

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS



## Los Sistemas Integrables $H_3$ y $H_4$

---

# T E S I S

que para obtener el grado de:  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

presenta  
Marcos Alejandro García García

DIRECCIÓN  
Dr. Alexander Turbiner Rosenbaum

COMITÉ TUTORAL  
Dr. Juan Carlos López Vieyra  
Dr. Antonmaría Minzoni Alessio

---

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, 2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Resumen

El propósito de esta tesis es el estudio de los sistemas cuánticos integrables  $H_3$  y  $H_4$ , los cuales surgen como una extensión natural del Método de Reducción Hamiltoniana. Estos sistemas no-relativistas con potenciales racionales están relacionados con los sistemas de raíces no-cristalográficos  $H_3$  y  $H_4$ . Pocos resultados se conocen para estos sistemas. Se muestra que ambos sistemas son exactamente solubles, su espectro y una integral de movimiento se hallan explícitamente. El hamiltoniano (tras una rotación de norma con la función del estado base como factor), escrito en términos de los invariantes de los grupos de Coxeter  $H_3$  y  $H_4$ , respectivamente, tiene una forma algebraica: tiene coeficientes polinomiales en frente de las derivadas. Se encuentra que cada hamiltoniano posee una infinidad de subespacios invariantes de dimensión finita, los cuales forman flags con vectores característicos  $\alpha=(1,2,3)$  ( $H_3$ ) y  $\alpha=(1,5,8,12)$  ( $H_4$ ). Estos espacios, a su vez, son espacios de representación de un álgebra escondida de operadores diferenciales, caracterizados por una propiedad de descomposición de Gauss generalizada. La estructura de estas álgebras se explora. La generalización cuasi-exactamente-soluble de ambos modelos es obtenida. Modelos integrables discretos isoespectrales a los modelos  $H_3$  y  $H_4$  se definen en el espacio de invariantes respectivo.

## Abstract

The purpose of this thesis is the study of the quantum  $H_3$  and  $H_4$  integrable systems, which emerge as a natural extension of the Hamiltonian Reduction Method. These non-relativistic systems with rational potentials are related to the noncrystallographic root systems  $H_3$  and  $H_4$ . Limited results are known for these systems. It is shown that both systems are exactly solvable, their spectra and one of the integrals of motion are found explicitly. The gauge-rotated Hamiltonian with the ground state eigenfunction, when written in terms of the invariants of the Coxeter groups  $H_3$  and  $H_4$ , respectively, is in algebraic form: it has polynomial coefficients in front of derivatives. It is found that each Hamiltonian has infinitely-many finite-dimensional invariant subspaces in polynomials, which form flags with characteristic vectors  $\alpha=(1,2,3)$  ( $H_3$ ) and  $\alpha=(1,5,8,12)$  ( $H_4$ ). These spaces are in turn representation spaces of a hidden algebra of differential operators, characterized by a generalized Gauss decomposition property. The structure of these algebras is explored. Quasi-exactly-solvable generalization of both models is derived. Discrete integrable models isospectral to the  $H_3$  and  $H_4$  models are defined in the respective space of invariants.

Agradezco a cada uno de los miembros del jurado

- Dr. Alexander Turbiner Rosenbaum
- Dr. José David Vergara Oliver
- Dr. Nikolai L. Vasilevski
- Dr. José Antonio de la Peña Mena
- Dr. Pavel Winternitz

y a

- Dr. Juan Carlos López Vieyra
- Antonmaria Minzoni Alessio

por sus comentarios, los que sin duda mejoraron el presente estudio. En particular a los doctores Alexander Turbiner Rosenbaum y Juan Carlos López Vieyra, por el apoyo constante que me han dado a lo largo de la licenciatura, la maestría y ahora el doctorado.

*A mi familia  
Por todo su cariño y apoyo*

*A Lici  
Por enriquecer y alegrar mi vida*

# Índice General

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| Hamiltonianos asociados con sistemas de raíces (caso racional) . . .      | 6         |
| <b>I El sistema integrable <math>H_3</math></b>                           | <b>11</b> |
| <b>1. El hamiltoniano <math>H_3</math> (solubilidad e integrabilidad)</b> | <b>12</b> |
| 1.1. El hamiltoniano . . . . .  | 12        |
| 1.2. Separación de variables e integral de movimiento . . . . .           | 15        |
| 1.3. Estado base . . . . .  | 17        |
| 1.4. Variables invariantes . . . . .                                      | 19        |
| <b>2. Representación algebraica</b>                                       | <b>22</b> |
| 2.1. El hamiltoniano $H_3$ en forma algebraica . . . . .                  | 22        |
| 2.2. Integral de movimiento en forma algebraica . . . . .                 | 27        |
| <b>3. Espectro</b>  | <b>29</b> |
| 3.1. Autovalores . . . . .  | 29        |
| 3.2. Funciones propias y sus nodos . . . . .                              | 30        |
| 3.3. Teoría de perturbaciones . . . . .                                   | 40        |
| <b>4. El sistema discreto <math>H_3</math></b>                            | <b>42</b> |
| 4.1. Discretización canónica . . . . .                                    | 42        |
| 4.2. El hamiltoniano discreto . . . . .                                   | 45        |
| 4.3. Integral discreta . . . . .  | 50        |
| <b>5. Generalización cuasi-exactamente soluble</b>                        | <b>53</b> |
| 5.1. Autofunciones radiales . . . . .                                     | 53        |
| 5.2. Hamiltoniano cuasi-exactamente soluble . . . . .                     | 54        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>6. El álgebra escondida <math>h^{(3)}</math></b>                       | <b>57</b>  |
| 6.1. Operadores generadores . . . . .                                     | 57         |
| 6.2. Estructura y relaciones de conmutación . . . . .                     | 59         |
| 6.3. Representación algebraica de $H_3$ . . . . .                         | 61         |
| <br>  |            |
| <b>II El sistema integrable <math>H_4</math></b>                          | <b>63</b>  |
| <br>  |            |
| <b>7. El hamiltoniano <math>H_4</math> (solubilidad e integrabilidad)</b> | <b>64</b>  |
| 7.1. El hamiltoniano . . . . .  | 64         |
| 7.2. Separación de variables e integral de movimiento . . . . .           | 67         |
| 7.3. Estado base . . . . .  | 69         |
| 7.4. Variables invariantes . . . . .                                      | 70         |
| <br>  |            |
| <b>8. Representación algebraica</b>                                       | <b>72</b>  |
| 8.1. El hamiltoniano $H_4$ en forma algebraica . . . . .                  | 72         |
| 8.2. Integral de movimiento en forma algebraica . . . . .                 | 79         |
| <br>  |            |
| <b>9. Espectro</b>  | <b>81</b>  |
| 9.1. Autovalores . . . . .  | 81         |
| 9.2. Autofunciones . . . . .  | 82         |
| <br>  |            |
| <b>10.El sistema discreto <math>H_4</math></b>                            | <b>86</b>  |
| 10.1. Discretización canónica . . . . .                                   | 86         |
| 10.2. El hamiltoniano discreto . . . . .                                  | 87         |
| 10.3. Integral discreta . . . . .   | 92         |
| <br>  |            |
| <b>11.Generalización cuasi-exactamente soluble</b>                        | <b>97</b>  |
| 11.1. Autofunciones radiales . . . . .                                    | 97         |
| 11.2. Hamiltoniano cuasi-exactamente soluble . . . . .                    | 98         |
| <br>  |            |
| <b>12.El álgebra escondida <math>h^{(4)}</math></b>                       | <b>101</b> |
| 12.1. Operadores generadores . . . . .                                    | 101        |
| 12.2. Estructura y relaciones de conmutación . . . . .                    | 106        |
| 12.3. Representación algebraica de $H_4$ . . . . .                        | 110        |
| <br>  |            |
| <b>Conclusión</b>   | <b>112</b> |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Apéndices</b>   | <b>115</b> |
| <b>A. Antecedentes matemáticos</b>                             | <b>115</b> |
| A.1. Sistemas de raíces . . . . .                              | 115        |
| A.1.1. Grupos generados por reflexiones y sistemas de raíces . | 115        |
| A.1.2. Clasificación de los sistemas de raíces . . . . .       | 119        |
| A.2. El sistema de tipo $H_3$ . . . . .                        | 122        |
| A.2.1. Representación unitaria del grupo $H_3$ . . . . .       | 127        |
| A.3. El sistema de tipo $H_4$ . . . . .                        | 128        |
| <b>B. Relaciones de conmutación para <math>h^{(3)}</math></b>  | <b>133</b> |
| <b>C. Relaciones de conmutación para <math>h^{(4)}</math></b>  | <b>144</b> |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>168</b> |



# Introducción

En la década de 1970 Olshanetsky y Perelomov desarrollaron el Método de Reducción Hamiltoniana, conocido posteriormente como el Método de Proyección [1]. Este método provee una oportunidad de construir hamiltonianos mecánico-cuánticos (y clásicos) multidimensionales no triviales con la propiedad de ser completamente integrables. Los hamiltonianos están asociados con los espacios de raíces de las álgebras de Lie clásicas ( $A_n, B_n, C_n, D_n$ ) y excepcionales ( $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$ ), los cuales constituyen la totalidad de los sistemas cristalográficos. Los potenciales que aparecen en el hamiltoniano, escrito en coordenadas cartesianas, tienen la forma de funciones racionales, trigonométricas, hiperbólicas o elípticas. A partir de este punto nos referiremos a dichos sistemas como los sistemas *racionales, trigonométricos, hiperbólicos o elípticos*.

Los hamiltonianos construídos vía el Método de Reducción Hamiltoniana aparecen como partes radiales de operadores de Laplace-Beltrami en espacios simétricos. En cualquier espacio simétrico existen operadores invariantes que conmutan con las transformaciones del grupo de Lie  $G$  que define al espacio simétrico. En particular, el operador de Laplace-Beltrami es uno de los operadores invariantes. Estos operadores forman un álgebra conmutativa, así como sus partes radiales. Los operadores de orden mayor que dos se denominan las *integrales* (o *hamiltonianos mayores*) del sistema.

Los sistemas que han sido estudiados hasta ahora han resultado ser no sólo completamente integrables, sino también exactamente solubles. Esto significa que el espectro puede ser encontrado en forma analítica cerrada y las autofunciones pueden obtenerse explícitamente mediante métodos del álgebra lineal. Aún más, para todos los sistemas racionales y trigonométricos, se han encontrado representaciones algebraicas para los hamiltonianos mecánico-cuánticos

---

(donde los coeficientes enfrente de las derivadas son funciones polinomiales) (A. Turbiner et al., 1995-2011). Esto, a su vez, implica que el espectro se encuentra como un polinomio de primero/segundo grado en números cuánticos y las autofunciones pueden hallarse como elementos de ciertos espacios de polinomios preservados por los operadores hamiltonianos en su forma algebraica.

Por construcción los hamiltonianos y las integrales son invariantes con respecto a transformaciones en el grupo de Weyl. Por tanto, estos espacios de polinomios parecen ser equivalentes (isomórficos) a los espacios de invariantes del sistema de raíces correspondiente. Las formas algebraicas de los hamiltonianos están relacionadas con elementos del álgebra universal envolvente de ciertas álgebras de operadores diferenciales en dichos espacios de invariantes. Tales álgebras se denominan *álgebras escondidas* de los modelos. Sorprendentemente, para todas los modelos relacionados con las álgebras clásicas, el álgebra escondida es la misma (tanto en el caso racional como en el trigonométrico): es simplemente el álgebra  $gl_n$  (A. Turbiner et al., 1995-1998). Para los modelos relacionados con los grupos excepcionales el álgebra escondida es distinta para cada modelo. Estas álgebras escondidas son álgebras de dimensión infinita al parecer desconocidas en la literatura hasta ahora.

En el caso de los modelos racionales existe la posibilidad de construir hamiltonianos asociados con los sistemas de raíces no cristalográficos  $H_3$ ,  $H_4$  e  $I_2(m)$  (sistema diedral). Para estos modelos la invariancia está relacionada con el grupo de Coxeter correspondiente. La propiedad cristalográfica que vuelve un grupo de Coxeter en un grupo de Weyl se pierde. Sin embargo, la integrabilidad completa de los sistemas racionales  $H_3$ ,  $H_4$  e  $I_2(m)$  ha sido demostrada abstractamente en [7] utilizando el formalismo de los pares de Lax cuánticos.

El objetivo de la presente tesis es estudiar los sistemas cuánticos  $H_3$  y  $H_4$  racionales. El modelo  $H_3$  está definido en el espacio euclidiano tridimensional (físico), mientras que el modelo  $H_4$  está definido en el espacio euclidiano tetradimensional. Un análisis completo del espacio de configuración, el espectro y las funciones propias es necesario para el estudio de la solubilidad de estos sistemas. Conocemos un solo estudio previo del modelo  $H_3$  racional [5]. Éste es incompleto y algunos resultados son erróneos.

Para estudiar la solubilidad de los modelos  $H_3$  y  $H_4$  racionales seguiremos el formalismo general que ha sido desarrollado para los sistemas racionales cristalográficos [2]. Este formalismo se presenta más adelante en esta introducción.

La tesis está dividida en dos partes de seis capítulos cada una.

La primera parte está dedicada al estudio del sistema  $H_3$  racional.

En el capítulo 1 el hamiltoniano, el espacio de configuración, una integral de movimiento y la función del estado base son presentadas. Un conjunto de nuevas variables (invariantes) que da lugar a una forma algebraica para el hamiltoniano es introducido.

La representación algebraica del hamiltoniano y de la integral de movimiento en términos de los invariantes se encuentra en el capítulo 2.

En el capítulo 3 se demuestra la solubilidad exacta del hamiltoniano y se calcula su espectro. El espectro de la integral de movimiento se encuentra también. Las autofunciones del hamiltoniano se muestran y un estudio breve de sus superficies nodales se presenta.

Existe una versión discreta del hamiltoniano en el espacio de invariantes. Esta discretización se presenta en el capítulo 4.

La generalización cuasi-exactamente soluble de este sistema se desarrolla en el capítulo 5.

El capítulo 6 está dedicado al estudio del álgebra escondida. Presentamos sus operadores generadores y su estructura. La representación Lie-algebraica del hamiltoniano es encontrada.

La segunda parte se dedica al estudio del sistema  $H_4$  racional. El desarrollo es completamente paralelo al del modelo  $H_3$ .

El hamiltoniano, el espacio de configuración, una integral de movimiento y la función del estado base de  $H_4$  son presentadas en el capítulo 7.

La forma algebraica del hamiltoniano y de la integral de movimiento en términos de los invariantes del grupo  $H_4$  se obtiene en el capítulo 8.

En el capítulo 9 se muestra que el hamiltoniano es exactamente soluble y se obtiene su espectro. El espectro de la integral de movimiento se muestra también y se enlistan las autofunciones simultáneas de ambos operadores.

La discretización del hamiltoniano y de la integral en el espacio de invariantes se presentan en el capítulo 10.

La generalización cuasi-exactamente soluble de este sistema se desarrolla en

el capítulo 11.

El capítulo 12 está dedicado al estudio del álgebra escondida. Presentamos los operadores generadores y la representación Lie-algebraica del hamiltoniano.

En el apéndice A las herramientas y definiciones matemáticas que son requeridas para el estudio se presentan; en particular la introducción a los grupos  $H_3$  y  $H_4$  y sus sistemas de raíces.

El conjunto completo de relaciones de conmutación que definen al álgebra escondida del modelo  $H_3$  se presentan en el apéndice B. El apéndice C está dedicado a las relaciones de conmutación para el álgebra escondida del sistema  $H_4$ .

Prácticamente todos los resultados fueron obtenidos utilizando los programas Maple 8 y Maple 11 junto con los paquetes Coxeter y Weyl creados por J. Stembridge. Las figuras fueron creadas con Maple y Matlab.

Los resultados presentados en esta tesis ha sido publicados en los siguientes artículos:

- M.A.G. García and A.V. Turbiner, *The quantum  $H_3$  integrable system* Int. J. Mod. Phys. A **25** (2010) 5567-5594  
1007.0737v1 [math-ph]
- M.A.G. García and A.V. Turbiner, *The quantum  $H_4$  integrable system* Mod. Phys. Lett. A **26** (2011) 433-447  
1011.2127v1 [math-ph]

Estos resultados han sido también presentados en los siguientes eventos:

- Congreso de Estudiantes del Posgrado en Ciencias Físicas. Noviembre 18, 2008. Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM. Plática: *Álgebra escondida de operadores diferenciales en espacios polinomiales*.
- The XX-th International Workshop on Operator Theory and its Applications. Septiembre 22, 2009. CIMAT, Guanajuato. Plática: *The hidden algebra of the  $E_6$  integrable system*.
- 4-th FENOMECC Mini-Workshop (Selected Topics in Mathematical Physics) “Solvability and Superintegrability”. Noviembre 28, 2009. Cocoyoc, Morelos. Plática: *Solvability of the  $H_3$  integrable model*.

- 
- Seminario de Gravitación y Teoría de Campos. Febrero 11, 2010. Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM. Plática: *Solvability of the  $H_3$  integrable model*.
  - Coloquio de Matemáticas Aplicadas. Mayo 19, 2010. Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, UNAM. Plática: *The  $H_3$  integrable model*.
  - International Symposium “Symmetries in Nature”. Symposium in Memoriam Marcos Moshinsky. Agosto 10, 2010. Centro Internacional de Ciencias, Cuernavaca, Morelos. Plática: *The  $H_3$  Integrable System*.
  - International Conference “Symmetry, Separation, Super-Integrability and Special Functions ( $S^4$ ) conference”. Septiembre 17-19, 2010. University of Minnesota, EEUU. Posters: *The Quantum  $H_3$  Integrable System, The Quantum  $H_4$  Integrable System*.
  - 5-th FENOMECE Mini-Workshop (Selected Topics in Mathematical Physics) “SashaFest”. Octubre 2, 2010. Cocoyoc, Morelos. Plática: *The Quantum  $H_3$  and  $H_4$  Integrable Systems*.
  - Mathematical Physics Seminar. Octubre 12, 2010. University of Minnesota, EEUU. Plática: *The Quantum  $H_3$  Integrable System*.
  - Seminario de Física-Matemática. Enero 9, 2011. Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM. Plática: *The Quantum  $H_4$  Integrable System*.

Asimismo, durante el desarrollo de la tesis se escribieron los siguientes artículos, relacionados directamente y que comparten métodos de análisis:

- J. C. López Vieyra, M. A. G. García and A. V. Turbiner, *Sutherland-type trigonometric models, trigonometric invariants and multivariate polynomials. II.  $E_7$  case*, Mod. Phys. Letts. A **24** (2009) 1995-2004 0904.0484v1 [math-ph]
- K.G. Boreskov, A.V. Turbiner, J.C. López Vieyra and M. A. G. García, *Sutherland-type trigonometric models, trigonometric invariants and multivariate polynomials. III.  $E_8$  case*, Int. J. Mod. Phys. A (aceptado). arXiv:1012.1902 [math-ph] (2010) 39 pp.

## Hamiltonianos asociados con sistemas de raíces (caso racional)

Consideremos un sistema cuántico descrito por un hamiltoniano racional asociado con un sistema de raíces  $\mathcal{R}$  de rango  $N$ :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \omega^2 x_k^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} g_{|\alpha|} |\alpha|^2 \frac{1}{(\alpha \cdot x)^2} . \quad (1)$$

Aquí  $\alpha \in \mathcal{R}^+$  denota las raíces positivas del sistema  $\mathcal{R}$ , que son vectores en  $\mathbf{R}^N$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N)$  es un conjunto de coordenadas cartesianas,  $|\alpha|^2 = \sum_1^N \alpha_k^2$ , y el producto escalar  $(\alpha \cdot x) = \sum_1^N \alpha_k x_k$ . Se asume que las constantes de acoplamiento  $g_{|\alpha|}$  son iguales para las raíces de igual longitud. Para asegurar la existencia de estados ligados, un potencial de un oscilador armónico isotrópico  $\frac{1}{2} \sum_1^N \omega^2 x_k^2$  se añade, donde  $\omega \in \mathbf{R}$  juega el papel del parámetro de frecuencia. En general, los hamiltonianos de este tipo describen una partícula cuántica en un espacio multidimensional. Este sistema es completamente integrable para cualquier sistema cristalográfico  $\mathcal{R}$  (véase [1]).

Estamos interesados en el espectro y las autofunciones de la ecuación de Schroedinger

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\Psi_k(x) &= E_k \Psi_k(x) , \\ \Psi_k(x) &= 0 \quad \text{en } (\alpha \cdot x) = 0 , \quad \int |\Psi_k|^2 d^N x < \infty . \end{aligned} \quad (2)$$

En el caso de sistemas cristalográficos (véase p.ej. [2]) es sabido que el espacio de configuración es la cámara principal de Weyl y  $\Psi$  debe pertenecer al espacio de Hilbert correspondiente. Tales sistemas tienen las siguientes propiedades [1]:

1. El operador  $\mathcal{H}$  (1) es autoadjunto y sus autovalores  $E_k$  son reales si la siguiente desigualdad es válida:

$$g_{|\alpha|} = \nu_{|\alpha|}(\nu_{|\alpha|} - 1) > -\frac{1}{4} .$$

2. El espectro  $E_k$  es puramente discreto y positivo, estando caracterizada la energía  $E_k$  por  $N$  números enteros  $k = (k_1, \dots, k_N)$ .

3. La función del estado base tiene una forma factorizada

$$\Psi_0 = N_0(\nu) \left( \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} (\alpha \cdot x)^{\nu_{|\alpha|}} \right) \exp \left( -\frac{\omega}{2} t_2^{(\Omega)} \right), \quad (3)$$

donde  $t_2^{(\Omega)}$  es el invariante de grado dos. La energía del estado base viene dada por

$$E_0 = \omega \left( \frac{N}{2} + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \nu_{|\alpha|} \right). \quad (4)$$

La demostración de (3) y (4) está basada en un cálculo directo donde las propiedades

$$\frac{1}{2}(-\Delta + \omega^2 x^2) \exp \left( -\frac{\omega}{2} t_2^{(\Omega)} \right) = \frac{1}{2} N \omega \exp \left( -\frac{\omega}{2} t_2^{(\Omega)} \right)$$

( $t_2^{(\Omega)}$  es el invariante de grado dos (cuadrático), véase más adelante) y

$$\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f + 2(\nabla f \cdot \nabla g).$$

son usadas. Estos enunciados son válidos no sólo en los casos cristalográficos, sino también para los sistemas no cristalográficos con un grupo de Coxeter como una simetría del sistema.

Realicemos una transformación de similaridad sobre el hamiltoniano tomando la función del estado base  $\Psi_0$  como factor

$$h = -2(\Psi_0(x))^{-1}(\mathcal{H} - E_0)\Psi_0. \quad (5)$$

Un nuevo problema espectral surge

$$h\phi(x) = -\epsilon\phi(x), \quad (6)$$

con un nuevo parámetro espectral  $\epsilon = 2(E - E_0)$ . Si en (2) la condición de frontera significa la normalizabilidad de la autofunción  $\Psi(x)$ , entonces para (6) requiere la normalizabilidad de  $\phi(x)$  con el factor de peso  $\Psi_0^2(x)$ . Por construcción, el autovalor más bajo es  $\epsilon_0 = 0$  y la autofunción más baja es  $\phi_0 = \text{const}$ . Nuestra meta es encontrar, mediante un cambio de variables, una forma *algebraica* del operador  $h$  si existe.

**Definición.** Un operador diferencial lineal con coeficientes polinomiales se denomina *algebraico*.

Para encontrar estas variables suponemos que respetan las mismas simetrías que el hamiltoniano. En particular esto implica que sean invariantes bajo el grupo de Coxeter  $W$ . Luego, es natural tomar como nuevas variables los invariantes polinomiales de Coxeter (A.7). Ellos pueden ser obtenidos al promediar un monomio sobre una *órbita* del grupo. Denotando por  $G$  el grupo de Coxeter que actúa en  $\mathbf{R}^N$ , la órbita de un punto  $x \in \mathbf{R}^N$  es el conjunto

$$\Omega(x) = \{g \cdot x \in \mathbf{R}^N \mid g \in G\} . \quad (7)$$

Es importante mencionar que para cualquier sistema de raíces existe un invariante de segundo grado  $t_2^{(\Omega)}(x)$  que no depende de la órbita elegida<sup>1</sup>. Más adelante haremos uso de los invariantes como nuevas variables y los llamaremos *variables de órbita*.

Los invariantes de grados fijos están definidos hasta una combinación no-lineal de los invariantes de menor grado. Esta ambigüedad juega un papel importante en la obtención de las formas algebraicas de los hamiltonianos, porque estas formas dependen de la elección de las variables. Una combinación especial de las variables resulta en la forma que corresponde a la preservación del flag mínimo de subespacios invariantes (véase más adelante).

Introducimos ahora una noción de *solubilidad exacta*. Supongamos que el operador  $h$  posee una infinidad de espacios invariantes de dimensión finita  $\mathcal{P}_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , los cuales pueden ser ordenados

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \dots \subset \mathcal{P}_n \subset \dots$$

de manera que formen un *flag* infinito (o filtración)  $\mathcal{P}$ . Por tanto uno puede decir que el operador  $h$  preserva el flag  $\mathcal{P}$ .

**Definición.**

- Un operador  $h$  que preserve un flag infinito de espacios de dimensión finita explícitamente definidos  $\mathcal{P}$  se denomina un *operador exactamente*

---

<sup>1</sup>Resulta claro que dicho invariante existe, puesto que los elementos del grupo de Coxeter corresponden a transformaciones ortogonales. Un invariante polinomial adecuado es por tanto el cuadrado de la longitud del vector de coordenadas en el espacio de raíces,  $t_2^{(\Omega)} = x^2$ .



*soluble con flag*  $\mathcal{P}$ . Suponemos que el flag  $\mathcal{P}$  es denso: entre dos espacios subsecuentes no existe un espacio de dimensión intermedia que pueda pertenecer al flag.

- Si un operador dado  $h$  preserva varios flags y entre ellos hay un flag para el cual  $\dim \mathcal{P}_n$  es *maximal* para cualquier  $n$  dado, decimos que dicho flag es *mínimo*.

Consideraremos ahora ciertos espacios lineales de polinomios en varias variables.

**Definición.** Considérese el espacio lineal triangular de polinomios en  $k$  variables

$$\mathcal{P}_n^{(f_1, \dots, f_k)} = \langle s_1^{p_1} s_2^{p_2} \cdots s_k^{p_k} \mid 0 \leq f_1 p_1 + f_2 p_2 + \cdots + f_k p_k \leq n \rangle, \quad (8)$$

donde las  $f$  son números enteros positivos y  $n$  es un entero. El *vector característico* es un vector cuyas componentes son iguales a los coeficientes  $f_i$  enfrente de los  $p_i$ :

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_k). \quad (9)$$

El vector característico está definido hasta un factor multiplicativo entero que escogemos como el mínimo. Tomando una secuencia de los espacios caracterizados por números enteros crecientes  $n$  obtenemos un flag que tiene a  $\mathcal{P}_n^{(f_1, \dots, f_k)}$  como su espacio lineal *generador*. En los ejemplos  $n$  toma enteros consecutivos,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Escribimos a este flag como  $\mathcal{P}^{(f_1, \dots, f_k)}$ .

En general la meta es encontrar el flag mínimo. Una estrategia general para este estudio es la siguiente: (i) como primer paso consideramos una rotación de norma del hamiltoniano con la función del estado base como factor, (ii) escogemos una órbita dada para construir un conjunto particular de variables que de lugar a una forma algebraica para el hamiltoniano transformado, (iii) explotando la ambigüedad en la definición de los invariantes de grado fijo buscamos variables que preserven un flag mínimo.

Otra meta del estudio es encontrar una generalización *cuasi-exactamente soluble*. Por definición un operador diferencial lineal es cuasi-exactamente soluble (*QES*) si preserva un espacio funcional de dimensión finita con una base explícitamente indicada (véase p.ej. [19]). Esto implica que el operador QES tiene un subespacio invariante de dimensión finita generado por funciones

conocidas. Aún más, puede indicarse explícitamente una base en la cual el operador, escrito en forma matricial, tiene una forma triangular por bloques. En la práctica, para todos los ejemplos conocidos de operadores QES, el subespacio invariante de dimensión finita es un espacio de polinomios inhomogéneos en una o varias variables. En varios casos el espacio de polinomios puede identificarse con un espacio de representación de dimensión finita de un álgebra de Lie de operadores diferenciales de primer orden. En el caso de sistemas de raíces cristalográficos una cierta generalización QES ha sido encontrada para cada hamiltoniano racional particular [20]. Todos estos ejemplos están relacionados con la existencia del álgebra escondida  $sl_2$ .

Finalmente, es posible mostrar que en el espacio de órbitas del grupo de Coxeter correspondiente existe un modelo discreto definido en la malla unitaria con autofunciones polinomiales, el cual es isoespectral al modelo racional correspondiente. Esta discretización está basada en el método de *discretización canónica* [16],[17].

# Parte I

## El sistema integrable $H_3$

# Capítulo 1

## El hamiltoniano $H_3$ (solubilidad e integrabilidad)

### 1.1. El hamiltoniano

Consideramos un sistema físico descrito por un hamiltoniano racional asociado con el sistema de raíces  $H_3$  (denotado por  $\mathcal{R}_3$ ), de manera análoga con los sistemas cristalográficos. Sustituyendo en (1) el conjunto de raíces positivas  $\mathcal{R}_3^+$  de  $H_3$  (véase la Tabla (A.3)) el hamiltoniano toma la forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{H_3} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \omega^2 x_k^2 + \frac{g}{x_k} \right] \\ & + \sum_{\{i,j,k\}} \sum_{\mu_{1,2}=0,1} \frac{2g}{[x_i + (-1)^{\mu_1} \varphi_+ x_j + (-1)^{\mu_2} \varphi_- x_k]^2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  y sus permutaciones pares. Denotamos por

$$\varphi_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

a la *razón áurea* y su conjugado algebraico. La constante de acoplamiento  $g$  puede escribirse como

$$g = \nu(\nu - 1) > -\frac{1}{4}. \quad (1.2)$$

Esta condición evita el colapso. Además, asegura la hermiticidad del hamiltoniano (1.1) con  $\omega > 0$ .

El hamiltoniano (y por tanto el sistema físico) es simétrico con respecto a las transformaciones del grupo de Coxeter  $H_3$

$$x \longrightarrow g x , \quad g \in H_3 . \quad (1.3)$$

Esto es equivalente a la relación

$$\mathcal{U}^{-1}(\alpha) \mathcal{H}_{H_3} \mathcal{U}(\alpha) = \mathcal{H}_{H_3} . \quad (1.4)$$

donde  $\mathcal{U}(\alpha)$  es el operador de reflexiones y  $\alpha \in \mathcal{R}_3$  (véase el Apéndice A).

El hamiltoniano es también simétrico ante el intercambio

$$\begin{aligned} x_i &\longleftrightarrow x_j \\ \varphi_+ &\longleftrightarrow \varphi_- \end{aligned} \quad (1.5)$$

con  $i, j = 1, 2, 3$  y  $i \neq j$ .

La expresión explícita para el hamiltoniano (1.1) en las coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{H_3} = & -\frac{1}{2}\Delta^{(3)} + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{1}{2}\nu(\nu-1) \left[ \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \right] \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + \varphi_+x_2 + \varphi_-x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - \varphi_+x_2 + \varphi_-x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + \varphi_+x_2 - \varphi_-x_3)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - \varphi_+x_2 - \varphi_-x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 + \varphi_+x_3 + \varphi_-x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 - \varphi_+x_3 + \varphi_-x_1)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 + \varphi_+x_3 - \varphi_-x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 - \varphi_+x_3 - \varphi_-x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 + \varphi_+x_1 + \varphi_-x_2)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 - \varphi_+x_1 + \varphi_-x_2)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 + \varphi_+x_1 - \varphi_-x_2)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 - \varphi_+x_1 - \varphi_-x_2)^2} . \end{aligned}$$

donde  $\Delta^{(3)}$  es el laplaciano en tres dimensiones.

Escogemos el espacio de configuración para  $\mathcal{H}$  como el dominio de  $\mathbf{R}^3$  cuyos vectores tienen etiquetas de Dynkin positivas (véase el apéndice A). En coordenadas esto corresponde a la condición

$$(\alpha \cdot x) > 0 \quad (1.6)$$

para  $\alpha \in \mathcal{R}_3^+$ . Es el análogo de la cámara principal de Weyl en el caso de sistemas de raíces cristalográficos. Resulta ser el dominio en  $\mathbf{R}^3$  limitado por los tres planos

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0 \quad \text{and} \quad x_3 + \varphi_+ x_1 + \varphi_- x_2 = 0 \quad (1.7)$$

con  $x_1, x_2, x_3$  no negativos. Coincide con el dominio fundamental definido por las raíces simples de  $H_3$  (A.10).

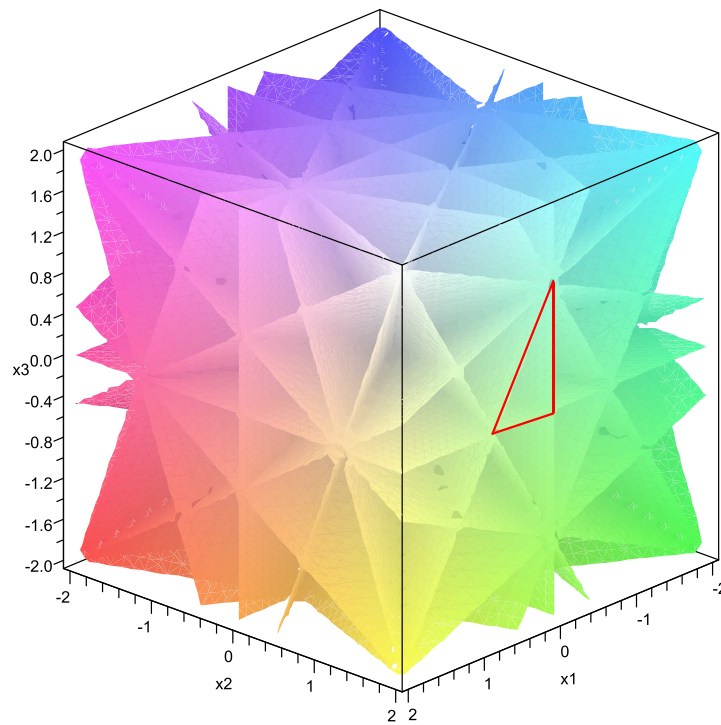


Figura 1.1: Espacio de configuración: Los planos mostrados están definidos por las ecuaciones  $(\alpha \cdot x) = 0$  con  $\alpha \in \mathcal{R}_3^+$ . Ellos confinan los 120 dominios fundamentales del grupo  $H_3$  (compárese con la figura A.4). El dominio tridimensional resaltado en rojo es el espacio de configuración (1.7).

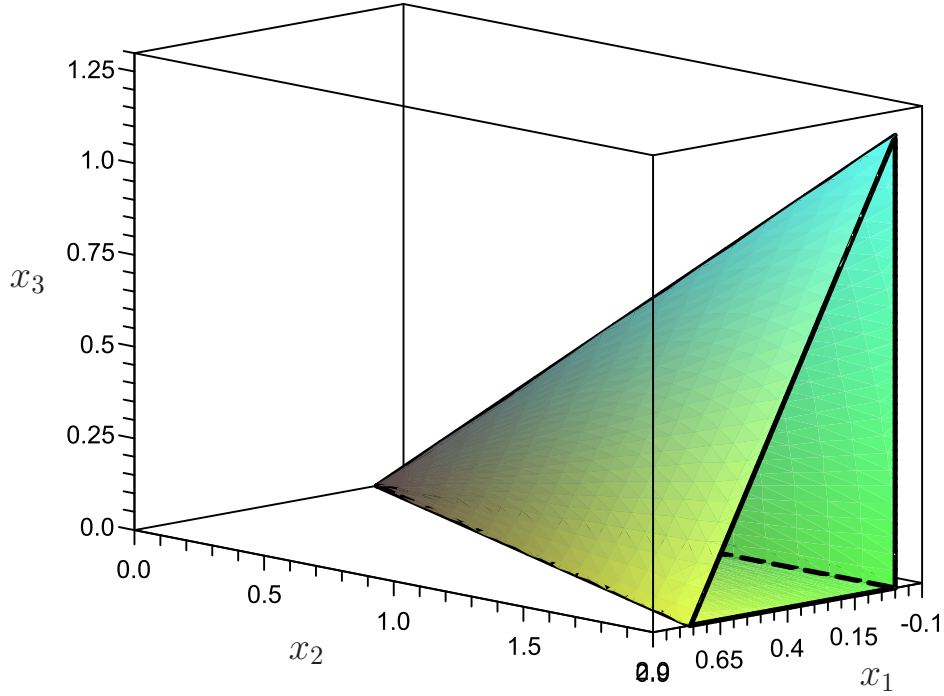


Figura 1.2: Detalle de los planos (1.7) que confinan el espacio de configuración (resaltado en rojo en la figura 1.1). Los planos son las caras de una pirámide triangular con ápice en el origen y base en el infinito.

## 1.2. Separación de variables e integral de movimiento

El hamiltoniano (1.1) puede ser escrito en coordenadas esféricas. Toma la forma

$$\mathcal{H}_{H_3} = -\frac{1}{2}\Delta^{(3)} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{W(\theta, \phi)}{r^2} . \quad (1.8)$$

donde  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  denotan la distancia radial, el ángulo polar y el ángulo azimutal, respectivamente.

Introduciendo la notación

$$c_\vartheta \equiv \cos \vartheta , \quad s_\vartheta \equiv \sin \vartheta ,$$

la función  $W(\theta, \phi)$  puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
W(\theta, \phi) = & \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta c_\phi + \varphi_+ s_\theta s_\phi + \varphi_- c_\theta)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta c_\phi - \varphi_+ s_\theta s_\phi + \varphi_- c_\theta)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta c_\phi + \varphi_+ s_\theta s_\phi - \varphi_- c_\theta)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta c_\phi - \varphi_+ s_\theta s_\phi - \varphi_- c_\theta)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta s_\phi + \varphi_+ c_\theta + \varphi_- s_\theta c_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta s_\phi - \varphi_+ c_\theta + \varphi_- s_\theta c_\phi)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta s_\phi + \varphi_+ c_\theta - \varphi_- s_\theta c_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\theta s_\phi - \varphi_+ c_\theta - \varphi_- s_\theta c_\phi)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(c_\theta + \varphi_+ s_\theta c_\phi + \varphi_- s_\theta s_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(c_\theta - \varphi_+ s_\theta c_\phi + \varphi_- s_\theta s_\phi)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(c_\theta + \varphi_+ s_\theta c_\phi - \varphi_- s_\theta s_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(c_\theta - \varphi_+ s_\theta c_\phi - \varphi_- s_\theta s_\phi)^2} \\
& + \frac{\nu(\nu-1)}{2s_\theta^2 c_\phi^2} + \frac{\nu(\nu-1)}{2s_\theta^2 s_\phi^2} + \frac{\nu(\nu-1)}{2c_\phi^2} .
\end{aligned} \tag{1.9}$$

La ecuación de Schroedinger admite una separación de variables: cualquier función propia puede escribirse como el producto

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Q(\theta, \phi) , \tag{1.10}$$

donde las funciones  $R$  y  $Q$  satisfacen las ecuaciones

$$\left[ -\frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{\gamma}{r^2} \right] R(r) = ER(r) , \tag{1.11}$$

y

$$\mathcal{F} Q(\theta, \phi) = \gamma Q(\theta, \phi) , \tag{1.12}$$

siendo  $\gamma$  la constante de separación. El operador  $\mathcal{F}$  tiene la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^2 + W(\theta, \phi) \\
&= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + W(\theta, \phi) ,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

donde  $\mathcal{L}$  es el operador de momento angular. Puede verificarse inmediatamente que  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{F}$  conmutan:

$$[\mathcal{H}_{H_3}, \mathcal{F}] = 0 . \tag{1.14}$$



Por tanto,  $\mathcal{F}$  es una integral de movimiento. Tiene funciones propias en común con  $\mathcal{H}$ . Este operador es simétrico con respecto a transformaciones en el grupo  $H_3$  (véase el Apéndice A): para cualquier  $\alpha \in \mathcal{R}_3$ ,

$$\mathcal{U}^{-1}(\alpha) \mathcal{F} \mathcal{U}(\alpha) = \mathcal{F} . \quad (1.15)$$

### 1.3. Estado base

Puede probarse por sustitución directa que la función del estado base tiene la forma

$$\begin{aligned} \Psi_0(x) &= \left( \prod_{\alpha \in R_+} (\alpha \cdot x)^\nu \right) \exp\left(-\frac{\omega}{2} t_2\right) \\ &= \Delta_1^\nu \Delta_2^\nu \exp\left(-\frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^3 x_k^2\right) , \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde  $t_2$  es el invariante de grado dos (véase más adelante) y los factores pre-exponenciales son

$$\Delta_1 = \prod_{k=1}^3 x_k , \quad (1.17)$$

$$\Delta_2 = \prod_{\{i,j,k\}} \prod_{\mu_{1,2}=0,1} [x_i + (-1)^{\mu_1} \varphi_+ x_j + (-1)^{\mu_2} \varphi_- x_k] . \quad (1.18)$$

La autofunción (1.16) es no nula (no tiene nodos) en el espacio de configuración (1.7). Es simétrica ante el intercambio (1.5) y es invariante hasta una fase con respecto a la acción del grupo  $H_3$  (ver (1.4)):

$$\mathcal{U}(\alpha) \Psi_0(x) = (-1)^\nu \Psi_0(x) . \quad (1.19)$$

La correspondiente energía del estado base es

$$E_0 = \frac{3}{2} \omega (1 + 10\nu) . \quad (1.20)$$

Recordemos que el parámetro  $\nu$  está relacionado con la constante de acoplamiento como  $g = \nu(\nu - 1)$ , o equivalentemente

$$\nu = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4g} . \quad (1.21)$$

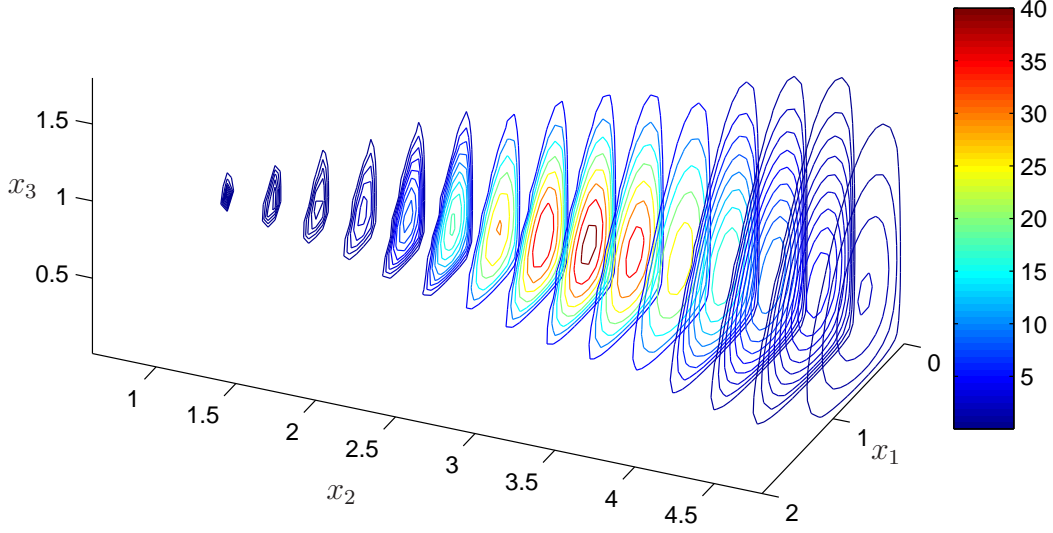


Figura 1.3: Curvas de nivel para la función de estado base no normalizada (1.16) con  $\omega = 1$ ,  $\nu = 3/5$ . La función se anula en los planos (1.7) y alcanza su máximo a una distancia radial  $r = 3$ . Las coordenadas del máximo son aproximadamente  $x_1 = 0.387$ ,  $x_2 = 2.941$ ,  $x_3 = 0.446$ .

La condición  $g > -1/4$  asegura que  $\nu$  es real. Sin embargo, debemos fijar el valor del signo en la ecuación (1.21). Podemos hacerlo recordando que cualquier autofunción  $\Psi_k$  del operador hamiltoniano (1.1) debe satisfacer las condiciones de frontera (2)

$$\Psi_k(x) = 0 \quad \text{en} \quad (\alpha \cdot x) = 0, \quad \int |\Psi_k|^2 d^3x < \infty .$$

Por tanto debemos tomar el signo positivo en (1.21), ya que para  $\nu < 0$  la función del estado base tiende a infinito en la frontera del espacio de configuración. El signo positivo previene también el colapso de la función de onda (véase p.ej. [26]).

La función  $\Psi_0$  es también la menor autofunción del operador  $\mathcal{F}$  con autovalor

$$\gamma_0 = \frac{15}{2}\nu(1 + 15\nu) . \quad (1.22)$$

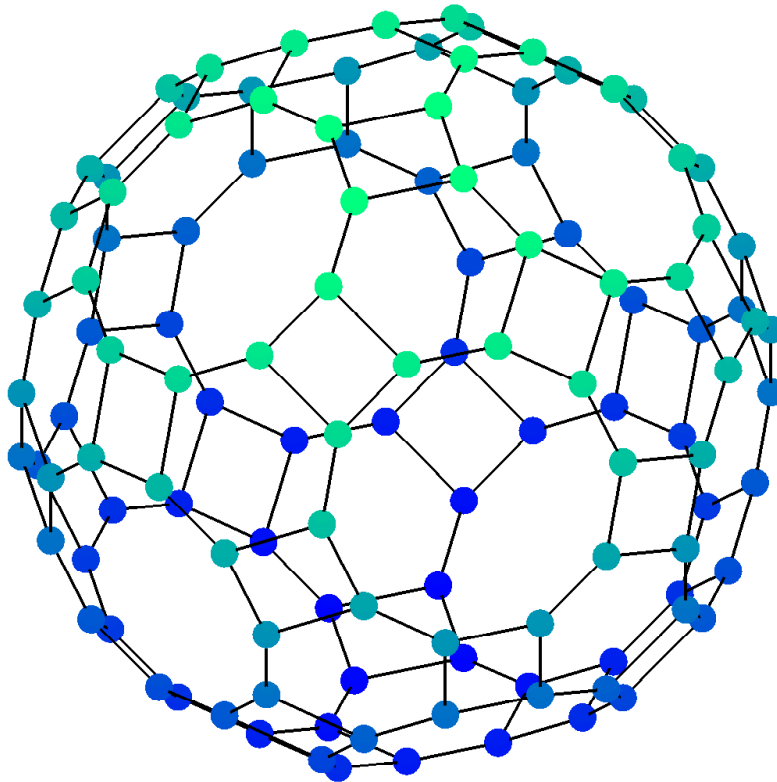


Figura 1.4: Órbita del máximo de la función de onda del estado base. Debido a que las paredes de los dominios fundamentales son impenetrables, estos dominios pueden ser considerados como espacios de configuración de 120 partículas no interactuantes. Los máximos de sus funciones de estado base están localizados en los vértices de un *icosidodecaedro truncado*, el cual es un sólido con simetría icosaedral.

## 1.4. Variables invariantes

El objetivo del estudio es descubrir un cambio de variables que lleve a una forma algebraica para el operador hamiltoniano, si existe. Para obtener estas variables suponemos que respetan las mismas simetrías que el hamiltoniano. Por tanto, deben ser invariantes del grupo de Coxeter  $H_3$ . Las escogemos como polinomios que surgen tras promediar un monomio sobre una órbita del grupo  $H_3$ . Consideramos como órbitas apropiadas a las órbitas generadas por los pesos fundamentales  $\{\omega\}$  (véase A.16). Tales órbitas están caracterizadas por una longitud (el número de elementos que pertenece a la órbita):

| peso fundamental                 | longitud de la órbita |
|----------------------------------|-----------------------|
| $\omega_1 = (1, \varphi_+^2, 0)$ | 20                    |
| $\omega_2 = (0, 2\varphi_+, 0)$  | 30                    |
| $\omega_3 = (0, \varphi_+, 1)$   | 12                    |

Podemos escoger cualquier órbita, pero por razones de simplicidad nuestra elección es la órbita más corta  $\Omega(\omega_3)$ . Luego, las variables invariantes quedan definidas como

$$t_a^{(\Omega)}(x) = \sum_{\omega \in \Omega(\omega_3)} (\omega \cdot x)^a \quad (1.23)$$

donde  $a = 2, 6, 10$  son los grados del grupo  $H_3$ . Por tanto, los invariantes son polinomios de grados 2, 6 y 10,

$$\begin{aligned} t_2^{(\Omega)} &= (10 + 2\sqrt{5})(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) , \\ t_6^{(\Omega)} &= (40 + 16\sqrt{5}) \left[ (x_1^6 + x_2^6 + x_3^6) + \frac{3}{2}(2 + \varphi_-)(x_1^2x_2^4 + x_2^2x_3^4 + x_3^2x_1^4) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2}(2 + \varphi_+)(x_1^2x_3^4 + x_2^2x_1^4 + x_3^2x_2^4) \right] , \\ t_{10}^{(\Omega)} &= (250 + 110\sqrt{5}) \left[ (x_1^{10} + x_2^{10} + x_3^{10}) + \frac{9}{5}(3 + 4\varphi_+)(x_1^8x_2^2 + x_2^8x_3^2 + x_3^8x_1^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{5}(3 + 4\varphi_-)(x_1^8x_3^2 + x_2^8x_1^2 + x_3^8x_2^2) + \frac{42}{5}(2 + \varphi_+)(x_1^6x_2^4 + x_2^6x_3^4 + x_3^6x_1^4) \right. \\ &\quad \left. + \frac{42}{5}(2 + \varphi_-)(x_1^6x_3^4 + x_2^6x_1^4 + x_3^6x_2^4) \right] . \end{aligned} \quad (1.24)$$

Las funciones  $t_a^{(\Omega)}(x)$  son simétricas ante el intercambio (1.5). Por construcción, son invariantes respecto a la acción del grupo  $H_3$ . Es conveniente normalizarlas:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{10 + 2\sqrt{5}} t_2^{(\Omega)} , \\ t_2 &= \frac{1}{40 + 16\sqrt{5}} t_6^{(\Omega)} , \\ t_3 &= \frac{1}{250 + 110\sqrt{5}} t_{10}^{(\Omega)} . \end{aligned} \quad (1.25)$$

Esto permite remover los coeficientes irracionales en (1.24). En adelante llamaremos a estas variables *variables de órbita*.

# Capítulo 2

## Representación algebraica

### 2.1. El hamiltoniano $H_3$ en forma algebraica

Realicemos una rotación de norma del hamiltoniano (1.1) tomando a la función del estado base  $\Psi_0$  como factor,

$$h_{H_3} = -2(\Psi_0(x))^{-1}(\mathcal{H}_{H_3} - E_0)\Psi_0(x), \quad (2.1)$$

donde  $E_0$  es la energía del estado base. Surge un nuevo problema espectral

$$h_{H_3}\phi(x) = -2\epsilon\phi(x), \quad (2.2)$$

donde el nuevo parámetro espectral es  $\epsilon = E - E_0$ ; por tanto, el menor autovvalor es  $\epsilon = 0$ .

Puede probarse por un cálculo directo que el hamiltoniano  $h$ , escrito en términos de las variables de órbita  $t_i$  (1.25) adquiere la forma algebraica

$$h_{H_3} = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{j=1}^3 B_j \frac{\partial}{\partial t_j}. \quad (2.3)$$

Definiendo

$$\Psi_0(x) = e^{-\phi_0(x)},$$

las funciones coeficientes que aparecen en (2.3) son

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial t_i}{\partial x_k} \frac{\partial t_j}{\partial x_k}, \quad B_j = \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial^2 t_j}{\partial x_k^2} - 2 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} \frac{\partial t_j}{\partial x_k} \right),$$

donde  $A_{ji} = A_{ij}$ . Estas funciones coeficientes son:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= 4 t_1, \\
A_{12} &= 12 t_2, \\
A_{13} &= 20 t_3, \\
A_{22} &= \frac{87}{2} t_1^5 - 30 t_1^2 t_2 + \frac{45}{2} t_3, \\
A_{23} &= \frac{1328}{3} t_1^7 - \frac{2020}{3} t_1^4 t_2 + \frac{368}{3} t_1 t_2^2 + 168 t_1^2 t_3, \\
A_{33} &= \frac{81412}{45} t_1^9 - \frac{31936}{15} t_1^6 t_2 - \frac{4544}{15} t_1^3 t_2^2 + \frac{128}{45} t_2^3 + 336 t_1^4 t_3 \\
&\quad + 384 t_1 t_2 t_3, \\
B_1 &= 6 + 60\nu - 4\omega t_1, \\
B_2 &= 45 t_1^2 + 186\nu t_1^2 - 12\omega t_2, \\
B_3 &= -210 t_1^4 + 336 t_1 t_2 - \frac{764\nu}{3} t_1^4 + \frac{1760\nu}{3} t_1 t_2 - 20\omega t_3.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

No hay números irracionales en estos coeficientes. Un análisis simple demuestra que el hamiltoniano (2.3) tiene una infinidad de subespacios polinomiales invariantes de dimensión finita.

$$\mathcal{P}_n^{(1,3,5)} = \langle t_1^{p_1} t_2^{p_2} t_3^{p_3} \mid 0 \leq p_1 + 3p_2 + 5p_3 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.5}$$

donde los  $p_i$ 's son enteros positivos. Forman un flag con vector característico

$$\boldsymbol{\alpha}_t = (1, 3, 5). \tag{2.6}$$

Las primeras autofunciones de  $h$  (en orden de energía creciente) escritas en las variables de órbita  $t$ 's (1.25) pueden encontrarse de manera sencilla:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= t_1 - \frac{3(1 + 10\nu)}{2\omega}, & \epsilon_1 &= 2\omega, \\
\phi_2 &= t_2 - \frac{15 + 62\nu}{2(7 + 30\nu)} t_1^3, & \epsilon_2 &= 6\omega, \\
\phi_3 &= t_3 - \frac{4(63 + 110\nu)}{3(17 + 30\nu)} t_2 t_1^2 + \frac{2205 + 9856\nu + 10476\nu^2}{3(17 + 30\nu)(11 + 30\nu)} t_1^5, & \epsilon_3 &= 10\omega.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

¿Existen otras formas algebraicas de  $\mathcal{H}$  (1.1)? Recordemos que los invariantes polinomiales están definidos de manera ambigua, hasta una combinación no-lineal de invariantes de menor grado. Así, consideremos la siguiente transformación triparamétrica de las coordenadas  $t$ , la cual preserva los grados de

los invariantes en coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned}\tau_1 &= t_1, \\ \tau_2 &= t_2 + a_1 t_1^3, \\ \tau_3 &= t_3 + a_2 t_1^2 t_2 + a_3 t_1^5.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Para cualquier valor de  $a_{1,2,3}$ , existe una forma algebraica para el hamiltoniano. Por ejemplo, puede tomarse como  $\tau$ 's las autofunciones (2.7) con  $\nu = 0$ .

