



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

“Restauración de la simetría en el  
modelo estándar a temperatura finita con  
campos magnéticos”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS**

PRESENTA:

**JORGE LUIS NAVARRO ESTRADA**

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE ALEJANDRO AYALA MERCADO

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. SARIRA SAHU

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. GENARO TOLEDO SANCHEZ



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO, D.F.

2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**RESTAURACIÓN DE LA SIMETRÍA EN EL MODELO  
ESTÁNDAR A TEMPERATURA FINITA CON CAMPOS  
MAGNÉTICOS**

Derechos reservados 2011

por

**Jorge Luis Navarro Estrada**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
MÉXICO D.F.  
2011**

# Índice general

Índice de figuras	iv
Índice de tablas	v
<b>1. EL PROBLEMA DE LA BARIOGÉNESIS EN EL MODELO ESTÁNDAR</b>	<b>1</b>
1.1. Asimetría Materia-Antimateria . . . . .	1
1.2. Condiciones para la Bariogénesis . . . . .	4
1.2.1. Violación del Número Bariónico . . . . .	6
1.2.2. Violación de C y CP . . . . .	9
1.2.3. Condición Fuera del Equilibrio Térmico . . . . .	10
1.3. Perspectivas para la Bariogénesis . . . . .	12
1.3.1. SUSY . . . . .	13
1.3.2. Leptogénesis . . . . .	13
1.3.3. Campos Magnéticos Primordiales . . . . .	14
<b>2. MODELO ESTÁNDAR MÍNIMO</b>	<b>16</b>
2.1. Lagrangiano del Modelo Estándar . . . . .	19
2.2. Simetría . . . . .	20
2.2.1. Rompimiento Espontáneo de la Simetría . . . . .	21
2.3. Sector de Higgs . . . . .	23
2.3.1. Mecanismo de Higgs . . . . .	23
2.3.2. Término de Interacción . . . . .	24
2.4. Sector de Bosones de Norma . . . . .	26
2.5. Sector de Fermiones . . . . .	26
2.6. Sector de Yukawa . . . . .	27
2.7. Sector que Fija la Norma . . . . .	28
2.8. Sector de Faddeev-Popov . . . . .	29

---

2.9. Potencial Efectivo: Introducción . . . . .	31
<b>3. PROPAGADOR EN PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO</b>	<b>33</b>
3.1. Método de Schwinger . . . . .	33
3.2. Propagador Fermiónico en Presencia de un Campo Magnético . . . . .	34
3.3. Niveles de Landau . . . . .	42
3.4. Límite de Campo Débil . . . . .	47
<b>4. TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA</b>	<b>51</b>
4.1. Formalismo de Matsubara . . . . .	54
4.2. Reglas de Feynman en el FTI . . . . .	63
4.3. Aproximación Hard Thermal Loops . . . . .	64
4.4. Transformada de Mellin . . . . .	67
4.5. Parametrización de Feynman a $T \neq 0$ . . . . .	71
<b>5. AUTO-ENERGÍAS</b>	<b>74</b>
5.1. Bosón de Higgs . . . . .	74
5.2. Bosones de Norma . . . . .	78
<b>6. POTENCIAL EFECTIVO A TEMPERATURA FINITA</b>	<b>83</b>
6.1. Potencial Efectivo a un Lazo . . . . .	83
6.2. Diagramas de Anillo . . . . .	88
6.3. Potencial Efectivo Hasta Orden Anillo . . . . .	93
6.4. Restauración de la Simetría . . . . .	94
<b>7. CONCLUSIONES</b>	<b>99</b>
<b>A. Auto-energías de escalares en una norma arbitraria</b>	<b>101</b>
A.1. Auto-energías del bosón de Higgs ( $H$ ) . . . . .	101
A.2. Auto-energías del bosón de Goldstone Neutro ( $G^0$ ) . . . . .	103
A.3. Auto-energías del bosón de Goldstone cargado ( $G^c$ ) . . . . .	104
<b>B. Auto-energías de los bosones de norma en una norma arbitraria</b>	<b>109</b>
B.1. Auto-energías del fotón ( $\gamma$ ) . . . . .	109
B.2. Auto-energías del bosón de norma neutro ( $Z$ ) . . . . .	110
B.3. Auto-energías del bosón de norma cargado ( $W$ ) . . . . .	111
<b>C. Auto-energía de los fantasmas en una norma arbitraria</b>	<b>115</b>

---

C.1. Auto-energías del bosón $\gamma$ asociadas al fantasma ( $\eta_\gamma$ ) . . . . .	115
C.2. Auto-energías del bosón $Z$ asociadas al fantasma ( $\eta_Z$ ) . . . . .	115
C.3. Auto-energías del bosón $W$ asociadas al fantasma ( $\eta_W$ ) . . . . .	116

# Índice de figuras

1.1.	Anomalía triangular para la corriente de número bariónico en la teoría electrodébil. . . . .	6
1.2.	Esquema de la estructura de vacío de $SU(2)$ . A temperatura cero, las transiciones vía instantones entre vacíos con diferentes números de Chern-Simons están suprimidas. A temperatura finita, estas transiciones pueden proceder a través de los <i>sphalerones</i> . . . . .	7
1.3.	Formación de burbujas mientras el universo temprano se enfriaba. En su interior (fase rota), el valor de expectación del vacío $v \neq 0$ , mientras en la fase simétrica $v = 0$ . Las burbujas se expandieron hasta eliminar la fase simétrica, mediante una “transición de fase de primer orden”. . . . .	10
1.4.	(a) Transición de fase de primer orden. (b) Transición de fase de segundo orden.	12
2.1.	Partículas del Modelo Estándar en su versión mínima. . . . .	17
2.2.	Forma del potencial $V(\Phi)$ para un campo escalar complejo, en el caso $\mu^2 > 0$ y $\mu^2 < 0$ , con $\lambda > 0$ . . . . .	24
3.1.	Niveles de Landau . . . . .	42
4.1.	Diagrama de Feynman para la teoría $\lambda\phi^3$ . . . . .	64
4.2.	Contorno de integración que consiste en un semicírculo que encierra los polos de la función $\Gamma(\sigma - t - \frac{d}{2} - \frac{p}{2})$ con $\gamma = 2\sigma - 2t - d - 2a$ . . . . .	70
5.1.	Diagramas de Feynman para la auto-energía del bosón de Higgs, que contienen lazo cuyos propagadores corresponden a partículas afectadas y no afectadas por el campo magnético. $\eta$ representa los campos fantasmas.	75
5.2.	Diagramas de Feynman para la auto-energía de bosones de norma. . . . .	79

6.1.	Potencial efectivo renormalizado a un lazo para $\xi = 1$ y diferentes valores de $T$ , sustrayendo términos independientes de $v$ y dividiendo por la cuarta potencia de la masa del $W$ dependiente del $v$ , evaluada en $v = v_0^T$ , el valor del $vev$ que minimiza el potencial efectivo después que la transición de fase se ha completado para una temperatura de $T = 110$ GeV. En esta norma la transición de fase ocurre a $T_C = 128.9$ GeV y es de segundo orden. . . . .	87
6.2.	El potencial efectivo renormalizado a un lazo, normalizado por la cuarta potencia de la masa del $W$ dependiente de $v$ evaluada en $v = v_0^T$ , el valor del $vev$ que minimiza el potencial efectivo después que la transición de fase se completa, para una temperatura de $T = 110$ GeV y $\xi = 1$ , como una función de $v$ y para diferentes valores del parámetro de norma $\xi$ . A esta temperatura, la posición del mínimo de $v_0$ muestra una dependencia significativa en el parámetro de norma para valores de $\xi$ alrededor de 1. . . . .	89
6.3.	Representación esquemática de la resumación de los diagramas de anillo. . . . .	90
6.4.	Diagramas de Feynman para las auto-energías de los fantasmas de Faddeev-Popov. Dado que trabajamos en el límite infrarrojo, diagramas del tipo (a), no contribuyen a las auto-energías de los fantasmas. . . . .	93
6.5.	Potencial efectivo dividido por la cuarta potencia de la masa del $W$ dependiente de $v$ evaluada en $v_1^T$ (el valor donde el mínimo de la fase rota aparece a la temperatura crítica en ausencia de campo magnético). Con parámetro de norma $\xi = 0.1$ y valor del campo magnético nulo. La transición de fase es débilmente de primer orden. Notamos que los resultados son consistentes con los obtenidos por [79], utilizando los grados de libertad de la fase simétrica. . . . .	95
6.6.	Potencial efectivo dividido por la cuarta potencia de la masa del $W$ dependiente de $v$ evaluada en $v_1^T$ (el valor donde el mínimo de la fase rota aparece a la temperatura crítica en ausencia de campo magnético) para las mismas temperaturas de la Fig. 6.5 y un valor fijo del campo magnético parametrizado como $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$ , con $b = 0.01$ . El parámetro de norma es $\xi = 0.1$ . En el cuadro superior derecho se muestra la diferencia ( $\Delta V_{eff}$ ) con respecto al potencial efectivo mostrado en la Fig. 6.5 en ausencia de campo magnético sobre una pequeña región en el rango de $\nu$ donde el segundo mínimo estaría desarrollándose y ahora está retrasado por la presencia de un campo magnético. . . . .	96

6.7. Diferencia entre los potenciales efectivos en presencia y en ausencia de campo magnético dividido por la cuarta potencia de la masa del  $W$  dependiente de  $v$  evaluada en  $v_1^T$  (el valor donde el mínimo de la fase rota aparece a la temperatura crítica  $T = T_C^{B=0} = 139.758$  GeV en ausencia del campo magnético) para diferentes valores del campo magnético parametrizado como  $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$ . El parámetro de norma es  $\xi = 0.1$ . A pesar de que el campo magnético es débil, se puede apreciar que la transición de fase se retrasa al aumentar los valores del campo magnético. . . . . 96

6.8. Una pequeña región alrededor del segundo mínimo que se desarrolla en el potencial efectivo dividido por la cuarta potencia de la masa del  $W$  dependiente de  $v$  evaluada en  $v_1^T$  (el valor donde el mínimo en la fase rota aparece a la temperatura crítica en ausencia de campo magnético) para tres diferentes valores del campo magnético a su correspondiente temperatura crítica y para  $\xi = 0.1$ . Notamos que al aumentar los valores del campo magnético, la transición de fase se inicia a una temperatura más baja y el mínimo de la fase rota también se desplaza a valores más altos de tal manera que la razón  $v_0/T_C$  incrementa la transición de fase. 97

6.9. Diferencias de  $v_0$ , con y sin campo magnético, en función de  $\xi$ . La posición del mínimo en la fase rota a la temperatura crítica, para dos valores del campo magnético parametrizado como  $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$  se mantiene estable a lo largo de una amplia gama de valores de  $\xi$ , aún en la presencia de campo magnético. . . . . 97

6.10. Diferencias de  $T_C$ , con y sin campo magnético, en función de  $\xi$ . La posición de la temperatura crítica para el desarrollo del mínimo en la fase rota, para dos valores del campo magnético parametrizado como  $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$  se mantiene estable a lo largo de una amplia gama de valores de  $\xi$ . . . . . 98

6.11. Diferencia de la razón  $v_0/T_c$  con y sin campo magnético, para dos valores del campo magnético parametrizado como  $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$ , en función de  $\xi$ . Donde se observa cómo el valor del cociente  $v_0/T_C$  es estable para una variación de  $\xi$  hasta 1.5. La presencia del campo magnético no introduce una fuerte dependencia en la norma. . . . . 98

# Índice de tablas

2.1. Números cuánticos para los fermiones de la primera familia del Modelo Estándar . . . . .	18
6.1. Temperatura crítica $T_C$ (segunda columna) y posición de los mínimos $v_0$ para la temperatura constante $T = 110$ GeV (tercera columna) del potencial efectivo renormalizado a un lazo, después que la transición de fase ha sido completada. Los valores elegidos de $\xi$ están cerca de 1. Observemos que la temperatura crítica es sólo ligeramente dependiente de $\xi$ . Sin embargo, la posición del mínimo para una temperatura donde la transición de fase se ha completado muestra una mayor dependencia de $\xi$ . . . . .	88

Índice de tablas

# Prefacio

En un trabajo reciente [1], el desarrollo de la transición de fase electrodébil (TFED) en la fase simétrica, dentro del modelo estándar mínimo (MEM) en la presencia de un campo hipermagnético externo débil, incluyendo la contribución de los diagramas de anillo ha sido estudiado. El principal resultado de este trabajo es que la presencia del campo fortalece la naturaleza de primer orden de la transición de fase. El anterior resultado está de acuerdo con los cálculos realizados a nivel clásico [2] y a un lazo [3], así como las simulaciones en red [4]. Por otra parte, enfoques no perturbativos donde el potencial efectivo a temperatura finita, dentro del MEM, es estudiado para el caso de campo magnético fuerte [5], llegan a la conclusión de que estos campos impiden que la transición de fase sea de primer orden. Estos resultados son atribuidos a la contribución de la masa de los fermiones ligeros, los cuales son generalmente despreciados en otros cálculos. Además, ellos [5] también desprecian el corte al infrarrojo proporcionado por las masas térmicas, lo que arroja dudas en sus conclusiones.

En este trabajo se generaliza el análisis de la evolución de la TFED en la presencia de un campo magnético constante, trabajando con los grados de libertad de la fase con la simetría rota, en la cual la teoría se ha reducido de  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  a  $U(1)_{em}$ . Trabajamos con un valor arbitrario (covariante) del parámetro de norma, en el límite de campo débil incluyendo la contribución de diagramas de *anillo*, que han demostrado ser cruciales para la descripción de las propiedades de longitud de onda larga de la teoría [6]. Exploramos la posibilidad de integrar este cálculo en el escenario de la Bariogénesis electrodébil, y estudiar las condiciones para que la transición de fase sea más fuertemente de primera orden. Además, estudiamos la dependencia del parámetro de norma de los parámetros de la transición de fase.

La tesis está estructurada en capítulos que han sido basados en el artículo de investigación publicado en el Physical Review D **82** (2010) 123007.

Concretamente, está organizada como sigue:

- En el Capítulo I presentamos una introducción general al problema de la Bariogénesis.
- En el Capítulo II desarrollamos el Modelo Estándar Mínimo con los grados de libertad en la fase con simetría rota.

- En el Capítulo III establecemos el formalismo necesario para incluir el efecto de campos magnéticos débiles en el cálculo de los propagadores de las partículas cargadas.
- En el Capítulo IV, estudiamos la teoría de campos a temperatura finita en el formalismo de tiempo imaginario (FTI).
- En el Capítulo V, trabajando con los grados de libertad de la fase rota para calcular las auto-energías de las partículas que intervienen en el cálculo.
- En el Capítulo VI estudiamos el potencial efectivo (PE) como una función del valor de expectación en el vacío ( $vev$ ), del campo de Higgs y mostramos que el orden de la transición de fase electrodébil es más fuerte de primer orden en presencia de campo magnético. También estudiamos la dependencia de la transición de fase del parámetro de norma.
- En el Capítulo VII se exponen las conclusiones y se discuten los resultados obtenidos en esta tesis.

Finalmente, mostramos en los apéndices los resultados obtenidos en los cálculos de cada una de las contribuciones a la auto-energías en un norma arbitraria.

# Dedicatoria

Dedico esta tesis a toda mi familia.

Para mis padres Luis Carlos y Leonisa, por su comprensión y ayuda en los malos momentos. Me han dado todo lo que soy como persona.

Para mi esposa Ruby. Por su paciencia, por su comprensión, por su empeño, por su fuerza, por su amor, por ser tal y como es. Es la persona que más directamente ha sufrido las consecuencias del trabajo realizado. Nunca le podré estar suficientemente agradecido.

Para mi hija, Sarahi Marcela. Su llegada a mi vida es lo mejor que nunca me ha pasado, y ha venido a este mundo para darme el último empujón para terminar el trabajo. Es sin duda mi referencia para el presente y para el futuro.

Para mis hermanas Margarita, Milena, Janet, y mis tios.

A los familiares y amigos que ya partieron.

Para mis amigos de antaño.

A todos ellos, muchas gracias de todo corazón.

# Agradecimientos

Primero, me gustaría agradecer a mi director y tutor de Tesis, Dr. Alejandro Ayala, su esfuerzo y dedicación. Sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar, su persistencia, su paciencia y su motivación han sido fundamentales en mi formación. Él ha inculcado en mí un sentido de seriedad y responsabilidad. Con su manera de ser, ha sido capaz de ganarse mi lealtad y admiración, así como sentirme en deuda con él por todo lo recibido durante el periodo de tiempo que ha durado esta tesis Doctoral.

También me gustaría agradecer a los miembros de mi comité curricular Dr. Genaro Toledo y Dr. Sarira Sahu. De igual modo a muchos profesores del ICN y del IF de la UNAM, por los consejos recibidos y su amistad. Además, de una manera u otra han aportado su granito de arena a lo largo de mi formación. De igual manera agradezco a los profesores de los departamentos de física del CINVESTAV, ESFM-IP, USON y UMSNH su trato humano y su visión crítica de muchos aspectos de la vida, que ayudan a formarte.

Además, estaré eternamente agradecido a mis compañeros de estudios. Para mí son los mejores que se puedan tener. El ambiente creado fue simplemente perfecto, su visión, motivación y optimismo me han ayudado en momentos muy críticos del doctorado y en el desarrollo de la tesis. No todo el mundo puede decir lo mismo de sus compañeros de estudio. Soy un estudiante afortunado.

A todo el personal del ICN, del IF y del PCF-UNAM que me dieron su afecto y colaboración.

Al Dr. Carlos A. Ramírez por estar a mi lado en un momento delicado.

A muchos nacionales y extranjeros que me abrieron las puertas de su casa, con mucho afecto y familiaridad.

A México que tanto quiero y extraño. En especial un Sábado Distrito Federal-Ay, Ay, ay, ay. A las ciudades de Colima, Morelia, Hermosillo, Toluca y pueblos vecinos.

A mi profesor de Electrodinámica, por su amistad y confianza (08-02-2010), Dr. Javier Vitela.

A la Universidad del Atlántico su apoyo económico.

Muchas gracias por todo lo que me han brindado.

# Resumen

En el presente trabajo estudiamos el fenómeno de restauración de la simetría en el modelo estándar durante la transición de fase electrodébil en presencia de un campo magnético débil. Calculamos el potencial efectivo a temperatura finita hasta la contribución de diagramas de anillo, usando los grados de libertad de la fase rota, y hacemos un seguimiento de la dependencia del parámetro de norma a los resultados. Se demuestra que bajo estas condiciones la transición de fase se vuelve más fuertemente de primer orden.

# Abstract

We study the symmetry restoration at finite temperature in the standard model during the electroweak phase transition in the presence of a weak magnetic field. We compute the finite temperature effective potential up to the contribution of ring diagrams, using the broken phase degrees of freedom, and keep track of the gauge parameter dependence of the results. We show that under these conditions, the phase transition becomes strongly first order.

# Capítulo 1

## EL PROBLEMA DE LA BARIOGÉNESIS EN EL MODELO ESTÁNDAR

A partir de la verificación experimental de la existencia del positrón, por Anderson en 1932, se ha comprobado experimentalmente que toda partícula tiene una anti-partícula asociada. Dada esta simetría, el teorema CPT garantiza que una partícula y su anti-partícula tienen exactamente la misma masa y vida media pero carga exactamente opuesta. Así, si desde el inicio del universo este hubiera contenido la misma cantidad de materia que de anti-materia, todo se habría aniquilado y el universo sería un gas de fotones. Nada de lo que existe, existiría. Pero como el universo no está compuesto exclusivamente de radiación, debemos encontrar una explicación, más allá de tan solo invocar un principio antrópico<sup>1</sup>.

El estudio de las propiedades de alta temperatura y densidad del plasma primordial del universo juega un papel importante en los intentos de explicar varios problemas pendientes en la cosmología. Uno de tales problemas, tratado en este capítulo, es el origen de la asimetría materia-antimateria, observada hoy en el universo.

### 1.1. Asimetría Materia-Antimateria

Uno de los principios básicos de la física de partículas elementales es la simetría entre partículas y antipartículas. Formalmente este principio se refleja en el teorema *CPT*, el cual establece que para cualquier partícula  $X$  también existe su antipartícula  $\bar{X}$  con las misma masa y ancho de decaimiento, pero con carga opuesta.

La correspondencia entre partícula y antipartícula que ha sido firmemente probada en aceleradores, es sorprendentemente violada en nuestro universo. Las observaciones indican un universo compuesto en su totalidad de materia, y sin ningún indicio de

---

<sup>1</sup>*El mundo es necesariamente como es porque hay seres humanos que se preguntan por qué es así.*

antimateria primordial.

La ausencia de aniquilaciones protones-antiprotones, a nivel subatómico dan una fuerte evidencia de que a escala humana la presencia de antimateria en nuestras experiencia diaria es nula. Por lo tanto, la Tierra está hecha de materia y la antimateria es muy rara sobre ella. Solamente esta última es producida en pequeñas cantidades, en los acumuladores de antipartículas del Fermilab y el CERN.

De la primera visita del hombre a la luna y del hecho que no se aniquilara cuando alunizo indudablemente prueba que la luna está hecha de materia. Del envío de sondas espaciales a otros planetas, satélites y asteroides, de nuestro Sistema Solar se puede concluir que este está constituido de materia.

A escala galáctica, los rayos cósmicos dan información del material primordial del que está hecha nuestra galaxia y también algunas más cercanas. En estos rayos vemos cerca de  $10^4$  veces más protones que antiprotones. Esta proporción es consistente con la producción secundaria de antiprotones, mediante el proceso  $p + p \rightarrow 3p + \bar{p}$  que tiene lugar en las capas superiores de la atmósfera. De lo anterior se desprende que nuestra galaxia está predominantemente hecha de materia. De otra parte, si coexistieran dominios de galaxias de materia y antimateria en el universo, un fuerte fondo de radiación  $\gamma$  en la frontera entre estas, proveniente de las aniquilaciones nucleón-antinucleón, sería medido en la Tierra. Dado que no observamos esta radiación se puede concluir que estos dominios de antimateria son despreciables a escalas de hasta  $100 \text{ Mpc}$ .

También existe la posibilidad que pequeñas regiones de antimateria pudieran coexistir a grandes escalas, por lo tanto las aniquilaciones materia-antimateria, producirían un difuso fondo de rayos  $\gamma$  y una distorsión sobre el fondo cósmico de radiación (CMB). Como ninguna de estas dos señales se observa, se concluye definitivamente que no hay ningún indicio de antimateria primordial hasta la esfera de Hubble.

Bajo la suposición que el universo es homogéneo e isotrópico, las anteriores observaciones de la abundancia relativa de materia y antimateria pueden cuantificarse, dentro del modelo cosmológico estándar, en términos del parámetro  $\eta_B$ , definido como

$$\eta_B = \frac{\eta_b - \eta_{\bar{b}}}{s}, \quad (1.1)$$

en donde  $\eta_b$  y  $\eta_{\bar{b}}$  son, respectivamente, la densidad de bariones y antibariones. Además,  $s$  es la densidad de entropía del universo dada por

$$s = \frac{2\pi}{45} g_* T^4, \quad (1.2)$$

y relacionada con la densidad de fotones por  $s \approx 1.80 g_* \eta_\gamma$ , donde  $g_* = 106.75$  es el número efectivo de grados de libertad para partículas relativistas en equilibrio térmico.

De datos cosmológicos dos mediciones independientes de  $\eta_B$  pueden ser extraídas: La primera viene de la nucleosíntesis primordial [7], que fue el primer método que permitió determinar la densidad de bariones, y que describe los procesos que tienen lugar en el universo cuando la temperatura se ha reducido alrededor de  $1 \text{ MeV}$ . Cerca

de esta temperatura es cuando se forman los núcleos más ligeros de la tabla periódica, que básicamente son ( $H, {}^3\text{He}, {}^4\text{He}, D, B, {}^7\text{Li}$ ). La tasa de interacción de las reacciones entre las partículas presentes en el universo en esa era ( $\gamma, \nu, \bar{\nu}, e^\mp, p, n$ ) depende de parámetro  $\eta_B$ . El rango de consistencia con las abundancias primordiales de  $D$  y de  ${}^3\text{He}$  es

$$4.8 \times 10^{-11} \leq \eta_B \leq 9.8 \times 10^{-11}. \quad (1.3)$$

La segunda medición se obtiene de la observación directa de las anisotropías del fondo cósmico de radiación, combinadas con los datos del estudio a gran escala de estructuras. Del análisis de datos de la colaboración Wilkison Microwave Anisotropy (WMAP) [8] se desprende que la combinación  $\Omega_B h^2 = 0.019 \pm 0.0024$  (95 %C.L.), con  $\Omega_B$  la densidad de bariones y  $h$  representa la constante de Hubble normalizada al día de hoy, se traduce en un valor de

$$\eta_B = 8.7 \times 10^{-11}, \quad (1.4)$$

de acuerdo con lo estimado por nucleosíntesis en la Ec. (1.3).

