot)| \rightarrow 0$  uniformemente cuando  $i \rightarrow \infty$ . Luego

$$u_\varepsilon = u_1 \quad \text{en} \quad x = \ell.$$

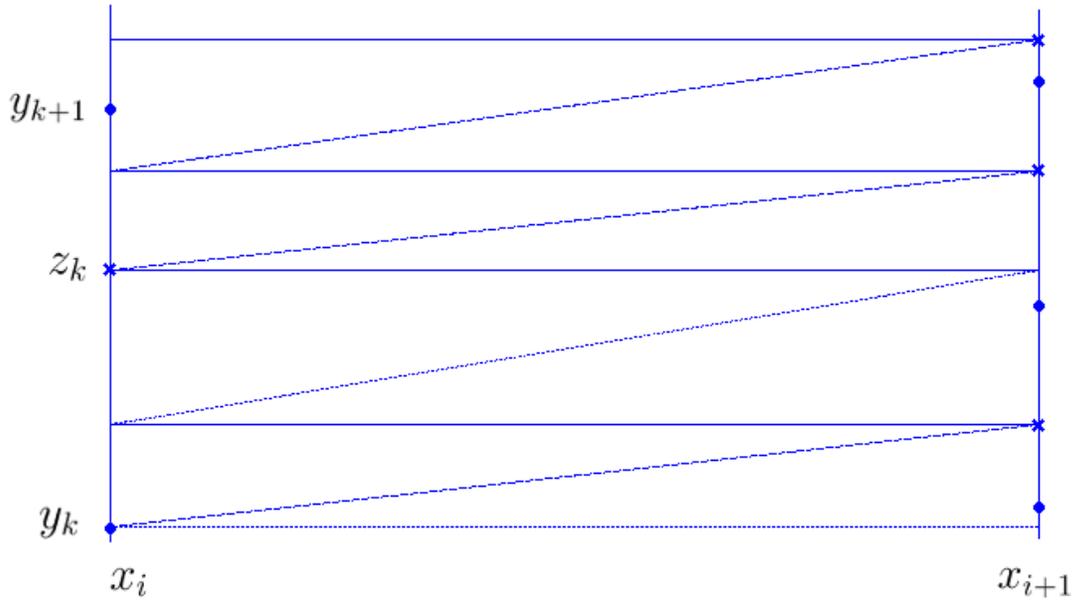


Figura 2.7: Función  $u_\varepsilon$ . Donde los  $y_k$ , puntos equiespaciados, están marcados con  $\bullet$  y los  $z_k$ , donde  $(v_i)_y$  cambia de signo, están marcados por  $\times$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^1 |(u_\varepsilon)_{yy}| dy dx &\leq \varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} CN_i dx \\ &= \varepsilon CN_i \Delta_i, \end{aligned}$$

donde  $\Delta_i := x_{i+1} - x_i$ . Como  $(u_\varepsilon)_y$  no cambia de signo desde  $(x_i, y_k)$  hasta  $(x_i, z_k)$  tenemos para  $y_k \leq y \leq z_k$  que

$$u_\varepsilon(x_i, y) = u_\varepsilon(x_i, y_k) + \overbrace{(u_\varepsilon)_y}^{\pm 1} (y - y_k), \quad (2.26)$$

entonces

$$|u_\varepsilon(x_i, y)| \leq |u_\varepsilon(x_i, y_k)| + (y - y_k). \quad (2.27)$$

Ahora dado que  $(u_\varepsilon)_y$  no cambia de signo desde  $(x_i, z_k)$  hasta  $(x_i, y_{k+1})$ , tenemos de forma semejante a (2.26) y a (2.27) que

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x_i, y)| &\leq |u_\varepsilon(x_i, y_k)| + (y - y_k) \\ &\leq |u_\varepsilon(x_i, y_k)| + (y_{k+1} - y_k), \end{aligned}$$

para  $y_k \leq y \leq y_{k+1}$ . Repitiendo análogamente en  $x_{i+1}$  y formando el cociente diferencial obtenemos por la linealidad de  $u_\varepsilon$  sobre cada triángulo de la Figura 2.7 que

$$|(u_\varepsilon)_x| \leq \frac{|u_\varepsilon(x_{i+1}, y_k) - u_\varepsilon(x_i, y_k)|}{\Delta_i} + \frac{2(y_{k+1} - y_k)}{\Delta_i}.$$

Se sigue, por la igualdad de  $u_\varepsilon$  y  $u_\ell$  en los puntos  $(x_i, y_k)$  y de que  $y_{k+1} - y_k = N_i^{-1}$

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^1 |(u_\varepsilon)_x|^2 dy dx &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^1 \frac{|u_\varepsilon(x_{i+1}, y_k) - u_\varepsilon(x_i, y_k)|^2}{(\Delta_i)^2} \\ &\quad + \frac{2|u_\varepsilon(x_{i+1}, y_k) - u_\varepsilon(x_i, y_k)| 2N_i^{-1}}{(\Delta_i)^2} + \left(\frac{2N_i^{-1}}{\Delta_i}\right)^2 dy dx \\ &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^1 \frac{|u_\varepsilon(x_{i+1}, y_k) - u_\varepsilon(x_i, y_k)|^2}{(\Delta_i)^2} \\ &\quad + \left(2(\delta/2) \frac{|u_\varepsilon(x_{i+1}, y_k) - u_\varepsilon(x_i, y_k)|^2}{(\Delta_i)^2} + \frac{1}{2(\delta/2)} \left(\frac{2N_i^{-1}}{\Delta_i}\right)^2\right) + \left(\frac{2N_i^{-1}}{\Delta_i}\right)^2 dy dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^1 (1 + \delta) \frac{|u_\varepsilon(x_{i+1}, y_k) - u_\varepsilon(x_i, y_k)|^2}{(\Delta_i)^2} + (1 + \frac{1}{\delta}) \left(\frac{2N_i^{-1}}{\Delta_i}\right)^2 dy dx \\ &= \frac{(1 + \delta)N_i^{-1}}{\Delta_i} \sum_{k=1}^{N_i} \left| \frac{\ell - x_{i+1}}{\ell} u_0(y_k) + \frac{x_{i+1}}{\ell} u_1(y_k) - \frac{\ell - x_i}{\ell} u_0(y_k) + \frac{x_i}{\ell} u_1(y_k) \right|^2 \\ &\quad + C_\delta \sum_{k=1}^{N_i} \left(\frac{2N_i^{-1}}{\Delta_i}\right)^2 N_i^{-1} \Delta_i \\ &= \frac{(1 + \delta)N_i^{-1}}{\Delta_i} \sum_{k=1}^{N_i} \left| u_1(y_k) - u_0(y_k) \right|^2 \frac{(\Delta_i)^2}{\ell^2} + \frac{C_\delta(N_i^{-1})^2}{\Delta_i} \sum_{k=1}^{N_i} 4N_i^{-1}. \end{aligned}$$

Luego

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^1 |(u_\varepsilon)_x|^2 dy dx \leq \frac{(1 + \delta)\Delta_i}{\ell^2 N_i} \sum_{k=1}^{N_i} \left| u_1\left(\frac{k}{N_i}\right) - u_0\left(\frac{k}{N_i}\right) \right|^2 + \frac{C_\delta}{N_i^2 \Delta_i}. \quad (2.28)$$

Ahora sea  $f$  una función con  $|f'| \leq 1$ , luego estimando por series de Taylor para  $\frac{k-1}{N} \leq y \leq \frac{k}{N}$

$$f(y) \approx f\left(\frac{k}{N}\right) + f'\left(\frac{k}{N}\right)\left(y - \frac{k}{N}\right)$$

luego

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{k}{N}\right) \right|^2 &\leq |f(y)|^2 + \left(2\left|f'\left(\frac{k}{N}\right)\right|\frac{1}{N}\right)|f(y)| + \frac{(f'\left(\frac{k}{N}\right))^2}{N^2} \\ &\leq (1 + \delta)(f(y))^2 + \frac{C_\delta}{N^2} \end{aligned}$$

Integramos sobre  $\left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]$  y sumamos para obtener

$$\sum_{k=1}^N \left| f\left(\frac{k}{N}\right) \right|^2 \frac{1}{N} \leq (1 + \delta) \int_0^1 (f(y))^2 dy + \frac{C_\delta}{N^2}. \quad (2.29)$$

Por lo tanto redefiniendo  $\delta$  se sigue de (2.28) y de (2.29) que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_0^1 |(u_\varepsilon)_x|^2 dy dx \leq \frac{(1 + \delta)\Delta_i}{\ell^2} \int_0^1 |u_1 - u_0|^2 dy + \frac{C_\delta \Delta_i}{N_i^2 \ell^2} + \frac{C_\delta}{N_i^2 \Delta_i}.$$

Tomando en cuenta que  $\Delta_i = x_{i+1} - x_i = \frac{\ell}{2} \theta^i (1 - \theta)$ , que  $N_i = 2^i N_0$  y además  $\frac{1}{4} < \theta < \frac{1}{2}$ , como en la demostración del Lema 2.2.1, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \int_0^1 |(u_\varepsilon)_x|^2 + \varepsilon |(u_\varepsilon)_{yy}| dy dx &= 2 \int_{\ell/2}^\ell \int_0^1 |(u_\varepsilon)_x|^2 + \varepsilon |(u_\varepsilon)_{yy}| dy dx \\ &\leq 2 \frac{(1 + \delta)}{\ell^2} \sum_{i=0}^\infty \Delta_i \int_0^1 |u_1 - u_0|^2 dy + C\varepsilon \sum_{i=0}^\infty (\Delta_i) N_i \\ &\quad + C_\delta \sum_{i=0}^\infty \left( \frac{\Delta_i}{N_i^2 \ell^2} + \frac{1}{N_i^2 \Delta_i} \right) \\ &\leq \frac{(1 + \delta)}{\ell} (1 - \theta) \sum_{i=0}^\infty \theta^i \int_0^1 |u_1 - u_0|^2 dy + \varepsilon \ell N_0 C (1 - \theta) \sum_{i=0}^\infty \theta^i 2^{i-1} \\ &\quad + \frac{C_\delta}{\ell N_0^2} \sum_{i=0}^\infty \left( \frac{\theta^i (1 - \theta)}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{i-1} \theta^i (1 - \theta)} \right) \\ &\leq \frac{(1 + \delta)}{\ell} \int_0^1 |u_1 - u_0|^2 dy + \varepsilon \ell N_0 + \frac{C_\delta}{\ell N_0^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, tomamos  $N_0^{-1} \approx \varepsilon^{1/3} \ell^{2/3}$  para obtener (2.25).  $\square$

## 2.5 Cotas inferior y superior para la energía

Ahora enunciamos y demostramos el Teorema principal de este capítulo. Recordemos que en el Lema 2.3.1 se probó que  $\min I^\varepsilon \leq C\varepsilon^{2/3} L^{1/3}$ .

**Teorema 2.5.1.** *Sea  $u$  un minimizador de  $I^\varepsilon$ . Entonces existe una constante positiva  $C$  tal que para cualquier  $\ell \in (0, L)$*

$$\int_0^\ell \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx \leq C\varepsilon^{2/3} \ell^{1/3}, \quad (2.30)$$

también existe otra constante  $c$  tal que para casi toda  $\ell \in (0, L)$

$$\int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}|(\ell, y) dy \geq c\varepsilon^{2/3}\ell^{-2/3}. \quad (2.31)$$

Las constantes  $C$  y  $c$  son independientes de  $\varepsilon$ ,  $\ell$ ,  $L$  y  $u$  si suponemos que  $\varepsilon^{1/3}L^{2/3} \ll 1$ .