Diferentes valores de los parámetros en (2.8) dan lugar a diferentes flags preservados por el hamiltoniano. Es posible probar que el flag  $\mathcal{P}^{(1,3,5)}$  no es mínimo. El flag mínimo es generado por los subespacios

$$\mathcal{P}_n^{(1,2,3)} = \langle \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \tau_3^{p_3} \mid 0 \leq p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.9}$$

y tiene vector característico

$$\boldsymbol{\alpha}_\tau = (1, 2, 3). \tag{2.10}$$

Las variables que dan lugar a este flag se obtienen de la transformación (2.8) con

$$a_1 = -\frac{13}{10}, \quad a_2 = -\frac{76}{15}, \quad a_3 = \frac{1531}{375}. \tag{2.11}$$

En forma explícita estas variables son

$$\begin{aligned}\tau_1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ \tau_2 &= -\frac{3}{10}(x_1^6 + x_2^6 + x_3^6) + \frac{3}{10}(2 - 5\varphi_+)(x_1^2 x_2^4 + x_2^2 x_3^4 + x_3^2 x_1^4) \\ &\quad + \frac{3}{10}(2 - 5\varphi_-)(x_1^2 x_3^4 + x_2^2 x_1^4 + x_3^2 x_2^4) - \frac{39}{5}(x_1^2 x_2^2 x_3^2), \\ \tau_3 &= \frac{2}{125}(x_1^{10} + x_2^{10} + x_3^{10}) + \frac{2}{25}(1 + 5\varphi_-)(x_1^8 x_2^2 + x_2^8 x_3^2 + x_3^8 x_1^2) \\ &\quad + \frac{2}{25}(1 + 5\varphi_+)(x_1^8 x_3^2 + x_2^8 x_1^2 + x_3^8 x_2^2) \\ &\quad + \frac{4}{25}(1 - 5\varphi_-)(x_1^6 x_2^4 + x_2^6 x_3^4 + x_3^6 x_1^4) \\ &\quad + \frac{4}{25}(1 - 5\varphi_+)(x_1^6 x_3^4 + x_2^6 x_1^4 + x_3^6 x_2^4) \\ &\quad - \frac{112}{25}(x_1^6 x_2^2 x_3^2 + x_2^6 x_3^2 x_1^2 + x_3^6 x_1^2 x_2^2) \\ &\quad + \frac{212}{25}(x_1^2 x_2^4 x_3^4 + x_2^2 x_3^4 x_1^4 + x_3^2 x_1^4 x_2^4).\end{aligned}\tag{2.12}$$



El hamiltoniano toma ahora la forma

$$h_{H_3} = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{j=1}^3 B_j \frac{\partial}{\partial \tau_j} \quad (2.13)$$

con coeficientes sorprendentemente sencillos:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 4\tau_1, \\ A_{12} &= 12\tau_2, \\ A_{13} &= 20\tau_3, \\ A_{22} &= -\frac{48}{5}\tau_1^2\tau_2 + \frac{45}{2}\tau_3, \\ A_{23} &= \frac{16}{15}\tau_1\tau_2^2 - 24\tau_1^2\tau_3, \\ A_{33} &= -\frac{64}{3}\tau_1\tau_2\tau_3 + \frac{128}{45}\tau_2^3, \\ B_1 &= 6 + 60\nu - 4\omega\tau_1, \\ B_2 &= -\frac{48}{5}(1 + 5\nu)\tau_1^2 - 12\omega\tau_2, \\ B_3 &= -\frac{64}{15}(2 + 5\nu)\tau_1\tau_2 - 20\omega\tau_3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Es necesario remarcar que la matriz  $A_{ij}$ , tomada como una métrica con índices superiores, da lugar a un tensor de Riemann nulo y, por tanto, corresponde a un espacio plano.

El operador  $h$  con coeficientes (2.14) es triangular con respecto a la acción sobre monomios  $\rho = \tau_1^{n_1}\tau_2^{n_2}\tau_3^{n_3}$ . Se puede hallar un ordenamiento  $\{\rho_1, \rho_2, \dots\}$  de la base de monomios tal que

$$h_{H_3} \rho_k = \lambda \rho_k + \sum_{j < k} \alpha_j \rho_j. \quad (2.15)$$

Si un operador algebraico  $T$  es tal que

$$T(\tau_1^{n_1}\tau_2^{n_2}\tau_3^{n_3}) = \tau_1^{n_1+a_1}\tau_2^{n_2+a_2}\tau_3^{n_3+a_3}$$

definimos su *grado* como

$$\deg(T) \equiv \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

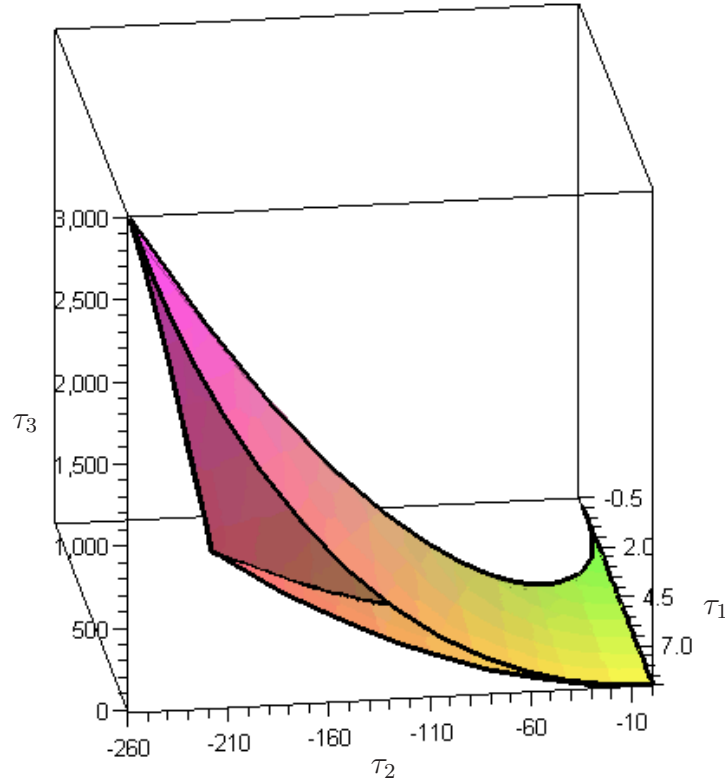


Figura 2.1: Espacio de configuración en coordenadas  $\tau$ . El espacio de configuración (1.7) se mapea en el interior de la “pirámide deformada” que se muestra en la figura (compárese con la figura 1.2).

Resulta así posible mostrar que un operador algebraico  $T$  está en forma triangular si existe un vector  $\beta$  tal que el producto escalar  $(\beta \cdot \text{deg}(T)) > 0$ . Para el hamiltoniano  $h_{H_3}$  (2.13) dicho vector puede tomarse como

$$\beta = (1, 3, 5) .$$

La frontera del espacio de configuración en las variables  $\tau$  está determinada por los ceros de la función de onda del estado base (1.16). En coordenadas cartesianas es la superficie algebraica  $\prod_{\alpha \in \mathcal{R}_3^+} (\alpha \cdot x)^2 = 0$  de grado 30 (el conjunto de planos en la figura 1.1). En coordenadas  $\tau$  es la superficie algebraica de grado 7 (véase fig. 2.1),

$$\begin{aligned} \kappa(\tau) \equiv & -12960\tau_1^5\tau_3^2 + 5760\tau_1^4\tau_2^2\tau_3 - 640\tau_1^3\tau_2^4 - 54000\tau_1^2\tau_2\tau_3^2 \\ & + 21600\tau_1\tau_2^3\tau_3 - 2304\tau_2^5 - 50625\tau_3^3 = 0 . \end{aligned} \quad (2.16)$$

El cuadrado del jacobiano del cambio de variables de  $x$  a  $\tau$  puede calcularse explícitamente. Resulta ser proporcional al factor pre-exponencial de la función de onda del estado base (1.16) con  $\nu = 2$ . Por tanto, se anula solamente en la frontera del espacio de configuración:

$$J^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \tau_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \tau_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \tau_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \tau_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \tau_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}^2 = \frac{9}{5} \prod_{\alpha \in \mathcal{R}_3^+} (\alpha \cdot x)^2 = \frac{8}{45} \kappa(\tau). \quad (2.17)$$

Aquí  $\alpha \in \mathcal{R}_3^+$  son las raíces positivas de  $H_3$  (ver Tabla A.3).

## 2.2. Integral de movimiento en forma algebraica

Consideremos la rotación de norma del operador  $\mathcal{F}$  (1.13):

$$f = (\Psi_0(x))^{-1} (\mathcal{F} - \gamma_0) \Psi_0(x), \quad (2.18)$$

donde  $\gamma_0$  es el autovalor más bajo de  $\mathcal{F}$  (1.22). Mostraremos que el operador

$$f = \sum_{i,j=1}^3 F_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{j=1}^3 G_j \frac{\partial}{\partial \tau_j}, \quad (2.19)$$

tiene una forma algebraica en términos de las variables  $\tau$  (2.12). Aquí

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 (x_k x_l - r^2 \delta_{kl}) \frac{\partial \tau_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tau_j}{\partial x_l},$$

$$G_j = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 (x_k x_l - r^2 \delta_{kl}) \frac{\partial^2 \tau_j}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^3 \left( x_k + r^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} - x_k \sum_{l=1}^3 x_l \frac{\partial \phi_0}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \tau_j}{\partial x_k}.$$

La integral  $\mathcal{F}$  depende sólo de las coordenadas esféricas  $\theta$  y  $\phi$ . Luego, en el operador  $f$  (2.19) no deben aparecer derivadas con respecto a  $\tau_1$  (recordemos

que  $\tau_1 = r^2$  (2.12)). Un cálculo inmediato confirma que  $F_{1j} = 0$  y  $G_1 = 0$ . Los restantes coeficientes son

$$\begin{aligned}
F_{22} &= \frac{24}{5}\tau_1^3\tau_2 - \frac{45}{4}\tau_1\tau_3 + 18\tau_2^2, \\
F_{23} &= -\frac{8}{15}\tau_1^2\tau_2^2 + 12\tau_1^3\tau_3 + 30\tau_2\tau_3, \\
F_{33} &= -\frac{64}{45}\tau_1\tau_2^3 + \frac{32}{3}\tau_1^2\tau_2\tau_3 + 50\tau_3^2, \\
G_2 &= \frac{24}{5}(1 + 5\nu)\tau_1^3 + 3(7 + 30\nu)\tau_2, \\
G_3 &= \frac{32}{15}(2 + 5\nu)\tau_1^2\tau_2 + 5(11 + 30\nu)\tau_3.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Puede probarse que el operador  $f$  posee una infinidad de subespacios invariantes en polinomios

$$\mathcal{P}_n^{(1,3,5)} = \langle \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \tau_3^{p_3} \mid 0 \leq p_1 + 3p_2 + 5p_3 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.21}$$

los cuales forman un flag con vector característico  $(1, 3, 5)$ , igual al vector característico en (2.6).

El operador  $h_{H_3}$  con coeficientes (2.14) conmuta con el operador  $f$  (2.19). Sin embargo, los flag mínimos que ambos preservan no coinciden. Existe una relación entre esta diferencia y la degeneración del hamiltoniano. Puede probarse que  $h_{H_3}$  preserva ambos flags con vectores característicos  $(1, 2, 3)$  y  $(1, 3, 5)$ . Por tanto, las funciones propias comunes a ambos operadores son elementos del flag de espacios  $\mathcal{P}^{(1,3,5)}$ .

Por ejemplo, las autofunciones  $\phi_{2,1}$  y  $\phi_{3,0}$  son degeneradas con respecto a  $\mathcal{H}$ , y provienen de valores diferentes de  $n$  ( $n = 2$  y  $3$ ; para las definiciones y la notación véase el siguiente capítulo). No son funciones propias de  $\mathcal{F}$ , pero las combinaciones lineales  $\phi_{3,0}$  y  $\frac{5(7+30\nu)}{8(1+5\nu)}\phi_{2,1} + \phi_{3,0}$  son autofunciones (no degeneradas) de  $\mathcal{F}$ . Estas combinaciones lineales pertenecen a espacios de polinomios con vector característico  $(1,2,3)$  y  $n \geq 3$ , pero también a espacios con vector  $(1,3,5)$  y  $n \geq 3$ . Con respecto a este último flag, ambas provienen del mismo valor de  $n$  ( $n = 3$ ). Así, parte de la degeneración es removida si las funciones propias de  $h_{H_3}$  se toman como elementos del flag  $\mathcal{P}^{(1,3,5)}$  (y como autofunciones simultáneas de  $f$ ) y no como elementos del flag mínimo  $\mathcal{P}^{(1,2,3)}$ .

# Capítulo 3

## Espectro

### 3.1. Autovalores

El operador  $h_{H_3}$  es triangular con respecto a la acción sobre monomios  $\tau_1^{n_1}\tau_2^{n_2}\tau_3^{n_3}$ . Por tanto es posible encontrar el espectro de (2.13),  $h_{H_3}\phi = -2\epsilon\phi$  explícitamente:

$$\epsilon_{n_1, n_2, n_3} = 2\omega(n_1 + 3n_2 + 5n_3), \quad (3.1)$$

donde los  $n_i$  son enteros no negativos. La degeneración  $m(k)$  del espectro  $\epsilon$  es igual al número de soluciones de la ecuación diofantina

$$n_1 + 3n_2 + 5n_3 = k$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , en enteros no negativos. La función generadora para  $m(k)$  está dada por la serie de Poincaré (ver [1])

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} m(k)t^k = (1-t)^{-1}(1-t^3)^{-1}(1-t^5)^{-1} \\ &= 1 + t + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 3t^5 + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Puede encontrarse una expresión cerrada:

$$m(k) = \frac{1}{15} \sum_{j=0}^k \left( \sum_{i=0}^j \frac{\sin(j-i)\pi}{\sin(j-i)\pi/3} \right) \frac{\sin(k-j)\pi}{\sin(k-j)\pi/5}. \quad (3.3)$$

El espectro  $\epsilon$  no depende de la constante de acoplamiento  $g$  y es equidistante. Es igual al espectro de un oscilador armónico anisotrópico de frecuencias  $(2\omega, 6\omega, 10\omega)$  (hasta una diferencia en el autovalor más bajo) y posee la

misma degeneración. En este sentido el potencial racional en el hamiltoniano (1.1) “deforma” el oscilador isotrópico de frecuencia  $\omega$  presente también en (1.1). Para un oscilador armónico isotrópico de frecuencia  $\omega$  el espectro viene dado por  $\epsilon = \omega(n_1 + n_2 + n_3 + 3/2)$  y la degeneración  $m(k)$  está dada por el número de soluciones de la ecuación  $n_1 + n_2 + n_3 = k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . En este caso  $m(k) = (k + 1)(k + 2)/2$ .

Las energías del hamiltoniano  $\mathcal{H}$  (1.1) están dadas por

$$E = E_0 + \epsilon \quad (3.4)$$

siendo  $E_0$  el menor autovalor (1.20) y  $\epsilon$  el parámetro espectral (3.1).

El espectro de la integral de movimiento  $\mathcal{F}$  puede encontrarse de manera cerrada. Este espectro da los posibles valores para la constante de separación  $\gamma$  en (1.12):

$$\gamma_{k_2, k_3} = \gamma_0 + 2(3k_2 + 5k_3)^2 - 30k_2k_3 + (1 + 30\nu)(3k_2 + 5k_3) . \quad (3.5)$$

Aquí  $k_2, k_3 = 0, 1, 2, \dots$ . Los subíndices reflejan el hecho de que el operador  $\mathcal{F}$  no tiene dependencia en las derivadas de  $\tau_1$ . La constante  $\gamma_0$  es el valor propio de la función del estado base (1.22).

## 3.2. Funciones propias y sus nodos

Como encontramos en el capítulo 2, el hamiltoniano  $h_{H_3}$  tiene una infinidad de subespacios invariantes de dimensión finita

$$\mathcal{P}_n^{(1,2,3)} = \langle \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \tau_3^{p_3} \mid 0 \leq p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq n \rangle , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

que forman el flag infinito  $\mathcal{P}^{(1,2,3)}$ . Este flag es invariante con respecto a las transformaciones proyectivas pesadas:

$$\begin{aligned} \tau_1 &\rightarrow \tau_1 + a , \\ \tau_2 &\rightarrow \tau_2 + b_1 \tau_1^2 + b_2 \tau_1 + b_3 , \\ \tau_3 &\rightarrow \tau_3 + c_1 \tau_1 \tau_2 + c_2 \tau_1^3 + c_3 \tau_2 + c_4 \tau_1^2 + c_5 \tau_1 + c_6 . \end{aligned} \quad (3.6)$$

siendo  $a$ ,  $b$ 's y  $c$ 's constantes.

Marquemos con  $n$  las autofunciones  $\phi_{n,i}$  de  $h_{H_3}$  que sean elementos del espacio invariante  $\mathcal{P}_n^{(1,2,3)}$ . El índice extra numera la autofunción para cada  $n$ . Las funciones  $\phi_{n,i}$  están relacionadas con las autofunciones del hamiltoniano  $\mathcal{H}$  (1.1) como

$$\Psi_{n,i} = \Psi_0 \phi_{n,i}.$$

Por tanto, cualquier función propia del modelo  $H_3$  tiene una forma factorizada. Las autofunciones  $\phi$  son ortogonales con respecto al factor de peso  $|\Psi_0|^2$ .

Presentamos  $\phi_{n,i}$  explícitamente para  $n = 0, 1, 2, 3$ :

- **n=0** (una autofunción)

$$\begin{aligned}\phi_{0,0} &= 1, \\ \epsilon_{0,0} &= 0.\end{aligned}$$

- **n=1** (una autofunción)

$$\begin{aligned}\phi_{1,0} &= \tau_1 - \frac{3}{2\omega}(1 + 10\nu), \\ \epsilon_{1,0} &= 2\omega.\end{aligned}$$

- **n=2** (dos autofunciones)

$$\begin{aligned}\phi_{2,0} &= \tau_1^2 - \frac{5}{\omega}(1 + 6\nu)\tau_1 + \frac{15}{4\omega^2}(1 + 6\nu)(1 + 10\nu), \\ \epsilon_{2,0} &= 4\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{2,1} &= \tau_2 + \frac{12}{5\omega}(1 + 5\nu)\tau_1^2 - \frac{6}{\omega^2}(1 + 5\nu)(1 + 6\nu)\tau_1 \\ &\quad + \frac{3}{\omega^3}(1 + 5\nu)(1 + 6\nu)(1 + 10\nu), \\ \epsilon_{2,1} &= 6\omega.\end{aligned}$$

- **n=3** (tres autofunciones)

$$\begin{aligned}\phi_{3,0} &= \tau_1^3 - \frac{3}{2\omega}(7 + 30\nu)\tau_1^2 + \frac{15}{4\omega^2}(1 + 6\nu)(7 + 30\nu)\tau_1 \\ &\quad - \frac{15}{8\omega^3}(1 + 6\nu)(7 + 30\nu)(1 + 10\nu), \\ \epsilon_{3,0} &= 6\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{3,1} &= \tau_1\tau_2 + \frac{12}{5\omega}(1+5\nu)\tau_1^3 - \frac{15}{2\omega}(1+2\nu)\tau_2 \\
&\quad - \frac{36}{5\omega^2}(1+5\nu)(3+10\nu)\tau_1^2 + \frac{12}{\omega^3}(1+5\nu)(1+6\nu)(3+10\nu)\tau_1 \\
&\quad - \frac{9}{2\omega^4}(1+5\nu)(1+6\nu)(1+10\nu)(3+10\nu), \\
\epsilon_{3,1} &= 8\omega, \\
\phi_{3,2} &= \tau_3 + \frac{16}{15\omega}(2+5\nu)\tau_1\tau_2 + \frac{32}{25\omega^2}(1+5\nu)(2+5\nu)\tau_1^3 \\
&\quad - \frac{4}{\omega^2}(1+2\nu)(2+5\nu)\tau_2 - \frac{64}{25\omega^3}(1+5\nu)(2+5\nu)(3+10\nu)\tau_1^2 \\
&\quad + \frac{16}{5\omega^4}(1+5\nu)(2+5\nu)(1+6\nu)(3+10\nu)\tau_1 \\
&\quad - \frac{24}{25\omega^5}(1+5\nu)(2+5\nu)(1+6\nu)(1+10\nu)(3+10\nu), \\
\epsilon_{3,2} &= 10\omega.
\end{aligned}$$

Las autofunciones  $\phi_{0,0}$ ,  $\phi_{1,0}$  y  $\phi_{2,0}$  son no degeneradas, y las funciones  $\phi_{2,1}$  y  $\phi_{3,0}$  son degeneradas con el mismo autovalor. De acuerdo con (3.2) los autovalores  $\epsilon_{3,1}$  y  $\epsilon_{3,2}$  tienen una degeneración doble y triple, respectivamente. Sin embargo, sólo hemos mostrado una función propia por cada valor ( $\phi_{3,1}$  y  $\phi_{3,2}$ ).

La superficie nodal de la autofunción  $\phi_{1,0}$  es el plano

$$\tau_1 - \frac{3}{2\omega}(1+10\nu) = 0$$

en coordenadas  $\tau$ . En el espacio físico con coordenadas cartesianas es la esfera de radio  $[3(1+10\nu)/2\omega]^{1/2}$ . Esta superficie divide el espacio de configuración en un dominio compacto y un dominio no compacto (véase Figs. 3.1 (a) y 3.2 (a)).

En el caso de la función  $\phi_{2,0}$  las superficies nodales en coordenadas  $\tau$  son los planos

$$\tau_1 = \frac{5}{2\omega}(1+6\nu) \pm \left[ \frac{5}{2\omega^2}(1+6\nu) \right]^{1/2}.$$

En las coordenadas cartesianas corresponden a esferas con radios iguales a  $5(1+6\nu)/2\omega \pm [5(1+6\nu)/2\omega^2]^{1/2}$ . Estas esferas separan el espacio de configuración en dos dominios compactos y un dominio no compacto (véase Figs.



3.1 (b) y 3.2 (b)).

La superficie nodal dada por  $\phi_{2,1} = 0$  es un cilindro parabólico en coordenadas  $\tau$  para cualquier valor de  $\nu$  y  $\omega > 0$  (véase Fig. 3.1 (c)). En coordenadas cartesianas es una superficie algebraica ilustrada en la Fig. 3.2 (c) para  $\omega = 1$  y  $\nu = 3/5$ . Esta superficie nodal divide el espacio de configuración en dos dominios no compactos.

Para la autofunción  $\phi_{3,0}$  las superficies nodales vienen dadas por las raíces de la ecuación cúbica

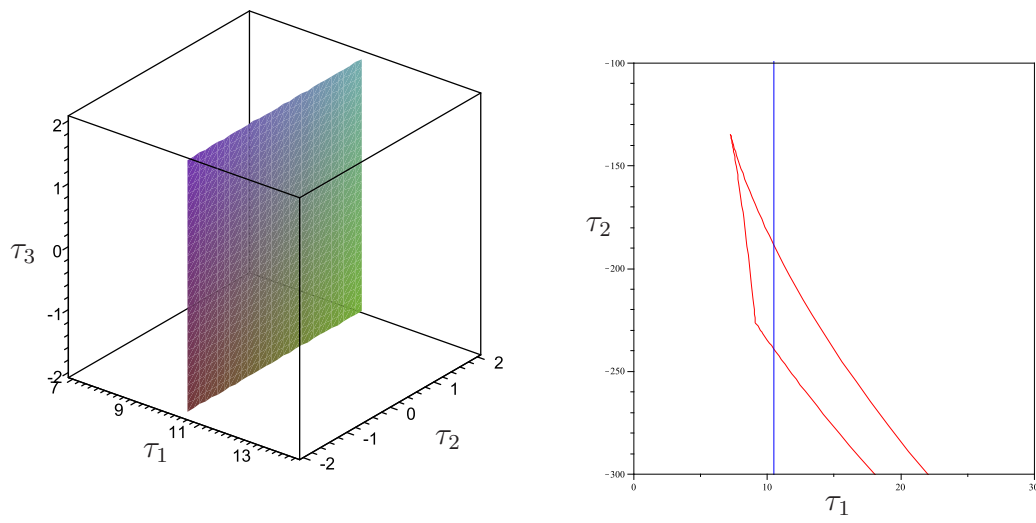
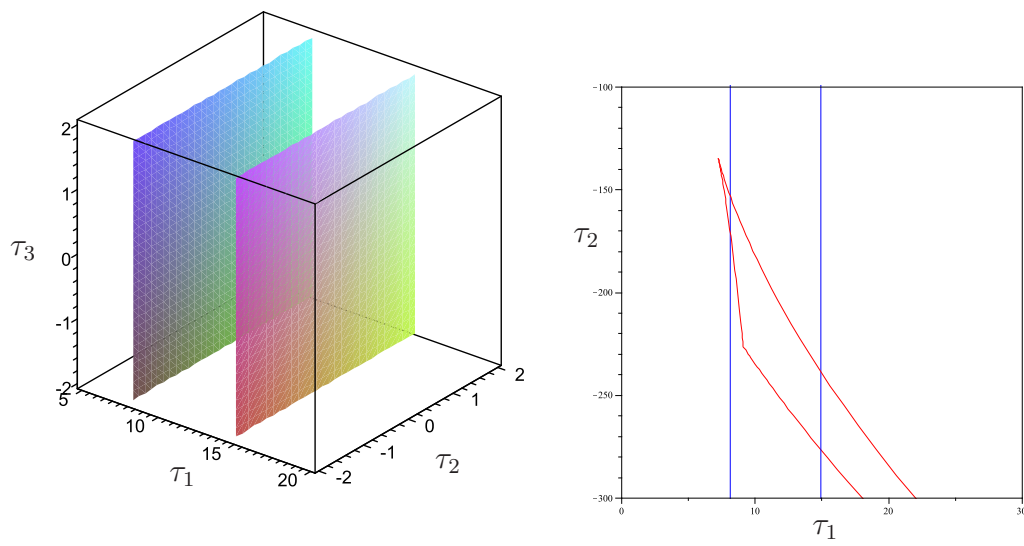
$$\tau_1^3 - \frac{3}{2\omega}(30\nu+7)\tau_1^2 + \frac{15}{4\omega^2}(180\nu^2+72\nu+7)\tau_1 - \frac{15}{8\omega^3}(180\nu^2+72\nu+7)(10\nu+1) = 0$$

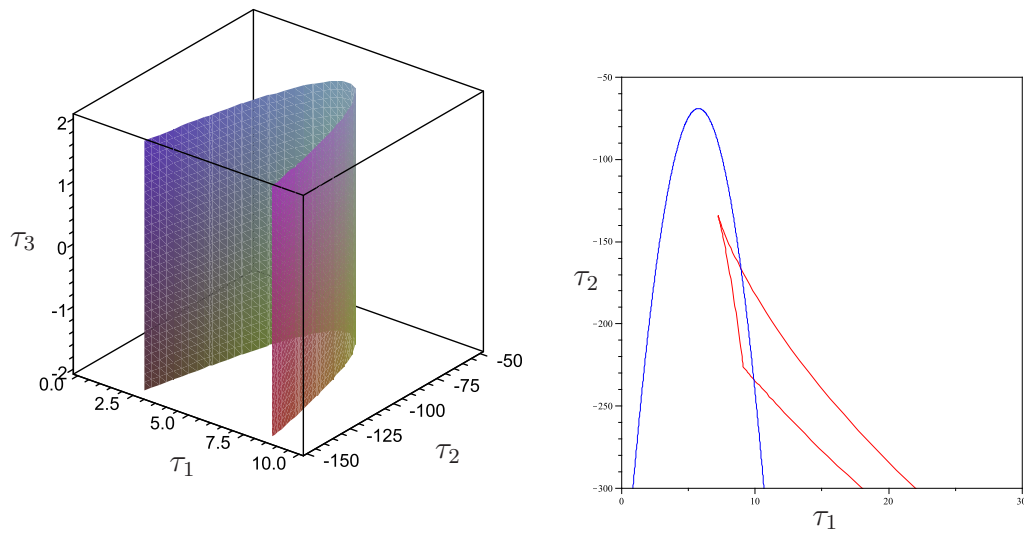
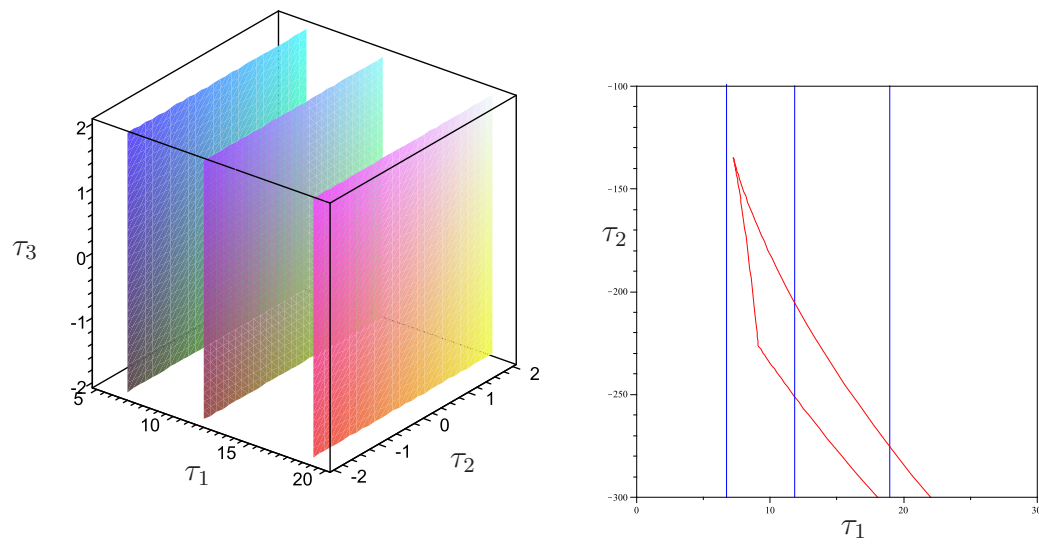
Puede probarse que para  $\nu > -1/6$  la ecuación cúbica tiene tres raíces reales. Dado que  $\nu > 1/2$  (véase (1.21)), las superficies nodales son tres planos paralelos en las coordenadas  $\tau$ . En coordenadas  $x$  las superficies son tres esferas concéntricas centradas en el origen (véase Figs. 3.1 (d) y 3.2 (d)).

La superficie nodal en coordenadas  $\tau$  para la función  $\phi_{3,1}$  es el cilindro algebraico definido por la ecuación  $\phi_{3,1} = 0$  (véase Fig. 3.1 (e)). En coordenadas cartesianas es una superficie algebraica que divide el espacio de configuraciones en un dominio compacto y dos dominios no compactos (véase Fig. 3.2 (e)).

La ecuación  $\phi_{3,2} = 0$  define las superficies algebraicas en coordenadas  $\tau$  y  $x$  ilustradas en las Figs. 3.1 (f) y 3.2 (f) para  $\omega = 1$  y  $\nu = 3/5$ .

Las superficies nodales de  $\phi_{n,i}$  para  $n = 1, 2, 3$  se muestran en las siguientes páginas.

(a)  $\phi_{1,0} = 0$ (b)  $\phi_{2,0} = 0$ 

(c)  $\phi_{2,1} = 0$ (d)  $\phi_{3,0} = 0$ 

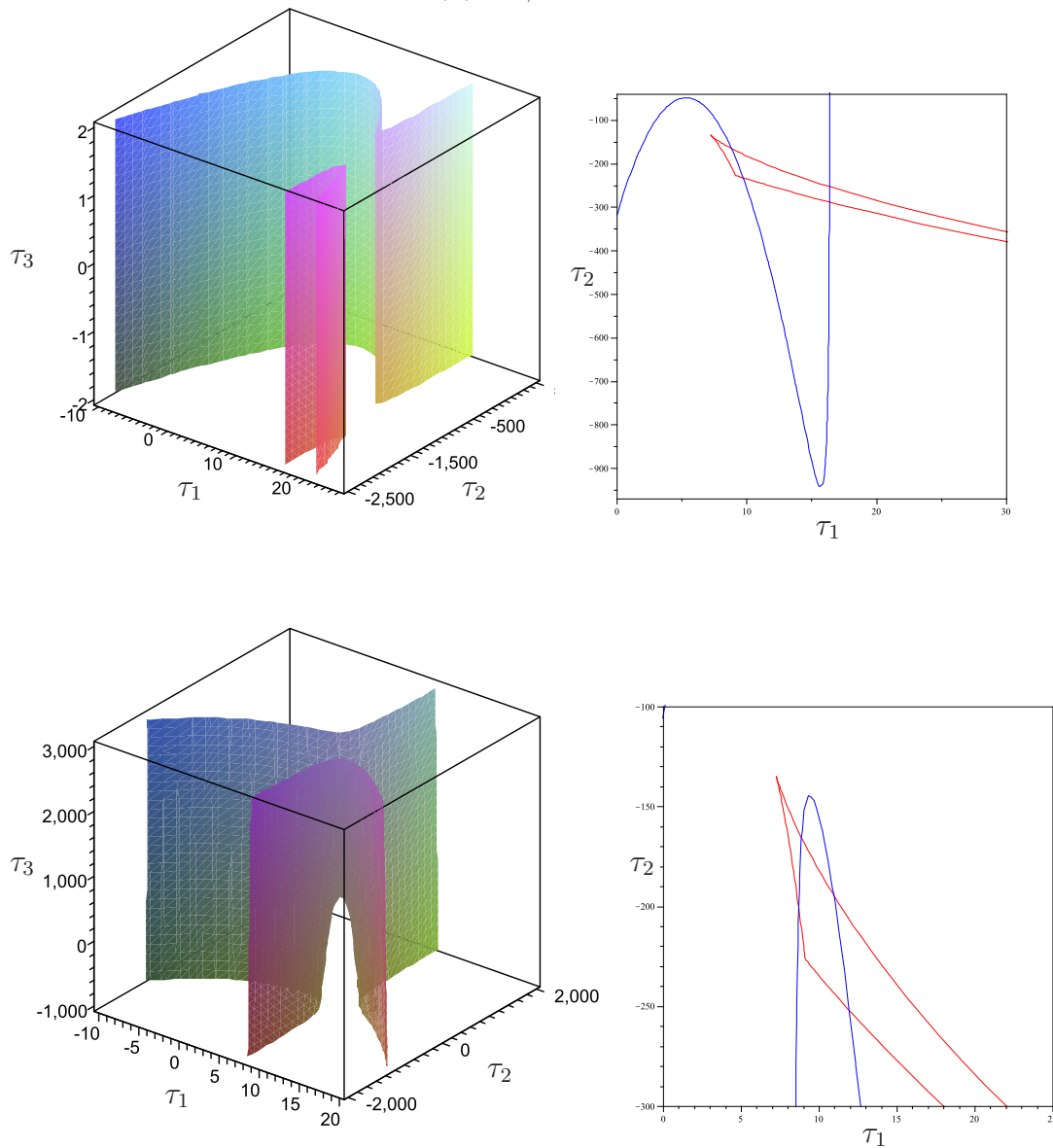
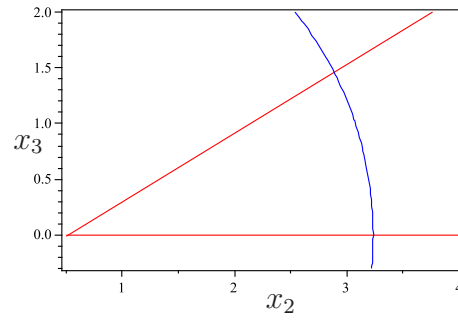
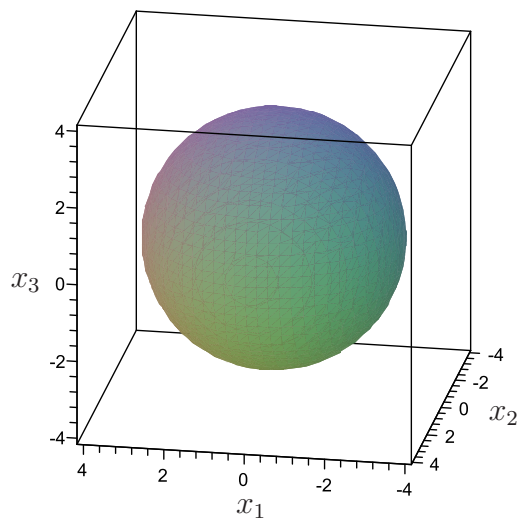
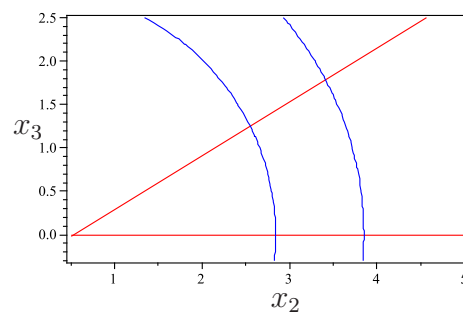
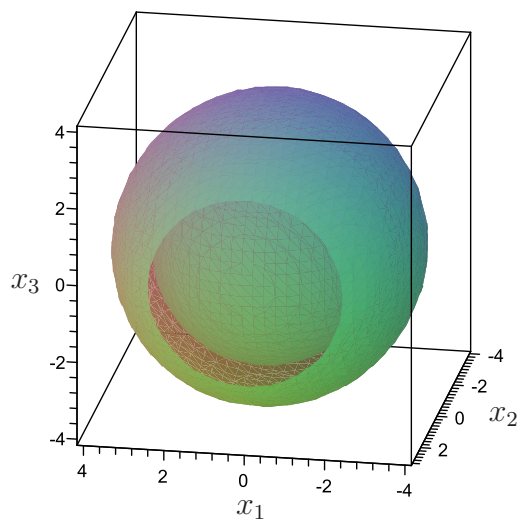
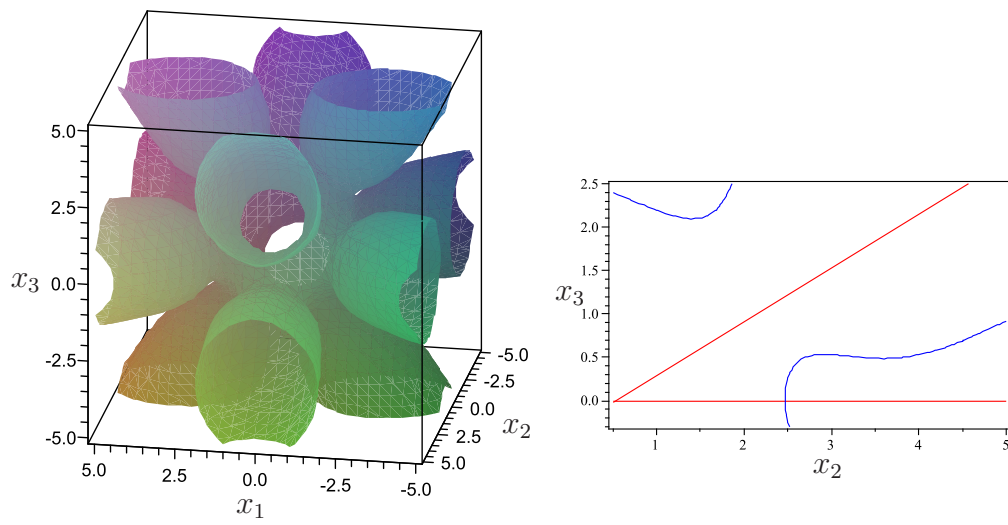
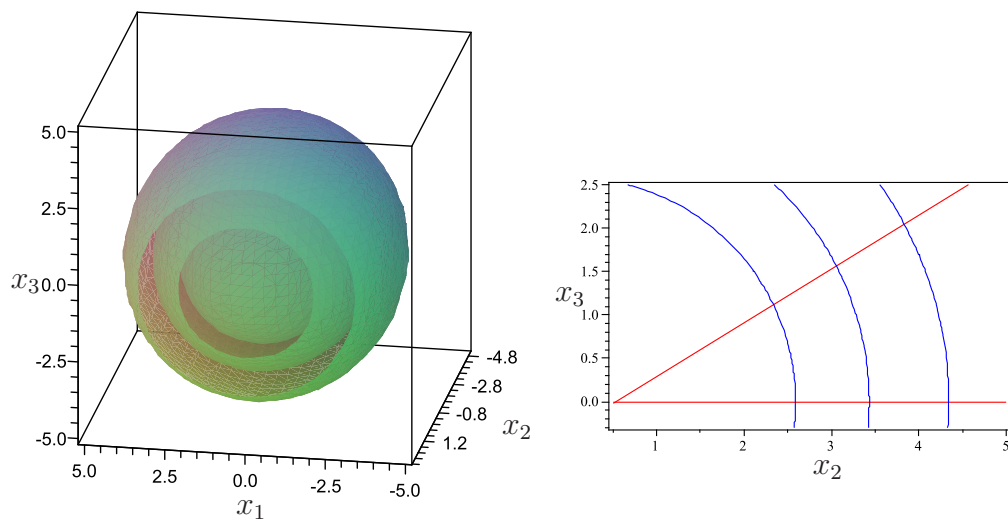
(e)  $\phi_{3,1} = 0$ 

Figura 3.1: Superficies nodales en las coordenadas  $\tau$  con  $\omega = 1$  y  $\nu = 3/5$ . Las gráficas de la derecha son las curvas de nivel para las correspondientes superficies nodales (azul) y la frontera del espacio de configuración (rojo) para  $\tau_3 = 1000$ .

(a)  $\phi_{1,0} = 0$ (b)  $\phi_{2,0} = 0$ 

(c)  $\phi_{2,1} = 0$ (d)  $\phi_{3,0} = 0$ 

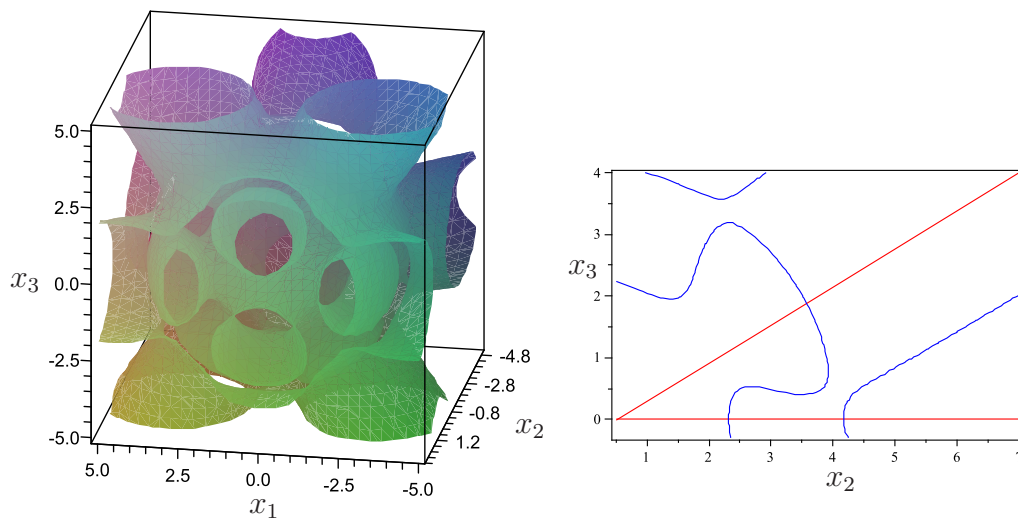
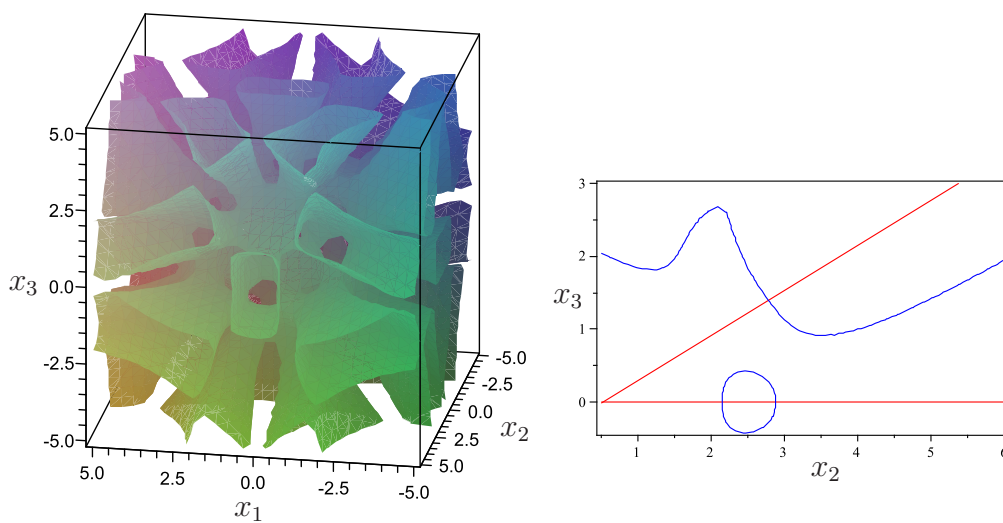
(e)  $\phi_{3,1} = 0$ (f)  $\phi_{3,2} = 0$ 

Figura 3.2: Superficies nodales en el espacio  $x$  con  $\omega = 1$  y  $\nu = 3/5$ . Las gráficas de la derecha son las curvas de nivel para las correspondientes superficies nodales (azul) y la frontera del espacio de configuración (rojo) para  $x_1 = 1/5$ .

### 3.3. Teoría de perturbaciones

Al estudiar perturbaciones que tienen la forma de un polinomio en las variables  $\tau$  es posible desarrollar una teoría de perturbaciones en la cual todas las correcciones pueden encontrarse mediante métodos del álgebra lineal. Consideremos por ejemplo un potencial perturbativo proporcional a  $\tau_1$ :

$$\tilde{h} = h_{H_3} + \lambda\tau_1 . \quad (3.7)$$

Evaluemos la función perturbada del estado base y su energía hasta correcciones de primer orden en  $\lambda$ :

$$\tilde{\phi}_0 = \phi_0 + \lambda\phi_0^{(1)} = 1 + \lambda\phi_0^{(1)} , \quad \tilde{\epsilon}_0 = \epsilon_0 + \lambda\epsilon_0^{(1)} = \lambda\epsilon_0^{(1)} . \quad (3.8)$$

Sustituyendo (3.8) en el problema de autovalores  $\tilde{h}\tilde{\phi}_0 = \tilde{\epsilon}_0\tilde{\phi}_0$  y evaluando hasta términos de primer orden obtenemos la ecuación

$$h_{H_3}\phi_0^{(1)} + \tau_1 = -2\epsilon_0^{(1)} .$$

Esta ecuación puede resolverse tomando  $\phi_0^{(1)} = A\tau_1$ . Se obtiene

$$A = \frac{1}{4\omega} , \quad \epsilon_0^{(1)} = -\frac{1}{8\omega}(6 + 60\nu) .$$

Siguiendo este procedimiento podemos encontrar correcciones de orden más alto.

Dado que  $h_{H_3}$  (2.13) y  $\mathcal{H}_{H_3}$  (1.1) están relacionados por una transformación de similaridad (2.1), es equivalente considerar un potencial perturbativo igual a  $\lambda\tau_1$  añadido al hamiltoniano algebraico  $h_{H_3}$ , o un potencial perturbativo igual a  $-\frac{1}{2}\lambda r^2 = -\frac{1}{2}\lambda \sum_{k=1}^3 x_k^2$  añadido al hamiltoniano original  $\mathcal{H}_{H_3}$ . El espectro de ambos operadores está relacionado por  $E = E_0 + \epsilon$ .

Consideremos de nuevo la perturbación  $\lambda\tau_1$ , equivalente a  $-\frac{1}{2}\lambda r^2$ . Recordemos que la corrección a primer orden para la energía del estado base puede calcularse mediante la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schroedinger:

$$\tilde{E}_0 = E_0 - \frac{1}{2}\lambda \langle \Psi_0 | r^2 | \Psi_0 \rangle . \quad (3.9)$$

Ya que el valor de la corrección a primer orden se encontró anteriormente, obtenemos el siguiente resultado:

$$\langle \tau_1 \rangle \equiv \langle \Psi_0 | r^2 | \Psi_0 \rangle = \frac{1}{4\omega}(6 + 60\nu) . \quad (3.10)$$



Luego, utilizando la forma algebraica del hamiltoniano es posible evaluar algunos valores esperados de manera algebraica.

Consideremos ahora el potencial perturbativo  $V_p = \lambda\tau_2$ . La corrección a primer orden para el estado base está dada por (3.8). Sustituyendo en  $\tilde{h}\tilde{\phi}_0 = \tilde{\epsilon}_0\tilde{\phi}_0$  obtenemos la ecuación

$$h_{H_3}\phi_0^{(1)} + \tau_2 = -2\epsilon_0^{(1)} ,$$

válida hasta términos de primer orden en  $\lambda$ . Supongamos que la solución es un polinomio de grado uno en  $\tau_2$  y grado tres en  $\tau_1$ ,  $\phi_0^{(1)} = A\tau_2 + B\tau_1^3 + C\tau_1^2 + D\tau_1$ , es decir, es un polinomio de grado seis en las coordenadas cartesianas. Al sustituir y resolver el sistema de ecuaciones que resulta obtenemos que

$$\begin{aligned} \phi_0^{(1)} &= \frac{1}{2\omega}\tau_2 - \frac{1}{10\omega^2}(1+5\nu)\tau_1^2 - \frac{1}{2\omega^3}(1+5\nu)(1+6\nu)\tau_1 \\ \epsilon_0^{(1)} &= \frac{3}{2\omega^3}(1+5\nu)(1+6\nu)(1+10\nu) . \end{aligned}$$

de modo que el valor esperado de  $\tau_2$  para el estado base es

$$\langle \tau_2 \rangle = -\frac{3}{\omega^3}(1+5\nu)(1+6\nu)(1+10\nu) . \quad (3.11)$$

Finalmente, si se toma como potencial perturbativo  $V_p = \lambda\tau_3$  y la corrección a primer orden para el estado base (3.8), se obtiene entonces la siguiente ecuación para las correcciones:

$$h_{H_3}\phi_0^{(1)} + \tau_3 = -2\epsilon_0^{(1)} ,$$

Considerando como solución un polinomio en  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  que corresponda a un polinomio de grado diez en las coordenadas cartesianas, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_0^{(1)} &= \frac{1}{20\omega}\tau_3 - \frac{1}{75\omega^2}(2+5\nu)\tau_2\tau_1 - \frac{1}{30\omega^3}(1+2\nu)(2+5\nu) \\ &\quad + \frac{4}{375\omega^3}(1+5\nu)(1+2\nu)\tau_1^3 + \frac{4}{125\omega^4}(1+5\nu)(2+5\nu)(3+10\nu)\tau_1^2 \\ &\quad + \frac{4}{25\omega^5}(1+5\nu)(2+5\nu)(1+6\nu)(3+10\nu)\tau_1 \\ \epsilon_0^{(1)} &= -\frac{12}{25\omega^5}(1+5\nu)(2+5\nu)(1+6\nu)(1+10\nu)(3+10\nu) , \end{aligned}$$

de manera que el valor esperado de  $\tau_3$  en el estado base es

$$\langle \tau_3 \rangle = \frac{24}{25\omega^5}(1+5\nu)(2+5\nu)(1+6\nu)(1+10\nu)(3+10\nu) . \quad (3.12)$$

# Capítulo 4

## El sistema discreto $H_3$

### 4.1. Discretización canónica

La existencia de una forma algebraica del hamiltoniano  $H_3$  en el espacio de invariantes permite la construcción de un sistema discreto con una propiedad notable de isoespectralidad. Esta construcción está basada en el empleo de una transformación canónica cuántica como la base para realizar una discretización de un sistema continuo [16]. Tal procedimiento se denomina *discretización Lie-algebraica* o *discretización canónica*. Ha sido utilizada para construir el modelo discreto isoespectral del oscilador armónico (el sistema  $A_1$  en la nomenclatura de la Reducción Hamiltoniana) en el espacio de  $\tau = x^2$  [17].

Dos sistemas mecánicos clásicos son equivalentes si sus coordenadas y momentos están relacionados por una transformación canónica

$$\begin{aligned} \{Q_i(p, q), Q_j(p, q)\}_{p,q} &= 0, \\ \{P_i(p, q), P_j(p, q)\}_{p,q} &= 0, \\ \{P_i(p, q), Q_j(p, q)\}_{p,q} &= \delta_{i,j}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde

$$\{f, g\}_{p,q} \equiv \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right) \tag{4.2}$$

es el paréntesis de Poisson (véase [25]). Es natural intentar adoptar una noción similar para los sistemas mecánico-cuánticos, con la diferencia de que

el paréntesis de Poisson es reemplazado con el paréntesis de Lie

$$\begin{aligned} [\mathcal{Q}_i(p, q), \mathcal{Q}_j(p, q)] &= 0 , \\ [\mathcal{P}_i(p, q), \mathcal{P}_j(p, q)] &= 0 , \\ [\mathcal{P}_i(p, q), \mathcal{Q}_j(p, q)] &= i\delta_{i,j} . \end{aligned} \tag{4.3}$$

En adelante llamaremos a los sistemas relacionados mediante una transformación canónica cuántica *canónicamente equivalentes*.