Uno puede asumir que la actual asimetría fue una condición inicial. Pero la experiencia en aceleradores, donde partículas y antipartículas tienen el mismo comportamiento, indican que esta idea es poco natural. Sin embargo, no sería válida si el universo paso por un periodo inflacionario ya que al final del mismo cualquier condición inicial fue erradicada. Partiendo de una situación simétrica, el desequilibrio debería ser entonces generado en algún momento de la expansión del universo. Se puede estimar aproximadamente la razón de densidades del análisis de las abundancias en equilibrio de nucleones y antinucleones. Una temperatura por debajo de la masa del nucleón,  $T < m_N \simeq 1 \text{ GeV}$ , daría lugar a

$$\frac{\eta_b}{\eta_\gamma} = \frac{\eta_{\bar{b}}}{\eta_\gamma} \simeq \left( \frac{m_N}{T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_N}{T}}. \quad (1.5)$$

Por ejemplo, durante el tiempo del enfriamiento,  $T \simeq 20 \text{ MeV}$ , cuando la tasa de aniquilación de nucleones y antinucleones es menor que la tasa de expansión del universo, la razón de densidades tiene un valor de

$$\frac{\eta_b}{\eta_\gamma} = \frac{\eta_{\bar{b}}}{\eta_\gamma} \simeq 10^{-18}, \quad (1.6)$$

el cual es 7 órdenes de magnitud menor que el valor requerido por nucleosíntesis, Ec. (1.3). En consecuencia, algún mecanismo desconocido debió haber actuado en épocas anteriores para producir el valor experimental de  $\eta_B$ . En efecto, el actual número bariónico coincide con el de  $T \simeq 40 \text{ MeV}$ . A esta temperatura, podría ser que algunos procesos desconocidos separaron los nucleones de los antinucleones en diferentes regiones del espacio [9]. Sin embargo, tal escenario falla para explicar nuestro universo ya que regiones causalmente conectadas eran demasiados pequeñas.

La posibilidad más razonable es entonces que la asimetría bariónica se derive de algunos mecanismos basados en las leyes de la física de partículas elementales que ocurrieron en el universo temprano. En este contexto, la generación del valor observado de  $\eta_B$  es referido como la *Asimetría Bariónica del Universo* (ABU) o el problema de la *Bariogénesis*. A continuación listamos las condiciones mínimas que debe cumplir cualquier teoría de partículas con el fin de generar la ABU.

## 1.2. Condiciones para la Bariogénesis

A finales de los años sesenta Sakharov [10] y otros sugieren que la asimetría observada hoy, podría haberse generado dinámicamente a partir de condiciones simétricas. Los tres ingredientes que son necesarios para desarrollar una asimetría bariónica, conocidos ahora como condiciones de Sakharov son:

1. *Existencia de procesos que violen número bariónico ( $B$ ):* Esta condición es obvia, si partimos de un universo con  $\eta_B = 0$ , la violación de número bariónico debe llevarse a cabo con el fin de convertirse en un universo con  $\eta_B \neq 0$ . Experimentalmente no existe evidencia de la violación del número bariónico, la única evidencia en favor de este hecho, es el propio universo. De lo contrario este consistiría solo de radiación. Desde el punto de vista teórico, esta violación existe en teorías tales como las de gran unificación y el Modelo Estándar (ME). Más adelante veremos cómo se lleva a cabo esta violación dentro del ME.
2. *Existencia de procesos que violen las simetrías discretas  $C$  (conjugación de carga) y  $CP$  (la composición de  $C$  y Paridad):* Consideremos por ejemplo, un sistema simple con una densidad de bariones con espín arriba  $\eta_b \uparrow$  y con espín abajo  $\eta_b \downarrow$ , con sus correspondientes antibariones  $\eta_{\bar{b}} \downarrow$  y  $\eta_{\bar{b}} \uparrow$ . La asimetría bariónica es entonces dada por

$$\Delta B = \eta_b \uparrow + \eta_b \downarrow - (\eta_{\bar{b}} \uparrow + \eta_{\bar{b}} \downarrow). \quad (1.7)$$

Si  $C$  se conserva,  $\Delta B = 0$  ya que

$$\eta_b \uparrow = \eta_{\bar{b}} \uparrow, \quad (1.8)$$

$$\eta_b \downarrow = \eta_{\bar{b}} \downarrow. \quad (1.9)$$

Si  $CP$  es conservada, también  $\Delta B = 0$  ya que

$$\eta_b \uparrow = \eta_{\bar{b}} \downarrow, \quad (1.10)$$

$$\eta_b \downarrow = \eta_{\bar{b}} \uparrow. \quad (1.11)$$

3. *Que los anteriores procesos ocurrieron fuera del equilibrio termodinámico en algún momento de la historia del universo:* Un buen ejemplo de equilibrio térmico es

el agua hirviendo dentro de una olla a presión cerrada. Las moléculas de agua pasan de la fase líquida a la gaseosa sin cesar. Hay equilibrio porque, una vez se ha alcanzado una temperatura constante, el ritmo a que las moléculas hacen esta transición es exactamente igual al ritmo del proceso inverso, de manera que la cantidad total de líquido y vapor permanece constante. Si se levanta la tapa, este equilibrio térmico se rompe. El vapor escapa y el ritmo de transformación de líquido a gas se vuelve mayor que el ritmo inverso. Si se sigue suministrando calor, se evaporará todo el líquido.

Hay una situación en el universo primitivo análoga a levantar la tapa de la olla. En el equilibrio, los bariones se están desintegrando, pero acontece también el proceso inverso, en el cual los quarks se unen para formar bariones; ambos procesos suceden al mismo ritmo. Las desintegraciones no pueden producir una asimetría bariónica, ya que las desintegraciones inversas la van deshaciendo. Sin embargo, a medida que el universo se expande, la temperatura decrece, como si se destapara la olla a presión. A determinada temperatura un par de quarks ya no tendrá la suficiente energía como para producir una partícula pesada. Se generará así una asimetría bariónica.

En las etapas tempranas de la evolución cosmológica, la densidad de materia y radiación eran tan grandes, que en buena aproximación se asume que la tasa típica de interacción entre las partículas,  $\Gamma_\sigma \sim \sigma T$  (aquí  $\sigma$  es la sección eficaz), era mucho mayor que la tasa de expansión del universo o constante de Hubble,  $H = \dot{R}/R = 1.66g_*^{1/2}T^2/m_{Pl}$ , en la época dominada por la radiación  $m_{Pl} \simeq 10^{19} GeV$  es la masa de Planck. En este período se dice que el universo estuvo en equilibrio termodinámico. Las observaciones actuales del espectro térmico en la radiación cósmica de fondo, dan cuenta de esta afirmación.

En teoría cuántica de campos, en equilibrio, el número de ocupación de cualquier partícula  $X$  depende solamente de la energía de la partícula

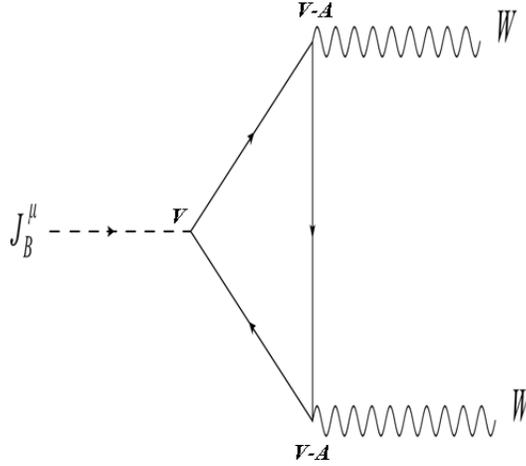
$$n_{eq}(X) = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1}, \quad (1.12)$$

donde  $\mu$  es el potencial químico. Por otra parte, del teorema  $CPT$ , las masas de las partículas son iguales a las de su correspondiente antipartículas, y si la carga bariónica no se conserva, el correspondiente  $\mu$  es nulo, teniéndose que

$$N_{eq}(X) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} n_{eq}(X) = N_{eq}(\bar{X}). \quad (1.13)$$

Por lo tanto el equilibrio termodinámico prohíbe cualquier asimetría materia-antimateria.

A continuación damos una visión más detallada de cada una de las condiciones de Sakharov, dentro de uno de los modelos más ampliamente usados para la generación de la ABU, este es el modelo estándar electrodébil.



**Figura 1.1:** Anomalía triangular para la corriente de número bariónico en la teoría electrodébil.

### 1.2.1. Violación del Número Bariónico

En el modelo estándar electrodébil, las corrientes bariónica y leptónica  $J_B^\mu$  y  $J_L^\mu$  se conservan a nivel clásico, i.e.  $\partial_\mu J_{B,L}^\mu = 0$ . Sin embargo, debido a correcciones cuánticas a la teoría, cualquier corriente axial que se acople con un fermión, es anómala. Esta anomalía [11] puede ser calculada con el diagrama de Feynman de la Fig. 1.1.

#### Temperatura Cero

La violación del número bariónico y leptónico en el modelo electrodébil viene de dos hechos no perturbativos. El primer hecho es debido a la naturaleza de las interacciones electrodébiles, debido a la manera diferente de acoplarse los campos de norma a los campos fermiónicos de mano derecha e izquierda. Ignorando el efecto del campo electromagnético, el acoplamiento de un fermión a un bosón de norma viene dado por la correspondiente corriente axial, la cual resulta ser anómala

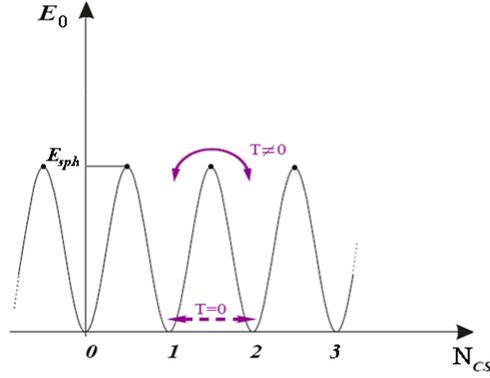
$$\partial_\mu J_{B,L}^\mu = N_F \frac{g^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu}, \quad (1.14)$$

donde  $N_F$  es número de familias fermiónicas,  $g$  es la constante de acoplamiento y  $F_{\mu\nu}^a$  es el tensor de intensidad de campos de  $SU(2)_L$ , respectivamente.

De otra parte, es muy significativo que el término de la derecha de la Ec. (1.14) pueda expresarse como la cuadi-divergencia de una nueva corriente, llamada corriente de Chern-Simons

$$\partial_\mu J_{B,L}^\mu = N_F \frac{g^2}{32\pi^2} \partial_\mu K^\mu. \quad (1.15)$$

Podemos definir una carga asociada a las corrientes anómalas, como la integral espacial de la componente temporal de la corriente de Chern-Simons llamada carga del



**Figura 1.2:** Esquema de la estructura de vacío de  $SU(2)$ . A temperatura cero, las transiciones vía instantones entre vacíos con diferentes números de Chern-Simons están suprimidas. A temperatura finita, estas transiciones pueden proceder a través de los *sphalerones*.

*Sphaleron*  $Q_B$

$$Q_B \equiv \int_{3D} d^3x J_B^0 = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_{t=t_0} d^3x K^0. \quad (1.16)$$

La solución de la Ec. (1.16), no es única, pues los grupos de homotopías sobre  $SU(2)$  permiten un mapeo sobre el grupo, cuya representación topológica es una 3-esfera. Este grado de mapeo es el número de *winding*  $N(t)$ , que representa el número de veces que el sistema realiza transiciones entre los diferentes vacíos, después de un tiempo  $t$ . Por lo tanto, la carga bariónica de los *sphalerones* [13] es

$$Q_B = \frac{N}{2}. \quad (1.17)$$

La física impone restricciones, por lo que uno puede encontrar una cantidad invariante de norma que caracteriza estos vacíos degenerados, conocida como los números de Chern-Simons y definidos como

$$N_{CS} = \frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{ijk} \int d^3x \left( F_{ij}^a A_k^a - \frac{2}{3} \epsilon^{abc} A_i^a A_j^b A_k^c \right), \quad (1.18)$$

los cuales se pueden representar esquemáticamente como se muestra en la Fig. 1.2.

Físicamente el proceso mediante el cual  $B$  es violado a temperatura cero, es por tunelaje cuántico vía la transición de una configuración de vacío a otra de la teoría. Estas transiciones están mediadas por los llamados *instantones*. Como podemos ver de la Fig. 1.2, los vacíos adyacentes de  $SU(2)$  están separados por barreras de potencial, cuya energía depende de la configuración de campos. Los puntos más alto de la barrera son configuraciones estáticas que corresponden a soluciones inestables de las ecuaciones

de campo, conocidas como *sphaleron*, las cuales tienen una altura estimada en el rango de

$$E_{spha} \simeq \frac{m_W(T)}{\alpha_w} \approx 8 - 14 \text{ GeV}, \quad (1.19)$$

con  $\alpha_w = g^2/4\pi \simeq 1/30$  la constante de acoplamiento débil.

La probabilidad, o tasa de transición entre vacíos, es

$$\Gamma(T = 0) \approx e^{-4\pi/\alpha_w} \approx 10^{-170}. \quad (1.20)$$

Esta es tan pequeña que si el universo estuviera siempre cerca de la temperatura nula, no se esperaría ver que ocurriese la violación del número bariónico en el laboratorio o dentro del actual volumen de Hubble, en la historia del universo.

Los cambios correspondientes en  $B$  y  $L$ , al haber tres familias de fermiones en el MESON

$$\Delta B = \Delta L = N_f \Delta N_{CS}(t) = \pm 3n, \quad (1.21)$$

con  $n$  un entero positivo.

De la Ec. (1.21) puede observarse que aunque  $B$  y  $L$  se violan, la combinación  $(B - L)$  se conserva mientras que  $(B + L)$  se viola.

A temperatura finita, se puede desarrollar un nuevo método de generación de número bariónico, distinto al tunelaje, como veremos a continuación.

### Temperatura Finita

El sistema está descrito por la física estadística, en donde la probabilidad de tener una partícula en un determinado estado con una configuración determinada es proporcional al factor de Boltzmann,  $e^{-\beta E_0}$ , donde  $E_0$  es la altura de la barrera, la cual se identifica con la energía de la barrera  $E_{sph}$ . Por lo tanto, una fracción de estados tendrán la suficiente energía para pasar sobre la barrera, Fig. 1.2, es decir, las transiciones entre vacíos de la teoría pueden ser posibles debido a fluctuaciones térmicas que ayudaran a superar la barrera [12].

Así la razón de transición del *sphaleron* está dada por el factor de Boltzmann asociado con la formación del *sphaleron* [13]

$$\Gamma(T \neq 0) \simeq (\alpha_w T)^4 \exp\left(\frac{-E_{Sph}}{T}\right), \quad (1.22)$$

donde, haciendo uso de las ecuaciones de campo, la energía del *sphaleron* a temperatura finita, es

$$E_{Sphaleron} \simeq \frac{1}{\alpha_w} \epsilon m_W(T). \quad (1.23)$$

El factor  $\epsilon$  es una constante adimensional, acotada entre los valores  $3.1 < \epsilon < 5.4$ . Además, a una  $T \gg m_W(T)$ , la Ec. (1.22) es

$$\Gamma(T \neq 0) \simeq (\alpha_w T)^4, \quad (1.24)$$

debido a que la masa de los bosones de norma tiende a cero,  $m_W(T) \rightarrow 0$  para temperaturas altas, a causa de la restauración de la simetría. Por supuesto, lo anterior conduce a un tipo de violación del número bariónico completamente suprimidas.

Sin embargo, en la Fig. 1.2, las transiciones entre estos mínimos por procesos de *sphaleron* son aleatorias, de manera que así como inducen número bariónico neto, también lo borran. Por lo tanto, es necesario tener un mecanismo que permita que haya una dirección preferencial. Esto se consigue teniendo en cuenta la segunda condición de Sakharov.

### 1.2.2. Violación de C y CP

Se sabe que la violación de  $C$  es máxima en el Modelo Estándar Mínimo (MEM), debido a la naturaleza  $V - A$  del acoplamiento entre los fermiones presentes en el modelo y los bosones de  $SU(2)_L$ . Además, la simetría  $CP$  no es una simetría exacta en las interacciones débiles, pues ésta no se conserva en los sistemas de mesones neutros  $K$  y  $B$  [14].

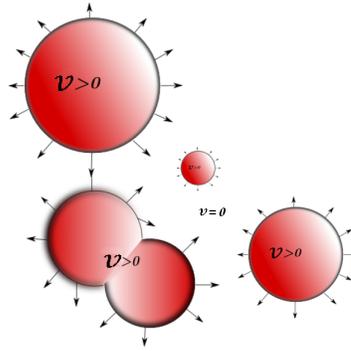
La violación de  $CP$  en el MEM se introduce en el sector de los quarks por medio de una matriz de masa compleja, llamada la matriz  $CKM$  (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa). Para tres familias de quarks,  $CKM$  puede ser parametrizada en términos de 3 ángulos ( $\theta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ) y 6 fases ( $\delta_{CP}$ ), de las cuales 5 pueden ser absorbidas en las funciones de onda de los quarks y la fase compleja restante es responsable de la violación de  $CP$  en modelo.

Si  $C$  y  $CP$  fueran simetrías exactas, la razón total de cualquier proceso que produzca un exceso de bariones, es igual a la razón del proceso complementario de exceso en la producción de antibariones; con lo cual el universo sería simétrico.

Anteriormente se mostró que a temperaturas relativamente altas, existen procesos que promueven a los campos a estar por arriba de la barrera del potencial multiperódico de la Fig. 1.2. Una vez que estos campos se encuentran por arriba de la barrera, estaríamos tentados a pensar que es igualmente probable que estos tienen libertad de “brincar” aleatoriamente entre los vacíos, tanto en la dirección que incrementa el número bariónico como en la contraria. El resultado final sería una producción de bariones igual a la de antibariones y no observaríamos una ABU. Sin embargo, cuando se consideran las violaciones de  $C$  y  $CP$  una de las dos direcciones posibles en la Fig. 1.2, es privilegiada, a saber, la de bariones, favoreciendo así la transición entre vacíos en una dirección.

La cantidad estimada de violación de  $CP$  para la matriz  $CKM$ , en el MEM, para el caso de tres generaciones de quarks, es función de los ángulos de rotación y de sus masas al cuadrado, y es cuantificada por la combinación [15]

$$\Delta_{CP} = \sin \theta_{12} \sin \theta_{23} \sin \theta_{13} \sin \delta_{cp} \times (m_t^2 - m_c^2) (m_t^2 - m_u^2) (m_c^2 - m_u^2) (m_d^2 - m_s^2) (m_b^2 - m_d^2) (m_s^2 - m_d^2), \quad (1.25)$$



**Figura 1.3:** Formación de burbujas mientras el universo temprano se enfriaba. En su interior (fase rota), el valor de expectación del vacío  $v \neq 0$ , mientras en la fase simétrica  $v = 0$ . Las burbujas se expandieron hasta eliminar la fase simétrica, mediante una “transición de fase de primer orden”.

que implica valores de

$$\frac{\eta_B}{s} \leq \frac{\Delta_{CP}}{N_{eff} T_C^{12}} \sim 10^{-20}, \quad (1.26)$$

donde  $T_C \sim 100 \text{ GeV}$  es la temperatura de la TFED. Así el valor dado en la Ec. (1.26) es muy pequeño en comparación con el requerido por nucleosíntesis en la Ec. (1.3) y *WMAP* en la Ec. (1.4).

El resultado anterior es una de las principales razones por la cual el escenario de bariogénesis, dentro del MEM no haya sido considerado como un modelo exitoso. Este hecho claramente indica que es necesario encontrar nuevas fuentes que aumenten la violación de  $CP$ , como por ejemplo supersimetría (SUSY).

### 1.2.3. Condición Fuera del Equilibrio Térmico

Anteriormente el agua hirviendo ha servido de ejemplo de pérdida del equilibrio térmico. Hay un proceso con ese mismo efecto en la teoría electrodébil a altas temperaturas, pero opuesto a lo que sucede cuando el agua hierve. En el universo temprano se formaron burbujas, como se muestra en la Fig. 1.3, a medida que este se enfriaba. En la fase fuera de las burbujas las partículas carecían de la masa que tienen de ordinario. Sólo dentro de estas las partículas recuperaban su masa y generaban la física que conocemos. Las burbujas se expandieron y, finalmente, excluyeron del universo toda la fase exótica sin masa. Un proceso de este tipo constituye una transición de fase de primer orden.

Como hemos visto, la razón de violación de número bariónico a temperatura nula es despreciable. Esta situación cambia para temperaturas del orden de la transición de fase electrodébil,  $100 \text{ GeV}$ .

Del modelo cosmológico estándar se sabe que el universo comenzó en una gran explosión, que al expandirse se ha ido enfriando paulatinamente. Al mismo tiempo, a escalas más pequeñas, la  $\Gamma_\sigma$ , también se fue modificando. A la escala electrodébil,  $\Gamma_\sigma$  es mayor que  $H$ . Esto implica que el mecanismo que saca fuera del equilibrio térmico al universo, se basa en una suficientemente fuerte transición de fase de primer orden, como se muestra en la Fig. 1.4 (a), que acontece a una temperatura crítica,  $T_C \simeq 100 \text{ GeV}$ . La manera en que sucede la Transición de Fase (TF), depende del modelo de física de partículas empleado en la descripción del universo. Sin las TF la historia térmica del universo se reduciría a un enfriamiento gradual, y la única condición fuera de equilibrio térmico provendría de la propia expansión del universo.

Dentro del marco de la teoría electrodébil, la TF recibe el nombre de Transición de Fase Electrodébil (TFED). Esta consiste en ir de un estado en donde las partículas no tienen masa (fase simétrica,  $v = 0$ ) a otro donde éstas se vuelven masivas (fase rota,  $v \neq 0$ ), vía el llamado mecanismo de Higgs. Además, la Fig. 1.4 (a) muestra que el potencial efectivo desarrolla un segundo mínimo, generando una barrera que separa la fase simétrica de la fase rota. A la temperatura  $T_C$ , ambas fases poseen la misma energía de manera que el paso de una fase a otra se lleva a cabo mediante efecto túnel.

Por lo tanto, para satisfacer la tercera condición de Sakharov es necesario que la TFED sea como se muestra en la Fig. 1.4 (a), de primer orden; en donde la variación discontinua del parámetro de orden (en este caso el campo de Higgs  $\phi$ ) provee las condiciones fuera de equilibrio. Si la TFED fuera de segundo orden, Fig. 1.4 (b),  $\phi$  cambia de manera continua, por lo que esta es insuficiente, debido a que la transición de un estado a otro sucede tan “suavemente,” que el equilibrio térmico no se ve tan afectado, para la generación de número bariónico.

La cantidad usada para estudiar si la TFED fue de primer o segundo orden, además de otras cantidades termodinámicas, es el potencial efectivo a temperatura finita. Éste toma en cuenta todas las correcciones cuánticas en una teoría. Para identificarlo se recurre a considerar la analogía entre la teoría cuántica de campos y la mecánica estadística.

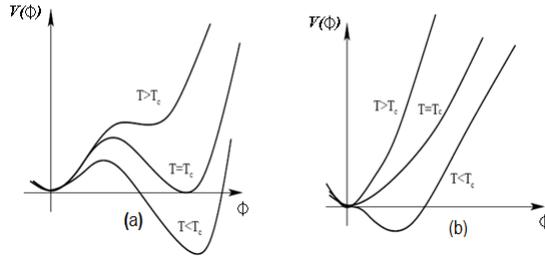
Para garantizar que la asimetría bariónica producida no se borre después que finalice la TFED, se necesita que la tasa de transición de los *sphalerones* en la fase rota,  $\Gamma$ , sea mucho menor que  $H$ .

La anterior consideración impone la siguiente restricción sobre el cociente:

$$\frac{v}{T_C} \simeq 1.0 - 1.5, \quad (1.27)$$

en donde  $v$  es el valor esperado del vacío ( $\langle vev \rangle$ ) para el campo de Higgs. Esta cota representa una condición sobre el orden de la TFED.