*Nota 1.* La integración de 0 a  $L$  de (2.31)

$$\int_0^L \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx \geq 3c\varepsilon^{2/3}L^{1/3} \quad (2.32)$$

da que  $\min I^\varepsilon \geq 3c\varepsilon^{2/3}L^{1/3}$ . Daremos una estimación cuantitativa de la constante  $c$  en el Lema 2.5.3.

*Nota 2.* Por la equipartición de la energía (Lema 2.2.1), la desigualdad (2.31) se cumple para cada término ( $u_x^2$  y  $\varepsilon|u_{yy}|$ ) en la energía. Entonces el grosor promedio de los “twins” (regiones donde  $u_y$  es constante) es menor o igual a  $C\varepsilon^{1/3}\ell^{2/3}$  para la mayoría de los valores de  $\ell$ .

*Nota 3.* Estos resultados son consistentes con la construcción autosimilar usada para probar el Lema 2.2.1 a condición de que al hacerla se elija  $\theta = 2^{-3/2}$ .

*Demostración.* 1. Mostramos la cota superior (2.30). Para ello usamos un argumento de comparación estándar, con un ligero cambio que involucra la equipartición de la energía. Sea  $u$  un minimizador de  $I^\varepsilon$ . Para cualquier  $\ell \in (0, L)$  sea

$$\tilde{u} := \begin{cases} u & \text{si } x > \ell, \\ u_\varepsilon & \text{si } x \leq \ell, \end{cases}$$

donde  $u_\varepsilon$  es como en el Lema 2.4.1 con  $u_0 = 0$  y  $u_1 = u|_{x=\ell}$ , además sea  $R_\ell := (0, \ell) \times (0, 1)$ . Dado que  $u$  es un minimizador tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq I^\varepsilon(\tilde{u}) - I^\varepsilon(u) \\ &= \int_{R_\ell} (u_\varepsilon)_x^2 + \varepsilon |(u_\varepsilon)_{yy}| dx dy - \int_{R_\ell} u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dx dy, \end{aligned}$$

Entonces para  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \int_{R_\ell} u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dx dy &\leq \int_{R_\ell} (u_\varepsilon)_x^2 + \varepsilon |(u_\varepsilon)_{yy}| dx dy \\ &\stackrel{\text{Lema 2.4.1}}{\leq} (1 + \delta) \frac{1}{\ell} \int_0^1 u^2(\ell, y) dy + C_\delta \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3} \end{aligned}$$

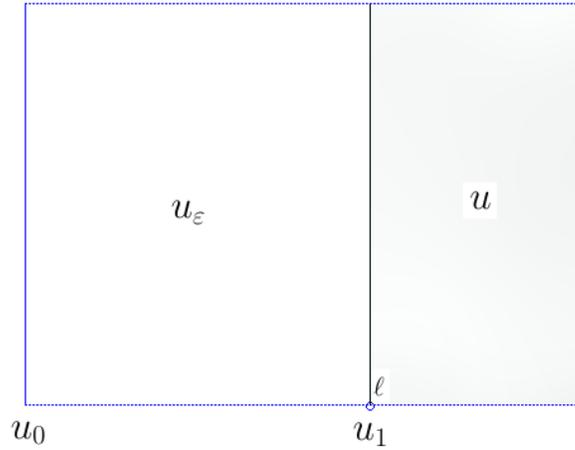


Figura 2.8:  $R_L = (0, L) \times (0, 1)$

Recordando la desigualdad de Poincaré

$$\frac{1}{\ell} \int_0^1 u^2(\ell, y) dy \leq \int_{R_\ell} u_x^2 dx, dy \quad (2.33)$$

se sigue que

$$\int_{R_\ell} u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dx dy \leq (1 + \delta) \int_{R_\ell} u_x^2 dx dy + C_\delta \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3},$$

entonces

$$\int_{R_\ell} \varepsilon |u_{yy}| dx dy \leq \delta \int_{R_\ell} u_x^2 dx dy + C_\delta \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3}. \quad (2.34)$$

Ahora por el Lema 2.3.1 sobre la equipartición de la energía se tiene

$$\begin{aligned} \int_{R_\ell} \varepsilon |u_{yy}| dx dy &= \int_{R_\ell} u_x^2 - \lambda \ell \\ &\geq \int_{R_\ell} u_x^2 - C \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Tomando  $\delta = 1/2$  se tiene de (2.34) y (2.35) que

$$\int_{R_\ell} u_x^2 - C \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3} \leq \frac{1}{2} \int_{R_\ell} u_x^2 dx dy + C_\delta \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3}.$$

Entonces

$$\int_{R_\ell} u_x^2 dx dy \leq 2(C + C_\delta)\varepsilon^{2/3}\ell^{1/3} = C\varepsilon^{2/3}\ell^{1/3}. \quad (2.36)$$

Sustituyendo en (2.34) obtenemos la desigualdad deseada para  $\int_{R_\ell} \varepsilon|u_{yy}| dx dy$ , es decir

$$\int_{R_\ell} \varepsilon|u_{yy}| dx dy \leq C\varepsilon^{2/3}\ell^{1/3}, \quad (2.37)$$

luego juntando (2.36) y (2.37) se tiene (2.30).

2. Ahora mostramos la cota inferior. Por el Lema 2.5.2, que se demostraremos al terminar esta prueba,  $u_1 := u|_{x=\ell}$  satisface para alguna constante  $c > 0$  que

$$\begin{aligned} c \left( \int_0^1 |(u_1)_{yy}| dy + 1 \right)^{-2} &\leq \int_0^1 u_1^2 dy \\ &\stackrel{(2.33)}{\leq} \ell \int_{R_\ell} u_x^2 dx dy \\ &\stackrel{(2.30)}{\leq} C\varepsilon^{2/3}\ell^{4/3}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\left( \int_0^1 |(u_1)_{yy}| dy + 1 \right)^2 \geq c\varepsilon^{-2/3}\ell^{-4/3},$$

luego

$$\int_0^1 |u_{yy}(\ell, y)| dy \geq c\varepsilon^{-1/3}\ell^{-2/3} - 1,$$

y multiplicando por  $\varepsilon$

$$\int_0^1 \varepsilon|u_{yy}(\ell, y)| dy \geq c\varepsilon^{2/3}\ell^{-2/3} - \varepsilon.$$

□

Lema que se usó en la prueba del Teorema 2.5.1.

**Lema 2.5.2.** *Sea  $f \in W^{1,\infty}(0, 1)$ . Supongamos que  $|f'| = 1$  cds y que  $f'$  cambia de signo  $N$  veces. Entonces*

$$\int_0^1 f^2 dx \geq \frac{1}{12}(N + 1)^{-2} = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{2} \int_0^1 |f''| dx + 1 \right)^{-2} \quad (2.38)$$

*Demostración.* 1. Observemos que

$$\begin{aligned}
 \int_c^d y^2 dy &= \left. \frac{y^3}{3} \right|_c^d \\
 &= \frac{d^3 - c^3}{3} \\
 &= \frac{1}{3}(d - c)(c^2 + cd + d^2) \\
 &= (d - c) \left( \frac{c^2}{4} + \frac{2}{4}cd + \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{12} - \frac{2}{12}cd + \frac{c^2}{12} \right) \\
 &= (d - c) \left( \left( \frac{c + d}{2} \right)^2 + \frac{1}{12}(d - c)^2 \right).
 \end{aligned}$$

Luego

$$\int_c^d y^2 dy = \left( \frac{c + d}{2} \right)^2 (d - c) + \frac{1}{12}(d - c)^3 \quad (2.39)$$

2. Sean  $x_1 < \dots < x_N$  los puntos donde  $f'$  cambia de signo y sean  $x_0 = 0$  y  $x_{N+1} = 1$ . Entonces para  $i = 0, \dots, N$  tenemos que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f^2(y) dy = \left( \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right)^2 (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{12}(x_{i+1} - x_i)^3.$$

Prueba: Sabemos que  $f'$  no cambia de signo en  $(x_i, x_{i+1})$ , entonces podemos suponer que  $f$  es de la forma  $y + a$  con  $a \in \mathbb{R}$ . Luego por (2.39)

$$\begin{aligned}
 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^2(y) dy &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (y + a)^2 dy \\
 &= \int_{x_i+a}^{x_{i+1}+a} y^2 dy \\
 &\stackrel{(2.39)}{=} \left( \frac{(x_{i+1} + a) + (x_i + a)}{2} \right)^2 (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{12}(x_{i+1} - x_i)^3 \\
 &= \left( \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right)^2 (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{12}(x_{i+1} - x_i)^3.
 \end{aligned}$$

3. Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(y) dy &\geq \sum_{i=0}^N \frac{1}{12} (x_{i+1} - x_i)^3 \\ &\geq \frac{1}{12} \sum_{i=0}^N \frac{1}{N+1} (x_{i+1} - x_i)^2 \\ &\geq \frac{1}{12} \left( \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (x_{i+1} - x_i) \right)^2, \end{aligned}$$

entonces

$$\int_0^1 f^2(y) dy \geq \frac{1}{12} \left( \frac{1}{N+1} \right)^2.$$

Luego, dado que  $f'$  cambia  $N$  veces de signo en  $(0, 1)$  tenemos que  $N = \frac{1}{2} \int_0^1 |f''| dx$ , entonces

$$\int_0^1 f^2 dx \geq \frac{1}{12} (N+1)^{-2} = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{2} \int_0^1 |f''| dx + 1 \right)^{-2}.$$

□

Observamos que esta estimación es mas precisa si  $f$  tiene valor medio 0 y los puntos  $x_N$  son igualmente espaciados, en este caso  $f$  es una función “sierra” periódica.

Finalmente daremos una estimación mas precisa del valor de la constante  $c$  que aparece en la cota inferior.

**Lema 2.5.3.** *La estimación*

$$\min \{I^\varepsilon(u) : u \in \mathcal{A}_0\} \geq c\varepsilon^{2/3} L^{1/3}$$

se cumple con

$$c = (3 - c'\varepsilon^{1/3} L^{2/3})^{2/3}.$$

*Nota 4.* Recordemos que siempre suponemos  $\varepsilon^{1/3} L^{2/3} \ll 1$ . Luego el Lema 2.5.3 asegura que  $c$  es esencialmente  $3^{2/3} \approx 2.08$ .

*Demostración.* 1. Sea  $u$  un minimizador de  $I^\varepsilon$ , y sean

$$\begin{aligned} B_1 &:= \int_{R_L} \varepsilon |u_{yy}| dx dy, \\ B_2 &:= \int_{R_L} u_x^2 dx dy \end{aligned}$$

y

$$B := B_1 + B_2.$$

Entonces se tiene la relación

$$B_2^{1/2} \left( \frac{1}{2\varepsilon} B_1 + L \right) \geq \frac{1}{\sqrt{3}} L^{1/2} \quad (2.40)$$

Prueba: Para cualquier  $0 < \ell < L$ , tenemos por la desigualdad de Poincaré que

$$\begin{aligned} B_2 &\geq \int_{R_\ell} u_x^2 dx dy \\ &\stackrel{(2.33)}{\geq} \frac{1}{\ell} \int_0^1 u^2(\ell, y) dy. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Sea  $N(\ell)$  el número de veces que  $u_y$  cambia de signo a lo largo de la línea  $x = \ell$ , el cual está bien definido para casi toda  $\ell$ :

$$N(\ell) := \frac{1}{2} \int_0^1 |u_{yy}(\ell, y)| dy.$$

Combinando (2.41) con el Lema 2.5.2 obtenemos que

$$\begin{aligned} (N(\ell) + 1) B_2^{1/2} &\stackrel{(2.41)}{\geq} (N(\ell) + 1) \left( \frac{1}{\ell} \int_0^1 u^2(\ell, y) dy \right)^{1/2} \\ &\stackrel{\text{Lema 2.5.2}}{\geq} (N(\ell) + 1) \frac{1}{\ell^{1/2} \sqrt{12}} \left( \frac{1}{2} \int_0^1 |u_{yy}(\ell, y)| dy + 1 \right)^{-1} \\ &= \frac{\ell^{-1/2}}{\sqrt{12}}, \end{aligned}$$

integrando de cero a  $L$  se ve que

$$\begin{aligned} \int_0^L (N(\ell) + 1) B_2^{1/2} d\ell &= B_2^{1/2} \int_0^L (N(\ell) + 1) d\ell \\ &= B_2^{1/2} \left( \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^L \int_0^1 \varepsilon |u_{yy}(\ell, y)| dy d\ell + L \right) \\ &= B_2^{1/2} \left( \frac{1}{2\varepsilon} B_1 + L \right) \\ &\geq \int_0^L \frac{\ell^{-1/2}}{\sqrt{12}} d\ell \geq \frac{1}{\sqrt{3}} L^{1/2}. \end{aligned}$$

Luego

$$B_2^{1/2} \left( \frac{1}{2\varepsilon} B_1 + L \right) \geq \frac{1}{\sqrt{3}} L^{1/2}.$$

2. La desigualdad (2.40) se puede reescribir como

$$\frac{1}{2\varepsilon} \mu(1 - \mu)^{1/2} B^{3/2} + L(1 - \mu)^{1/2} B^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} L^{1/2}, \quad (2.42)$$

donde  $\mu = \frac{B_1}{B}$ .