Recordemos que el álgebra de Lie de operadores que tienen las relaciones de conmutación (4.3) se denomina el *álgebra de Heisenberg*. Cualquier sistema mecánico cuántico con un hamiltoniano  $\mathcal{H}(x, p)$  está intrínsecamente relacionado con un álgebra de Heisenberg  $[p, x] = i$ . El hamiltoniano puede tratarse como un operador que actúa en el espacio de fases mecánico-cuántico, que se define como un objeto consistente en el álgebra universal envolvente de Heisenberg y el vacío  $|0\rangle$  tal que  $p|0\rangle = 0$ . Desde este punto de vista las transformaciones canónicas no son sino cambios de variables en el espacio de fases que preservan la propiedad de que el álgebra de Heisenberg es el álgebra subyacente del sistema. Esto da lugar al formalismo del espacio de Fock como un lenguaje adecuado para nuestro estudio.

Para el presente estudio del sistema racional  $H_3$  introduzcamos un conjunto de operadores en diferencias finitas

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i^{(\delta_i)} f(\tau_i) &\equiv \frac{f(\tau_i + \delta_i) - f(\tau_i)}{\delta_i} = \frac{(e^{\delta_i \partial_i} - 1)}{\delta_i} f(\tau_i) , \\ \mathcal{X}_i^{(\delta_i)} f(\tau_i) &\equiv \tau_i f(\tau_i - \delta_i) = (\tau_i e^{-\delta_i \partial_i}) f(\tau_i) , \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  son espaciamentos; aquí no se implica suma sobre índices repetidos. El operador  $\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}$  es la derivada en diferencias finitas o momento discreto. El operador  $\mathcal{X}_i^{(\delta_i)}$  es un análogo discreto del operador de multiplicación. Los operadores  $\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}$  y  $\mathcal{X}_i^{(\delta_i)}$  forman un par canónico,

$$[\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}, \mathcal{D}_j^{(\delta_j)}] = 0 , [\mathcal{X}_i^{(\delta_i)}, \mathcal{X}_j^{(\delta_j)}] = 0 , [\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}, \mathcal{X}_j^{(\delta_j)}] = \delta_{ij} , \tag{4.5}$$

para  $i, j = 1, 2, 3$ . Por tanto, los operadores (4.4) generan el álgebra de Heisenberg en 7 dimensiones, realizando una transformación canónica cuántica triparamétrica con parámetros  $\delta_{1,2,3}$ . En el límite cuando todos los  $\delta_i$  tienden a cero, los operadores (4.4) dan lugar a la representación de coordenadas

estándar,

$$\mathcal{D}_i^{(\delta_i)} \rightarrow \partial_i, \quad \mathcal{X}_i^{(\delta_i)} \rightarrow \tau_i .$$

Demostremos cómo funciona la discretización canónica. Tómese un operador diferencial lineal  $\mathcal{L}(\partial_i, \tau_i)$  que tenga autofunciones polinomiales y considérese el problema de autovalores

$$\mathcal{L}(\partial_i, \tau_i) \varphi(\tau) = \lambda \varphi(\tau) . \quad (4.6)$$

Realizando la transformación canónica (4.4) se llega a que

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}, \mathcal{X}_i^{(\delta_i)}) \varphi(\mathcal{X}_i^{(\delta_i)})|0\rangle = \lambda \varphi(\mathcal{X}_i^{(\delta_i)})|0\rangle \quad (4.7)$$

Para dar sentido a esta ecuación se debe introducir el vacío  $|0\rangle$ :

$$\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}|0\rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3 . \quad (4.8)$$

Entonces la ecuación (4.7) tiene el sentido de un problema de autovalores en operadores en el espacio de Fock con vacío (4.8). Mostremos ahora que el problema de autovalores (4.7) posee autofunciones polinomiales y que sus autovalores son los mismos que en el caso de las autofunciones polinomiales del problema original continuo (4.6).

Para explotar la representación (4.4) definamos primero el vacío  $|0\rangle$ . La condición (4.8) en forma explícita es

$$\begin{aligned} f(\tau_1 + \delta_1, \tau_2, \tau_3) &= f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) , \\ f(\tau_1, \tau_2 + \delta_2, \tau_3) &= f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) , \\ f(\tau_1, \tau_2, \tau_3 + \delta_3) &= f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) . \end{aligned}$$

Cualquier función periódica con periodos  $\delta_i$  en las coordenadas  $\tau_i$  es la solución de estas ecuaciones; sin embargo, sin pérdida de generalidad, podemos elegir

$$f(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 1 . \quad (4.9)$$

Esto da lugar a la relación

$$\left(\mathcal{X}_i^{(\delta_i)}\right)^n |0\rangle = (\tau_i e^{-\delta_i \partial_i})^n |0\rangle = \tau_i^{(n)} e^{-n\delta_i \partial_i} |0\rangle = \tau_i^{(n)} , \quad (4.10)$$

donde el *cuasimonomio* se define como

$$\tau_i^{(n+1)} = \tau_i(\tau_i - \delta_i)(\tau_i - 2\delta_i) \cdots (\tau_i - n\delta_i) . \quad (4.11)$$

Ahora podemos relacionar las soluciones de (4.7) con las soluciones de (4.6). Supongamos que

$$\varphi(\tau) = \sum \alpha_{klm} \tau_1^k \tau_2^l \tau_3^m \quad (4.12)$$

es una solución polinomial de la ecuación (4.6). La transformación canónica (4.4) implica el reemplazo de  $\tau_i$  por  $\mathcal{X}_i^{(\delta_i)}$ . Tomando en cuenta (4.10) llegamos a la conclusión de que cada monomio en (4.12) debe reemplazarse por un cuasimonomio. Por tanto, la solución polinomial correspondiente a (4.7) es

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \sum \alpha_{klm} \tau_1^{(k)} \tau_2^{(l)} \tau_3^{(m)} , \quad (4.13)$$

con los mismos coeficientes  $\alpha_{klm}$  que (4.12) y el mismo autovalor.

## 4.2. El hamiltoniano discreto

Realizando el procedimiento de discretización canónica (4.6)  $\rightarrow$  (4.7) para el hamiltoniano  $H_3$  en la forma algebraica  $h_{H_3}$  (2.13), llegamos al siguiente operador (isospectral) en diferencias finitas:

$$\tilde{h}_{H_3} \equiv h_{H_3}(\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}, \mathcal{X}_i^{(\delta_i)}) = \sum_{k_1, k_2, k_3} A_{k_1 k_2 k_3} e^{k_1 \delta_1 \partial_1 + k_2 \delta_2 \partial_2 + k_3 \delta_3 \partial_3} , \quad (4.14)$$

con los siguientes coeficientes no nulos

$$\begin{aligned} A_{0,0,0} &= -\frac{4}{\delta_1} (2 + \delta_1 \omega) \left[ \frac{\tau_1}{\delta_1} + \frac{3\tau_2}{\delta_2} + \frac{5\tau_3}{\delta_3} \right] - \frac{6}{\delta_1} (1 + 10\nu) , \\ A_{1,0,0} &= \frac{2}{\delta_1} \left[ \frac{2\tau_1}{\delta_1} + \frac{12\tau_2}{\delta_2} + \frac{20\tau_3}{\delta_3} + 3(1 + 10\nu) \right] , \\ A_{-1,0,0} &= \frac{4}{\delta_1^2} (1 + \delta_1 \omega) \tau_1 , \\ A_{-2,0,0} &= \frac{48}{5\delta_2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \left[ \frac{2\tau_2}{\delta_2} + \frac{5\tau_3}{\delta_3} + 1 + 5\nu \right] , \\ A_{0,-1,0} &= \frac{12}{\delta_1 \delta_2} (2 + \delta_1 \omega) \tau_2 , \\ A_{0,0,-1} &= \frac{5}{2} \left[ \frac{8}{\delta_1 \delta_3} (2 + \delta_1 \omega) + \frac{9}{\delta_2^2} \right] \tau_3 , \\ A_{0,-3,0} &= \frac{128}{45\delta_3^2} \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) , \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
A_{1,-1,0} &= -\frac{24\tau_2}{\delta_1\delta_2}, \\
A_{1,0,-1} &= -\frac{40\tau_3}{\delta_1\delta_3}, \\
A_{-1,-1,0} &= -\frac{32}{15\delta_3}\tau_1\tau_2\left[\frac{\tau_2}{\delta_2} - \frac{20\tau_3}{\delta_3} - 5(1+2\nu)\right], \\
A_{-1,-2,0} &= \frac{32}{15\delta_2\delta_3}\tau_1\tau_2(\tau_2 - \delta_2), \\
A_{-1,-1,1} &= \frac{32}{15\delta_3}\tau_1\tau_2\left[\frac{\tau_2}{\delta_2} - \frac{10\tau_3}{\delta_3} - 5(1+2\nu)\right], \\
A_{-1,-1,-1} &= -\frac{64}{3\delta_3^2}\tau_1\tau_2\tau_3, \\
A_{-1,-2,1} &= -\frac{32}{15\delta_2\delta_3}\tau_1\tau_2(\tau_2 - \delta_2), \\
A_{-2,1,0} &= -\frac{48}{5\delta_2}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)\left[\frac{\tau_2}{\delta_2} + \frac{5\tau_3}{\delta_3} + 1 + 5\nu\right], \\
A_{-2,-1,0} &= -\frac{48}{5\delta_2^2}\tau_2\tau_1(\tau_1 - \delta_1), \\
A_{-2,0,-1} &= -\frac{48}{\delta_2\delta_3}\tau_3\tau_1(\tau_1 - \delta_1), \\
A_{-2,1,-1} &= \frac{48}{\delta_2\delta_3}\tau_3\tau_1(\tau_1 - \delta_1), \\
A_{0,1,-1} &= -\frac{45\tau_3}{\delta_2^2}, \\
A_{0,2,-1} &= \frac{45\tau_3}{2\delta_2^2}, \\
A_{0,-3,1} &= \frac{256}{45\delta_3^2}\tau_2(\tau_2 - \delta_2)(\tau_2 - 2\delta_2), \\
A_{0,-3,2} &= \frac{128}{45\delta_3^2}\tau_2(\tau_2 - \delta_2)(\tau_2 - 2\delta_2).
\end{aligned}$$

El problema de autovalores correspondiente es

$$\sum_{k_1, k_2, k_3} A_{k_1 k_2 k_3} \varphi(\tau_1 + k_1\delta_1, \tau_2 + k_2\delta_2, \tau_3 + k_3\delta_3) = -2\epsilon \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \quad (4.16)$$

que tiene la forma explícita

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\delta_1} \left[ (2 + \delta_1 \omega) \left( \frac{\tau_1}{\delta_1} + \frac{3\tau_2}{\delta_2} + \frac{5\tau_3}{\delta_3} \right) - 3(1 + 10\nu) \right] \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\
& + \frac{2}{\delta_1} \left[ \frac{2\tau_1}{\delta_1} + \frac{12\tau_2}{\delta_2} + \frac{20\tau_3}{\delta_3} + 3(1 + 10\nu) \right] \varphi(\tau_1 + \delta_1, \tau_2, \tau_3) \\
& + \frac{4}{\delta_1^2} (1 + \delta_1 \omega) \tau_1 \varphi(\tau_1 - \delta_1, \tau_2, \tau_3) + \frac{12}{\delta_1 \delta_2} (2 + \delta_1 \omega) \tau_2 \varphi(\tau_1, \tau_2 - \delta_2, \tau_3) \\
& + \frac{48}{5\delta_2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \left[ \frac{2\tau_2}{\delta_2} + \frac{5\tau_3}{\delta_3} + (1 + 5\nu) \right] \varphi(\tau_1 - 2\delta_1, \tau_2, \tau_3) \\
& + \frac{5}{2} \left[ \frac{8}{\delta_1 \delta_3} (2 + \delta_1 \omega) + \frac{9}{\delta_2^2} \right] \tau_3 \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3 - \delta_3) - \frac{24\tau_2}{\delta_1 \delta_2} \varphi(\tau_1 + \delta_1, \tau_2 - \delta_2, \tau_3) \\
& - \frac{128}{45\delta_3^2} \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) \varphi(\tau_1, \tau_2 - 3\delta_2, \tau_3) - \frac{40\tau_3}{\delta_1 \delta_3} \varphi(\tau_1 + \delta_1, \tau_2, \tau_3 - \delta_3) \\
& - \frac{32}{15\delta_3} \tau_1 \tau_2 \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} - \frac{20\tau_3}{\delta_3} - 5(1 + 2\nu) \right] \varphi(\tau_1 - \delta_1, \tau_2 - \delta_2, \tau_3) \\
& + \frac{32}{15\delta_2 \delta_3} \tau_1 \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) \varphi(\tau_1 - \delta_1, \tau_2 - 2\delta_2, \tau_3) \\
& + \frac{32}{15\delta_3} \tau_1 \tau_2 \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} - \frac{10\tau_3}{\delta_3} - 5(1 + 2\nu) \right] \varphi(\tau_1 - \delta_1, \tau_2 - \delta_2, \tau_3 + \delta_3) \\
& - \frac{64}{3\delta_3^2} \tau_1 \tau_2 \tau_3 \varphi(\tau_1 - \delta_1, \tau_2 - \delta_2, \tau_3 - \delta_3) \\
& - \frac{32}{15\delta_2 \delta_3} \tau_1 \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) \varphi(\tau_1 - \delta_1, \tau_2 - 2\delta_2, \tau_3 + \delta_3) \\
& - \frac{48}{5\delta_2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} + \frac{5\tau_3}{\delta_3} + (1 + 5\nu) \right] \varphi(\tau_1 - 2\delta_1, \tau_2 + \delta_2, \tau_3) \\
& - \frac{32}{15\delta_2 \delta_3} \tau_1 \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) \varphi(\tau_1 - \delta_1, \tau_2 - 2\delta_2, \tau_3 + \delta_3) \\
& - \frac{48}{5\delta_2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} + \frac{5\tau_3}{\delta_3} + (1 + 5\nu) \right] \varphi(\tau_1 - 2\delta_1, \tau_2 + \delta_2, \tau_3) \\
& - \frac{48}{5\delta_2^2} \tau_2 \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \varphi(\tau_1 - 2\delta_1, \tau_2 - \delta_2, \tau_3) \\
& - \frac{48}{\delta_2 \delta_3} \tau_3 \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \varphi(\tau_1 - 2\delta_1, \tau_2, \tau_3 - \delta_3) \\
& + \frac{48}{\delta_2 \delta_3} \tau_3 \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \varphi(\tau_1 - 2\delta_1, \tau_2 + \delta_2, \tau_3 - \delta_3) \\
& - \frac{45\tau_3}{\delta_2^2} \varphi(\tau_1, \tau_2 + \delta_2, \tau_3 - \delta_3) + \frac{45\tau_3}{2\delta_2^2} \varphi(\tau_1, \tau_2 + 2\delta_2, \tau_3 - \delta_3)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{256}{45\delta_3^2} \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) \varphi(\tau_1, \tau_2 - 3\delta_2, \tau_3 + \delta_3) \\
& + \frac{128}{45\delta_3^2} \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) \varphi(\tau_1, \tau_2 - 3\delta_2, \tau_3 + 2\delta_3) = -2\epsilon \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3) .
\end{aligned}$$

Este problema define el sistema discreto uniforme  $H_3$ . Es importante notar que, a pesar de que comenzamos con un operador diferencial de segundo orden, encontramos un operador en diferencias finitas de 22 puntos – conecta la función en 22 puntos diferentes en la malla. La estructura del operador se muestra en la figura 4.1.

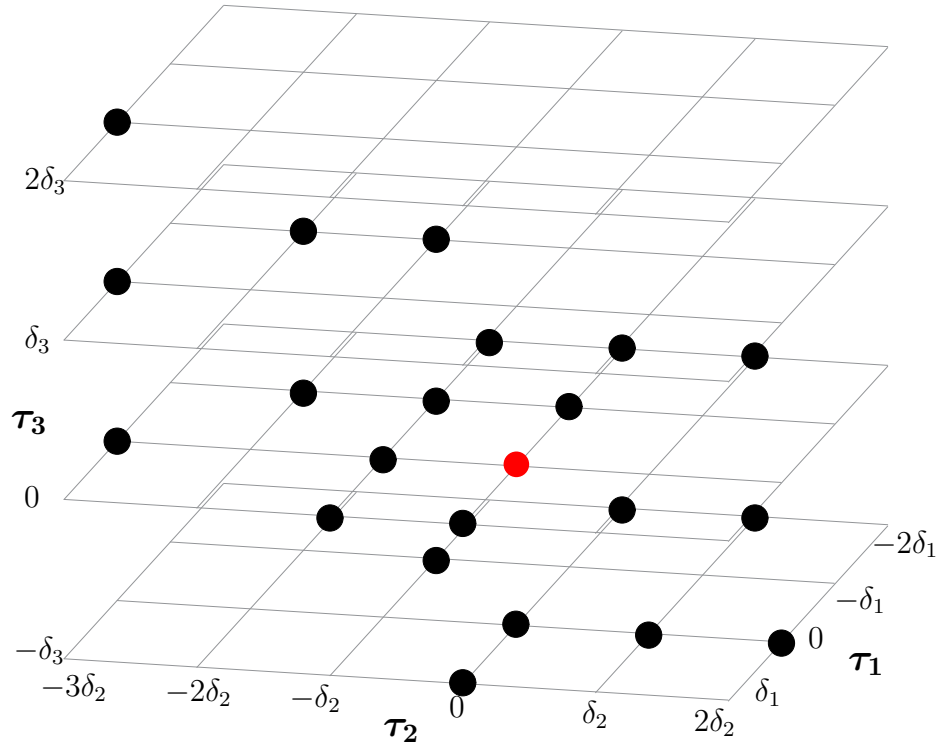


Figura 4.1: Representación gráfica del operador discreto en 22 puntos (4.14). El origen se muestra en rojo.

El espectro del operador discreto  $\tilde{h}_{H_3}$  (4.14) para autofunciones polinomiales coincide con el espectro del operador continuo  $h_{H_3}$  (2.13) para el cual todas las autofunciones son polinomiales:

$$\epsilon_{n_1, n_2, n_3} = 2\omega(n_1 + 3n_2 + 5n_3) , \quad (4.18)$$



siendo los  $n$ 's enteros no negativos. Las autofunciones de (4.14) están relacionadas con las autofunciones del operador continuo  $h_{H_3}$  reemplazando cada monomio con un cuasimonomio en cada variable. Tal fenómeno puede denominarse *isoespectralidad polinomial o parcial*. No podemos excluir la existencia de otros autoestados del operador discreto  $\tilde{h}_{H_3}$  que no estén dados por autofunciones polinomiales. Dichos autoestados pueden corresponder a autofunciones no normalizables de  $h_{H_3}$ .

Como un caso particular consideremos el espaciamiento unidad  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$ . Este caso corresponde a la discretización en una malla cúbica en el espacio de órbitas (el espacio- $\tau$ ) con vector de malla unitario. La ecuación (4.17) se reduce a

$$\begin{aligned}
& 2[(2 + \omega)(\tau_1 + 3\tau_2 + 5\tau_3) - 3(1 + 10\nu)] \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\
& + 2[2\tau_1 + 12\tau_2 + 20\tau_3 + 3(1 + 10\nu)] \varphi(\tau_1 + 1, \tau_2, \tau_3) \\
& + 4(1 + \omega)\tau_1 \varphi(\tau_1 - 1, \tau_2, \tau_3) + 12(2 + \omega)\tau_2 \varphi(\tau_1, \tau_2 - 1, \tau_3) \\
& + \frac{5}{2}(25 + 8\omega)\tau_3 \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3 - 1) - 24\tau_2 \varphi(\tau_1 + 1, \tau_2 - 1, \tau_3) \\
& + \frac{48}{5}\tau_1(\tau_1 - 1)[2\tau_2 + 5\tau_3 + (1 + 5\nu)] \varphi(\tau_1 - 2, \tau_2, \tau_3) \\
& \frac{128}{45}\tau_2(\tau_2 - 1)(\tau_2 - 2) \varphi(\tau_1, \tau_2 - 3, \tau_3) - 40\tau_3 \varphi(\tau_1 + 1, \tau_2, \tau_3 - 1) \\
& - \frac{32}{15}\tau_1\tau_2[\tau_2 - 20\tau_3 - 5(1 + 2\nu)] \varphi(\tau_1 - 1, \tau_2 - 1, \tau_3) \\
& + \frac{32}{15}\tau_1\tau_2(\tau_2 - 1) \varphi(\tau_1 - 1, \tau_2 - 2, \tau_3) - \frac{48}{5}\tau_2\tau_1(\tau_1 - 1) \varphi(\tau_1 - 2, \tau_2 - 1, \tau_3) \\
& + \frac{32}{15}\tau_1\tau_2[\tau_2 - 10\tau_3 - 5(1 + 2\nu)] \varphi(\tau_1 - 1, \tau_2 - 1, \tau_3 + 1) \\
& - \frac{64}{3}\tau_1\tau_2\tau_3 \varphi(\tau_1 - 1, \tau_2 - 1, \tau_3 - 1) - \frac{32}{15}\tau_1\tau_2(\tau_2 - 1) \varphi(\tau_1 - 1, \tau_2 - 2, \tau_3 + 1) \\
& - \frac{48}{5}\tau_1(\tau_1 - 1)[\tau_2 + 5\tau_3 + (1 + 5\nu)] \varphi(\tau_1 - 2, \tau_2 + 1, \tau_3) \\
& - 48\tau_3\tau_1(\tau_1 - 1) \varphi(\tau_1 - 2, \tau_2, \tau_3 - 1) + 48\tau_3\tau_1(\tau_1 - 1) \varphi(\tau_1 - 2, \tau_2 + 1, \tau_3 - 1) \\
& - 45\tau_3 \varphi(\tau_1, \tau_2 + 1, \tau_3 - 1) + \frac{45\tau_3}{2} \varphi(\tau_1, \tau_2 + 2, \tau_3 - 1) \\
& + \frac{256}{45}\tau_2(\tau_2 - 1)(\tau_2 - 2) \varphi(\tau_1, \tau_2 - 3, \tau_3 + 1)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{128}{45} \tau_2 (\tau_2 - 1) (\tau_2 - 2) \varphi(\tau_1, \tau_2 - 3, \tau_3 + 2) \\
& + \frac{128}{45} \tau_2 (\tau_2 - 1) (\tau_2 - 2) \varphi(\tau_1, \tau_2 - 3, \tau_3 + 2) = -2\epsilon \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3) .
\end{aligned}$$

### 4.3. Integral discreta

Un procedimiento similar de discretización puede aplicarse a la integral  $\mathcal{F}$ . En lugar del operador continuo  $f$  (2.19) obtenemos su contraparte discreta

$$\tilde{f} \equiv f(\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}, \mathcal{X}_i^{(\delta_i)}) = \sum_{k_1, k_2, k_3} B_{k_1 k_2 k_3} e^{k_1 \delta_1 \partial_1 + k_2 \delta_2 \partial_2 + k_3 \delta_3 \partial_3} , \quad (4.20)$$

con los siguientes coeficientes

$$\begin{aligned}
B_{0,-1,0} &= -\frac{3\tau_2}{\delta_2} \left[ \frac{10\tau_3}{\delta_3} + \frac{12\tau_2}{\delta_2} + 5 + 30\nu \right] , \\
B_{0,-2,0} &= \frac{18}{\delta_2^2} \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) , \\
B_{0,0,-1} &= -\frac{5\tau_3}{\delta_3} \left[ \frac{6\tau_2}{\delta_2} + \frac{20\tau_3}{\delta_3} - 9 + 30\nu \right] , \\
B_{0,0,-2} &= \frac{50}{\delta_3^2} \tau_3 (\tau_3 - \delta_3) , \\
B_{-1,1,0} &= \frac{12\tau_3}{\delta_2 \delta_3} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) , \\
B_{-1,1,-1} &= \frac{3}{2} \frac{\tau_1 \tau_3}{\delta_2} \left[ \frac{8}{\delta_3} (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) + \frac{15}{\delta_2} \right] , \\
B_{-1,2,-1} &= -\frac{45}{4\delta_2^2} \tau_1 \tau_3 , \\
B_{-1,0,-1} &= -\frac{3}{4\delta_3} \tau_1 \tau_3 \left[ \frac{15}{\delta_3} - \frac{16}{\delta_2} (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) \right] , \\
B_{-1,-3,0} &= -\frac{64}{45\delta_3^2} \tau_1 \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) , \\
B_{-1,-3,1} &= \frac{128}{45\delta_3^2} \tau_1 \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) , \\
B_{-1,-3,2} &= -\frac{64}{45\delta_3^2} \tau_1 \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) ,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
B_{-2,-1,0} &= \frac{8}{15\delta_3}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)\tau_2 \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} - \frac{40\tau_3}{\delta_3} - 9 - 20\nu \right] , \\
B_{-2,-2,0} &= -\frac{8}{15\delta_2\delta_3}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)\tau_2(\tau_2 - \delta_2) , \\
B_{-2,-1,1} &= -\frac{8}{15\delta_3}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)\tau_2 \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} - \frac{20\tau_3}{\delta_3} - 9 - 20\nu \right] , \\
B_{-2,-1,-1} &= \frac{32}{3\delta_3^2}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)\tau_2\tau_3 , \\
B_{-2,-2,1} &= \frac{8}{15\delta_2\delta_3}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)\tau_2(\tau_2 - \delta_2) , \\
B_{-3,1,0} &= \frac{24}{5\delta_2}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1) \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} + 1 + 5\nu \right] , \\
B_{-3,-1,0} &= \frac{24}{5\delta_2^2}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)\tau_2 , \\
B_{0,-1,-1} &= \frac{30}{\delta_2\delta_3}\tau_2\tau_3 .
\end{aligned}$$

Se obtiene un operador discreto en 22 puntos. La estructura del operador se muestra en la figura 4.2. Resulta sorprendente que ambos operadores discretos  $\tilde{h}_{H_3}$  y  $\tilde{f}$  tienen una estructura que conecta 22 puntos. Sin embargo, los puntos que conectan son diferentes.

Los operadores discretos  $\tilde{h}_{H_3}$  y  $\tilde{f}$  conmutan. Esto implica que el procedimiento de discretización canónica preserva la propiedad de integrabilidad.

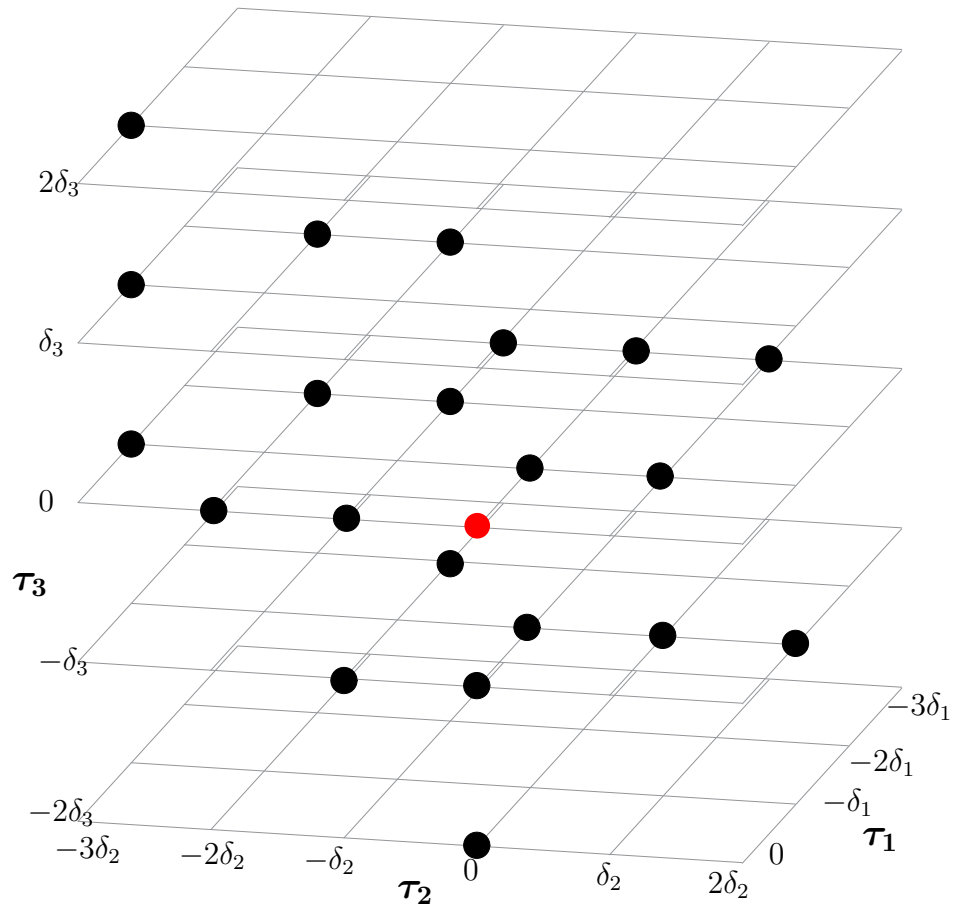


Figura 4.2: Representación gráfica del operador discreto en 22 puntos (10.10). El origen se muestra en rojo.

# Capítulo 5

## Generalización cuasi-exactamente soluble

### 5.1. Autofunciones radiales

Entre las autofunciones del hamiltoniano  $h_{H_3}$  (2.13) existe una familia infinita de autofunciones que dependen solamente de la variable  $\tau_1$ , la cual es el cuadrado de la variable radial  $r$ . Estos autoestados son soluciones del problema de autovalores

$$-h_1 \varphi \equiv -4\tau_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_1^2} + (4\omega\tau_1 - 6(1 + 10\nu)) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} = \epsilon \varphi . \quad (5.1)$$

Las autofunciones correspondientes están dadas por los polinomios de Laguerre y los autovalores son lineales en el número cuántico

$$\varphi_{n_1}(\tau_1) = L_{n_1}^{(1+30\nu)/2}(\omega\tau_1) , \quad \epsilon_{n_1} = 4\omega n_1 , \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

El operador  $h_1$  de (5.1) puede reescribirse en términos de los generadores  $J_k^0, J^-$  de la subálgebra de Cartan del álgebra  $sl(2)$  de los operadores diferenciales de primer orden:

$$J_k^+ = \tau_1^2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} - k\tau_1 , \quad J_k^0 = \tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} - \frac{k}{2} , \quad J^- = \frac{\partial}{\partial \tau_1} , \quad (5.3)$$

(véase [20]). Para  $k$  entero los generadores (5.3) tienen un subespacio de polinomios invariante en común, que corresponde a polinomios de grado no mayor que  $k$ ,

$$\mathcal{P}_k = \langle \tau_1^p \mid 0 \leq p \leq k \rangle , \quad (5.4)$$

donde  $\dim \mathcal{P}_k = (k+1)$ . Cuando se reescribe en términos de estos generadores, el operador  $h_1$  toma la forma  $sl(2)$ -Lie-algebraica

$$h_1 = 4J_0^0 J^- - 4\omega J_0^0 + 6(1 + 10\nu)J^- . \quad (5.5)$$

Es sencillo comprobar que este operador preserva un flag infinito de espacios polinomiales (5.4),

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_k \subset \cdots , \quad (5.6)$$

y, en particular, cualquier autofunción es un elemento del flag.

## 5.2. Hamiltoniano cuasi-exactamente soluble

Por definición un operador diferencial lineal es *cuasi-exactamente soluble* (QES) si preserva un espacio funcional de dimensión finita con una base definida explícitamente. Se caracteriza por el conocimiento explícito de un número finito de autoestados. La existencia de una familia infinita de autofunciones del hamiltoniano que dependen de una sola variable sugiere la existencia de una generalización QES del hamiltoniano. Para construirla seguiremos un procedimiento general que ha sido utilizado para construir generalizaciones QES para todos los hamiltonianos racionales cristalográficos (véase [20]).

Busquemos el hamiltoniano QES en una cierta forma

$$\mathcal{H}_{H_3}^{(qes)} = \mathcal{H}_{H_3} + V^{(qes)}(\tau_1) , \quad (5.7)$$

donde  $V^{(qes)}$  es un potencial. Ahora realicemos la rotación de norma de (5.7) en la forma (2.1). Imponemos el requerimiento de que el operador resultante posea un familia de autofunciones dependientes de  $\tau_1$ . Obtenemos la siguiente ecuación:

$$-h_1^{(qes)} \varphi \equiv -4\tau_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_1^2} + (4\omega\tau_1 - 6(1 + 10\nu)) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} + 2V^{(qes)}(\tau_1)\varphi = \epsilon\varphi , \quad (5.8)$$

la cual es la misma ecuación que (5.1) más el término que proviene de la adición del potencial  $V^{(qes)}(\tau_1)$ .

¿Bajo qué condición sobre el potencial  $V^{(qes)}$  el operador  $h_1^{(qes)}$  es  $sl(2)$ -Lie-algebraico? Siguiendo a [20] buscamos una rotación de norma de  $h_1^{(qes)}$  que nos permita deshacernos de  $V^{(qes)}$  y reducir el operador resultante a una forma  $sl(2)$ -Lie-algebraica. Dicha transformación existe:

$$\begin{aligned}
h_1^{(sl(2)-qes)} &= \tau_1^{-\gamma} \exp\left(\frac{a}{4}\tau_1^2\right) h_1^{(qes)} \tau_1^\gamma \exp\left(-\frac{a}{4}\tau_1^2\right) \\
&= 4\tau_1 \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} - 2(2a\tau_1^2 + 2\omega\tau_1 - 3 - 4\gamma - 30\nu) \frac{\partial}{\partial \tau_1} + a^2\tau_1^3 \\
&\quad + 2a\omega\tau_1^2 - 2a \left(2\gamma + 15\nu + \frac{5}{2}\right) \tau_1 + \frac{2\gamma(2\gamma + 30\nu + 1)}{\tau_1} \\
&\quad - 4\omega\gamma - 2V^{(qes)}(\tau_1) ,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

donde  $a \geq 0$  y  $\gamma$  son parámetros. Luego, el potencial  $V^{(qes)}$  que permite la existencia de la representación en  $sl(2)$  tiene la forma

$$V^{(qes)}(\tau_1) = \frac{1}{2} a^2\tau_1^3 + a\omega\tau_1^2 - a \left(2k + 2\gamma + 15\nu + \frac{5}{2}\right) \tau_1 + \frac{\gamma(2\gamma + 30\nu + 1)}{\tau_1} , \tag{5.10}$$

y el operador  $h_1^{(sl(2)-qes)}$  tiene la forma Lie-algebraica

$$h_1^{(sl(2)-qes)} = 4J_k^0 J^- - 4aJ_k^+ - 4\omega J_k^0 + 2(k + 4\gamma + 3(1 + 10\nu))J^- . \tag{5.11}$$

Aquí los términos constantes son omitidos.

A partir de los resultados de la sección anterior es claro que el operador  $h_1^{(sl(2)-qes)}$  tiene al espacio  $\mathcal{P}_k$  (5.4) como un subespacio invariante, pero no preserva el flag de espacios (5.6). Por tanto,  $h_1^{(sl(2)-qes)}$  tiene  $(k + 1)$  autofunciones polinomiales en la forma de polinomios de grado  $k$ ,

$$P_j^{(k)}(\tau_1) = \sum_{i=0}^k \gamma_i^{(j)} \tau_1^i , \quad j = 0, 1, 2, \dots ,$$

mientras que las otras autofunciones no son polinomios. Esto implica que el hamiltoniano (5.7) con la elección de potencial (5.10) tiene una forma  $sl(2)$ -cuasi-exactamente-soluble.

La expresión final de el hamiltoniano  $sl(2)$ -cuasi-exactamente-soluble asociado con el espacio de raíces  $H_3$  es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{H_3}^{(qes)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \omega^2 x_k^2 + \frac{g}{x_k^2} \right] \\
&+ \sum_{\{i,j,k\}} \sum_{\mu_{1,2}=0,1} \frac{2g}{[x_i + (-1)^{\mu_1} \varphi_+ x_j + (-1)^{\mu_2} \varphi_- x_k]^2} \\
&+ \frac{1}{2} a^2 (\mathbf{x}^2)^3 + a\omega (\mathbf{x}^2)^2 - a \left( 2k + 2\gamma + 15\nu + \frac{5}{2} \right) \mathbf{x}^2 \\
&+ \frac{\gamma(2\gamma + 30\nu + 1)}{\mathbf{x}^2}, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

donde  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  y sus permutaciones pares, y  $\mathbf{x}^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2$ . Para este hamiltoniano conocemos  $(k + 1)$  autoestados explícitamente. Sus autofunciones son de la forma

$$\Psi_k(x) = \Delta_1^\nu \Delta_2^\nu (\mathbf{x}^2)^\gamma \cdot P_k(\mathbf{x}^2) e^{-\frac{\omega}{2}\mathbf{x}^2 - \frac{a}{4}(\mathbf{x}^2)^2} \tag{5.13}$$

donde  $P_k$  es un polinomio de grado  $k$ , la constante de acoplamiento  $g = \nu(\nu - 1) > -\frac{1}{4}$  y  $\Delta_{1,2}$  vienen dados por (1.17). Vale la pena mostrar varios  $P_k$  explícitamente,

$$\begin{aligned}
P_0(\mathbf{x}^2) &= 1, \quad E_0 = \frac{3}{2}\omega \left( 1 + 10\nu + \frac{4}{3}\gamma \right), \\
P_{1,\pm}(\mathbf{x}^2) &= \mathbf{x}^2 + \frac{1}{2a} \left[ \omega \pm \sqrt{\omega^2 + 2a(4\gamma + 3(1 + 10\nu))} \right], \\
E_{1,\pm} &= E_0 + \omega \mp \sqrt{\omega^2 + 2a(4\gamma + 3(1 + 10\nu))}. \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Las soluciones para  $k = 1$  están relacionadas a través de continuación analítica en uno de los parámetros  $\omega, a, \gamma, \nu$  manteniendo los otras parámetros fijos.

Dado que  $V^{(qes)}(\tau_1) = V^{(qes)}(r^2)$  (en coordenadas esféricas), la integral  $\mathcal{F}$  (1.13) continúa conmutando con el hamiltoniano QES (5.12).



# Capítulo 6

## El álgebra escondida $h^{(3)}$

### 6.1. Operadores generadores

Hemos mostrado que la forma algebraica del operador hamiltoniano (2.13) actúa en los espacios de polinomios en varias variables

$$\mathcal{P}_n^{(1,2,3)} = \langle \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \tau_3^{p_3} \mid 0 \leq p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

¿Puede el espacio de dimensión finita  $\mathcal{P}_n^{(1,2,3)}$  ser un espacio de representación de un álgebra de operadores diferenciales? Mostraremos que esta respuesta es afirmativa y por tanto el álgebra existe. Nos referiremos en adelante a esta álgebra como el álgebra  $h^{(3)}$ .

Los elementos generadores del álgebra  $h^{(3)}$  pueden ser separados en dos clases. La primera clase de generadores actúa en  $\mathcal{P}_n^{(1,2,3)}$  para cualquier  $n \in \mathbf{N}$  y por tanto preserva el flag  $\mathcal{P}^{(1,2,3)}$ . Los operadores de la segunda clase actúan en el espacio  $\mathcal{P}_n^{(1,2,3)}$  para *sólo* un cierto valor de  $n$ . Corresponden a operadores de ascenso.

El álgebra  $h^{(3)}$  es de dimensión infinita pero es generada por un número finito de generadores. Los operadores generadores de la primera clase son:

- 13 operadores diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}
T_0^{(1)} &= \partial_1, & T_0^{(2)} &= \partial_2, & T_0^{(3)} &= \partial_3, \\
T_1^{(1)} &= \tau_1 \partial_1, & T_2^{(2)} &= \tau_2 \partial_2, & T_3^{(3)} &= \tau_3 \partial_3, \\
T_1^{(3)} &= \tau_1 \partial_3, & T_{11}^{(3)} &= \tau_1^2 \partial_3, & T_{111}^{(3)} &= \tau_1^3 \partial_3, \\
T_1^{(2)} &= \tau_1 \partial_2, & T_{11}^{(2)} &= \tau_1^2 \partial_2, & T_2^{(3)} &= \tau_2 \partial_3, \\
T_{12}^{(3)} &= \tau_1 \tau_2 \partial_3.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

- 6 operadores diferenciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}
T_2^{(11)} &= \tau_2 \partial_{11}, & T_{22}^{(13)} &= \tau_2^2 \partial_{13}, & T_{222}^{(33)} &= \tau_2^3 \partial_{33}, \\
T_3^{(12)} &= \tau_3 \partial_{12}, & T_3^{(22)} &= \tau_3 \partial_{22}, & T_{13}^{(22)} &= \tau_1 \tau_3 \partial_{22}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

- 2 operadores diferenciales de tercer orden:

$$T_3^{(111)} = \tau_3 \partial_{111}, \quad T_{33}^{(222)} = \tau_3^2 \partial_{222} \tag{6.3}$$

Los generadores de la segunda clase (operadores de ascenso) son:

- Un operador diferencial de primer orden:

$$J_1^+ = \tau_1 J_0. \tag{6.4}$$

- 4 operadores diferenciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}
J_{2,-1}^+ &= \tau_2 \partial_1 J_0, & J_{3,-2}^+ &= \tau_3 \partial_2 J_0, \\
J_{22,-3}^+ &= \tau_2^2 \partial_3 J_0, & J_2^+ &= \tau_2 J_0 (J_0 + 1).
\end{aligned} \tag{6.5}$$

- 3 operadores diferenciales de tercer orden:

$$\begin{aligned}
J_{3,-11}^+ &= \tau_3 \partial_{11} J_0, & J_{3,-1}^+ &= \tau_3 \partial_1 J_0 (J_0 + 1), \\
J_3^+ &= \tau_3 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

donde

$$J_0 = \tau_1 \partial_1 + 2\tau_2 \partial_2 + 3\tau_3 \partial_3 - n. \tag{6.7}$$

y la siguiente notación para las derivadas es usada:

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial \tau_i}, \quad \partial_{ij} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j}, \quad \partial_{ijk} \equiv \frac{\partial^3}{\partial \tau_i \partial \tau_j \partial \tau_k}.$$

## 6.2. Estructura y relaciones de conmutación

Para investigar las relaciones de conmutación entre los generadores resulta útil la siguiente noción. Sean  $T_1$  y  $T_2$  operadores que actúan en monomios. Decimos que  $T_2$  es el operador *conjugado* a  $T_1$  cuando el operador  $T_2T_1$  no cambia el grado de un monomio.

Un cierto número de operadores generadores (6.1)-(6.6) de  $h^{(3)}$  generan diez subálgebras abelianas:

$$\begin{aligned}
 L = \{T_0^{(3)}, T_1^{(3)}, T_{11}^{(3)}, T_{111}^{(3)}\} &\longleftrightarrow \mathfrak{L} = \{T_3^{(111)}, J_{3,-11}^+, J_{3,-1}^+, J_3^+\} \\
 R = \{T_0^{(2)}, T_1^{(2)}, T_{11}^{(2)}\} &\longleftrightarrow \mathfrak{R} = \{T_2^{(11)}, J_{2,-1}^+, J_2^+\} \\
 F = \{T_2^{(3)}, T_{12}^{(3)}\} &\longleftrightarrow \mathfrak{F} = \{T_3^{(12)}, J_{3,-2}^+\} \\
 E = \{T_3^{(22)}, T_{13}^{(22)}\} &\longleftrightarrow \mathfrak{E} = \{T_{22}^{(13)}, J_{22,-3}^+\} \\
 G = \{T_{222}^{(33)}\} &\longleftrightarrow \mathfrak{G} = \{T_{33}^{(222)}\}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Los restantes operadores generan un álgebra no conmutativa

$$B = \{T_0^{(1)}, T_1^{(1)}, T_2^{(2)}, T_3^{(3)}, J_0, J_1^+\} . \tag{6.9}$$

La flecha indica que los generadores están relacionados mediante conjugación (por ejemplo  $T_0^{(3)}$  y  $J_3^+$ ). El álgebra  $B$  es la única que es su propia conjugada.

Los operadores de las subálgebras abelianas se muestran en un cierto orden. Este ordenamiento está relacionado con el operador  $J_1^+$ . Sea  $Y$  una entre las subálgebras abelianas (6.8) y sea  $Y = \{X_0, X_1, X_2, \dots, X_n\}$  donde  $n$  puede ser 1, 2, 3, 4. Los elementos generadores de  $Y$  están ordenados por las condiciones

$$[X_i, J_1^+] = (n - i)X_{i+1} , \quad i < n \tag{6.10}$$

y

$$[X_n, J_1^+] = 0 . \tag{6.11}$$

Esto implica también que las álgebras de Lie  $\{X, J_1^+\}$  son nilpotentes. A su vez, los generadores pueden escribirse como conmutadores:

$$X_i = \frac{(n - i)!}{n!} \underbrace{[[\dots [X_0, J_1^+] \dots, J_1^+], J_1^+]}_{i \text{ conmutadores}} .$$

Las relaciones de conmutación entre los elementos generadores se muestran en el apéndice B. Sin embargo, la clasificación (6.8),(6.9) permite una representación compacta de estas relaciones de conmutación. Mostramos primero los conmutadores de las subálgebras abelianas separadas de sus conjugadas:

$$\begin{array}{ll}
[L, R] = 0, & [\mathfrak{L}, \mathfrak{R}] = 0, \\
[L, F] = 0, & [\mathfrak{L}, \mathfrak{F}] = 0, \\
[L, E] = P_2(R), & [\mathfrak{L}, \mathfrak{E}] = P_2(\mathfrak{R}), \\
[L, G] = 0, & [\mathfrak{L}, \mathfrak{G}] = 0, \\
[R, F] = L, & [\mathfrak{R}, \mathfrak{F}] = \mathfrak{L}, \\
[R, E] = 0, & [\mathfrak{R}, \mathfrak{E}] = 0, \\
[R, G] = P_2(F), & [\mathfrak{R}, \mathfrak{G}] = P_2(\mathfrak{F}), \\
[F, E] = P_2(R \oplus B), & [\mathfrak{F}, \mathfrak{E}] = P_2(\mathfrak{R} \oplus B), \\
[F, G] = 0, & [\mathfrak{F}, \mathfrak{G}] = 0, \\
[E, G] = P_3(F \oplus B), & [\mathfrak{E}, \mathfrak{G}] = P_3(\mathfrak{F} \oplus B),
\end{array}$$

Aquí  $P_k(Q)$  significa que el conmutador es un polinomio de grado  $k$  en los generadores de  $Q$ . Salta a la vista que los conmutadores son simétricos ante conjugación. Esta propiedad es también satisfecha por el conjunto de relaciones de conmutación:

$$\begin{array}{ll}
[L, \mathfrak{R}] = P_2(F \oplus B), & [\mathfrak{L}, R] = P_2(\mathfrak{F} \oplus B), \\
[L, \mathfrak{F}] = P_2(R \oplus B), & [\mathfrak{L}, F] = P_2(\mathfrak{R} \oplus B), \\
[L, \mathfrak{E}] = P_2(F), & [\mathfrak{L}, E] = P_2(\mathfrak{F}), \\
[L, \mathfrak{G}] = P_2(R \oplus E), & [\mathfrak{L}, G] = P_2(\mathfrak{R} \oplus \mathfrak{E}), \\
[R, \mathfrak{F}] = E, & [\mathfrak{R}, F] = \mathfrak{E}, \\
[R, \mathfrak{E}] = P_2(F \oplus B), & [\mathfrak{R}, E] = P_2(\mathfrak{F} \oplus B), \\
[R, \mathfrak{G}] = 0, & [\mathfrak{R}, G] = 0, \\
[F, \mathfrak{E}] = G, & [\mathfrak{F}, E] = \mathfrak{G}, \\
[F, \mathfrak{G}] = P_2(E \oplus B), & [\mathfrak{F}, G] = P_2(\mathfrak{E} \oplus B), \\
[E, \mathfrak{G}] = 0, & [\mathfrak{E}, G] = 0,
\end{array}$$

El conmutador de un operador en cualquier subálgebra abeliana (6.8) y un operador en la subálgebra  $B$  es del tipo de un producto semidirecto:

$$\begin{array}{llllll}
[L, B] = L, & [R, B] = R, & [F, B] = F, & [E, B] = E, & [G, B] = G, \\
[\mathfrak{L}, B] = \mathfrak{L}, & [\mathfrak{R}, B] = \mathfrak{R}, & [\mathfrak{F}, B] = \mathfrak{F}, & [\mathfrak{E}, B] = \mathfrak{E}, & [\mathfrak{G}, B] = \mathfrak{G},
\end{array}$$

El conmutador de generadores de subálgebras conjugadas es un polinomio en los generadores de  $B$ :

$$\begin{aligned} [L, \mathfrak{L}] &= P_3(B), & [R, \mathfrak{R}] &= P_2(B), & [F, \mathfrak{F}] &= P_2(B), \\ [E, \mathfrak{E}] &= P_3(B), & [G, \mathfrak{G}] &= P_4(B). \end{aligned}$$

Las relaciones mencionadas anteriormente pueden ser representadas mediante algunos diagramas triangulares, por ejemplo,

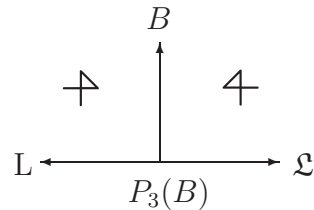


Figura 6.1: Diagrama triangular que relaciona las subálgebras  $L$ ,  $L$  y  $B$ . Puede considerarse como generalización de la descomposición de Gauss.

Las relaciones de conmutación son no-lineales en los operadores generadores. Por tanto, para tener una estructura de álgebra de Lie, es necesario considerar monomios en los operadores generadores como los elementos de  $h^{(3)}$ . Puede probarse que las relaciones de conmutación no cierran a orden finito. Se sigue que  $h^{(3)}$  es el álgebra de dimensión infinita de monomios ordenados en los 29 operadores generadores (6.1)-(6.6) que se muestran anteriormente.

### 6.3. Representación algebraica de $H_3$

Dado que  $h^{(3)}$  es el álgebra de operadores diferenciales que actúan en  $\mathcal{P}_n^{(1,2,3)}$  debe ser posible escribir el hamiltoniano  $h_{H_3}$  (2.13) como una combinación de los elementos generadores (que preservan el flag) de  $h^{(3)}$ .

La forma  $h^{(3)}$ -Lie algebraica del modelo  $H_3$  (1.1) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
h_{H_3} = & 4T_1^{(1)}T_0^{(1)} + 24T_2^{(2)}T_0^{(1)} + 40T_3^{(3)}T_0^{(1)} - \frac{48}{5}T_2^{(2)}T_{11}^{(2)} \\
& + \frac{45}{2}T_3^{(22)} + \frac{32}{15}T_{12}^{(3)}T_2^{(2)} - 48T_3^{(3)}T_{11}^{(2)} - \frac{64}{3}T_3^{(3)}T_{12}^{(3)} \\
& + \frac{128}{45}T_{222}^{(33)} + (6 + 60\nu)T_0^{(1)} - 4\omega T_1^{(1)} - \frac{48}{5}(1 + 5\nu)T_{11}^{(2)} \\
& - 12\omega T_2^{(2)} - \frac{64}{15}(2 + 5\nu)T_{12}^{(3)} - 20\omega T_3^{(3)}.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

No es posible presentar una expresión similar para el operador  $f$  (2.19). El flag preservado por este operador tiene vector característico  $(1, 3, 5)$ , de modo que este resultado es consistente.

## Parte II

### El sistema integrable $H_4$

# Capítulo 7

## El hamiltoniano $H_4$ (solubilidad e integrabilidad)

### 7.1. El hamiltoniano

El sistema cuántico  $H_4$  es un sistema en cuatro dimensiones relacionado con el sistema de raíces no cristalográfico  $H_4$  (denotado por  $\mathcal{R}_4$ ). Sustituyendo en (1) el conjunto de raíces positivas  $\mathcal{R}_4^+$  de  $H_4$  el hamiltoniano toma la forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{H_4} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \omega^2 x_k^2 + \frac{g}{x_k^2} \right] \\ & + \sum_{\mu_{2,3,4}=0,1} \frac{2g}{[x_1 + (-1)^{\mu_2} x_2 + (-1)^{\mu_3} x_3 + (-1)^{\mu_4} x_4]^2} \\ & + \sum_{\{i,j,k,l\}} \sum_{\mu_{1,2}=0,1} \frac{2g}{[x_i + (-1)^{\mu_1} \varphi_+ x_j + (-1)^{\mu_2} \varphi_- x_k + 0 \cdot x_l]^2}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

donde  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$  y sus permutaciones pares. La razón áurea y su conjugado algebraico se denotan por

$$\varphi_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La constante de acoplamiento  $g$  se escribe como

$$g = \nu(\nu - 1) > -\frac{1}{4}. \quad (7.2)$$



El hamiltoniano (y por tanto el sistema físico) es simétrico con respecto a las transformaciones del grupo de Coxeter  $H_4$ . Es también simétrico ante el intercambio

$$\begin{aligned} x_i &\longleftrightarrow x_j \\ \varphi_+ &\longleftrightarrow \varphi_- \end{aligned} \quad (7.3)$$

con  $i, j = 1, 2, 3, 4$  e  $i \neq j$ .