De otra parte, Shaposhnikov y otros [16] encontraron que la intensidad de la transición de fase depende, en el modelo estándar, de la masa del bosón de Higgs de la siguiente



**Figura 1.4:** (a) Transición de fase de primer orden. (b) Transición de fase de segundo orden.

manera, partiendo de la Ec. (1.22):

$$\frac{E_{sph}}{T_C} \approx \frac{m_W(T_C)}{\alpha_w T_C} \approx \frac{v}{g T_C} \approx \frac{g^2}{\lambda} \approx \frac{m_W^2}{m_H^2}, \quad (1.28)$$

en donde  $\lambda$  es la constante de acoplamiento del campo de Higgs con los restantes campos.

El valor máximo para este cociente es de 0.55, con una masa del campo de Higgs  $m_H(v) = 0$ . Se ha observado que a medida que la masa del Higgs se incrementa, la transición de fase se vuelve más débilmente de primer orden (el ancho de la barrera decrece) hasta el punto que, para una masa del Higgs del orden de  $72 \text{ GeV}$ , la TFED se vuelve de segundo orden [17]. La cota experimental de LEP-II sobre la masa del bosón de Higgs [18],  $m_H \geq 114.4 \text{ GeV}$  es incompatible con el requisito de la Ec. (1.27).

En resumen, de lo estudiado hasta ahora podemos decir:

- La violación de  $CP$  en el MEM falla por un factor de  $\approx 10^{-10}$ , respecto a los valores estimados por nucleosíntesis y  $WMAP$  para  $\eta_B$ . Se debe incluir nuevas fuentes de violación de  $CP$ .
- En el MEM la TFED sería sólo de primer orden si el Higgs es una partícula liviana,  $m_H \leq 70 \text{ GeV}$ . La actual cota experimental,  $m_H \geq 114.4 \text{ GeV}$ , hace que la intensidad de la transición de fase de primer orden, no sea suficiente para producir y posteriormente, mantener un número de bariones posible en esta etapa de la evolución del universo.

En consecuencia, se debe admitir que la TFED resulta demasiado débil para explicar la bariogénesis, a no ser que se añadan nuevos principios físicos hipotéticos.

### 1.3. Perspectivas para la Bariogénesis

El MEM como marco teórico no satisface completamente dos de las condiciones de Sakharov por lo cual, mucho esfuerzo se ha dedicado a proponer escenarios viables para

aumentar la cantidad de violación de CP y/o para hacer la TFED de primer orden más fuerte. Estos dos hechos hacen evidente que el MEM requiere de ingredientes extras para poder generar la asimetría bariónica observada hoy día. Dentro de este contexto, un número nada despreciable de mecanismos alternos han sido propuestos en la literatura para generar ABU [19]. A continuación trataremos en breve algunos de los mecanismos propuestos.

### 1.3.1. SUSY

Supersimetría (SUSY), es una simetría hipotética entre fermiones y bosones, que puede jugar algún papel en la naturaleza. Por ejemplo, SUSY parece ser una parte esencial de la teoría de supercuerdas, la única teoría consistente de la gravedad cuántica que conocemos.

Un modelo interesante es la versión SUSY del modelo estándar, conocida como Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM), en el cual se asume la existencia de dos campos de Higgs, con el fin de cancelar las anomalías y ser capaz de dar masa a todos los quarks y leptones.

En el MSSM y sus extensiones, las nuevas fuentes de violación de CP para la bariogénesis pueden venir por ejemplo, de la contribución dominante de la matriz de masa de los charginos (Higgsino-Wino), con un factor de supresión mucho mayor que  $10^{-10}$ . Además, introduce una serie ampliada de parámetros que permitan una mayor posibilidad de una transición de fase de primer orden [20].

Diferentes cálculos de la asimetría de bariones en el MSSM dan resultados un tanto diferentes [21]. Según [21] es posible la producción de suficientes bariones si el Higgs y los stop de la mano derecha, son muy ligeros, cerca de los límites experimentales actuales.

En cualquier caso, se ha conjeturado ampliamente que bariogénesis electrodébil en el MSSM pueda ser descartada o corroborada en el actual acelerador LHC (Large Hardron Collider) o en el futuro ILC (International Linear Collider).

### 1.3.2. Leptogénesis

Los experimentos recientes sobre las mediciones del flujo de neutrinos solares, atmosféricos, de reactores y aceleradores han establecido fuertes evidencias acerca de la existencia de oscilaciones de neutrinos [22]. Estas oscilaciones son posibles, desde el punto de vista teórico, siempre y cuando los neutrinos sean partículas masivas y sus estados de masa sean una mezcla de los estados de sabor de los neutrinos. Estas evidencias experimentales sugieren que los neutrinos tienen masas muy pequeñas, por debajo de los  $eV$ . La explicación más satisfactoria de este hecho se logra mediante el llamado mecanismo de see-saw [23]. Este mecanismo asume la existencia de neutrinos de mano derecha súper-pesados, con masas del orden de  $10^8$  a  $10^{14}$   $GeV$ .

Bariogénesis vía leptogénesis [24] es un escenario donde la violación de CP en el sector leptónico, a altas temperaturas, podría explicar la generación de la ABU, debido a que una asimetría de CP puede ser generada por la posible existencia de decaimientos, fuera del equilibrio térmico, de los neutrinos de Majorana pesados. Estos decaimientos violan número leptónico, lo cual conlleva a generar una asimetría leptónica, que es subsecuentemente transformada en una asimetría bariónica, gracias a la existencia de procesos tipo *sphaleron* que violan la simetría  $B + L$ .

Por desgracia, no está claro que leptogénesis pueda comprobarse directamente. Se espera que la observación de desintegraciones exóticas,  $\mu \rightarrow e + \gamma$ , proporcionará pruebas circunstanciales de este mecanismo. Una discusión más general de leptogénesis se puede consultar en la Ref. [25].

### 1.3.3. Campos Magnéticos Primordiales

La magnetogénesis es decir, el estudio de las “semillas” de campos magnéticos en el universo temprano, es uno de los problemas que aún quedan en la astrofísica relativista y la cosmología [26] por resolver. El enfoque general es identificar mecanismos para la generación de las “semillas” de campo [27] que más tarde pueden ser amplificados por colapso gravitacional y posiblemente también por el mecanismo del dínamo, en campos de mayor escala.

Algunos de los escenarios propuestos son por ejemplo: el proceso astrofísico del mecanismo de batería [31], ciertos tipos de modelos de inflación puede producir los campos magnéticos ampliándolos por encima del horizonte de distancias [29]. Otros mecanismos sitúan la magnetogénesis en procesos cosmológicos que sucedieron en el universo temprano, en particular, fluctuaciones cuánticas durante la época inflacionaria, precalentamiento y/o las transiciones de fase [30], mediante la formación de capas de dipolo en las superficies de las burbujas de la transición de fase.

En la actualidad no hay pruebas concluyentes acerca del origen de los campos magnéticos, su existencia antes de la TFE no puede ser descartada. Los campos magnéticos se han observado en todas partes del universo, desde nuestro propio planeta hasta la escala de galaxias, cúmulos, supercúmulos y en objetos con alto corrimiento al rojo [31].

Una variedad de observaciones astrofísicas basadas en la emisión de radiación sincrotrón y las mediciones de la rotación de Faraday, combinada con las medidas de dispersión y de polarización de pulsares sugieren la presencia de campos magnéticos a gran escala. Los valores de los campos magnéticos medidos (y acotados) en la escala  $L$  de distancias son [32]:

- Galaxias:  $B \simeq 50 \mu G$  en  $L < 1 \text{ kpc}$ ;  $B \simeq 5 - 10 \mu G$  en  $L \sim 10 \text{ kpc}$ .
- Cúmulos:  $B \simeq 1 \mu G$  en  $L \sim 1 \text{ Mpc}$ .
- Supercúmulos:  $B < 10^{-2} - 10^{-3} \mu G$  en  $L \sim 1 - 50 \text{ Mpc}$ .
- CMB:  $B < 10^{-3} - 10^{-5} \mu G$  en  $L > 100 \text{ Mpc}$ .

- Nucleosíntesis Primordial:  $B < 10^{11} G$  con  $T \sim 0.1$  MeV.

Clásicamente sabemos que los campos eléctricos, decaen rápidamente en un conductor, y por lo tanto no podrían sobrevivir en un plasma, como el universo temprano, que se comporta como un excelente conductor. Los campos magnéticos correspondientes a grupos de norma no Abelianos, tampoco podrían existir, ya que a temperaturas altas estos son apantallados sobre distancias mayores al inverso de la escala de masa magnética  $m \sim g^2 T$ . Por lo tanto los únicos campos de gran escala que pueden existir en el plasma, por largos periodos, deben estar asociados con algún grupo de simetría de norma Abeliano  $U(1)$  [33].

Cuando la temperatura del universo  $T > T_C$ , la simetría electrodébil  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  está restaurada, y existe un vector de norma  $Y_\mu$ , asociado al grupo de hipercarga  $U(1)_Y$ . Entonces si un campo magnético primordial existe, debe acoplarse con la hipercarga, por lo que es llamado campo hipermagnético. Si  $T < T_C$ , dicha simetría de norma se rompe a la simetría  $U(1)_{em}$  del electromagnetismo, donde ahora el campo sin masa es el del fotón, el cual se acopla con la carga eléctrica, generando el campo magnético ordinario.

Independientemente de su origen, los campos magnéticos desempeñan un papel importante en la evolución del plasma primordial del universo temprano, en la propagación de los rayos cósmicos en nuestra galaxia, así como en los cúmulos de galaxias, en la nucleosíntesis y posiblemente también en las transiciones de fase cósmica, como la TFED.

En 1998 [34] se revivió la posibilidad de explicar la ABU dentro del Modelo Estándar, mediante la adición de un campo (hiper) magnético externo primordial, durante la TFED. La expectativa es que el orden de la TFED se incremente. El fenómeno es análogo con el caso de la superconductividad en que un campo magnético externo cambia el orden de la fase de transición de segundo a primero, debido al efecto Meissner.

## Capítulo 2

# MODELO ESTÁNDAR MÍNIMO

Casi todos los fenómenos de física de partículas conocidos están muy bien descritos dentro del Modelo Estándar [35] de las partículas elementales<sup>1</sup> y sus interacciones fundamentales. El ME proporciona un marco teórico muy elegante que ha superado con éxito sus predicciones, mediante experimentos muy precisos que en la actualidad se encuentran a un nivel de confianza del 0.1 % [36] en función de la masa del Higgs.

En la naturaleza encontramos, por lo pronto, dos tipos de bloques fundamentales, como se muestra en la Fig. 2.1: los formados por las partículas que constituyen la materia y las partículas que transportan las fuerzas. El primer bloque lo conforman los fermiones que se agrupan en tres familias de quarks y de leptones. Los quarks, a diferencia de los leptones, tienen un número cuántico adicional, el color, el cual no se ha visto libre en la naturaleza y por lo tanto los quarks están confinados en las partículas de materia que han sido observadas experimentalmente, los hadrones. Los hadrones son partículas compuestas sin color, que se clasifican en bariones y mesones. Los bariones están hechos de tres quarks ( $qqq$ ). Por ejemplo, el protón tiene una composición  $uud$  y el neutrón  $ddu$ . Los mesones son bosones hechos de parejas quark-antiquark, como por ejemplo los piones  $\pi^+$  ( $u\bar{d}$ ) y  $\pi^-$  ( $d\bar{u}$ ).

En el segundo bloque, dejando aparte la interacción gravitacional, están los bosones vectoriales mediadores de la interacción fuerte, débil y electromagnética. Por último en la Fig. 2.1 hemos incluido un bosón escalar neutro, llamado Bosón de Higgs, el cual permanece aún sin descubrir y permite generar las masas de los bosones de norma  $W^\pm$  y  $Z^0$  y de los fermiones, tal y como los observamos en la naturaleza. Lo anterior se lleva a cabo mediante la implementación del rompimiento espontáneo de la simetría (RES) del grupo electrodébil al subgrupo del electromagnetismo:

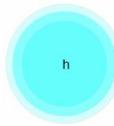
$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{QED}, \quad (2.1)$$

lo que exige la aparición de por lo menos un bosón de Higgs.

---

<sup>1</sup>Se entiende por partícula elemental un ente puntual carente de subestructura hasta los actuales límites de exploración:  $10^{-18}$  -  $10^{-19}$   $m$ .

Materia (Fermiones)				
	I	II	III	
masa →	3 MeV	1.24 GeV	172.5 GeV	0
carga →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
spin →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
nombre →	<b>u</b> up	<b>c</b> charm	<b>t</b> top	<b>γ</b> photon
Quarks	6 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ <b>d</b> down	95 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ <b>s</b> strange	4.2 GeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ <b>b</b> bottom	0 0 $\frac{1}{2}$ <b>g</b> gluon
	<2 eV 0 $\frac{1}{2}$ <b>ν<sub>e</sub></b> electron neutrino	<0.19 MeV 0 $\frac{1}{2}$ <b>ν<sub>μ</sub></b> muon neutrino	<18.2 MeV 0 $\frac{1}{2}$ <b>ν<sub>τ</sub></b> tau neutrino	90.2 GeV 0 1 <b>Z</b> fuerza débil
	0.511 MeV -1 $\frac{1}{2}$ <b>e</b> electron	106 MeV -1 $\frac{1}{2}$ <b>μ</b> muon	1.78 GeV -1 $\frac{1}{2}$ <b>τ</b> tau	80.4 GeV $\pm 1$ 1 <b>W<sup>±</sup></b> fuerza débil
Leptones				Fuerzas (Bosons)



Spin 0  
Higgs Boson

**Figura 2.1:** Partículas del Modelo Estándar en su versión mínima.

Asumiendo el ME, los resultados fallidos en la búsqueda directa del Higgs en el experimento LEP en combinación con la medición del Fermilab, imponen la siguiente cota a su masa:  $114.4 \text{ GeV} < m_h < 186 \text{ GeV}$  [37].

En cuanto a los aspectos teóricos, el ME es una teoría cuántica de campos basada en el grupo de simetrías de norma (*gauge*) local  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ :

- $SU(3)_C$ , describe las interacciones fuertes entre partículas con diferentes carga de color, vía el intercambio de ocho gluones, de colores diferentes,  $G_\mu^a$  ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ). El subíndice  $C$  es de color. Como los gluones transportan carga de color, no sólo interactúan con los quarks, sino también consigo mismos. La teoría de norma basada en este grupo es conocida como cromodinámica cuántica (QCD).

- $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , es la simetría de norma que describe las interacciones electrodébiles entre quarks y leptones.  $SU(2)_L$  es el grupo de isospín débil que actúa sólo sobre los fermiones de quiralidad izquierda y  $U(1)_Y$  es el grupo de hipercarga débil. El grupo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  tiene cuatro generadores, tres de los cuales son generadores de  $SU(2)_L$ ;  $T_i = \frac{\sigma_i}{2}$  con  $i = 1, 2, 3$ , y el cuarto generador es el de  $U(1)_Y$ ,  $\frac{Y}{2}$ . Las relaciones de conmutación para este grupo compuesto son:

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k; [T_i, Y] = 0; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Los fermiones de quiralidad izquierda,  $f_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)f(x)$ , transforman como dobletes de isospín débil con respecto a  $SU(2)_L$

$$f_L \rightarrow e^{i\vec{T} \cdot \vec{\theta}^{(x)}} f_L; \quad f_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \dots, \quad (2.3)$$

mientras las componentes de quiralidad derecha,  $f_R(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)f(x)$ , de todos los fermiones (a excepción de los neutrinos) transforman como singletes de isospín débil

$$f_R \rightarrow f_R; \quad f_R = e_R^-, u_R, d_R, \dots \quad (2.4)$$

Lepton	$T$	$T_3$	$Q$	$Y$
$\nu_l$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$e_L$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
$e_R$	0	0	-1	-2
Quark				
$u_L$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$d_L$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$u_R$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$d_R$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

**Tabla 2.1:** Números cuánticos para los fermiones de la primera familia del Modelo Estándar

Los correspondientes números cuánticos para los fermiones de la primera familia de la Fig. 2.1, se muestran en la Tabla 2.1.

La relación entre la hipercarga débil y la carga eléctrica  $Q$ , conocida como la relación de Gell-Mann-Nishijima es:  $Q = T^3 + Y/2$ , donde  $T^3$  es la tercera componente de isospín.

El número de bosones de norma asociados, es igual al número de generadores, cuatro:

- $W_\mu^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), estos son los bosones débiles de  $SU(2)_L$ .
- $B_\mu$ , este es el bosón de hipercarga de  $U(1)_Y$ .

En el caso de una teoría de norma como el ME se tiene la dificultad, como resultado de exigir la invariancia de norma, de sumar redundantemente sobre los campos de norma. Para obviar este problema y no perder la covariancia de Lorentz, se introducen grados de libertad espurios mediante la fijación del parámetro norma. Es decir para cuantizar una teoría de norma, es necesario fijar la norma.

El ME constituye uno de los logros más relevantes de la física del siglo XX, es el más simple de muchos modelos, la mayoría, incapaces de explicar los presentes datos experimentales. Esta es la razón por lo cual el ME es considerado una teoría fenomenológicamente válida a bajas energías ( $E \ll 1$  TeV). Sin embargo, todavía hay muchas preguntas sin respuesta, algunas de las cuales son:

1. ¿Existe realmente un bosón de Higgs, como predice el ME? Si es así, ¿Cuál es su masa?
2. Si no, ¿Cuál es el origen del rompimiento espontáneo de la simetría?
3. ¿Por qué hay una jerarquía en el espectro de masa de los fermiones observados actualmente?
4. ¿Cuál es el origen de la materia oscura y de la energía oscura?
5. ¿Qué paso con la antimateria en el universo?

## 6. ¿Cómo entra la gravedad en todo esto?

Las anteriores preguntas indican que el ME debe ser remplazado por una teoría más fundamental a altas energías.

En este capítulo, se exponen las ideas de una de las propuestas que mejor satisfacen cada una de las tres condiciones de Sakharov. Esta corresponde al sector electrodébil del Modelo Estándar Mínimo (MEM), es decir, un solo doblete de campos escalares de  $SU(2)_L$  es introducido para generar las masas de las partículas.

## 2.1. Lagrangiano del Modelo Estándar

La cuantización del MEM en una norma arbitraria covariante, usando la técnica de Faddeev-Popov [38] no sólo involucra los campos físicos tales como los bosones de norma  $W_\mu, Z_\mu, A_\mu$ , el Higgs neutro  $h$ , y los fermiones, sino además, los bosones de Goldstone cargados ( $\chi^\pm$ ) y neutro ( $\chi_3$ ) los cuales son campos que no se propagan asintóticamente. Sin embargo, estos campos aparecen en los diagramas de orden superior en los propagadores.

Trabajando en una norma renormalizable del tipo de t'Hooft, la así llamada norma  $R_\xi$ , con el fin de compensar las contribuciones de las componentes espurias de los campos de norma, es necesario introducir los llamados campos fantasmas de Faddeev-Popov:  $\eta_w^\pm, \eta_z, \eta_\gamma$ . Así, el Lagrangiano completo del MEM tendrá una dependencia en la elección del término que fija la norma.

Para examinar todas las contribuciones al potencial efectivo del MEM, escribimos el Lagrangiano sector por sector, en la norma arbitraria  $R_\xi$  que, después del rompimiento de la simetría, tendrá una expresión de la forma

$$\mathcal{L}_{ME} = \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{gb} + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{FP}, \quad (2.5)$$

donde  $\mathcal{L}_H$ ,  $\mathcal{L}_{gb}$ ,  $\mathcal{L}_f$ ,  $\mathcal{L}_Y$ ,  $\mathcal{L}_{gf}$  y  $\mathcal{L}_{FP}$  son los Lagrangianos que describen el sector del Higgs, de bosones de norma, de fermiones, de Yukawa, que fija la norma y el de Faddeev-Popov, respectivamente.

Para que el  $\mathcal{L}_{ME}$  sea invariante bajo transformaciones de norma locales  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ :

$$\begin{aligned} f_L &\rightarrow e^{i\vec{T} \cdot \vec{\theta}(x)} f_L; \\ f_R &\rightarrow f_R; \\ f &\rightarrow e^{i\frac{Y}{2}\alpha(x)} f; \\ W_\mu^i &\rightarrow W_\mu^i - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i(x) + \epsilon^{ijk}\theta^j W_\mu^k; \\ B_\mu &\rightarrow B_\mu - \frac{1}{g'}\partial_\mu\alpha(x), \end{aligned} \quad (2.6)$$

la derivada covariante debe tener la forma

$$D_\mu = (\partial_\mu - ig\vec{T} \cdot \vec{W}_\mu - ig' \frac{Y}{2} B'_\mu), \quad (2.7)$$

donde  $W_\mu^i$  está asociado a  $SU(2)_L$ , y  $B'_\mu = B_\mu + B_\mu^{\text{ext}}$  es el campo de norma asociado a  $U(1)_Y$  y donde  $g$  y  $g'$  son las respectivas constantes de acoplamiento.

Por ejemplo, la derivada covariante para un fermión de quiralidad izquierda  $\Psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi$ , y para uno de quiralidad derecha  $\Psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi$  es, respectivamente

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi_L &= (\partial_\mu - ig \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_\mu + ig' \frac{1}{2} B'_\mu) \Psi_L; \\ D_\mu \Psi_R &= (\partial_\mu + ig' B'_\mu) \Psi_R, \end{aligned} \quad (2.8)$$

en donde se define los proyectores de helicidad:

$$P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5), \quad (2.9)$$

y la hipercarga se determina por la relación de Gell-Mann-Nishijima

$$\begin{aligned} Y_L(q) &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & Y_L(l) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y_R(q) &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, & Y_R(l) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

## 2.2. Simetría

El concepto de simetría es de gran importancia en el estudio de las partículas elementales y sus interacciones. Decimos que en un sistema físico hay una simetría  $S$ , cuando este es invariante bajo una transformación dada por  $S$  o equivalentemente, cuando el Hamiltoniano del sistema  $H$  es invariante, esto es

$$SHS^\dagger = H. \quad (2.11)$$

De acuerdo al parámetro que define la transformación de simetría, estas se pueden clasificar en:

### 1. *Simetrías Discretas:*

Los parámetros sólo pueden tomar valores discretos. Los ejemplos más relevantes son;  $P$ ,  $C$  y  $T$ , tratadas en el capítulo 1.

### 2. *Simetrías Continuas*

Los parámetros toman valores continuos. Hay diferentes clases de simetrías continuas, dos de ellas son:

- *Las simetrías de espacio-tiempo:*

las leyes de conservación de la física clásica (energía, momento, momento angular) son una consecuencia del hecho que las interacciones son invariantes con respecto a sus cantidades canónicamente conjugadas (tiempo, espacio, ángulos). En otras palabras, las leyes físicas son independientes del tiempo, la localización y la orientación en el espacio en que se suceden.

- *Las simetrías internas:*  $SU(2)$  de isospín, la simetría bariónica y leptónica.

Tenemos dos distintas clases de simetría internas:

1. *Simetría de norma global*

El parámetro de la transformación es independiente del punto de observación en el espacio-tiempo. Esta transformación de simetría imponen varias constricciones sobre la estructura de la teoría.

2. *Simetría de norma local*

En este caso, el parámetro depende del punto de análisis en el espacio-tiempo. Esta transformación es más restrictiva, y conduce a lo que son las interacciones de la teoría.

### 2.2.1. Rompimiento Espontáneo de la Simetría

Otro concepto que aparece en física de partículas, como una idea generalizada de ideas establecidas en la física del estado sólido es el de *rompimiento espontáneo de la simetría* (RES). Por ejemplo: en el estudio de las propiedades magnéticas del hierro, donde el Lagrangiano que describe la interacción espín-espín es invariante bajo rotaciones tridimensionales pero, el estado fundamental no lo es. Otro ejemplo es el efecto Meissner, que consiste en la expulsión del campo magnético del interior de un material superconductor, por debajo de su temperatura crítica.

Una de las características comunes a todo proceso de RES es que el parámetro característico del sistema físico (parámetro de orden) asume un valor crítico más allá del cual la configuración simétrica natural del sistema se vuelve inestable. El nuevo estado de mínima energía resulta ser degenerado. Por lo tanto, no se puede saber en cuál de todos los posibles estados el sistema habrá de caer. Una vez que el estado base asume espontáneamente alguno de los infinitos posibles estados, nuevos estados quedan definidos mediante un nuevo grupo de simetrías del sistema, el cual corresponde a un subgrupo del grupo original.

En teoría de campos se define al estado fundamental, o de vacío, como el estado de mínima energía, el cual puede ser degenerado. Si este estado no es invariante bajo un grupo de transformaciones, mientras que el Lagrangiano del sistema sí lo es, bajo el mismo grupo de transformaciones, decimos que tenemos un RES. En física de partículas el RES es el mecanismo responsable de generar la masa de las partículas.