Prueba: Observamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} B_1 B_2^{1/2} &= \frac{1}{2\varepsilon} \frac{B_1 B_2^{1/2}}{B^{3/2}} B^{3/2} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \frac{B_1}{B} \left( \frac{B_2}{B} \right)^{1/2} B^{3/2} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \mu \left( 1 - \frac{B_1}{B} \right)^{1/2} B^{3/2} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \mu(1 - \mu)^{1/2} B^{3/2}, \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} L B_2^{1/2} &= L \left( \frac{B_2}{B} \right)^{1/2} B^{1/2} \\ &= L(1 - \mu)^{1/2} B^{1/2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{2\varepsilon} B_1 B_2^{1/2} + L B_2^{1/2} = \frac{1}{2\varepsilon} \mu(1 - \mu)^{1/2} B^{3/2} + L(1 - \mu)^{1/2} B^{1/2},$$

y se sigue (2.42).

3. Sea  $B' = \varepsilon^{-2/3} L^{-1/3} B$ . De (2.42) se sigue que

$$\mu(1 - \mu)^{1/2} (B')^{3/2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} - C \varepsilon^{1/3} L^{2/3}. \quad (2.43)$$

Prueba: Multiplicando (2.42) por  $L^{1/2}$  y reagrupando tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} &\leq \frac{1}{2} \mu(1 - \mu)^{1/2} L^{-1/2} \varepsilon^{-1} B^{3/2} + L^{1/2} (1 - \mu)^{1/2} B^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \mu(1 - \mu)^{1/2} (L^{-1/3} \varepsilon^{-2/3} B)^{3/2} + (1 - \mu)^{1/2} L^{2/3} \varepsilon^{1/3} (L^{-1/3} \varepsilon^{-2/3} B)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \mu(1 - \mu)^{1/2} (B')^{3/2} + (1 - \mu)^{1/2} L^{2/3} \varepsilon^{1/3} (B')^{1/2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\sqrt{3}} &\leq \mu(1-\mu)^{1/2}(B')^{3/2} + 2(1-\mu)^{1/2}L^{2/3}\varepsilon^{1/3}(B')^{1/2} \\
 &= \mu(1-\mu)^{1/2}(B')^{3/2} + 2\varepsilon^{1/3}L^{2/3}\left(\frac{B_2}{B}\right)^{1/2}\left(\varepsilon^{-2/3}L^{-1/3}B\right)^{1/2} \\
 &= \mu(1-\mu)^{1/2}(B')^{3/2} + 2\varepsilon^{1/3}L^{2/3}(B_2)^{1/2}\varepsilon^{-1/3}L^{-1/6} \\
 &= \mu(1-\mu)^{1/2}(B')^{3/2} + 2L^{1/2}(B_2)^{1/2} \\
 &\stackrel{\text{Lema 2.2.1}}{\leq} \mu(1-\mu)^{1/2}(B')^{3/2} + 2L^{1/2}(C\varepsilon^{2/3}L^{1/3})^{1/2} \\
 &= \mu(1-\mu)^{1/2}(B')^{3/2} + CL^{2/3}\varepsilon^{1/3},
 \end{aligned}$$

por lo que se sigue (2.43).

4. El valor máximo que toma la función  $\mu(1-\mu)^{1/2}$  se alcanza en  $\mu = \frac{2}{3}$  y es  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ .

Prueba: Definamos  $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f(\mu) := \mu(1-\mu)^{1/2},$$

luego derivando tenemos que

$$\begin{aligned}
 f'(\mu) &= (1-\mu)^{-1/2}\left((1-\mu) - \frac{1}{2}\mu\right) \\
 &= \frac{1 - \frac{3}{2}\mu}{(1-\mu)^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

De aquí que  $f'(\mu) = 0$  si y sólo si  $\mu = \frac{2}{3}$ , que es donde se alcanza el máximo.

5. Se sigue de (2.43) y del punto 4 que

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}(B')^{3/2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} - C\varepsilon^{1/3}L^{2/3},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 I^\varepsilon(u) &= \varepsilon^{2/3}L^{1/3}B' \\
 &\geq \left(3 - c'\varepsilon^{1/3}L^{2/3}\right)^{\frac{2}{3}}\varepsilon^{2/3}L^{1/3}.
 \end{aligned}$$

□



# Capítulo 3

## El modelo de energía con una condición de frontera suave

En este capítulo tratamos el modelo de energía con frontera suave. Físicamente, esto corresponde a tratar la austenita como un material elástico más que como un substrato rígido. Matemáticamente, esto tiene el efecto de remplazar la condición de frontera  $u = 0$  en  $x = 0$  por un término de penalización que involucra la norma  $H^{1/2}$  de  $u|_{x=0}$ . Hay un parametro de penalización  $\beta$ , el cual representa la rigidez de la austenita. Si  $\beta$  no es muy pequeño (específicamente, si  $\beta \gg (\varepsilon/L)^{1/3}$ ) entonces la situación es muy parecida a la de la condición de frontera rígida. Si  $\beta$  es suficientemente chico ( $\beta \ll (\varepsilon/L)^{1/3}$ ) entonces la situación es muy diferente.

Es conveniente trabajar con funciones periódicas en la variable  $y$ , ya que esto nos permite definir la norma  $H^{1/2}$  vía las series de Fourier. Por la tanto en este capítulo impondremos la condición

$$u(x, 0) = u(x, 1) \quad \text{para cada} \quad x \in (0, L). \quad (3.1)$$

Estrictamente hablando  $u$  debería ser vista como una función sobre el cilindro  $Z = (0, L) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ . En particular, la expresión  $\int \varepsilon |u_{yy}| dx dy$  debe ser entendida como el número de saltos de  $u_y$  entre la frontera de arriba y la de abajo del cilindro. Abusando de notación escribiremos  $R_L = (0, L) \times (0, 1)$ , en lugar de  $Z$  como dominio de integración. Ahora formularemos la versión del problema con una condición de frontera suave más precisa. El funcional a ser minimizado es

$$J^\varepsilon(u) := \int_{R_L} u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dx dy + \beta \|u_0\|_{1/2}^2 \quad (3.2)$$

sujeto a  $|u_y| = 1$  cds. y a la condición de frontera periódica (3.1). Aquí  $u_0 = u|_{x=0}$  (en el sentido de traza). El último término en  $J^\varepsilon$  esta definido por

$$\|u_0\|_{1/2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| |\hat{u}_0(k)|^2,$$

donde  $\{\hat{u}_0(k)\}$  son los coeficientes de Fourier de  $u_0$ , es decir,

$$u_0(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_0(k) e^{2\pi i k y}.$$

Existe también otra caracterización alternativa

$$\|u_0\|_{1/2}^2 = \min_{v=u_0 \text{ en } x=0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_0^1 (v_x^2 + v_y^2) dx dy.$$

Estamos abusando un poco de la notación, ya que esta no es la norma sobre el espacio  $H^{1/2}$  si no la norma sobre el espacio  $H^{1/2}/\mathbb{R}$ , ya que con la definición de arriba, las constantes tienen norma cero (ver Apéndice C). La clase precisa de funciones admisibles para  $J^\varepsilon$  es

$$\mathcal{A} = \left\{ u \in H^1(Z) : |u_y| = 1 \text{ cds y } u_{yy} \text{ es una medida de Radón con variación total finita} \right\}.$$

### 3.1 Existencia de mínimos

En esta sección mostramos que el funcional de energía con condición de frontera suave alcanza su mínimo en el espacio de funciones admisibles  $\mathcal{A}$ .

**Teorema 3.1.1.** *Para  $\varepsilon > 0$ ,  $J^\varepsilon$  alcanza su mínimo sobre  $\mathcal{A}$ .*

*Demostración.* Como en el caso del Teorema 2.1.2 aplicaremos el método directo del Cálculo de Variaciones. Bastará con demostrar dos cosas: primero la semicontinuidad inferior con respecto a la convergencia débil, y segundo, que  $\mathcal{A}$  es débilmente cerrado.

Sea  $\{u^j\} \subset \mathcal{A}$  una sucesión minimizante para  $J^\varepsilon$ . Luego  $\{u^j\}$  es acotada en  $H^1$  con lo que también  $\{u_0^j = u^j|_{x=0}\}$  es acotada en  $H^{1/2}$ , además  $u_{yy}$  es acotada en  $\mathcal{M}(R_L)$ . De manera análoga al Teorema 2.1.2, pasando a una subsucesión

$$\begin{aligned} u^j &\rightharpoonup u && \text{en } H^1(R_L), \\ u_{yy}^j &\xrightarrow{*} u_{yy} && \text{en } \mathcal{M}(R_L), \end{aligned}$$

y por (C.7) y (C.8) del Apéndice C tenemos que

$$u_0^j \rightharpoonup u_0 \text{ en } H^{1/2}(0,1).$$

Luego como en el Teorema 2.1.2

$$\int_{R_L} u_x^2 dx dy + \varepsilon \int_{R_L} |u_{yy}| dx dy \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \left( \int_{R_L} (u_x^j)^2 dx dy + \varepsilon \int_{R_L} |u_{yy}^j| dx dy \right)$$

y por la semicontinuidad inferior débil de la norma

$$\begin{aligned} J^\varepsilon(u) &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \left( \int_{R_L} (u_x^j)^2 dx dy + \varepsilon \int_{R_L} |u_{yy}^j| dx dy \right) + \liminf_{j \rightarrow \infty} \beta \|u_0^j\|_{1/2}^2 \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} J^\varepsilon(u^j). \end{aligned}$$

Finalmente,  $u \in \mathcal{A}$  por la semicontinuidad inferior de la norma en  $H^{1/2}$  y por el Teorema 2.1.2.  $\square$

## 3.2 Cota superior y equipartición de la energía

En esta sección presentamos los resultados análogos al caso de frontera rígida para la cota superior y la equipartición de la energía. En las demostraciones de esta sección sólo se indicarán los cambios con respecto a lo presentado en el capítulo anterior.