La expresión explícita del hamiltoniano (7.1) en las coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{H_4} = & -\frac{1}{2}\Delta^{(4)} + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + \frac{1}{2}\nu(\nu-1) \left[ \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} \right] \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + \varphi_+x_2 + \varphi_-x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - \varphi_+x_2 + \varphi_-x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + \varphi_+x_2 - \varphi_-x_3)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - \varphi_+x_2 - \varphi_-x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + \varphi_+x_3 + \varphi_-x_4)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - \varphi_+x_3 + \varphi_-x_4)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + \varphi_+x_3 - \varphi_-x_4)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - \varphi_+x_3 - \varphi_-x_4)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + \varphi_+x_4 + \varphi_-x_2)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - \varphi_+x_4 + \varphi_-x_2)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + \varphi_+x_4 - \varphi_-x_2)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - \varphi_+x_4 - \varphi_-x_2)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 + \varphi_+x_1 + \varphi_-x_4)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 - \varphi_+x_1 + \varphi_-x_4)^4} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 + \varphi_+x_1 - \varphi_-x_4)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 - \varphi_+x_1 - \varphi_-x_4)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 + \varphi_+x_3 + \varphi_-x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 - \varphi_+x_3 + \varphi_-x_1)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 + \varphi_+x_3 - \varphi_-x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 - \varphi_+x_3 - \varphi_-x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 + \varphi_+x_4 + \varphi_-x_3)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 - \varphi_+x_4 + \varphi_-x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 + \varphi_+x_4 - \varphi_-x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_2 - \varphi_+x_4 - \varphi_-x_3)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 + \varphi_+x_1 + \varphi_-x_2)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 - \varphi_+x_1 + \varphi_-x_2)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 + \varphi_+x_1 - \varphi_-x_2)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 - \varphi_+x_1 - \varphi_-x_2)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 + \varphi_+x_4 + \varphi_-x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 - \varphi_+x_4 + \varphi_-x_1)^2} \\ & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 + \varphi_+x_4 - \varphi_-x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 - \varphi_+x_4 - \varphi_-x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 + \varphi_+x_2 + \varphi_-x_4)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 - \varphi_+ x_2 + \varphi_- x_4)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 + \varphi_+ x_2 - \varphi_- x_4)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_3 - \varphi_+ x_2 - \varphi_- x_4)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_4 + \varphi_+ x_1 + \varphi_- x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_4 - \varphi_+ x_1 + \varphi_- x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_4 + \varphi_+ x_1 - \varphi_- x_3)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_4 - \varphi_+ x_1 - \varphi_- x_3)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_4 + \varphi_+ x_2 + \varphi_- x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_4 - \varphi_+ x_2 + \varphi_- x_1)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_4 + \varphi_+ x_2 - \varphi_- x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_4 - \varphi_+ x_2 - \varphi_- x_1)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_4 + \varphi_+ x_3 + \varphi_- x_2)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_4 - \varphi_+ x_3 + \varphi_- x_2)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_4 + \varphi_+ x_3 - \varphi_- x_2)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_4 - \varphi_+ x_3 - \varphi_- x_2)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - x_2 + x_3 + x_4)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + x_2 - x_3 + x_4)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + x_2 + x_3 - x_4)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(x_1 - x_2 - x_3 - x_4)^2} ,
\end{aligned}$$

donde  $\Delta^{(4)}$  es el laplaciano en cuatro dimensiones.

El espacio de configuración para  $\mathcal{H}_{H_4}$  es el dominio de  $\mathbf{R}^4$  cuyos vectores tienen etiquetas de Dynkin positivas (véase Apéndice A). En forma coordenada esto corresponde a la condición

$$(\alpha \cdot x) > 0 \tag{7.4}$$

para  $\alpha \in \mathcal{R}_4^+$ . Coincide con el dominio fundamental definido por las raíces simples de  $H_4$  (A.27).

## 7.2. Separación de variables e integral de movimiento

El hamiltoniano (7.1) puede escribirse en *coordenadas hiperesféricas*

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \sin \psi \sin \theta \cos \phi , \\
 x_2 &= r \sin \psi \sin \theta \sin \phi , \\
 x_3 &= r \sin \psi \cos \theta , \\
 x_4 &= r \cos \psi .
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

En este sistema de coordenadas toma la forma

$$\mathcal{H}_{H_4} = -\frac{1}{2}\Delta^{(4)} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{W(\psi, \theta, \phi)}{r^2} , \tag{7.6}$$

Introduciendo la notación  $c_\vartheta \equiv \cos \vartheta$ ,  $s_\vartheta \equiv \sin \vartheta$ , la función  $W(\psi, \theta, \phi)$  puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 W(\psi, \theta, \phi) = & \\
 & \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta c_\phi + \varphi_+ s_\psi s_\theta s_\phi + \varphi_- s_\psi c_\theta)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta c_\phi - \varphi_+ s_\psi s_\theta s_\phi + \varphi_- s_\psi c_\theta)^2} \\
 & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta c_\phi + \varphi_+ s_\psi s_\theta s_\phi - \varphi_- s_\psi c_\theta)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta c_\phi - \varphi_+ s_\psi s_\theta s_\phi - \varphi_- s_\psi c_\theta)^2} \\
 & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta s_\phi + \varphi_+ s_\psi c_\theta + \varphi_- s_\psi s_\theta c_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta s_\phi - \varphi_+ s_\psi c_\theta + \varphi_- s_\psi s_\theta c_\phi)^2} \\
 & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta s_\phi + \varphi_+ s_\psi c_\theta - \varphi_- s_\psi s_\theta c_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta s_\phi - \varphi_+ s_\psi c_\theta - \varphi_- s_\psi s_\theta c_\phi)^2} \\
 & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi c_\theta + \varphi_+ s_\psi s_\theta c_\phi + \varphi_- s_\psi s_\theta s_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi c_\theta + \varphi_- s_\psi s_\theta c_\phi + \varphi_- s_\psi s_\theta s_\phi)^2} \\
 & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi c_\theta + \varphi_+ s_\psi s_\theta c_\phi - \varphi_- s_\psi s_\theta s_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi c_\theta + \varphi_- s_\psi s_\theta c_\phi - \varphi_- s_\psi s_\theta s_\phi)^2} \\
 & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\theta s_\phi + s_\psi c_\theta + c_\psi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta c_\phi - s_\psi s_\theta s_\phi + s_\psi c_\theta + c_\psi)^2} \\
 & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\theta + c_\psi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\theta s_\phi + s_\psi c_\theta - c_\psi)^2} \\
 & + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta c_\phi - s_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\theta + c_\psi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(s_\psi s_\theta c_\phi - s_\psi s_\theta s_\phi + s_\psi c_\theta - c_\psi)^2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(c_\psi + \varphi_+ s_\psi c_\theta + \varphi_- s_\psi s_\theta s_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(c_\psi - \varphi_+ s_\psi c_\theta + \varphi_- s_\psi s_\theta s_\phi)^2} \\
& + \frac{2\nu(\nu-1)}{(c_\psi + \varphi_+ s_\psi c_\theta - \varphi_- s_\psi s_\theta s_\phi)^2} + \frac{2\nu(\nu-1)}{(c_\psi - \varphi_+ s_\psi c_\theta - \varphi_- s_\psi s_\theta s_\phi)^2} \\
& + \frac{\nu(\nu+1)}{2s_\psi^2 s_\theta^2 c_\phi^2} + \frac{\nu(\nu+1)}{2s_\psi^2 s_\theta^2 s_\phi^2} + \frac{\nu(\nu+1)}{2s_\psi^2 c_\theta^2} + \frac{\nu(\nu+1)}{2c_\psi^2} .
\end{aligned}$$

La ecuación de Schroedinger admite una separación de variables: cualquier solución puede escribirse en forma factorizada

$$\Psi(r, \psi, \theta, \phi) = R(r)Q(\psi, \theta, \phi) . \quad (7.8)$$

Las funciones  $R$  y  $Q$  son soluciones de las ecuaciones

$$\left[ -\frac{1}{2r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{\gamma}{r^2} \right] R(r) = ER(r) , \quad (7.9)$$

$$\mathcal{F} Q(\psi, \theta, \phi) = \gamma Q(\psi, \theta, \phi) , \quad (7.10)$$

respectivamente, siendo  $\gamma$  la constante de separación. El operador  $\mathcal{F}$  tiene la forma explícita

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = & -\frac{1}{2 \sin^2 \psi} \left[ \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin^2 \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \\
& + W(\psi, \theta, \phi) .
\end{aligned} \quad (7.11)$$

Puede verificarse inmediatamente que  $\mathcal{H}_{H_4}$  y  $\mathcal{F}$  conmutan:

$$[\mathcal{H}_{H_4}, \mathcal{F}] = 0 . \quad (7.12)$$

Por tanto,  $\mathcal{F}$  es una integral de movimiento. Posee autofunciones en común con  $\mathcal{H}_{H_4}$ . Este operador es simétrico con respecto a transformaciones del grupo  $H_4$ .

### 7.3. Estado base

La función de estado base de  $\mathcal{H}_{H_4}$  tiene la forma

$$\begin{aligned}
\Psi_0(x) & = \left( \prod_{\alpha \in R_+} (\alpha \cdot x)^\nu \right) \exp\left(-\frac{\omega}{2} t_2\right) \\
& = \Delta_1^\nu \Delta_2^\nu \Delta_3^\nu \exp\left(-\frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^4 x_k^2\right) ,
\end{aligned} \quad (7.13)$$

donde  $t_2$  es el invariante de grado dos (véase más adelante) y los factores preexponenciales son

$$\Delta_1 = \prod_{k=1}^4 x_k , \quad (7.14)$$

$$\Delta_2 = \prod_{\mu_{2,3,4}=0,1} [x_1 + (-1)^{\mu_2} x_2 + (-1)^{\mu_3} x_3 + (-1)^{\mu_4} x_4] , \quad (7.15)$$

$$\Delta_3 = \prod_{\{i,j,k,l\}} \prod_{\mu_{1,2}=0,1} [x_i + (-1)^{\mu_1} \varphi_+ x_j + (-1)^{\mu_2} \varphi_- x_k + 0 \cdot x_l] . \quad (7.16)$$

La autofunción (7.13) no se anula (no tiene nodos) en el espacio de configuración, determinado por (7.4). Es simétrica ante el intercambio (7.3) y es invariante hasta una fase respecto a la acción del grupo  $H_4$ .

La energía de estado base correspondiente es

$$E_0 = 2\omega(1 + 30\nu) . \quad (7.17)$$

El parámetro  $\nu$  que aparece como exponente en la función de estado base (7.13) está relacionada con la constante de acoplamiento como  $g = \nu(\nu - 1)$ , o equivalentemente,

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4g} .$$

El signo positivo para la raíz cuadrada se escoge para satisfacer las condiciones de frontera y para evitar el colapso de la función de onda (véase la discusión después de (1.21)).

La función  $\Psi_0$  es también la menor autofunción del operador  $\mathcal{F}$  con autovalor

$$\gamma_0 = 60\nu(1 + 30\nu) . \quad (7.18)$$

## 7.4. Variables invariantes

Siguiendo la discusión para el sistema  $H_3$ , la meta de este estudio es encontrar la forma algebraica para el operador hamiltoniano hallando un cambio de variables adecuado. Para encontrar estas variables suponemos que respetan las simetrías del hamiltoniano. Por tanto, deben ser invariantes del grupo de

Coxeter  $H_4$ . Las escogemos como polinomios que surgen tras promediar un monomio sobre una órbita del grupo  $H_4$ . Tomamos como órbitas adecuadas las órbitas generadas por los pesos fundamentales  $\{\omega\}$  (véase A.33). Dichos pesos están caracterizados por una longitud (el número de elementos en la órbita):

| peso fundamental                                | longitud de la órbita |
|---|-----------------------|
| $\omega_1 = (0, 0, 0, 2\varphi_+)$              | 120                   |
| $\omega_2 = (1, \varphi_+^2, 0, \varphi_+^4)$   | 600                   |
| $\omega_3 = (0, \varphi_+, 1, \varphi_+^4 - 1)$ | 720                   |
| $\omega_4 = (0, 2\varphi_+, 0, 2\varphi_+^3)$   | 1200                  |

Cualquier órbita puede escogerse, pero por razones de simplicidad nuestra elección es la órbita más corta  $\Omega(\omega_1)$ . Así, las variables invariantes se definen como

$$t_a^{(\Omega)}(x) = \sum_{\omega \in \Omega(\omega_1)} (\omega \cdot x)^a \quad (7.19)$$

donde  $a = 2, 12, 20, 30$  son los grados del grupo  $H_4$ . Luego, los invariantes (1.23) son polinomios de grados 2, 12, 20 y 30. Las funciones  $t_a^{(\Omega)}(x)$  son simétricas ante el intercambio (1.5). Por construcción, son invariantes con respecto a la acción del grupo  $H_4$ . Es conveniente normalizarlas:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{180 + 60\sqrt{5}} t_2^{(\Omega)}, \\ t_2 &= \frac{1}{2569560 + 1149120\sqrt{5}} t_{12}^{(\Omega)}, \\ t_3 &= \frac{1}{18608025240 + 8321761800\sqrt{5}} t_{20}^{(\Omega)}, \\ t_4 &= \frac{1}{2039231986974360 + 911972268952800\sqrt{5}} t_{30}^{(\Omega)}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

De aquí en adelante llamaremos a estas variables *variables de órbita*. En este punto no intentaremos mostrar una expresión explícita para estas variables debido a que, por ejemplo,  $t_4$  es un polinomio con 1632 términos.

# Capítulo 8

## Representación algebraica

### 8.1. El hamiltoniano $H_4$ en forma algebraica

Realicemos una rotación de norma del hamiltoniano (7.1) tomando la autofunción del estado base  $\Psi_0$  como factor,

$$h_{H_4} = -2(\Psi_0(x))^{-1}(\mathcal{H}_{H_4} - E_0)\Psi_0(x), \quad (8.1)$$

siendo  $E_0$  la energía del estado base. Un nuevo problema espectral surge

$$h_{H_4}\phi(x) = -2\epsilon\phi(x), \quad (8.2)$$

siendo el nuevo parámetro espectral  $\epsilon = E - E_0$ ; luego, el menor autovalor corresponde a  $\epsilon = 0$ .

Puede probarse por cálculo directo que el hamiltoniano  $h_{H_4}$  escrito en términos de las variables de órbita  $t$ 's (7.20) toma la forma algebraica

$$h_{H_4} = \sum_{i,j=1}^4 A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{j=1}^4 B_j \frac{\partial}{\partial t_j}. \quad (8.3)$$

Definiendo

$$\Psi_0(x) = e^{-\phi_0(x)},$$

las funciones coeficientes que aparecen en (8.3) son

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial t_i}{\partial x_k} \frac{\partial t_j}{\partial x_k}, \quad B_j = \sum_{k=1}^4 \left( \frac{\partial^2 t_j}{\partial x_k^2} - 2 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} \frac{\partial t_j}{\partial x_k} \right),$$



donde  $A_{ji} = A_{ij}$ . Estas funciones son

$$\begin{aligned}
A_{11} &= 4 t_1 , \\
A_{12} &= 24 t_2 , \\
A_{13} &= 40 t_3 , \\
A_{14} &= 60 t_4 , \\
A_{22} &= \frac{281928}{361} t_1^{11} - \frac{12864}{19} t_1^5 t_2 + \frac{14472}{361} t_1 t_3 , \\
A_{23} &= -\frac{38020207993}{164619} t_1^{15} + \frac{435496606}{1809} t_1^9 t_2 + \frac{738967}{1809} t_2^2 t_1^3 \\
&\quad - 10042 t_3 t_1^5 + \frac{15383408}{164619} t_4 , \\
A_{24} &= -\frac{86050353544808825}{2776705144} t_1^{20} + \frac{126604256941395}{3845852} t_1^{14} t_2 \\
&\quad - \frac{50105731347945}{84608744} t_1^8 t_2^2 + \frac{2817466015}{1922926} t_1^2 t_2^3 \\
&\quad - \frac{1895189984009595}{1388352572} t_1^{10} t_3 + \frac{89338731300}{3817969573} t_3^2 \\
&\quad + \frac{3003065399880}{200945767} t_1^4 t_2 t_3 + \frac{220390}{19} t_1^5 t_4 , \\
A_{33} &= -\frac{10501381377624038}{893387313} t_1^{19} + \frac{40561632414160}{3272481} t_1^{13} t_2 \\
&\quad - \frac{419408411594}{3272481} t_1^7 t_2^2 + \frac{63075364}{9817443} t_1 t_2^3 - \frac{315863372}{603} t_1^9 t_3 \\
&\quad + \frac{13911496}{1809} t_1^3 t_2 t_3 + \frac{4009562227936}{893387313} t_1^4 t_4 , \\
A_{34} &= -\frac{10249418088606760315}{13914292536} t_1^{24} + \frac{391341055394571415}{515344168} t_1^{18} t_2 \\
&\quad + \frac{518705931081417625}{51019072632} t_1^{12} t_2^2 - \frac{1389696776277355}{13914292536} t_1^6 t_2^3 \\
&\quad + \frac{755244490}{579762189} t_2^4 - \frac{2330976693489285}{73071188} t_1^{14} t_3 \\
&\quad + \frac{4948306390755}{200945767} t_1^4 t_3^2 - \frac{52318573284705}{42304372} t_1^8 t_2 t_3 \\
&\quad + \frac{4703130705}{1922926} t_1^2 t_2^2 t_3 + \frac{482044430}{1809} t_1^9 t_4 + \frac{1921850}{201} t_1^3 t_2 t_4 ,
\end{aligned} \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned}
A_{44} = & -\frac{2088252814496420126708775}{1124083898048704} t_1^{29} \\
& + \frac{118365026428542327190575}{562041949024352} t_1^{23} t_2 \\
& + \frac{53737530145119630175275}{29581155211808} t_1^{17} t_2^2 \\
& - \frac{3953023583366724477975}{325392707329888} t_1^{11} t_2^3 \\
& - \frac{856801697704359225}{59162310423616} t_1^5 t_2^4 - \frac{612196691699796996080925}{5339398515731344} t_1^{19} t_3 \\
& - \frac{7722563091145013372625}{5339398515731344} t_1^9 t_3^2 \\
& - \frac{11866249544817876328575}{281020974512176} t_1^{13} t_2 t_3 \\
& - \frac{51548764326659738775}{162696353664944} t_1^7 t_2^2 t_3 + \frac{6809683055175}{1848822200738} t_1 t_2^3 t_3 \\
& + \frac{368146909932943050}{193201919977121} t_1^3 t_2 t_3^2 + \frac{73938001110075}{36535594} t_1^{14} t_4 \\
& - \frac{1481557889175}{1922926} t_1^8 t_2 t_4 + \frac{14068311075}{1922926} t_1^2 t_2^2 t_4 \\
& + \frac{1318684614975}{18267797} t_1^4 t_3 t_4 ,
\end{aligned}$$

$$B_1 = 8 + 240\nu - 4\omega t_1 ,$$

$$B_2 = \frac{3168}{19} t_1^5 + \frac{27120\nu}{19} t_1^5 - 24\omega t_2 ,$$

$$\begin{aligned}
B_3 = & -\frac{3695120}{603} t_1^9 + \frac{1314040}{201} t_1^3 t_2 - \frac{1404720\nu}{67} t_1^9 + \frac{13906480\nu}{603} t_1^3 t_2 \\
& - 40\omega t_3 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 = & \frac{1382178784020}{961463} t_1^{14} - \frac{1449626451000}{961463} t_1^8 t_2 + \frac{6573485100}{961463} t_1^2 t_2^2 \\
& + \frac{1172673323640}{18267797} t_1^4 t_3 + \frac{58667301515925\nu}{18267797} t_1^{14} , \\
& - \frac{3237955197750\nu}{961463} t_1^8 t_2 + \frac{2637418615650\nu}{18267797} t_1^4 t_3 \\
& + \frac{14076869625\nu}{961463} t_1^2 t_2^2 - 60\omega t_4 .
\end{aligned}$$

No hay números irracionales en estas funciones. Un análisis simple muestra que el hamiltoniano (8.3) tiene una infinidad de subespacios invariantes en

polinomios

$$\mathcal{P}_n^{(1,6,10,15)} = \langle t_1^{p_1} t_2^{p_2} t_3^{p_3} t_4^{p_4} \mid 0 \leq p_1 + 6p_2 + 10p_3 + 15p_4 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.5)$$

donde los  $p_i$  son enteros positivos. Por tanto, forman un flag con vector característico

$$\alpha_t = (1, 6, 10, 15). \quad (8.6)$$

Otras formas algebraicas de  $\mathcal{H}_{H_4}$  (7.1) existen, debido a que las variables de órbita están definidas de manera ambigua, hasta una combinación no lineal en las variables de órbita de grado menor. Esto permite considerar la siguiente transformación de siete parámetros de las coordenadas  $t$ , la cual preserva los grados de los invariantes en coordenadas cartesianas ,

$$\begin{aligned} t_1 &\mapsto t_1, \\ t_2 &\mapsto t_2 + a_1 t_1^6, \\ t_3 &\mapsto t_3 + a_2 t_1^4 t_2 + a_3 t_1^{10}, \\ t_4 &\mapsto t_4 + a_4 t_1^5 t_3 + a_5 t_1^3 t_2^2 + a_6 t_1^9 t_2 + a_7 t_1^{15}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

La primera observación es que para cualquier valor de los parámetros  $\{a\}$  existe una forma algebraica del hamiltoniano. Valores diferentes de los parámetros  $\{a\}$  en (8.7) dan lugar a flags diferentes preservados por el hamiltoniano. Después de un cierto análisis puede mostrarse que el flag  $\mathcal{P}^{(1,6,10,15)}$  no es mínimo. El flag mínimo es generado por los subespacios

$$\mathcal{P}_n^{(1,5,8,12)} = \langle \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \tau_3^{p_3} \tau_4^{p_4} \mid 0 \leq p_1 + 5p_2 + 8p_3 + 12p_4 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.8)$$

y tiene vector característico

$$\alpha_\tau = (1, 5, 8, 12). \quad (8.9)$$

Las variables que dan lugar a este flag se obtienen mediante la transformación

$$\begin{aligned} \tau_1 &= t_1, \\ \tau_2 &= -\frac{19}{2} (t_2 - t_1^6), \\ \tau_3 &= \frac{1809}{44} \left( t_3 - \frac{43510}{1809} t_1^4 t_2 + \frac{41701}{1809} t_1^{10} \right), \\ \tau_4 &= \frac{18267797}{4004} \left( t_4 - \frac{17583778485}{146142376} t_1^5 t_3 - \frac{313009515}{15383408} t_1^3 t_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{22081114965}{7691704} t_1^9 t_2 - \frac{798259915667}{292284752} t_1^{15} \right). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Para escribir una expresión explícita resulta útil la siguiente notación, introducida por Iwasaki (véase [15]):

Dada una partición  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0$ , denótese por  $M_\lambda$  el monomio simétrico asociado en las variables  $(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)$ ,

$$M_\lambda = \sum x_1^{2\mu_1} x_2^{2\mu_2} x_3^{2\mu_3} x_4^{2\mu_4} ,$$

donde la suma se toma sobre todas las permutaciones  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$  de  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ . Si  $\lambda$  consiste de números mutuamente distintos  $p_1 > \dots > p_m$  con  $p_j$  apareciendo  $k_j$  veces en  $\lambda$ , entonces ponemos

$$M_\lambda = [p_1^{k_1} | \dots | p_m^{k_m}] .$$

Aún más, sea  $\Delta_4$  el polinomio alternante fundamental de  $(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)$ :

$$\Delta_4 = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i^2 - x_j^2) .$$

Entonces las variables  $\tau$  se escriben como

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [1|0^3] \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 , \\ \tau_2 &= 14[3^2|0^2] - 6[4|2|0^2] + 2[5|1|0^2] - 270[2^2|1^2] + 30[2^3|0] \\ &\quad - 12[4|1^2|0] + 348[3|1^3] + 9[3|2|1|0] + 33\sqrt{5}\Delta_4 , \\ \tau_3 &= 2[8|2|0^2] + 4[8|1^2|0] - 10[7|3|0^2] - 45[7|2|1|0] + 60[7|1^3] \\ &\quad + 22[6|4|0^2] + 157[6|3|1|0] + 270[6|2^2|0] - 150[6|2|1^2] \quad (8.11) \\ &\quad - 22[5^2|0^2] - 131[5|4|1|0] - 733[5|3|2|0] - 2156[5|3|1^2] \\ &\quad + 4050[5|2^2|1] + 1320[4^2|2|0] + 4650[4^2|1^2] + 6[4|3^2|0] \\ &\quad - 2175[4|3|2|1] - 19050[4|2^3] + 10800[3^2|2^2] + 3336[3^3|1] \\ &\quad + 3\sqrt{5}\Delta_4 \{ 5[4|0^3] - 18[3|1|0^2] + 49[2^2|0^2] + 3[2|1^2|0] \\ &\quad + 1146[1^4] \} , \\ \tau_4 &= 65742[15|0^3] - 504[13|2|0^2] + 830[13|1^2|0] + 61690[12|3|0^2] \\ &\quad - 5130[12|2|1|0] - 9495[12|1^3] + 18795[11|4|0^2] \\ &\quad + 28560[11|3|1|0] - 43500[11|2^2|0] - 53070[11|2|1^2] \\ &\quad - 156330[10|5|0^2] + 59130[10|4|1|0] + 26415[10|3|2|0] \\ &\quad + 405255[10|3|1^2] + 1350[10|2^2|1] + 19710[9|6|0^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -20[9|4|2|0] - 8663355[9|4|1^2] - 120[9|3^2|0] + 450[9|3|2|1] \\
& -962715[9|2^3] + 13860[8|7|0^2] - 94530[8|6|1|0] \\
& -353160[8|5|2|0] - 1452060[8|5|1^2] + 5557050[8|4|3|0] \\
& +590580[8|4|2|1] - 198270[8|3^2|1] + 389250[7^2|1|0] \\
& +2897820[7|6|2|0] - 5227920[7|6|1^2] + 1134540[7|5|3|0] \\
& -4041270[7|5|2|1] - 591330[7|4^2|0] + 23417850[7|4|3|1] \\
& -22770[7|4|2^2] - 23528790[7|3^2|2] + 29647380[6^2|3|0] \\
& +36597510[6^2|2|1] - 1649925[6|5|4|0] + 150[6|5|3|1] \\
& +40935[6|5|2^2] - 510[6|4^2|1] - 60[6|4|3|2] + 242505[6|3^3] \\
& +270060[5^3|0] - 528270[5^2|4|1] - 36255[5|4^2|2] + 825[5|4|3^2] \\
& +707085[4^3|3] + 45\sqrt{5}\Delta_4\{ -27040[9|0^3] - 5[8|1|0^2] \\
& -1914[7|1^2|0] + 23[6|3|0^2] + 91[6|2|1|0] - 44[6|1^3] \\
& -352[5|4|0^2] + 8[5|3|1|0] + 1085[5|2^2|0] + 6875[5|2|1^2] \\
& -5168[4^2|1|0] - 934[4|3|2|0] - 568[4|3|1^2] + 1773[4|2^2|1] \\
& +20911[3^3|0] + 15915[3^2|2|1] + 573[3|2^3] \} ,
\end{aligned}$$

Por tanto, las variables  $\tau_{1,2,3,4}$  son polinomios homogéneos en las  $x^2$  de grados 1,3,10,15, respectivamente.

El hamiltoniano transformado escrito en las coordenadas  $\tau$  toma la forma

$$h_{H_4} = \sum_{i,j=1}^4 A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{j=1}^4 B_j \frac{\partial}{\partial \tau_j} \quad (8.12)$$

con funciones coeficientes

$$\begin{aligned}
A_{11} &= 4 \tau_1 , \\
A_{12} &= 24 \tau_2 , \\
A_{13} &= 40 \tau_3 , \\
A_{14} &= 60 \tau_4 , \\
A_{22} &= 88 \tau_1 \tau_3 + 8 \tau_1^5 \tau_2 , \\
A_{23} &= -4 \tau_1^3 \tau_2^2 + 24 \tau_1^5 \tau_3 - 8 \tau_4 , \\
A_{24} &= 10 \tau_1^2 \tau_2^3 + 60 \tau_1^4 \tau_2 \tau_3 + 40 \tau_1^5 \tau_4 - 600 \tau_3^2 , \\
A_{33} &= -\frac{38}{3} \tau_1 \tau_2^3 + 28 \tau_1^3 \tau_2 \tau_3 - \frac{8}{3} \tau_1^4 \tau_4 ,
\end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned}
A_{34} &= 210 \tau_1^2 \tau_2^2 \tau_3 + 60 \tau_1^3 \tau_2 \tau_4 - 180 \tau_1^4 \tau_3^2 + 30 \tau_2^4, \\
A_{44} &= -2175 \tau_1 \tau_2^3 \tau_3 - 450 \tau_1^2 \tau_2^2 \tau_4 - 1350 \tau_1^3 \tau_2 \tau_3^2 - 600 \tau_1^4 \tau_3 \tau_4, \\
B_1 &= 8 + 240\nu - 4\omega\tau_1, \\
B_2 &= 12(1 + 10\nu) \tau_1^5 - 24\omega\tau_2, \\
B_3 &= 20(1 + 6\nu) \tau_1^3 \tau_2 - 40\omega\tau_3, \\
B_4 &= 15(1 - 30\nu) \tau_1^2 \tau_2^2 - 450(1 + 2\nu) \tau_1^4 \tau_3 - 60\omega\tau_4.
\end{aligned}$$

La matriz  $A_{ij}$  tomada como una métrica con índices superiores da lugar a un tensor de Riemann nulo y, por tanto, corresponde al espacio plano.

El operador  $h_{H_4}$  con coeficientes (8.13) es triangular con respecto a la acción en los monomios  $\rho = \tau_1^{n_1} \tau_2^{n_2} \tau_3^{n_3} \tau_4^{n_4}$ . En particular es sencillo mostrar que es triangular con respecto al vector

$$\beta = (1, 6, 10, 15).$$

(véase (2.15) y más adelante).

La frontera del espacio de configuración en las variables  $\tau$  está determinada por los ceros de la función de onda del estado base (1.16). En las coordenadas cartesianas es la superficie algebraica  $\prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} (\alpha \cdot x)^2 = 0$  de grado 120. En coordenadas  $\tau$  es la superficie algebraica de grado 18,

$$\begin{aligned}
&64 \tau_1^{15} \tau_4^3 + 1440 \tau_1^{14} \tau_2 \tau_3 \tau_4^2 + 10800 \tau_1^{13} \tau_2^2 \tau_3^2 \tau_4 + 27000 \tau_1^{12} \tau_2^3 \tau_3^3 \\
&- 240 \tau_1^{12} \tau_2^3 \tau_4^2 - 3600 \tau_1^{11} \tau_2^4 \tau_3 \tau_4 - 13500 \tau_1^{10} \tau_2^5 \tau_3^2 + 34992 \tau_1^{10} \tau_3^5 \\
&- 1440 \tau_1^{10} \tau_3^2 \tau_4^2 + 300 \tau_1^9 \tau_2^6 \tau_4 - 2160 \tau_1^9 \tau_2 \tau_3^3 \tau_4 - 1440 \tau_1^9 \tau_2 \tau_4^3 \\
&+ 2250 \tau_1^8 \tau_2^7 \tau_3 - 22680 \tau_1^8 \tau_2^2 \tau_3^4 - 28080 \tau_1^8 \tau_2^2 \tau_3 \tau_4^2 - 203760 \tau_1^7 \tau_2^3 \tau_3^2 \tau_4 \\
&- 125 \tau_1^6 \tau_2^9 - 493020 \tau_1^6 \tau_2^4 \tau_3^3 + 3600 \tau_1^6 \tau_2^4 \tau_4^2 + 577780 \tau_1^5 \tau_2^5 \tau_3 \tau_4 \\
&- 8640 \tau_1^5 \tau_3^4 \tau_4 + 4320 \tau_1^5 \tau_3 \tau_4^3 + 221310 \tau_1^4 \tau_2^6 \tau_3^2 - 648000 \tau_1^4 \tau_2 \tau_3^5 \\
&+ 116640 \tau_1^4 \tau_2 \tau_3^2 \tau_4^2 - 4680 \tau_1^3 \tau_2^7 \tau_4 + 712800 \tau_1^3 \tau_2^2 \tau_3^3 \tau_4 + 6480 \tau_1^3 \tau_2^2 \tau_4^3 \\
&- 35640 \tau_1^2 \tau_2^8 \tau_3 + 2052000 \tau_1^2 \tau_2^3 \tau_3^4 + 62640 \tau_1^2 \tau_2^3 \tau_3 \tau_4^2 + 259200 \tau_1 \tau_2^4 \tau_3^2 \tau_4 \\
&+ 1944 \tau_2^{10} + 129600 \tau_2^5 \tau_3^3 + 2592 \tau_2^5 \tau_4^2 + 2160000 \tau_3^6 - 86400 \tau_3^3 \tau_4^2 \\
&+ 864 \tau_4^4 = 0
\end{aligned} \tag{8.14}$$

## 8.2. Integral de movimiento en forma algebraica

Consideremos la rotación de norma del operador  $\mathcal{F}$  (7.11):

$$f = (\Psi_0(x))^{-1}(\mathcal{F} - \gamma_0)\Psi_0(x) , \quad (8.15)$$

donde  $\gamma_0$  es el menor autovalor de  $\mathcal{F}$  (7.18). Mostraremos que el operador

$$f = \sum_{i,j=1}^4 F_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{j=1}^4 G_j \frac{\partial}{\partial \tau_j} , \quad (8.16)$$

tiene una forma algebraica en términos de las variables  $\tau$  (8.11). Aquí

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^4 (x_k x_l - r^2 \delta_{kl}) \frac{\partial \tau_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tau_j}{\partial x_l} ,$$

$$G_j = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^4 (x_k x_l - r^2 \delta_{kl}) \frac{\partial^2 \tau_j}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^4 \left( \frac{3}{2} x_k + r^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} - x_k \sum_{l=1}^4 x_l \frac{\partial \phi_0}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \tau_j}{\partial x_k} .$$

La integral  $\mathcal{F}$  depende sólo de las coordenadas hipersféricas  $\psi$ ,  $\theta$  y  $\phi$ . Luego, el operador  $f$  (8.16) no debe depender de las derivadas con respecto a  $\tau_1$  (recuérdese que  $\tau_1 = r^2$  (8.11)). Un cálculo inmediato confirma que  $F_{1j} = 0$  y  $G_1 = 0$ . Los restantes coeficientes son

$$\begin{aligned} F_{22} &= -4\tau_1^6 \tau_2 - 44\tau_1^2 \tau_3 + 72\tau_2^2 , \\ F_{23} &= -12\tau_1^6 \tau_3 + 2\tau_1^4 \tau_2^2 + 4\tau_1 \tau_4 + 120\tau_2 \tau_3 , \\ F_{24} &= -20\tau_1^6 \tau_4 - 30\tau_1^5 \tau_2 \tau_3 - 5\tau_1^3 \tau_2^3 + 300\tau_1 \tau_3^2 + 180\tau_2 \tau_4 , \\ F_{33} &= \frac{4}{3}\tau_1^5 \tau_4 - 14\tau_1^4 \tau_2 \tau_3 + \frac{19}{3}\tau_1^2 \tau_2^3 + 200\tau_3^2 , \\ F_{34} &= 90\tau_1^5 \tau_3^2 - 30\tau_1^4 \tau_2 \tau_4 - 105\tau_1^3 \tau_2^2 \tau_3 - 15\tau_1 \tau_2^4 + 300\tau_3 \tau_4 , \\ F_{44} &= 300\tau_1^5 \tau_3 \tau_4 + 675\tau_1^4 \tau_2 \tau_3^2 + 225\tau_1^3 \tau_2^2 \tau_4 + \frac{2175}{2}\tau_1^2 \tau_2^3 \tau_3 + 450\tau_4^2 , \\ G_2 &= -6(1 + 10\nu)\tau_1^6 + 12(7 + 60\nu)\tau_2 , \\ G_3 &= -10(1 + 6\nu)\tau_1^4 \tau_2 + 20(11 + 60\nu)\tau_3 , \\ G_4 &= 225(1 + 2\nu)\tau_1^5 \tau_3 - \frac{15}{2}(1 - 30\nu)\tau_1^3 \tau_2^2 + 40(12 + 45\nu)\tau_4 , \end{aligned} \quad (8.17)$$

Puede probarse que el operador  $f$  tiene una infinidad de subespacios invariantes en polinomios

$$\mathcal{P}_n^{(1,6,10,15)} = \langle \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \tau_3^{p_3} \tau_4^{p_4} \mid 0 \leq p_1 + 6p_2 + 10p_3 + 15p_4 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.18)$$

Forman un flag con vector característico  $(1,6,10,15)$ , igual al vector característico en (8.6).

El operador  $h_{H_4}$  con coeficientes (8.13) conmuta con el operador  $f$  (8.16). Sin embargo, los flags mínimos que preservan no coinciden. La diferencia puede rastrearse a la degeneración del hamiltoniano. Puede probarse que  $h_{H_4}$  preserva ambos flags con vectores característicos  $(1,5,8,12)$  y  $(1,6,10,15)$ . Por tanto, las autofunciones comunes de estos operadores son elementos del flag de espacios  $\mathcal{P}^{(1,6,10,15)}$ .



# Capítulo 9

## Espectro

### 9.1. Autovalores

El operador  $h_{H_4}$  es triangular con respecto a la acción sobre monomios  $\tau_1^{n_1}\tau_2^{n_2}\tau_3^{n_3}\tau_4^{n_4}$ . Por tanto se puede encontrar el espectro de (8.12),  $h_{H_4}\phi = -2\epsilon\phi$  explícitamente:

$$\epsilon_{n_1, n_2, n_3, n_4} = 2\omega(n_1 + 6n_2 + 10n_3 + 15n_4), \quad (9.1)$$

donde los  $n_i$  son enteros no negativos. La degeneración  $m(k)$  del espectro  $\epsilon$  viene dada por el número de soluciones de la ecuación diofantina

$$n_1 + 6n_2 + 10n_3 + 15n_4 = k$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , en enteros no negativos. La función generadora para  $m(k)$  está dada por la serie de Poincaré (véase [1])

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} m(k)t^k = (1-t)^{-1}(1-t^6)^{-1}(1-t^{10})^{-1}(1-t^{15})^{-1} \\ &= 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + +2t^6 + 2t^7 \dots \end{aligned} \quad (9.2)$$

El espectro de  $\epsilon$  no depende de la constante de acoplamiento  $g$  y es equidistante. Es igual al espectro de un oscilador armónico anisotrópico de frecuencias  $(2\omega, 12\omega, 20\omega, 30\omega)$  (hasta una diferencia en el autovalor más bajo) y tiene la misma degeneración. En este sentido el potencial racional en el hamiltoniano (7.1) “deforma” el oscilador isotrópico de frecuencia  $\omega$  presente también en (7.1). Para un oscilador armónico en cuatro dimensiones de frecuencia

$\omega$  el espectro viene dado por  $\epsilon = \omega(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2)$  y la degeneración  $m(k)$  está dada por el número de soluciones de la ecuación  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . En este caso  $m(k) = (k + 1)(k + 2)(k + 3)/6$ .

Las energías del hamiltoniano  $\mathcal{H}_{H_4}$  (7.1) están dadas por

$$E = E_0 + \epsilon \quad (9.3)$$

donde  $E_0$  es el menor autovalor (7.17) y  $\epsilon$  es el parámetro espectral (9.1).

El espectro de la integral de movimiento  $\mathcal{F}$  puede encontrarse en forma cerrada. Este espectro da los valores posibles para la constante de separación  $\gamma$  en (7.10):

$$\begin{aligned} \gamma_{0,k_2,k_3,k_4} = & 72k_2^2 + 200k_3^2 + 450k_4^2 + 120k_2k_3 + 180k_2k_4 + 300k_3k_4 \\ & + 2(1 + 60\nu)(6k_2 + 10k_3 + 15k_4) + \gamma_0, \end{aligned} \quad (9.4)$$

Aquí  $k_2, k_3, k_4 = 0, 1, 2, \dots$ . Los subíndices reflejan el hecho de que el operador  $\mathcal{F}$  no posee dependencia en las derivadas de  $\tau_1$ . La constante  $\gamma_0$  es el menor autovalor de  $\mathcal{F}$  (7.18).

## 9.2. Autofunciones

El hamiltoniano  $h_{H_4}$  tiene una infinidad de subespacios invariantes de dimensión finita

$$\mathcal{P}_n^{(1,5,8,12)} = \langle \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \tau_3^{p_3} \tau_4^{p_4} \mid 0 \leq p_1 + 5p_2 + 8p_3 + 12p_4 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

que forman el flag infinito  $\mathcal{P}^{(1,5,8,12)}$ . Este flag es invariante con respecto a transformaciones proyectivas pesadas:

$$\begin{aligned} \tau_1 & \rightarrow \tau_1 + a, \\ \tau_2 & \rightarrow \tau_2 + b_1 \tau_1^5 + b_2 \tau_1^4 + b_3 \tau_1^3 + b_4 \tau_1^2 + b_5 \tau_1 + b_6, \\ \tau_3 & \rightarrow \tau_3 + c_1 \tau_1^3 \tau_2 + c_2 \tau_1^2 \tau_2 + c_3 \tau_1 \tau_2 + c_4 \tau_2 + c_5 \tau_1^8 + c_6 \tau_1^7 \\ & \quad + c_7 \tau_1^6 + c_8 \tau_1^5 + c_9 \tau_1^4 + c_{10} \tau_1^3 + c_{11} \tau_1^2 + c_{12} \tau_1 + c_{13}, \\ \tau_4 & \rightarrow \tau_4 + d_1 \tau_1^4 \tau_3 + d_2 \tau_1^3 \tau_3 + d_3 \tau_1^2 \tau_3 + d_4 \tau_1 \tau_3 + d_5 \tau_3 \\ & \quad + d_6 \tau_1^7 \tau_2 + d_7 \tau_1^6 \tau_2 + d_8 \tau_1^5 \tau_2 + d_9 \tau_1^4 \tau_2 + d_{10} \tau_1^3 \tau_2 \\ & \quad + d_{11} \tau_1^2 \tau_2 + d_{12} \tau_1 \tau_2 + d_{13} \tau_2 + d_{14} \tau_1^{12} + d_{15} \tau_1^{11} \\ & \quad + d_{16} \tau_1^{10} + d_{17} \tau_1^9 + d_{18} \tau_1^8 + d_{19} \tau_1^7 + d_{20} \tau_1^6 + d_{21} \tau_1^5 \\ & \quad + d_{22} \tau_1^4 + d_{23} \tau_1^3 + d_{24} \tau_1^2 + d_{25} \tau_1 + d_{26}, \end{aligned} \quad (9.5)$$

donde  $\{a, b, c, d\}$  son constantes.

Marquemos con  $n$  las autofunciones  $\phi_{n, i}$  de  $h_{H_4}$  que son elementos del espacio invariante  $\mathcal{P}_n^{(1,2,3)}$ . El índice extra  $i$  numera la autofunción para cada  $n$ . Las funciones  $\phi_{n,i}$  están relacionadas con las autofunciones del hamiltoniano  $\mathcal{H}_{H_4}$  (7.1) como

$$\Psi_{n, i} = \Psi_0 \phi_{n, i} .$$

Luego, cualquier autofunción del modelo  $H_4$  tiene una forma factorizada. Las autofunciones  $\phi$  son ortogonales con respecto al factor de peso  $|\Psi_0|^2$ .

Como una ilustración mostremos las expresiones explícitas para varias autofunciones (no degeneradas)  $\phi_{n,i}$  y sus correspondientes autovalores,

- **n=0** (una autofunción)

$$\begin{aligned} \phi_{0,0} &= 1, \\ \epsilon_{0,0} &= 0, \\ \gamma_{0,0} &= 0. \end{aligned}$$

- **n=1** (una autofunción)

$$\begin{aligned} \phi_{1,0} &= \tau_1 - \frac{2}{\omega}(1 + 30\nu), \\ \epsilon_{1,0} &= 2\omega, \\ \gamma_{1,0} &= 0. \end{aligned}$$

- **n=2** (una autofunción)

$$\begin{aligned} \phi_{2,0} &= \tau_1^2 - \frac{6}{\omega}(1 + 20\nu)\tau_1 + \frac{6}{\omega^2}(1 + 20\nu)(1 + 30\nu), \\ \epsilon_{2,0} &= 4\omega, \\ \gamma_{2,0} &= 0. \end{aligned}$$

• **n=3** (una autofunción)

$$\begin{aligned}\phi_{3,0} &= \tau_1^3 - \frac{12}{\omega}(1+15\nu)\tau_1^2 + \frac{36}{\omega^2}(1+15\nu)(1+20\nu)\tau_1 \\ &\quad - \frac{24}{\omega^3}(1+15\nu)(1+20\nu)(1+30\nu) \\ &\quad - \frac{15}{8\omega^3}(1+6\nu)(7+30\nu)(1+10\nu), \\ \epsilon_{3,0} &= 6\omega, \\ \gamma_{3,0} &= 0.\end{aligned}$$

• **n=4** (una autofunción)

$$\begin{aligned}\phi_{4,0} &= \tau_1^4 - \frac{20}{\omega}(1+12\nu)\tau_1^3 + \frac{120}{\omega^2}(1+12\nu)(1+15\nu)\tau_1^2 \\ &\quad - \frac{240}{\omega^3}(1+12\nu)(1+15\nu)(1+20\nu)\tau_1 \\ &\quad + \frac{120}{\omega^4}(1+12\nu)(1+15\nu)(1+20\nu)(1+30\nu), \\ \epsilon_{4,0} &= 8\omega, \\ \gamma_{4,0} &= 0.\end{aligned}$$

• **n=5** (una autofunción)

$$\begin{aligned}\phi_{5,0} &= \tau_1^5 - \frac{30}{\omega}(1+10\nu)\tau_1^4 + \frac{300}{\omega^2}(1+10\nu)(1+12\nu)\tau_1^3 \\ &\quad - \frac{1200}{\omega^3}(1+10\nu)(1+12\nu)(1+15\nu)\tau_1^2 \\ &\quad + \frac{1800}{\omega^4}(1+10\nu)(1+12\nu)(1+15\nu)(1+20\nu)\tau_1 \\ &\quad - \frac{720}{\omega^5}(1+10\nu)(1+12\nu)(1+15\nu)(1+20\nu)(1+30\nu), \\ \epsilon_{5,0} &= 10\omega, \\ \gamma_{5,0} &= 0.\end{aligned}$$

• **n=6** (dos autofunciones)

$$\begin{aligned}
\phi_{6,0} &= \tau_1^6 - \frac{6}{\omega}(7+60\nu)\tau_1^5 + \frac{90}{\omega^2}(1+10\nu)(7+60\nu)\tau_1^4 \\
&\quad - \frac{600}{\omega^3}(1+10\nu)(1+12\nu)(7+60\nu)\tau_1^3 \\
&\quad + \frac{1800}{\omega^4}(1+10\nu)(1+12\nu)(1+15\nu)(7+60\nu)\tau_1^2 \\
&\quad - \frac{2160}{\omega^5}(1+10\nu)(1+12\nu)(1+15\nu)(1+20\nu)(7+60\nu)\tau_1, \\
&\quad + \frac{720}{\omega^6}(1+10\nu)(1+12\nu)(1+15\nu)(1+20\nu)(7+60\nu)(1+30\nu), \\
\epsilon_{6,0} &= 12\omega, \\
\gamma_{6,0} &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{6,1} &= \tau_2 - \frac{1+10\nu}{2(7+60\nu)}\tau_1^6, \\
\epsilon_{6,1} &= 12\omega, \\
\gamma_{6,1} &= 12(7+60\nu)\nu.
\end{aligned}$$

# Capítulo 10

## El sistema discreto $H_4$

### 10.1. Discretización canónica

La existencia de una forma algebraica del hamiltoniano  $H_4$  en el espacio de invariantes permite la construcción de un sistema discreto, mediante el procedimiento de discretización canónica descrito en la sección 4.1. Así, de manera análoga, introduzcamos el siguiente conjunto de operadores en diferencias finitas

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_i^{(\delta_i)} f(\tau_i) &\equiv \frac{f(\tau_i + \delta_i) - f(\tau_i)}{\delta_i} = \frac{(e^{\delta_i \partial_i} - 1)}{\delta_i} f(\tau_i), \\ \mathcal{X}_i^{(\delta_i)} f(\tau_i) &\equiv \tau_i f(\tau_i - \delta_i) = (\tau_i e^{-\delta_i \partial_i}) f(\tau_i),\end{aligned}\tag{10.1}$$

donde  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  son espaciamentos; aquí no se implica suma sobre índices repetidos. Los operadores  $\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}$  y  $\mathcal{X}_i^{(\delta_i)}$  forman un par canónico,

$$[\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}, \mathcal{D}_j^{(\delta_j)}] = 0, \quad [\mathcal{X}_i^{(\delta_i)}, \mathcal{X}_j^{(\delta_j)}] = 0, \quad [\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}, \mathcal{X}_j^{(\delta_j)}] = \delta_{ij},\tag{10.2}$$

para  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Los operadores (10.1) generan el álgebra de Heisenberg en 9 dimensiones, realizando una transformación canónica cuántica con parámetros  $\delta_{1,2,3,4}$ .

El procedimiento de discretización canónica se realiza mediante la transformación (4.6)  $\rightarrow$  (4.7). En este caso se define al vacío como el estado  $|0\rangle$  tal que

$$\mathcal{D}_i^{(\delta_i)} |0\rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.\tag{10.3}$$

En forma explícita esta condición es:

$$\begin{aligned} f(\tau_1 + \delta_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) &= f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) , \\ f(\tau_1, \tau_2 + \delta_2, \tau_3, \tau_4) &= f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) , \\ f(\tau_1, \tau_2, \tau_3 + \delta_3, \tau_4) &= f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) , \\ f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 + \delta_4) &= f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) . \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos elegir

$$f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = 1 . \quad (10.4)$$

Esto implica que las soluciones polinomiales de (4.6) están relacionada con las soluciones polinomiales de (4.7) mediante

$$\sum \alpha_{klmn} \tau_1^k \tau_2^l \tau_3^m \tau_4^n \longrightarrow \sum \alpha_{klmn} \tau_1^{(k)} \tau_2^{(l)} \tau_3^{(m)} \tau_4^{(n)} , \quad (10.5)$$

donde  $\tau_i^{(n+1)}$  es un cuasimonomio (4.11). Ambas soluciones poseen el mismo autovalor.