De manera más concreta analicemos en qué consiste el RES, en el caso de un modelo descrito por el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2, \quad (2.12)$$

donde  $\phi(x)$  es un campo escalar complejo, y con el parámetro  $\lambda > 0$ , para que el potencial sea acotado inferiormente. Este Lagrangiano es invariante bajo el grupo de transformaciones globales de  $U(1)$

$$\phi(x) \rightarrow e^{-iQ\theta} \phi(x). \quad (2.13)$$

Cuando  $m^2 > 0$ , el Lagrangiano de la Ec. (2.13) describe un campo escalar con masa  $m^2$ , auto-interactuante. En este caso el mínimo de energía potencial, corresponde al valor de  $\phi(x) = 0$ . En otras palabras, el valor esperado en el vacío de  $\phi$  es nulo ( $\langle 0|\phi(x)|0 \rangle = 0$ ).

Sin embargo, el caso de interés es cuando  $m^2 < 0$ . Si definimos un nuevo campo de acuerdo a la relación

$$\phi(x) = \frac{\phi_1(x) + i\phi_2(x)}{\sqrt{2}}, \quad (2.14)$$

el Lagrangiano de la Ec. (2.13) toma la siguiente forma en términos de  $\phi_1$  y  $\phi_2$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \{ [\partial_\mu \phi_1]^2 + [\partial_\mu \phi_2]^2 - m^2[\phi_1^2 + \phi_2^2] - \lambda[\phi_1^2 + \phi_2^2]^2/2 \}. \quad (2.15)$$

De aquí es evidente que aparecen dos mínimos para el potencial (caso degenerado)

$$\phi^* \phi = v^2, \quad v = \pm \left( \frac{-m^2}{2\lambda} \right)^{1/2}, \quad (2.16)$$

que corresponde a un círculo de radio  $v$ , en el plano complejo  $\phi_1, \phi_2$ . Dicho potencial se muestra en la Fig. 2.2. El RES ocurre cuando el sistema elige un estado de vacío. Entonces el campo  $\phi$  adquiere un *vev* no nulo ( $\langle 0|\phi(x)|0 \rangle = v$ ).

Dentro de la física de partículas elementales en la mayoría de casos no es posible obtener soluciones exacta. Por lo tanto, se tiene que usar comúnmente la expansión en serie de la teoría de perturbaciones y calcular fluctuaciones cuánticas alrededor del *vev*.

Sin pérdida de generalidad podemos escoger  $\phi = +v$  ó  $\phi = -v$  indistintamente. Parametrizando  $\phi(x)$  exponencialmente mediante la introducción de dos campos reales  $\eta(x)$  y  $\chi(x)$ :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(v + \eta(x)) + i\chi(x)]. \quad (2.17)$$

Por correspondencia con la Ec. (2.14) vemos que esto es equivalente a:  $\phi_1 \equiv \eta + v$  y  $\chi \equiv \phi_2$ .

Reescribiendo el Lagrangiano de la Ec. (2.15) en términos de los campos  $\eta$  y  $\chi$ , obtenemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi) + m^2 \eta^2 + O(3). \quad (2.18)$$

El término cuadrático en  $\eta$  se debe interpretar como la masa, no aparece un término masivo correspondiente al campo  $\chi$ . Entonces la teoría predice también una partícula escalar sin masa, la cual es conocida como bosón de Goldstone.

## 2.3. Sector de Higgs

El Lagrangiano del campo escalar cargado auto-interactuante está dado por

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi), \quad (2.19)$$

donde  $D_\mu$  es la derivada covariante definida por la Ec. (2.7), y  $V(\Phi)$  es el potencial escalar.

La simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  de el Lagrangiano en la Ec. (2.19) está rota espontáneamente introduciendo un escalar de Higgs,  $\Phi$  adecuado, el cual desarrolla un *vev* distinto de cero.

### 2.3.1. Mecanismo de Higgs

En el ME, el mecanismo de Higgs [39] es el que permite la existencia de términos de masa de los bosones de norma y fermiones cargados. Para implementar este mecanismo se introduce un campo escalar  $\Phi$  que rompa la simetría  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , y debido a las condiciones que se le exige a  $\Phi$ , éste consiste en un doblete de  $SU(2)_L$  con hipercarga  $Y = +1$ , de la forma

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_2 + i\chi_1 \\ v + h - i\chi_3 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

con  $\phi^+$  y  $\phi^0$  campos complejos,  $h$  como el campo de Higgs físico y  $\chi_j (j = 1, 2, 3)$  denota a los tres bosones de Goldstone.

El número total de dobletes de Higgs no está determinado por el modelo y podría ser cualquiera. No obstante, en la versión mínima, el ME posee uno sólo de estos dobletes, de ahí el nombre de MEM.

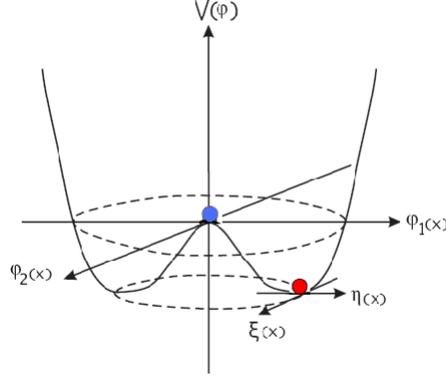
El potencial en el Lagrangiano de la Ec. (2.19) puede ser escrito como

$$V(\Phi) \equiv -\mu^2(\Phi^\dagger \Phi) + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 = \lambda \left[ \Phi^\dagger \Phi - \frac{\mu^2}{2\lambda} \right]^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda}. \quad (2.21)$$

El potencial  $V(\Phi)$ , a nivel árbol, en términos del campo real  $\phi$  está dado por

$$V_0(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (2.22)$$

Sí  $\mu^2 > 0$ , el Lagrangiano de la Ec. (2.19) describe un campo real de masa (desnuda)  $\mu$ , que auto-interactúa a través del término  $(\lambda/4)\phi^4$ . En este caso el estado base o de



**Figura 2.2:** Forma del potencial  $V(\Phi)$  para un campo escalar complejo, en el caso  $\mu^2 > 0$  y  $\mu^2 < 0$ , con  $\lambda > 0$ .

vacío (el mínimo de  $V(\phi)$ ) corresponde a  $\phi = 0$ , que es simétrico (respecto al cambio  $\phi \rightarrow -\phi$ ) y estable, como muestra el punto azul, en la Fig. 2.2. El caso interesante es cuando  $\mu^2 < 0$ . El mínimo de  $V_0(\phi)$  corresponde a

$$\langle 0 | \Phi^\dagger \Phi | 0 \rangle \equiv v = \pm \sqrt{-\mu^2/2\lambda}. \quad (2.23)$$

De la expresión anterior se observa que el estado de vacío es degenerado, pues éste se puede escoger de muchas formas posibles. Sin embargo, en el caso del MEM, se exige que el estado de vacío sea único. Al escoger uno de ellos como estado base, se rompe espontáneamente la simetría (punto en rojo, Fig. 2.2).

Los acoplamiento entre los diferentes campos y el espectro de masa se visualiza en los términos cuadráticos. Hay un bosón escalar neutro con masa  $m_h$ ,

$$m_h^2(v) = 3\lambda v^2 - \mu^2, \quad (2.24)$$

y bosones de Goldstone con masa  $m_\chi$ :

$$m_\chi^2(v) = \lambda v^2 - \mu^2. \quad (2.25)$$

Cuando la componente neutra del campo de Higgs adquiere un  $vev$ ,  $\langle 0 | \phi^0 | 0 \rangle = v/\sqrt{2}$ . Con  $v_0 \simeq 246 \text{ GeV}$ , determinado por los resultados experimentales de LEP. La simetría electrodébil se rompe espontáneamente, según el esquema

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q. \quad (2.26)$$

### 2.3.2. Término de Interacción

Del término de energía cinética de la Ec. (2.19) se obtiene, vía el mecanismo de Higgs, la masa de los bosones de norma,  $m_{gb}$ . En la fase con simetría rota, asumiendo

que los campos reales  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $h$  y  $\chi_3$  en la Ec. (2.20) son nulos. Tenemos entonces cuatro bosones de norma, tres masivos y uno, ortogonal a  $Z_\mu$ , no masivo, denotados respectivamente así

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \text{ con masa } m_W^2 = g^2 \frac{v^2}{4}; \\ Z_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_\mu^3 - g'_\mu) \text{ con masa } m_Z^2 = (g^2 + g'^2) \frac{v^2}{4}; \\ A_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g'W_\mu^3 + gB'_\mu) \text{ con masa } m_A^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Además, tenemos los correspondientes bosones de Goldstone asociados al  $W_\mu^\pm$  y  $Z_\mu$ , y denotados como  $\chi^\pm = (\chi_1 \mp i\chi_2)/\sqrt{2}$  y  $\chi_3$ .

La Ec. (2.27) establece la relación entre los campos de norma  $W_\mu^a$ ,  $B_\mu$  y  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu$ ,  $A_\mu$  antes y después del rompimiento de la simetría, respectivamente

Con el fin de obtener los términos de interacción entre el campo de Higgs y los bosones de norma, es conveniente volver a escribir la derivada covariante Ec. (2.7), en términos de los auto-estados de masa, teniendo en cuenta la relación de Gell-Mann-Nishijima, como

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i\frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu (g^2 T^3 - g'^2 Y) \\ &\quad - i\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Q A_\mu, \end{aligned} \quad (2.28)$$

Lo anterior se llevado a cabo explícitamente mediante la aplicación de la Ec. (2.28), en términos de los estados definidos en la Ec. (2.27), al doblete de campos de Higgs dado por la Ec. (2.20), y haciendo uso de la defición

$$A \overleftrightarrow{\partial} B \equiv \frac{1}{2} \left( A \overleftarrow{\partial} B - A \overrightarrow{\partial} B \right), \quad (2.29)$$

se tiene para el término cinético de la Ec. (2.19)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{cin} &= \frac{1}{2} g W_\mu^+ (\chi^- \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi) + \frac{1}{2} g W_\mu^- (\chi^+ \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi) + \frac{i}{2} g W_\mu^+ (\chi_3 \overleftrightarrow{\partial}^\mu \chi^-) \\ &\quad - \frac{i}{2} g W_\mu^- (\chi_3 \overleftrightarrow{\partial}^\mu \chi^+) + \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu (\chi_3 \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi) + \frac{i}{2} g W_\mu^- (\chi_3 \overleftrightarrow{\partial}^\mu \chi^+) \\ &\quad + \frac{i}{2} \frac{g^2 - g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu (\chi^- \overleftrightarrow{\partial}^\mu \chi^+) + \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu (\chi^- \overleftrightarrow{\partial}^\mu \chi^+) \\ &\quad + \frac{1}{4} g^2 W_\mu^+ W^{-\mu} (2v\phi + \phi\phi + 2\chi^+ \chi^- + \chi_3 \chi_3) \\ &\quad + \frac{1}{8} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu (2v\phi + \phi\phi + \chi_3 \chi_3) + \frac{g^2 g'^2}{(g^2 + g'^2)} A_\mu A^\mu \chi^+ \chi^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{gg'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu [W^{+\mu} \chi^-(\chi_3 + iv + i\phi) + W^{-\mu} \chi^+(\chi_3 - iv - i\phi)] \\
& - \frac{1}{2} \frac{g^2 g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu [W^{+\mu} \chi^-(\chi_3 + iv + i\phi) - W^{-\mu} \chi^+(\chi_3 - iv - i\phi)] \\
& - gg' \frac{(g^2 - g'^2)}{(g^2 + g'^2)} Z_\mu A^\mu \chi^+ \chi^- + \frac{1}{4} \frac{(g^2 - g'^2)^2}{g^2 + g'^2} Z_\mu Z^\mu \chi^+ \chi^-. \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Por otra parte, las auto-interacciones del campo de Higgs obtenidas del potencial escalar, de la Ec. (2.21), son

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V & = -\mu^2(\Phi^\dagger \Phi) + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 \\
& \approx -2v\lambda(\phi \chi^+ \chi^-) - v\lambda(\phi \chi_3 \chi_3) - v\lambda(hhh) \\
& - \lambda(\chi^- \chi^- \chi^+ \chi^+) - \lambda(\chi^- \chi^+ \chi_3 \chi_3) - \lambda(\phi \phi \chi^- \chi^+) \\
& - \frac{1}{4} \lambda(\chi_3 \chi_3 \chi_3 \chi_3) - \frac{1}{4} \lambda(\phi \phi \phi \phi) - \frac{1}{2} \lambda(\phi \phi \chi_3 \chi_3). \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Los diagramas de Feynman asociados a las Ecs. (2.30) y (2.31), se muestran en la Fig. 3.1.

## 2.4. Sector de Bosones de Norma

El Lagrangiano de energía cinética de los bosones de norma  $SU(2)_L$  y  $U(1)_Y$  es

$$\mathcal{L}_{gb} = -\frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B'^{\mu\nu} B'_{\mu\nu}, \tag{2.32}$$

donde

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}^i & = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \\
B'_{\mu\nu} & = \partial_\mu B'_\nu - \partial_\nu B'_\mu. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Después de hacer las rotaciones de los campos de norma definidos en la Ec. (2.27), se obtiene de la Ec. (2.32) el término cinético de los campos  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu$ ,  $A_\mu$  y las de auto-interacciones entre tres y cuatro bosones de norma, debido a la parte no Abelianiana del campo  $W_i^{\mu\nu}$ .

## 2.5. Sector de Fermiones

El Lagrangiano para el sector fermiónico es

$$\mathcal{L}_f = \bar{\Psi}_R \not{D} \Psi_R + \bar{\Psi}_L \not{D} \Psi_L, \tag{2.34}$$

en donde  $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$ , y  $\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu$ .

Una vez más, las interacciones entre fermiones y bosones de norma se obtienen escribiendo la derivada covariante en términos de los auto-estados de masa después de la ruptura de la simetría.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^{int} &= \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{\Psi}_I U_{ij}^* \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \Psi_i W_\mu^+ + \bar{\Psi}_i U_{ij} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \Psi_I W_\mu^- \right] \\ &+ \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \left[ \bar{\Psi}_I \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \Psi_I Z_\mu - \bar{\Psi}_i \gamma^\mu (g_V + g_A \gamma_5) \Psi_i Z_\mu \right] \\ &+ \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Q_f \bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_f A_\mu, \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde los subíndices  $i$  e  $I (= 1, 2, 3)$  representan las tres familias de leptones y quarks. Además,  $g_V = T^3 - 2Q_{i,I} \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$  y  $g_A = T^3$ , con  $U_{ij}$  un elemento de la matriz CKM. La matriz CKM se debe al hecho de que los estados propios de la interacción débil no son los mismos que los de masa y por lo tanto hay mezclas entre sabores.

## 2.6. Sector de Yukawa

La introducción de un término de masa en la Lagrangiana de la Ec. (2.34), en donde  $\Psi = \Psi_L + \Psi_R$  es

$$m_f \bar{\Psi} \Psi = m_f \left[ \bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L \right],$$

no está permitido porque rompe explícitamente la invariancia de norma, bajo una transformación de  $SU(2)_L$ .

Sin embargo, como hemos introducido un doblete escalar adicional en el modelo, podemos escribir el siguiente acoplamiento fermión-escalar, invariante de norma, para las tres familias de quarks y leptones:

$$\mathcal{L}_Y = \sum_i y_i \bar{l}_{iL} \Phi l_{iR} + \sum_I y_I \bar{q}_{iL} \tilde{\Phi} q_{iR}, \quad (2.36)$$

donde  $y_i$  y  $y_I$  son matrices de  $3 \times 3$ , y con  $l_{i(L,R)}$  y  $q_{i(L,R)}$  se denota el triplete de leptones (asumiendo la no existencia de los neutrinos de mano derecha,  $\nu_R$ ) y de quarks correspondientes, por lo tanto, puede existir mezclas entre los quarks. Además, el segundo término involucra el campo escalar conjugado de carga, con hipercarga  $Y(\tilde{\Phi}) = -1$  (que transforma bajo  $SU(2)$  de la misma forma que  $\Phi$ ):

$$\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + h + i\chi_3 \\ i\chi_1 - \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

en donde  $\sigma_2$  es la segunda matriz de Pauli.

Dado que trabajamos en el límite donde todas las masas de los fermiones<sup>2</sup> cargados, excepto la masa del quark top, son insignificantes, la principal contribución al sector de Yukawa está dada por

$$\mathcal{L}_Y = y_t \bar{q}_L \tilde{\Phi} t_R + h.c., \quad (2.38)$$

donde  $y_t$  es la constante de acoplamiento de Yukawa del quark top,  $q_L$  denota el doblete de quark de la tercera familia, y  $t_R$  denota el quark de mano derecha.

Después del RES, el Lagrangiano tipo Yukawa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= \frac{y_t}{\sqrt{2}} v \bar{\psi} \psi + \frac{y_t}{\sqrt{2}} \bar{\psi} \psi h + i \frac{y_t}{\sqrt{2}} \bar{\psi} \gamma_5 \psi \chi_3 \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_i [y_j P_R - y_i P_L] \psi_j U_{ij} \chi^+ \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_j [y_i P_R - y_j P_L] U_{ij}^* \psi_i \chi^-, \end{aligned} \quad (2.39)$$

genera la masa del quark top  $m_t = \frac{y_t}{\sqrt{2}} v$ , la cual es un parámetro de entrada del modelo, debido a que  $y_t$  es un parámetro libre. Además, el Lagrangiano también determina la interacción entre fermiones (top), el campo de Higgs, cómo puede verse en la Fig. 5.1 (f), y los bosones de Goldstone.

## 2.7. Sector que Fija la Norma

En teorías de norma con RES, tal como el ME, existen variables tales como los bosones de Goldstone que no representan verdaderos grados de libertad dinámicos. En otras palabras, son grados de libertad no físicos, cuya física es dar masa a los bosones de norma masivos. Sin embargo, aparecen como campos propagándose en líneas internas de diagramas de Feynman, con masas proporcionales a la de los bosones de norma  $W^\mp$  y  $Z^0$ , respectivamente,

$$m_1^2 = m_2^2 = \lambda v^2 - c^2 + \xi_W g^2 \frac{v^2}{4}, \quad (2.40)$$

y

$$m_3^2 = \lambda v^2 - c^2 + \xi_Z (g^2 + g'^2) \frac{v^2}{4}. \quad (2.41)$$

---

<sup>2</sup>Los resultados de la colaboración Sudbury Neutrino Observatory (SNO) ha proporcionado pruebas convincentes, que están en buen acuerdo con los datos más recientes de Super-Kamiokande, KamLAND y de neutrinos atmosféricos, de que los neutrinos cambian el sabor a medida que se propagan desde el núcleo del Sol a la Tierra. Por lo tanto, la evidencia experimental muestra ahora que los neutrinos son partículas masivas y se mezclan en el sector de leptones, al igual que el sector de los quarks. Por otra parte, no se sabe si son partículas de Dirac o de Majorana, i.e. si son o no su propia antipartícula y por lo tanto que no se sabe como incorporar el hecho de que estas partículas tienen masa, dentro del ME.

dañando la renormalización de la teoría.

Con el propósito de poder definir entre otras cosas a los propagadores y para que ellos tenga inverso, se debe adicionar al Lagrangiano del ME un término que fije la norma. Tomando una norma renormalizable del tipo 't Hooft ( $R_\xi$  gauge) [40], la cual fija linealmente el parámetro la norma. Se tiene en el caso del MEN el Lagrangiano que fija la norma es de la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{gf} &= -\frac{1}{\xi_W}(\partial^\mu W_\mu^+ - i\xi_W M_W \chi^+)(\partial^\mu W_\mu^- + i\xi_W M_W \chi^-) \\
&\quad - \frac{1}{2\xi_Z}(\partial^\mu Z_\mu - \xi_Z M_Z \chi_3)^2 - \frac{1}{2\xi_\gamma}(\partial^\mu A_\mu)^2 \\
&= \frac{1}{\xi_W}\partial^\mu W_\mu^+ \partial^\nu W_\nu^- - \frac{1}{2\xi_Z}(\partial^\mu Z_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi_\gamma}(\partial^\mu A_\mu)^2 \\
&\quad + \frac{1}{\xi_W}M_W^2 \chi^+ \chi^- + \frac{1}{2\xi_Z}M_Z^2 \chi_3^2 \\
&\quad + iM_W \chi^+ \partial^\mu W_\mu^+ + iM_W \chi^- \partial^\mu W_\mu^- + M_Z \chi_3 \partial^\mu Z_\mu, \tag{2.42}
\end{aligned}$$

donde  $\xi_j$  ( $j = W^\pm, Z^0, \gamma$ ) es el parámetro de norma, y el último término que mezcla los Goldstone y los bosones de norma, se cancelan con un término idéntico que viene del Lagrangiano de la Ec. (2.30).

En el límite de  $\xi_j \rightarrow \infty$  los bosones de Goldstone desaparecen y se tiene la norma unitaria. Otras opciones de norma son la de Landau ( $\xi_j = 0$ ) y de Feynman ( $\xi_j = 1$ ).

Debemos notar que en la Ec. (2.42) tenemos tres diferentes parámetros de norma, debido a que en principio deberá existir un parámetro de norma por cada bosón de norma. Por lo tanto, los procesos físicos no deben depender del parámetro  $\xi_j$ . Es común poner todas las  $\xi_j = \xi$  ( $\xi \in R^+$ ), sin pérdida de generalidad.

## 2.8. Sector de Faddeev-Popov

Con el fin de mantener los requerimientos de unitariedad e invariancia de norma, en la cuantización de teorías de norma no Abelianas, Feynman introduce la idea de campos fantasmas [41],  $\eta^a$  y  $\bar{\eta}^a$  ( $a = W^\mp, Z^0, \gamma$ ). A estos campos adicionales, se les dió el nombre de fantasmas porque a pesar de ser escalares bajo transformaciones de coordenadas, no tienen estadística de bosón, es decir, violan el teorema de espín-estadística, por lo cual no son observables. Estos campos adquirieron más sentido cuando Faddeev y Popov [38] cuantizan la teoría de campos no Abelianas, mediante el método de integrales de camino.

Dado que trabajamos con un valor arbitrario del parámetro que fija la norma, los campos fantasma adquieren una masa proporcional al correspondiente bosón de norma  $m_{gb}$

$$m_{\eta_{gb}}^2 = \xi m_{gb}^2. \tag{2.43}$$

Los campos fantasmas no se propagan asintóticamente, por lo tanto sólo aparecen en las líneas internas de los diagramas de Feynman. Sin embargo, van a contribuir a la parte dependiente del *vev* en el cálculo del potencial efectivo a un lazo.

El correspondiente Lagrangiano para los campos fantasmas del MEM está dada por

$$\mathcal{L}_{FP} = \bar{\eta}^a \frac{\delta F^a}{\delta \theta^b} \eta^b = \bar{\eta}^a \delta_{BRS} F^a. \quad (2.44)$$

donde  $\frac{\delta F^a}{\delta \theta^b}$  es la variación de la función que fija la norma del campo  $a$  y BRS se refiere a la transformación de Becci, Route y Stora, la cual consiste en cambiar el parámetro  $\theta$  de la transformación de norma por el respectivo campo fantasma, además  $\theta_{BRS} \bar{\eta}^a = 0$ .