**Lema 3.2.1.** *Existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$\min \{J^\varepsilon(u) : u \in \mathcal{A}\} \leq C \varepsilon^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}. \quad (3.3)$$

*Demostración.* Por la ecuación (2.7) la función  $u$  construida en el Lema 2.2.1 cumple la condición de periodicidad (3.1). Además como  $u_0 = u|_{x=0} = 0$  la norma  $\|u_0\|_{1/2} = 0$  y se sigue (3.3) del Teorema 2.2.1  $\square$

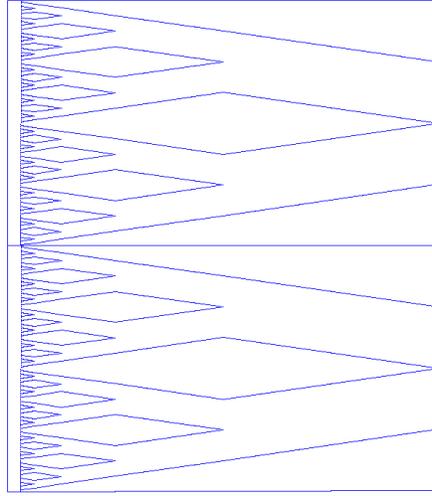


Figura 3.1: *Función  $u$  para la cota superior*

**Lema 3.2.2** (Equipartición de la Energía). *Sea  $u$  un minimizador de  $J^\varepsilon$  sobre  $\mathcal{A}$ . Entonces existe una constante  $\lambda$  tal que*

$$\int_0^1 \varepsilon |u_{yy}(x, y)| dy - \int_0^1 u_x^2(x, y) dy = \lambda. \quad (3.4)$$

El valor de  $\lambda$  depende de  $u$  y entonces implícitamente de  $\varepsilon$ ,  $L$  y  $\beta$ . Sin embargo esta satisface una estimación de la forma

$$|\lambda| \leq C\varepsilon^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}}. \quad (3.5)$$

*Demostración.* Sea  $u$  un minimizador de  $J^\varepsilon$  y consideremos las variaciones

$$u^t(x, y) := u(\Psi^t(x), y)$$

con la  $\Psi^t$  definida en la demostración del Lema 2.3.1. Luego observamos de manera análoga a la demostración hecha con anterioridad que

$$\begin{aligned} |(u^t(x, y))_y| &= |(u(\Psi^t(x), y))_y| \\ &= |(u(x, y))_y| \\ &= 1 \end{aligned}$$

y dado que  $\Psi^t \approx Id$  cerca del cero y  $\Psi^t(0) = 0$

$$\begin{aligned} u^t|_{x=0} &= u(\Psi^t(x), y)|_{x=0} \\ &= u|_{x=0} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \|u_0^t\|_{1/2}^2 &= \|u^t|_{x=0}\|_{1/2}^2 = \|u|_{x=0}\|_{1/2}^2 \\ &= \|u_0\|_{1/2}^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ahora si definimos  $\Lambda$  como en (2.19) tenemos que

$$\begin{aligned} \left| J^\varepsilon(u^t) - J^\varepsilon(u) - t\Lambda(u) \right| &= \left| \int_{R_L} (u^t)_x^2(x, y) + \varepsilon|u_{yy}^t| dy dx + \beta\|u_0^t\|_{1/2}^2 \right. \\ &\quad \left. - \int_{R_L} u_x^2(x, y) + \varepsilon|u_{yy}| dy dx - \beta\|u_0\|_{1/2}^2 - t\Lambda(u) \right| \\ &\stackrel{(3.6)}{=} \left| \int_{R_L} (u^t)_x^2(x, y) + \varepsilon|u_{yy}^t| dy dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{R_L} u_x^2(x, y) + \varepsilon|u_{yy}| dy dx - t\Lambda(u) \right| \\ &\stackrel{(2.15) \text{ y } (2.16)}{=} \left| \int_0^L \left( \int_0^1 u_x^2 dy \right) \left( t\varphi'(x) - \frac{t\varphi'(x)}{1+t\varphi'(x)} \right) dx \right| \\ &\leq |t|^2 \left\| \frac{(\varphi')^2}{1+t\varphi'} \right\|_\infty \left| \int_{R_L} u_x^2 dy dx \right| \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando  $t \rightarrow 0$ . Por lo tanto  $J^\varepsilon(u^t)$  es derivable en  $t = 0$  y como  $u$  es un minimizador de  $J^\varepsilon$  tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{d}{dt} J^\varepsilon(u^t) \right) \Big|_{t=0} = \Lambda(u) \\ &= - \int_0^L \left( \int_0^1 u_x^2 dy \right) \varphi'(x) dx + \int_0^L \varepsilon \varphi' d\sigma \end{aligned}$$

para toda  $\varphi$  en  $C_0^\infty(R_L)$ . Con lo que (3.4) y (3.5) se siguen de forma análoga al Lema 2.3.1.  $\square$

### 3.3 Cota superior localizada para la energía

En el Teorema 2.5.1 se establecieron las cotas inferior y superior para la energía en el rectángulo  $R_\ell = (0, \ell) \times (0, 1)$ , cuando  $u$  es un minimizador en el caso de frontera rígida. La cota superior se extiende fácilmente del Teorema 2.5.1 para el modelo con condición de frontera suave.

**Teorema 3.3.1.** *Existe una constante  $C$  tal que para cualquier minimizador  $u$  de  $J^\varepsilon$  y para toda  $\ell \in (0, L)$  se cumple*

$$\int_0^\ell \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx \leq C \varepsilon^{\frac{2}{3}} \ell^{\frac{1}{3}}. \quad (3.7)$$

*Demostración.* Sea  $u$  un minimizador de  $J^\varepsilon$ . Para cualquier  $\ell$  en  $(0, L)$  sea

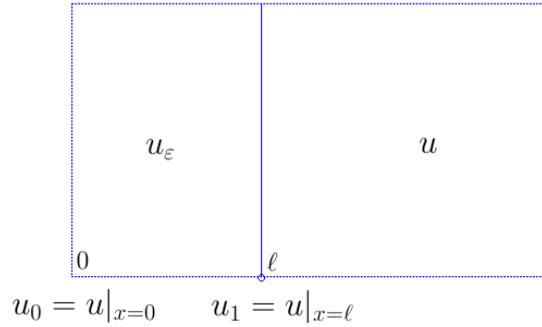
$$\bar{u} := \begin{cases} u & \text{si } x > \ell \\ u_\varepsilon & \text{si } x \leq \ell \end{cases}$$

donde  $u_\varepsilon$  es como en el Lema 2.4.1 con

$$u_0 = u|_{x=0} \quad \text{y} \quad u_1 = u|_{x=\ell}.$$

Dado que  $u$  es un minimizador tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq J^\varepsilon(\bar{u}) - J^\varepsilon(u) \\ &= \int_{R_\ell} (u_\varepsilon)_x^2 + \varepsilon |(u_\varepsilon)_{yy}| dx dy + \beta \left\| \widehat{u_0}^{u|_{x=0}} \right\|_{1/2}^2 \\ &\quad - \int_{R_\ell} u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dx dy - \beta \left\| \widehat{u_0}^{u|_{x=0}} \right\|_{1/2}^2 \\ &= \int_{R_\ell} (u_\varepsilon)_x^2 + \varepsilon |(u_\varepsilon)_{yy}| dx dy - \int_{R_\ell} u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dx dy. \end{aligned}$$


 Figura 3.2: Función  $\bar{u}$ 

Entonces para  $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
 \int_{R_\ell} u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| \, dx \, dy &\leq \int_{R_\ell} (u_\varepsilon)_x^2 + \varepsilon |(u_\varepsilon)_{yy}| \, dx \, dy \\
 &\stackrel{\text{Lema 2.4.1}}{\leq} \frac{1 + \delta}{\ell} \int_0^1 |u_1(y) - u_0(y)|^2 \, dy + C_\delta \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3}.
 \end{aligned}$$

Ahora usando la desigualdad

$$\int_0^1 |u_1(y) - u_0(y)|^2 \, dy \leq \ell \int_{R_L} u_x^2 \, dx \, dy \tag{3.8}$$

que demostraremos mas adelante, tenemos que

$$\int_{R_\ell} u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| \, dx \, dy \leq (1 + \delta) \int_{R_L} u_x^2 \, dx \, dy + C_\delta \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3}.$$

Luego

$$\int_{R_\ell} \varepsilon |u_{yy}| \, dx \, dy \leq \delta \int_{R_L} u_x^2 \, dx \, dy + C_\delta \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3}, \tag{3.9}$$

y por el Lema 3.2.2 de equipartición de la energía para el modelo de frontera suave vemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{R_\ell} \varepsilon |u_{yy}| \, dx \, dy &= \int_{R_\ell} u_x^2 - \lambda \ell \\
 &\geq \int_{R_\ell} u_x^2 - C_\delta \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Tomando  $\delta = 1/2$  se tiene de (3.9) y (3.10) que

$$\int_{R_\ell} u_x^2 - C_\delta \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3} \leq \frac{1}{2} \int_{R_\ell} u_x^2 \, dx \, dy + C_\delta \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3}.$$

Entonces

$$\int_{R_\ell} u_x^2 dx dy \leq 2(C + C_\delta)\varepsilon^{2/3}\ell^{1/3} = C\varepsilon^{2/3}\ell^{1/3}, \quad (3.11)$$

sustituyendo en (3.9) obtenemos la desigualdad deseada para  $\int_{R_\ell} \varepsilon |u_{yy}| dx dy$ , es decir

$$\int_{R_\ell} \varepsilon |u_{yy}| dx dy \leq C\varepsilon^{2/3}\ell^{1/3}, \quad (3.12)$$

luego juntando (3.11) y (3.12) se tiene (3.7).

Finalmente damos el argumento para demostrar (3.8). Por densidad de las funciones  $C^1(\mathcal{R}_\mathcal{L})$  en  $H^1(\mathcal{R}_\mathcal{L})$  basta suponer que  $u \in C^1(\mathcal{R}_\mathcal{L})$ . Por el Teorema fundamental del cálculo tenemos

$$u_1(y) - u_0(y) = \int_0^\ell u_x dx,$$

tomando valores absolutos en la última ecuación, por la desigualdad de Hölder, se obtiene que

$$|u_1(y) - u_0(y)|^2 \leq \ell \int_0^\ell u_x^2 dx.$$

Finalmente, integrando en  $y$  de 0 a 1 concluimos (3.8).  $\square$

### 3.4 Cota inferior y superior para la energía

Probar la cota inferior para  $J^\varepsilon$  es mas difícil que en la demostración del Teorema 2.5.1.