## 10.2. El hamiltoniano discreto

Realizando el procedimiento de discretización canónica (4.6)  $\rightarrow$  (4.7) para el hamiltoniano  $H_4$  en la forma algebraica  $h_{H_4}$  (8.12), llegamos al siguiente operador (isoespectral) en diferencias finitas:

$$\tilde{h}_{H_4} \equiv h_{H_4}(\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}, \mathcal{X}_i^{(\delta_i)}) = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} A_{k_1 k_2 k_3 k_4} e^{k_1 \delta_1 \partial_1 + k_2 \delta_2 \partial_2 + k_3 \delta_3 \partial_3 + k_4 \delta_4 \partial_4} , \quad (10.6)$$

con los siguientes coeficientes no nulos

$$\begin{aligned} A_{0,0,0,0} &= -\frac{4}{\delta_1} (2 + \delta_1 \omega) \left[ \frac{\tau_1}{\delta_1} + \frac{6\tau_2}{\delta_2} + \frac{10\tau_3}{\delta_3} + \frac{15\tau_4}{\delta_4} \right] - \frac{8}{\delta_1} (1 + 30\nu) , \\ A_{1,0,0,0} &= \frac{4}{\delta_1} \left[ \frac{\tau_1}{\delta_1} + \frac{12\tau_2}{\delta_2} + \frac{20\tau_3}{\delta_3} + \frac{30\tau_4}{\delta_4} - 2(1 + 30\nu) \right] , \\ A_{1,-1,0,0} &= -\frac{48}{\delta_1 \delta_2} \tau_2 , \\ A_{1,0,-1,0} &= -\frac{80}{\delta_1 \delta_3} \tau_3 , \end{aligned} \quad (10.7)$$

$$\begin{aligned}
A_{1,0,0,-1} &= -\frac{120}{\delta_1\delta_4}\tau_4, \\
A_{-1,0,0,0} &= \frac{4}{\delta_1^2}(1 + \delta_1\omega)\tau_1, \\
A_{-1,2,-1,0} &= \frac{88}{\delta_2^2}\tau_1\tau_3, \\
A_{-1,1,-1,0} &= -\frac{176}{\delta_2^2}\tau_1\tau_3, \\
A_{-1,0,-1,0} &= \frac{88}{\delta_2^2}\tau_1\tau_3, \\
A_{-1,-3,2,0} &= -\frac{38}{3\delta_3^2}\tau_1\tau_2(\tau_2 - \delta_2)(\tau_2 - 2\delta_2), \\
A_{-1,-3,1,0} &= \frac{76}{3\delta_3^2}\tau_1\tau_2(\tau_2 - \delta_2)(\tau_2 - 2\delta_2), \\
A_{-1,-3,-1,2} &= -\frac{2175}{\delta_4^2}\tau_1\tau_2(\tau_2 - \delta_2)(\tau_2 - 2\delta_2)\tau_3, \\
A_{-1,-3,-1,1} &= \frac{4350}{\delta_4^2}\tau_1\tau_2(\tau_2 - \delta_2)(\tau_2 - 2\delta_2)\tau_3, \\
A_{-1,-3,-1,0} &= -\frac{2175}{\delta_4^2}\tau_1\tau_2(\tau_2 - \delta_2)(\tau_2 - 2\delta_2)\tau_3, \\
A_{-1,-3,0,0} &= -\frac{38}{3\delta_3^2}\tau_1\tau_2(\tau_2 - \delta_2)(\tau_2 - 2\delta_2), \\
A_{-2,-2,0,1} &= \frac{10}{\delta_4}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)\tau_2(\tau_2 - \delta_2) \times \\
&\quad \times \left[ \frac{2\tau_2}{\delta_2} + \frac{42\tau_3}{\delta_3} - \frac{45\tau_4}{\delta_4} - \frac{5}{2}(1 + 18\nu) \right], \\
A_{-2,-2,0,0} &= -\frac{20}{\delta_4}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)\tau_2(\tau_2 - \delta_2) \times \\
&\quad \times \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} + \frac{21\tau_3}{\delta_3} - \frac{45\tau_4}{\delta_4} - \frac{1}{4}(5 + 6\nu) \right], \\
A_{-2,-2,0,-1} &= -\frac{450}{\delta_4^2}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)\tau_2(\tau_2 - \delta_2)\tau_4, \\
A_{-2,-2,-1,1} &= -\frac{420}{\delta_3\delta_4}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)\tau_2(\tau_2 - \delta_2)\tau_3, \\
A_{-2,-2,-1,0} &= \frac{420}{\delta_3\delta_4}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)\tau_2(\tau_2 - \delta_2)\tau_3,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
A_{-2,-3,0,1} &= -\frac{20}{\delta_2\delta_4}\tau_1(\tau_1-\delta_1)\tau_2(\tau_2-\delta_2)(\tau_2-2\delta_2), \\
A_{-2,-3,0,0} &= \frac{20}{\delta_2\delta_4}\tau_1(\tau_1-\delta_1)\tau_2(\tau_2-\delta_2)(\tau_2-2\delta_2), \\
A_{-3,-1,1,0} &= \frac{4}{\delta_3}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)\tau_2\left[\frac{7\tau_3}{\delta_3}+\frac{30\tau_4}{\delta_4}+5(1+6\nu)\right], \\
A_{-3,-1,1,-1} &= -\frac{120}{\delta_3\delta_4}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)\tau_2\tau_4, \\
A_{-3,-1,0,0} &= -\frac{4}{\delta_3}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)\tau_2\left[\frac{14\tau_3}{\delta_3}+\frac{30\tau_4}{\delta_4}-5(1+6\nu)\right], \\
A_{-3,-1,0,-1} &= \frac{120}{\delta_3\delta_4}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)\tau_2\tau_4, \\
A_{-3,-1,-1,0} &= \frac{28}{\delta_3^2}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)\tau_2\tau_3, \\
A_{-3,-1,-2,2} &= -\frac{1350}{\delta_4^2}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)\tau_2\tau_3(\tau_3-\delta_3), \\
A_{-3,-1,-2,1} &= \frac{2700}{\delta_4^2}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)\tau_2\tau_3(\tau_3-\delta_3), \\
A_{-3,-1,-2,0} &= -\frac{1350}{\delta_4^2}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)\tau_3\tau_3(\tau_3-\delta_3), \\
A_{-4,0,2,-1} &= -\frac{8}{3\delta_3^2}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)(\tau_1-3\delta_1)\tau_4, \\
A_{-4,0,1,-1} &= \frac{16}{3\delta_3^2}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)(\tau_1-3\delta_1)\tau_4, \\
A_{-4,0,0,-1} &= -\frac{8}{3\delta_3^2}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)(\tau_1-3\delta_1)\tau_4, \\
A_{-4,0,-1,1} &= \frac{120}{\delta_4}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)(\tau_1-3\delta_1)\tau_3 \times \\
&\quad \times \left[\frac{\tau_2}{\delta_2}-\frac{3\tau_3}{\delta_3}-\frac{5\tau_4}{\delta_4}-\frac{3}{4}(1+10\nu)\right], \\
A_{-4,0,-1,0} &= \frac{60}{\delta_4}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)(\tau_1-3\delta_1)\tau_3 \times \\
&\quad \times \left[-\frac{2\tau_2}{\delta_2}+\frac{3\tau_3}{\delta_3}+\frac{20\tau_4}{\delta_4}+\frac{3}{2}(3+10\nu)\right], \\
A_{-4,0,-1,-1} &= -\frac{600}{\delta_4^2}\tau_1(\tau_1-\delta_1)(\tau_1-2\delta_1)(\tau_1-3\delta_1)\tau_3\tau_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{-4,0,-2,1} &= \frac{360}{\delta_3\delta_4}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)(\tau_1 - 3\delta_1)\tau_3(\tau_3 - \delta_3) , \\
A_{-4,0,-2,0} &= -\frac{360}{\delta_3\delta_4}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)(\tau_1 - 3\delta_1)\tau_3(\tau_3 - \delta_3) , \\
A_{-4,-1,-1,1} &= -\frac{120}{\delta_4^2}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)(\tau_1 - 3\delta_1)\tau_2\tau_3 , \\
A_{-4,-1,-1,0} &= \frac{120}{\delta_2\delta_4}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)(\tau_1 - 3\delta_1)\tau_2\tau_3 , \\
A_{-5,1,0,0} &= \frac{8}{\delta_2}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)(\tau_1 - 3\delta_1)(\tau_1 - 4\delta_1) \times \\
&\quad \times \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} + \frac{6\tau_3}{\delta_3} + \frac{10\tau_4}{\delta_4} + \frac{3}{2}(1 + 10\nu) \right] , \\
A_{-5,1,0,-1} &= -\frac{80}{\delta_2\delta_4}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)(\tau_1 - 3\delta_1)(\tau_1 - 4\delta_1)\tau_4 , \\
A_{-5,1,-1,0} &= -\frac{48}{\delta_2\delta_3}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)(\tau_1 - 3\delta_1)(\tau_1 - 4\delta_1)\tau_3 , \\
A_{-5,0,0,0} &= -\frac{16}{\delta_2}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)(\tau_1 - 3\delta_1)(\tau_1 - 4\delta_1) \times \\
&\quad \times \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} + \frac{3\tau_3}{\delta_3} + \frac{5\tau_4}{\delta_4} + \frac{3}{4}(1 + 10\nu) \right] , \\
A_{-5,0,0,-1} &= \frac{80}{\delta_2\delta_4}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)(\tau_1 - 3\delta_1)(\tau_1 - 4\delta_1)\tau_4 , \\
A_{-5,0,-1,0} &= \frac{48}{\delta_2\delta_3}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)(\tau_1 - 3\delta_1)(\tau_1 - 4\delta_1)\tau_3 , \\
A_{-5,-1,0,0} &= \frac{8}{\delta_2^2}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)(\tau_1 - 3\delta_1)(\tau_1 - 4\delta_1)\tau_2 , \\
A_{0,2,1,-1} &= -\frac{16}{\delta_2\delta_3}\tau_4 , \\
A_{0,1,0,-1} &= \frac{16}{\delta_2\delta_3}\tau_4 , \\
A_{0,1,-2,1} &= -\frac{1200}{\delta_2\delta_4}\tau_3(\tau_3 - \delta_3) , \\
A_{0,1,-2,0} &= \frac{1200}{\delta_2\delta_4}\tau_3(\tau_3 - \delta_3) , \\
A_{0,-1,0,0} &= \frac{24}{\delta_1\delta_2}(2 + \delta_1\omega)\tau_2 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{0,-1,-2,0} &= -\frac{8}{\delta_2\delta_3}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)\tau_2(\tau_2 - \delta_2) , \\
A_{0,-1,-3,0} &= \frac{8}{\delta_2\delta_3}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)\tau_2(\tau_2 - \delta_2) , \\
A_{0,-2,-2,0} &= \frac{8}{\delta_2\delta_3}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)\tau_2(\tau_2 - \delta_2) , \\
A_{0,-2,-3,0} &= -\frac{8}{\delta_2\delta_3}\tau_1(\tau_1 - \delta_1)(\tau_1 - 2\delta_1)\tau_2(\tau_2 - \delta_2) , \\
A_{0,-4,1,1} &= \frac{60}{\delta_3\delta_4}\tau_2(\tau_2 - \delta_2)(\tau_2 - 2\delta_2)(\tau_2 - 3\delta_2) , \\
A_{0,-4,1,0} &= -\frac{60}{\delta_3\delta_4}\tau_2(\tau_2 - \delta_2)(\tau_2 - 2\delta_2)(\tau_2 - 3\delta_2) , \\
A_{0,-4,0,1} &= -\frac{60}{\delta_3\delta_4}\tau_2(\tau_2 - \delta_2)(\tau_2 - 2\delta_2)(\tau_2 - 3\delta_2) , \\
A_{0,-4,0,0} &= \frac{60}{\delta_3\delta_4}\tau_2(\tau_2 - \delta_2)(\tau_2 - 2\delta_2)(\tau_2 - 3\delta_2) , \\
A_{0,0,1,-1} &= \frac{16}{\delta_2\delta_3}\tau_4 , \\
A_{0,0,-1,0} &= \frac{40}{\delta_1\delta_3}(2 + \delta_1\omega)\tau_3 , \\
A_{0,0,-2,1} &= \frac{1200}{\delta_2\delta_4}\tau_3(\tau_3 - \delta_3) , \\
A_{0,0,-2,0} &= -\frac{1200}{\delta_2\delta_4}\tau_3(\tau_3 - \delta_3) , \\
A_{0,0,0,-1} &= \left[ \frac{60}{\delta_1\delta_4}(2 + \delta_1\omega) - \frac{16}{\delta_2\delta_3} \right] \tau_4 .
\end{aligned}$$

El problema de autovalores correspondiente es

$$\sum_{k_1, k_2, k_3} A_{k_1 k_2 k_3} \varphi(\tau_1 + k_1 \delta_1, \tau_2 + k_2 \delta_2, \tau_3 + k_3 \delta_3) = -2\epsilon \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3) . \quad (10.8)$$

Este problema define el sistema discreto uniforme  $H_4$ . Es importante notar que, a pesar de que comenzamos con un operador diferencial de segundo orden, encontramos un operador en diferencias finitas de 65 puntos – conecta la función en 65 puntos diferentes en la malla.

El espectro del operador discreto  $\tilde{h}_{H_4}$  (10.6) para autofunciones polinomiales coincide con el espectro del operador continuo  $h_{H_4}$  (8.12) para el cual todas

las autofunciones son polinomiales:

$$\epsilon_{n_1, n_2, n_3, n_4} = 2\omega(n_1 + 6n_2 + 10n_3 + 15n_4) , \quad (10.9)$$

siendo los  $n$ 's enteros no negativos. Las autofunciones de (10.6) están relacionadas con las autofunciones del operador continuo  $h_{H_4}$  reemplazando cada monomio con un cuasimonomio en cada variable. No podemos excluir la existencia de otros autoestados del operador discreto  $\tilde{h}_{H_4}$  que no estén dados por autofunciones polinomiales. Dichos autoestados pueden corresponder a autofunciones no normalizables de  $h_{H_4}$ .

### 10.3. Integral discreta

Un procedimiento similar de discretización puede aplicarse a la integral  $\mathcal{F}$ . En lugar del operador continuo  $f$  (8.16) obtenemos su contraparte discreta

$$\tilde{f} \equiv f(\mathcal{D}_i^{(\delta_i)}, \mathcal{X}_i^{(\delta_i)}) = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} B_{k_1 k_2 k_3 k_4} e^{k_1 \delta_1 \partial_1 + k_2 \delta_2 \partial_2 + k_3 \delta_3 \partial_3 + k_4 \delta_4 \partial_4} , \quad (10.10)$$

con los siguientes coeficientes

$$\begin{aligned} B_{0,0,0,0} &= \frac{24\tau_2}{\delta_2} \left[ \frac{3\tau_2}{\delta_2} + \frac{10\tau_3}{\delta_3} + \frac{15\tau_4}{\delta_4} + \frac{1}{2}(1 + 60\nu) \right] \\ &\quad + \frac{200\tau_3}{\delta_3} \left[ \frac{\tau_3}{\delta_3} + \frac{3\tau_4}{\delta_4} + \frac{1}{10}(1 + 60\nu) \right] \\ &\quad + \frac{450\tau_4}{\delta_4} \left[ \frac{\tau_4}{\delta_4} + \frac{1}{45}(3 + 180\nu) \right] , \\ B_{-1,1,1,-1} &= \frac{8}{\delta_2 \delta_3} \tau_1 \tau_4 , \\ B_{-1,1,0,-1} &= -\frac{8}{\delta_2 \delta_3} \tau_1 \tau_4 , \\ B_{-1,1,-2,1} &= \frac{600}{\delta_2 \delta_4} \tau_1 \tau_3 (\tau_3 - \delta_3) (\tau_3 - 2\delta_3) , \\ B_{-1,1,-2,0} &= -\frac{600}{\delta_2 \delta_4} \tau_1 \tau_3 (\tau_3 - \delta_3) , \\ B_{-1,0,1,-1} &= -\frac{8}{\delta_2 \delta_3} \tau_1 \tau_4 , \end{aligned} \quad (10.11)$$

$$\begin{aligned}
B_{-1,0,0,0} &= \frac{8}{\delta_2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) (\tau_1 - 5\delta_1) \times \\
&\quad \times \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} + \frac{3\tau_3}{\delta_3} + \frac{5\tau_4}{\delta_4} + \frac{3}{4} (1 + 10\nu) \right], \\
B_{-1,0,0,-1} &= \frac{8}{\delta_2 \delta_3} \tau_1 \tau_4, \\
B_{-1,0,-2,1} &= -\frac{600}{\delta_2 \delta_4} \tau_1 \tau_3 (\tau_3 - \delta_3) (\tau_3 - 2\delta_3), \\
B_{-1,0,-2,0} &= \frac{600}{\delta_1 \delta_4} \tau_1 \tau_3 (\tau_3 - \delta_3), \\
B_{-1,-4,1,1} &= -\frac{30}{\delta_3 \delta_4} \tau_1 \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) (\tau_2 - 3\delta_2), \\
B_{-1,-4,1,0} &= \frac{30}{\delta_3 \delta_4} \tau_1 \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) (\tau_2 - 3\delta_2), \\
B_{-1,-4,0,1} &= \frac{30}{\delta_3 \delta_4} \tau_1 \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) (\tau_2 - 3\delta_2), \\
B_{-1,-4,0,0} &= -\frac{30}{\delta_3 \delta_4} \tau_1 \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) (\tau_2 - 3\delta_2), \\
B_{-2,2,-1,0} &= \frac{44}{\delta_2^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \tau_3, \\
B_{-2,1,-1,0} &= \frac{88}{\delta_2^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \tau_3, \\
B_{-2,0,-1,0} &= -\frac{44}{\delta_2^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \tau_3, \\
B_{-2,-3,2,0} &= \frac{19}{3\delta_3^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2), \\
B_{-2,-3,1,0} &= -\frac{38}{3\delta_3^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2), \\
B_{-2,-3,0,0} &= \frac{19}{3\delta_3^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2), \\
B_{-2,-3,-1,2} &= \frac{2175}{2\delta_4^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) \tau_3, \\
B_{-2,-3,-1,1} &= -\frac{2175}{2\delta_4^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) \tau_3, \\
B_{-2,-3,-1,0} &= \frac{2175}{2\delta_4^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) \tau_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{-3,-2,0,1} &= -\frac{5}{\delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) \times \\
&\quad \times \left[ \frac{2\tau_2}{\delta_2} + \frac{42\tau_3}{\delta_3} + \frac{45\tau_4}{\delta_4} - \frac{5}{2}(1 + 18\nu) \right] , \\
B_{-3,-2,0,0} &= \frac{10}{\delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) \times \\
&\quad \times \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} + \frac{21\tau_3}{\delta_3} - \frac{45\tau_4}{\delta_4} - \frac{5}{4}(1 + 6\nu) \right] , \\
B_{-3,-2,0,-1} &= \frac{225}{\delta_4^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) \tau_4 , \\
B_{-3,-2,-1,1} &= \frac{210}{\delta_3 \delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) \tau_3 , \\
B_{-3,-2,-1,0} &= -\frac{210}{\delta_3 \delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) \tau_3 , \\
B_{-3,-3,0,1} &= \frac{10}{\delta_2 \delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) , \\
B_{-3,-3,0,0} &= -\frac{10}{\delta_2 \delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) (\tau_2 - 2\delta_2) , \\
B_{-4,-1,1,0} &= \frac{2}{\delta_3} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) \tau_2 \times \\
&\quad \times \left[ \frac{2\tau_2}{\delta_2} - \frac{7\tau_3}{\delta_3} - \frac{30\tau_4}{\delta_4} - (7 + 30\nu) \right] , \\
B_{-4,-1,1,-1} &= \frac{60}{\delta_3 \delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) \tau_2 \tau_4 , \\
B_{-4,-1,0,0} &= -\frac{4}{\delta_3} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) \tau_2 \times \\
&\quad \times \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} - \frac{7\tau_3}{\delta_3} - \frac{15\tau_4}{\delta_4} - \frac{1}{2}(7 + 30\nu) \right] , \\
B_{-4,-1,0,-1} &= -\frac{60}{\delta_3 \delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) \tau_2 \tau_4 , \\
B_{-4,-1,-1,0} &= -\frac{14}{\delta_3^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) \tau_2 \tau_3 , \\
B_{-4,-1,-2,2} &= \frac{675}{\delta_4^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) \tau_2 \tau_3 (\tau_3 - \delta_3) , \\
B_{-4,-1,-2,1} &= -\frac{1350}{\delta_4^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) \tau_2 \tau_3 (\tau_3 - \delta_3) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{-4,-1,-2,0} &= \frac{675}{\delta_4^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) \tau_2 \tau_3 (\tau_3 - \delta_3) , \\
B_{-4,-2,1,0} &= -\frac{4}{\delta_2 \delta_3} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) , \\
B_{-4,-2,0,0} &= \frac{4}{\delta_2 \delta_3} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) , \\
B_{-5,0,2,-1} &= \frac{4}{3\delta_3^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) , \\
B_{-5,0,1,-1} &= -\frac{8}{3\delta_3^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) , \\
B_{-5,0,0,-1} &= \frac{4}{3\delta_3^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) , \\
B_{-5,0,-1,1} &= -\frac{60}{\delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) \tau_3 \times \\
&\quad \times \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} - \frac{3\tau_3}{\delta_3} - \frac{5\tau_4}{\delta_4} - \frac{3}{4}(1 + 10\nu) \right] , \\
B_{-5,0,-1,0} &= \frac{60}{\delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) \tau_3 \times \\
&\quad \times \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} - \frac{3\tau_3}{\delta_3} - \frac{10\tau_4}{\delta_4} - \frac{3}{4}(1 + 10\nu) \right] , \\
B_{-5,0,-1,-1} &= \frac{300}{\delta_4^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) \tau_3 \tau_4 , \\
B_{-5,0,-2,1} &= -\frac{180}{\delta_3 \delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) \tau_3 (\tau_3 - \delta_3) , \\
B_{-5,0,-2,0} &= \frac{180}{\delta_3 \delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) \tau_3 (\tau_3 - \delta_3) , \\
B_{-5,-1,-1,1} &= \frac{60}{\delta_2 \delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) \tau_2 \tau_3 , \\
B_{-5,-1,-1,0} &= -\frac{60}{\delta_2 \delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) \tau_2 \tau_3 , \\
B_{-6,1,0,0} &= -\frac{4}{\delta_2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) (\tau_1 - 5\delta_1) \times , \\
&\quad \times \left[ \frac{\tau_2}{\delta_2} + \frac{6\tau_3}{\delta_3} + \frac{10\tau_4}{\delta_4} - \frac{3}{2}(1 + 10\nu) \right] , \\
B_{-6,1,0,-1} &= \frac{40}{\delta_2 \delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) (\tau_1 - 5\delta_1) \tau_4 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{-6,1,-1,0} &= \frac{24}{\delta_2 \delta_3} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) (\tau_1 - 5\delta_1) \tau_3 , \\
B_{-6,0,0,-1} &= -\frac{40}{\delta_2 \delta_4} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) (\tau_1 - 5\delta_1) \tau_4 , \\
B_{-6,0,-1,0} &= -\frac{24}{\delta_2 \delta_3} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) (\tau_1 - 5\delta_1) \tau_3 , \\
B_{-6,-1,0,0} &= -\frac{4}{\delta_2^2} \tau_1 (\tau_1 - \delta_1) (\tau_1 - 2\delta_1) (\tau_1 - 3\delta_1) (\tau_1 - 4\delta_1) (\tau_1 - 5\delta_1) \tau_2 , \\
B_{0,-1,0,0} &= -\frac{24\tau_2}{\delta_2^2} \left[ \frac{6(\tau_2 - \delta_2)}{\delta_2} + \frac{10\tau_3}{\delta_3} + \frac{15\tau_4}{\delta_4} - \frac{5}{2}(1 - 12\nu) \right] , \\
B_{0,-1,0,-1} &= \frac{360}{\delta_2 \delta_4} \tau_2 \tau_4 , \\
B_{0,-1,-1,0} &= \frac{240}{\delta_2 \delta_3} \tau_2 \tau_3 , \\
B_{0,-2,0,0} &= \frac{72}{\delta_2^2} \tau_2 (\tau_2 - \delta_2) , \\
B_{0,0,-1,0} &= -\frac{40\tau_3}{\delta_3} \left[ \frac{6\tau_2}{\delta_2} + \frac{10\tau_3}{\delta_3} + \frac{15\tau_4}{\delta_4} - \frac{3}{2}(3 - 20\nu) \right] , \\
B_{0,0,-1,-1} &= \frac{600}{\delta_3 \delta_4} \tau_3 \tau_4 , \\
B_{0,0,-2,0} &= \frac{200}{\delta_3^2} \tau_3 (\tau_3 - \delta_3) , \\
B_{0,0,0,-1} &= -\frac{60\tau_4}{\delta_4} \left[ \frac{6\tau_2}{\delta_2} + \frac{10\tau_3}{\delta_3} + \frac{15(\tau_4 - \delta_4)}{\delta_4} - (7 - 30\nu) \right] , \\
B_{0,0,0,-2} &= \frac{450}{\delta_4^2} \tau_4 (\tau_4 - \delta_4) ,
\end{aligned}$$

Se obtiene un operador discreto en 65 puntos. Al igual que en el caso de  $H_3$ , los operadores discretos  $\tilde{h}_{H_4}$  y  $\tilde{f}$  tienen una estructura que conecta el mismo número de puntos. Sin embargo, los puntos que conectan son diferentes.

Se verifica que los operadores discretos  $\tilde{h}_{H_4}$  y  $\tilde{f}$  conmutan. Esto es consistente con el hecho de que el procedimiento de discretización canónica preserva la propiedad de integrabilidad.



# Capítulo 11

## Generalización cuasi-exactamente soluble

### 11.1. Autofunciones radiales

Entre las autofunciones del hamiltoniano  $h_{H_4}$  (8.12) existe una familia infinita de autofunciones que dependen solamente de la variable  $\tau_1$ , la cual es el cuadrado de la variable radial (hiperesférica)  $r$ . Estos autoestados son soluciones del problema de autovalores

$$-h_1 \varphi \equiv -4\tau_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_1^2} + (4\omega\tau_1 - 8(1 + 30\nu)) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} = \epsilon \varphi . \quad (11.1)$$

Las autofunciones correspondientes vienen dadas por los polinomios de Laguerre y los autovalores son lineales en el número cuántico

$$\varphi_{n_1}(\tau_1) = L_{n_1}^{(1+60\nu)}(\omega\tau_1) , \quad \epsilon_{n_1} = 4\omega n_1 , \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (11.2)$$

El operador en el miembro izquierdo de (11.1) puede reescribirse en términos de los generadores  $J_k^0, J^-$  de la subálgebra de Cartan del álgebra  $sl(2)$  de operadores diferenciales de primer orden (véase (5.3) y (5.4)). Cuando se reescribe en términos de estos generadores, el operador  $h_1$  toma la forma  $sl(2)$ -Lie-algebraica

$$h_1 = 4J_0^0 J^- - 4\omega J_0^0 + 8(1 + 30\nu) J^- . \quad (11.3)$$

Es sencillo verificar que este operador preserva el flag infinito de espacios polinomiales (5.6) y, en particular, cualquier autofunción es un elemento del flag.

## 11.2. Hamiltoniano cuasi-exactamente soluble

Procedamos a construir una generalización QES de (7.1). Buscamos el hamiltoniano QES en una cierta forma

$$H_{H_4}^{(qes)} = H_{H_4} + V^{(qes)}(\tau_1) , \quad (11.4)$$

donde  $V^{(qes)}$  es un potencial. Realicemos una rotación de norma de (11.9) de la forma (8.1). Imponemos el requisito de que el operador resultante posea una familia de autofunciones dependientes de  $\tau_1$ . Se obtiene la siguiente ecuación:

$$-h_1^{(qes)}\varphi \equiv -4\tau_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_1^2} + (4\omega\tau_1 - 8(1 + 30\nu)) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} + 2V^{(qes)}(\tau_1)\varphi = \epsilon\varphi . \quad (11.5)$$

Nuestro propósito es encontrar  $V^{(qes)}$  para el cual el operador  $h_1^{(qes)}$  sea  $sl(2)$ -Lie-algebraico – pueda ser reescrito en términos de los generadores (5.3). Siguiendo la discusión del sistema  $H_3$ , realicemos una rotación de norma sobre el operador (5.8),

$$\begin{aligned} h_1^{(sl(2)-qes)} &= \tau_1^{-\gamma} \exp\left(\frac{a}{4}\tau_1^2\right) h_1^{(qes)} \tau_1^\gamma \exp\left(-\frac{a}{4}\tau_1^2\right) \\ &= 4\tau_1 \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} - 4(a\tau_1^2 + \omega\tau_1 - 2\gamma - 60\nu - 2) \frac{\partial}{\partial \tau_1} + a^2\tau_1^3 \\ &\quad + 2a\omega\tau_1^2 - 2a(2\gamma + 60\nu + 3)\tau_1 + \frac{4\gamma(\gamma + 60\nu + 1)}{\tau_1} \\ &\quad - 4\omega\gamma - 2V^{(qes)}(\tau_1) . \end{aligned} \quad (11.6)$$

donde  $a \geq 0$  y  $\gamma$  son parámetros. Por tanto el potencial correspondiente  $V^{(qes)}$  que asegura la existencia de la representación  $sl(2)$  es de la forma

$$V^{(qes)} = \frac{1}{2} a^2\tau_1^3 + a\omega\tau_1^2 - a(2k + 2\gamma + 60\nu + 3)\tau_1 + \frac{2\gamma(\gamma + 60\nu + 1)}{\tau_1} , \quad (11.7)$$

y el operador  $h_1^{(sl(2)-qes)}$  tiene la forma Lie-algebraica

$$h_1^{(sl(2)-qes)} = 4J_k^0 J^- - 4aJ_k^+ - 4\omega J_k^0 + 2(k + 4\gamma + 4(1 + 30\nu))J^- , \quad (11.8)$$

Aquí los términos constantes son ignorados.

El operador  $h_1^{(sl(2)-qes)}$  tiene al espacio  $\mathcal{P}_k$  (5.4) como su subespacio invariante, pero no preserva el flag de espacios (5.6). Luego,  $h_1^{(sl(2)-qes)}$  tiene  $(k+1)$  autofunciones polinomiales en la forma de polinomios de grado  $k$ ,

$$P_j^{(k)}(\tau_1) = \sum_{i=0}^k \gamma_i^{(j)} \tau_1^i, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

mientras que las otras autofunciones no son polinomios. Esto implica que el hamiltoniano (11.9) con la elección del potencial (11.7) posee una forma  $sl(2)$ -cuasi-exactamente-soluble.

La expresión final del hamiltoniano  $sl(2)$ -cuasi-exactamente-soluble asociado con el espacio de raíces  $H_4$  es la siguiente:

$$\begin{aligned} H_{H_4}^{(qes)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \omega^2 x_k^2 + \frac{g}{x_k^2} \right] \\ &+ \sum_{\mu_{2,3,4}=0,1} \frac{2g}{[x_1 + (-1)^{\mu_2} x_2 + (-1)^{\mu_3} x_3 + (-1)^{\mu_4} x_4]^2} \\ &+ \sum_{\{i,j,k,l\}} \sum_{\mu_{1,2}=0,1} \frac{2g}{[x_i + (-1)^{\mu_1} \varphi_+ x_j + (-1)^{\mu_2} \varphi_- x_k + 0 \cdot x_l]^2} \quad (11.9) \\ &+ \frac{1}{2} a^2 (\mathbf{x}^2)^3 + a\omega (\mathbf{x}^2)^2 - a(2k + 2\gamma + 60\nu + 3) \mathbf{x}^2 \\ &+ \frac{2\gamma(\gamma + 60\nu + 1)}{\mathbf{x}^2}, \end{aligned}$$

donde  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$  y sus permutaciones pares, y  $\mathbf{x}^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2$ . Para este hamiltoniano conocemos  $(k+1)$  autoestados explícitamente. Sus autofunciones tienen la forma

$$\Psi_k(x) = \Delta_1^\nu \Delta_2^\nu \Delta_3^\nu (\mathbf{x}^2)^\gamma \cdot P_k(\mathbf{x}^2) e^{-\frac{\omega}{2} \mathbf{x}^2 - \frac{a}{4} (\mathbf{x}^2)^2} \quad (11.10)$$

donde  $P_k$  es un polinomio de grado  $k$ , la constante de acoplamiento  $g = \nu(\nu - 1) > -\frac{1}{4}$  y  $\Delta_{1,2,3}$  vienen dados por (7.14). Vale la pena presentar varias  $P_k$  explícitamente,

$$P_0(\mathbf{x}^2) = 1, \quad E_0 = 2\omega(1 + 30\nu + \gamma),$$

$$P_{1,\pm}(\mathbf{x}^2) = \mathbf{x}^2 + \frac{1}{2a} \left[ \omega \pm \sqrt{\omega^2 + 8a(\gamma + 1 + 30\nu)} \right], \quad (11.11)$$

$$E_{1,\pm} = E_0 + \omega \mp \sqrt{\omega^2 + 8a(\gamma + 1 + 30\nu)}.$$

Las soluciones para  $k = 1$  están relacionadas mediante continuación analítica en uno de los parámetros  $\omega, a, \gamma, \nu$  manteniendo los otros parámetros fijos .

Dado que  $V^{(qes)}(\tau_1) = V^{(qes)}(r^2)$  (en coordenadas hipersféricas), la integral  $\mathcal{F}$  (7.11) continúa conmutando con el hamiltoniano QES (11.9).

# Capítulo 12

## El álgebra escondida $h^{(4)}$

### 12.1. Operadores generadores

Hemos mostrado que el hamiltonianos en la forma algebraica (8.12) actúa en los espacios de polinomios en varias variables

$$\mathcal{P}_n^{(1,5,8,12)} = \langle \tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \tau_3^{p_3} \tau_4^{p_4} \mid 0 \leq p_1 + 5p_2 + 8p_3 + 12p_4 \leq n \rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

El espacio de dimensión finita  $\mathcal{P}_n^{(1,5,8,12)}$  es un espacio de representación de un álgebra de operadores diferenciales. Nos referiremos a esta álgebra como el álgebra  $h^{(4)}$ .

En analogía con el álgebra escondida  $h^{(3)}$ , los elementos generadores del álgebra  $h^{(4)}$  pueden dividirse en dos clases. La primera clase de generadores actúa en  $\mathcal{P}_n^{(1,5,8,12)}$  para cualquier  $n \in \mathbf{N}$  y por ello preserva el flag  $\mathcal{P}^{(1,5,8,12)}$ . La segunda clase de operadores actúa en el espacio  $\mathcal{P}_n^{(1,5,8,12)}$  para un cierto valor de  $n$  solamente, y corresponde a generadores de ascenso.

El álgebra  $h^{(4)}$  tiene dimensión infinita pero es generada de manera finita. Los operadores generadores de la primera clase son:

- 53 operadores diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} T_0^{(1)} &= \partial_1, & T_0^{(2)} &= \partial_2, & T_0^{(3)} &= \partial_3, & T_0^{(4)} &= \partial_4, \\ T_1^{(1)} &= \tau_1 \partial_1, & T_2^{(2)} &= \tau_2 \partial_2, & T_3^{(3)} &= \tau_3 \partial_3, & T_4^{(4)} &= \tau_4 \partial_4, \\ T_1^{(2)} &= \tau_1 \partial_2, & T_{12}^{(2)} &= \tau_1^2 \partial_2, & T_{13}^{(2)} &= \tau_1^3 \partial_2, & T_{14}^{(2)} &= \tau_1^4 \partial_2, \end{aligned} \quad (12.1)$$

$$\begin{aligned}
T_{15}^{(2)} &= \tau_1^5 \partial_2, & T_1^{(3)} &= \tau_1 \partial_3, & T_{12}^{(3)} &= \tau_1^2 \partial_3, & T_{13}^{(3)} &= \tau_1^3 \partial_3, \\
T_{14}^{(3)} &= \tau_1^4 \partial_3, & T_{15}^{(3)} &= \tau_1^5 \partial_3, & T_{16}^{(3)} &= \tau_1^6 \partial_3, & T_{17}^{(3)} &= \tau_1^7 \partial_3, \\
T_{18}^{(3)} &= \tau_1^8 \partial_3, & T_1^{(4)} &= \tau_1 \partial_4, & T_{12}^{(4)} &= \tau_1^2 \partial_4, & T_{13}^{(4)} &= \tau_1^3 \partial_4, \\
T_{14}^{(4)} &= \tau_1^4 \partial_4, & T_{15}^{(4)} &= \tau_1^5 \partial_4, & T_{16}^{(4)} &= \tau_1^6 \partial_4, & T_{17}^{(4)} &= \tau_1^7 \partial_4, \\
T_{18}^{(4)} &= \tau_1^8 \partial_4, & T_{19}^{(4)} &= \tau_1^9 \partial_4, & T_{110}^{(4)} &= \tau_1^{10} \partial_4, & T_{111}^{(4)} &= \tau_1^{11} \partial_4, \\
T_{112}^{(4)} &= \tau_1^{12} \partial_4, & T_2^{(3)} &= \tau_2 \partial_3, & T_{12}^{(3)} &= \tau_1 \tau_2 \partial_3, & T_{122}^{(4)} &= \tau_1^2 \tau_2 \partial_3, \\
T_{132}^{(3)} &= \tau_1^3 \tau_2 \partial_3, & T_2^{(4)} &= \tau_2 \partial_4, & T_{12}^{(4)} &= \tau_1 \tau_2 \partial_4, & T_{122}^{(4)} &= \tau_1^2 \tau_2 \partial_4, \\
T_{132}^{(4)} &= \tau_1^3 \tau_2 \partial_4, & T_{142}^{(4)} &= \tau_1^4 \tau_2 \partial_4, & T_{152}^{(4)} &= \tau_1^5 \tau_2 \partial_4, & T_{162}^{(4)} &= \tau_1^6 \tau_2 \partial_4, \\
T_{172}^{(3)} &= \tau_1^7 \tau_2 \partial_4, & T_{22}^{(4)} &= \tau_2^2 \partial_4, & T_{122}^{(4)} &= \tau_1 \tau_2^2 \partial_4, & T_{1222}^{(4)} &= \tau_1^2 \tau_2^2 \partial_4, \\
T_3^{(4)} &= \tau_3 \partial_4, & T_{13}^{(4)} &= \tau_1 \tau_3 \partial_4, & T_{123}^{(4)} &= \tau_1^2 \tau_3 \partial_4, & T_{133}^{(4)} &= \tau_1^3 \tau_3 \partial_4, \\
T_{143}^{(4)} &= \tau_1^4 \tau_3 \partial_4.
\end{aligned}$$

- 23 operadores diferenciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}
T_{23}^{(14)} &= \tau_2 \tau_3 \partial_{14}, & T_4^{(23)} &= \tau_4 \partial_{23}, & T_{14}^{(23)} &= \tau_1 \tau_4 \partial_{23}, \\
T_3^{(22)} &= \tau_3 \partial_{22}, & T_{13}^{(22)} &= \tau_1 \tau_3 \partial_{22}, & T_{123}^{(22)} &= \tau_1^2 \tau_3 \partial_{22}, \\
T_{32}^{(24)} &= \tau_3^2 \partial_{24}, & T_{132}^{(24)} &= \tau_1 \tau_3^2 \partial_{24}, & T_{23}^{(33)} &= \tau_2^3 \partial_3^2, \\
T_{123}^{(33)} &= \tau_1 \tau_2^3 \partial_3^2, & T_4^{(33)} &= \tau_4 \partial_{33}, & T_{14}^{(33)} &= \tau_1 \tau_4 \partial_{33}, \\
T_{124}^{(33)} &= \tau_1^2 \tau_4 \partial_{33}, & T_{134}^{(33)} &= \tau_1^3 \tau_4 \partial_{33}, & T_{144}^{(33)} &= \tau_1^4 \tau_4 \partial_{33}, \\
T_{24}^{(34)} &= \tau_2^4 \partial_{34}, & T_{33}^{(44)} &= \tau_3^3 \partial_{44}, & T_{232}^{(44)} &= \tau_2 \tau_3^2 \partial_{44}, \\
T_{1232}^{(44)} &= \tau_1 \tau_2 \tau_3^2 \partial_{44}, & T_{12232}^{(44)} &= \tau_1^2 \tau_2 \tau_3^2 \partial_{44}, & T_{13232}^{(44)} &= \tau_1^3 \tau_2 \tau_3^2 \partial_{44}, \\
T_{233}^{(44)} &= \tau_2^3 \tau_3 \partial_{44}, & T_{1233}^{(44)} &= \tau_1 \tau_2^3 \tau_3 \partial_{44}.
\end{aligned} \tag{12.2}$$

- 14 operadores diferenciales de tercer orden:

$$\begin{aligned}
T_{22}^{(123)} &= \tau_2^2 \partial_1^2 \partial_3, & T_{24}^{(132)} &= \tau_2 \tau_4 \partial_1 \partial_3^2, & T_{25}^{(142)} &= \tau_2^5 \partial_1 \partial_4^2, \\
T_4^{(23)} &= \tau_4 \partial_2^3, & T_{14}^{(23)} &= \tau_1 \tau_4 \partial_2^3, & T_{124}^{(23)} &= \tau_1^2 \tau_4 \partial_2^3, \\
T_{134}^{(23)} &= \tau_1^3 \tau_4 \partial_2^3, & T_{224}^{(33)} &= \tau_2^2 \tau_4 \partial_3^3, & T_{1224}^{(33)} &= \tau_1 \tau_2^2 \tau_4 \partial_3^3, \\
T_{12224}^{(33)} &= \tau_1^2 \tau_2^2 \tau_4 \partial_3^3, & T_{42}^{(33)} &= \tau_4^2 \partial_3^3, & T_{27}^{(43)} &= \tau_2^7 \partial_4^3, \\
T_{127}^{(43)} &= \tau_1 \tau_2^7 \partial_4^3, & T_{2432}^{(43)} &= \tau_2^4 \tau_3^2 \partial_4^3.
\end{aligned} \tag{12.3}$$

- 8 operadores diferenciales de cuarto orden:

$$\begin{aligned}
T_3^{(1^3 2)} &= \tau_3 \partial_1^3 \partial_2, & T_{2^3}^{(1^3 4)} &= \tau_2^3 \partial_1^3 \partial_4, & T_4^{(1^2 2^2)} &= \tau_4 \partial_1^2 \partial_2^2, \\
T_{3^2}^{(1^2 3)} &= \tau_3^2 \partial_1^2 \partial_2^3, & T_{2^5}^{(1^3 3)} &= \tau_2^5 \partial_1 \partial_3^3, & T_{3^4}^{(2^4)} &= \tau_3 \tau_4 \partial_2^4, \\
T_{2^4 4}^{(3^4)} &= \tau_2^4 \tau_4 \partial_3^4, & T_{2^8 3}^{(4^4)} &= \tau_2^8 \tau_3 \partial_4^4.
\end{aligned} \tag{12.4}$$

- 12 operadores diferenciales de quinto orden:

$$\begin{aligned}
T_2^{(1^5)} &= \tau_2 \partial_1^5, & T_4^{(1^4 3)} &= \tau_4 \partial_1^4 \partial_3, & T_{3^2}^{(1^4 4)} &= \tau_3^2 \partial_1^4 \partial_4, \\
T_{3^3}^{(1^2 2^2 4)} &= \tau_3^3 \partial_1^2 \partial_2^2 \partial_4, & T_{4^2}^{(1^2 3^3)} &= \tau_4^2 \partial_1 \partial_2^3 \partial_3, & T_{3^3}^{(2^5)} &= \tau_3^3 \partial_2^5, \\
T_{13^3}^{(2^5)} &= \tau_1 \tau_3^3 \partial_2^5, & T_{4^2}^{(2^5)} &= \tau_4^2 \partial_2^5, & T_{14^2}^{(2^5)} &= \tau_1 \tau_4^2 \partial_2^5, \\
T_{3^4}^{(2^4 4)} &= \tau_3^4 \partial_2^4 \partial_4, & T_{2^8}^{(3^5)} &= \tau_2^8 \partial_3^5, & T_{2^{12}}^{(4^5)} &= \tau_2^{12} \partial_4^5.
\end{aligned} \tag{12.5}$$

- 2 operadores diferenciales de sexto orden:

$$T_{4^2}^{(1^3 2^3 2)} = \tau_4^2 \partial_1^3 \partial_2 \partial_3^2, \quad T_{4^3}^{(2^4 3^2)} = \tau_4^3 \partial_2^4 \partial_3^2. \tag{12.6}$$

- 4 operadores diferenciales de octavo orden:

$$T_3^{(1^8)} = \tau_3 \partial_1^8, \quad T_4^{(1^7 2)} = \tau_4 \partial_1^7 \partial_2, \quad T_{4^3}^{(1^2 7)} = \tau_4^3 \partial_1 \partial_2^7, \quad T_{3^5}^{(2^8)} = \tau_3^5 \partial_2^8. \tag{12.7}$$

- Un operador diferencial de noveno orden:

$$T_{4^4}^{(2^8 3)} = \tau_4^4 \partial_2^8 \partial_3. \tag{12.8}$$

- 2 operadores diferenciales de décimosegundo orden:

$$T_4^{(1^{12})} = \tau_4 \partial_1^{12}, \quad T_{4^5}^{(2^{12})} = \tau_4^5 \partial_2^{12} \partial_2. \tag{12.9}$$

Los generadores de la segunda clase (operadores de ascenso) son:

- Un operador diferencial de primer orden:

$$J_1^+ = \tau_1 J_0. \tag{12.10}$$

- Un operador diferencial de segundo orden:

$$J_{23, -4}^+ = \tau_2 \tau_3 \partial_4 J_0. \tag{12.11}$$

- 4 operadores diferenciales de tercer orden:

$$\begin{aligned} J_{22,-13}^+ &= \tau_2^2 \partial_{13} J_0, & J_{22,-3}^+ &= \tau_2^2 \partial_3 J_0 (J_0 + 1), \\ J_{24,-3^2}^+ &= \tau_2 \tau_4 \partial_3^2 J_0, & J_{2^5,-4^2}^+ &= \tau_2^5 \partial_4^2 J_0. \end{aligned} \quad (12.12)$$

- 10 operadores diferenciales de cuarto orden:

$$\begin{aligned} J_{3,-1^2 2}^+ &= \tau_3 \partial_1^2 \partial_2 J_0, & J_{2^3,-1^2 4}^+ &= \tau_2^3 \partial_1^2 \partial_4 J_0, \\ J_{3,-12}^+ &= \tau_3 \partial_1 \partial_2 J_0 (J_0 + 1), & J_{2^3,-14}^+ &= \tau_2^3 \partial_1 \partial_4 J_0 (J_0 + 1), \\ J_{3,-2}^+ &= \tau_3 \partial_2 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2), & J_{2^3,-4}^+ &= \tau_2^3 \partial_4 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2), \\ J_{4,-1^2 2}^+ &= \tau_4 \partial_1 \partial_2^2 J_0, & J_{3^2,-2^3}^+ &= \tau_3^2 \partial_2^3 J_0, \\ J_{4,-2^2}^+ &= \tau_4 \partial_2^2 J_0 (J_0 + 1), & J_{2^5,-3^3}^+ &= \tau_2^5 \partial_3^3 J_0. \end{aligned} \quad (12.13)$$

- 16 operadores diferenciales de quinto orden:

$$\begin{aligned} J_{2,-1^4}^+ &= \tau_2 \partial_1^4 J_0, \\ J_{2,-1^3}^+ &= \tau_2 \partial_1^3 J_0 (J_0 + 1), \\ J_{2,-1^2}^+ &= \tau_2 \partial_1^2 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2), \\ J_{2,-1}^+ &= \tau_2 \partial_1 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3), \\ J_2^+ &= \tau_2 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3) (J_0 + 4), \\ J_{4,-1^3 3} &= \tau_4 \partial_1^3 \partial_3 J_0, \\ J_{4,-1^2 3} &= \tau_4 \partial_1^2 \partial_3 J_0 (J_0 + 1), \\ J_{4,-13} &= \tau_4 \partial_1 \partial_3 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2), \\ J_{4,-3} &= \tau_4 \partial_3 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3), \\ J_{3^2,-1^3 4}^+ &= \tau_3^2 \partial_1^3 \partial_4 J_0, \\ J_{3^2,-1^2 4}^+ &= \tau_3^2 \partial_1^2 \partial_4 J_0 (J_0 + 1), \\ J_{3^2,-14}^+ &= \tau_3^2 \partial_1 \partial_4 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2), \\ J_{3^2,-4}^+ &= \tau_3^2 \partial_4 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3), \\ J_{4^2,-2^3 3}^+ &= \tau_4^2 \partial_2^3 \partial_3 J_0, \\ J_{3^3,-1^2 2 4}^+ &= \tau_3^3 \partial_1 \partial_2^2 \partial_4 J_0, \\ J_{3^3,-2^2 4}^+ &= \tau_3^3 \partial_2^2 \partial_4 J_0 (J_0 + 1). \end{aligned} \quad (12.14)$$



- 3 operadores diferenciales de sexto orden:

$$\begin{aligned}
J_{4^2, -1^2 2 3^2}^+ &= \tau_4^2 \partial_1^2 \partial_2 \partial_3^2 J_0, \\
J_{4^2, -1 2 3^2}^+ &= \tau_4^2 \partial_1 \partial_2 \partial_3^2 J_0 (J_0 + 1), \\
J_{4^2, -2 3^2}^+ &= \tau_4^2 \partial_2 \partial_3^2 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2).
\end{aligned} \tag{12.15}$$

- 16 operadores diferenciales de octavo orden:

$$\begin{aligned}
J_{3, -1^7}^+ &= \tau_3 \partial_1^7 J_0, \\
J_{3, -1^6}^+ &= \tau_3 \partial_1^6 J_0 (J_0 + 1), \\
J_{3, -1^5}^+ &= \tau_3 \partial_1^5 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2), \\
J_{3, -1^4}^+ &= \tau_3 \partial_1^4 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3), \\
J_{3, -1^3}^+ &= \tau_3 \partial_1^3 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3) (J_0 + 4), \\
J_{3, -1^2}^+ &= \tau_3 \partial_1^2 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3) (J_0 + 4) (J_0 + 5), \\
J_{3, -1}^+ &= \tau_3 \partial_1 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3) (J_0 + 4) (J_0 + 5) (J_0 + 6), \\
J_3^+ &= \tau_3 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3) (J_0 + 4) (J_0 + 5) (J_0 + 6) (J_0 + 7), \\
J_{4, -1^6 2}^+ &= \tau_4 \partial_1^6 \partial_2 J_0, \\
J_{4, -1^5 2}^+ &= \tau_4 \partial_1^5 \partial_2 J_0 (J_0 + 1), \\
J_{4, -1^4 2}^+ &= \tau_4 \partial_1^4 \partial_2 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2), \\
J_{4, -1^3 2}^+ &= \tau_4 \partial_1^3 \partial_2 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3), \\
J_{4, -1^2 2}^+ &= \tau_4 \partial_1^2 \partial_2 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3) (J_0 + 4), \\
J_{4, -1 2}^+ &= \tau_4 \partial_1 \partial_2 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3) (J_0 + 4) (J_0 + 5), \\
J_{4, -2}^+ &= \tau_4 \partial_2 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3) (J_0 + 4) (J_0 + 5) (J_0 + 6), \\
J_{4^3, -2^7}^+ &= \tau_4^3 \partial_2^7 J_0.
\end{aligned} \tag{12.16}$$

- 12 operadores diferenciales de décimosegundo orden:

$$\begin{aligned}
J_{4, -1^{11}}^+ &= \tau_4 \partial_1^{11} J_0, \\
J_{4, -1^{10}}^+ &= \tau_4 \partial_1^{10} J_0 (J_0 + 1), \\
J_{4, -1^9}^+ &= \tau_4 \partial_1^9 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2), \\
J_{4, -1^8}^+ &= \tau_4 \partial_1^8 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3), \\
J_{4, -1^7}^+ &= \tau_4 \partial_1^7 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3) (J_0 + 4), \\
J_{4, -1^6}^+ &= \tau_4 \partial_1^6 J_0 (J_0 + 1) (J_0 + 2) (J_0 + 3) (J_0 + 4) (J_0 + 5),
\end{aligned} \tag{12.17}$$

$$\begin{aligned}
J_{4,-1^5}^+ &= \tau_4 \partial_1^5 J_0(J_0+1)(J_0+2)(J_0+3)(J_0+4)(J_0+5)(J_0+6), \\
J_{4,-1^4}^+ &= \tau_4 \partial_1^4 J_0(J_0+1)(J_0+2)(J_0+3)(J_0+4)(J_0+5)(J_0+6) \times \\
&\quad (J_0+7), \\
J_{4,-1^3}^+ &= \tau_4 \partial_1^3 J_0(J_0+1)(J_0+2)(J_0+3)(J_0+4)(J_0+5)(J_0+6) \times \\
&\quad (J_0+7)(J_0+8), \\
J_{4,-1^2}^+ &= \tau_4 \partial_1^2 J_0(J_0+1)(J_0+2)(J_0+3)(J_0+4)(J_0+5)(J_0+6) \times \\
&\quad (J_0+7)(J_0+8)(J_0+9), \\
J_{4,-1}^+ &= \tau_4 \partial_1 J_0(J_0+1)(J_0+2)(J_0+3)(J_0+4)(J_0+5)(J_0+6) \times \\
&\quad (J_0+7)(J_0+8)(J_0+9)(J_0+10), \\
J_4^+ &= \tau_4 J_0(J_0+1)(J_0+2)(J_0+3)(J_0+4)(J_0+5)(J_0+6) \times \\
&\quad (J_0+7)(J_0+8)(J_0+9)(J_0+10)(J_0+11).
\end{aligned}$$

donde

$$J_0 = \tau_1 \partial_1 + 5\tau_2 \partial_2 + 8\tau_3 \partial_3 + 12\tau_4 \partial_4 - n. \quad (12.18)$$

y la notación  $\partial_i^k \equiv \frac{\partial^k}{\partial \tau_i^k}$  es usada para las derivadas.

## 12.2. Estructura y relaciones de conmutación

Para investigar las relaciones de conmutación entre generadores resulta útil la noción de operadores conjugados (véase la sección 6.2). Un cierto número de operadores generadores (12.1)-(12.17) genera 52 subálgebras abelianas:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{T_0^{(2)}, T_1^{(2)}, T_{12}^{(2)}, T_{13}^{(2)}, T_{14}^{(2)}, T_{15}^{(2)}\} \\
L_2 &= \{T_0^{(3)}, T_1^{(3)}, T_{12}^{(3)}, T_{13}^{(3)}, T_{14}^{(3)}, T_{15}^{(3)}, T_{16}^{(3)}, T_{17}^{(3)}, T_{18}^{(3)}\} \\
L_3 &= \{T_0^{(4)}, T_1^{(4)}, T_{12}^{(4)}, T_{13}^{(4)}, T_{14}^{(4)}, T_{15}^{(4)}, T_{16}^{(4)}, T_{17}^{(4)}, T_{18}^{(4)}, T_{19}^{(4)}, T_{10}^{(4)}, T_{11}^{(4)}, T_{12}^{(4)}\} \\
L_4 &= \{T_2^{(3)}, T_{12}^{(3)}, T_{122}^{(3)}, T_{132}^{(3)}\} \\
L_5 &= \{T_2^{(4)}, T_{12}^{(4)}, T_{122}^{(4)}, T_{132}^{(4)}, T_{142}^{(4)}, T_{152}^{(4)}, T_{162}^{(4)}, T_{172}^{(4)}\} \\
L_6 &= \{T_{22}^{(4)}, T_{122}^{(4)}, T_{1222}^{(4)}\} \\
L_7 &= \{T_3^{(4)}, T_{13}^{(4)}, T_{123}^{(4)}, T_{133}^{(4)}, T_{143}^{(4)}\} \\
L_8 &= \{T_4^{(23)}, T_{14}^{(23)}\} \\
L_9 &= \{T_3^{(22)}, T_{13}^{(22)}, T_{123}^{(22)}\} \\
L_{10} &= \{T_{32}^{(24)}, T_{132}^{(24)}\}
\end{aligned} \quad (12.19)$$

$$L_{11} = \{T_4^{(3^2)}, T_{14}^{(3^2)}, T_{124}^{(3^2)}, T_{134}^{(3^2)}, T_{144}^{(3^2)}\}$$

$$L_{12} = \{T_{24}^{(3^4)}\}$$

$$L_{13} = \{T_{33}^{(4^2)}\}$$

$$L_{14} = \{T_{23^2}^{(4^2)}, T_{123^2}^{(4^2)}, T_{1^2 23^2}^{(4^2)}, T_{1^3 23^2}^{(4^2)}\}$$

$$L_{15} = \{T_{23^3}^{(4^2)}, T_{12^3 3}^{(4^2)}\}$$

$$L_{16} = \{T_{23}^{(3^2)}, T_{12^3}^{(3^2)}\}$$

$$L_{17} = \{T_4^{(2^3)}, T_{14}^{(2^3)}, T_{124}^{(2^3)}, T_{134}^{(2^3)}\}$$

$$L_{18} = \{T_{2^2 4}^{(3^3)}, T_{12^2 4}^{(3^3)}, T_{1^2 2^2 4}^{(3^3)}\}$$

$$L_{19} = \{T_{33}^{(2^5)}, T_{13^3}^{(2^5)}\}$$

$$L_{20} = \{T_{4^2}^{(2^5)}, T_{14^2}^{(2^5)}\}$$

$$L_{21} = \{T_{244}^{(3^4)}\}$$

$$L_{22} = \{T_{28}^{(3^5)}\}$$

$$L_{23} = \{T_{212}^{(4^5)}\}$$

$$L_{24} = \{T_{27}^{(4^3)}, T_{127}^{(4^3)}\}$$

$$L_{25} = \{T_{243^2}^{(4^3)}\}$$

$$L_{26} = \{T_{283}^{(4^4)}\}$$

$$\mathfrak{L}_1 = \{T_2^{(1^5)}, J_{2,-14}^+, J_{2,-1^3}^+, J_{2,-1^2}^+, J_{2,-1}^+, J_2^+\}$$

$$\mathfrak{L}_2 = \{T_3^{(1^8)}, J_{3,-17}^+, J_{3,-1^6}^+, J_{3,-1^5}^+, J_{3,-1^4}^+, J_{3,-1^3}^+, J_{3,-1^2}^+, J_{3,-1}^+, J_3^+\}$$

$$\mathfrak{L}_3 = \{T_4^{(1^{12})}, J_{4,-1^{11}}^+, J_{4,-1^{10}}^+, J_{4,-1^9}^+, J_{4,-1^8}^+, J_{4,-1^7}^+, J_{4,-1^6}^+, J_{4,-1^5}^+, J_{4,-1^4}^+, J_{4,-1^3}^+, J_{4,-1^2}^+, J_{4,-1}^+, J_4^+\}$$

$$\mathfrak{L}_4 = \{T_3^{(1^3 2)}, J_{3,-1^2 2}^+, J_{3,-1 2}^+, J_{3,-2}^+\}$$

$$\mathfrak{L}_5 = \{T_4^{(1^7 2)}, J_{4,-1^6 2}^+, J_{4,-1^5 2}^+, J_{4,-1^4 2}^+, J_{4,-1^3 2}^+, J_{4,-1^2 2}^+, J_{4,-1 2}^+, J_{4,-2}^+\}$$

$$\mathfrak{L}_6 = \{T_4^{(1^2 2^2)}, J_{4,-1^2 2^2}^+, J_{4,-2^2}^+\}$$

$$\mathfrak{L}_7 = \{T_4^{(1^4 3)}, J_{4,-1^3 3}^+, J_{4,-1^2 3}^+, J_{4,-1 3}^+, J_{4,-3}^+\}$$

$$\mathfrak{L}_8 = \{T_{23}^{(1^4)}, J_{23,-4}^+\}$$

$$\mathfrak{L}_9 = \{T_{2^2}^{(1^2 3)}, J_{2^2,-13}^+, J_{2^2,-3}^+\}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{10} &= \{T_{24}^{(13^2)}, J_{24, -3^2}^+\} \\
\mathfrak{L}_{11} &= \{T_{3^2}^{(1^4 4)}, J_{3^2, -1^3 4}^+, J_{3^2, -1^2 4}^+, J_{3^2, -14}^+, J_{3^2}^+\} \\
\mathfrak{L}_{12} &= \{T_{34}^{(2^4)}\} \\
\mathfrak{L}_{13} &= \{T_{4^2}^{(3^3)}\} \\
\mathfrak{L}_{14} &= \{T_{4^2}^{(1^3 2^3 2)}, J_{4^2, -1^2 2^3 2}^+, J_{4^2, -12^3 2}^+, J_{4^2, -2^3 2}^+\} \\
\mathfrak{L}_{15} &= \{T_{4^2}^{(12^3 3)}, J_{4^2, -2^3 3}^+\} \\
\mathfrak{L}_{16} &= \{T_{3^2}^{(12^3)}, J_{3^2, -2^3}\} \\
\mathfrak{L}_{17} &= \{T_{2^3}^{(1^3 4)}, J_{2^3, -1^2 4}^+, J_{2^3, -14}^+, J_{2^3, -4}^+\} \\
\mathfrak{L}_{18} &= \{T_{3^3}^{(1^2 2^2 4)}, J_{3^3, -12^2 4}^+, J_{3^3, -2^2 4}^+\} \\
\mathfrak{L}_{19} &= \{T_{2^5}^{(13^3)}, J_{2^5, -3^3}^+\} \\
\mathfrak{L}_{20} &= \{T_{2^5}^{(14^2)}, J_{2^5, -4^2}^+\} \\
\mathfrak{L}_{21} &= \{T_{3^4}^{(2^4 4)}\} \\
\mathfrak{L}_{22} &= \{T_{3^5}^{(2^8)}\} \\
\mathfrak{L}_{23} &= \{T_{4^5}^{(2^{12})}\} \\
\mathfrak{L}_{24} &= \{T_{4^3}^{(12^7)}, J_{4^3, -2^7}^+\} \\
\mathfrak{L}_{25} &= \{T_{4^3}^{(2^4 3^2)}\} \\
\mathfrak{L}_{26} &= \{T_{4^4}^{(2^8 3)}\}
\end{aligned}$$

Los operadores restantes generan un álgebra no conmutativa

$$B = \{T_0^{(1)}, T_1^{(1)}, T_2^{(2)}, T_3^{(3)}, T_4^{(4)}, J_0, J_1^+\}. \quad (12.20)$$

Los nombres elegidos para las subálgebras abelianas reflejan el hecho de que son conjugadas por pares:

$$L_j \longleftrightarrow \mathfrak{L}_j .$$

El álgebra  $B$  es la única que es conjugada de sí misma.