Suponiendo que los fantasmas rotan exactamente igual que el campo de norma, se tiene que su variación bajo una transformación BRS de estos es

$$\begin{aligned} \delta W_\mu^\pm &= \pm ig W_\mu^\pm (\cos \theta \eta_Z + \sin \theta \eta_\gamma) \mp ig \eta^\pm (\cos \theta Z_\mu + \sin \theta A_\mu) + \partial_\mu \eta^\pm \\ &= ig \cos \theta (W_\mu^- \eta^+ - W_\mu^+ \eta^-) + \partial_\mu \eta_Z \\ &= -ig \sin \theta (W_\mu^- \eta^+ - W_\mu^+ \eta^-) + \partial_\mu \eta_\gamma. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por lo tanto, el  $\mathcal{L}_{FP}$  en función de los auto-estados de masa se expresa como

$$\mathcal{L}_{FP} = \bar{\eta}^+ \delta F_W^+ + \bar{\eta}^- \delta F_W^- + \bar{\eta}_Z \delta F_Z + \bar{\eta}_\gamma \delta F_\gamma, \quad (2.46)$$

donde  $F$  en el  $R_\xi$ , es, respectivamente

$$\begin{aligned} F_{W^\pm} &= \sqrt{\xi_W} \partial^\mu W_\mu^\pm \mp i \frac{1}{\sqrt{\xi_W}} M_W \phi^\pm; \\ F_Z &= \sqrt{\xi_Z} \partial^\mu Z_\mu - \frac{1}{\sqrt{\xi_Z}} M_Z \chi; \\ F_\gamma &= \sqrt{\xi_\gamma} \partial^\mu A_\mu. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Finalmente se obtiene la forma explícita de  $\mathcal{L}_{FP}$  [42] remplazando en la Ec. (2.46) los campos rotados

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP} &= \bar{\eta}^+ (\square - \xi M_W^2) \eta^+ + \bar{\eta}^- (\square - \xi M_W^2) \eta^- + \bar{\eta}_Z (\square - \xi M_W^2) \eta_Z + \bar{\eta}_\gamma \square \eta_\gamma \\ &+ i \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{\eta}^+ \partial^\mu [W_\mu^+ (g \eta_Z + g' \eta_\gamma) - (g Z_\mu + g' A_\mu) \eta^+] \\ &+ i \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} [g \bar{\eta}_Z \partial^\mu (W_\mu^- \eta^+ - W_\mu^+ \eta^-) + g' \bar{\eta}_\gamma \partial^\mu (W_\mu^- \eta^+ - W_\mu^+ \eta^-)] \\ &- i \frac{\xi}{2} M_W \left[ \frac{(g^2 - g'^2)}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (\bar{\eta}^+ \eta_Z \chi^- - \bar{\eta}^- \eta_Z \chi^+) + g \chi_3 (\bar{\eta}^- \eta^+ - \bar{\eta}^+ \eta^-) \right] \\ &- \frac{\xi}{2} g M_W \phi [\bar{\eta}^- \eta^+ + \bar{\eta}^+ \eta^-] - \frac{\xi}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} M_Z \phi \bar{\eta}_Z \eta_Z. \end{aligned} \quad (2.48)$$

## 2.9. Potencial Efectivo: Introducción

El Potencial Efectivo (PE) es la herramienta básica que en teoría de campos permite identificar el estado base como aquel que minimiza la energía potencial, en función de algún parámetro de orden. En teorías con rompimiento espontáneo de la simetría, el PE permite identificar la evolución del estado base en términos de parámetros externos como la temperatura. Además, permite identificar el orden de la transición de fase. El PE tiene el significado de una densidad de energía potencial del sistema considerado y no es una observable física del sistema. Al final de cuentas, el PE es un lazo de propagador cerrado sobre sí mismo, como veremos más adelante.

En la Sec. 2.3 vimos que el potencial clásico de una teoría cuántica de campos juega un papel crucial en el estudio del rompimiento de simetría. Sin embargo, algunas veces las correcciones radiactivas en una teoría cuántica pueden cambiar el comportamiento del potencial clásico, ya que pueden convertir puntos estables en inestables o viceversa. Una simetría que espontáneamente se rompe a nivel clásico puede ser restaurada o al contrario una simetría que no está rota a nivel clásico puede romperse de manera espontánea, debido a los efectos cuánticos. De esta manera, el potencial que incluye todas las correcciones cuánticas en una teoría es llamado potencial efectivo,  $V_{eff}$ . Desafortunadamente el  $V_{eff}$  no tiene una forma cerrada como el potencial clásico, por lo tanto debe ser analizado orden por orden. Al orden más bajo en teoría de perturbaciones el  $V_{eff}$  coincide con el potencial clásico.

En esta sección nos limitaremos a identificar el potencial efectivo a un lazo. Para esto consideremos por simplicidad un campo escalar  $\phi$  en presencia de una fuente externa  $J$ , que nos permite definir las funciones de Green de la teoría, con la acción dada por

$$\begin{aligned} S^J[\phi] &= \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right] \\ &= S + \int d^4x J\phi \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde el potencial clásico o al orden más bajo, con  $J = 0$ , es

$$V^0 = \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (2.50)$$

La funcional generatriz de las funciones de correlación es

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS^J}, \quad (2.51)$$

donde  $W[J]$  es la funcional generatriz que produce las funciones de Green conectadas, la cual es dada por

$$\frac{\delta^n W}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = (i)^{n-1} \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle^c. \quad (2.52)$$

De la Ec. (2.52), notamos, en particular que la función de Green de un punto, es el campo clásico  $\phi_c$  asociado a  $\phi$  (la variable conjugada de  $J$ ) y representa el valor esperado del campo en el vacío, es decir

$$\phi_{cl}(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle_J. \quad (2.53)$$

De la anterior definición, si se apaga la fuente,  $\phi_{cl}$  será una constante independiente del tiempo a causa de la invarianza de Lorentz del vacío. En general es un funcional de la fuente y genera los diagramas a orden árbol de la teoría.

La acción efectiva  $\Gamma[\phi_{cl}]$  (el generador de las funciones de Green irreducibles a una partícula  $1PI$ ), está definido como la transformada de Legendre de la funcional generatriz  $W[J]$

$$\Gamma[\phi_{cl}] = W[J] - \int d^4x J(x) \phi_{cl}(x). \quad (2.54)$$

Esta funcional se puede expandir en derivadas de  $\phi$  como

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_{cl}] &= \int d^4x [-V(\phi) + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_{cl} \partial^\mu \phi_{cl} \\ &+ \text{términos superiores en las derivadas}]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Si  $J \rightarrow 0$ ,  $\phi_{cl}(x) = \phi$  es una constante (la cual puede o no puede ser cero). En este límite, todas las derivadas en la expansión de la Ec. (2.55) se anulan, entonces tenemos

$$\Gamma[\phi] = - \int d^4x V(\phi) = -(2\pi)^4 \delta(0) V(\phi) = \Omega V(\phi), \quad (2.56)$$

donde  $V(\phi)$  es conocida como el potencial efectivo [43] y el factor multiplicativo  $\Omega$  representa el volumen en  $3 + 1$  dimensiones. Además, dado que  $\phi$  es una constante el PE es una función y no un funcional de  $\phi$ , denotándolo como  $V_{eff}(\phi)$ .

Un comentario importante respecto a la elección de la norma es en torno al PE, pues en principio él es un objeto dependiente del parámetro de norma [87]. Sin embargo, las cantidades físicas obtenidas de él (la temperatura crítica y la posición del mínimo) son los que no deberían depender de la norma [44]. Por lo tanto, el PE no es una observable física del sistema bajo estudio.

En el cálculo del potencial efectivo del MEM en presencia de un campo magnético externo, los diagramas de Feynman mostrados en las Figs. 5.1, 5.2 y 6.4, serán muy útiles ya que nos permiten determinar que partículas se acoplan al campo  $B_{ext}^\mu$  de  $U(1)_Q$ . Como veremos en el siguiente capítulo, la propagación de tales partículas se ve modificada por la presencia del campo externo.

## Capítulo 3

# PROPAGADOR EN PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO

Existen diferentes tipos de sistemas físicos cuyas propiedades están influenciadas o incluso determinadas por la presencia de campos magnéticos. Algunos de estos campos magnéticos pueden tener una gran intensidad. Por ejemplo, en sistemas astrofísicos como las supernovas y las estrellas de neutrones se encuentran campos magnéticos del orden de  $10^{10} T$  y  $10^8 T$ , respectivamente. De igual modo, en el ámbito de la cosmología existen diversos escenarios donde la presencia de campos magnéticos pudo jugar un papel relevante para la evolución del universo. Por ejemplo, durante la época de nucleosíntesis las reacciones nucleares cambian (aumenta la tasa de decaimiento de los neutrones, decrece su número y por lo tanto la cantidad de  ${}^4He$ ).

Para estudiar los efectos del campo magnético externo sobre la dinámica de las partículas cargadas que constituyen el sistema, se debe tener en cuenta aspectos como la temperatura y densidad del medio. En este capítulo se obtienen los propagadores de los campos: escalares, fermiónicos y bosónicos de norma. Mediante la aplicación del método del tiempo propio de Schwinger [45] se toma en cuenta la presencia de un campo magnético externo, que pertenece al grupo  $U(1)_{em}$ , a todos los órdenes.

### 3.1. Método de Schwinger

En 1951 J.Schwinger [45] desarrolla el llamado método de tiempo propio para encontrar expresiones exactas del propagador de una partícula cargada. Este método le permitió obtener la función de Green de la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético tanto constante como en forma de una onda plana. Para campo constante Schwinger da una solución matricial, sin especificar la forma del campo, en otras palabras utilizando sólo las propiedades que posee el tensor de campo electromagnético. Luego, mediante ciertas identidades otros autores han encontrado la forma específica de la función de Green para el caso de un campo magnético constante. Esta forma de

encarar el problema tiene como mayor ventaja su generalidad ya que trabajando así se pueden encontrar expresiones que tengan en cuenta tanto el campo eléctrico como el magnético. Tal es el caso del cálculo por parte de Schwinger del Lagrangiano efectivo Euler-Heisenberg, o la probabilidad por unidad de tiempo y unidad de volumen de que un par sea creado en presencia de un campo eléctrico constante. Además, posibilita introducir el efecto total del campo en los cálculos de diagramas de Feynman.

## 3.2. Propagador Fermiónico en Presencia de un Campo Magnético

Para ilustrar este método, iniciamos con determinar la función de Green, o propagador, asociado del campo de Dirac interactuando con un campo electromagnético externo. Este propagador satisface la siguiente ecuación

$$(\not{\Pi} - m)S(x, x') = \delta^4(x, x'), \quad (3.1)$$

donde  $\Pi \equiv \Pi_\mu \gamma^\mu$ , y  $\Pi_\mu = P_\mu + eA_\mu$  denota el momento canónico conjugado, el cual satisface las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\Pi_\mu, x] &= ig_{\mu\nu} \\ [\Pi_\mu, \Pi_\nu] &= ieF_{\mu\nu}^{\text{ext}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

con  $F_{\mu\nu}^{\text{ext}} = \partial_\mu B_\nu^{\text{ext}} - \partial_\nu B_\mu^{\text{ext}}$  es el tensor de intensidad del campo externo.

En la técnica empleada por Schwinger, se denota a  $S(x, x')$  como el elemento de matriz del operador  $\widehat{S}$  entre estados de la posición, esto es

$$S(x, x') = \langle x' | \widehat{S} | x \rangle. \quad (3.3)$$

Por tanto, la Ec. (3.1) puede ser escrita como

$$(\Pi - m)S = 1. \quad (3.4)$$

La solución formal de la Ec. (3.4) se expresa de la siguiente manera

$$S = \frac{1}{\Pi - m} = -i \int_0^\infty (\Pi + m) e^{-i(m^2 - \Pi^2)s} ds. \quad (3.5)$$

Esta representación integral de  $S$  implica que

$$S(x, x') = -i \int_0^\infty ds e^{-im^2s} \langle x'(0) | (\Pi + m) U(s) | x(0) \rangle. \quad (3.6)$$

donde  $U(s) = e^{-iHs}$  con

$$\begin{aligned}
 H \equiv (\mathbb{N})^2 &= \Pi_\mu \Pi_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \\
 &= \Pi_\mu \Pi_\nu \left( \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} + \frac{1}{2} [ \gamma^\mu, \gamma^\nu ] \right) \\
 &= \Pi_\mu \Pi_\nu ( -g^{\mu,\nu} - i\sigma^{\mu,\nu} ) \\
 &= -\Pi^2 - i\sigma^{\mu,\nu} \Pi_\mu \Pi_\nu \\
 &= -\Pi^2 - i\sigma^{\mu,\nu} \left( \frac{1}{2} \{ \Pi_\mu, \Pi_\nu \} + \frac{1}{2} [ \Pi_\mu, \Pi_\nu ] \right) \\
 &= -\Pi^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu,\nu} [ \Pi_\mu, \Pi_\nu ] \\
 &= -\Pi^2 - \frac{1}{2} e\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Puede observarse que  $U(s)$  puede ser visto como el operador de evolución temporal unitario si se toma a  $H$  como el Hamiltoniano efectivo que evoluciona el estado  $|x\rangle$  de la siguiente manera

$$|x(s)\rangle = U(s)|x(0)\rangle, \tag{3.8}$$

donde  $s$  es la llamada variable del tiempo propio, un parámetro que no hace referencia al sistema de coordenadas o a la norma. Con lo anterior se puede reescribir la Ec. (3.6) como

$$S(x, x') = -i \int_0^\infty ds e^{-im^2s} [\gamma^\mu \langle x'(0) | \Pi_\mu(0) | x(s) \rangle + m \langle x'(0) | x(s) \rangle] \tag{3.9}$$

En la representación de Heisenberg, los operadores que evolucionan con el tiempo  $x(s) = U^\dagger(s)x(0)U(s)$  y  $\Pi(s) = U^\dagger(s)\Pi(0)U(s)$ , satisfacen las ecuaciones de movimiento de Heisenberg

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_\mu(s)}{ds} &= -i [\Pi_\mu, H] = 2\Pi_\mu, \\
 \frac{d\Pi_\mu(s)}{ds} &= -i [x_\mu, H] = 2F_{\mu\nu}\Pi^\nu,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

para el caso de un campo constante. En notación matricial, las anteriores Ecs. (3.10) se reescriben como  $\frac{dx(s)}{ds} = 2\Pi$  y  $\frac{d\Pi(s)}{ds} = -2F\Pi$ .

De otra parte, el operador  $U(s)$  satisface la ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial s} U(x', x; s) = H(x, p)U(x', x; s), \tag{3.11}$$

sujeta a las siguientes condiciones de frontera

$$\lim_{s \rightarrow 0} U(x', x; s) = \delta^4(x - x'), \quad \lim_{s \rightarrow \infty} U(x', x; s) = 0, \tag{3.12}$$

en donde la primera de estas condiciones se sigue de  $\langle x'|x \rangle = \delta^4(x', x)$  y la segunda es una condición de causalidad. En las Ecs. (3.12) hemos expresado a  $U(x', x; s)$  como

$$U(x', x; s) \equiv \langle x'(0)|x(s) \rangle = \langle x'|e^{-iHs}|x \rangle \equiv \langle x'|U(s)|x \rangle. \quad (3.13)$$

Derivando la Ec. (3.11) con respecto a  $s$  y usando el hecho que el operador  $U(s)$  es unitario, se tiene que

$$\begin{aligned} i\partial_s \langle x'(0)|x(s) \rangle &= \langle x'|H(x, p)U(s)|x \rangle = \langle x'|U(s)U^\dagger(s)H(x, p)U(s)|x \rangle \\ &= \langle x'(0)|H(x(s), p(s))|x(s) \rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

La idea principal del método es calcular los elementos de matriz del lado derecho de esta ecuación.

Para hallar las soluciones de la Ec. (3.9), primero se debe resolver la Ec. (3.10), la cual, en notación matricial es

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= e^{-2eFs}\Pi(0) \\ x(s) - x(0) &= (1 - e^{-2eFs})(eF)^{-1}\Pi(0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

La solución se escribe como

$$\Pi(s) = \frac{1}{2}eFe^{-eFs}[\sinh(eFs)]^{-1}[x(s) - x(0)], \quad (3.16)$$

y usando la antisimetría de  $F$ , tenemos que su cuadrado es

$$\Pi^2(s) = [x(s) - x(0)]K[x(s) - x(0)], \quad (3.17)$$

donde  $K \equiv \frac{1}{4}(eF)^2[\sinh(eFs)]^{-2}$ .

La reordenación de la Ec. (3.17), de izquierda a derecha, de los operadores  $x(s)$  y  $x(0)$ , respectivamente, implica la ayuda del siguiente conmutador:

$$[x_\mu(s), x_\nu(0)] = i \left( \frac{1 - e^{-2eFs}}{eF} \right)_{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

De la Ec. (3.7) se sigue que

$$\begin{aligned} \Pi^2 &= -H - \frac{1}{2}e\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= (x_\mu(s) - x_\nu(0))K(x_\mu(s) - x_\nu(0)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Finalmente escribimos  $H$  en términos de los operadores ordenados correctamente  $x(s)$  y  $x(0)$  como

$$\begin{aligned} H &= -x(s)Kx(s) + 2x(s)Kx(0) - x(0)Kx(0) - \frac{1}{2}e\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{i}{2}\text{tr}[eF \coth(eFs)] - m^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Con el Hamiltoniano ordenado, los elementos de matriz del lado derecho de la Ec. (3.14), se pueden evaluar de manera directa

$$\begin{aligned}
 \langle x'(0)|H(x,p)|x(s)\rangle &= -\frac{1}{2}e\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (x-x')K(x-x') \\
 &- \frac{i}{2}\text{tr}[eF\coth(eFs)]\langle x'(0)|x(s)\rangle \\
 &- m^2\langle x'(0)|x(s)\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (3.14) e integrando sobre  $s$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 \langle x'(0)|x(s)\rangle &= C(x,x')s^{-2}\exp\left[\frac{1}{2}\text{tr}\ln[(eFs)^{-1}\sinh(eFs)]\right] \\
 &\times \exp\left[\frac{-i}{4}(x-x')eF\coth(eFs)(x-x')\right. \\
 &\left.- \frac{i}{2}e\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - im^2s\right]
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde el factor  $C(x,x')$  es una constante de integración arbitraria, y no un operador. Se puede determinar  $C(x,x')$  a partir de las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
 (i\partial_\mu^x + eA_\mu(x))\langle x'(0)|x(s)\rangle &= \langle x'(0)|\Pi_\mu(s)|x(s)\rangle \\
 (-i\partial_\mu^{x'} + eA_\mu(x'))\langle x'(0)|x(s)\rangle &= \langle x'(0)|\Pi_\mu(0)|x(s)\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

A su vez, el lado derecho de la Ec. (3.23) está dado por

$$\begin{aligned}
 \langle x'(0)|\Pi_\mu(s)|x(s)\rangle &= \frac{1}{2}[eF\coth(eFs) - eF](x-x')\langle x'(0)|x(s)\rangle \\
 \langle x'(0)|\Pi_\mu(0)|x(s)\rangle &= \frac{1}{2}[eF\coth(eFs) - eF](x-x')\langle x'(0)|x(s)\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Con todo lo anterior, la función  $C(x,x')$  satisface las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \left[ i\partial_\mu^x + eA_\mu(x) - \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}(x-x')^\nu \right] C(x,x') &= 0 \\
 \left[ -i\partial_\mu^{x'} + eA_\mu(x') + \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}(x-x')^\nu \right] C(x,x') &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Resolviendo este par de ecuaciones para  $C(x,x')$  se encuentra que

$$\begin{aligned}
 C(x,x') &= C(x') \exp\left[ ie \int_{x'}^x d\xi^\mu (A_\mu + \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}(\xi-x')^\nu) \right] \\
 &= C(x) \exp\left[ ie \int_{x'}^x d\xi^\mu (A_\mu + \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}(\xi-x')^\nu) \right],
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

donde se puede observar que aún después de usar las condiciones dadas por la Ec. (3.25), persisten un par de constantes de integración en  $x'$  y  $x$  respectivamente.

Dado que el rotacional del integrando de la Ec. (3.26) es nulo:

$$\begin{aligned}
 \partial^\alpha [A^\mu + \frac{1}{2}F^{\mu\nu}x_\nu] - \partial^\mu [A^\alpha + \frac{1}{2}F^{\alpha\nu}x_\nu] &= \partial^\alpha A^\mu - \partial^\mu A^\alpha \\
 &+ \frac{1}{2}F^{\mu\nu}g_\alpha^\nu - \frac{1}{2}F^{\alpha\nu}g_\nu^\mu \\
 &= F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2}F^{\mu\alpha} - \frac{1}{2}F^{\alpha\mu} \\
 &= F^{\alpha\nu} - F^{\alpha\nu} = 0,
 \end{aligned}$$

la integral en la Ec. (3.26) es independiente del camino de integración que conecta  $x$  y  $x'$ . Si se escoge una línea recta, como camino de integración, parametrizada de la siguiente manera

$$\xi^\mu(t) = (1-t)x'^\mu + tx^\mu, \quad t \in [0, 1]$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{x'}^x d\xi^\mu F_{\mu\nu}(\xi^\nu - x'^\nu) &= \int_0^1 (x^\mu - x'^\mu) F_{\mu\nu} dt (\xi^\nu - x'^\nu) \\
 &= \int_0^1 (x^\mu - x'^\mu) F_{\mu\nu} dt [(1-t)x'^\nu + tx^\nu - x'^\nu] \\
 &= \int_0^1 (x^\mu - x'^\mu) F_{\mu\nu} t (x^\nu - x'^\nu) dt \\
 &= \int_0^1 (x^\mu - x'^\mu) F_{\mu\nu} t (x^\nu - x'^\nu) dt = 0.
 \end{aligned}$$

El segundo término de la integral en la Ec. (3.26) no contribuye debido a la anti-simetría del tensor  $F_{\mu\nu}$ . Podemos entonces escribir la Ec. (3.26) como

$$C(x, x') = C \exp \left[ i e \int_{x'}^x d\xi^\mu A_\mu(\xi) \right], \quad (3.27)$$

en donde  $C(x') = C(x)$ , es igual a una constante independiente de  $x'$  y  $x$ .

Sustituyendo la Ec. (3.22) en la primera condición de frontera, dadas en las Ecs. (3.12), se determina el valor de la constante  $C$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{s \rightarrow 0} \langle x'(0) | x(s) \rangle dx &= C \int_{-\infty}^{\infty} dx \lim_{s \rightarrow 0} \exp \left[ i e \int_{x'}^x d\xi^\mu A_\mu(\xi) \right] s^{-2} \\
 &\times \exp \left[ \frac{1}{2} \text{tr} \ln [(eFs)^{-1} \sinh(eFs)] \right] \\
 &\times \exp \left[ \frac{-i}{4} (x - x') eF \coth(eFs) (x - x') \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{i}{2} e \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} s - im^2 s \Big] \\
 & = C \lim_{s \rightarrow 0} s^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[ \left( \frac{-i}{2s} \right) (x_\mu - x'_\mu)^2 \right] \\
 & = C \lim_{s \rightarrow 0} s^{-2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{[\frac{-i}{2s}]^2 (x_0 - x'_0)} e^{[\frac{i}{2s}]^2 (\vec{x} - \vec{x}')]} \right\} \\
 & = C \lim_{s \rightarrow 0} s^{-2} (-i4\pi s)^{\frac{1}{2}} (i4\pi s)^{\frac{3}{2}} \\
 & = iC(4\pi)^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la constante  $C$  es

$$C = -i(4\pi)^{-2}, \quad (3.28)$$

donde se ha hecho uso de las identidades

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ia^2 x^2} dx = \sqrt{\frac{i\pi}{a^2}}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta^4(x - x') dx = 1. \quad (3.29)$$

En resumen, de las Ecs. (3.9), (3.22), (3.25) y (3.28), el propagador fermiónico para fermiones cargados en presencia de un campo magnético externo es

$$S(x, x') = \Phi(x, x') \mathfrak{S}(x, x') \quad (3.30)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}(x, x') = & - i(4\pi)^{-2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left[ m + \frac{1}{2} \gamma \cdot (eF \coth(eFs) - eF)(x - x') \right] \\
 & \times \exp \left[ \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i(m^2 + i\epsilon)s \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} \text{tr} \ln[(eFs)^{-1} \sinh(eFs)] \right] \\
 & - \frac{i}{4} (x - x')(eF \coth(eFs))(x - x') \Big] \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

y

$$\Phi(x, x') = \exp \left[ ie \int_{x'}^x d\xi^\mu A_\mu(\xi) \right]. \quad (3.32)$$

Puede notarse de la Ec. (3.30) que la invariancia traslacional del propagador se ha roto, debido a la presencia del factor de fase  $\Phi(x, x')$ , que hace al propagador invariante de norma cuando  $A_\mu(\xi) \rightarrow A_\mu(\xi) + \partial_\mu \Lambda(\xi)$ . Notemos también, la presencia del término  $-i\epsilon$  que se introduce con el fin de cumplir la segunda de las condiciones de frontera en la Ec. (3.12).