Por esto, probaremos un enunciado análogo para un funcional ligeramente modificado. La modificación consiste en remplazar el cuadrado de la norma en  $H^{1/2}/\mathbb{R}$  por la norma  $L^2$  a la primera potencia. Para motivar esto, recordamos la desigualdad de interpolación (ver (C.9))

$$\|u_0\|_{1/2}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|u_0\|_{L^2} \|u_0'\|_{L^2}.$$

Es tentador, pero erróneo pensar que  $|u_0'| = 1$  cds, después de todo la construcción autosimilar alcanza  $u_0 = 0$ . Pero es correcto que  $|u_0'| \leq 1$ . Para ver esto, notamos que  $u(x, \cdot)$  converge a  $u_0(\cdot)$  en  $L^2$  cuando  $x \rightarrow 0$  por la desigualdad de Poincaré y  $|u_y(x, \cdot)| \leq 1$ . Entonces

$$u_y(x, \cdot) \xrightarrow{*} u_0'(\cdot) \quad \text{en } L^\infty(0, 1) \text{ y } |u_0'| \leq 1.$$

Combinando esta observación con la desigualdad de interpolación, deducimos que

$$\|u_0\|_{1/2}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|u_0\|_{L^2}.$$

Esperamos que para el minimizador  $u$  de  $J^\varepsilon$ ,  $u_0$  se vea más o menos como una función periódica sierra con pendiente  $\pm 1$ . En este caso deberíamos tener la estimación inversa

$$\|u_0\|_{1/2}^2 \geq c\|u_0\|_{L^2}\|u'_0\|_{L^2} = c\|u_0\|_{L^2}.$$

Con esta motivación, ahora consideramos el funcional modificado

$$\tilde{J}^\varepsilon(u) = \int_{R_L} u_x^2 + \varepsilon|u_{yy}| \, dx \, dy + \frac{\beta}{2\pi}\|u_0\|_{L^2}. \quad (3.13)$$

Usando la semicontinuidad inferior débil de la norma  $L^2$  tenemos de forma análoga al Teorema 3.1.1 que  $\tilde{J}^\varepsilon$  alcanza su mínimo en  $\mathcal{A}$ , y que satisface una cota superior de la forma (3.3), además el minimizador satisface la equipartición de la energía en el sentido de (3.4) y (3.5). También tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 3.4.1.** *Existen constantes positivas  $C$  y  $c$  tales que para cualquier minimizador  $u$  de  $\tilde{J}^\varepsilon$  se cumple:*

1. Para cualquier  $\ell$  en  $(0, L)$ ,

$$\int_0^\ell \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon|u_{yy}| \, dy \, dx \leq C \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3}; \quad (3.14)$$

2. Si  $\beta \geq (\varepsilon/L)^{1/3}$ , entonces

$$\|u_0\|_{L^2} \leq C\varepsilon\beta^{-2}, \quad (3.15)$$

y para casi toda  $\ell$  en  $(0, L)$

$$\int_0^1 \varepsilon|u_{yy}|(\ell, y) \, dy \geq c\varepsilon^{2/3}(\ell^{2/3} + \varepsilon^{2/3}\beta^{-2})^{-1}; \quad (3.16)$$

3. Si  $\beta \leq (\varepsilon/L)^{1/3}$  ( $y \beta \gg \varepsilon/L$ ) entonces

$$\|u_0\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{1/2}L^{1/2}\beta^{-1/2}, \quad (3.17)$$

y para casi toda  $\ell$  en  $(0, L)$

$$\int_0^1 \varepsilon|u_{yy}|(\ell, y) \, dy \geq c\varepsilon^{1/2}L^{-1/2}\beta^{1/2}. \quad (3.18)$$

*Demostración.* La prueba se divide en tres pasos:

1. La demostración del punto 1 es la misma que la del Teorema 3.3.1.

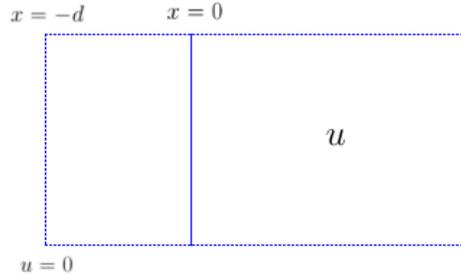


Figura 3.3: Extensión de  $u$

2. Para el punto 2 supongamos que  $\beta > (\varepsilon/L)^{1/3}$ . Para probar la cota (3.15) de  $\|u_0\|_{L^2}$ , introducimos una función  $\tilde{u}$  como sigue. Usando el Lema 2.4.1 extendemos  $u$  a la franja  $-d < x < 0$  tal que  $u = 0$  en  $x = -d$  (el valor de  $d$  será elegido mas adelante). Con  $u_\varepsilon = 0$  en  $x = -d$  y  $u_\varepsilon = u$  en  $x = 0$ . Despues trasladamos la extensión  $u$  del lado derecho y así obtenemos  $\tilde{u}$ , es decir  $\tilde{u}(x, y) = u(x + d, y)$ . Ahora como  $u$  es un minimizador de  $\tilde{J}^\varepsilon$  observamos que

$$\begin{aligned} \tilde{J}^\varepsilon(u) &\leq \int_{-d}^0 \int_0^1 (u_\varepsilon)_x^2 + \varepsilon |(u_\varepsilon)_{yy}| dy dx + \int_0^{L-d} \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx + \frac{\beta}{2\pi} \left\| \overbrace{(u_\varepsilon)_0}^{(u_\varepsilon)|_{x=0}=0} \right\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1+\delta}{d} \int_0^1 u_0^2 dy + C_\delta \varepsilon^{2/3} d^{1/3} + \int_0^L \int_0^1 u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}| dy dx. \end{aligned}$$

Donde en la última desigualdad se usó en el Lema 2.4.1. Debido a la forma del funcional  $\tilde{J}^\varepsilon(u)$ , se sigue que

$$\frac{\beta}{2\pi} \|u_0\|_{L^2} \leq \frac{1+\delta}{d} \int_0^1 u_0^2 dy + C_\delta \varepsilon^{2/3} d^{1/3}.$$

Ahora tomando  $\delta = 1$  y  $d = \frac{8\pi}{\beta} \|u_0\|_{L^2}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2\pi} \|u_0\|_{L^2} &\leq \frac{\beta}{4\pi \|u_0\|_{L^2}} \|u_0\|_{L^2}^2 + C_\delta \varepsilon^{2/3} \frac{2\pi^{1/3}}{\beta^{1/3}} \|u_0\|_{L^2}^{1/3} \\ &= \frac{\beta}{4\pi} \|u_0\|_{L^2} + C_\delta \varepsilon^{2/3} \frac{2\pi^{1/3}}{\beta^{1/3}} \|u_0\|_{L^2}^{1/3} \end{aligned}$$

en seguida

$$\beta \|u_0\|_{L^2} \leq C \varepsilon^{2/3} \beta^{-1/3} \|u_0\|_{L^2}^{1/3}$$

y finalmente

$$\|u_0\|_{L^2}^{2/3} \leq C \varepsilon^{2/3} (\beta^{-2})^{2/3},$$

que es equivalente a (3.15). Ahora veamos la cota inferior (3.16). Sea  $u_\ell = u|_{x=0}$  y  $u_0 = u|_{x=0}$ . Luego usando la desigualdad de Poincaré obtenemos

$$\|u_\ell - u_0\|_{L^2}^2 \stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} \ell \int_{R_\ell} u_x^2 \quad (3.19)$$

$$\stackrel{(3.14)}{\leq} C \varepsilon^{2/3} \ell^{1/3} \ell. \quad (3.20)$$

Entonces por la desigualdad del triángulo y la cota (3.20) tenemos

$$\begin{aligned} \|u_\ell\|_{L^2} &\leq C \varepsilon^{1/3} \ell^{2/3} + \|u_0\|_{L^2} \\ &\stackrel{(3.15)}{\leq} C(\varepsilon^{1/3} \ell^{2/3} + \varepsilon \beta^{-2}). \end{aligned}$$

Luego por el Lema 2.5.2

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \varepsilon |(u_\ell)_{yy}| dx &\geq \varepsilon \left( 12 \int_0^1 (u_\ell)_x^2 dx \right)^{-1/2} - \varepsilon \\ &\geq c \varepsilon (\varepsilon^{1/3} \ell^{2/3} + \varepsilon \beta^{-2})^{-1} - \varepsilon \\ &\geq c' \varepsilon^{2/3} (\ell^{2/3} + \varepsilon^{2/3} \beta^{-2})^{-1}, \end{aligned}$$

con lo que se cumple (3.16).

3. Para el tercer punto supongamos que  $\varepsilon/L \ll \beta \leq (\varepsilon/L)^{1/3}$ . La cota sobre  $\|u_0\|_{L^2}$  es una consecuencia de la cota superior global

$$\min \{ \tilde{J}^\varepsilon(u) : u \in \mathcal{A} \} \leq C \varepsilon^{1/2} \beta^{1/2} L^{1/2}, \quad (3.21)$$

la cual se prueba considerando una función de prueba unidimensional,  $u(x, y) = v(y)$ , donde  $v$  es una función sierra periódica con pendiente  $\pm 1$  y periodo

$$\varepsilon^{1/2} \beta^{-1/2} L^{1/2}.$$

Para la cota inferior (3.18), usamos la ecuación (3.20), que es válida para toda  $\beta$ , y tomamos en cuenta que

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/3} L^{2/3} &= \varepsilon^{1/2} \beta^{-1/2} L^{1/2} \underbrace{(\varepsilon/L)^{-1/6} \beta^{1/2}}_{\leq 1} \\ &\leq \varepsilon^{1/2} L^{1/2} \beta^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \|u_\ell\|_{L^2} &\leq C \varepsilon^{1/3} \ell^{2/3} + \|u_0\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon^{1/3} \ell^{2/3} + C \varepsilon^{1/2} L^{1/2} \beta^{-1/2} \\ &\stackrel{(3.22)}{\leq} C' \varepsilon^{1/2} L^{1/2} \beta^{-1/2} \\ &\ll 1. \end{aligned}$$

Luego de forma análoga a la demostración de la ecuación (3.16) se sigue (3.18) por el Lema 2.5.2.

□

Finalmente podemos demostrar el resultado principal, y final, de este trabajo.

**Corolario 3.4.2.** *Existen constantes  $c$  y  $C$  tales que*

$$c \min \left\{ \varepsilon^{1/2} \beta^{1/2} L^{1/2}, \varepsilon^{2/3} L^{1/3} \right\} \leq \min_{\mathcal{A}} \tilde{J}^\varepsilon \leq C \min \left\{ \varepsilon^{1/2} \beta^{1/2} L^{1/2}, \varepsilon^{2/3} L^{1/3} \right\} \quad (3.23)$$

*Demostración.* El primer miembro dentro del mínimo de la cota inferior sale integrando de 0 a  $L$  las ecuaciones (3.16) y (3.18) y el segundo es por el Teorema 2.5.1. La cota superior se sigue del Lema 3.2.1 y de la ecuación (3.21) □



# Apéndice A

## Teorema de Murat

**Lema A.0.3.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado con frontera  $\partial\Omega$  Lipschitz. Entonces para  $\eta > 0$  suficientemente pequeña y para  $1 < p' < q' < +\infty$  existe una función  $\psi^\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ , tal que para cualquier  $\varphi \in W_0^{1,q'}(\Omega)$  se cumple

$$\|(1 - \psi^\eta)\varphi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \leq \eta \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}. \quad (\text{A.1})$$

*Demostración.* 1. Partición de la unidad.

Como  $\Omega$  es acotado y  $\partial\Omega$  es Lipschitz, existe una cubierta abierta finita  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$  de  $\bar{\Omega}$ , tal que

$$\beta_0 \cap \partial\Omega = \emptyset, \quad \beta_j \cap \partial\Omega \neq \emptyset,$$

$1 \leq j \leq m$ , existe una bola abierta  $B_j \subset \mathbb{R}^N$  y un mapeo biyectivo Lipschitz  $T_j : \beta_j \rightarrow B_j$ , tal que  $B_j \cap \mathbb{R}_+^N = T_j(\beta_j \cap \Omega)$ ,  $1 \leq j \leq m$ .

Para  $1 \leq j \leq m$ , sean  $\alpha_j = \beta_j \cap \Omega$ ,  $A_j = B_j \cap \mathbb{R}_+^N$ . Supongamos que  $\Phi_0, \dots, \Phi_m$  es una partición de la unidad asociada con la cubierta  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ , es decir para  $0 \leq j \leq m$  se tiene  $\Phi_j \in \mathcal{D}(\beta_j)$ ,

$$\Phi_j \geq 0$$

y

$$\sum_{j=0}^m \Phi_j = 1$$

sobre  $\bar{\Omega}$ .

2. Construcción de una función  $\bar{\psi}^\eta$  tal que el soporte  $\text{sop } \bar{\psi}^\eta \subset\subset \Omega$ .