En analogía con el álgebra  $h^{(3)}$ , los operadores de las subálgebras abelianas se muestran en orden. Este orden se relaciona con el operador  $J_1^+$ . Sea  $Y$  una entre las subálgebras abelianas (6.8) y sea  $Y = \{X_0, X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , donde

$n$  puede ser  $1, \dots, 12$ . Los elementos generadores de  $Y$  están ordenados por las condiciones

$$[X_i, J_1^+] = (n - i)X_{i+1}, \quad i < n \quad (12.21)$$

y

$$[X_n, J_1^+] = 0. \quad (12.22)$$

Así, las álgebras de Lie  $\{Y, J_1^+\}$  son nilpotentes. Esto también implica que los generadores pueden escribirse como conmutadores:

$$X_i = \frac{(n - i)!}{n!} \underbrace{[[\dots [X_0, J_1^+] \dots, J_1^+], J_1^+]}_{i \text{ conmutadores}}.$$

La clasificación (12.19),(12.20) nos permite mostrar una representación compacta de las relaciones de conmutación entre los elementos generadores. Esta representación se muestra en el apéndice C. En particular, las relaciones de conmutación que involucran una subálgebra abeliana y su conjugada pueden representarse mediante diagramas triangulares de la siguiente forma:

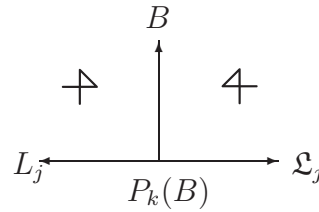


Figura 12.1: Diagrama triangular que relaciona las subálgebras  $L_j$ ,  $Q_j$  and  $B$ . Aquí  $P_k(B)$  significa que en general el conmutador  $[L_j, Q_j]$  da como resultado un polinomio de grado  $k$  en los generadores de  $B$ . Véase la Tabla 12.1 para los grados particulares.

En general las relaciones de conmutación entre dos operadores son no lineales. Por tanto, para tener una estructura Lie-algebraica, es necesario considerar monomios en los operadores generadores como los elementos de  $h^{(4)}$ . Puede probarse que las relaciones de conmutación no cierran a ningún orden. De esto se sigue que  $h^{(4)}$  es el álgebra de dimensión infinita de monomios ordenados en los 183 operadores generadores (12.1)-(12.18) mostrados anteriormente.

$$\begin{array}{ll}
[L_1, \mathfrak{L}_1] = P_5(B), & [L_{14}, \mathfrak{L}_{14}] = P_4(B), \\
[L_2, \mathfrak{L}_2] = P_8(B), & [L_{15}, \mathfrak{L}_{15}] = P_5(B), \\
[L_3, \mathfrak{L}_3] = P_{12}(B), & [L_{16}, \mathfrak{L}_{16}] = P_5(B), \\
[L_4, \mathfrak{L}_4] = P_4(B), & [L_{17}, \mathfrak{L}_{17}] = P_6(B), \\
[L_5, \mathfrak{L}_5] = P_8(B), & [L_{18}, \mathfrak{L}_{18}] = P_7(B), \\
[L_6, \mathfrak{L}_6] = P_4(B), & [L_{19}, \mathfrak{L}_{19}] = P_8(B), \\
[L_7, \mathfrak{L}_7] = P_5(B), & [L_{20}, \mathfrak{L}_{20}] = P_7(B), \\
[L_8, \mathfrak{L}_8] = P_3(B), & [L_{21}, \mathfrak{L}_{21}] = P_8(B), \\
[L_9, \mathfrak{L}_9] = P_4(B), & [L_{22}, \mathfrak{L}_{22}] = P_{12}(B), \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{10}] = P_4(B), & [L_{23}, \mathfrak{L}_{23}] = P_{16}(B), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{11}] = P_6(B), & [L_{24}, \mathfrak{L}_{24}] = P_{10}(B), \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{12}] = P_5(B), & [L_{25}, \mathfrak{L}_{25}] = P_8(B), \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{13}] = P_4(B), & [L_{26}, \mathfrak{L}_{26}] = P_{12}(B).
\end{array}$$

Tabla 12.1: Conmutadores para la Fig. 12.1

### 12.3. Representación algebraica de $H_4$

Dado que  $h^{(4)}$  es el álgebra de operadores diferenciales que actúan en  $\mathcal{P}_n^{(1,5,8,12)}$  debe ser posible escribir el hamiltoniano  $h_{H_4}$  (8.12) como una combinación de los elementos generadores (que preservan el flag) (12.1)-(12.9) de  $h^{(4)}$ .

La forma  $h^{(4)}$ -Lie algebraica del modelo  $H_4$  (7.1) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
h_{H_4} = & 4T_1^{(1)}T_0^{(1)} + 48T_2^{(2)}T_0^{(1)} + 80T_3^{(3)}T_0^{(1)} + 120T_4^{(4)}T_0^{(1)} \\
& + 88T_{13}^{(2^2)} + 8T_2^{(2)}T_{15}^{(2)} - 8T_2^{(2)}T_{132}^{(3)} + 8T_{132}^{(3)} \\
& + 48T_{15}^{(2)}T_3^{(3)} - 16T_4^{(23)} + 20T_{122^2}^{(4)}T_2^{(2)} + 120T_{143}^{(4)}T_2^{(2)} \\
& + 80T_{15}^{(2)}T_4^{(4)} - 1200T_{3^2}^{(24)} - \frac{38}{3}T_{12^3}^{(3^2)} + 28T_3^{(3)}T_{132}^{(3)} \\
& - \frac{8}{3}T_{144}^{(3^2)} + 420T_3^{(3)}T_{122^2}^{(4)} + 120T_4^{(4)}T_{132}^{(3)} \\
& - 360T_{143}^{(4)}T_3^{(3)} + 60T_{2^4}^{(34)} - 2175T_{12^33}^{(4^2)} - 450T_4^{(4)}T_{122^2}^{(4)} \\
& - 1350T_{1323^2}^{(4^2)} - 600T_4^{(4)}T_{143}^{(4)} + (8 + 240\nu)T_0^{(1)} - 4\omega T_1^{(1)} \\
& + 12(1 + 10\nu)T_{15}^{(2)} - 24\omega T_2^{(2)} + 20(1 + 6\nu)T_{132}^{(3)} - 40\omega T_3^{(3)} \\
& + 15(1 - 30\nu)T_{122^2}^{(4)} - 450(1 + 2\nu)T_{143}^{(4)} - 60\omega T_4^{(4)}.
\end{aligned} \tag{12.23}$$

No es posible presentar una expresión similar para el operador  $f$  (8.16). El flag preservado por este operador tiene vector característico  $(1, 6, 10, 15)$ , de manera que este resultado es consistente.

# Conclusión

Como primer resultado se ha mostrado que los sistemas racionales  $H_3$  y  $H_4$  son exactamente solubles. Junto con [9] este trabajo completa el estudio de la solubilidad exacta de los modelos relacionados con los sistemas de raíces no cristalográficos. A su vez, estos trabajos complementan los estudios previos de los modelos racionales (y trigonométricos) relacionados con los sistemas de raíces cristalográficos (p.ej. [2],[3],[7]).

Para entender las propiedades físicas del sistema es necesario un conocimiento de las propiedades del sistema de raíces y su grupo de Coxeter. El espacio de configuración para el sistema es un dominio fundamental del grupo. Los planos que definen a este dominio son clásicamente impenetrables y esto a su vez define las condiciones de frontera. A su vez, el estudio de las simetrías del hamiltoniano nos ha guiado a su forma algebraica en términos de los invariantes tomados como variables. Significa que es posible una extensión del método desarrollado para los sistemas cristalográficos: (i) realizamos una transformación de norma con la función del estado base como factor y (ii) tomamos polinomios invariantes del grupo de Coxeter específicos como variables. Después de este procedimiento el hamiltoniano toma una forma algebraica siendo ahora un operador diferencial con coeficientes polinomiales. Encontramos que el flag mínimo de polinomios preservado por esta forma algebraica tiene vector característico  $(1, 2, 3)$  en el caso de  $H_3$  and  $(1, 5, 8, 12)$  en el caso de  $H_4$ .

Para ambos casos el espectro se encuentra en una forma analítica cerrada. Coincide con el espectro de un oscilador armónico anisotrópico en la dimensión adecuada (diferiendo sólo en el menor autovalor). Luego, la presencia del potencial racional adicional en el hamiltoniano “deforma” el espectro del potencial original de oscilador armónico isotrópico. Esto significa que podemos



obtener formalmente el espectro considerando las siguientes sustituciones de las frecuencias en las direcciones cartesianas

$$\begin{aligned} (\omega, \omega, \omega) &\longrightarrow (2\omega, 6\omega, 10\omega) && \text{para } H_3, \\ (\omega, \omega, \omega, \omega) &\longrightarrow (2\omega, 12\omega, 20\omega, 30\omega) && \text{para } H_4, \end{aligned}$$

en los correspondientes espectros de oscilador isotrópico (sin considerar el estado base). Las autofunciones se encuentran en forma de polinomios en los invariantes del grupo de Coxeter, reflejando la propiedad de invariancia del sistema ante transformaciones de este grupo.

Debe ser enfatizado el hecho de que los sistemas  $H_3$  y  $H_4$  son completamente integrables [12]. Esto implica la existencia de operadores (al menos dos en el caso de  $H_3$  y tres en el caso de  $H_4$ ) que conmutan con el hamiltoniano y que están en involución (conmutan entre sí). Estos operadores que conmutan deben tener una forma algebraica después de una rotación de norma (con la función del estado base como factor) y un cambio de variables de las coordenadas cartesianas a las variables invariantes. Los resultados que se conocen para los sistemas cristalográficos sugieren que las integrales son operadores cuyos órdenes coinciden con los grados del grupo de Coxeter correspondiente. Sus formas explícitas no son conocidas hasta ahora.

Para ambos sistemas se encontró explícitamente una integral de movimiento de segundo orden, la cual está relacionada con la separación de variables en coordenadas (hiper)esféricas. Al estudiar sistemas cristalográficos se ha encontrado que la integral de movimiento relacionada con una separación de variables no es parte del álgebra conmutativa. Luego, la integral  $\mathcal{F}$  está fuera del álgebra conmutativa de integrales. Esto parece indicar que los sistemas  $H_3$  y  $H_4$  son sistemas superintegrables.

Como se mostró, la existencia de la forma algebraica del hamiltoniano hace posible el estudio de perturbaciones polinomiales que sean invariantes respecto al grupo de Coxeter, mediante métodos puramente algebraicos: puede desarrollarse una teoría de perturbaciones en la cual todas las correcciones se encuentran mediante métodos del álgebra lineal. En particular, permite calcular las funciones de correlación (invariantes) mediante métodos algebraicos.

Otra propiedad importante de la existencia de la forma algebraica del hamiltoniano es la oportunidad de realizar una discretización canónica Lie-alge-

braica. Esta discretización preserva la propiedad de integrabilidad, es iso-espectral y las autofunciones continúan siendo polinomios. Ambos sistemas ( $H_3$  y  $H_4$ ) son invariantes respecto a transformaciones proyectivas. Aplicando estas transformaciones obtenemos diferentes formas del hamiltoniano. Discretizando, obtenemos a su vez modelos discretos relacionados con el modelo discreto original a través de un cambio de variables. Este procedimiento puede considerarse como una definición de un cambio de variables polinomial para operadores discretos.

Se encontró la generalización  $sl(2)$ -cuasi-exactamente-soluble de los modelos  $H_3$  y  $H_4$ , las cuales continúan siendo integrables. Con esto se complementa el resultado obtenido previamente para el modelo racional  $I_2(k)$  [20] así como los obtenidos para todos los modelos racionales relacionados con sistemas cristalográficos [9].

Las álgebras escondidas  $h^{(3)}$  y  $h^{(4)}$  se encontraron y se investigaron. Son álgebras de dimensión infinita pero son generadas de forma finita. La construcción de las subálgebras abelianas de elementos generadores hace posible escribir las relaciones de conmutación entre los generadores en una forma compacta. El estudio del álgebra escondida es importante porque sugiere que la solubilidad del modelo está relacionada con la existencia de esta álgebra. Ambas álgebras eran desconocidas hasta ahora.

Para ambos modelos el hamiltoniano algebraico y la integral de movimiento  $f$  soportan diferentes flags. La razón de esta diferencia no es conocida de manera exacta, pero es posible que esté relacionada con la degeneración del espectro del operador hamiltoniano.

Gracias al conocimiento explícito de las funciones del estado base (1.16) y (7.13), modelos  $H_3$  y  $H_4$  supersimétricos pueden construirse siguiendo el procedimiento realizado en [23] para el modelo racional  $A_N$ , en [22] para el modelo racional  $BC_N$  y en [24] para el modelo racional  $I_2(k)$ . Sin embargo, este estudio no pertenece al presente trabajo.

# Apéndice A

## Antecedentes matemáticos

### A.1. Sistemas de raíces

#### A.1.1. Grupos generados por reflexiones y sistemas de raíces

Sea  $V$  un espacio vectorial euclidiano de dimensión finita dotado de un producto interior definido positivo  $(x, y)$ . Estamos interesados en grupos finitos que son generados por las reflexiones en  $V$ . Una *reflexión* es un operador lineal  $r$  en  $V$  que mapea un vector no nulo  $\alpha$  a su negativo mientras fija punto a punto el hiperplano  $H_\alpha$  ortogonal a  $\alpha$ . Podemos escribir  $r = r_\alpha$ , teniendo en mente sin embargo que  $r_\alpha = r_{c\alpha}$  para cualquier  $c \in \mathbf{R}$  distinto de cero. Existe una fórmula simple:

$$r_\alpha(x) = x - \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha . \quad (\text{A.1})$$

Sea  $\mathcal{R}$  un conjunto finito de vectores no nulos en  $V$  que satisfacen las siguientes condiciones:

(R1).  $\mathcal{R} \cap \mathbf{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$  para todo  $\alpha \in \mathcal{R}$ ;

(R2).  $r_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$  para todo  $\alpha \in \mathcal{R}$ .

Defínase enseguida  $W$  como el grupo generado por todas las reflexiones  $r_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}$ . El sistema de vectores  $\mathcal{R}$  se denomina el *sistema de raíces* y el grupo  $W$  es el *grupo de Coxeter*. La dimensión del espacio  $V$  se conoce como el

rango del sistema de raíces  $\mathcal{R}$ .

Cualquier grupo de Coxeter tiene una presentación en la forma de un *sistema de Coxeter*  $(S, W)$ . Es un par que consiste en el grupo  $W$  junto con un subconjunto finito  $S \subset W$  que satisface las siguientes condiciones:

- (i) cada  $s \in S$  es una involución:  $s^2 = 1$ ;
- (ii) algunos pares  $s, t \in S$  satisfacen relaciones de la forma  $(st)^{m_{st}} = 1$  con  $m_{st} \geq 2$ ;
- (iii) las relaciones en (i)-(ii) forman una presentación del grupo  $W$ .

En otras palabras,  $S$  genera a  $W$ , y cualquier identidad en  $W$  es una consecuencia formal de (i)-(ii) y los axiomas de un grupo.

Un *ordenamiento total* del espacio vectorial real  $V$  es una relación transitiva en  $V$  (denotada por  $<$ ) que satisface los siguientes axiomas.

1. Para cada par  $x, y \in V$ , exactamente uno de  $x < y$ ,  $x = y$ ,  $y < x$  se verifica.
2. Para todos  $x, y, z \in V$ , si  $y < z$  entonces  $x + y < x + z$ .
3. Si  $x < y$  y  $c$  es un número real distinto de cero, entonces  $cx < cy$  si  $c > 0$ , mientras que  $cy < cx$  si  $c < 0$ .

Dado dicho ordenamiento, decimos que  $x \in V$  es *positivo* si  $0 < x$ . La suma de vectores positivos es positiva, lo mismo que el múltiplo escalar de un vector positivo por un número real positivo.

Regresando al sistema de raíces  $\mathcal{R}$ , llamamos a un subconjunto  $\mathcal{R}^+$  un *sistema positivo* si consiste de todas aquellas raíces que son positivas relativas a algún ordenamiento total de  $V$ . Aún más, ya que las raíces vienen en pares  $\{\alpha, -\alpha\}$ ,  $\mathcal{R}$  debe ser la unión disjunta de  $\mathcal{R}^+$  y  $-\mathcal{R}^+$ , siendo este segundo conjunto llamado el *sistema negativo*. Cuando  $\mathcal{R}$  es fijo, podemos escribir  $\alpha > 0$  en lugar de  $\alpha \in \mathcal{R}^+$ . Como ejemplo, el sistema  $G_2$  se muestra enseguida.

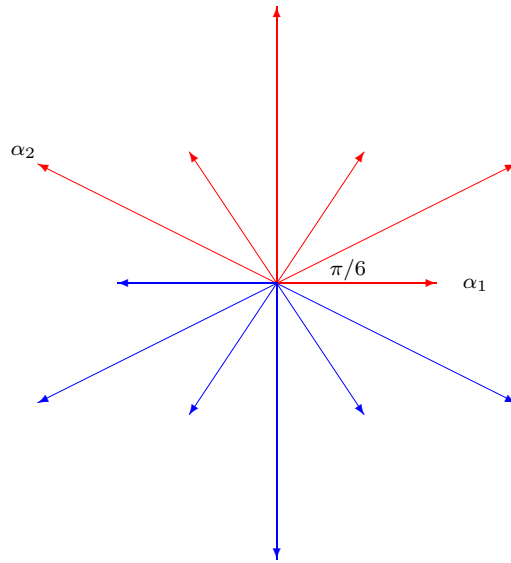


Figura A.1: El sistema de raíces  $G_2$ . Las raíces positivas se muestran en rojo y las negativas en azul. Las longitudes de las raíces son 1 y  $\sqrt{3}$ . Las raíces simples están etiquetadas como  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

Llamamos a un subconjunto  $\Delta$  de  $\mathcal{R}$  un *sistema simple* (y denominamos a sus elementos *raíces simples*) si  $\Delta$  es una base para el subespacio generado por  $\mathbf{R}$  en  $V$  y si además cada  $\alpha \in \mathcal{R}$  es una combinación lineal de  $\Delta$  con coeficientes todos del mismo signo (todos positivos o todos negativos). Genéricamente la base de raíces simples *no* es ortonormal. La no-ortonormalidad está codificada en la *matriz de Cartan*  $C$  de  $\Delta$ , que se define como la matriz de entradas

$$C_{ij} = 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta$ .

Un sistema de raíces  $\mathcal{R}$  es *crystalográfico* si satisface el requisito adicional

$$(\mathbf{R3}). \quad \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbf{Z} \text{ para todos } \alpha, \beta \in \mathcal{R}.$$

Estos enteros se denominan *enteros de Cartan*. El grupo  $W$  generado por todas las reflexiones  $r_\alpha$  se conoce en este caso como el *grupo de Weyl* de  $\mathcal{R}$ . Los sistemas de raíces crystalográficos surgen en la clasificación de las álgebras de

Lie semisimples y los espacios simétricos. Es posible probar que un sistema de raíces es cristalográfico si y sólo si existe un retículo en  $V$  invariante bajo el correspondiente grupo de Weyl  $W$ .

En virtud de la condición de integridad (R3) se sigue que los ángulos  $\pi/2$ ,  $2\pi/3$ ,  $3\pi/4$ ,  $5\pi/6$  pueden existir entre dos raíces simples en un sistema cristalográfico.

Tomando

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}, \quad (\text{A.3})$$

el conjunto  $\mathcal{R}^\vee$  de todas las *corraíces*  $\alpha^\vee$  ( $\alpha \in \mathcal{R}$ ) es también un sistema de raíces en  $V$ , con sistema simple  $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee | \alpha \in \mathcal{R}\}$ . Se denomina también el sistema de raíces inverso o *dual*. Utilizar los vectores  $\alpha^\vee$  simplifica varias fórmulas. Por ejemplo, la ecuación (A.2) que define la matriz de Cartan se vuelve

$$C_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j^\vee).$$

Recordemos del álgebra lineal elemental que el espacio vectorial dual  $V^*$  de un espacio vectorial  $V$  es el espacio de mapeos lineales de  $V$  al campo base  $F$ . Cuando se considera al espacio de raíces como consistente en combinaciones lineales reales de las raíces, entonces el espacio dual al espacio de raíces se llama *espacio de los pesos*, y sus elementos son los *pesos* de  $\mathcal{R}$ . Es normalmente conveniente escoger como base del espacio de raíces a las corraíces simples. Entonces la base del espacio de raíces que es dual a la base de corraíces consiste en aquellos pesos, denotados por  $\omega_i$ , que obedecen

$$\omega_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij} \quad (\text{A.4})$$

Estos pesos se llaman los *pesos fundamentales* del sistema  $\mathcal{R}$ , y la base que forman se conoce como la *base de Dynkin* del espacio de pesos. Los componentes de un peso en la base de Dynkin se llaman *etiquetas de Dynkin*.

Sea  $\mathcal{R}$  un sistema de raíces cristalográfico. Al remover del espacio de raíces todos los hiperplanos (que pasan por el origen) que son perpendiculares a alguna raíz, el espacio queda dividido en un abanico de conos abiertos. Estos conos se denominan *cámaras de Weyl*. Ellas son permutadas por la acción del grupo de Weyl y existe un teorema que afirma que esta acción es simplemente transitiva. Las cámaras de Weyl son todas congruentes, pero al hacer una

elección para las raíces simples, una de ellas se distingue del resto. Esta es la única cámara cuyos puntos tienen solamente etiquetas de Dynkin positivos; se denomina la cámara de Weyl *fundamental* o *principal*, o también el dominio fundamental de Weyl.

### A.1.2. Clasificación de los sistemas de raíces

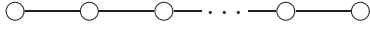

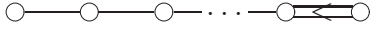
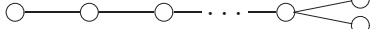
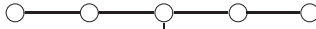

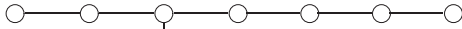


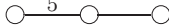


Sea el espacio  $V$  la suma directa de los espacios  $V_1, \dots, V_n$ . Para cualquier  $i$ , sea  $\mathcal{R}_i$  un sistema de raíces en  $V_i$ . Entonces la unión  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cdots \cup \mathcal{R}_n$  será un sistema de raíces en  $V$ . El grupo de Coxeter  $W$  se identifica con el producto de los grupos  $W(\mathcal{R}_i)$ . El sistema de raíces  $\mathcal{R}$  se conoce como la suma de los sistemas  $\mathcal{R}_i$ . Si esta expansión no es posible, se dice que el sistema de raíces es *irreducible*.

Un sistema de raíces *reducido* es un sistema  $\mathcal{R}$  que satisface la propiedad adicional de que, si  $\alpha \in \mathcal{R}$ , entonces los únicos múltiplos de  $\alpha$  en  $\mathcal{R}$  son  $\pm\alpha$ .

Daremos ahora una lista de los sistemas de raíces irreducibles reducidos. Hasta un isomorfismo se definen por sus llamadas gráficas de Dynkin. La gráfica de Dynkin de un sistema de raíces  $\mathcal{R}$  es la gráfica cuyos vértices son los elementos de un conjunto de raíces simples  $\Delta$ . Denotemos por  $\Theta_{\alpha\beta}$  al ángulo entre las raíces  $\alpha$  y  $\beta$ , y sea  $\theta_{\alpha\beta} = \pi - \Theta_{\alpha\beta}$ . En el caso de los sistemas cristalográficos, dos diferentes vértices  $\alpha$  y  $\beta$  en la gráfica de Dynkin están conectados por 0, 1, 2, o 3 segmentos dependiendo de si  $\theta_{\alpha\beta} = \pi/2, \pi/3, \pi/4$  or  $\pi/6$ , respectivamente. En los últimos dos casos las raíces  $\alpha$  y  $\beta$  tienen longitudes diferentes. Es por ello que colocamos un signo de desigualdad en dos o tres segmentos dirigido hacia el vértice que corresponde a las raíces menores. En el caso de sistemas no cristalográficos los segmentos se denotan también como  $m$  si  $\theta_{\alpha\beta} = \pi/m$ .

Las gráficas de Dynkin correspondientes a los sistemas irreducibles reducidos se muestran en la tabla de la siguiente página. Adicionalmente a los sistemas mostrados, para cada  $n \geq 1$  existe un único sistema de raíces irreducible no reducido  $BC_n$  que es la unión de  $B_n$  y  $C_n$ . Las primeras cuatro series infinitas se denominan sistemas de raíces *clásicos*, los siguientes cinco con los sistemas de raíces *excepcionales*, mientras que las otras tres gráficas corresponden a sistemas no cristalográficos.

---

|          |   |                               |
|----------|---|-------------------------------|
| $A_n$    |    | $(n \geq 1 \text{ vertices})$ |
| $B_n$    |    | $(n \geq 2 \text{ vertices})$ |
| $C_n$    |    | $(n \geq 3 \text{ vertices})$ |
| $D_n$    |    | $(n \geq 4 \text{ vertices})$ |
| $E_6$    |    |                               |
| $E_7$    |    |                               |
| $E_8$    |   |                               |
| $F_4$    |    |                               |
| $G_2$    |    |                               |
| $H_3$    |    |                               |
| $H_4$    |  |                               |
| $I_2(m)$ |  | $(m \geq 3)$                  |

---

Tabla A.1: Gráficas de Dynkin para los sistemas de raíces irreducibles reducidos

### Invariantes polinomiales

Sea  $S$  un álgebra de polinomios definida en el espacio  $V$ , y  $S^W$  su subálgebra consistente en los elementos de  $S$  que son invariantes con respecto al grupo de Coxeter. De acuerdo con el teorema de Chevalley (véase [1]), existen  $n = \text{rango}(\mathcal{R})$  polinomios homogéneos algebraicamente independientes (*invariantes*)  $s_{d_1}(x), s_{d_2}(x), \dots, s_{d_n}(x)$  que generan la subálgebra  $S^W$  ( $d_1, d_2, \dots, d_n$  son los órdenes de estos polinomios). Para cada grupo de Coxeter, los órdenes  $d_1, d_2, \dots, d_n$  están definidos de manera única; el orden  $|W|$  del grupo de Coxeter  $W$  y el número de raíces  $l$  en  $\mathcal{R}$  están relacionados de manera simple



con estos órdenes:

$$\begin{aligned} W &= d_1 \cdot d_2 \cdots d_n , \\ l &= 2 \sum_{i=1}^n (d_i - 1) . \end{aligned} \tag{A.5}$$

La dimensión del espacio de polinomios homogéneos  $W$ -invariantes de grado  $m$  es igual al número de soluciones de la ecuación

$$m = d_1 m_1 + d_2 m_2 + \cdots + d_n m_n \tag{A.6}$$

en enteros no negativos.

Los órdenes de los invariantes se denominan también como los *grados* del grupo. En la tabla A.2 se muestra la lista de los grados para cada tipo de grupo  $W$  irreducible.

| Type     | $d_1, \dots, d_n$              |
|----------|--------------------------------|
| $A_n$    | $2, 3, \dots, n + 1$           |
| $B_n$    | $2, 4, 6, \dots, 2n$           |
| $C_n$    | $2, 4, 6, \dots, 2n$           |
| $D_n$    | $2, 4, 6, \dots, 2n - 2, n$    |
| $E_6$    | $2, 5, 6, 8, 9, 12$            |
| $E_7$    | $2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$      |
| $E_8$    | $2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$ |
| $F_4$    | $2, 6, 8, 12$                  |
| $G_2$    | $2, 6$                         |
| $H_3$    | $2, 6, 10$                     |
| $H_4$    | $2, 12, 20, 30$                |
| $I_2(m)$ | $2, m$                         |

Tabla A.2: Grados de los invariantes básicos

Una forma particular de los invariantes puede encontrarse al promediar monomios elementales  $(\omega, x)^d$  sobre una órbita del grupo  $\Omega$  (ver p.ej. [2]),

$$s_d(x) = \sum_{\omega \in \Omega} (\omega, x)^d . \tag{A.7}$$

## A.2. El sistema de tipo $H_3$

El grupo de Coxeter  $H_3$  es el único grupo de Coxeter no cristalográfico que actúa en el espacio tridimensional. Es un subgrupo de  $H_4$ , que es, a su vez, el único grupo de Coxeter no cristalográfico que actúa en el espacio de cuatro dimensiones.

El grupo de tipo  $H_3$  es el grupo de simetrías del icosaedro, el cual es un poliedro regular con 20 caras equiláteras idénticas. Tiene 30 aristas y 12 vértices, los cuales pueden tomarse como los puntos

$$(\pm 1, 0, \pm \varphi_+) , \quad (\pm \varphi_+, \pm 1, 0) , \quad (0, \pm \varphi_+, \pm 1) ,$$

donde hemos introducido la notación

$$\varphi_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} ,$$

para la *razón áurea* y su conjugado algebraico. Son las soluciones de la ecuación cuadrática  $x^2 = x + 1$ . Evidentemente,  $\varphi_+ \varphi_- = -1$ . Tienen también la propiedad de que

$$\varphi_+ = 2 \cos \frac{\pi}{5} , \quad \varphi_- = -2 \cos \frac{2\pi}{5} .$$

Dualmente, el grupo de tipo  $H_3$  es también el grupo de simetrías del dodecaedro, que es el poliedro regular compuesto por 12 caras pentagonales regulares, 30 aristas y 20 vértices. La noción de dualidad es muy sencilla. Si los puntos medios de las caras adyacentes de un icosaedro se unen mediante segmentos de línea, entonces estos segmentos serán las aristas de un dodecaedro inscrito en el icosaedro. Cualquier rotación (o reflexión) de  $\mathbf{R}^3$  que deje invariante al icosaedro dejará también invariante al dodecaedro inscrito y viceversa.

El grupo de rotaciones  $I$  del icosaedro consiste en las rotaciones por ángulos  $2\pi/5$ ,  $4\pi/5$ ,  $6\pi/5$  y  $8\pi/5$  respecto de cada uno de los 6 ejes que unen los vértices opuestos; de las rotaciones por ángulos  $2\pi/3$  y  $4\pi/3$  respecto de cada uno de los 10 ejes que unen los centros de las caras opuestas; rotaciones por un ángulo  $\pi$  respecto de cada uno de los 15 ejes que unen los puntos medios de aristas opuestas, y la identidad. Luego

$$|I| = 6 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 1 + 1 = 60 .$$

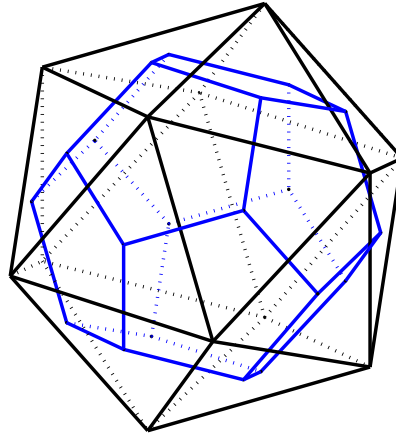


Figura A.2: Icosaedro y su dodecaedro dual.

El grupo  $H_3$  es el grupo completo de simetrías del icosaedro, de modo que contiene  $I$  e incluye cada elemento con inversión. Por ello,  $|H_3| = 120$ . La simetría del icosaedro no es compatible con la simetría de traslación, de manera que  $H_3$  no es un grupo cristalográfico.

El sistema de raíces  $\mathcal{R}_3$  de  $H_3$  consiste de los 30 elementos (cada uno normalizado para tener longitud 2, véase la figura A.3):

$$\mathcal{R}_3 = \begin{cases} (\pm 2, 0, 0) & \text{y todas las permutaciones,} \\ (\pm 1, \pm \varphi_+, \pm \varphi_-) & \text{y todas las permutaciones pares.} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Sean  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$ . El conjunto de raíces es invariante ante el intercambio

$$\begin{aligned} e_i &\longleftrightarrow e_j, & i \neq j. \\ \varphi_+ &\longleftrightarrow \varphi_- \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Introduzcamos una base de raíces simples en  $H_3$ ,

$$\alpha_1 = (2, 0, 0), \quad \alpha_2 = (-\varphi_+, -\varphi_-, -1), \quad \alpha_3 = (0, 0, 2). \quad (\text{A.10})$$

En esta base toda raíz puede escribirse como una combinación  $\mathbf{Z}[\varphi_+]$  lineal, donde  $\mathbf{Z}[\varphi_+] = \{a + \varphi_+ b \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$  corresponde a un anillo de enteros extendido.

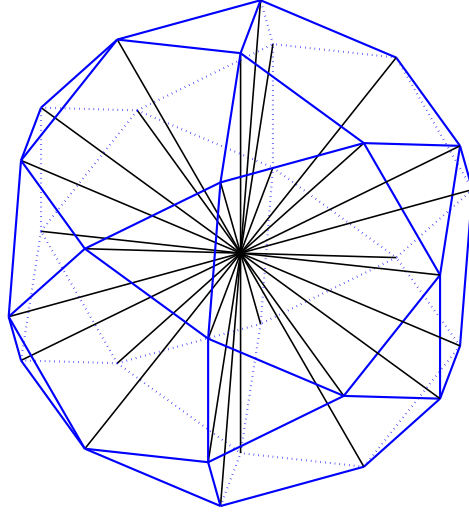


Figura A.3: Sistema de raíces de tipo  $H_3$ . Las raíces apuntan a los vértices de un icosidodecaedro, que es un sólido con simetría icosaedral.

El grupo de Coxeter  $H_3$  es generado por reflexiones  $r_j$  con respecto a los planos perpendiculares a las raíces simples  $\alpha_j$ , codificadas de la siguiente manera: para cualquier  $x \in \mathbf{R}^3$  un elemento  $\alpha_j \in \mathcal{R}_3$  produce una reflexión a

$$r_j(x) = x - \frac{2(x \cdot \alpha_j)}{(\alpha_j \cdot \alpha_j)} \alpha_j . \quad (\text{A.11})$$

Los elementos de  $H_3$  son generados a partir de  $r_1, r_2, r_3$  usando las relaciones

$$r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = 1 \quad (\text{A.12})$$

$$(r_1 r_2)^5 = (r_2 r_3)^3 = (r_1 r_3)^3 = 1 \quad (\text{A.13})$$

Por tanto, si  $R = \{r_1, r_2, r_3\}$  entonces  $(R, H_3)$  es un sistema de Coxeter.

Las corraíces simples  $\alpha_j^\vee = 2\alpha_j/(\alpha_j \cdot \alpha_j)$  se definen de la siguiente forma,

$$\alpha_1^\vee = (1, 0, 0), \quad \alpha_2^\vee = \frac{1}{2}(-\varphi_+, -\varphi_-, -1), \quad \alpha_3^\vee = (0, 0, 1). \quad (\text{A.14})$$

Luego, la matriz de Cartan es de la forma

$$C = (\alpha_i \cdot \alpha_j^\vee) = \begin{pmatrix} 2 & -\varphi_+ & 0 \\ -\varphi_+ & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.15})$$

Podemos introducir los pesos fundamentales de  $H_3$  como

$$\omega_1 = (1, \varphi_+^2, 0), \quad \omega_2 = (0, 2\varphi_+, 0), \quad \omega_3 = (0, \varphi_+, 1), \quad (\text{A.16})$$

los cuales generan el espacio de pesos dual a  $\mathcal{R}_3$ :

$$\omega_i \cdot \alpha_j^\vee = \delta_{ij}. \quad (\text{A.17})$$

---

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| $( 2, 0, 0)$                   | $= \alpha_1$   |
| $( 0, 2, 0)$                   | $= (1 + \varphi_+) \alpha_1 + 2\varphi_+ \alpha_2 + \varphi_+ \alpha_3$      |
| $( 0, 0, 2)$                   | $= \alpha_3$   |
| $( 1, \varphi_+, \varphi_-)$   | $= (1 + \varphi_+) \alpha_1 + (1 + \varphi_+) \alpha_2 + \alpha_3$           |
| $( 1, \varphi_+, -\varphi_-)$  | $= (1 + \varphi_+) \alpha_1 + (1 + \varphi_+) \alpha_2 + \varphi_+ \alpha_3$ |
| $(-1, \varphi_+, \varphi_-)$   | $= \varphi_+ \alpha_1 + (1 + \varphi_+) \alpha_2 + \alpha_3$                 |
| $(-1, \varphi_+, -\varphi_-)$  | $= \varphi_+ \alpha_1 + (1 + \varphi_+) \alpha_2 + \varphi_+ \alpha_3$       |
| $( \varphi_+, -\varphi_-, 1)$  | $= \varphi_+ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$                                 |
| $( \varphi_+, -\varphi_-, -1)$ | $= \varphi_+ \alpha_1 + \alpha_2$  |
| $(-\varphi_+, -\varphi_-, 1)$  | $= \alpha_2 + \alpha_3$  |
| $(-\varphi_+, -\varphi_-, -1)$ | $= \alpha_2$   |
| $( \varphi_-, 1, \varphi_+)$   | $= \alpha_1 + \varphi_+ \alpha_2 + \varphi_+ \alpha_3$                       |
| $( \varphi_-, 1, -\varphi_+)$  | $= \alpha_1 + \varphi_+ \alpha_2$  |
| $(-\varphi_-, 1, \varphi_+)$   | $= \varphi_+ \alpha_1 + \varphi_+ \alpha_2 + \varphi_+ \alpha_3$             |
| $(-\varphi_-, 1, -\varphi_+)$  | $= \varphi_+ \alpha_1 + \varphi_+ \alpha_2$                                  |

---

Tabla A.3: Raíces positivas en la base (A.10) para  $H_3$

Un conjunto de raíces positivas  $\mathcal{R}_3^+$  se muestra explícitamente en la tabla A.3. Se define como el subconjunto de  $\mathcal{R}_3$  cuyos elementos pueden escribirse como combinaciones  $\mathbf{Z}^+[\varphi_+]$  lineales de las raíces base, siendo

$$\mathbf{Z}^+[\varphi_+] = \{a + \varphi_+ b \mid a, b \in \mathbf{Z}^+\}.$$

Las 15 raíces positivas definen 15 planos de simetría del icosaedro. Al intersectarlos con la esfera unitaria obtenemos 120 triángulos simétricos alternadamente congruentes en la esfera, cuyos ángulos son  $\pi/3$ ,  $\pi/5$ ,  $\pi/2$ . Estos triángulos se muestran en la figura A.4. Podemos ver que dichos triángulos se encuentran en los vértices del dodecaedro en grupos de 6, en los vértices del icosaedro en grupos de 10 y en las intersecciones de las líneas perpendiculares en grupos de 4. Observamos que el número de triángulos es igual al orden del grupo de simetrías del icosaedro.

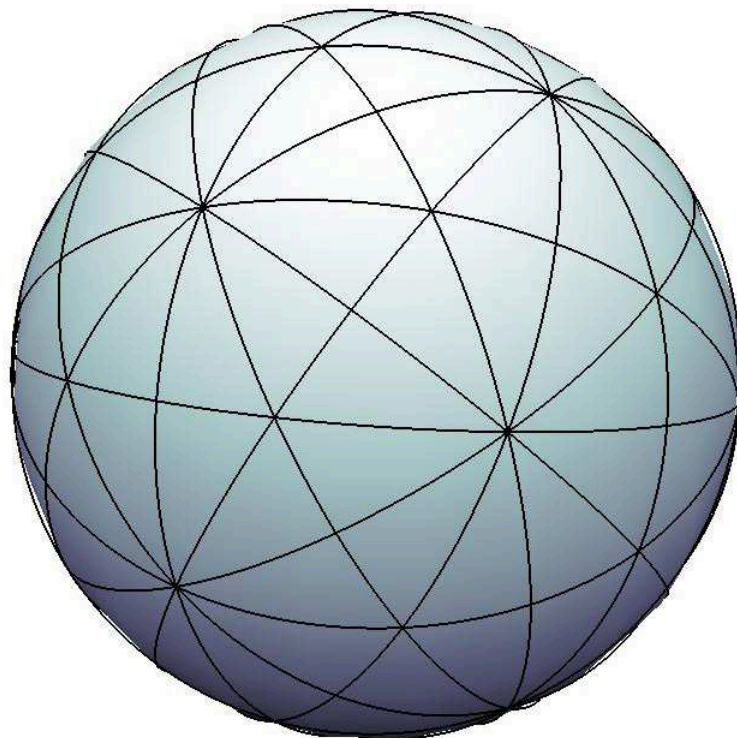


Figura A.4: Dominios fundamentales para el grupo del icosaedro. Los ángulos de los 120 triángulos son  $\pi/3$ ,  $\pi/5$  y  $\pi/2$ . Uniendo las intersecciones con líneas rectas obtenemos un sólido llamado *disdiquitriacontaedro*, que es un sólido con simetría icosaedral.

Consideremos el grupo de puntos que surge si le aplicamos las  $N$  operaciones de nuestro grupo a un punto arbitrario (la *órbita* del punto). Describimos co-

mo el *dominio fundamental* de un grupo de transformaciones en general una porción del espacio que contiene uno, y sólo uno, de los puntos de cada órbita correspondiente. Puede probarse que podemos tomar como dominios fundamentales para el grupo del icosaedro cada uno de los triángulos en la esfera en la figura A.4. Por ende, el número de triángulos es igual al orden del grupo.

### A.2.1. Representación unitaria del grupo $H_3$

Consideremos el grupo de transformaciones ortogonales  $H_3$  en el espacio euclidiano tridimensional:

$$x \longrightarrow g x , \quad g \in H_3 .$$

Hemos mostrado que este grupo es generado por reflexiones con respecto a planos perpendiculares a las raíces simples (A.11):

$$x \longrightarrow r_j(x) = x - \frac{2(x \cdot \alpha_j)}{\alpha_j \cdot \alpha_j} \alpha_j .$$

Consideremos ahora la representación unitaria en el espacio  $L^2(\mathbf{R}^3)$  del grupo  $H_3$ :

$$\mathcal{U}(g) \Psi(x) = \Psi(g^{-1}x) , \quad g \in H_3 . \quad (\text{A.18})$$

Si  $g \in H_3$  es una reflexión, entonces  $g^{-1} = g$ . Sea  $g = r_\alpha$  la reflexión con respecto a una de las raíces (A.8) del sistema de  $H_3$  (véase (A.1)). Denotaremos por  $\mathcal{U}(\alpha)$  al operador de reflexiones asociado:

$$\mathcal{U}(\alpha) \Psi(x) = \Psi(r_\alpha(x)) , \quad \alpha \in \mathcal{R}_3 . \quad (\text{A.19})$$

Puede hallarse una expresión para  $\mathcal{U}(\alpha)$ . Recordemos que el operador de rotaciones en  $L^2(\mathbf{R}^3)$  está dado por

$$\mathcal{D}(\hat{n}, \vartheta) = \exp(-i\vartheta \mathcal{L} \cdot \hat{n}) , \quad (\text{A.20})$$

donde  $\mathcal{L}$  es el operador de momento angular (véase [26]),  $\hat{n}$  es el vector unitario a lo largo del eje de rotación y  $\vartheta$  es el ángulo de rotación. Recordemos también que el operador de paridad (inversión espacial) es el operador  $\mathcal{P}$  tal que

$$\mathcal{P}^{-1} \mathcal{X} \mathcal{P} = -\mathcal{X} , \quad (\text{A.21})$$

siendo  $\mathcal{X}$  el operador de posición. Se sigue que el operador de reflexiones con respecto al plano perpendicular a la raíz  $\alpha$  (el cual contiene el origen de coordenadas) está dado por

$$\mathcal{U}(\alpha) = \mathcal{D}(\hat{\alpha}, \pi) \mathcal{P} . \quad (\text{A.22})$$

Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  las raíces simples (A.10) de  $H_3$ . Entonces,

$$\mathcal{U}(\alpha_1)^2 = \mathcal{U}(\alpha_2)^2 = \mathcal{U}(\alpha_3)^2 = 1 \quad (\text{A.23})$$

$$[\mathcal{U}(\alpha_1)\mathcal{U}(\alpha_2)]^5 = [\mathcal{U}(\alpha_2)\mathcal{U}(\alpha_3)]^3 = [\mathcal{U}(\alpha_1)\mathcal{U}(\alpha_3)]^3 = 1 \quad (\text{A.24})$$

Luego, la representación unitaria de  $H_3$  es un sistema de Coxeter con generadores  $\mathcal{U}(\alpha_j)$  para  $j = 1, 2, 3$ .

### A.3. El sistema de tipo $H_4$

El grupo de Coxeter  $H_4$  es el único grupo de Coxeter no cristalográfico que actúa en el espacio de cuatro dimensiones. Es un subgrupo discreto de  $O(4)$  y su dimensión es  $14400 = 2^6 3^2 5^2$ . El grupo de tipo  $H_4$  es el grupo de simetrías del *600-cell* o *hexacosichoron*, el cual es un politopo convexo regular en cuatro dimensiones. Tiene 600 celdas tetraedrales, 1200 caras triangulares, 720 aristas y 120 vértices, que pueden tomarse como los puntos

$$\left\{ \begin{array}{l} (\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1) \\ (0, 0, 0, \pm 2) \\ (\pm 1 \pm \varphi_+, \mp \varphi_-, 0) \end{array} \right. \text{ y todas las permutaciones pares}$$

donde  $\varphi_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$  es la *razón áurea* y su conjugado algebraico. El 600-cell es conocido como el análogo en cuatro dimensiones del icosaedro, dado que tiene cinco tetraedros que se encuentran en cada arista, de la misma forma en que el icosaedro tiene cinco triángulos encontrándose en cada vértice.

Dualmente, el grupo de tipo  $H_4$  es también el grupo de simetrías del *120-cell* o *hecatonicosachoron*, que es un politopo regular en cuatro dimensiones compuesto de 120 celdas dodecaedrales, 720 caras pentagonales, 1200 aristas



y 600 vértices, que son los puntos

$$\left\{ \begin{array}{ll} (0, 0, \pm 2, \pm 2) & \text{y todas las permutaciones} \\ (\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm \sqrt{5}) & \text{y todas las permutaciones} \\ (\pm \varphi_-^2, \pm \varphi_+, \pm \varphi_+, \pm \varphi_+) & \text{y todas las permutaciones} \\ (\pm \varphi_-, \pm \varphi_-, \pm \varphi_-, \mp \varphi_+^2) & \text{y todas las permutaciones} \\ (0, \pm \varphi_-^2, \pm 1, \pm \varphi_+^2) & \text{y todas las permutaciones pares} \\ (0, \mp \varphi_-, \pm \varphi_+, \pm \sqrt{5}) & \text{y todas las permutaciones pares} \\ (\mp \varphi_-, \pm 1, \pm \varphi_+, \pm 2) & \text{y todas las permutaciones pares.} \end{array} \right.$$

El 120-cell se conoce como el análogo en cuatro dimensiones del dodecaedro. (Para la noción de dualidad véase el apéndice A.2).

El sistema de raíces  $\mathcal{R}_4$  de  $H_4$  consiste de 120 elementos (cada uno normalizado para tener longitud 2):

$$\mathcal{R}_4 = \left\{ \begin{array}{ll} (\pm 2, 0, 0, 0) & \text{y todas las permutaciones ,} \\ (\pm 1, \pm \varphi_+, \pm \varphi_-, 0) & \text{y todas las permutaciones pares ,} \\ (\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1) & , \end{array} \right. \quad (\text{A.25})$$

Sean  $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ . El conjunto de raíces es invariante ante el intercambio

$$\begin{array}{l} e_i \longleftrightarrow e_j \\ \varphi_+ \longleftrightarrow \varphi_- \end{array} , \quad i \neq j . \quad (\text{A.26})$$

Introduzcamos una base de raíces simples en  $H_4$ ,

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = (2, 0, 0, 0) , & \alpha_2 = (-\varphi_+, -\varphi_-, -1, 0) , \\ \alpha_3 = (0, 0, 2, 0) , & \alpha_4 = (0, -\varphi_+, -1, -\varphi_-) . \end{array} \quad (\text{A.27})$$

En esta base cualquier vector raíz puede escribirse como una combinación lineal  $\mathbf{Z}[\varphi_+]$ , donde  $\mathbf{Z}[\varphi_+] = \{a + \varphi_+ b \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$  corresponde a un anillo de enteros extendido.

El grupo de Coxeter  $H_4$  es generado por reflexiones  $r_j$  con respecto a planos perpendiculares a las raíces simples  $\alpha_j$ , codificadas de la siguiente manera: para cualquier  $x \in \mathbf{R}^4$  un elemento  $\alpha_j \in \mathcal{R}_4$  provee una reflexión a

$$r_j(x) = x - \frac{2(x \cdot \alpha_j)}{(\alpha_j \cdot \alpha_j)} \alpha_j . \quad (\text{A.28})$$

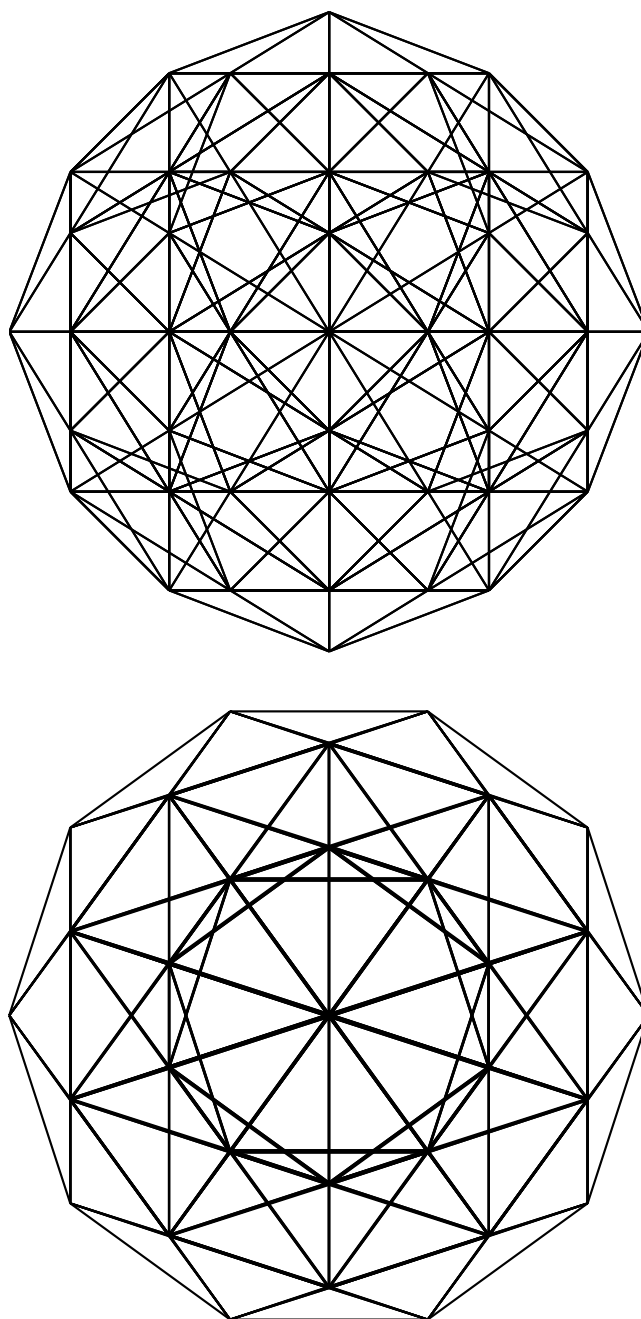


Figura A.5: Proyecciones bidimensionales del 600-cell.