En el caso particular de un campo magnético constante en la dirección del eje  $z$ , sólo las componentes  $F_{12} = -F_{21} = B$  del tensor electromagnético son no nulas. Se tiene que el propagador puede ser reescrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(x, x') = & - (4\pi)^{-2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \frac{eBs}{\sin(eBs)} \exp[-i(m^2 + i\epsilon)s + ieBs\sigma_3] \\ & \times \exp\left[-\frac{i}{4s}x_{\parallel}^2 - eBs \cot(eBs)x_{\perp}^2\right] \\ & \times \left[m + \frac{1}{2s} \left(\gamma \cdot x_{\parallel} - \frac{eBs}{\sin(eBs)} \exp(-ieBs\sigma_3)\gamma \cdot x_{\perp}\right)\right], \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde hemos usado las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 2F_{12}\sigma_{12} \equiv 2F_{12} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \\ \exp\left[-\frac{1}{2}\text{tr} \ln(F^{-1}) \sinh F\right] &= \frac{B}{\sin B} \\ \gamma(F \coth F - F)x &= (\gamma \cdot x_{\parallel}) - \frac{B}{\sin B}(\gamma \cdot x_{\perp})e^{(iF_{12}\sigma_{12})} \\ x(F \coth F)x &= x_{\parallel}^2 - B \cot(B)x_{\perp}^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Usamos el tensor métrico  $g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$  en el que  $g^{\mu\nu} = g_{\parallel}^{\mu\nu} - g_{\perp}^{\mu\nu}$ , lo cual implica la notación  $k_{\parallel}^2 = k_0^2 - k_3^2$  y  $k_{\perp}^2 = k_1^2 + k_2^2$ ; con la definición para dos 4-vectores  $a^\mu$  y  $b^\mu$  arbitrarios:  $(a \cdot b)_{\parallel} \equiv a^0b^0 - a^3b^3$  y  $(a \cdot b)_{\perp} \equiv a^1b^1 + a^2b^2$ .

La representación en el espacio de momentos del propagador se obtiene a través de su transformada de Fourier

$$\mathfrak{S}(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-x')} \mathfrak{S}(p), \quad (3.35)$$

en donde la parte traslacionalmente invariante del propagador Feynman en el espacio de momentos, después de realizar la integración espacial que involucra Gaussianas, puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_B(k) = & - i \int_0^\infty \frac{ds}{\cos eBs} \\ & \times \exp\left\{is \left(k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 \frac{\tan eBs}{eBs} - m_f^2 + i\epsilon\right)\right\} \\ & \times \left[(m_f + \not{k}_{\parallel})e^{ieBs\sigma_3} - \frac{\not{k}_{\perp}}{\cos eBs}\right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde  $m_f$  es la masa del fermión correspondiente.

Si en la Ec. (3.36) se toma el límite cuando  $B \rightarrow 0$ , obtenemos

$$\frac{(m_f + \not{k})}{k^2 - m_f^2 + i\epsilon} = -i(\not{k} + m_f) \int_0^\infty ds e^{is(q^2 - m_f^2 + i\epsilon)}, \quad (3.37)$$

que coincide con la expresión conocida para el propagador de Feynman de la partícula libre. Cabe mencionar sin embargo que el límite  $B \rightarrow 0$  no garantiza que la fase de la Ec. (3.32) se anule, por lo que formalmente, el límite que debe aplicarse es  $A_\mu \rightarrow 0$ .

Este método ha sido extendido al caso de otros campos [46] como por ejemplo el campo escalar cargado  $D(x, x')$  y a los bosones vectoriales cargados ( $W^\pm$ )  $G_B^{\mu\nu}(x, x')$ , respectivamente

$$iD(x, x') = \Phi(x, x') \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-x')} D(k), \quad (3.38)$$

$$iG_B^{\mu\nu}(x, x') = \Phi(x, x') \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-x')} G^{\mu\nu}(k). \quad (3.39)$$

En el espacio de momento las partes traslacionalmente invariante de los anteriores propagadores, en una norma arbitraria, son

$$iD_B(k) = \int_0^\infty \frac{ds}{\cos eBs} \exp \left\{ is \left( k_\parallel^2 - k_\perp^2 \frac{\tan eBs}{eBs} - m^2 + i\epsilon \right) \right\}, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} iG_B^{\mu\nu}(k) &= \int_0^\infty \frac{ds}{\cos eBs} e^{is(k_\parallel^2 - k_\perp^2 \frac{\tan eBs}{eBs})} \\ &\times \left\{ e^{-is(m_{gb}^2 - i\epsilon)} \left[ g_\parallel^{\mu\nu} + (e^{2eFs})_\perp^{\mu\nu} \right] \right. \\ &+ \left( \frac{e^{-is(m_{gb}^2 - i\epsilon)} - e^{-is(\xi m_{gb}^2 - i\epsilon)}}{m_{gb}^2} \right) \\ &\times \left[ (k^\mu + k_\lambda F^{\mu\lambda}(\tan(eBs))/B) \right. \\ &\times (k^\nu + k_\rho F^{\rho\nu}(\tan(eBs))/B) \\ &\left. \left. - i \frac{e}{2} (F^{\mu\nu} + g_\perp^{\mu\nu} B \tan(eBs)) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

En la Ec. (3.41) tenemos que

$$(e^{2eFs})_\perp^{\mu\nu} = g_\perp^{\mu\nu} \cos(2eBs) + F^{\mu\nu} \frac{\sin(2eBs)}{B}. \quad (3.42)$$

De igual manera en el límite  $A_\mu \rightarrow 0$  se recuperan para estos propagadores, las expresiones conocidas para los propagadores de Feynman libres en el vacío, respectivamente

$$\begin{aligned} D(k) &= \frac{1}{k^2 - m^2}, \\ G^{\mu\nu}(k) &= -i \left( \frac{g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m_{gb}^2}}{k^2 - m_{gb}^2} \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

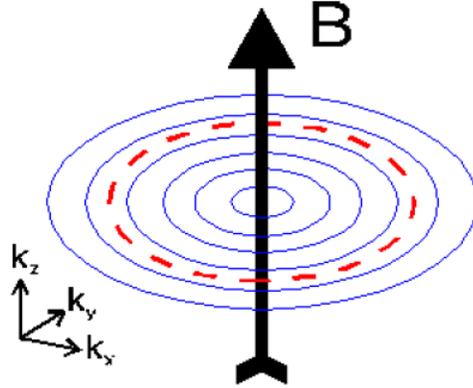


Figura 3.1: Niveles de Landau

En este trabajo estamos interesados en el cálculo del potencial efectivo, que diagramáticamente se representa por burbujas de vacío es decir, propagadores que se cierran en el mismo punto espacio-temporal. Por ejemplo,  $D(x, x)$ ,  $S(x, x)$  y  $G^{\mu\nu}(x, x)$ . En el espacio de momento, tales diagramas no dependen del momento externo, de tal manera que el factor de fase se anula idénticamente.

### 3.3. Niveles de Landau

Es conocido que la presencia del campo magnético externo rompe la isotropía del espacio, lo cual debe reflejarse en el propagador de Feynman. Éste debe separar muy claramente el movimiento libre en la dirección del campo de la partícula cargada, de la dinámica perpendicular que se cuantiza, precisamente, por efectos del campo. Lo anterior se debe a que las partículas cargadas alrededor de las líneas de campo sufren el efecto de la fuerza de Lorentz, la cual las constriñe a describir trayectorias circulares, tal y como se muestra en la Fig. 3.1. Es debido a esta condición de frontera que el movimiento de los grados de libertad ortogonal al campo se discretiza. Aunque en la expresión de los propagadores, los niveles de Landau no se ven de manera explícita, es posible, por medio de la integración del tiempo propio, mostrar que éstos están presentes.

Ha sido demostrado en [47, 48] que al deformar el contorno de integración en el plano complejo  $s$ , para el cálculo de la integral del tiempo propio, la Ec. (3.36) se puede escribir como

$$iS_B(k) = i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d_l(\frac{k_{\perp}^2}{eB})D + d'_l(\frac{k_{\perp}^2}{eB})\bar{D}}{k_{\parallel}^2 - 2leB - m_f^2 + i\epsilon} + \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}^2}, \quad (3.44)$$

donde  $d_l(\alpha) \equiv (-1)^n e^{-\alpha} L_l^{-1}(2\alpha)$ ,  $d'_n = \partial d_n / \partial \alpha$ ,

$$D = (m_f + k_{\parallel}) + k_{\perp} \frac{m_f^2 - k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2}, \quad \bar{D} = \gamma_5 \not{k} \not{b} (m_f + k_{\parallel}), \quad (3.45)$$

y  $L_l(x)$ ,  $L_l^m(x)$  son los polinomios de Laguerre y asociados de Laguerre, respectivamente. Se ha usado la siguiente identidad  $\sigma^3 = i\gamma^1\gamma^2 = -\gamma^5 \not{k} \not{b}$ . Además  $u^\mu$  y  $b^\mu$  son cuadvectores que describen al plasma en el marco referencia en reposo y la dirección del campo magnético, respectivamente, es decir que

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad b^\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (3.46)$$

De igual manera aplicando un procedimiento análogo al citado en las Refs. [47, 48], la Ec. (3.40) se puede escribir como

$$iD_B(k) = 2i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l L_l\left(\frac{2k_{\perp}^2}{eB}\right) e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}}}{k_{\parallel}^2 - (2l+1)eB - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.47)$$

en donde aparecen explícitamente los niveles de Landau etiquetados por el índice  $l$ .

Un análisis similar al de la Refs. [47, 48] para los bosones vectoriales Ec. (3.41) permite escribir el propagador en forma análoga a las Ecs. (3.44) y (3.47). Éste se puede escribir como [49]. Para mostrarlo, vamos a partir de la Ec. (3.41), usando la Ec. (3.42), en donde  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$  y  $\sin 2x = 2\cos x \sin x$ . Separamos la Ec. (3.41) en las siguientes integrales para la parte independiente de la norma

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{\cos eBs} e^{is(k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 \frac{\tan eBs}{eBs} - m_{gb}^2 + i\epsilon)}, \quad (3.48)$$

$$I_2 = - \int_0^{\infty} ds e^{is(k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 \frac{\tan eBs}{eBs} - m_{gb}^2 + i\epsilon)} 2 \frac{\sin^2 eBs}{\cos eBs}, \quad (3.49)$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} ds e^{is(k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 \frac{\tan eBs}{eBs} - m_{gb}^2 + i\epsilon)} 2 \sin eBs. \quad (3.50)$$

Ejemplificando para la Ec. (3.48), aplicando el teorema de Cauchy y haciendo luego el cambio de variable  $s = -i\tau$ , con  $\tau$  real. Usamos además las identidades

$$\sin(-i\tau) = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{2i}, \quad \cos(-i\tau) = \frac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2}, \quad i \tan(-i\tau) = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{e^{\tau} + e^{-\tau}}, \quad (3.51)$$

que expresadas en términos de la variable  $u = e^{-2\tau}$  se escriben como

$$\sin(-i\tau) = \frac{u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}}{2i}, \quad \frac{1}{\cos(-i\tau)} = \frac{2u^{\frac{1}{2}}}{1+u}, \quad i \tan(-i\tau) = 1 - \frac{2u}{1+u}. \quad (3.52)$$

Con lo anterior podemos reescribir la Ec. (3.48) como

$$I_1 = \frac{-2i}{eB} \int_0^\infty d\tau e^{\frac{\tau}{eB}(k_{\parallel}^2 - m_{gb}^2 + i\epsilon)} e^{\frac{k_{\perp}^2}{eB} u^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{2k_{\perp}^2}{eB} \left(\frac{u}{1+u}\right)}. \quad (3.53)$$

Se puede notar que la convergencia de la integral dependerá únicamente del argumento, en la primera exponencial. Esto impone la condición  $\frac{(k_{\parallel}^2 - m_{gb}^2 + i\epsilon)}{eB} < 0$ , la cual es equivalente a considerar momentos en el espacio Euclidiano<sup>1</sup>. Esto es útil en los cálculos a temperatura finita, cuando se emplea el formalismo de tiempo imaginario, en donde los momentos se toman en el espacio Euclideano. Del resto del integrando hay que decir que permanece finito en el intervalo de integración.

El cociente del lado derecho en la Ec. (3.53) se identifica con la función generatriz de los polinomios Laguerre,  $L_l(x)$ , definidos como

$$\frac{e^{-xz}}{1-z} = \sum_{l=0}^{\infty} L_l(x) z^l. \quad (3.54)$$

Usando la Ec. (3.54) en Ec. (3.53) y el hecho que  $u = e^{-2\tau}$ , e intercambiando la integral por la suma, se obtiene

$$I_1 = \frac{-2i}{eB} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l \left( \frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) e^{\frac{k_{\perp}^2}{eB}} \int_0^\infty d\tau e^{\frac{\tau}{eB}(k_{\parallel}^2 - (2l+1)eB - m_{gb}^2 + i\epsilon)}, \quad (3.55)$$

que al integrar explícitamente sobre  $\tau$ , origina finalmente

$$I_1 = 2i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l L_l \left( \frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}}}{k_{\parallel}^2 - (2l+1)eB - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.56)$$

expresión que es igual la mostrada en la Eq. (3.47).

Ahora, para calcular  $I_2$  e  $I_3$  hacemos el mismo procedimiento empleado para determinar  $I_1$ . Haciendo uso también de la Ec. (3.52), obtenemos

$$I_2 = \frac{-2i}{eB} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l \left( \frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) e^{\frac{k_{\perp}^2}{eB}} \int_0^\infty d\tau \sum_{\lambda=-1}^1 \frac{(|3\lambda| - 2)}{(2i)} e^{\frac{\tau}{eB}(k_{\parallel}^2 - 2\tau(l+\lambda+\frac{1}{2}) - m_{gb}^2 + i\epsilon)}, \quad (3.57)$$

$$I_3 = \frac{-2i}{eB} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l \left( \frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) e^{\frac{k_{\perp}^2}{eB}} \int_0^\infty d\tau \sum_{\lambda=-1}^1 \left( \frac{\lambda}{4i} \right) e^{\frac{\tau}{eB}(k_{\parallel}^2 - 2\tau(l+\lambda+\frac{1}{2}) - m_{gb}^2 + i\epsilon)}. \quad (3.58)$$

---

<sup>1</sup>Resultado que también es válido cuando  $\frac{(k_{\parallel}^2 - m_{gb}^2 + i\epsilon)}{eB} > 0$ , es decir para momentos en el espacio de Minkowski, por medio de una continuación analítica [50].

De acuerdo a lo anterior, reescribimos de nuevo  $I_1$  de esta manera

$$I_1 = - \frac{2i}{eB} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l \left( 2 \frac{k_{\perp}^2}{eB} \right) e^{\frac{k_{\perp}^2}{eB}} \times \int_0^{\infty} d\tau \sum_{\lambda=-1}^1 \frac{(|\lambda| - 1)}{(2i)} e^{\frac{\tau}{eB} (k_{\parallel}^2 - 2\tau(l+\lambda+\frac{1}{2}) - m_{gb}^2 + i\epsilon)}. \quad (3.59)$$

Para la parte dependiente de la norma en la Ec. (3.41) tenemos dos nuevas integrales que escribimos como

$$I_4 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{\cos eBs} e^{is(k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 \frac{\tan eBs}{eBs} - am_{gb}^2 + i\epsilon)} \tan eBs, \quad (3.60)$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{\cos eBs} e^{is(k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 \frac{\tan eBs}{eBs} - am_{gb}^2 + i\epsilon)} \tan^2 eBs, \quad (3.61)$$

donde  $a = 1$  ó  $\xi$ .

Si en la Ec. (3.56) hacemos el cambio  $m^2 \rightarrow am^2$  tenemos que

$$I_4 = (ieB) \frac{dI_1(a)}{dk_{\perp}^2}, \quad (3.62)$$

$$I_5 = (ieB)^2 \frac{d^2 I_1(a)}{d(k_{\perp}^2)^2}. \quad (3.63)$$

Usando las definiciones anteriores para  $I_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ , la Ec. (3.41) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} G_B^{\mu\nu}(k) = & - g^{\mu\nu} I_1(1) + 2g_{\perp}^{\mu\nu} I_2(1) - 2 \frac{F^{\mu\nu}}{B} I_3(1) \\ & + \frac{1}{m_{gb}^2} (k^{\mu} k^{\nu} + i \frac{e}{2} F^{\mu\nu}) (I_1(1) - I_1(\xi)) \\ & + \frac{(ieB)}{m_{gb}^2} (k^{\mu} k_{\rho} \frac{F^{\rho\nu}}{B} + k^{\nu} k_{\lambda} \frac{F^{\mu\lambda}}{B} - i \frac{eB}{2} g_{\perp}^{\mu\nu}) \\ & \times \left( \frac{dI_1(1)}{dk_{\perp}^2} - \frac{dI_1(\xi)}{dk_{\perp}^2} \right) + \frac{(ieB)^2}{m_{gb}^2} \left( \frac{k_{\lambda} F^{\mu\lambda} k_{\rho} F^{\rho\nu}}{B^2} \right) \\ & \times \left( \frac{d^2 I_1(1)}{d(k_{\perp}^2)^2} - \frac{d^2 I_1(\xi)}{d(k_{\perp}^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Al evaluar explícitamente la Ec. (3.64) se obtiene la expresión final del propagador

$$\begin{aligned} iG_B^{\mu\nu}(k) = & 2i \sum_{\lambda=-1}^1 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}}}{k_{\parallel}^2 - (2l + 2\lambda + 1)eB - m_{gb}^2 + i\epsilon} \\ & \times \left[ T^{\mu\nu} + \frac{m_{gb}^2 (1 - \xi) P^{\mu\nu}}{k_{\parallel}^2 - (2l + 2\lambda + 1)eB - \xi m_{gb}^2 + i\epsilon} \right] L_l \left( \frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} &= \sum_{\lambda=-1}^1 \left[ g^{\mu\nu} (|\lambda| - 1) - 2g_{\perp}^{\mu\nu} \frac{(|3\lambda| - 2)}{(2i)^2} + 2\frac{F^{\mu\nu}}{B} \left( \frac{\lambda}{4i} \right) \right], \\
 P^{\mu\nu} &= \frac{1}{m_{gb}^2} \left[ (k^{\mu}k^{\nu} - i\frac{e}{2}F^{\mu\nu}) + \left( \frac{k_{\lambda}k^{\nu}F^{\mu\lambda}}{B} + \frac{k_{\rho}k^{\mu}F^{\rho\nu}}{B} + i\frac{eB}{2}g_{\perp}^{\mu\nu} \right) (ieB) \frac{d}{dk_{\perp}^2} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{k_{\lambda}k_{\rho}F^{\mu\lambda}F^{\rho\nu}}{B^2} \right) (ieB)^2 \frac{d^2}{d(k_{\perp}^2)^2} \right]. \tag{3.66}
 \end{aligned}$$

De este modo, hemos visto que el propagador de Feynman da cuenta de la separación entre la dinámica paralela y transversa, con respecto a la dirección del campo magnético, pero además, refleja la cuantización de la energía inducida por el campo en el plano transverso. Los niveles de energía para una partícula escalar, fermiónica o bosónica se determinan de las Ecs. (3.47), (3.56) y (3.65), y están dados, respectivamente por

$$\begin{aligned}
 E_l^2 &= k_3^2 + (2l + 1)eB + m^2 \quad (\text{escalar}), \\
 E_l^2 &= k_3^2 + 2leB + m_f^2 \quad (\text{fermión}), \\
 E_l^2 &= k_3^2 + (2l + 2\lambda + 1)eB + am_{gb}^2 \quad (\text{bosón de norma}), \tag{3.67}
 \end{aligned}$$

donde  $l$  denota el nivel de Landau y  $\lambda$ , en la tercera de las Ecs. (3.67), se refiere a la helicidad.

Cabe señalar que en las Ecs. (3.44), (3.47) y (3.41), el espín aparece explícitamente acompañando a los niveles de Landau, ya que éste también está cuantizado y se acopla al campo externo.

Aunque las expresiones obtenidas para los propagadores en las Ecs. (3.44), (3.47) y (3.41) parecen manejables, es muy complicado desarrollar cálculos con ellas. En la práctica, lo que se hace es tomar ciertos límites del campo magnético de acuerdo al problema físico bajo estudio. Los límites ampliamente utilizados son con respecto a una cantidad física en el problema: Límite de campo fuerte y límite de campo débil.

En el límite de campo fuerte las partículas no disponen de suficiente energía cinética para saltar entre los diferentes niveles de Landau, así que éstos permanecen confinadas en el nivel más bajo. Este límite es ampliamente usado por ejemplo en el estudio del *photon splitting* [51], polarización del fotón [50], en el rompimiento espontáneo de la simetría quiral [52], oscilaciones de neutrinos [53], etc.

El límite de campo débil es más complicado debido a que se requiere hacer una resumación de todos los niveles de Landau, ya que ahora todos los niveles son importantes, para obtener la contribución del campo magnético. En la siguiente sección obtenemos el propagador como una serie de potencias del campo magnético.

### 3.4. Límite de Campo Débil

Con el fin de determinar el orden apropiado de la escala de energía durante el desarrollo de la TFED, se recurre a los límites de la intensidad de los campos magnéticos impuestos por procesos cosmológicos en el universo temprano. La relación entre la intensidad del campo magnético a gran escala y la temperatura se obtiene, de la exigencia de que la densidad de energía magnética  $\rho_{mag} \sim B^2$  debe ser menor que el total de la densidad de energía de radiación  $\rho_{rad} \sim T^4$  en la nucleosíntesis, con el fin de preservar la abundancia estimada de elementos ligeros. Con esto, se obtiene la simple cota  $B \lesssim T^2$  [54]. Por otro lado, para garantizar condiciones de estabilidad contra la formación de un condensado de  $W$  [55], se obtiene que el campo es también débil en comparación con  $m_W^2$ . Trabajamos de forma explícita con el supuesto de que la jerarquía de escalas

$$eB \ll m^2 \ll T^2, \quad (3.68)$$

se cumple. Consideramos a  $m$  como una masa genérica del problema a la escala electrodébil.

De esta manera podemos desarrollar una expansión en el límite de campo débil en las Ecs. (3.47), (3.44) y (3.65) que permiten llevar a cabo la suma sobre los niveles de Landau para escribirlos como serie de potencias en  $eB$ , hasta orden  $(eB)^2$  a los propagadores escalar, fermiónico. Esta expansión ha sido desarrollada explícitamente para el caso de bosones escalares en las Refs. [47, 48], obteniéndose

$$D(k)_B = \frac{1}{k^2 - m^2} \left( 1 - \frac{(eB)^2}{(k^2 - m^2)^2} - \frac{2(eB)^2 k_\perp^2}{(k^2 - m^2)^3} \right). \quad (3.69)$$

Para el caso fermiónico se obtiene [47, 48]

$$\begin{aligned} S(k)_B &= \frac{\not{k} + m_f}{k^2 - m_f^2} + \frac{\gamma_5 \not{y} \not{y}(k_\parallel + m_f)(eB)}{(k^2 - m_f^2)^3} \\ &- \frac{2(eB)^2 k_\perp^2}{(k^2 - m_f^2)^4} \left( m_f + k_\parallel + k_\perp \frac{m_f^2 - k_\parallel^2}{k_\perp^2} \right). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Mostraremos siguiendo de cerca la idea empleada en la Ref. [48], como obtener una expansión en potencias de  $eB$  del propagador de bosones de norma cargados.