Para cualquier  $1 \leq j \leq m$  y  $\eta > 0$  suficientemente pequeña definimos una función  $\theta_j^\eta$  sobre  $A_j$ , que depende solo de  $x_N$ , como

$$\theta_j^\eta(x_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x_N \leq \eta/2, \\ \frac{1}{\eta}(2x_N - \eta) & \text{si } \eta/2 \leq x_N \leq \eta, \\ 1 & \text{si } \eta \leq x_N. \end{cases}$$

Sea

$$\bar{\psi}^\eta = \Phi_0 + \sum_{j=1}^m (\theta_j^\eta \circ T_j) \Phi_j.$$

Entonces la función  $\bar{\psi}^\eta$  es Lipschitz y el sop  $\bar{\psi}^\eta \subset \subset \Omega$ .

3. Para cualquier  $\eta > 0$ , existe una función  $\psi^\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$  y una constante positiva  $C_N$  que sólo depende de  $N$ , tal que para cualquier  $\varphi \in W_0^{1,q'}(\Omega)$  con  $1 < q' < +\infty$  se cumple que

$$\|(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)\varphi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \leq C_N \eta \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $1 < p' < q' < +\infty$ .

Prueba: Consideramos a  $s$  en  $\mathbb{R}$  tal que

$$\frac{1}{q'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p'},$$

luego  $p' < s < +\infty$ . Ahora, para cualquier  $\eta > 0$  existe una función  $\psi^\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$  tal que

$$\|\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta\|_{W_0^{1,s}(\Omega)} \leq \eta. \quad (\text{A.3})$$

Entonces para cualquier  $\varphi \in W_0^{1,q'}(\Omega)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \|(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)\varphi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} &= \left( \|(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{\partial((\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)\varphi)}{\partial x_k} \right\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \right)^{1/p'} \\ &\leq C_N \left( \|(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{\partial(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)}{\partial x_k} \varphi \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^N \left\| (\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Dado que  $1 = \frac{1}{s/p'} + \frac{1}{q'/p'}$ , por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned} \|(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} &= \int_{\Omega} |\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta|^{p'} |\varphi|^{p'} dx \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta|^{p' \frac{s}{p'}} dx \right)^{\frac{p'}{s}} \left( \int_{\Omega} |\varphi|^{p' \frac{q'}{p'}} dx \right)^{\frac{p'}{q'}} \\ &= \| \psi^\eta - \bar{\psi}^\eta \|_{L^s(\Omega)}^{p'} \| \varphi \|_{L^{q'}(\Omega)}^{p'} \\ &\leq \| \psi^\eta - \bar{\psi}^\eta \|_{W_0^{1,s}(\Omega)}^{p'} \| \varphi \|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}^{p'}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

De manera análoga para  $k = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)}{\partial x_k} \varphi \right\|_{L^{p'}(\Omega)} &\leq \left\| \frac{\partial(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)}{\partial x_k} \right\|_{L^s(\Omega)} \| \varphi \|_{L^{q'}(\Omega)} \\ &\leq \| \psi^\eta - \bar{\psi}^\eta \|_{W_0^{1,s}(\Omega)} \| \varphi \|_{W_0^{1,q'}(\Omega)} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

y

$$\left\| (\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \|\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta\|_{W_0^{1,s}(\Omega)} \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}. \quad (\text{A.7})$$

Se sigue de (A.4)-(A.7) que

$$\|(\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta)\varphi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \leq C_N(1 + 2N)\|\psi^\eta - \bar{\psi}^\eta\|_{W_0^{1,s}(\Omega)} \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}, \quad (\text{A.8})$$

por lo tanto de (A.3) y (A.8) se deduce (A.2).

4. Para cada  $\eta > 0$  existe una constante positiva  $C_\Omega$  tal que para cualquier  $\varphi \in W_0^{1,q'}(\Omega)$  se satisface

$$\|(1 - \bar{\psi}^\eta)\varphi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \leq C_\Omega \eta^{1/\eta} \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}. \quad (\text{A.9})$$

Prueba: Ya que

$$\begin{aligned} 1 - \bar{\psi}^\eta &= 1 - \Phi_0 - \sum_{j=1}^m (\theta_j^\eta \circ T_j) \Phi_j \\ &= \sum_{j=0}^m \Phi_j - \Phi_0 - \sum_{j=1}^m (\theta_j^\eta \circ T_j) \Phi_j \\ &= \sum_{j=1}^m \Phi_j - (\theta_j^\eta \circ T_j) \Phi_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left(1 - \theta_j^\eta \circ T_j\right) \Phi_j, \end{aligned}$$

tenemos para el lado izquierdo de (A.9) que

$$\left\| \sum_{j=1}^m \left(1 - \theta_j^\eta \circ T_j\right) \Phi_j \varphi \right\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^m \left\| (1 - \theta_j^\eta \circ T_j) \Phi_j \varphi \right\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)}.$$

Luego es suficiente probar que para toda  $1 \leq j \leq m$  existe una constante  $C > 0$  tal que para cualquier  $\varphi \in W_0^{1,q'}(\Omega)$  se cumple que

$$\left\| (1 - \theta_j^\eta \circ T_j) \Phi_j \varphi \right\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \leq C \eta^{1/\eta} \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}. \quad (\text{A.10})$$

Por comodidad, suprimimos el índice  $j$ . Para cualquier  $\varphi \in W_0^{1,q'}(\Omega)$  se ve que

$$\begin{aligned} \|(1 - \theta^\eta \circ T)\Phi\varphi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} &\leq C_N \left( \|(1 - \theta^\eta \circ T)\Phi\varphi\|_{L^{p'}} + \sum_{k=1}^N \left\| (1 - \theta^\eta \circ T) \frac{\partial(\Phi\varphi)}{\partial x_k} \right\|_{L^{p'}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{\partial(1 - \theta^\eta \circ T)}{\partial x_k}(\Phi\varphi) \right\|_{L^{p'}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Como el mapeo  $T : \alpha = \beta \cap \Omega \rightarrow A = B \cap \mathbb{R}_+^N$  es Lipschitz y biyectivo, cambiando el orden de las variables de integración se tiene que

$$\begin{aligned}
 \|(1 - \theta^\eta \circ T)\Phi\varphi\|_{L^{p'}(\alpha)} &= \left( \int_\alpha |1 - \theta^\eta \circ T|^{p'} |\Phi\varphi|^{p'} dx \right)^{1/p'} \\
 &= \left( \int_A |1 - \theta^\eta|^{p'} |(\Phi\varphi) \circ T^{-1}|^{p'} |\det D(T^{-1})| dx \right)^{1/p'} \\
 &\leq \|\det D(T^{-1})\|_{L^\infty(A)}^{1/p'} \left( \int_A |1 - \theta^\eta|^{p'} |(\Phi\varphi) \circ T^{-1}|^{p'} dx \right)^{1/p'} \\
 &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\det D(T^{-1})\|_{L^\infty(A)}^{1/p'} \|1 - \theta^\eta\|_{L^s(A)} \|(\Phi\varphi) \circ T^{-1}\|_{L^{q'}(A)}.
 \end{aligned}$$

Sea  $A^\eta = \{x \in A \mid 0 < x_N < \eta\}$ , entonces  $\theta^\eta < 1$  en  $A^\eta$  y  $\theta^\eta = 1$  fuera de  $A^\eta$ . Se sigue que

$$\begin{aligned}
 \|1 - \theta^\eta\|_{L^s(A)} &\leq \|1\|_{L^s(A^\eta)} \\
 &= |A^\eta|^{1/s} \\
 &\leq C_A \eta^{1/s},
 \end{aligned}$$

ya que  $|A^\eta| \leq \eta \text{radio}(B)$ . Por lo tanto se cumple

$$\begin{aligned}
 \|(1 - \theta^\eta \circ T)\Phi\varphi\|_{L^{p'}(\alpha)} &\leq C_T C_A \eta^{1/s} \|(\Phi\varphi) \circ T^{-1}\|_{L^{q'}(A)} \\
 &\leq C \eta^{1/s} \|\varphi\|_{L^{q'}(\Omega)},
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

donde  $C$  depende solo de  $T$  y  $A$ , además por suposición  $\|\Phi\|_{L^\infty} \leq 1$ . Similarmente, para  $1 \leq k \leq N$ , se cumple

$$\begin{aligned}
 \left\| (1 - \theta^\eta \circ T) \frac{\partial(\Phi\varphi)}{\partial x_k} \right\|_{L^{p'}(\alpha)} &\leq C_A \eta^{1/s} C_T \left\| \frac{\partial(\Phi\varphi)}{\partial x_k} \right\|_{L^{p'}(\alpha)} \\
 &\leq C \eta^{1/s} \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

donde  $C$  depende solo de  $T$ ,  $A$  y  $\Phi$ .

Finalmente, como  $\theta^\eta$  solo depende de  $x_N$ , se cumple que

$$\frac{\partial(\theta^\eta \circ T)}{\partial x_N} = \left( \frac{\partial\theta^\eta}{\partial x_N} \circ T \right) \frac{\partial T}{\partial x_N}$$

en  $A^\eta$ , ya que  $\frac{\partial\theta^\eta}{\partial x_N} = 0$ , se anula fuera de  $A^\eta$ . De nuevo cambiando las variables

de integración y aplicando Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial(\theta^n \circ T)}{\partial x_N} \Phi \varphi \right\|_{L^{p'}(\alpha)} &= \left( \int_{\alpha} \left| \frac{\partial(\theta^n \circ T)}{\partial x_N} \Phi \varphi \right|^{p'} dx \right)^{1/p'} \\
 &= \left( \int_{A^n} \left| \frac{\partial \theta^n}{\partial x_N} \left( \frac{\partial T}{\partial x_N} \right) \circ T^{-1}(\Phi \varphi) \circ T^{-1} \right|^{p'} |\det D(T^{-1})| dx \right)^{1/p'} \\
 &\leq \| \det D(T^{-1}) \|_{L^\infty(A)}^{1/p'} \left\| \left( \frac{\partial T}{\partial x_N} \right) \circ T^{-1} \right\|_{L^\infty(A)} \left( \int_{A^n} \left| \frac{\partial \theta^n}{\partial x_N} (\Phi \varphi) \circ T^{-1} \right|^{p'} dx \right)^{1/p'} \\
 &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \| \det D(T^{-1}) \|_{L^\infty(A)}^{1/p'} \left\| \left( \frac{\partial T}{\partial x_N} \right) \circ T^{-1} \right\|_{L^\infty(A)} \left\| \frac{\partial \theta^n}{\partial x_N} \right\|_{L^s(A)} \left\| (\Phi \varphi) \circ T^{-1} \right\|_{L^{q'}(A^n)}
 \end{aligned}$$

Luego de la definición de  $\theta^n$  se sigue que

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial \theta^n}{\partial x_N} \right\|_{L^s(A)} &\leq \frac{2}{\eta} C |A^n|^{1/s} \\
 &\leq \frac{2}{\eta} C_A \eta^{1/s}.
 \end{aligned}$$

Sea  $g := (\Phi \varphi) \circ T^{-1}$  en  $W_0^{1,q'}(A)$ , luego por la desigualdad de Poincaré

$$\begin{aligned}
 \|g\|_{L^{q'}(A^n)} &\leq \eta C \sum_{l=1}^k \left\| \frac{\partial g}{\partial x_l} \right\|_{L^{q'}(A)} \\
 &\leq \eta C \sum_{l=1}^k \left\| \frac{\partial(\Phi \varphi)}{\partial x_l} \circ T^{-1} \right\|_{L^{q'}(A)} \left\| \frac{\partial(T^{-1})}{\partial x_l} \right\|_{L^\infty(A)} \\
 &\leq \eta C_T \sum_{l=1}^k \left\| \frac{\partial(\Phi \varphi)}{\partial x_l} \right\|_{L^{q'}(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Entonces para  $1 \leq k \leq N$  se cumple que