Los elementos de  $H_4$  son generados a partir de  $r_1, r_2, r_3, r_4$  usando las relaciones

$$r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = 1 \quad (\text{A.29})$$

$$(r_1 r_2)^5 = (r_1 r_3)^2 = (r_1 r_4)^2 = (r_2 r_3)^3 = (r_2 r_4)^2 = (r_3 r_4)^3 = 1 \quad (\text{A.30})$$

Luego, si  $R = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$  entonces  $(R, H_4)$  es realmente un sistema de Coxeter.

Las coraíces simples  $\alpha_j^\vee = 2\alpha_j/(\alpha_j \cdot \alpha_j)$  están definidas de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \alpha_1^\vee &= (1, 0, 0, 0), & \alpha_2^\vee &= \frac{1}{2}(-\varphi_+, -\varphi_-, -1, 0), \\ \alpha_3^\vee &= (0, 0, 1, 0), & \alpha_4^\vee &= \frac{1}{2}(0, -\varphi_+, -1, -\varphi_-). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Luego, la matriz de Cartan tiene la forma

$$C = (\alpha_i \cdot \alpha_j^\vee) = \begin{pmatrix} 2 & -\varphi_+ & 0 & 0 \\ -\varphi_+ & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

Podemos introducir los pesos fundamentales de  $H_4$  como

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (1, \varphi_+^2, 0, \varphi_+^4), & \omega_2 &= (0, 2\varphi_+, 0, 2\varphi_+^3), \\ \omega_3 &= (0, \varphi_+, 1, \varphi_+^4 - 1), & \omega_4 &= (0, 0, 0, 2\varphi_+). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

generan el espacio de pesos dual a  $\mathcal{R}_4$ :

$$\omega_i \cdot \alpha_j^\vee = \delta_{ij}. \quad (\text{A.34})$$

El conjunto de raíces positivas  $\mathcal{R}_4^+$  está definido como el subconjunto de  $\mathcal{R}_4$  cuyos elementos pueden escribirse como  $\mathbf{Z}^+[\varphi_+]$  combinaciones lineales de las raíces base, donde

$$\mathbf{Z}^+[\varphi_+] = \{a + \varphi_+ b \mid a, b \in \mathbf{Z}^+\}.$$

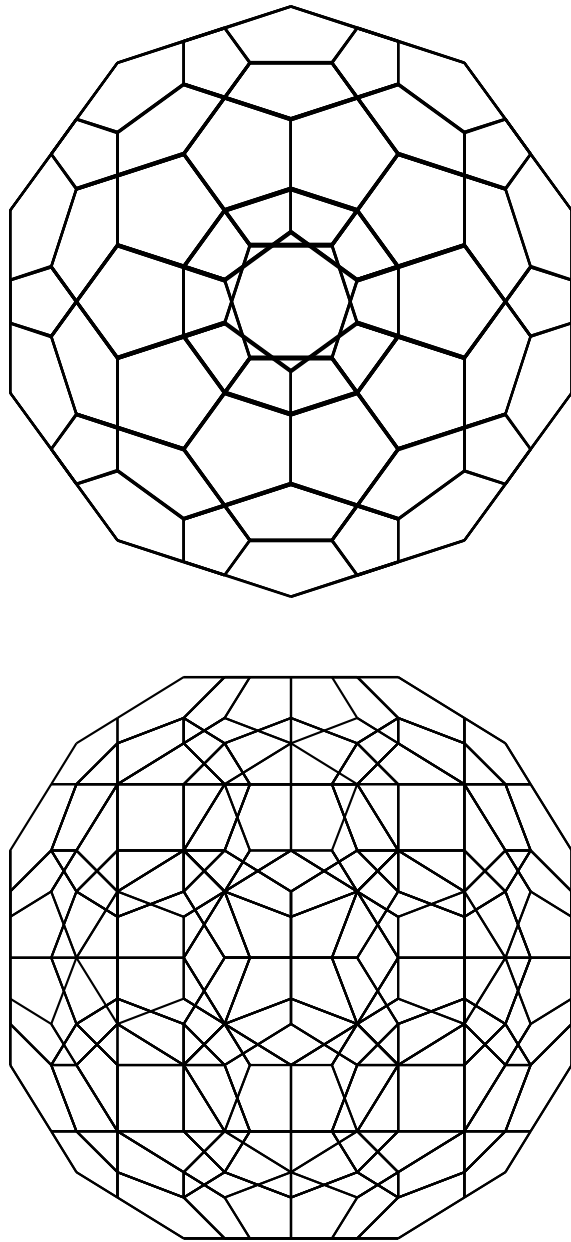


Figura A.6: Proyecciones bidimensionales del 120-cell.

# Apéndice B

## Relaciones de conmutación para $h^{(3)}$

Mostramos ahora en detalle los conmutadores del álgebra  $h^{(3)}$ .

- $[B, B]$

$$\begin{aligned} [T_0^{(1)}, T_1^{(1)}] &= T_0^{(1)}, & [T_0^{(1)}, T_2^{(2)}] &= 0, & [T_0^{(1)}, T_3^{(3)}] &= 0, \\ [T_0^{(1)}, J_0] &= T_0^{(1)}, & [T_0^{(1)}, J_1^+] &= T_1^{(1)} + J_0, & [T_1^{(1)}, T_2^{(2)}] &= 0, \\ [T_1^{(1)}, T_3^{(3)}] &= 0, & [T_1^{(1)}, J_0] &= 0, & [T_1^{(1)}, J_1^+] &= J_1^+, \\ [T_2^{(2)}, T_3^{(3)}] &= 0, & [T_2^{(2)}, J_0] &= 0, & [T_2^{(2)}, J_1^+] &= 0, \\ [T_3^{(3)}, J_0] &= 0, & [T_3^{(3)}, J_1^+] &= 0, & [J_0, J_1^+] &= J_1^+. \end{aligned}$$

Estas relaciones implican que

$$B \cong gl_2 \oplus \mathcal{R}^{(2)}$$

donde  $\mathcal{R}^{(2)}$  es un álgebra conmutativa de dimensión dos.

- $[L, E]$

$$\begin{aligned} [T_0^{(3)}, T_3^{(22)}] &= T_0^{(2)} T_0^{(2)}, & [T_0^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= T_1^{(2)} T_0^{(2)}, \\ [T_1^{(3)}, T_3^{(22)}] &= T_1^{(2)} T_0^{(2)}, & [T_0^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= T_1^{(2)} T_1^{(2)}, \\ [T_{11}^{(3)}, T_3^{(22)}] &= T_1^{(2)} T_1^{(2)}, & [T_0^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= T_{11}^{(2)} T_1^{(2)}, \\ [T_{111}^{(3)}, T_3^{(22)}] &= T_{11}^{(2)} T_1^{(2)}, & [T_0^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= T_{11}^{(2)} T_{11}^{(2)}. \end{aligned}$$

- $[\mathfrak{L}, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned}
[J_3^+, J_{22,-3}^+] &= -J_2^+ J_2^+ , & [J_3^+, T_{22}^{(13)}] &= -J_{2,-1}^+ J_2^+ , \\
[J_{3,-1}^+, J_{22,-3}^+] &= -J_{2,-1}^+ J_2^+ , & [J_{3,-1}^+, T_{22}^{(13)}] &= -J_{2,-1}^+ J_{2,-1}^+ , \\
[J_{3,-11}^+, J_{22,-3}^+] &= -J_{2,-1}^+ J_{2,-1}^+ , & [J_{3,-11}^+, T_{22}^{(13)}] &= -T_2^{(11)} J_2^+ , \\
[T_3^{(111)}, J_{22,-3}^+] &= -T_2^{(11)} J_{2,-1}^+ , & [T_3^{(111)}, T_{22}^{(13)}] &= -T_2^{(11)} T_2^{(11)} .
\end{aligned}$$

- $[R, F]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(2)}, T_2^{(3)}] &= T_0^{(3)} , & [T_0^{(2)}, T_{12}^{(3)}] &= T_1^{(3)} , \\
[T_1^{(2)}, T_2^{(3)}] &= T_1^{(3)} , & [T_1^{(2)}, T_{12}^{(3)}] &= T_{11}^{(3)} , \\
[T_{11}^{(2)}, T_2^{(3)}] &= T_{11}^{(3)} , & [T_{11}^{(2)}, T_{12}^{(3)}] &= T_{111}^{(3)} .
\end{aligned}$$

- $[\mathfrak{R}, \mathfrak{F}]$

$$\begin{aligned}
[J_2^+, J_{3,-2}^+] &= -J_3^+ , & [J_2^+, T_3^{(12)}] &= -J_{3,-1}^+ , \\
[J_{2,-1}^+, J_{3,-2}^+] &= -J_{3,-1}^+ , & [J_{2,-1}^+, T_3^{(12)}] &= -J_{3,-11}^+ , \\
[T_2^{(11)}, J_{3,-2}^+] &= -J_{3,-11}^+ , & [T_2^{(11)}, T_3^{(12)}] &= T_3^{(111)} .
\end{aligned}$$

- $[R, G]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(2)}, T_{222}^{(3)}] &= 3T_2^{(3)} T_2^{(3)} , \\
[T_1^{(2)}, T_{222}^{(3)}] &= 3T_{12}^{(3)} T_2^{(3)} , \\
[T_{11}^{(2)}, T_{222}^{(3)}] &= 3T_{12}^{(3)} T_{12}^{(3)} .
\end{aligned}$$

- $[\mathfrak{R}, \mathfrak{G}]$

$$\begin{aligned}
[J_2^+, T_{222}^{(3)}] &= -3J_{3,-2}^+ J_{3,-2}^+ , \\
[J_{2,-1}^+, T_{222}^{(3)}] &= -3T_3^{(12)} J_{3,-2}^+ , \\
[T_2^{(11)}, T_{222}^{(3)}] &= -3T_3^{(12)} T_3^{(12)} .
\end{aligned}$$

- $[F, E]$

$$\begin{aligned} [T_2^{(3)}, T_3^{(22)}] &= (T_2^{(2)} - 2T_3^{(3)})T_0^{(2)}, & [T_2^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= (T_2^{(2)} - 2T_3^{(3)})T_1^{(2)}, \\ [T_{12}^{(3)}, T_3^{(22)}] &= (T_2^{(2)} - 2T_3^{(3)})T_1^{(2)}, & [T_{12}^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= (T_2^{(2)} - 2T_3^{(3)})T_{11}^{(2)}. \end{aligned}$$

- $[\mathfrak{F}, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned} [J_{3,-2}^+, J_{22,-3}^+] &= J_2^+(2T_3^{(3)} - T_2^{(2)}), & [J_{3,-2}^+, T_{22}^{(13)}] &= J_{2,-1}^+(2T_3^{(3)} - T_2^{(2)}), \\ [T_3^{(12)}, J_{22,-3}^+] &= J_{2,-1}^+(2T_3^{(3)} - T_2^{(2)}), & [T_3^{(12)}, T_{22}^{(13)}] &= T_2^{(11)}(2T_3^{(3)} - T_2^{(2)}). \end{aligned}$$

- $[E, G]$

$$\begin{aligned} [T_3^{(22)}, T_{222}^{(33)}] &= (6T_3^{(3)}T_2^{(2)} - 2T_2^{(2)}T_2^{(2)} + 6T_2^{(2)} - 4)T_2^{(3)}, \\ [T_{13}^{(22)}, T_{222}^{(33)}] &= (6T_3^{(3)}T_2^{(2)} - 2T_2^{(2)}T_2^{(2)} + 6T_2^{(2)} - 4)T_{12}^{(3)}. \end{aligned}$$

- $[\mathfrak{E}, \mathfrak{G}]$

$$\begin{aligned} [J_{22,-3}^+, T_{33}^{(222)}] &= -J_{3,-2}(6T_3^{(3)}T_2^{(2)} - 2T_2^{(2)}T_2^{(2)} + 6T_2^{(2)} - 4), \\ [T_{22}^{(13)}, T_{33}^{(222)}] &= -T_3^{(12)}(6T_3^{(3)}T_2^{(2)} - 2T_2^{(2)}T_2^{(2)} + 6T_2^{(2)} - 4). \end{aligned}$$

- $[L, \mathfrak{A}]$

$$\begin{aligned} [T_0^{(3)}, J_2^+] &= 6J_0T_2^{(3)}, & [T_0^{(3)}, J_{2,-1}^+] &= 3T_0^{(1)}T_2^{(3)}, \\ [T_0^{(3)}, T_2^{(11)}] &= 0, & [T_1^{(3)}, J_2^+] &= 2(2J_0 - 1)T_{12}^{(3)}, \\ [T_1^{(3)}, J_{2,-1}^+] &= (2T_1^{(1)} - J_0 + 1)T_2^{(3)}, & [T_1^{(3)}, T_2^{(11)}] &= -2T_0^{(1)}T_2^{(3)}, \\ [T_{11}^{(3)}, J_2^+] &= 2J_1^+T_{12}^{(3)}, & [T_{11}^{(3)}, J_{2,-1}^+] &= (T_1^{(1)} - 2J_0 + 1)T_{12}^{(3)}, \\ [T_{11}^{(3)}, T_2^{(11)}] &= -2(2T_1^{(1)} + 1)T_2^{(3)}, & [T_{111}^{(3)}, J_2^+] &= 0, \\ [T_{111}^{(3)}, J_{2,-1}^+] &= -3J_1^+T_{12}^{(3)}, & [T_{111}^{(3)}, T_2^{(11)}] &= -6T_1^{(1)}T_{12}^{(3)}. \end{aligned}$$

- $[\mathcal{L}, R]$

$$\begin{aligned}
[J_3^+, T_0^{(2)}] &= -6J_{3,-2}J_0, & [J_3^+, T_1^{(2)}] &= -3J_{3,-2}^+J_1^+, \\
[J_3^+, T_{11}^{(2)}] &= 0, & [J_{3,-1}^+, T_0^{(2)}] &= -2T_3^{(12)}(2J_0 - 1), \\
[J_{3,-1}^+, T_1^{(2)}] &= J_{3,-2}^+(J_0 - 2T_1^{(1)} - 1), & [J_{3,-1}^+, T_{11}^{(2)}] &= 2J_{3,-2}^+J_1^+, \\
[J_{3,-11}^+, T_0^{(2)}] &= -2T_3^{(12)}T_0^{(1)}, & [J_{3,-11}^+, T_1^{(2)}] &= T_3^{(12)}(2J_0 - T_1^{(1)} - 1), \\
[J_{3,-11}^+, T_{11}^{(2)}] &= 2J_{3,-2}^+(2T_1^{(1)} + 1), & [T_3^{(111)}, T_0^{(2)}] &= 0, \\
[T_3^{(111)}, T_1^{(2)}] &= 3T_3^{(12)}T_0^{(1)}, & [T_3^{(111)}, T_{11}^{(2)}] &= 6T_3^{(12)}T_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

- $[L, \mathfrak{F}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= T_0^{(2)}(J_0 + 3T_3^{(3)}), & [T_0^{(3)}, T_3^{(12)}] &= T_0^{(2)}T_0^{(1)}, \\
[T_1^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= T_1^{(2)}(J_0 + 2T_3^{(3)}), & [T_1^{(3)}, T_3^{(12)}] &= T_0^{(2)}(T_1^{(1)} - T_3^{(3)}), \\
[T_{11}^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= T_{11}^{(2)}(J_0 + T_3^{(3)}), & [T_{11}^{(3)}, T_3^{(12)}] &= T_1^{(2)}(T_1^{(1)} - 2T_3^{(3)}), \\
[T_{111}^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= T_{11}^{(2)}J_1^+, & [T_{111}^{(3)}, T_3^{(12)}] &= T_{11}^{(2)}(T_1^{(1)} - 3T_3^{(3)}).
\end{aligned}$$

- $[\mathcal{L}, F]$

$$\begin{aligned}
[J_3^+, T_2^{(3)}] &= -(J_0 + 3T_3^{(3)})J_2^+, & [J_3^+, T_{12}^{(3)}] &= -J_1^+J_2^+, \\
[J_{3,-1}^+, T_2^{(3)}] &= -(J_0 + 2T_3^{(3)})J_{2,-1}^+, & [J_{3,-1}^+, T_{12}^{(3)}] &= (T_3^{(3)} - T_1^{(1)})J_2^+, \\
[J_{3,-11}^+, T_2^{(3)}] &= -(J_0 + T_3^{(3)})T_2^{(11)}, & [J_{3,-11}^+, T_{12}^{(3)}] &= (2T_3^{(3)} - T_1^{(1)})J_{2,-1}^+, \\
[T_3^{(111)}, T_2^{(3)}] &= -T_0^{(1)}T_2^{(11)}, & [T_3^{(111)}, T_{12}^{(3)}] &= (3T_3^{(3)} - T_1^{(1)})T_2^{(11)}.
\end{aligned}$$

- $[L, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= 3T_2^{(3)}T_2^{(3)}, & [T_0^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= 0, \\
[T_1^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= 2T_{12}^{(3)}T_2^{(3)}, & [T_1^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= -T_2^{(3)}T_2^{(3)}, \\
[T_{11}^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= T_{12}^{(3)}T_{12}^{(3)}, & [T_{11}^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= -2T_{12}^{(3)}T_2^{(3)}, \\
[T_{111}^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= 0, & [T_{111}^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= -3T_{12}^{(3)}T_{12}^{(3)}.
\end{aligned}$$



- $[\mathfrak{L}, E]$

$$\begin{aligned}
[J_3^+, T_3^{(22)}] &= -J_{3,-2}^+ J_{3,-2}^+ , & [J_3^+, T_{13}^{(22)}] &= 0 , \\
[J_{3,-1}^+, T_3^{(22)}] &= -2J_{3,-2} T_3^{(12)} , & [J_{3,-1}^+, T_{13}^{(22)}] &= J_{3,-2}^+ J_{3,-2}^+ , \\
[J_{3,-11}^+, T_3^{(22)}] &= -T_3^{(12)} T_3^{(12)} , & [J_{3,-11}^+, T_{13}^{(22)}] &= 2J_{3,-2} T_3^{(12)} , \\
[T_3^{(111)}, T_3^{(22)}] &= 0 , & [T_3^{(111)}, T_{13}^{(22)}] &= 3T_3^{(12)} T_3^{(12)} .
\end{aligned}$$

- $[L, \mathfrak{G}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= 2T_0^{(2)} T_3^{(22)} , \\
[T_1^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= 2T_1^{(2)} T_3^{(22)} , \\
[T_{11}^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= 2T_{11}^{(2)} T_3^{(22)} , \\
[T_{111}^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= 2T_{11}^{(2)} T_{13}^{(22)} .
\end{aligned}$$

- $[\mathfrak{L}, G]$

$$\begin{aligned}
[J_3^+, T_{222}^{(33)}] &= -2J_{22,-3}^+ J_2^+ , \\
[J_{3,-1}^+, T_{222}^{(33)}] &= -2J_{22,-3}^+ J_{2,-1}^+ , \\
[J_{3,-11}^+, T_{222}^{(33)}] &= -2J_{22,-3}^+ T_2^{(11)} , \\
[T_3^{(111)}, T_{222}^{(33)}] &= -2T_{22}^{(13)} T_2^{(11)} .
\end{aligned}$$

- $[R, \mathfrak{F}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(2)}, J_{3,-2}^+] &= 2T_3^{(22)} , & [T_0^{(2)}, T_3^{(12)}] &= 0 , \\
[T_1^{(2)}, J_{3,-2}^+] &= T_{13}^{(22)} , & [T_1^{(2)}, T_3^{(12)}] &= -T_3^{(22)} , \\
[T_{11}^{(2)}, J_{3,-2}^+] &= 0 , & [T_{11}^{(2)}, T_3^{(12)}] &= -2T_{13}^{(22)} .
\end{aligned}$$

- $[\mathfrak{R}, F]$

$$\begin{aligned} [J_2^+, T_2^{(3)}] &= -2J_{22,-3}^+, & [J_2^+, T_{12}^{(3)}] &= 0, \\ [J_{2,-1}^+, T_2^{(3)}] &= -T_{22}^{(13)}, & [J_{2,-1}^+, T_{12}^{(3)}] &= J_{22,-3}^+, \\ [T_2^{(11)}, T_2^{(3)}] &= 0, & [T_2^{(11)}, T_{12}^{(3)}] &= T_{22}^{(13)}. \end{aligned}$$

- $[R, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned} [T_0^{(2)}, J_{22,-3}^+] &= 2T_2^{(3)}(J_0 + T_2^{(2)}), & [T_0^{(2)}, T_{22}^{(13)}] &= 2T_2^{(3)}T_0^{(1)}, \\ [T_1^{(2)}, J_{22,-3}^+] &= T_{12}^{(3)}(2J_0 + T_2^{(2)}), & [T_1^{(2)}, T_{22}^{(13)}] &= T_2^{(3)}(2T_1^{(1)} - T_2^{(2)}), \\ [T_{11}^{(2)}, J_{22,-3}^+] &= 2T_{12}^{(3)}J_1^+, & [T_{11}^{(2)}, T_{22}^{(13)}] &= 2T_{12}^{(3)}(T_1^{(1)} - T_2^{(2)}). \end{aligned}$$

- $[\mathfrak{R}, E]$

$$\begin{aligned} [J_2^+, T_3^{(22)}] &= -2(J_0 + T_2^{(2)})J_{3,-2}^+, & [J_2^+, T_{13}^{(22)}] &= -2J_1^+J_{3,-2}^+, \\ [J_{2,-1}^+, T_3^{(22)}] &= -(2J_0 + T_2^{(2)})T_2^{(12)}, & [J_{2,-1}^+, T_{13}^{(22)}] &= (T_2^{(2)} - 2T_1^{(1)})J_{3,-2}^+, \\ [T_2^{(11)}, T_3^{(22)}] &= -2T_0^{(1)}T_3^{(12)}, & [T_2^{(11)}, T_{13}^{(22)}] &= 2(T_2^{(2)} - T_1^{(1)})T_3^{(12)}. \end{aligned}$$

- $[F, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned} [T_2^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= T_{222}^{(33)}, & [T_2^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= 0, \\ [T_{12}^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= 0, & [T_{12}^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= -T_{222}^{(33)}. \end{aligned}$$

- $[\mathfrak{F}, E]$

$$\begin{aligned} [J_{3,-2}^+, T_3^{(22)}] &= -T_{33}^{(222)}, & [J_{3,-2}^+, T_{13}^{(22)}] &= 0, \\ [T_3^{(12)}, T_3^{(22)}] &= 0, & [T_3^{(12)}, T_{13}^{(22)}] &= T_{33}^{(222)}. \end{aligned}$$

•  $[F, \mathfrak{G}]$ 

$$\begin{aligned} [T_2^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= (2T_2^{(2)} - 3T_3^{(3)} + 3)T_3^{(22)} , \\ [T_{12}^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= (2T_2^{(2)} - 3T_3^{(3)} + 3)T_{13}^{(22)} . \end{aligned}$$

•  $[\mathfrak{F}, G]$ 

$$\begin{aligned} [J_{3,-2}^+, T_{222}^{(33)}] &= -J_{22,-3}^+(2T_2^{(2)} - 3T_3^{(3)} + 3) , \\ [T_3^{(12)}, T_{222}^{(33)}] &= -T_{22}^{(13)}(2T_2^{(2)} - 3T_3^{(3)} + 3) . \end{aligned}$$

•  $[B, L]$ 

$$\begin{aligned} [T_0^{(1)}, T_0^{(3)}] &= 0 , & [T_0^{(1)}, T_1^{(3)}] &= T_0^{(3)} , & [T_0^{(1)}, T_{11}^{(3)}] &= 2T_1^{(3)} , \\ [T_0^{(1)}, T_{111}^{(3)}] &= 3T_{11}^{(3)} , & [T_1^{(1)}, T_0^{(3)}] &= 0 , & [T_1^{(1)}, T_1^{(3)}] &= T_1^{(3)} , \\ [T_1^{(1)}, T_{11}^{(3)}] &= 2T_{11}^{(3)} , & [T_1^{(1)}, T_{111}^{(3)}] &= 3T_{111}^{(3)} , & [T_2^{(2)}, T_0^{(3)}] &= 0 , \\ [T_2^{(2)}, T_1^{(3)}] &= 0 , & [T_2^{(2)}, T_{11}^{(3)}] &= 0 , & [T_2^{(2)}, T_{111}^{(3)}] &= 0 , \\ [T_3^{(3)}, T_0^{(3)}] &= -T_0^{(3)} , & [T_3^{(3)}, T_1^{(3)}] &= -T_1^{(3)} , & [T_3^{(3)}, T_{11}^{(3)}] &= -T_{11}^{(3)} , \\ [T_3^{(3)}, T_{111}^{(3)}] &= -T_{111}^{(3)} , & [J_0, T_0^{(3)}] &= -3T_0^{(3)} , & [J_0, T_1^{(3)}] &= -2T_1^{(3)} , \\ [J_0, T_{11}^{(3)}] &= -T_{11}^{(3)} , & [J_0, T_{111}^{(3)}] &= 0 , & [J_1^+, T_0^{(3)}] &= -3T_1^{(3)} , \\ [J_1^+, T_1^{(3)}] &= -2T_{11}^{(3)} , & [J_1^+, T_{11}^{(3)}] &= -T_{111}^{(3)} , & [J_1^+, T_{111}^{(3)}] &= 0 . \end{aligned}$$

•  $[B, \mathfrak{L}]$ 

$$\begin{aligned} [T_0^{(1)}, J_3^+] &= 3J_{3,-1}^+ , & [T_0^{(1)}, J_{3,-1}^+] &= 2J_{3,-11}^+ , & [T_0^{(1)}, J_{3,-11}^+] &= T_3^{(111)} , \\ [T_0^{(1)}, T_3^{(111)}] &= 0 , & [T_1^{(1)}, J_3^+] &= 0 , & [T_1^{(1)}, J_{3,-1}^+] &= -J_{3,-1}^+ , \\ [T_1^{(1)}, J_{3,-11}^+] &= -2J_{3,-11} , & [T_1^{(1)}, T_3^{(111)}] &= -3T_3^{(111)} , & [T_2^{(2)}, J_3^+] &= 0 , \\ [T_2^{(2)}, J_{3,-1}^+] &= 0 , & [T_2^{(2)}, J_{3,-11}^+] &= 0 , & [T_2^{(2)}, T_3^{(111)}] &= 0 , \\ [T_3^{(3)}, J_3^+] &= J_3^+ , & [T_3^{(3)}, J_{3,-1}^+] &= J_{3,-1}^+ , & [T_3^{(3)}, J_{3,-11}^+] &= J_{3,-11}^+ , \\ [T_3^{(3)}, T_3^{(111)}] &= T_3^{(111)} , & [J_0, J_3^+] &= 3J_3^+ , & [J_0, J_{3,-1}^+] &= 2J_{3,-1}^+ , \\ [J_0, J_{3,-11}^+] &= J_{3,-11}^+ , & [J_0, T_3^{(111)}] &= 0 , & [J_1^+, J_3^+] &= 0 , \\ [J_1^+, J_{3,-1}^+] &= -J_3^+ , & [J_1^+, J_{3,-11}^+] &= -2J_{3,-1}^+ , & [J_1^+, T_3^{(111)}] &= -3J_{3,-11}^+ . \end{aligned}$$

- $[B, R]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, T_0^{(2)}] &= 0, & [T_0^{(1)}, T_1^{(2)}] &= T_0^{(2)}, & [T_0^{(1)}, T_{11}^{(2)}] &= 2T_1^{(2)}, \\
[T_1^{(1)}, T_0^{(2)}] &= 0, & [T_1^{(1)}, T_1^{(2)}] &= T_1^{(2)}, & [T_1^{(1)}, T_{11}^{(2)}] &= 2T_{11}^{(2)}, \\
[T_2^{(2)}, T_0^{(2)}] &= -T_0^{(2)}, & [T_2^{(2)}, T_1^{(2)}] &= -T_1^{(2)}, & [T_2^{(2)}, T_{11}^{(2)}] &= -T_{11}^{(2)}, \\
[T_3^{(3)}, T_0^{(2)}] &= 0, & [T_3^{(3)}, T_1^{(2)}] &= 0, & [T_3^{(3)}, T_{11}^{(2)}] &= 0, \\
[J_0, T_0^{(2)}] &= -2T_0^{(2)}, & [J_0, T_1^{(2)}] &= -T_1^{(2)}, & [J_0, T_{11}^{(2)}] &= 0, \\
[J_1^+, T_0^{(2)}] &= -2T_1^{(2)}, & [J_1^+, T_1^{(2)}] &= -T_{11}^{(2)}, & [J_1^+, T_{11}^{(2)}] &= 0.
\end{aligned}$$

- $[B, \mathfrak{R}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, J_2^+] &= 2J_{2,-1}^+, & [T_0^{(1)}, J_{2,-1}^+] &= T_2^{(11)}, & [T_0^{(1)}, T_2^{(11)}] &= 0, \\
[T_1^{(1)}, J_2^+] &= 0, & [T_1^{(1)}, J_{2,-1}^+] &= -J_{2,-1}^+, & [T_1^{(1)}, T_2^{(11)}] &= -2T_2^{(11)}, \\
[T_2^{(2)}, J_2^+] &= J_2^+, & [T_2^{(2)}, J_{2,-1}^+] &= J_{2,-1}^+, & [T_2^{(2)}, T_2^{(11)}] &= T_2^{(11)}, \\
[T_3^{(3)}, J_2^+] &= 0, & [T_3^{(3)}, J_{2,-1}^+] &= 0, & [T_3^{(3)}, T_2^{(11)}] &= 0, \\
[J_0, J_2^+] &= 2J_2^+, & [J_0, J_{2,-1}^+] &= J_{2,-1}^+, & [J_0, T_2^{(11)}] &= 0, \\
[J_1^+, J_2^+] &= 0, & [J_1^+, J_{2,-1}^+] &= -J_2^+, & [J_1^+, T_2^{(11)}] &= -2J_{2,-1}^+.
\end{aligned}$$

- $[B, F]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, T_2^{(3)}] &= 0, & [T_0^{(1)}, T_{12}^{(3)}] &= T_2^{(3)}, & [T_1^{(1)}, T_2^{(3)}] &= 0, \\
[T_1^{(1)}, T_{12}^{(3)}] &= T_{12}^{(3)}, & [T_2^{(2)}, T_2^{(3)}] &= T_2^{(3)}, & [T_2^{(2)}, T_{12}^{(3)}] &= T_{12}^{(3)}, \\
[T_3^{(3)}, T_2^{(3)}] &= -T_2^{(3)}, & [T_3^{(3)}, T_{12}^{(3)}] &= -T_{12}^{(3)}, & [J_0, T_2^{(3)}] &= -T_2^{(3)}, \\
[J_0, T_{12}^{(3)}] &= 0, & [J_1^+, T_2^{(3)}] &= -T_{12}^{(3)}, & [J_1^+, T_{12}^{(3)}] &= 0.
\end{aligned}$$

- $[B, \mathfrak{F}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, J_{3,-2}^+] &= T_3^{(12)}, & [T_0^{(1)}, T_3^{(12)}] &= 0, & [T_1^{(1)}, J_{3,-2}^+] &= 0, \\
[T_1^{(1)}, T_3^{(12)}] &= -T_3^{(12)}, & [T_2^{(2)}, J_{3,-2}^+] &= -J_{3,-2}^+, & [T_2^{(2)}, T_3^{(12)}] &= -T_3^{(12)}, \\
[T_3^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= J_{3,-2}^+, & [T_3^{(3)}, T_3^{(12)}] &= T_3^{(12)}, & [J_0, J_{3,-2}^+] &= -J_{3,-2}^+, \\
[J_0, T_3^{(12)}] &= 0, & [J_1^+, J_{3,-2}^+] &= 0, & [J_1^+, T_3^{(12)}] &= -J_{3,-2}^+.
\end{aligned}$$

- $[B, E]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, T_3^{(22)}] &= 0, & [T_0^{(1)}, T_{13}^{(22)}] &= T_3^{(22)}, & [T_1^{(1)}, T_3^{(22)}] &= 0, \\
[T_1^{(1)}, T_{13}^{(22)}] &= T_{13}^{(22)}, & [T_2^{(2)}, T_3^{(22)}] &= -2T_3^{(22)}, & [T_2^{(2)}, T_{13}^{(22)}] &= -2T_{13}^{(22)}, \\
[T_3^{(3)}, T_3^{(22)}] &= T_3^{(22)}, & [T_3^{(3)}, T_{13}^{(22)}] &= T_{13}^{(22)}, & [J_0, T_3^{(22)}] &= -T_3^{(22)}, \\
[J_0, T_{13}^{(22)}] &= 0, & [J_1^+, T_3^{(22)}] &= -T_{13}^{(22)}, & [J_1^+, T_{13}^{(22)}] &= 0.
\end{aligned}$$

- $[B, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, J_{22,-3}^+] &= T_{22}^{(13)}, & [T_0^{(1)}, T_{22}^{(13)}] &= 0, & [T_1^{(1)}, J_{22,-3}^+] &= 0, \\
[T_1^{(1)}, T_{22}^{(13)}] &= -T_{22}^{(13)}, & [T_2^{(2)}, J_{22,-3}^+] &= 2J_{22,-3}^+, & [T_2^{(2)}, T_{22}^{(13)}] &= 2T_{22}^{(13)}, \\
[T_3^{(3)}, J_{22,-3}^+] &= -J_{22,-3}^+, & [T_3^{(3)}, T_{22}^{(13)}] &= -T_{22}^{(13)}, & [J_0, J_{22,-3}^+] &= J_{22,-3}^+, \\
[J_0, T_{22}^{(13)}] &= 0, & [J_1^+, J_{22,-3}^+] &= 0, & [J_1^+, T_{22}^{(13)}] &= -J_{22,-3}^+.
\end{aligned}$$

- $[B, G]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, T_{222}^{(33)}] &= 0, & [T_1^{(1)}, T_{222}^{(33)}] &= 0, & [T_2^{(2)}, T_{222}^{(33)}] &= 3T_{222}^{(33)}, \\
[T_3^{(3)}, T_{222}^{(33)}] &= -2T_{222}^{(33)}, & [J_0, T_{222}^{(33)}] &= 0, & [J_1^+, T_{222}^{(33)}] &= 0.
\end{aligned}$$

- $[B, \mathfrak{G}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(1)}, T_{33}^{(222)}] &= 0, & [T_1^{(1)}, T_{33}^{(222)}] &= 0, & [T_2^{(2)}, T_{33}^{(222)}] &= -3T_{33}^{(222)}, \\
[T_3^{(3)}, T_{33}^{(222)}] &= 2T_{33}^{(222)}, & [J_0, T_{33}^{(222)}] &= 0, & [J_1^+, T_{33}^{(222)}] &= 0.
\end{aligned}$$

•  $[L, \mathcal{L}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(3)}, J_3^+] &= J_0(J_0 + 1)(J_0 + 2) + 9T_3^{(3)}J_0(J_0 - 1) + 6T_3^{(3)}, \\
[T_0^{(3)}, J_{3,-1}^+] &= (J_0 + 1)(J_0 + 2)T_0^{(1)} + 6T_3^{(3)}J_0T_0^{(1)}, \\
[T_0^{(3)}, J_{3,-11}^+] &= T_0^{(1)}T_0^{(1)}(J_0 + 3T_3^{(3)}), \\
[T_0^{(3)}, T_3^{(111)}] &= T_0^{(1)}T_0^{(1)}T_0^{(1)}, \\
[T_1^{(3)}, J_3^+] &= J_1^+(J_0 + 1)(J_0 + 2) + 6J_1^+T_3^{(3)}J_0, \\
[T_1^{(3)}, J_{3,-1}^+] &= T_1^{(1)}J_0(J_0 + 1) - T_3^{(3)}J_0(J_0 - 3) - 2T_3^{(3)}T_1^{(1)}(2J_0 + 1) - 2T_3^{(3)}, \\
[T_1^{(3)}, J_{3,-11}^+] &= T_1^{(1)}(J_0 + 2T_3^{(3)} + 1)T_0^{(1)} - 2T_3^{(3)}(J_0 - 1)T_0^{(1)}, \\
[T_1^{(3)}, T_3^{(111)}] &= (T_1^{(1)} - 3T_3^{(3)})T_0^{(1)}T_0^{(1)}, \\
[T_{11}^{(3)}, J_3^+] &= (J_0 + 3T_3^{(3)})J_1^+J_1^+, \\
[T_{11}^{(3)}, J_{3,-1}^+] &= J_1^+T_1^{(1)}(J_0 + 2T_3^{(3)} + 1) - 2J_1^+T_3^{(3)}(J_0 - 1), \\
[T_{11}^{(3)}, J_{3,-11}^+] &= -2T_3^{(3)}(J_0 - 1) - T_3^{(3)}T_1^{(1)}(4J_0 - 3) + T_1^{(1)}T_1^{(1)}(J_0 + T_3^{(3)}) - T_1^{(1)}J_0, \\
[T_{11}^{(3)}, T_3^{(111)}] &= T_1^{(1)}T_1^{(1)}T_0^{(1)} - T_1^{(1)}T_0^{(1)} - 6T_3^{(3)}T_0^{(1)} - 6T_1^{(1)}T_3^{(3)}T_0^{(1)}, \\
[T_{111}^{(3)}, J_3^+] &= J_1^+J_1^+J_1^+, \\
[T_{111}^{(3)}, J_{3,-1}^+] &= J_1^+J_1^+(T_1^{(1)} - 3T_3^{(3)}), \\
[T_{111}^{(3)}, J_{3,-11}^+] &= J_1^+T_1^{(1)}T_1^{(1)} - J_1^+T_1^{(1)} - 6J_1^+T_3^{(3)} - 6J_1^+T_1^{(1)}T_3^{(3)}, \\
[T_{111}^{(3)}, T_3^{(111)}] &= T_1^{(1)}T_1^{(1)}T_1^{(1)} - 3T_1^{(1)}T_1^{(1)} + 2T_1^{(1)} - 3T_3^{(3)}(3T_1^{(1)}T_1^{(1)} + 3T_1^{(1)} + 2).
\end{aligned}$$

- $[R, \mathfrak{R}]$

$$\begin{aligned}
[T_0^{(2)}, J_2^+] &= J_0(J_0 + 1) + 4T_2^{(2)}J_0 - 2T_2^{(2)}, \\
[T_0^{(2)}, J_{2,-1}^+] &= T_0^{(1)}(J_0 + 2T_2^{(2)}), \\
[T_0^{(2)}, T_2^{(11)}] &= T_0^{(1)}T_0^{(1)}, \\
[T_1^{(2)}, J_2^+] &= (J_0 + 2T_2^{(2)})J_1^+, \\
[T_1^{(2)}, J_{2,-1}^+] &= T_1^{(1)}J_0 - T_2^{(2)}J_0 + T_2^{(2)} + T_1^{(1)}T_2^{(2)}, \\
[T_1^{(2)}, T_2^{(11)}] &= (T_1^{(1)} - 2T_2^{(2)})T_0^{(1)}, \\
[T_{11}^{(2)}, J_2^+] &= J_1^+J_1^+, \\
[T_{11}^{(2)}, J_{2,-1}^+] &= J_1^+(T_1^{(1)} - 2T_2^{(2)}), \\
[T_{11}^{(2)}, T_2^{(11)}] &= T_1^{(1)}T_1^{(1)} - T_1^{(1)} - 2T_2^{(2)} - 4T_2^{(2)}T_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

- $[F, \mathfrak{F}]$

$$\begin{aligned}
[T_2^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= T_2^{(2)}J_0 - T_3^{(3)}J_0 + T_3^{(3)} + T_2^{(2)}T_3^{(3)}, \\
[T_2^{(3)}, T_3^{(12)}] &= (T_2^{(2)} - T_3^{(3)})T_0^{(1)}, \\
[T_{12}^{(3)}, J_{3,-2}^+] &= J_1^+(T_2^{(2)} - T_3^{(3)}), \\
[T_{12}^{(3)}, T_3^{(12)}] &= T_1^{(1)}T_2^{(2)} - T_3^{(3)}T_1^{(1)} - T_3^{(3)}T_2^{(2)} - T_3^{(3)}.
\end{aligned}$$

- $[E, \mathfrak{E}]$

$$\begin{aligned}
[T_3^{(22)}, J_{22,-3}^+] &= T_2^{(2)}(T_2^{(2)} - 1)(T_3^{(3)} - J_0 + 1) + 4T_2^{(2)}T_3^{(3)}J_0 + 2T_3^{(3)}J_0, \\
[T_3^{(22)}, T_{22}^{(13)}] &= (2T_3^{(3)} + 4T_2^{(2)}T_3^{(3)} - T_2^{(2)}T_2^{(2)} + T_2^{(2)})T_0^{(1)}, \\
[T_{13}^{(22)}, J_{22,-3}^+] &= J_1^+(2T_3^{(3)} + 4T_2^{(2)}T_3^{(3)} - T_2^{(2)}T_2^{(2)} + T_2^{(2)}), \\
[T_{13}^{(22)}, T_{22}^{(13)}] &= 2T_1^{(1)}T_3^{(3)} + 4T_1^{(1)}T_2^{(2)}T_3^{(3)} - T_2^{(2)}(T_2^{(2)} - 1)(T_3^{(3)} + T_1^{(1)} + 1).
\end{aligned}$$

- $[G, \mathfrak{G}]$

$$\begin{aligned}
[T_{222}^{(33)}, T_{33}^{(222)}] &= 4T_2^{(2)}T_2^{(2)}T_2^{(2)}T_3^{(3)} - 9T_2^{(2)}T_2^{(2)}T_3^{(3)}T_3^{(3)} + 2T_2^{(2)}T_2^{(2)}T_2^{(2)} \\
&\quad - 9T_2^{(2)}T_3^{(3)}T_3^{(3)} - 3T_2^{(2)}T_2^{(2)}T_3^{(3)} + 17T_2^{(2)}T_3^{(3)} - 6T_2^{(2)}T_2^{(2)} \\
&\quad - 6T_3^{(3)}T_3^{(3)} + 4T_2^{(2)} + 6T_3^{(3)}.
\end{aligned}$$

# Apéndice C

## Relaciones de conmutación para $h^{(4)}$

Mostramos inicialmente los conmutadores de las subálgebras abelianas separados de sus conjugados:

$$\begin{array}{ll} [L_1, L_2] = 0, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2] = 0, \\ [L_1, L_3] = 0, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_3] = 0, \\ [L_1, L_4] = L_2, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_4] = \mathfrak{L}_2, \\ [L_1, L_5] = L_3, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_5] = \mathfrak{L}_3, \\ [L_1, L_6] = L_5, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_6] = \mathfrak{L}_5, \\ [L_1, L_7] = 0, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_7] = 0, \\ [L_1, L_8] = 0, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_8] = 0, \\ [L_1, L_9] = 0, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_9] = 0, \\ [L_1, L_{10}] = 0, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{10}] = 0, \\ [L_1, L_{11}] = 0, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{11}] = 0, \\ [L_1, L_{12}] = P_2(L_4 \oplus L_6) & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{12}] = P_2(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_6), \\ [L_1, L_{13}] = 0, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{13}] = 0, \\ [L_1, L_{14}] = P_2(L_7), & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{14}] = P_2(\mathfrak{L}_7), \\ [L_1, L_{15}] = P_2(L_6 \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{15}] = P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_7), \\ [L_1, L_{16}] = P_2(L_4), & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{16}] = P_2(\mathfrak{L}_4), \\ [L_1, L_{17}] = 0, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{17}] = 0, \end{array}$$