Para este caso partimos de la Ec. (3.65) reescribiendo el primer sumando, y factorizando en el denominador

$$iG_B^{\mu\nu}(k) = \frac{2ie^{-\frac{k_\perp^2}{eB}}}{k_\parallel^2 - m_{gb}^2 + i\epsilon} \sum_{\lambda=-1}^1 T^{\mu\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l L_l \left( \frac{2k_\perp^2}{eB} \right)}{1 - (2l + 2\lambda + 1) \frac{eB}{k_\parallel^2 - m_{gb}^2 + i\epsilon}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2ie^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}}}{k_{\parallel}^2 - m_{gb}^2 + i\epsilon} \sum_{\lambda=-1}^1 T^{\mu\nu} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l \left( \frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) \\
 &\times \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{(2l + 2\lambda + 1)eB}{k_{\parallel}^2 - m_{gb}^2 + i\epsilon} \right)^j, \tag{3.71}
 \end{aligned}$$

donde, debido a la jerarquía de escalas discutida al inicio de esta sección, en el sumando introducimos una serie geométrica

$$\frac{1}{1 - (2l + 2\lambda + 1) \frac{eB}{k_{\parallel}^2 - m_{gb}^2 + i\epsilon}} = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{(2l + 2\lambda + 1)eB}{k_{\parallel}^2 - m_{gb}^2 + i\epsilon} \right)^j. \tag{3.72}$$

Intercambiando las sumas, el propagador se reescribe como

$$\begin{aligned}
 iG_B^{\mu\nu}(k) &= \frac{i}{k_{\parallel}^2 - m_{gb}^2 + i\epsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{eB}{k_{\parallel}^2 - m_{gb}^2 + i\epsilon} \right)^j \\
 &\times \left\{ 2e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}} \sum_{\lambda=-1}^1 T^{\mu\nu} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l \left( \frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) (2l + 2\lambda + 1)^j \right\}. \tag{3.73}
 \end{aligned}$$

Para el término entre llaves, denotándolo como  $S_j$ , tenemos tres tipos de sumas

$$S_j^1 = 2e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}} \sum_{\lambda=-1}^1 (|\lambda| - 1) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l \left( \frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) (2l + 2\lambda + 1)^j, \tag{3.74}$$

$$S_j^2 = 2e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}} \sum_{\lambda=-1}^1 \frac{(|3\lambda| - 2)}{(2i)^2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l \left( \frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) (2l + 2\lambda + 1)^j, \tag{3.75}$$

$$S_j^3 = 2e^{-\frac{k_{\perp}^2}{eB}} \sum_{\lambda=-1}^1 \left( \frac{\lambda}{4i} \right) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l L_l \left( \frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) (2l + 2\lambda + 1)^j, \tag{3.76}$$

que pueden ser calculadas de manera explícita por medio de las siguientes identidades

$$f_1 \equiv \frac{e^{-i\frac{k_{\perp}^2}{eB} \tan x}}{\cos x}; \quad f_2 \equiv \frac{e^{-i\frac{k_{\perp}^2}{eB} \tan x}}{\cos x} \sin^2 x; \quad f_3 \equiv \frac{e^{-i\frac{k_{\perp}^2}{eB} \tan x}}{\cos x} \sin x \cos x, \tag{3.77}$$

de las cuales se sigue que para una determinada  $j$ ,  $S_j^{1,2,3}$  satisface las siguientes relaciones

$$S_j^1 = i^j \frac{d^j f_1}{dx^j} \Big|_{x=0}, \quad S_j^2 = i^j \frac{d^j f_2}{dx^j} \Big|_{x=0}, \quad S_j^3 = i^j \frac{d^j f_3}{dx^j} \Big|_{x=0}. \tag{3.78}$$

Las integrales, denotadas como  $I_i (i = 1, 2, 3)$ , pueden ser calculadas a partir de  $S_j^{i(i=1,2,3)}$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \frac{i}{k_{\parallel}^2 - m_{gb}^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(eB)^j}{(k_{\parallel}^2 - am_{gb}^2)^j} \begin{pmatrix} S_j^1 \\ S_j^2 \\ S_j^3 \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

junto con  $I_{4,5}$ , dadas en las Ecs. (3.62) y (3.63).

Después de tomar las derivadas sobre las  $f_i$  se tiene que el propagador de los bosones vectoriales cargados, en una norma arbitraria, en el límite de campo débil es

$$\begin{aligned} G_B^{\mu\nu}(k) = & - i \left( \frac{g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m_{gb}^2}}{k^2 - m_{gb}^2} \right) \\ & - (eB) \left[ \frac{k_\rho}{m_{gb}^2} \left( k^\nu \frac{F^{\mu\rho}}{B} + k^\mu \frac{F^{\rho\nu}}{B} \right) \left( \frac{1}{(k^2 - m_{gb}^2)^2} - \frac{1}{(k^2 - \xi m_{gb}^2)^2} \right) \right. \\ & - \left. \frac{F^{\mu\nu}}{B} \left( \frac{2}{(k^2 - m_{gb}^2)^2} + \frac{(1 - \xi)}{2(k^2 - m_{gb}^2)(k^2 - \xi m_{gb}^2)} \right) \right] \\ & + i(eB)^2 \left[ \frac{g^{\mu\nu} + 4g_{\perp}^{\mu\nu}}{(k^2 - m_{gb}^2)^3} + \frac{2g^{\mu\nu} k_{\perp}^2}{(k^2 - m_{gb}^2)^4} \right. \\ & - \frac{k^\mu k^\nu}{m_{gb}^2} \left( \frac{1}{(k^2 - m_{gb}^2)^3} - \frac{1}{(k^2 - \xi m_{gb}^2)^3} \right) \\ & - 2 \frac{k^\mu k^\nu}{m_{gb}^2} k_{\perp}^2 \left( \frac{1}{(k^2 - m_{gb}^2)^4} - \frac{1}{(k^2 - \xi m_{gb}^2)^4} \right) \\ & + \frac{g_{\perp}^{\mu\nu}}{2m^2} \left( \frac{1}{(k^2 - m_{gb}^2)^2} - \frac{1}{(k^2 - \xi m_{gb}^2)^2} \right) \\ & \left. - \frac{2}{m_{gb}^2} \left( \frac{k_\lambda F^{\mu\lambda} k_\rho F^{\rho\nu}}{B^2} \right) \left( \frac{1}{(k^2 - m_{gb}^2)^3} - \frac{1}{(k^2 - \xi m_{gb}^2)^3} \right) \right]. \quad (3.80) \end{aligned}$$

Las expresiones dadas por las Ecs. (3.69), (3.70) y (3.80) se emplearán en el análisis del potencial efectivo, ya que las partículas que cada uno de estos propagadores describe se acoplan en el fase rota al campo magnético externo. Esto quiere decir que la dinámica de estos campos en el plasma del universo temprano está influenciada por el efecto del campo magnético externo de manera directa.

Finalmente observemos que para la jerarquía de escala asumida sea válida, hay que alejarse del valor de  $\xi = 0$ , ya que de acuerdo a la Ec. (2.43) ( $m_\eta^2 = \xi m_{gb}^2$ ), esta opción en el parámetro de norma daría lugar a la desaparición de la masa de los campos fantasmas.

En el siguiente capítulo se complementan las herramientas necesarias que facilitaran el estudio del PE a temperatura finita.

# Capítulo 4

## TEORÍA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

Los sistemas donde las partículas elementales están sometidas a condiciones extremas de alta temperatura y densidad, aparecen en varias áreas de la física. El ejemplo más conocido es el universo en las primeras etapas de su expansión. La teoría de la gran explosión afirma que el universo estaba descrito como un plasma caliente y denso en el pasado [56, 57], con una temperatura del orden de  $10^{19}$  GeV después de  $10^{-43}$  seg de la gran explosión hasta 100 GeV entre  $10^{-36} - 10^{-12}$  seg durante la era de la TFED. Otro lugar, donde la materia existe en condiciones extremas de altas densidades, puede ser creado en el laboratorio, a saber, en las colisiones de iones pesados relativistas, materia subnuclear es creada, con densidad de energía superior a la escala QCD [58].

Desde el punto de vista práctico, hay una amplia variedad de aplicaciones de la teoría de campo a temperatura finita en cosmología y en la descripción de experimentos de laboratorio. Las transiciones de fase a alta temperatura, típicas de las teorías de gran unificación (GUTs), pueden ser importantes para describir la inflación cosmológica y las fluctuaciones en la densidad de materia (o antimateria). Los llamados defectos topológicos pueden surgir en las transiciones de fase e influenciar las propiedades del universo que observamos hoy.

La descripción de la transición de fase electrodébil, es un elemento crucial para el estudio de diversos escenarios de la bariogénesis electrodébil. A su vez, esta transición de fase también puede jugar un papel en la generación de los campos magnéticos observados en el universo. La transición de fase de QCD y las propiedades del plasma de quarks y gluones son esenciales para la comprensión de la física de las colisiones de iones pesados. Además, en cosmología puede influir en el espectro de las fluctuaciones de densidad de energía, relevantes para la formación de estructuras.

El formalismo usual de la teoría cuántica de campos convencional (a temperatura cero) es adecuado para describir observables (por ejemplo, secciones eficaces) medidos en el vacío del espacio-tiempo, como las interacciones entre partículas que se producen en colisionadores (CERN y FERMILAB). Sin embargo, cuando los sistemas pueden

describirse introduciendo el concepto de baño térmico hay que recurrir a las técnicas desarrolladas por la teoría de campos en términos estadísticos, llamada teoría de campo a temperatura finita o Teoría Térmica de Campos (TTC). La TTC es una combinación de tres áreas básicas de la física: mecánica cuántica, relatividad especial, y mecánica estadística.

El enfoque de la TTC es diferente al de teorías más usuales tales como la teoría cinética [59] ó la teoría de muchos cuerpos [60]. La TTC tiene sobre las anteriores, las siguientes ventajas: i) puede formularse en términos de integrales de camino, ii) permite estudiar teorías de norma no Abelianas y iii) es covariante de Lorentz.

La idea principal de la TTC es utilizar el enfoque habitual de integrales de camino en teoría de campo en el vacío y describir la temperatura que aparece en el factor de Boltzmann  $\exp(-\beta H)$  ( $\beta = 1/T$ ) como el operador de evolución temporal, con variable temporal compleja  $t = -i\beta$ .

Dentro de la TTC se pueden distinguir dos clases de formulaciones: una clase basada en un contorno temporal complejo y la otra basada sobre las  $C^*$  algebras. Esta última es conocida como la Dinámica de Campos Térmicos (DCT), la cual fue desarrollada por Umezawa-Takahashi (1975) [61]. La idea central de la DCT es expresar los promedios estadísticos de una variable, representada por un operador hermítico  $A$ , como el valor esperado de este operador en un vacío dependiente de la temperatura

$$\langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = Z^{-1}(\beta) \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | A | n \rangle, \quad (4.1)$$

donde el estado  $| 0(\beta) \rangle$  puede ser expresado como una superposición de estados ( $| n \rangle$ ) del espacio de Hilbert, es decir

$$| 0(\beta) \rangle = Z^{-1/2}(\beta) \sum_n e^{-\frac{\beta E_n}{2}} | n \rangle. \quad (4.2)$$

Respecto a la primera formulación esta a su vez se divide en dos formalismos, de acuerdo a la forma de tomar en el plano complejo el contorno temporal y son: el formalismo de tiempo imaginario (FTI) y el formalismo de tiempo real (FTR). Ambas están relacionadas mediante una transformación unitaria [62] cuando están escritas en términos de funciones de Green retardadas y por lo tanto son físicamente equivalentes.

En el FTI el contorno en el plano complejo  $t$  consiste en tomar una línea recta a lo largo del eje imaginario  $t = -i\tau$ , este es el llamado contorno de Matsubara [63]. Posteriormente, debido a los trabajos de Schwinger [64], Mills [65] y Keldysh [66] se desarrolló un formalismo basado en la selección de un contorno, a lo largo del eje real. Este es llamado el FTR. Las diferencias entre las dos formulaciones son a nivel de cálculo. En el FTI, el tiempo se restringe al intervalo  $[0, \beta]$  lo cual se traduce en la discretización de la componente temporal del momento, que eventualmente tiene que ser continuada analíticamente a valores reales. Debemos señalar que esta únicamente puede describir un sistema cerca del equilibrio térmico (o con una dependencia temporalmente lenta). En el caso del FTR, la componente temporal del momento no es discreta, por lo

que una continuación analítica no es necesaria. Técnicamente este formalismo es más complicado, debido a que el número de grados de libertad se duplica.

Las principales aplicaciones de la TTC en física de altas energías pueden ser clasificadas en tres clases:

- 1- *Cosmología*: Si se está interesado en los estudios de plasmas calientes, el universo temprano resulta ser un muy buen ejemplo. En cualquier momento antes de la era de la recombinación, la expansión del universo es mucho menor que el camino libre medio entre las partículas, de modo que se puede decir que el plasma del universo temprano es un plasma perfectamente termalizado [67]. Lo anterior también queda claramente demostrado por los resultados del COBE, que muestran un espectro uniforme de radiación de cuerpo negro, hasta fluctuaciones  $\delta T/T \sim 10^{-5}$  [68]. El rango de temperatura del plasma primordial, es de unos pocos  $eV$  hasta la masa de Planck [69]. De hecho, el primer y mejor éxito de la TTC concierne a la descripción de la restauración de la simetría en teorías de norma espontáneamente rotas a temperatura finita [70]. Este resultado es crucial en el caso del ME, donde el orden de la transición de fase es importante para la bariogénesis.
- 2- *Astrofísica*: Los núcleo de estrellas de neutrones, supernovas, gigantes rojas y enanas blancas están compuestos de un plasma extremadamente denso ( $\rho = 10^6 - 10^{15} \text{ gr/cm}^3$ ). La temperatura también puede ser muy alta (del orden de decenas de  $MeV$ ) durante el colapso de una supernova. No existen muchas aplicaciones de la TTC a tales sistemas, pero los estudios recientes indican que el mecanismo de enfriamiento en gigantes rojas y enanas blancas, sucede mediante el decaimiento del plasmon en dos pares de neutrinos  $\nu\bar{\nu}$  [71]. Tal resultado ha demostrado ser muy útil [72].
- 3- *Colosiones de Iones Pesados*: La factible creación en el laboratorio del llamado plasma de quarks-gluones [73]. Simulaciones en lattice demuestran claramente que QCD tiene una transición de fase en  $T_C \approx 150 - 200 \text{ MeV}$ , por encima de la cual los quarks y gluones están desconfiados [74]. La descripción de señales que muestran la existencia del plasma de quarks-gluones, como la pérdida de energía se lleva a cabo mediante el uso de la TTC [75].

Como mencionamos en el capítulo I, durante la TFED, la tasa de interacción entre las partículas era mayor que la tasa de expansión del universo, por lo que éste se puede considerar como un sistema en equilibrio térmico, y por lo tanto el FTI puede aplicarse sin ningún problema.

En este capítulo se presentan los elementos básicos de la formulación de tiempo imaginario de la TTC. Además, la técnica de la transformada de Mellin que permite obtener el comportamiento asintótico de sumas e integrales infinitas. Estos elementos nos permitirán el cálculo de las autoenergías, que contribuyen a la fase rota, y con estos el potencial efectivo del modelo estándar a temperatura finita.

## 4.1. Formalismo de Matsubara

Históricamente, Matsubara [63] fue el primero en construir una TTC mediante la incorporación de una variable de tiempo puramente imaginaria, en el operador de evolución, dando origen al formalismo de tiempo imaginario (FTI). Los valores discretos que toma la energía, sobre las que uno tiene que sumar, son llamadas frecuencias de Matsubara. En el formalismo de Matsubara (FTI), la idea básica es que los valores esperados de los operadores se pueden escribir como los valores esperados entre estados, cuyo peso estadístico corresponde a una situación de equilibrio térmico.

El comportamiento estadístico del sistema cuántico en equilibrio térmico es normalmente estudiado mediante el uso de un ensamble apropiado. Así, por ejemplo:

**El Ensamble Microcanónico** es usado para describir un sistema aislado que no intercambia energía ni materia con el medio. El número de partículas  $N$ , su volumen  $V$  y temperatura  $T$  permanecen constantes.

**El Ensamble Canónico** describe un sistema que intercambia energía térmica, mediante el contacto con un reservorio térmico, pero no materia. La temperatura varía mientras el volumen y número de partículas es constante.

$$\mathcal{H} = H, \quad (4.3)$$

**El Ensamble Gran-canónico** el sistema puede cambiar energía y partículas con el reservorio. Su temperatura y número de partículas varía con el tiempo.

$$\mathcal{H} = H - \mu N. \quad (4.4)$$

Las propiedades cualitativas de un sistema a temperatura finita no dependen de la naturaleza del ensamble. En general, se define la matriz de densidad de un sistema como

$$\rho(\beta) = e^{-\beta\mathcal{H}}. \quad (4.5)$$

Dada la matriz de densidad, se define la función de partición del sistema como

$$Z(\beta) = \text{Tr } \rho(\beta) = \text{Tr } e^{-\beta\mathcal{H}}, \quad (4.6)$$

donde  $\text{Tr}$  representa la traza, y se toma sobre un conjunto completo de estados.

Por otra parte, el valor esperado una operador  $A$  asociado a una observable física es

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n | A e^{-\beta\mathcal{H}} | n \rangle = \frac{\text{Tr } A e^{-\beta\mathcal{H}}}{\text{Tr } e^{-\beta\mathcal{H}}}, \quad (4.7)$$

donde la relación entre un operador en la imagen de Heisenberg  $A_H(t)$  y el correspondiente operador en la imagen de Schrödinger  $A$ , es

$$A_H(t) = e^{i\mathcal{H}t} A e^{-i\mathcal{H}t}. \quad (4.8)$$

En general, la función de partición de un sistema estadístico no puede ser evaluada exactamente. Mediante el formalismo de Matsubara (vía el método operacional o el de integrales de camino) se puede evaluar la función de partición de manera perturbativa, empleando un método diagramático análogo al usado en teoría de campos a  $T = 0$ . El hecho crucial aquí radica en que la matriz de densidad en la Ec. (4.5) se puede escribir como un operador de evolución temporal para tiempos imaginarios negativos, esto es:  $e^{-it\mathcal{H}}$  con  $t = -i\tau$  con  $\tau > 0$ , una variable real, es  $e^{-\tau\mathcal{H}}$ .

Para una teoría de campos, a  $T = 0$ , la función de Green o la amplitud para una transición de un estado inicial  $\phi_1(x_1, t_1) \equiv \phi_1(x)$  a un estado final  $\phi_2(x)$  en la representación funcional es

$$\langle \phi_1(x) | \phi_2(x) \rangle = \langle \phi_1(x) | e^{-iH(t_1-t_2)} | \phi_2(x) \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS}, \quad (4.9)$$

donde  $\phi_i(x_i, t_i)$  con  $i = 1, 2$  es el campo evaluado en el punto  $x$  en el instante de tiempo  $t$ .  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización, y  $\mathcal{D}$  es la medida, que significa que en cada punto del espacio hay una configuración de campo diferente y para tener una base completa es necesario considerar todas las configuraciones de campo en todo el espacio.  $S$  es la acción, definida como

$$S = \int \mathcal{L} d^4x. \quad (4.10)$$

con  $\mathcal{L}$  definiendo la densidad Lagrangiana apropiada, del sistema.

Ahora podemos identificar en la Ec. (4.9) a

$$t_1 - t_2 = -i\beta. \quad (4.11)$$

Con lo anteriormente expuesto, escribimos la función de partición para cualquier sistema cuántico (en una basa continua) como

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \text{Tre}^{-\beta\mathcal{H}} = \int d\phi_1(x) \langle \phi_1 | e^{-\beta\mathcal{H}} | \phi_2 \rangle \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp[iS_E], \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde  $S_E$  está relacionado con la acción Euclideana (o tiempo imaginario  $t = -i\tau$ ). Además, hemos identificado el operador  $e^{-\beta\mathcal{H}}$  como un operador de evolución en tiempo imaginario. Para lo anterior se ha generalizado los argumentos temporales de los campos al plano complejo. Adicionalmente, se requiere definir un contorno  $C$  en dicho plano; la elección de  $C$  no es arbitraria. El tiempo  $t_i$  en el cual comienza el contorno es arbitrario; sin embargo, el tiempo final queda determinado por  $t_i = i\beta$ , tal como muestra la Fig. 4.1.

Haciendo una continuación analítica a tiempo imaginario, podemos escribir la amplitud de transición también de esta manera

$$\langle \phi_1(x) | e^{-iH(t_1-t_2)} | \phi_2(x) \rangle = \langle \phi_1(x) | e^{-H\tau} | \phi_2(x) \rangle. \quad (4.13)$$

donde  $t \in [t_1, t_2]$  y  $\tau \in [0, \beta]$ .

En la imagen de Schrödinger, los operadores de un campo escalar y de momento al tiempo  $t = 0$  son  $\phi(x, 0)$  y  $\pi(x, 0)$ . Los estados propios de los anteriores operadores, denotados como  $|\phi\rangle$  y  $|\pi\rangle$ , satisfacen las siguientes ecuaciones de valores propios

$$\phi(x, 0) |\phi\rangle = \phi(x) |\phi\rangle \quad (4.14)$$

y

$$\pi(x, 0) |\pi\rangle = \pi(x) |\pi\rangle, \quad (4.15)$$

con valores propios  $\phi(x)$  y  $\pi(x)$ , respectivamente.

Además, estos estados propios, en una base continua, satisfacen las siguientes condiciones de completos y ortogonalidad:

$$\int d\phi |\phi\rangle \langle \phi| = 1, \quad \langle \phi_a | \phi_b \rangle = \delta[\phi_a(x) - \phi_b(x)], \quad (4.16)$$

$$\int d\pi |\pi\rangle \langle \pi| = 1, \quad \langle \pi_a | \pi_b \rangle = \delta[\pi_a(x) - \pi_b(x)]. \quad (4.17)$$

De otra parte, la llamada función de transformación de la representación de coordenadas y de momento, de la mecánica cuántica, puede ser generalizada al caso de un número infinito de grados de libertad, como el de los campos cuánticos, de la siguiente forma

$$\langle \phi | \pi \rangle = \exp \left[ i \int d^3x \pi(x) \phi(x) \right]. \quad (4.18)$$

También, de manera análoga al caso de la mecánica cuántica, el Hamiltoniano del sistema que depende de las variables canónicas del problema, nos permite estudiar el comportamiento dinámico de éste. En el caso de campos cuánticos sucede lo mismo, sólo que el Hamiltoniano es la funcional del campo y del momento conjugado

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\phi, \pi). \quad (4.19)$$

Por lo tanto, la amplitud de transición, dada en la Ec. (4.13), se puede reescribir como  $\langle \phi_b(x, t_f) | e^{-iHt_f} | \phi_a(x, 0) \rangle$ .

Debido a que estamos interesados en describir el comportamiento de un sistema de muchas partículas, vía la teoría cuántica de campos, este debe por lo tanto cumplir ciertas condiciones impuestas por la mecánica estadística, una de las cuales es restringir al sistema a hallarse en equilibrio. Lo anterior implica que los estados iniciales, al evolucionar de un tiempo  $t = 0$  a uno final  $t_f$ , regresan a su estado original, por lo que la amplitud de transición es  $\langle \phi_a | \exp^{-iHt_f} | \phi_a \rangle$ .

Para obtener la forma explícita de esta amplitud, dividimos el intervalo de tiempo  $[0, t_f]$  en  $N$  intervalos con igual duración  $\Delta t = t_f/N$ . Además, insertando de manera alterna los conjuntos completos dados en las Ecs. (4.16) y (4.17) se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle \phi_a | \exp^{-iHt_f} | \phi_a \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left( \prod_i^N \frac{d\pi_i}{2\pi} d\phi_i \right) \\
&\times \langle \phi_a | \pi_N \rangle \langle \pi_N | \exp^{-iH\Delta t} | \phi_N \rangle \langle \phi_N | \pi_{N-1} \rangle \\
&\times \langle \pi_{N-1} | \exp^{-iH\Delta t} | \phi_{N-1} \rangle \times \dots \\
&\times \langle \phi_2 | \pi_1 \rangle \langle \pi_1 | \exp^{-iH\Delta t} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | \phi_a \rangle. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

De otra parte, en el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , el operador de evolución puede ser expandido de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\langle \pi_i | \exp^{-iH\Delta t} | \phi_a \rangle &\simeq \langle \pi_i | (1 - iH\Delta t) | \phi_i \rangle \\
&= \langle \pi_i | \phi_i \rangle (1 - iH_i\Delta t) \\
&= (1 - iH_i\Delta t) \exp[-i \int d^3x \pi_i(x) \phi_i(x)], \quad (4.21)
\end{aligned}$$

donde hemos usado la Ec. (4.18) y  $H_i = \int d^3x \mathcal{H}(\pi_i(x), \phi_i(x))$ .

Sustituyendo la ecuación anterior en el lado derecho de la Ec. (4.20) y, haciendo una serie de pasos algebraicos, se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle \phi_a | \exp^{-iHt_f} | \phi_a \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left( \prod_i^N \frac{d\pi_i}{2\pi} d\phi_i \right) \delta(\phi_1 - \phi_a) \\
&\times \exp \left[ -i\Delta t \sum_{j=1}^N \int d^3x (\mathcal{H}(\pi_j, \phi_j) \right. \\
&\left. - \pi_j \frac{(\pi_{j+1} - \pi_j)}{\Delta t}) \right]. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

donde  $\phi_{N+1} = \phi_a = \phi_1$ .

Tomando el límite continuo de la Ec. (4.22), obtenemos la representación funcional de la amplitud de transición como

$$\begin{aligned}
\langle \phi_a | \exp^{-iHt_f} | \phi_a \rangle &= \int [d\pi] \int_{\phi(x,0)}^{\phi(x,t_f)} [d\phi] \\
&\times \exp \left[ i \int_0^{t_f} \int d^3x \left( \pi_j \frac{(\pi_{j+1} - \pi_j)}{\Delta t} - \mathcal{H}(\pi_j, \phi_j) \right) \right], \quad (4.23)
\end{aligned}$$

denotando con  $[d\pi]$  y  $[d\phi]$  la integración funcional. Además, las condiciones de periodicidad sólo restringen a la función de onda  $\phi$  y no al momento  $\pi$ . La Ec. (4.23) tiene la ventaja que no hace referencia a ningún operador [57].