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial(\theta^n \circ T)}{\partial x_N} \Phi \varphi \right\|_{L^{p'}(\alpha)} &\leq \frac{2}{\eta} C_A \eta^{1/s} \eta C_T \sum_{l=1}^k \left\| \frac{\partial(\Phi \varphi)}{\partial x_l} \right\|_{L^{q'}(\alpha)} \\
 &\leq C \eta^{1/s} \left\| \frac{\partial(\Phi \varphi)}{\partial x_l} \right\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}, \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

donde  $C$  solo depende de  $T$ ,  $A$  y  $\Phi$ . Entonces (A.11)-(A.14) implican (A.10), con lo que se termina la prueba.  $\square$

**Teorema A.0.4** (Murat). [13, Teo. 2.3.4] Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio abierto y  $1 < p < +\infty$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Sea  $\{f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  una sucesión en  $W^{-1,p}(\Omega)$  que satisface

$$f^\varepsilon \rightharpoonup f^0 \quad \text{débilmente en } W^{-1,p}(\Omega), \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \tag{A.15}$$

y para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\varphi \geq 0$ , se cumple que

$$\langle f^\varepsilon, \varphi \rangle \geq 0, \quad (\text{A.16})$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el par dual entre  $W^{-1,p}$  y  $W_0^{1,p'}$ . Entonces para toda  $q < p$

$$f^\varepsilon \rightarrow f^0 \quad \text{fuertemente en } W_{loc}^{-1,q}(\Omega) \quad (\text{A.17})$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Si además  $\Omega$  es acotado con frontera  $\partial\Omega$  Lipschitz tenemos para toda  $q < p$  que

$$f^\varepsilon \rightarrow f^0 \quad \text{fuertemente en } W^{-1,q}(\Omega), \quad (\text{A.18})$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Demostración.* 1. Afirmamos que para cualquier  $K$  subconjunto compactamente contenido en  $\Omega$ ,  $K \subset\subset \Omega$ , existe  $C_k$  tal que para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  con  $\text{sop } \varphi \subset K$  se cumple para toda  $\varepsilon > 0$

$$\left| \langle f^\varepsilon, \varphi \rangle \right| \leq C_K \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (\text{A.19})$$

Prueba. Sea  $K \subset\subset \Omega$  fijo, entonces existe una función  $\Psi_K$  tal que  $\Psi_K \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\Psi_K \equiv 1$  sobre  $K$  y  $\Psi_K \geq 0$  en  $\Omega$ . Entonces para cada  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  con  $\text{sop } \varphi \subset K$  se cumple

$$-\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Psi_K(x) \leq \varphi(x) \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Psi_K(x) \quad \text{en } \Omega.$$

Luego

$$0 \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Psi_K(x) + \varphi(x) \quad \text{en } \Omega$$

y

$$0 \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Psi_K(x) - \varphi(x) \quad \text{en } \Omega.$$

Entonces por hipótesis

$$\langle f^\varepsilon, \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Psi_K - \varphi \rangle \geq 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\langle f^\varepsilon, \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Psi_K + \varphi \rangle \geq 0. \quad (\text{A.21})$$

Como  $\{f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  es débilmente convergente en  $W^{-1,p}(\Omega)$ , en particular es acotada en  $W^{-1,p}(\Omega)$  y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \left| \langle f^\varepsilon, \varphi \rangle \right| &= \begin{cases} -\langle f^\varepsilon, \varphi \rangle & \text{si } \langle f^\varepsilon, \varphi \rangle < 0 \\ \langle f^\varepsilon, \varphi \rangle & \text{si } \langle f^\varepsilon, \varphi \rangle \geq 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -\langle f^\varepsilon, \varphi + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \Psi_K \rangle + \langle f^\varepsilon, \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \Psi_K \rangle & \text{si } \langle f^\varepsilon, \varphi \rangle < 0 \\ \langle f^\varepsilon, \varphi - \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \Psi_K \rangle + \langle f^\varepsilon, \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \Psi_K \rangle & \text{si } \langle f^\varepsilon, \varphi \rangle \geq 0 \end{cases} \\
 &\leq \begin{cases} -\langle f^\varepsilon, \varphi + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \Psi_K \rangle + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \langle f^\varepsilon, \Psi_K \rangle & \text{si } \langle f^\varepsilon, \varphi \rangle < 0 \\ -\langle f^\varepsilon, -\varphi + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \Psi_K \rangle + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \langle f^\varepsilon, \Psi_K \rangle & \text{si } \langle f^\varepsilon, \varphi \rangle \geq 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{(A.20), (A.21)}{\leq} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \langle f^\varepsilon, \Psi_K \rangle \\
 &\leq C_K \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}
 \end{aligned}$$

2. Supongamos que  $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  y  $\Omega' \subset \Omega$  es un dominio acotado tal que  $\text{sop } \Psi \subset \Omega'$ . Si  $\Omega$  es acotado elegimos  $\Omega' = \Omega$ . De (A.19) vemos que para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\varphi \geq 0$ , se cumple

$$\begin{aligned}
 \left| \langle \Psi f^\varepsilon, \varphi \rangle \right| &= \left| \langle f^\varepsilon, \Psi \varphi \rangle \right| \\
 &\stackrel{(A.19)}{\leq} C_K \|\Psi \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &= M \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)},
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

donde  $K = \text{sop } \varphi$  y  $M$  no depende de  $\varphi$ . Luego  $\Psi f^\varepsilon$  es acotada en  $W^{-1,p}(\Omega)$  y por lo tanto para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi(f^\varepsilon - f^0), \varphi \rangle &= \langle f^\varepsilon - f^0, \Psi \varphi \rangle \\
 &\stackrel{(A.15)}{\rightarrow} 0
 \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\Psi f^\varepsilon \rightharpoonup \Psi f^0 \quad \text{débilmente en } W^{-1,p}(\Omega), \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \tag{A.23}$$

Recordamos que  $C_0(\bar{\Omega}')$  es un espacio de Banach con la norma  $\|\cdot\|_{L^\infty(\bar{\Omega}')}$ , entonces por (A.22)

$$\Psi f^\varepsilon \quad \text{es acotada en } \left(C_0(\bar{\Omega}')\right)' \tag{A.24}$$

3. Por el Teorema de Rellich-Kondrachov [1, pag. 167], para  $r > N$  la inyección

$$W_0^{1,r}(\Omega') \hookrightarrow C_0(\bar{\Omega}')$$

es compacta. Entonces por el Principio de dualidad [15, Teo. 4.19] la inyección

$$\left(C_0(\bar{\Omega}')\right)' \hookrightarrow W_0^{-1,r'}(\Omega')$$

es compacta para  $1 \leq r' = \frac{r}{r-1} \leq \frac{N}{N-1}$ . Luego por (A.24) se sigue, tomando una subsucesión, que para  $1 \leq r' \leq \frac{N}{N-1}$  se cumple que

$$\Phi f^\epsilon \rightarrow \Phi f^0 \quad \text{fuertemente en } W_0^{-1,r'}(\Omega') \quad (\text{A.25})$$

cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

4. Por el Teorema de interpolación [1, pag. 27] tenemos que para  $0 < \theta < 1$ ,  $1 < p_0, p_1 < +\infty$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$  se cumple que

$$\left( W^{-1,p_0}(\mathbb{R}^N), W^{-1,p_1}(\mathbb{R}^N) \right)_{\theta,q} = W^{-1,q}(\mathbb{R}^N).$$

Luego si  $\varphi \in W^{-1,p_0}(\mathbb{R}^N) \cap W^{-1,p_1}(\mathbb{R}^N)$ , entonces  $\varphi \in W^{-1,q}(\mathbb{R}^N)$  y

$$\|\varphi\|_{W^{-1,q}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\varphi\|_{W^{-1,p_0}(\mathbb{R}^N)}^{1-\theta} \|\varphi\|_{W^{-1,p_1}(\mathbb{R}^N)}^\theta. \quad (\text{A.26})$$

Sean  $p_0 = p$ ,  $p_1 = r'$ ,  $1 < r < \frac{N}{N-1}$  y ponemos  $\Psi f^\epsilon \equiv 0$  fuera de  $\Omega'$ . Entonces para toda  $1 < q < p$ , (A.26) implica que

$$\|\Phi f^\epsilon - \Phi f^0\|_{W^{-1,q}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\Phi f^\epsilon - \Phi f^0\|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)}^{1-\theta} \|\Phi f^\epsilon - \Phi f^0\|_{W^{-1,r'}(\mathbb{R}^N)}^\theta.$$

Se sigue por (A.23) y (A.25) que (A.17) se satisface.

5. Para  $\eta > 0$  suficientemente pequeña sea  $\psi^\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$  la función obtenida en el Lema anterior. Luego para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  se cumple que

$$\begin{aligned} \left| \left\langle (1 - \psi^\eta) f^\epsilon, \varphi \right\rangle \right| &= \left| \left\langle f^\epsilon, (1 - \psi^\eta) \varphi \right\rangle \right| \\ &\leq \|f^\epsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|(1 - \psi^\eta) \varphi\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)} \\ &\leq \eta \|f^\epsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \|\varphi\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)} \end{aligned}$$

para  $q' > p'$ , luego

$$\|(1 - \psi^\eta) f^\epsilon\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq \eta \|f^\epsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.$$

Para  $\eta$  fijo, de (A.17), se cumple para toda  $p > q$  que

$$\begin{aligned} \|\psi^\eta f^\epsilon - \psi^\eta f^0\|_{W^{-1,q}(\Omega)} &\leq C \|\psi^\eta\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|f^\epsilon - f^0\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , donde  $\Omega' = \text{sop } \psi^\eta$ . Por lo tanto para toda  $p > q$

$$\psi^\eta f^\epsilon \rightarrow \psi^\eta f^0 \quad \text{fuertemente en } W^{-1,q}(\Omega)$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Luego para toda  $q < p$

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon - f^0\|_{W^{-1,q}(\Omega)} &\leq \|\psi^\eta f^\varepsilon - \psi^\eta f^0\|_{W^{-1,q}(\Omega)} + \|(1 - \psi^\eta)f^\varepsilon - (1 - \psi^\eta)f^0\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \\ &\leq \|\psi^\eta f^\varepsilon - \psi^\eta f^0\|_{W^{-1,q}(\Omega)} + \eta \|f^\varepsilon\|_{W^{-1,p}(\Omega)} + \eta \|f^0\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $\eta \rightarrow 0$ . Se sigue que para toda  $q < p$

$$f^\varepsilon \rightarrow f^0 \quad \text{fuertemente en } W^{-1,q}(\Omega)$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

□



# Apéndice B

## Medidas de Radón

**Definición B.0.5.** Una sucesión  $\{\mu_n\}$  en el espacio de las medidas de Radón,  $\mathcal{M}(R_L)$ , sobre  $R_L$  es débil\* convergente a  $\mu \in \mathcal{M}(R_L)$ , denotado por

$$\mu_n \xrightarrow{*} \mu \quad \text{en} \quad \mathcal{M}(R_L), \quad (\text{B.1})$$

si para toda  $f \in C_0(R_L)$  se cumple que

$$\int_{R_L} f d\mu_n \rightarrow \int_{R_L} f d\mu \quad (\text{B.2})$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema B.0.6** (Portmanteu). *Sea  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión medidas de probabilidad sobre  $R_L$  y  $\mu$  una medida de probabilidad sobre  $R_L$  tal que  $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ . Entonces se cumple que*

$$\begin{aligned} \limsup_n \mu_n(F) &\leq \mu(F), & \text{para todo cerrado } F \subset R_L \text{ y} \\ \liminf_n \mu_n(F) &\geq \mu(F), & \text{para todo abierto } F \subset R_L. \end{aligned}$$

*Demostración.* 1. Sea  $F$  un conjunto cerrado en  $R_L$ . Introducimos la función  $f_k(x) := h_k(d(x, F))$ , donde  $h_k : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  está dada por

$$h_k(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = 0 \\ 1 - ky & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{1}{k} \\ 0 & \text{si } y \geq \frac{1}{k} \end{cases} .$$

Como  $h_k$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$  y la función distancia es uniformemente continua en  $R_L$ , tenemos que  $f_k$  es uniformemente continua en  $R_L$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ .

2. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  el conjunto  $F_k = \left\{x \in R_L \mid d(x, F) \leq \frac{1}{k}\right\}$  es cerrado, y se cumple  $\chi_F \leq f_k \leq \chi_{F_k}$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \limsup_n \mu_n(F) &= \lim_n \int \chi_F d\mu_n \\ &\leq \lim_n \int f_k d\mu_n \\ &= \int f_k d\mu \\ &\leq \mu(F_k), \end{aligned}$$

para toda  $k$  en  $\mathbb{N}$ . Luego como  $F_k \supset F_{k+1}$ ,  $\bigcap_k F_k = F$  y  $\mu$  es una medida de probabilidad entonces, cuando  $k \rightarrow \infty$  se tiene que

$$\limsup_n \mu_n(F) = \mu(F).$$

Tomando complementos obtenemos la segunda desigualdad. □

**Teorema B.0.7** (Prohorov). *Sea  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de medidas de probabilidad sobre  $R_L$  que satisface que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto compacto  $K$  tal que*

$$\sup_n \mu_n(K^c) \leq \varepsilon.$$

*Entonces  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene una subsucesión débil\* convergente.*

*Demostración.* Sea  $Q := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap R_L$ , luego  $Q$  es denso y numerable en  $R_L$ , sea  $\{\bar{q}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una enumeración de  $Q$ . Como todas las  $\mu_n$  son medidas de probabilidad, la sucesión  $\{F_n(\bar{q}_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde

$$F_n(x_1, x_2) = \mu_n((0, x_1] \times (0, x_2]), \tag{B.3}$$

es acotada. Luego esta admite una subsucesión convergente, denotamos sus índices como  $n_{1,k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . La sucesión  $\{F_{n_{1,k}}(\bar{q}_2)\}_{k \in \mathbb{N}}$  también es acotada, por lo que podemos extraer una subsucesión convergente, denotamos sus índices por  $n_{2,k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , se sigue que la sucesión  $\{F_{n_{2,k}}(\bar{q}_2)\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge cuando  $k \rightarrow \infty$ . Repitiendo este procedimiento para cada elemento de  $Q$ , llegamos a una sucesión de sucesiones crecientes de enteros  $n_{i,k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , con la propiedad de que  $n_{i+1,k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  es una subsucesión de  $n_{i,k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  y que  $F_{n_{i,k}}(\bar{q}_j)$  converge para cada  $j \leq i$ .

Por lo tanto la sucesión diagonal  $m_k = n_{k,k}$ , es una subsucesión de cada  $n_{i,k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Entonces definimos una función  $\tilde{F} : Q \rightarrow [0, 1]$  como sigue

$$\tilde{F}(\bar{q}) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{m_k}(\bar{q}).$$

Como cada  $F_n$  es no-decreciente,  $\tilde{F}$  es no-decreciente y la función

$$F(x) = \inf_{\substack{q=(p_1, p_2) \\ \bar{q} \in Q, x_1 < p_1, x_2 < p_2}} \tilde{F}(q),$$

es no-decreciente, por construcción continua por la derecha y con valores en  $[0, 1]$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Por hipótesis existen  $m_1, m_2, n_1$  y  $n_2$  tales que

$$F_n \left( ([n_1, m_1] \times [n_2, m_2])^c \right) < \varepsilon$$

para toda  $n$  simultáneamente. Por lo tanto

$$F_n(x_1, x_2) \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad x_1 < n_1 \quad \text{y} \quad x_2 < n_2$$

y

$$F_n(x_1, x_2) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{si} \quad x_1 \geq m_1 \quad \text{y} \quad x_2 \geq m_2;$$

luego tenemos lo mismo para  $\tilde{F}$  y finalmente

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &\leq \varepsilon & \text{si} & \quad x_1 < n_1 \quad \text{y} \quad x_2 < n_2 \\ F(x_1, x_2) &\geq 1 - \varepsilon & \text{si} & \quad x_1 \geq m_1 \quad \text{y} \quad x_2 \geq m_2. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Ya que  $0 \leq F \leq 1$ ,  $F$  es continua por la derecha y no-decreciente, la propiedad (B.4) dice que  $F$  es una función de distribución, correspondiente a una medida de probabilidad  $\mu$  sobre  $R_L$ . Finalmente, supongamos que  $\bar{x}$  es tal que  $F(\bar{x}^-) = F(\bar{x})$ . Luego para  $\varepsilon > 0$ , existen  $\bar{y} = (y_1, y_2)$  y  $\bar{z} = (z_1, z_2)$  en  $Q$  tales que  $y_1 < z_1, y_2 < z_2$  y

$$F(\bar{x}) - \varepsilon \leq G(\bar{y}) \leq F(\bar{x}) \leq G(\bar{z}) \leq F(\bar{x}) + \varepsilon.$$

Por lo tanto para  $k$  suficientemente grande

$$F(\bar{x}) - 2\varepsilon \leq F_{n_k}(\bar{y}) \leq F_{n_k}(\bar{x}) \leq F_{n_k}(\bar{z}) \leq F(\bar{x}) + 2\varepsilon. \tag{B.5}$$

Las desigualdades en (B.5) dan que

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) - 2\varepsilon &\leq F(\bar{y}) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(\bar{x}) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(\bar{x}) \\ &\leq F(\bar{z}) \\ &\leq F(\bar{x}) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

Luego  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(\bar{x}) = F(\bar{x})$ . Entonces  $\mu_{n_k}$  converge débil-\* a  $\mu$  por el Teorema 18.4 de [6]. □

Para mas detalles veanse [6, Capítulo 18], [3, Capítulo 1] y [5, Capítulo 1].



# Apéndice C

## Espacio $H^{1/2}$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función periódica con periodo uno. Su expansión en serie de Fourier es

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{2\pi i k x}.$$

Recordamos (ver por ejemplo [14] y [4]) que para algún número real  $s \geq 0$ , decimos que  $f \in H^s$  si

$$\|f\|_{H^s} := \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |2\pi k|^2)^s |\hat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} < \infty. \quad (\text{C.1})$$

Dado que las funciones que nos interesan se encuentran en  $H^1$ , el espacio  $H^{1/2}$  es importante ya que es aquí en donde se encuentra la traza de las funciones de  $H^1$  (ver por ejemplo [14] y [4]). De hecho estaremos enfocados a las clases de funciones en el espacio

$$H^{1/2}/\mathbb{R} := \{f + \mathbb{R} \mid f \in H^{1/2}\}$$

Además tenemos que la siguiente función

$$\|f\|_{1/2} := \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| |\hat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{C.2})$$

es una norma para  $H^{1/2}/\mathbb{R}$ . También se cumple que

$$\min_{\substack{u=f \text{ en } x=0 \\ u(x,0)=u(x,1)-\infty}} \int_0^1 \int_0^1 u_x^2 + u_y^2 dy dx = 2\pi \|f\|_{1/2}^2. \quad (\text{C.3})$$

Para comprobarlo observemos que el minimizador tiene que satisfacer que  $\Delta u = 0$  y como  $u$  es  $y$ -periódica, podemos expresar a  $u$  como

$$u(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(x) e^{2\pi i k y} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(0) e^{2\pi i k y} \\ &= f(y) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = \Delta u(x, y) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (g_k)_{xx} e^{2\pi i k y} + (2\pi i k)^2 g_k e^{2\pi i k y} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( (g_k)_{xx} - (2\pi k)^2 g_k \right) e^{2\pi i k y} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Entonces por (C.5) y (C.6) se cumple

$$\begin{cases} (g_k)_{xx} - (2\pi k)^2 g_k = 0, \\ g_k(0) = \hat{f}(k). \end{cases}$$

Por lo tanto

$$g_k = e^{2\pi |k|x} \hat{f}(k).$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \int_0^1 u_x^2 + u_y^2 dy dx &= \int_{-\infty}^0 \int_0^1 |Du|^2 dy dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 2 \left| e^{2\pi |k|x} (2\pi k)^2 \hat{f}(k) \right|^2 dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2 |\hat{f}(k)|^2 \pi |k| \int_{-\infty}^0 4\pi |k| e^{4\pi |k|x} dx \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| |\hat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi \|f\|_{1/2}^2. \end{aligned}$$

Por otra parte sabemos que el mapeo de  $u \mapsto u|_{x=0}$  de  $H^1(R_L)$  a  $H^{1/2}(0, 1)$  es lineal y continuo. Luego si tomamos  $\{u_k\}$  una sucesión en  $H^1(R_L)$  tal que

$$u_k \rightharpoonup u \quad (\text{C.7})$$

tenemos que

$$u_k|_{x=0} \rightharpoonup u|_{x=0} \quad \text{en} \quad H^{1/2}(0, 1). \quad (\text{C.8})$$

Finalmente recordamos la desigualdad de interpolación

$$\|f\|_{1/2}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2} \|f'\|_{L^2}. \quad (\text{C.9})$$

que se cumple por la desigualdad de Cauchy, es decir

$$\begin{aligned} \|f\|_{1/2}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| |\hat{f}(k)|^2 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |2\pi k|^2 |\hat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{\text{Parseval}}{=} \frac{1}{2\pi} \|f'\|_{L^2} \|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$



# Bibliografía

- [1] Adams, Robert A. *Sobolev spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press, New York-London, 1975. xviii+268 pp.
- [2] Bhattacharya, Kaushik. *Microstructure of martensite. Why it forms and how it gives rise to the shape-memory effect*. *Oxford Series on Materials Modelling*. Oxford University Press, Oxford, 2003. xii+288 pp.
- [3] Billingsley, Patrick *Convergence of probability measures*. Second edition. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1999. x+277 pp.
- [4] Evans, Lawrence C. *Partial differential equations*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. xxii+749 pp.
- [5] Evans, Lawrence C.(1-MD) *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 74. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. viii+80 pp.
- [6] Jacod, Jean; Protter, Philip *Probability essentials*. Second edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003. x+254 pp.
- [7] A. Capella-Kort and F. Otto, *A rigidity result for a perturbation of the geometrically linear three-well problem*, *Comm. Pure Applied Math.* 62 (12) (2009), no. 12, 1632-1669.
- [8] Kohn, Robert. *Energy-driven pattern formation*, International Congress of Mathematicians. Vol I, 359-383, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [9] Kohn, R., and Müller, S., *Branching of twins near an austenite-twinned-martensite interface*, *Phil. Mag. A* 66, 1992, pp. 697-715.
- [10] Kohn, R., and Müller, S., *Surface Energy and Microstructure in Coherent Phase Transitions*, *Comm on Pure and Applied Mathematics*, Vol. XLVII, pp. 405-435 (1994).

- [11] Stefan Müller, *Variational models for microstructure and phase transitions*, Lectures notes no.:2, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig, Germany, pp. 105.
- [12] Modica and St. Mortola, *Un esempio di  $\Gamma$ -convergenza*, Boll. U.M.I. (5), 14-B (1997), pp. 285-299
- [13] Yunguang Lu, *Hyperbolic conservation laws and the compensated compactness method*, Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 128, New York, ISBN 1-58488-238-7, xii+241 pp.
- [14] Salsa, Sandro, *Partial differential equations in action. From modelling to theory*. Universitext. Springer-Verlag Italia, Milan, 2008. xvi+556 pp.
- [15] Rudin, Walter, *Functional Analysis*. Second Edition. McGraw-Hill, Inc. New York. International series in pure and applied mathematics. ISBN 0-07-054236-8, xviii+424 pp.
- [16] Willem, Michel, *Minimax theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996. x+162 pp.