---


$$\begin{aligned}
[L_1, L_{18}] &= P_2(L_4 \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{18}] &= P_2(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{11}), \\
[L_1, L_{19}] &= 0, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{19}] &= 0, \\
[L_1, L_{20}] &= 0, & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{20}] &= 0, \\
[L_1, L_{21}] &= P_2(L_4 \oplus L_{18}), & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{21}] &= P_2(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{18}), \\
[L_1, L_{22}] &= P_2(L_4 \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{22}] &= P_2(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_1, L_{23}] &= P_3(L_6 \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{23}] &= P_3(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{24}), \\
[L_1, L_{24}] &= P_3(L_6), & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(\mathfrak{L}_6), \\
[L_1, L_{25}] &= P_2(L_6 \oplus L_{14}), & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{25}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{14}), \\
[L_1, L_{26}] &= P_2(L_7 \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_{26}] &= P_2(\mathfrak{L}_7 \oplus \mathfrak{L}_{24}), \\
\\
[L_2, L_3] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3] &= 0, \\
[L_2, L_4] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_4] &= 0, \\
[L_2, L_5] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_5] &= 0, \\
[L_2, L_6] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_6] &= 0, \\
[L_2, L_7] &= L_4, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_7] &= \mathfrak{L}_4, \\
[L_2, L_8] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_8] &= 0, \\
[L_2, L_9] &= P_2(L_2), & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_9] &= P_2(\mathfrak{L}_2), \\
[L_2, L_{10}] &= P_2(L_1 \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{10}] &= P_2(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_2, L_{11}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{11}] &= 0, \\
[L_2, L_{12}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{12}] &= 0, \\
[L_2, L_{13}] &= P_2(L_7), & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{13}] &= P_2(\mathfrak{L}_7), \\
[L_2, L_{14}] &= P_2(L_5 \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{14}] &= P_2(\mathfrak{L}_5 \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_2, L_{15}] &= P_2(L_5 \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{15}] &= P_2(\mathfrak{L}_5 \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_2, L_{16}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{16}] &= 0, \\
[L_2, L_{17}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{17}] &= 0, \\
[L_2, L_{18}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{18}] &= 0, \\
[L_2, L_{19}] &= P_3(L_1 \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_2, L_{20}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{20}] &= 0, \\
[L_2, L_{21}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{21}] &= 0, \\
[L_2, L_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, \\
[L_2, L_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
[L_2, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{24}] &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_2, L_{25}] &= P_2(L_6 \oplus L_7), & [L_2, L_{25}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_2, L_{26}] &= P_2(L_6), & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{26}] &= P_2(\mathfrak{L}_6), \\
\\
[L_3, L_4] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_4] &= 0, \\
[L_3, L_5] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_5] &= 0, \\
[L_3, L_6] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_6] &= 0, \\
[L_3, L_7] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_7] &= 0, \\
[L_3, L_8] &= P_2(L_1 \oplus L_2), & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_8] &= P_2(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2), \\
[L_3, L_9] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_9] &= 0, \\
[L_3, L_{10}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, A_{10}] &= 0, \\
[L_3, L_{11}] &= P_2(L_2), & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{11}] &= P_2(\mathfrak{L}_2), \\
[L_3, L_{12}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{12}] &= 0, \\
[L_3, L_{13}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{13}] &= 0, \\
[L_3, L_{14}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{14}] &= 0, \\
[L_3, L_{15}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{15}] &= 0, \\
[L_3, L_{16}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{16}] &= 0, \\
[L_3, L_{17}] &= P_3(L_1), & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{17}] &= P_3(\mathfrak{L}_1), \\
[L_3, L_{18}] &= P_3(L_2 \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{18}] &= P_3(\mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_3, L_{19}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{19}] &= 0, \\
[L_3, L_{20}] &= P_3(L_1 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{20}] &= P_3(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_3, L_{21}] &= P_4(L_4), & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{21}] &= P_4(\mathfrak{L}_4), \\
[L_3, L_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, \\
[L_3, L_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
[L_3, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{24}] &= 0, \\
[L_3, L_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, \\
[L_3, L_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_{26}] &= 0, \\
\\
[L_4, L_5] &= 0, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_5] &= 0, \\
[L_4, L_6] &= 0, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_6] &= 0, \\
[L_4, L_7] &= L_5, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_7] &= L_5, \\
[L_4, L_8] &= L_{11}, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_8] &= \mathfrak{L}_{11}, \\
[L_4, L_9] &= P_2(B \oplus L_1), & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_9] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_4, L_{10}] &= P_2(B \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{10}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_4, L_{11}] &= 0, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{11}] &= 0, \\
[L_4, L_{12}] &= 0, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{12}] &= 0, \\
[L_4, L_{13}] &= L_{14}, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{13}] &= \mathfrak{L}_{14}, \\
[L_4, L_{14}] &= P_2(L_6 \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{14}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_4, L_{15}] &= P_2(L_6), & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{15}] &= P_2(\mathfrak{L}_6), \\
[L_4, L_{16}] &= 0, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{16}] &= 0, \\
[L_4, L_{17}] &= P_2(L_1 \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{17}] &= P_2(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_4, L_{18}] &= 0, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{18}] &= 0, \\
[L_4, L_{19}] &= P_3(B \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_4, L_{20}] &= P_2(L_8 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{20}] &= P_2(\mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_4, L_{21}] &= 0, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{21}] &= 0, \\
[L_4, L_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, \\
[L_4, L_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
[L_4, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{24}] &= 0, \\
[L_4, L_{25}] &= P_2(L_6 \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{25}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
[L_4, L_{26}] &= P_2(L_6 \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_4, \mathfrak{L}_{26}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{24}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_5, L_6] &= 0, & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_6] &= 0, \\
[L_5, L_7] &= 0, & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_7] &= 0, \\
[L_5, L_8] &= P_2(B \oplus L_2), & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_8] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_2), \\
[L_5, L_9] &= P_2(L_1 \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_9] &= P_2(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_5, L_{10}] &= P_2(L_7), & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{10}] &= P_2(\mathfrak{L}_7), \\
[L_5, L_{11}] &= P_2(L_2 \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{11}] &= P_2(\mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_5, L_{12}] &= 0, & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{12}] &= 0, \\
[L_5, L_{13}] &= 0, & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{13}] &= 0, \\
[L_5, L_{14}] &= 0, & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{14}] &= 0, \\
[L_5, L_{15}] &= 0, & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{15}] &= 0, \\
[L_5, L_{16}] &= 0, & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{16}] &= 0, \\
[L_5, L_{17}] &= P_3(B \oplus L_1), & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{17}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_1), \\
[L_5, L_{18}] &= P_3(L_4), & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{18}] &= P_3(\mathfrak{L}_4), \\
[L_5, L_{19}] &= P_3(L_7 \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(\mathfrak{L}_7 \oplus \mathfrak{L}_9),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_5, L_{20}] &= P_3(B \oplus L_1 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{20}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_5, L_{21}] &= P_3(L_4 \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{21}] &= P_3(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_5, L_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, \\
[L_5, L_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
[L_5, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{24}] &= 0, \\
[L_5, L_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, \\
[L_5, L_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_5, \mathfrak{L}_{26}] &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_6, L_7] &= 0, & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_7] &= 0, \\
[L_6, L_8] &= P_2(B \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_8] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_6, L_9] &= P_2(B \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_9] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[l_6, L_{10}] &= L_{14}, & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{10}] &= \mathfrak{L}_{14}, \\
[L_6, L_{11}] &= P_2(L_4), & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{11}] &= P_2(\mathfrak{L}_4), \\
[L_6, L_{12}] &= 0, & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{12}] &= 0, \\
[L_6, L_{13}] &= 0, & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{13}] &= 0, \\
[L_6, L_{14}] &= 0, & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{14}] &= 0, \\
[L_6, L_{15}] &= 0, & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{15}] &= 0, \\
[L_6, L_{16}] &= 0, & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{16}] &= 0, \\
[L_6, L_{17}] &= P_3(B \oplus L_1), & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{17}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_1), \\
[L_6, L_{18}] &= P_2(L_4 \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{18}] &= P_2(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_6, L_{19}] &= P_3(B \oplus L_9 \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_6, L_{20}] &= P_3(B \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{20}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_6, L_{21}] &= P_2(L_{16}), & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{21}] &= P_2(\mathfrak{L}_{16}), \\
[L_6, L_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, \\
[L_6, L_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
[L_6, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{24}] &= 0, \\
[L_6, L_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, \\
[L_6, L_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_6, \mathfrak{L}_{26}] &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_7, L_8] &= P_2(B \oplus L_1), & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_8] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_1), \\
[L_7, L_9] &= 0, & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_9] &= 0, \\
[L_7, L_{10}] &= 0, & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{10}] &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_7, L_{11}] &= P_2(B \oplus L_2), & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{11}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_2), \\
[L_7, L_{12}] &= P_2(L_6), & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{12}] &= P_2(\mathfrak{L}_6), \\
[L_7, L_{13}] &= 0, & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{13}] &= 0, \\
[L_7, L_{14}] &= 0, & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{14}] &= 0, \\
[L_7, L_{15}] &= 0, & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{15}] &= 0, \\
[L_7, L_{16}] &= P_2(L_4 \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{16}] &= P_2(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_7, L_{17}] &= P_2(L_1 \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{17}] &= P_2(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_7, L_{18}] &= P_3(B \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{18}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_7, L_{19}] &= 0, & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{19}] &= 0, \\
[L_7, L_{20}] &= P_2(L_9 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{20}] &= P_2(\mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_7, L_{21}] &= P_2(L_4 \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{21}] &= P_2(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_7, L_{22}] &= P_3(L_6 \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{22}] &= P_3(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_7, L_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
[L_7, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{24}] &= 0, \\
[L_7, L_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, \\
[L_7, L_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_7, \mathfrak{L}_{26}] &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_8, L_9] &= L_{17}, & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_9] &= \mathfrak{L}_{17}, \\
[L_8, L_{10}] &= P_2(B \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{10}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_8, L_{11}] &= 0, & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{11}] &= 0, \\
[L_8, L_{12}] &= P_2(B \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{12}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_8, L_{13}] &= P_2(B \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{13}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_8, L_{14}] &= P_3(B \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{14}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_8, L_{15}] &= P_3(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{15}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_8, L_{16}] &= L_{17}, & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{16}] &= L_{17}, \\
[L_8, L_{17}] &= 0, & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{17}] &= 0, \\
[L_8, L_{18}] &= P_2(L_4 \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{18}] &= P_2(\mathfrak{L}_4 \oplus L_{13}), \\
[L_8, L_{19}] &= P_2(L_9 \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{19}] &= P_2(\mathfrak{L}_9 \oplus L_{12}), \\
[L_8, L_{20}] &= 0, & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{20}] &= 0, \\
[L_8, L_{21}] &= P_2(L_{16} \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{21}] &= P_2(\mathfrak{L}_{16} \oplus L_{13}), \\
[L_8, L_{22}] &= P_2(L_{16} \oplus L_{21}), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{22}] &= P_2(\mathfrak{L}_{16} \oplus \mathfrak{L}_{21}), \\
[L_8, L_{23}] &= P_3(B \oplus L_{12} \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{23}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{24}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_8, L_{24}] &= P_2(L_6 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_8, L_{25}] &= P_3(B \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{25}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
[L_8, L_{26}] &= P_3(B \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_8, \mathfrak{L}_{14}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{24}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_9, L_{10}] &= 0, & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{10}] &= 0, \\
[L_9, L_{11}] &= P_2(L_1 \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{11}] &= P_2(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_9, L_{12}] &= P_3(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{12}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_9, L_{13}] &= 0, & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{13}] &= 0, \\
[L_9, L_{14}] &= P_2(L_1 \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{14}] &= P_2(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_9, L_{15}] &= L_{14}, & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{15}] &= \mathfrak{L}_{14}, \\
[L_9, L_{16}] &= P_3(B \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{16}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_9, L_{17}] &= 0, & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{17}] &= 0, \\
[L_9, L_{18}] &= P_3(B \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{18}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{11}), \\
[L_9, L_{19}] &= 0, & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{19}] &= 0, \\
[L_9, L_{20}] &= 0, & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{20}] &= 0, \\
[L_9, L_{21}] &= P_2(B \oplus L_{18}), & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{21}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{18}), \\
[L_9, L_{22}] &= P_4(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{22}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_9, L_{23}] &= P_3(B \oplus L_{15} \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{23}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{15} \oplus \mathfrak{L}_{24}), \\
[L_9, L_{24}] &= P_3(B \oplus L_6 \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
[L_9, L_{25}] &= P_3(B \oplus L_6 \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{25}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_9, L_{26}] &= P_2(L_6 \oplus L_{25}), & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{26}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{25}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{10}, L_{11}] &= P_3(B \oplus L_1), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{11}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_1), \\
[L_{10}, L_{12}] &= P_2(B \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{12}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
[L_{10}, L_{13}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{13}] &= 0, \\
[L_{10}, L_{14}] &= P_2(L_7 \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{14}] &= P_2(\mathfrak{L}_7 \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{10}, L_{15}] &= P_2(L_6 \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{15}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{10}, L_{16}] &= P_3(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{16}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_{10}, L_{17}] &= P_2(L_9), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{17}] &= P_2(\mathfrak{L}_9), \\
[L_{10}, L_{18}] &= P_3(B \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_{10}, L_{19}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{19}] &= 0, \\
[L_{10}, L_{20}] &= P_2(L_9 \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_2(\mathfrak{L}_9 \oplus L_{12}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{10}, L_{21}] &= P_4(B \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{10}, L_{22}] &= P_4(B \oplus L_{12} \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{10}, L_{23}] &= P_2(L_{24} \oplus L_{25}), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_2(\mathfrak{L}_{24} \oplus \mathfrak{L}_{25}), \\
[L_{10}, L_{24}] &= P_2(L_6 \oplus L_{25}), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{25}), \\
[L_{10}, L_{25}] &= P_2(L_{13} \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_2(\mathfrak{L}_{13} \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
[L_{10}, L_{26}] &= P_2(L_{13} \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_{10}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_2(\mathfrak{L}_{13} \oplus \mathfrak{L}_{24}), \\
\\
[L_{11}, L_{12}] &= P_2(L_4 \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{12}] &= P_2(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{11}, L_{13}] &= P_3(B \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{13}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_{11}, L_{14}] &= P_3(B \oplus L_5), & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{14}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_5), \\
[L_{11}, L_{15}] &= P_3(B \oplus L_4 \oplus L_5), & [L_{11}, \mathfrak{L}_{15}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_5), \\
[L_{11}, L_{16}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{16}] &= 0, \\
[L_{11}, L_{17}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{17}] &= 0, \\
[L_{11}, L_{18}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{18}] &= 0, \\
[L_{11}, L_{19}] &= P_3(B \oplus L_1 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{11}, L_{20}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{20}] &= 0, \\
[L_{11}, L_{21}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{21}] &= 0, \\
[L_{11}, L_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, \\
[L_{11}, L_{23}] &= P_3(L_6 \oplus L_{16} \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_3(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{16} \oplus \mathfrak{L}_{24}), \\
[L_{11}, L_{24}] &= P_3(L_6 \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{11}, L_{25}] &= P_4(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_{11}, L_{26}] &= P_3(L_6 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{11}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_3(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
\\
[L_{12}, L_{13}] &= L_{25}, & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{13}] &= \mathfrak{L}_{25}, \\
[L_{12}, L_{14}] &= P_2(L_6 \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{14}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
[L_{12}, L_{15}] &= L_{24}, & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{15}] &= \mathfrak{L}_{24}, \\
[L_{12}, L_{16}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{16}] &= 0, \\
[L_{12}, L_{17}] &= P_4(B \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{17}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_{12}, L_{18}] &= P_2(L_{16}), & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_2(\mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{12}, L_{19}] &= P_5(B \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_{12}, L_{20}] &= P_5(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_{12}, L_{21}] &= L_{22}, & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{21}] &= \mathfrak{L}_{22},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{12}, L_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, \\
[L_{12}, L_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
[L_{12}, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{24}] &= 0, \\
[L_{12}, L_{25}] &= L_{26}, & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{25}] &= \mathfrak{L}_{26}, \\
[L_{12}, L_{26}] &= L_{23}, & [\mathfrak{L}_{12}, \mathfrak{L}_{26}] &= \mathfrak{L}_{23},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{13}, L_{14}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{14}] &= 0, \\
[L_{13}, L_{15}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{15}] &= 0, \\
[L_{13}, L_{16}] &= P_2(B \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{16}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
[L_{13}, L_{17}] &= P_2(L_9 \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{17}] &= P_2(\mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_{13}, L_{18}] &= P_4(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_{13}, L_{19}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{19}] &= 0, \\
[L_{13}, L_{20}] &= P_2(B \oplus L_{19}), & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{19}), \\
[L_{13}, L_{21}] &= P_4(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{13}, L_{22}] &= P_4(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{13}, L_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
[L_{13}, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{24}] &= 0, \\
[L_{13}, L_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, \\
[L_{13}, L_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, \mathfrak{L}_{26}] &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{14}, L_{15}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{14}, \mathfrak{L}_{15}] &= 0, \\
[L_{14}, L_{16}] &= P_3(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_{14}, \mathfrak{L}_{16}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_{14}, L_{17}] &= P_3(B \oplus L_7 \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_{14}, \mathfrak{L}_{17}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_7 \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_{14}, L_{18}] &= P_3(B \oplus L_4 \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_{14}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_{14}, L_{19}] &= P_3(L_9 \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{14}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(\mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{14}, L_{20}] &= P_4(B \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_{14}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_{14}, L_{21}] &= P_4(B \oplus L_4 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{14}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{14}, L_{22}] &= P_4(B \oplus L_4 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{14}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{14}, L_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{14}, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
[L_{14}, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{14}, \mathfrak{L}_{24}] &= 0, \\
[L_{14}, L_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{14}, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, \\
[L_{14}, L_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{14}, \mathfrak{L}_{26}] &= 0,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
[L_{15}, L_{16}] &= P_2(L_6 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{15}, \mathfrak{L}_{16}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{15}, L_{17}] &= P_4(B \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_{15}, \mathfrak{L}_{17}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_{15}, L_{18}] &= P_4(B \oplus L_4 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{15}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{15}, L_{19}] &= P_4(B \oplus L_9 \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{15}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{15}, L_{20}] &= P_5(B \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_{15}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_{15}, L_{21}] &= P_3(B \oplus L_{12} \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{15}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{15}, L_{22}] &= P_3(L_{12} \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{15}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_3(\mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{15}, L_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{15}, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
[L_{15}, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{15}, \mathfrak{L}_{24}] &= 0, \\
[L_{15}, L_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{15}, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, \\
[L_{15}, L_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{15}, \mathfrak{L}_{26}] &= 0, \\
\\
[L_{16}, L_{17}] &= P_3(B \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_{16}, \mathfrak{L}_{17}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{11}), \\
[L_{16}, L_{18}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{16}, \mathfrak{L}_{18}] &= 0, \\
[L_{16}, L_{19}] &= P_5(B \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_{16}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_{16}, L_{20}] &= P_4(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_{16}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_{16}, L_{21}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{16}, \mathfrak{L}_{21}] &= 0, \\
[L_{16}, L_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{16}, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, \\
[L_{16}, L_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{16}, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
[L_{16}, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{16}, \mathfrak{L}_{24}] &= 0, \\
[L_{16}, L_{25}] &= P_2(B \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_{16}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{24}), \\
[L_{16}, L_{26}] &= P_2(L_{12} \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_{16}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_2(\mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{24}), \\
\\
[L_{17}, L_{18}] &= P_3(B \oplus L_8 \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_{17}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{11}), \\
[L_{17}, L_{19}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{17}, \mathfrak{L}_{19}] &= 0, \\
[L_{17}, L_{20}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{17}, \mathfrak{L}_{20}] &= 0, \\
[L_{17}, L_{21}] &= P_4(B \oplus L_4 \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{17}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{17}, L_{22}] &= P_4(B \oplus L_4 \oplus L_{21}), & [\mathfrak{L}_{17}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{21}), \\
[L_{17}, L_{23}] &= P_5(B \oplus L_6 \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_{17}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{24}), \\
[L_{17}, L_{24}] &= P_5(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_{17}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_{17}, L_{25}] &= P_4(B \oplus L_{14}), & [\mathfrak{L}_{17}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{14}), \\
[L_{17}, L_{26}] &= P_5(B \oplus L_6 \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_{17}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{15}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{18}, L_{19}] &= P_5(B \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_{18}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_{18}, L_{20}] &= P_4(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_{18}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_{18}, L_{21}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{18}, \mathfrak{L}_{21}] &= 0, \\
[L_{18}, L_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{18}, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, \\
[L_{18}, L_{23}] &= P_3(L_{12} \oplus L_{16} \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_{18}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_3(\mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{16} \oplus \mathfrak{L}_{24}), \\
[L_{18}, L_{24}] &= P_3(L_4 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{18}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{18}, L_{25}] &= P_4(B \oplus L_6 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{18}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{18}, L_{26}] &= P_4(B \oplus L_6 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{18}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
\\
[L_{19}, L_{20}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{19}, \mathfrak{L}_{20}] &= 0, \\
[L_{19}, L_{21}] &= P_7(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_{19}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_7(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_{19}, L_{22}] &= P_8(B \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{19}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_8(B \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{19}, L_{23}] &= P_6(B \oplus L_{13} \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_{19}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_6(B \oplus \mathfrak{L}_{13} \oplus \mathfrak{L}_{24}), \\
[L_{19}, L_{24}] &= P_6(B \oplus L_6 \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{19}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_6(B \oplus \mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{19}, L_{25}] &= P_5(B \oplus L_{10} \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{19}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{10} \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{19}, L_{26}] &= P_6(B \oplus L_{13} \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_{19}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_6(B \oplus \mathfrak{L}_{13} \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
\\
[L_{20}, L_{21}] &= P_5(B \oplus L_8 \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{20}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{20}, L_{22}] &= P_6(B \oplus L_{13} \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{19}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_6(B \oplus \mathfrak{L}_{13} \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{20}, L_{23}] &= P_7(B \oplus L_{24}), & [\mathfrak{L}_{20}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_7(B \oplus \mathfrak{L}_{24}), \\
[L_{20}, L_{24}] &= P_7(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_{20}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_7(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_{20}, L_{25}] &= P_6(B \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_{20}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_6(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_{20}, L_{26}] &= P_7(B \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_{20}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_7(B \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
\\
[L_{21}, L_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{21}, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, \\
[L_{21}, L_{23}] &= P_4(L_{12}), & [\mathfrak{L}_{21}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_4(\mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{21}, L_{24}] &= P_3(L_{12} \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{21}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(\mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{21}, L_{25}] &= P_4(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{21}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{21}, L_{26}] &= P_4(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{21}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
\\
[L_{22}, L_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{22}, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
[L_{22}, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{22}, \mathfrak{L}_{24}] &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{22}, L_{25}] &= P_4(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{22}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{22}, L_{26}] &= P_4(L_{12}), & [\mathfrak{L}_{22}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_4(\mathfrak{L}_{12}), \\
\\
[L_{23}, L_{24}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{23}, \mathfrak{L}_{24}] &= 0, \\
[L_{23}, L_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{23}, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, \\
[L_{23}, L_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{23}, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, \\
\\
[L_{24}, L_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{24}, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, \\
[L_{24}, L_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{24}, \mathfrak{L}_{26}] &= 0, \\
\\
[L_{25}, L_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{25}, \mathfrak{L}_{26}] &= 0,
\end{aligned}$$

Es de inmediato notorio que los conmutadores son simétricos ante conjugación. Esta propiedad es también satisfecha por el siguiente conjunto de conmutadores:

$$\begin{aligned}
[L_1, \mathfrak{L}_1] &= P_5(B), & [\mathfrak{L}_1, L_1] &= P_5(B), \\
[L_1, \mathfrak{L}_2] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_4), & [\mathfrak{L}_1, L_2] &= P_5(B \oplus L_4), \\
[L_1, \mathfrak{L}_3] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_5), & [\mathfrak{L}_1, L_3] &= P_5(B \oplus L_5), \\
[L_1, \mathfrak{L}_4] &= P_3(B \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_1, L_4] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_1, \mathfrak{L}_5] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_6), & [\mathfrak{L}_1, L_5] &= P_5(B \oplus L_6), \\
[L_1, \mathfrak{L}_6] &= P_2(B \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_1, L_6] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_1, \mathfrak{L}_7] &= P_4(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_1, L_7] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_1, \mathfrak{L}_8] &= P_2(B \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_1, L_8] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_1, \mathfrak{L}_9] &= P_3(B \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_1, L_9] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_1, \mathfrak{L}_{10}] &= P_2(B \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_1, L_{10}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{11}), \\
[L_1, \mathfrak{L}_{11}] &= P_4(B \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_1, L_{11}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_1, \mathfrak{L}_{12}] &= 0, & [\mathfrak{L}_1, L_{12}] &= 0, \\
[L_1, \mathfrak{L}_{13}] &= 0, & [\mathfrak{L}_1, L_{13}] &= 0, \\
[L_1, \mathfrak{L}_{14}] &= P_4(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_1, L_{14}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_1, \mathfrak{L}_{15}] &= P_2(L_8 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_1, L_{15}] &= P_2(\mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{17}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_1, \mathfrak{L}_{16}] &= P_2(L_9), & [\mathfrak{L}_1, L_{16}] &= P_2(\mathfrak{L}_9), \\
[L_1, \mathfrak{L}_{17}] &= P_4(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_1, L_{17}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_1, \mathfrak{L}_{18}] &= P_3(B \oplus L_9 \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_1, L_{18}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_1, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(B \oplus L_4 \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_1, L_{19}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_1, \mathfrak{L}_{20}] &= P_3(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_1, L_{20}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_1, \mathfrak{L}_{21}] &= 0, & [\mathfrak{L}_1, L_{21}] &= 0, \\
[L_1, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_1, L_{22}] &= 0, \\
[L_1, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_1, L_{23}] &= 0, \\
[L_1, \mathfrak{L}_{24}] &= P_2(L_{17} \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_1, L_{24}] &= P_2(\mathfrak{L}_{17} \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_1, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_1, L_{25}] &= 0, \\
[L_1, \mathfrak{L}_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_1, L_{26}] &= 0, \\
\\
[L_2, \mathfrak{L}_2] &= P_8(B), & [\mathfrak{L}_2, L_2] &= P_8(B), \\
[L_2, \mathfrak{L}_3] &= P_8(B \oplus \mathfrak{L}_7), & [\mathfrak{L}_2, L_3] &= P_8(B \oplus L_7), \\
[L_2, \mathfrak{L}_4] &= P_4(B \oplus L_1), & [\mathfrak{L}_2, L_4] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_1), \\
[L_2, \mathfrak{L}_5] &= P_7(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_2, L_5] &= P_7(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_2, \mathfrak{L}_6] &= P_3(B \oplus L_1 \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_2, L_6] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_2, \mathfrak{L}_7] &= P_4(B \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_2, L_7] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{11}), \\
[L_2, \mathfrak{L}_8] &= P_2(B \oplus L_5), & [\mathfrak{L}_2, L_8] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_5), \\
[L_2, \mathfrak{L}_9] &= P_3(B \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_2, L_9] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{10}] &= P_2(L_4 \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_2, L_{10}] &= P_2(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{11}), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{11}] &= P_5(B \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_{11}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{12}] &= P_2(L_1 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_2, L_{12}] &= P_2(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{13}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, L_{13}] &= 0, \\
[L_2, \mathfrak{L}_{14}] &= P_4(B \oplus L_8 \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_2, L_{14}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{14}), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{15}] &= P_3(L_1 \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_2, l_{15}] &= P_3(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{16}] &= P_3(B \oplus L_1 \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_2, L_{16}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{17}] &= P_4(B \oplus L_4 \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_2, l_{17}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{18}] &= P_4(B \oplus L_1 \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_2, L_{18}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(L_4 \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_2, L_{19}] &= P_3(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{20}] &= P_3(L_4 \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_2, L_{20}] &= P_3(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{21}] &= P_3(L_7 \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_2, L_{21}] &= P_3(\mathfrak{L}_7 \oplus \mathfrak{L}_9),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_2, \mathfrak{L}_{22}] &= P_4(L_9), & [\mathfrak{L}_2, L_{22}] &= P_4(\mathfrak{L}_9), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, L_{23}] &= 0, \\
[L_2, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(L_8 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_2, L_{24}] &= P_3(\mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_2, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, L_{25}] &= 0, \\
[L_2, \mathfrak{L}_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_2, L_{26}] &= 0, \\
\\
[L_3, \mathfrak{L}_3] &= P_{12}(B), & [\mathfrak{L}_3, L_3] &= P_{12}(B), \\
[L_3, \mathfrak{L}_4] &= P_4(B \oplus L_1 \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_3, l_4] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_3, \mathfrak{L}_5] &= P_8(B \oplus L_1), & [\mathfrak{L}_3, L_5] &= P_8(B \oplus \mathfrak{L}_1), \\
[L_3, \mathfrak{L}_6] &= P_4(B \oplus L_1), & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_6] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_1), \\
[L_3, \mathfrak{L}_7] &= P_5(B \oplus L_2), & [\mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_7] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_2), \\
[L_3, \mathfrak{L}_8] &= P_2(L_5 \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_3, L_8] &= P_2(\mathfrak{L}_5 \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_3, \mathfrak{L}_9] &= P_3(B \oplus L_2 \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_3, L_9] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{10}] &= P_3(B \oplus L_2 \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_3, L_{10}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{11}] &= P_5(B \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_3, L_{11}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{12}] &= P_3(L_1 \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_3, L_{12}] &= P_3(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{13}] &= P_2(L_2 \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_3, L_{13}] &= P_2(\mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_{11}), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{14}] &= P_5(B \oplus L_1 \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_3, L_{14}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_{11}), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{15}] &= P_4(B \oplus L_1 \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_3, L_{15}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_{11}), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{16}] &= P_3(L_1 \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_3, L_{16}] &= P_3(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{17}] &= P_4(B \oplus L_5 \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_3, L_{17}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_5 \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{18}] &= P_4(B \oplus L_1 \oplus L_7 \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_3, L_{18}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_7 \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(L_4 \oplus L_5 \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_3, L_{19}] &= P_3(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_5 \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{20}] &= P_3(L_5 \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_3, L_{20}] &= P_3(\mathfrak{L}_5 \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{21}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, L_{21}] &= 0, \\
[L_3, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_3, L_{22}] &= 0, \\
[L_3, \mathfrak{L}_{23}] &= P_4(L_{17}), & [\mathfrak{L}_3, L_{23}] &= P_4(\mathfrak{L}_{17}), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{24}] &= P_4(B \oplus L_1 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_3, L_{24}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{25}] &= P_3(L_2 \oplus L_8 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_3, L_{25}] &= P_3(\mathfrak{L}_2 \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_3, \mathfrak{L}_{26}] &= P_4(L_1 \oplus L_8 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_3, L_{26}] &= P_4(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
\\
[L_4, \mathfrak{L}_4] &= P_4(B), & [\mathfrak{L}_4, L_4] &= P_4(B),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_4, \mathfrak{L}_5] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_7), & [\mathfrak{L}_4, L_5] &= P_4(B \oplus L_7), \\
[L_4, \mathfrak{L}_6] &= P_3(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_4, L_6] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_4, \mathfrak{L}_7] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), & [\mathfrak{L}_4, L_7] &= P_3(B \oplus L_{10}), \\
[L_4, \mathfrak{L}_8] &= P_2(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_4, L_8] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_4, \mathfrak{L}_9] &= P_2(B \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_4, L_9] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{10}] &= L_{18}, & [\mathfrak{L}_4, L_{10}] &= \mathfrak{L}_{18}, \\
[L_4, \mathfrak{L}_{11}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8), & [\mathfrak{L}_4, L_{11}] &= P_4(B \oplus L_8), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{12}] &= P_2(B \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_4, L_{12}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{13}] &= 0, & [\mathfrak{L}_4, L_{13}] &= 0, \\
[L_4, \mathfrak{L}_{14}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_4, L_{14}] &= P_4(B \oplus L_{13}), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{15}] &= P_3(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_4, L_{15}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{16}] &= P_3(B \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_4, L_{16}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{17}] &= P_3(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_4, L_{17}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{18}] &= P_4(B \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_4, L_{18}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{19}] &= P_2(L_{16}), & [\mathfrak{L}_4, L_{19}] &= P_2(\mathfrak{L}_{16}), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{20}] &= P_2(L_6 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_4, L_{20}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{21}] &= P_3(B \oplus L_9 \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_4, L_{21}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{22}] &= P_3(B \oplus L_9 \oplus L_{19}), & [\mathfrak{L}_4, L_{22}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{19}), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{23}] &= P_3(L_8 \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_4, L_{23}] &= P_3(\mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(B \oplus L_8 \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_4, L_{24}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{25}] &= P_3(L_8), & [\mathfrak{L}_4, L_{25}] &= P_3(\mathfrak{L}_8), \\
[L_4, \mathfrak{L}_{26}] &= P_3(L_8 \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_4 \oplus L_{26}] &= P_3(\mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
\\
[L_5, \mathfrak{L}_5] &= P_8(B), & [\mathfrak{L}_5, L_5] &= P_8(B), \\
[L_5, \mathfrak{L}_6] &= P_4(B \oplus L_1), & [\mathfrak{L}_5, L_6] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_1), \\
[L_5, \mathfrak{L}_7] &= P_5(B \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_5, L_7] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_5, \mathfrak{L}_8] &= P_2(L_6 \oplus L_7), & [\mathfrak{L}_5, L_8] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_7), \\
[L_5, \mathfrak{L}_9] &= P_3(B \oplus L_4 \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_5, L_9] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{10}] &= P_3(B \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_5, L_{10}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{11}] &= P_4(B \oplus L_{14}), & [\mathfrak{L}_5 \oplus \mathfrak{L}_{11}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{14}), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{12}] &= P_3(B \oplus L_1 \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_5, L_{12}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{13}] &= P_2(L_4 \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_5, L_{13}] &= P_2(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{11}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_5, \mathfrak{L}_{14}] &= P_5(B \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_5, L_{14}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{11}), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{15}] &= P_4(B \oplus L_4 \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_5, L_{15}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{16}] &= P_3(B \oplus L_4 \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_5, L_{16}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{17}] &= P_4(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_5, L_{17}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{18}] &= P_4(B \oplus L_1 \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_5, L_{18}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(L_4 \oplus L_6 \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_5, L_{19}] &= P_3(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{20}] &= P_3(L_6), & [\mathfrak{L}_5, L_{20}] &= P_3(\mathfrak{L}_6), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{21}] &= P_3(L_1 \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_5, L_{21}] &= P_3(\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{22}] &= P_3(L_7 \oplus L_9 \oplus L_{19}), & [\mathfrak{L}_5, L_{22}] &= P_3(\mathfrak{L}_7 \oplus \mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{19}), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{23}] &= P_4(B \oplus L_{17} \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_5, L_{23}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{17} \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{24}] &= P_4(B \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_5, L_{24}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{25}] &= P_3(B \oplus L_{11} \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_5, L_{25}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{11} \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_5, \mathfrak{L}_{26}] &= P_4(B \oplus L_8 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_5, L_{26}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{17}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_6, \mathfrak{L}_6] &= P_4(B), & [\mathfrak{L}_6, L_6] &= P_4(B), \\
[L_6, \mathfrak{L}_7] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9), & [\mathfrak{L}_6, L_7] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_6, \mathfrak{L}_8] &= L_{15}, & [\mathfrak{L}_6, L_8] &= \mathfrak{L}_{15}, \\
[L_6, \mathfrak{L}_9] &= P_2(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_6, L_9] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{10}] &= P_2(B \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_6, L_{10}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{11}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_8), & [\mathfrak{L}_6, L_{11}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{12}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9), & [\mathfrak{L}_6, L_{12}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{13}] &= L_{18}, & [\mathfrak{L}_6, L_{13}] &= \mathfrak{L}_{18}, \\
[L_6, \mathfrak{L}_{14}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), & [\mathfrak{L}_6, L_{14}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{15}] &= P_4(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_6, L_{15}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{16}] &= P_3(B \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_6, L_{16}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{17}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{20}), & [\mathfrak{L}_6, L_{17}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{18}] &= P_4(B \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_6, L_{18}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{19}] &= P_2(L_{12} \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_6, L_{19}] &= P_2(\mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{20}] &= L_{24}, & [\mathfrak{L}_6, L_{20}] &= \mathfrak{L}_{24}, \\
[L_6, \mathfrak{L}_{21}] &= P_3(B \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_6, L_{21}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{22}] &= P_3(B \oplus L_{10} \oplus L_{19}), & [\mathfrak{L}_6, L_{22}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{10} \oplus \mathfrak{L}_{19}), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{23}] &= P_4(B \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_6, L_{23}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{20}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_6, \mathfrak{L}_{24}] &= P_4(B \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_6, L_{24}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{25}] &= P_4(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_6, L_{25}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_6, \mathfrak{L}_{26}] &= P_4(B \oplus L_8 \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_6, L_{26}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{20}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_7, \mathfrak{L}_7] &= P_5(B), & [\mathfrak{L}_7, L_7] &= P_5(B), \\
[L_7, \mathfrak{L}_8] &= L_{14}, & [\mathfrak{L}_7, L_8] &= \mathfrak{L}_{14}, \\
[L_7, \mathfrak{L}_9] &= P_3(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_7, L_9] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{10}] &= P_3(B \oplus L_4), & [\mathfrak{L}_7, L_{10}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{11}] &= P_4(B \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_7, L_{11}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{12}] &= P_2(L_9), & [\mathfrak{L}_7, L_{12}] &= P_2(\mathfrak{L}_9), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{13}] &= P_2(B \oplus L_{11}), & [\mathfrak{L}_7, L_{13}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{11}), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{14}] &= P_5(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_7, L_{14}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{15}] &= P_3(B \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_7, L_{15}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{16}] &= P_2(L_9 \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_7, L_{16}] &= P_2(\mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{17}] &= P_3(B \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_7, L_{17}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{18}] &= P_3(B \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_7, L_{18}] &= P_3(B \oplus L_{10}), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(B \oplus L_4 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_7, L_{19}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{20}] &= P_2(L_6 \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_7, L_{20}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{21}] &= 0, & [\mathfrak{L}_7, L_{21}] &= 0, \\
[L_7, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_7, L_{22}] &= 0, \\
[L_7, \mathfrak{L}_{23}] &= P_3(L_{12} \oplus L_{17} \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_7, L_{23}] &= P_3(\mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{17} \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(B \oplus L_9 \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_7, L_{24}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{25}] &= P_3(B \oplus L_8 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_7, L_{25}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_7, \mathfrak{L}_{26}] &= P_3(B \oplus L_{17} \oplus L_{21}), & [\mathfrak{L}_7, L_{26}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{17} \oplus \mathfrak{L}_{21}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_8, \mathfrak{L}_8] &= P_3(B), & [\mathfrak{L}_8, L_8] &= P_3(B), \\
[L_8, \mathfrak{L}_9] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), & [\mathfrak{L}_8, L_9] &= P_2(B \oplus L_{10}), \\
[L_8, \mathfrak{L}_{10}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_8, L_{10}] &= P_2(B \oplus L_{13}), \\
[L_8, \mathfrak{L}_{11}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_4), & [\mathfrak{L}_8, L_{11}] &= P_3(B \oplus L_4), \\
[L_8, \mathfrak{L}_{12}] &= L_{20}, & [\mathfrak{L}_8, L_{12}] &= \mathfrak{L}_{20}, \\
[L_8, \mathfrak{L}_{13}] &= 0, & [\mathfrak{L}_8, L_{13}] &= 0, \\
[L_8, \mathfrak{L}_{14}] &= P_2(\mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_8, L_{14}] &= P_2(L_6 \oplus L_{13}),
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
[L_8, \mathfrak{L}_{15}] &= \mathfrak{L}_{25}, & [\mathfrak{L}_8, L_{15}] &= L_{25}, \\
[L_8, \mathfrak{L}_{16}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_8, L_{16}] &= P_2(B \oplus L_{12}), \\
[L_8, \mathfrak{L}_{17}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9), & [\mathfrak{L}_8, L_{17}] &= P_3(B \oplus L_9), \\
[L_8, \mathfrak{L}_{18}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{16}), & [\mathfrak{L}_8, L_{18}] &= P_3(B \oplus L_{16}), \\
[L_8, \mathfrak{L}_{19}] &= P_2(B \oplus L_{21}), & [\mathfrak{L}_8, L_{19}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{21}), \\
[L_8, \mathfrak{L}_{20}] &= P_3(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_8, L_{20}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_8, \mathfrak{L}_{21}] &= P_2(B \oplus L_{19}), & [\mathfrak{L}_8, L_{21}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{19}), \\
[L_8, \mathfrak{L}_{22}] &= P_2(L_{19} \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_8, L_{22}] &= P_2(\mathfrak{L}_{19} \oplus L_{12}), \\
[L_8, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_8, L_{23}] &= 0, \\
[L_8, \mathfrak{L}_{24}] &= \mathfrak{L}_{26}, & [\mathfrak{L}_8, L_{24}] &= L_{26}, \\
[L_8, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_8, L_{25}] &= 0, \\
[L_8, \mathfrak{L}_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_8, L_{26}] &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_9, \mathfrak{L}_9] &= P_4(B), & [\mathfrak{L}_9, L_9] &= P_4(B), \\
[L_9, \mathfrak{L}_{10}] &= P_3(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_9, L_{10}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_9, \mathfrak{L}_{11}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{18}), & [\mathfrak{L}_9, L_{11}] &= P_2(B \oplus L_{18}), \\
[L_9, \mathfrak{L}_{12}] &= 0, & [\mathfrak{L}_9, L_{12}] &= 0, \\
[L_9, \mathfrak{L}_{13}] &= P_2(L_8), & [\mathfrak{L}_9, L_{13}] &= P_2(\mathfrak{L}_8), \\
[L_9, \mathfrak{L}_{14}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{15}), & [\mathfrak{L}_9, L_{14}] &= P_3(B \oplus L_{15}), \\
[L_9, \mathfrak{L}_{15}] &= P_2(B \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_9, L_{15}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_9, \mathfrak{L}_{16}] &= L_{19}, & [\mathfrak{L}_9, \mathfrak{L}_{16}] &= \mathfrak{L}_{19}, \\
[L_9, \mathfrak{L}_{17}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8), & [\mathfrak{L}_9, L_{17}] &= P_4(B \oplus L_8), \\
[L_9, \mathfrak{L}_{18}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{21}), & [\mathfrak{L}_9, L_{18}] &= P_2(B \oplus L_{21}), \\
[L_9, \mathfrak{L}_{19}] &= P_4(B \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_9, L_{19}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_9, \mathfrak{L}_{20}] &= P_3(B \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_9, L_{20}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
[L_9, \mathfrak{L}_{21}] &= 0, & [\mathfrak{L}_9, L_{21}] &= 0, \\
[L_9, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_9, L_{22}] &= 0, \\
[L_9, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_9, L_{23}] &= 0, \\
[L_9, \mathfrak{L}_{24}] &= P_2(L_{20} \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_9, L_{24}] &= P_2(\mathfrak{L}_{20} \oplus L_{12}), \\
[L_9, \mathfrak{L}_{25}] &= P_2(L_8 \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_9, L_{25}] &= P_2(\mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_9, \mathfrak{L}_{26}] &= P_2(L_{20}), & [\mathfrak{L}_9, L_{26}] &= P_2(\mathfrak{L}_{20}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{10}, \mathfrak{L}_{10}] &= P_4(B), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{10}] &= P_4(B), \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{11}] &= P_2(L_{13} \oplus \mathfrak{L}_4), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{10}] &= P_2(\mathfrak{L}_{13} \oplus L_4), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{12}] &= L_{19}, & [\mathfrak{L}_{11}, L_{12}] &= \mathfrak{L}_{19}, \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{13}] &= P_3(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{13}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{14}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_6), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{14}] &= P_4(B \oplus L_6), \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{15}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{15}] &= P_3(B \oplus L_{12}), \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{16}] &= \mathfrak{L}_{21}, & [\mathfrak{L}_{10}, L_{16}] &= L_{21}, \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{17}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_8), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{17}] &= P_3(B \oplus L_8), \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_2(L_{13} \oplus \mathfrak{L}_{16}), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{18}] &= P_2(\mathfrak{L}_{13} \oplus L_{16}), \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_4(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{19}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_2(B \oplus L_{25}), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{20}] &= P_2(B \oplus \mathfrak{L}_{25}), \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{21}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{10}, L_{21}] &= 0, \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{10}, L_{22}] &= 0, \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_3(L_{12} \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{23}] &= P_3(\mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{24}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_3(B \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{25}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_{10}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_4(B \oplus L_{12} \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_{10}, L_{26}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
\\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{11}] &= P_6(B), & [\mathfrak{L}_{11}, L_{11}] &= P_6(B), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{12}] &= P_2(L_8 \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_{11}, L_{12}] &= P_2(\mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{13}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{11}, L_{13}] &= 0, \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{14}] &= P_4(B \oplus L_8 \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{11}, L_{14}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{15}] &= P_3(L_8), & [\mathfrak{L}_{11}, L_{15}] &= P_3(\mathfrak{L}_8), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{16}] &= P_3(B \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_{11}, L_{16}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{17}] &= P_4(B \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{11}, L_{17}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_5(B \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_{11}, L_{18}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_2(L_4 \oplus L_{21}), & [\mathfrak{L}_{11}, L_{19}] &= P_2(\mathfrak{L}_4 \oplus \mathfrak{L}_{21}), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_3(B \oplus L_6 \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{11}, L_{20}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_4(B \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_{11}, L_{21}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_3(B \oplus L_7 \oplus L_{19}), & [\mathfrak{L}_{11}, L_{22}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_7 \oplus \mathfrak{L}_{19}), \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{11}, L_{23}] &= 0, \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(L_8 \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_{11}, L_{24}] &= P_3(\mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{20}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{11}, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{11}, L_{25}] &= 0, \\
[L_{11}, \mathfrak{L}_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{11}, L_{26}] &= 0, \\
\\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{12}] &= P_5(B), & [\mathfrak{L}_{12}, L_{12}] &= P_5(B), \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{13}] &= L_{21}, & [\mathfrak{L}_{12}, L_{13}] &= \mathfrak{L}_{21}, \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{14}] &= P_3(B \oplus L_9 \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_{12}, L_{14}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{15}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), & [\mathfrak{L}_{12}, L_{15}] &= P_4(B \oplus L_{10}), \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{16}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8), & [\mathfrak{L}_{12}, L_{16}] &= P_4(B \oplus L_8), \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{17}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{12}, L_{17}] &= 0, \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8), & [\mathfrak{L}_{12}, L_{18}] &= P_4(B \oplus L_8), \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{19}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{12}, L_{19}] &= 0, \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{20}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{12}, L_{20}] &= 0, \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_5(B \oplus L_{18}), & \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_5(B \oplus L_{21}), & [\mathfrak{L}_{12}, L_{22}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{22}), \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_5(B \oplus L_{26}), & [\mathfrak{L}_{12}, L_{23}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{26}), \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_5(B \oplus L_{15}), & [\mathfrak{L}_{12}, L_{24}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{15}), \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_5(B \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{12}, L_{25}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{12}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_5(B \oplus L_{25}), & [\mathfrak{L}_{12}, L_{26}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{25}), \\
\\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{13}] &= P_4(B), & [\mathfrak{L}_{13}, L_{13}] &= P_4(B), \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{14}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_4), & [\mathfrak{L}_{13}, L_{14}] &= P_4(B \oplus L_4), \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{15}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{17}), & [\mathfrak{L}_{13}, L_{15}] &= P_3(B \oplus L_{17}), \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{16}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, L_{16}] &= 0, \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{17}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, L_{17}] &= 0, \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{18}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, L_{18}] &= 0, \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{20}), & [\mathfrak{L}_{13}, L_{19}] &= P_3(B \oplus L_{20}), \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{20}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, L_{20}] &= 0, \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{21}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, L_{21}] &= 0, \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{13}, L_{22}] &= 0, \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_{13}, L_{23}] &= P_4(B \oplus L_{12}), \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{16}), & [\mathfrak{L}_{13}, L_{24}] &= P_3(B \oplus L_{12} \oplus L_{16}), \\
[L_{13}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_{13}, L_{25}] &= P_4(B \oplus L_{12}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{13}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_{13}, L_{26}] &= P_4(B \oplus L_{12}), \\
\\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{14}] &= P_4(B), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{14}] &= P_4(B), \\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{15}] &= P_5(B \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{15}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{16}] &= P_3(B \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{16}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{17}] &= P_3(B \oplus L_{25}), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{17}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{25}), \\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_4(B \oplus L_{10} \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{18}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{10} \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_4(B \oplus L_6 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{19}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_6 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_2(L_{15}), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{20}] &= P_2(\mathfrak{L}_{15}), \\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_2(L_{10}), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{21}] &= P_2(\mathfrak{L}_{10}), \\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_3(L_9 \oplus L_{13} \oplus L_{19}), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{22}] &= P_3(\mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{13} \oplus \mathfrak{L}_{19}), \\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_5(B \oplus L_9 \oplus L_{12} \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{23}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_5(B \oplus L_9 \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{24}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_5(B \oplus L_{17}), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{25}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{17}), \\
[L_{14}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_5(B \oplus L_9 \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_{14}, L_{26}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
\\
[L_{15}, \mathfrak{L}_{15}] &= P_6(B), & [\mathfrak{L}_{15}, L_{15}] &= P_6(B), \\
[L_{15}, \mathfrak{L}_{16}] &= P_4(B \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{15}, L_{16}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{15}, \mathfrak{L}_{17}] &= P_2(\mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{20}), & [\mathfrak{L}_{15}, L_{17}] &= P_2(L_8 \oplus L_{20}), \\
[L_{15}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_{15}, L_{18}] &= P_4(B \oplus L_8 \oplus L_{13}), \\
[L_{15}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_3(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{15}, L_{19}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{15}, \mathfrak{L}_{20}] &= L_{26}, & [\mathfrak{L}_{15}, L_{20}] &= \mathfrak{L}_{26}, \\
[L_{15}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_4(B \oplus L_{10} \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{15}, L_{21}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{10} \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{15}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_4(B \oplus L_{13} \oplus L_{19}), & [\mathfrak{L}_{15}, L_{22}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{13}), \\
[L_{15}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_6(B \oplus L_{12} \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_{15}, L_{23}] &= P_6(B \oplus \mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
[L_{15}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_6(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_{15}, L_{24}] &= P_6(B \oplus L_{12}), \\
[L_{15}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_6(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_{15}, L_{25}] &= P_6(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\
[L_{15}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_6(B \oplus L_{20}), & [\mathfrak{L}_{15}, L_{26}] &= P_6(B \oplus \mathfrak{L}_{20}), \\
\\
[L_{16}, \mathfrak{L}_{16}] &= P_5(B), & [\mathfrak{L}_{16}, L_{16}] &= P_5(B), \\
[L_{16}, \mathfrak{L}_{17}] &= P_2(L_{12} \oplus \mathfrak{L}_9), & [L_{16}, L_{17}] &= P_2(\mathfrak{L}_{12} \oplus L_9), \\
[L_{16}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_8), & [\mathfrak{L}_{16}, L_{18}] &= P_5(B \oplus L_8),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{16}, \mathfrak{L}_{19}] &= L_{22}, & [\mathfrak{L}_{16}, L_{19}] &= \mathfrak{L}_{22}, \\
[L_{16}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_2(L_{12}), & [\mathfrak{L}_{16}, L_{20}] &= P_2(\mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{16}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_5(B \oplus L_{10}), & [\mathfrak{L}_{16}, L_{21}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{10}), \\
[L_{16}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_5(B \oplus L_{19}), & [\mathfrak{L}_{16}, L_{22}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{19}), \\
[L_{16}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_4(B \oplus L_{20} \oplus \mathfrak{L}_{25}), & [\mathfrak{L}_{16}, L_{23}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{20} \oplus L_{25}), \\
[L_{16}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{25}), & [\mathfrak{L}_{16}, L_{24}] &= P_4(L_{25}), \\
[L_{16}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_4(B \oplus L_8 \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_{16}, L_{25}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus L_{13}), \\
[L_{16}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_4(B \oplus L_{20} \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_{16}, L_{26}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{20} \oplus L_{13}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{17}, \mathfrak{L}_{17}] &= P_6(B), & [\mathfrak{L}_{17}, L_{17}] &= P_6(B), \\
[L_{17}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_3(B \oplus L_{19}), & [\mathfrak{L}_{17}, L_{18}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{19}), \\
[L_{17}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_4(B \oplus L_{18}), & [\mathfrak{L}_{17}, L_{19}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{18}), \\
[L_{17}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_5(B \oplus L_6), & [\mathfrak{L}_{17}, L_{20}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_6), \\
[L_{17}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_2(L_9 \oplus L_{19}), & [\mathfrak{L}_{17}, L_{21}] &= P_2(\mathfrak{L}_9 \oplus \mathfrak{L}_{19}), \\
[L_{17}, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{17}, L_{22}] &= 0, \\
[L_{17}, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{17}, L_{23}] &= 0, \\
[L_{17}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_2(L_{20}), & [\mathfrak{L}_{17}, L_{24}] &= P_2(\mathfrak{L}_{20}), \\
[L_{17}, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{17}, L_{25}] &= 0, \\
[L_{17}, \mathfrak{L}_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{17}, L_{26}] &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{18}, \mathfrak{L}_{18}] &= P_7(B), & [\mathfrak{L}_{18}, L_{18}] &= P_7(B), \\
[L_{18}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_2(L_{16} \oplus L_{21}), & [\mathfrak{L}_{18}, L_{19}] &= P_2(\mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{18}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_3(B \oplus L_{12} \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{18}, L_{20}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\
[L_{18}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_6(B \oplus L_9), & [\mathfrak{L}_{18}, L_{21}] &= P_6(B \oplus \mathfrak{L}_9), \\
[L_{18}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_6(B \oplus L_9 \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_{18}, L_{22}] &= P_6(B \oplus \mathfrak{L}_9 \oplus L_{12}), \\
[L_{18}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_4(B \oplus L_{20} \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_{18}, L_{23}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{20} \oplus L_{13}), \\
[L_{18}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_4(B \oplus L_{20}, \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_{18}, L_{24}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_{20} \oplus L_{13}), \\
[L_{18}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_4(B \oplus L_6 \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_{18}, L_{25}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_6 \oplus L_{13}), \\
[L_{18}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_4(B \oplus L_8 \oplus L_{20} \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_{18}, L_{26}] &= P_4(B \oplus \mathfrak{L}_8 \oplus \mathfrak{L}_{20} \oplus L_{13}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{19}, \mathfrak{L}_{19}] &= P_8(B), & [\mathfrak{L}_{19}, L_{19}] &= P_8(B), \\
[L_{19}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_6(B \oplus L_{13}), & [\mathfrak{L}_{19}, L_{20}] &= P_6(B \oplus \mathfrak{L}_{13}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{19}, \mathfrak{L}_{21}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{19}, L_{21}] &= 0, \\
[L_{19}, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{19}, L_{22}] &= 0, \\
[L_{19}, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{19}, L_{23}] &= 0, \\
[L_{19}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_3(\mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_{19}, L_{24}] &= P_3(L_{12}), \\
[L_{19}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_3(B \oplus L_{20} \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_{19}, L_{25}] &= P_3(B \oplus \mathfrak{L}_{20} \oplus L_{12}), \\
[L_{19}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_3(L_{20} \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_{19}, L_{26}] &= P_3(\mathfrak{L}_{20} \oplus L_{12}), \\
\\
[L_{20}, \mathfrak{L}_{20}] &= P_7(B), & [\mathfrak{L}_{20}, L_{20}] &= P_7(B), \\
[L_{20}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_2(L_{12} \oplus L_{19}), & [\mathfrak{L}_{20}, L_{21}] &= P_2(\mathfrak{L}_{12} \oplus \mathfrak{L}_{19}), \\
[L_{20}, \mathfrak{L}_{22}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{20}, L_{22}] &= 0, \\
[L_{20}, \mathfrak{L}_{23}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{20}, L_{23}] &= 0, \\
[L_{20}, \mathfrak{L}_{24}] &= \mathfrak{L}_{23}, & [\mathfrak{L}_{20}, L_{24}] &= L_{23}, \\
[L_{20}, \mathfrak{L}_{25}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{20}, L_{25}] &= 0, \\
[L_{20}, \mathfrak{L}_{26}] &= 0, & [\mathfrak{L}_{20}, L_{26}] &= 0, \\
\\
[L_{21}, \mathfrak{L}_{21}] &= P_8(B), & [\mathfrak{L}_{21}, L_{21}] &= P_8(B), \\
[L_{21}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_8(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_{21}, L_{22}] &= P_8(B \oplus L_{12}), \\
[L_{21}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{25}), & [\mathfrak{L}_{21}, L_{23}] &= P_5(B \oplus L_{25}), \\
[L_{21}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{13} \oplus \mathfrak{L}_{15}), & [\mathfrak{L}_{21}, L_{24}] &= P_5(B \oplus L_{13} \oplus L_{15}), \\
[L_{21}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_{21}, L_{25}] &= P_5(B \oplus L_{13}), \\
[L_{21}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{13} \oplus \mathfrak{L}_{25}), & [\mathfrak{L}_{21}, L_{26}] &= P_5(B \oplus L_{13} \oplus L_{25}), \\
\\
[L_{22}, \mathfrak{L}_{22}] &= P_{12}(B), & [\mathfrak{L}_{22}, L_{22}] &= P_{12}(B), \\
[L_{22}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_9(B \oplus \mathfrak{L}_{13} \oplus \mathfrak{L}_{25}), & [\mathfrak{L}_{22}, L_{23}] &= P_9(B \oplus L_{13} \oplus L_{25}), \\
[L_{22}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_8(B \oplus \mathfrak{L}_{10} \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_{22}, L_{24}] &= P_8(B \oplus L_{10} \oplus L_{13}), \\
[L_{22}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_5(B \oplus L_{21} \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_{22}, L_{25}] &= P_5(B \oplus \mathfrak{L}_{21} \oplus L_{13}), \\
[L_{22}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_9(B \oplus \mathfrak{L}_{13}), & [\mathfrak{L}_{22}, L_{26}] &= P_9(B \oplus L_{13}), \\
\\
[L_{23}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_{16}(B), & [L_{23}, \mathfrak{L}_{23}] &= P_{16}(B), \\
[L_{23}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_{10}(B \oplus \mathfrak{L}_{20}), & [\mathfrak{L}_{23}, L_{24}] &= P_{10}(B \oplus L_{20}), \\
[L_{23}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_8(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{23}, L_{25}] &= P_8(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), \\
[L_{23}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_{12}(B \oplus L_{12}), & [\mathfrak{L}_{23}, L_{26}] &= P_{12}(B \oplus \mathfrak{L}_{12}),
\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} [L_{24}, \mathfrak{L}_{24}] &= P_{10}(B), & [\mathfrak{L}_{24}, L_{24}] &= P_{10}(B), \\ [L_{24}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_7(B \oplus L_{16}), & [\mathfrak{L}_{24}, L_{25}] &= P_7(B \oplus \mathfrak{L}_{16}), \\ [L_{24}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_{10}(B \oplus L_8), & [\mathfrak{L}_{24}, L_{26}] &= P_{10}(B \oplus \mathfrak{L}_8), \\ \\ [L_{25}, \mathfrak{L}_{25}] &= P_8(B), & [\mathfrak{L}_{25}, L_{25}] &= P_8(B), \\ [L_{25}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_8(B \oplus \mathfrak{L}_{12}), & [\mathfrak{L}_{25}, L_{26}] &= P_8(B \oplus L_{12}), \\ \\ [L_{26}, \mathfrak{L}_{26}] &= P_{12}(B), & [\mathfrak{L}_{26}, L_{26}] &= P_{12}(B), \end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, *Quantum integrable systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **94** (1983) 313-393
- [2] K. G. Borekov, A. V. Turbiner and J. C. López Vieyra, *Solvability of the Hamiltonians related to exceptional root spaces: rational case*, Comm. Math. Phys. **260** (2005) 17-44
- [3] K. G. Borekov, A. V. Turbiner and J. C. López Vieyra, *Sutherland-type trigonometric models, trigonometric invariants and multivariate polynomials*, Cont. Math. **471** (2008) 15-31
- [4] W. Rühl and A. V. Turbiner, *Exact solvability of the Calogero and Sutherland models*, Mod. Phys. Lett. A **10** (1995) 2213–2222
- [5] M. Rosenbaum, A. Turbiner and A. Capella, *Solvability of the  $G_2$  integrable system*, Int. J. Mod. Phys. A **13** (1998) 3885-3904
- [6] K.G. Borekov, J.C. Lopez Vieyra and A.V. Turbiner, *Solvability of  $F_4$  integrable system*, Int. J. Mod. Phys. A **16** (2001) 4769-4801
- [7] J. C. López Vieyra, M. A. G. García and A. V. Turbiner, *Sutherland-type trigonometric models, trigonometric invariants and multivariate polynomials. II.  $E_7$  case*, Mod. Phys. Letts. A **24** (2009) 1995-2004
- [8] K.G. Borekov, A.V. Turbiner, J.C. López Vieyra and M. A. G. García, *Sutherland-type trigonometric models, trigonometric invariants and multivariate polynomials. III.  $E_8$  case*, Int. J. Mod. Phys. A **26** (2011) 1399-1437
- [9] F. Tremblay, A.V. Turbiner and P. Winternitz, *An infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane*, J. Phys. A **42** (2009) 242001.



- 
- [10] O. Haschke and W. Rühl, *An exactly solvable model of the Calogero type for the icosahedral group*, Mod. Phys. Letts. A **13** (1998) 3109-3121
- [11] J. Patera and R. Twarock, *Affine extensions of noncrystallographic Coxeter groups and quasicrystals*, J. Phys. A **35** (2002) 1551-1574
- [12] A. Bordner, N. Manton and R. Sasaki, *Calogero-Moser models. V. Supersymmetry and Quantum Lax Pairs*, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 463-487
- [13] R. Twarock, *A toolkit for the construction of icosahedral particles with local symmetry axes*, q-bio/0508015v1
- [14] A. V. Turbiner, *Perturbations of integrable systems and Dyson-Mehta integrals*, pp. 263-310 in *Superintegrability in Classical and Quantum Systems*, CRM Proc. Lecture Notes, no.37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004
- [15] K. Iwasaki, A. Kenma and K. Matsumoto, *Polynomial invariants and harmonic functions related to exceptional regular polytopes*, Exp. Math. **11**, (2002) 153-159
- [16] Y. F. Smirnov and A. V. Turbiner, *Lie-algebraic discretization of differential equations*, Mod. Phys. Letts. A **10** (1995) 1795-1802
- [17] A.V. Turbiner, *Canonical discretization. I. Discrete faces of (an)harmonic oscillator*, Int. J. Mod. Phys. A **16** (2001) 1579-1605
- [18] C. Chrissomalakos and A.V. Turbiner, *Canonical Commutation Relation Preserving Maps*, Journ. Phys. A **34**, 10475-10483 (2001)
- [19] A.V. Turbiner, *Quasi-Exactly-Solvable Problems and the  $SL(2, R)$  Group*, Comm. Math. Phys. **118**, 467-474 (1988)
- [20] A.V. Turbiner, *Quasi-Exactly-Solvable Hamiltonians Related to Root Spaces*, J.Nonlin.Math.Phys. **12** (2005) 660-675, Supplement 1, Special Issue in Honour of Francesco Calogero on the Occasion of His 70th Birthday
- [21] A.V. Turbiner, *Lie-algebras and Linear Operators with Invariant Subspaces*, in *Lie Algebras, Cohomologies and New Findings in Quantum Mechanics*, AMS 'Contemporary Mathematics', **160** (1994) 263-310

- 
- [22] L. Brink, A. Turbiner and N. Wyllard, *Hidden Algebras of the (super) Calogero and Sutherland models*, J. Math. Phys. **39** (1998) 1285-1315
- [23] D. Z. Freedman and P. F. Mende, *An exactly solvable  $N$  particle system in supersymmetric quantum mechanics*, Nucl. Phys. B **344** (1990) 317-343
- [24] C. Quesne,  *$N=2$  supersymmetric extension of the Tremblay-Turbiner-Winternitz Hamiltonians on a plane*, Journ.Phys. A **43** (2010) 305202
- [25] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press (Oxford - New York - Toronto - Sydney - Paris - Frankfurt), 1976
- [26] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press (Oxford - New York - Toronto - Sydney - Paris - Frankfurt), 1977
- [27] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Math., no. 29, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990
- [28] J. Fuchs and C. Schweigert, *Symmetries, Lie Algebras and Representations. A graduate course for physicists*, Cambridge Monographs on Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1997
- [29] L. C. Grove and C. T. Benson, *Finite Reflection Groups*, Graduate Texts in Mathematics 99, Springer-Verlag, New York, USA, 1985
- [30] F. Klein, *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*, Dover Publications, New York, USA, 1956
- [31] S. Fomin and N. Reading, *Root systems and generalized associahedra*, lecture notes for the IAS/Park City Graduate Summer School in Combinatorics, math/0505518v3 [math.CO].