La función de partición para describir un sistema termodinámico en equilibrio la podemos expresar como

$$Z = \text{Tr} \exp^{-\beta H} = \int d\phi_a \langle \phi_a | \exp^{-\beta H} | \phi_a \rangle, \quad (4.24)$$

donde la suma corre sobre todos los estados. Haciendo ahora una continuación analítica al tiempo imaginario  $\tau = it$ , los límites de integración sobre  $\tau$  son 0 y  $\beta$ . La Ec. (4.24) tiene un aspecto muy similar a la amplitud de transición dada por la Ec. (4.23) permitiendo expresar a  $Z$  como

$$Z = \int [d\pi] \int_{\text{periodica}} [d\phi] \times \exp \left\{ \int_0^\beta \int d^3x \left( i\pi \frac{\partial \pi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right) \right\}. \quad (4.25)$$

El término periódico, referente a las condiciones de equilibrio, se refleja en que hay restricciones en la integración sobre  $\phi_a = \phi(x, 0) = \phi(x, \beta)$ . En el caso de tratar con bosones, estas funciones  $\phi_a$  son periódicas. Si son fermiones se refleja en la anti-periodicidad para las funciones  $\psi_a$ , que son variables que siguen el álgebra de Grassman. En cualquiera de los casos anteriores, la energía se discretiza en la llamadas frecuencias de Matsubara. Por último, no hay restricción alguna sobre  $\pi$ .

Ejemplificando lo anterior en el caso de un campo escalar neutro, cuya Lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - U(\phi) \quad (4.26)$$

donde el potencial renormalizable hasta orden cuártico en  $\phi$  es

$$U(\phi) = g\phi^3 + \lambda\phi^4 \quad (4.27)$$

con  $\lambda \geq 0$  para garantizar la estabilidad del vacío. El momento conjugado es

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (4.28)$$

en donde el Hamiltoniano escalar es

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + U(\phi). \quad (4.29)$$

Para evaluar la Ec. (4.25) se retorna al caso discreto, esto es

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\pi_i}{2\pi} \int_{\text{periodica}} d\phi_i \right) \times \exp \left\{ \sum_{j=1}^N \int d^3x \left[ i\pi_j (\phi_{j+1} - \phi_j) - \Delta\tau \left( \frac{1}{2} \pi_j^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + U(\phi) \right) \right] \right\}. \quad (4.30)$$

Las integrales sobre el momento son Gaussianas

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\pi_i}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\Delta\tau}{2} \pi_i^2 + i(\phi_{j+1} - \phi_j) \pi_i \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\pi_i}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(\phi_{j+1} - \phi_j)^2}{2\Delta\tau} \right. \\
&\times \left. \left( \pi_i - \frac{i(\phi_{j+1} - \phi_j)}{\Delta\tau} \right)^2 - \frac{\Delta\tau}{2} \right\} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} \exp \left\{ \frac{-(\phi_{j+1} - \phi_j)^2}{2\Delta\tau} \right\} \left( \frac{2}{\Delta\tau} \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi\Delta\tau}} \exp \left\{ \frac{-(\phi_{j+1} - \phi_j)^2}{2\Delta\tau} \right\} \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Por lo anterior la función de partición toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
Z &= \lim_{N \rightarrow \infty} (2\pi)^{-N/2} \int \left[ \prod_{i=1}^N d\phi_i \right] \exp \left\{ \Delta\tau \sum_{j=1}^N \int d^3x \right. \\
&\times \left. \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{(\phi_{j+1} - \phi_j)}{\Delta\tau} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla\phi_j)^2 + \frac{m^2}{2} \phi_j^2 + U(\phi_j) \right] \right\}. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Retornando al límite continuo se obtiene

$$\begin{aligned}
Z &= N' \int_{periodica} [d\phi] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left( \left( \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right)^2 \right. \right. \\
&\left. \left. + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 + U(\phi) \right) \right\} \quad (4.33)
\end{aligned}$$

donde  $N'$  es un factor constante de normalización que no tiene importancia y el término que aparece en la exponencial es la acción Euclídeana para el campo escalar, dada por

$$S_E = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ \left( \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 + U(\phi) \right], \quad (4.34)$$

en el caso de campos escalares sin interacciones, usamos la Ec. (4.33) con  $U(\phi) = 0$ .

Integrando por partes, la integral de  $\tau$  en la Ec. (4.34) y aplicando la condición de periodicidad, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\beta d\tau \left( \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right)^2 &= \int_0^\beta d\tau \left( \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right) \left( \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right) \\
&= \int_0^\beta d\tau \left[ \frac{\partial}{\partial\tau} \left( \phi \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right) - \phi \frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} \right] = - \int_0^\beta \phi \frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} d\tau. \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Lo anterior permite reescribir la acción Euclídeana como

$$S_E = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi \left[ -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right] \phi. \quad (4.36)$$

Debido a que  $\tau$  esta constreñido a vivir en una línea recta, el campo  $\phi$  puede descomponerse en ondas planas de la siguiente manera

$$\phi(\vec{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_p e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} + w_n \tau)} \phi_n(-\vec{p}), \quad (4.37)$$

donde debido a las condiciones de periodicidad,  $\phi(x, \beta) = \phi(x, 0)$  para todo  $x$ ,  $e^{iw_n \beta} = 1$  implica que las frecuencias del campo de bosones son discretas,  $w_n = 2\pi nT$ , y son conocidas como frecuencias de Matsubara. En el caso de fermiones la condición es de antiperiodicidad,  $\psi(x, \beta) = -\psi(x, 0)$  lo que implica una frecuencia de Matsubara para estos campos igual a  $w_n = (2n+1)\pi T$ . Además, dado que  $\phi_{-n}(-\vec{p}) = \phi_n^*(\vec{p})$  tenemos que

$$\phi^*(\vec{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V}\right)^{1/2} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \sum_{p'} e^{-i(\vec{p}' \cdot \vec{x} - w_{n'} \tau)} \phi_{n'}^*(\vec{p}'). \quad (4.38)$$

La sustitución de las Ecs. (4.37) y (4.38) en la Ec. (4.36) implica que la acción es

$$\begin{aligned} S_E &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{V}\right) \int_0^\beta d\tau \int d^3x \sum_{\substack{n, n' \\ p, p'}} \phi_n(\vec{p}) \phi_{n'}^*(\vec{p}') (w_{n'}^2 + \vec{p}'^2 + m^2) \\ &\quad \times e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} + w_n \tau)} e^{i(\vec{p}' \cdot \vec{x} + w_{n'} \tau)} \\ &= -\frac{1}{2} \beta \sum_{\substack{n, n' \\ p, p'}} \int_0^\beta e^{i(w_n + w_{n'}) \tau} d\tau \int e^{i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}} \frac{d^3x}{V} \\ &\quad \times \phi_n(\vec{p}) \phi_{n'}^*(\vec{p}') (w_{n'}^2 + \vec{p}'^2 + m^2) \\ &= -\frac{1}{2} \beta^2 \sum_{n, \vec{p}} (w_n^2 + w^2) \phi_n(\vec{p}) \phi_n^*(\vec{p}), \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde  $w = (p^2 + m^2)$ . Además, podemos notar que la acción no depende de la fase.

Reescribiendo el campo escalar de la siguiente manera,  $\phi_n(\vec{p}) = e^{i\alpha} A_n(\vec{p})$  y usando el resultado obtenido en la Ec. (4.39), podemos expresar la Ec. (4.33), después de integrarla, como

$$\begin{aligned} Z &= N' \prod_{n, \vec{p}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \beta^2 (w_n^2 + w^2) A_n^2(\vec{p})} dA_n(\vec{p}) \right] \\ &= N' \prod_{n, \vec{p}} \left[ \frac{2\pi}{\beta^2 (w_n^2 + w^2)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde el  $2\pi$  viene del hecho que por cada integral del campo, hay un factor de  $2\pi$  procedente de la integración sobre el momento, el cual puede ser ignorado sin afectar la termodinámica del sistema. Lo anterior permite reescribir la Ec. (4.41) como

$$Z = \prod_{n, \vec{p}} \left[ \frac{1}{\beta^2(w_n^2 + w^2)} \right]^{1/2}. \quad (4.41)$$

De manera más formal podemos expresar la Ec. (4.33) como

$$Z = N' \int [d\phi] \exp \left[ -\frac{1}{2}(\phi, D\phi) \right]. \quad (4.42)$$

De otra parte, la integral Gaussiana que nos interesa, después de diagonalizar la Matriz  $D$ , es

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 d\phi_2 \dots d\phi_n e^{-\frac{1}{2}\phi_i D_{ij} \phi_j} = (2\pi)^{n/2} (\det D)^{-1/2}, \quad (4.43)$$

donde  $(\phi, D\phi)$  denota el producto interno en el espacio de funciones, con

$$D = \beta^2 \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \quad (4.44)$$

en el espacio de configuraciones ó

$$D = \beta^2(w_n^2 + w^2) \quad (4.45)$$

en el espacio de momento. Por lo tanto, la función de partición se relaciona con el determinante del operador de la acción.

Tomado el logaritmo natural de la Ec. (4.41)

$$\ln Z = -\frac{1}{2} \prod_{n, \vec{p}} \left[ \frac{1}{\beta^2(w_n^2 + w^2)} \right] = -\frac{1}{2} V \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln [\beta^2(w_n^2 + w^2)], \quad (4.46)$$

por integración sobre todos los valores de  $\vec{p}$ , con

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (4.47)$$

donde  $V$  es el volumen.

A partir de la Ec. (4.46) podemos determinar la energía libre de un gas de bosones escalares

$$\Omega \equiv -\beta^{-1} \ln Z = \frac{1}{2} VT \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln [\beta^2(w_n^2 + w^2)] \quad (4.48)$$

donde  $w^2 = p^2 + m^2$  es la energía de los bosones y  $V$  es el volumen. Para hacer la suma sobre frecuencias de Matsubara, derivamos la Ec. (4.46) con respecto a  $w$ , definiendo

$$v(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(w_n^2 + w^2) \quad (4.49)$$

entonces,

$$\frac{\partial v(w)}{\partial w} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2w}{(w_n^2 + w^2)}. \quad (4.50)$$

Usando la identidad

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{(y_n^2 + n^2)} = -\frac{1}{2y} + \frac{1}{2}\pi \coth \pi y = -\frac{1}{2y} + \frac{\pi}{2} + \pi \frac{e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \quad (4.51)$$

con  $y = \beta w/2\pi$ , se obtiene

$$\frac{\partial v(w)}{\partial w} = 2\beta \left[ \frac{1}{2} + \frac{e^{-\beta w}}{1 - e^{-\beta w}} \right], \quad (4.52)$$

que después de integrar es

$$v(w) = 2\beta \left[ \frac{w}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta w}) \right]. \quad (4.53)$$

Finalmente, sustituyendo la Ec. (4.53) en la Ec. (4.48), obtenemos que la energía libre es

$$\Omega = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{w}{2} + \beta^{-1} \ln(1 - e^{-\beta w}) \right]. \quad (4.54)$$

El primer término es independiente de la temperatura y corresponde a la contribución del vacío, el segundo término corresponde a la contribución de materia.

En el límite  $m^2 \ll T^2$  y después de integrar por partes

$$\Omega = -\frac{VT^4}{6\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = -\frac{\pi^2 VT^4}{90}, \quad (4.55)$$

donde la presión y la densidad de energía se obtienen, respectivamente, de las relaciones  $P = \frac{\partial \Omega}{\partial V}$ ,  $\epsilon \equiv \frac{E}{V} = 3P$

$$P = \frac{\pi^2 T^4}{90}, \quad \epsilon = \frac{\pi^2 T^4}{30}. \quad (4.56)$$

## 4.2. Reglas de Feynman en el FTI

Las reglas de Feynman en el formalismo de tiempo imaginario que se emplearan en el cálculo de las auto-energías de los campos, son análogas a las reglas que se emplean en el vacío,  $T = 0$ . Teniendo en cuenta el cambio en la variable temporal  $t \rightarrow -i\tau$ , para un campo escalar libre en el espacio de configuraciones se tiene que

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \begin{array}{l} t \rightarrow -i\tau \\ \rightarrow \end{array} \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right), \quad (4.57)$$

que en el espacio de momentos es

$$(k_\mu k^\mu - m^2) \rightarrow (-1) (w_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2), \quad (4.58)$$

en donde la métrica de Minkowski se ha transformado en la métrica de Euclides.

A continuación estableceremos las reglas que nos permitirán transformar expresiones obtenidas a  $T = 0$  a expresiones dentro del FTI ( $T \neq 0$ ), de la siguiente manera:

1. En general podemos obtener el resultado de la Ec. (4.60) a partir de esta regla de transformación

$$(k_\mu k^\mu - m^2)^\sigma \begin{array}{l} k_0 \rightarrow iw_n \\ \rightarrow \end{array} (-1)^\sigma (w_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma. \quad (4.59)$$

2. Las condiciones de frontera impuestas a los campos afectan al elemento de volumen del espacio fase, estableciendo la siguiente condición

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (4.60)$$

3. Los vértices a  $T = 0$  están acompañados por un factor de  $i$ , mientras a  $T \neq 0$  esté está ausente en la fase de la Ec. (4.12).
4. De igual modo a  $T = 0$  los propagadores llevan el factor de  $i$ , y debido que a  $T \neq 0$  está ausente el  $i$  de la Ec. (4.12) no aparecen en los propagadores.

De las anteriores reglas, se desprende que los efectos térmicos que aparecen en los lazos, y no en los vértices, sólo serán visibles en los propagadores.

De otra parte, en el formalismo de tiempo real, a diferencia del FTI, los grados de libertad en los campos se duplica, por lo que las reglas de Feynman son un poco más complicadas.

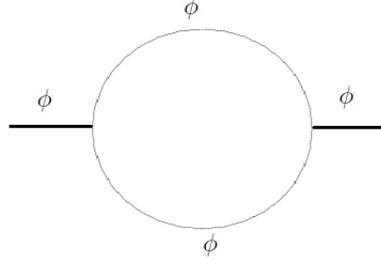


Figura 4.1: Diagrama de Feynman para la teoría  $\lambda\phi^3$ .

### 4.3. Aproximación Hard Thermal Loops

Uno de los métodos ampliamente usados en TTC para determinar las contribuciones dominantes en la temperatura en las integrales de momento del lazo, y obtener resultados libres de divergencias infrarojas e independientes del parámetro de norma, es la técnica de resumación llamada *Hard Thermal Loops* (HTL) [76].

Para ilustrar en qué consiste esta técnica tomemos como ejemplo el cálculo de la auto-energía de una función de tres puntos como se muestra en la Fig. 4.1, para una teoría escalar con interacción  $\lambda\phi^3$

$$\Pi = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]}. \quad (4.61)$$

La expresión para la auto-energía de la Ec. (4.61), de acuerdo a las reglas de Feynman del FTI, se escribe como

$$\Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2} T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[w_n^2 + w_k^2][(w_n^2 - ip_{0l})^2 + w_{k-p}^2]} \quad (4.62)$$

donde  $w_x = x^2 + m^2$  con  $x = k$  ó  $k-p$ ,  $w_n = 2\pi inT$  y  $p_{0l} = 2\pi ilT$ , con  $n$  y  $l$  enteros y

$$\Delta(p_{0l}, w_p) = -\frac{1}{p_{0l}^2 - w_p^2} = -\sum_{s=\pm 1} \frac{s}{2w_p} \frac{1}{p_{0l} - sw_p}. \quad (4.63)$$

El siguiente paso para hacer la suma sobre las frecuencias de Matsubara, siguiendo la Ref. [78], sustituimos la Ec. (4.63) en la Ec. (4.62) se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) &= -\frac{\lambda^2}{2} T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=\pm 1} \frac{rs}{4w_k w_{k-p}} \\ &\quad \times \frac{1}{[2\pi nT + isw_k][2\pi nT + ip_{0l} + irw_{k-p}]} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Ahora, mediante la utilización de la siguiente identidad

$$\sum_n \frac{1}{(n+ix)(n+iy)} = \left( \frac{\pi}{x-y} \right) \times [\coth(\pi x) - \coth(\pi y)], \quad (4.65)$$

se tiene que la Ec. (4.64) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Pi(p_{0l}, \mathbf{p}) &= -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=\pm 1} \frac{1}{8w_k w_{k-p}} \frac{1}{s w_k - (r w_{k-p} + p_{0l})} \\ &\quad \times \left[ r \coth\left(\frac{w_k}{2T}\right) - r \coth\left(\frac{w_{k-p}}{2T}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.66)$$

donde se a usado el hecho que  $\coth(x + i\ell\pi) = \coth(x)$  y  $s \coth(sx) = \coth(x)$ , de acuerdo al hecho que  $p_{0l} = 2i\pi\ell T$ .

Este es un paso importante para implementar la periodicidad en la expresión y que finalmente permite la continuación analítica del resultado para los valores complejos arbitrarios de  $p_{0l}$ . Cuando esta condición no es tomada en cuenta el resultado no puede ser interpretado por razones físicas [84], como se demuestra en el Apéndice I de [83]. Si esta condición no es tomada en cuenta, la continuación analítica final ha conducido a un resultado erróneo que debe ser corregido mediante la adición de la función  $\prod_{\delta}$  [78].

Como puede observarse de la Ec. (4.66), la integral sobre el 3-momento es muy complicada debido a las variables angulares. Es en este punto donde las aproximaciones nos permiten a sacar la información física relevante al problema. En nuestro caso estamos interesados en un régimen en donde la temperatura es la escala más alta y en donde la masa de las partículas que se mueven en el plasma del universo temprano varía con el  $v_{ev}$ . Bajo estas condiciones es posible aplicar la aproximación HTL y resolver la parte angular de la integral sobre el 3-momento.

De acuerdo a la Ref. [77] podemos decir que HTL consiste en las siguientes aproximaciones

$$k \sim T \gg p, m; \quad w_{k+p} \approx w_k + \cos(\theta); \quad n(w_{k+p}) \approx n(w_k) + \cos(\theta), \quad (4.67)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{p}$ .

Al remplazar estas aproximaciones en la Ec. (4.66), obtenemos

$$\begin{aligned} \Pi(iw_n, \mathbf{p}) &= -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4w_k^2} \left\{ \frac{1 + 2n(w_k)}{s iw_m + 2w_k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{dn(w_k)}{dw_k} \frac{pkx}{s iw_m w_p - pkx} \right\}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

donde  $x = \cos \theta$ .

Usando el hecho que

$$\int dx \frac{x}{(s iw_m w_k - kpx)} = -\frac{x}{kp} - \frac{s iw_m w_k}{k^2 p^2} \ln(is w_m w_k - kpx), \quad (4.69)$$

y después de hacer la parte angular de la Ec. (4.68) se tiene

$$\tilde{\Pi}(iw_n, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{k^2}{4w_k^2} \frac{dn(w_k)}{dw_k} \right. \quad (4.70)$$

$$\left. \times \left[ -2 - \frac{s iw_m w_k}{kp} \ln \left( \frac{is w_m w_k - pk}{s iw_m w_k + pk} \right) \right] \right\}. \quad (4.71)$$

Es bien sabido que para la mayoría de las teorías a temperatura finita las autoenergías muestran un comportamiento no analítico en el origen del espacio de momento-frecuencia [78]. Entonces, parametrizando el momento externo  $p_\mu = (p_0, \mathbf{p}) \rightarrow 0$  se presentan dos situaciones al tomar este límite totalmente diferentes: *i*)  $p_0 = 0, \mathbf{p} \rightarrow 0$  que da cuenta de las propiedades de apantallamiento que sufren las partículas en el plasma y *ii*)  $p_0 \rightarrow 0, \mathbf{p} = 0$  que representa las oscilaciones de longitud de onda larga en el plasma. Tomando la continuación analítica  $iw_m \rightarrow p_0$  con  $p_0$  real, y después sustituyendo  $p_0 = \alpha p$  se tiene que

$$\tilde{\Pi}(\alpha p, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{4w_k^2} \frac{dn(w_k)}{dw_k} \left\{ -4 - \frac{\alpha w_k}{k} \ln \left( \frac{\alpha w_k - k}{\alpha w_k + k} \right)^2 \right\}, \quad (4.72)$$

con la sustitución anterior se está parametrizando la forma en que el momento externo se acerca al origen.

Las dos situaciones anteriores físicamente corresponden a tomar en la Ec. (4.72)  $\alpha \rightarrow 0$  y  $\alpha \rightarrow \infty$ , respectivamente. Analíticamente lo anterior corresponde a lo siguiente

$$\tilde{\Pi}(\alpha p, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{4w_k^2} \frac{dn(w_k)}{dw_k} \left\{ -4 - \begin{pmatrix} 0, & \alpha \rightarrow 0 \\ -4, & \alpha \rightarrow \infty \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.73)$$

Por lo tanto, sustituyendo ahora la Ec. (4.73) en la Ec. (4.68), se tiene

$$\Pi(\alpha p, \mathbf{p}) = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{k^2}{w_k^3} n(w_k) + \frac{k^2}{w^2} \frac{dn(k)}{dk} \delta_{\alpha 0} \right\}, \quad (4.74)$$

con  $\delta_{\alpha 0}$  la delta Kronecker. La preservación de la masa desde el inicio ha evitado la presencia de las divergencias infrarrojas en la Ec. (4.74).

La no conmutación de los límites anteriores está asociada a la presencia de puntos rama de la función logarítmica de la Ec. (4.72). De acuerdo a la Ref. [78] los puntos rama se hallan en  $\alpha w_k = \pm k$ , en donde el origen de este término resulta de la integración angular y en general aparecen independiente del método que se use para hacer las integrales.

Evaluando en el límite infrarrojo  $p_0 = 0, \mathbf{p} \rightarrow 0$

$$\Pi^T(0, p \rightarrow 0) = \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \left[ \frac{\pi T}{m} + \ln \left( \frac{m}{2\sqrt{\pi T}} \right) + \gamma_E - \frac{m^2 \zeta(3)}{8\pi^2 T^2} \right], \quad (4.75)$$

donde  $\gamma_E$  es la función gamma de Euler.

La aproximación HTL permite obtener las contribuciones dominantes en la temperatura, en el sentido que al no haber otra escala de energía presente en las integrales de momento (en la HTL se desprecia la masa) el resultado de las integrales esta en función de la única escala presente, la temperatura. Para diagramas con más de un propagador, la suma de frecuencias de Matsubara es más complicada. Una manera conveniente de abordar este problema es mediante la implementación del parámetro de Feynman a  $T \neq 0$ .

## 4.4. Transformada de Mellin

En el cálculo de nuestras cantidades físicas de interés, no podemos extender directamente los resultados de la teoría cuántica de campos a temperatura nula al caso de temperatura finita, porque a temperatura finita el promedio se efectúa sobre todos los estados excitados altamente degenerados, a diferencia de la teoría a temperatura cero en que el promedio es únicamente sobre el estado fundamental. Una de las maneras formales para tener en cuenta el carácter de temperatura finita en la teoría cuántica de campos se debe a Matsubara. La idea es reemplazar la integración sobre la componente temporal  $k_0$  por la suma sobre todos los valores enteros de  $n$ :  $2\pi nT$  para bosones y por  $2\pi(n+1)T$  para fermiones. Estas sumas infinitas que se encuentran a menudo en los diagramas térmicos de Feynman, y son tradicionalmente calculadas usando la expansión en serie infinita de la función  $\coth(\pi y)$ , para generar los polos en el plano complejo, cuyos residuos corresponden a los términos en la suma.

En esta sección se desarrolla, junto con la regularización dimensional, una de las técnicas que permite obtener una expansión asintótica en el régimen de alta temperatura, y al mismo tiempo, nos indica la principal contribución a las escalas pequeñas en este régimen.

Mediante la llamada transformada de Mellin [80] es posible obtener el comportamiento asintótico de sumas e integrales infinitas. Se deriva la transformada de Mellin y su inversa a partir de la transformada compleja de Fourier, y su inversa. El par de funciones relacionadas por esta transformación se definen, respectivamente, como

$$F(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx, \quad \alpha < \text{Re}(p) < \beta, \quad (4.76)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} F(p) dp, \quad \alpha < c < \beta, \quad (4.77)$$

donde  $f(x)$  es la transformada inversa, y es una función real definida sobre el intervalo  $(0, \infty)$  y la variable de la transformada de Mellin,  $p$ , es un número complejo.

Debido a que en este trabajo estamos usando el FTI, para incorporar los efectos del medio, será frecuente desarrollar sumas sobre frecuencias de Matsubara, ya sea de bosones o fermiones, en vez de integrar, esto es

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} = iT \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(w_n). \quad (4.78)$$

La aplicación de la transformada de Mellin a la suma de series infinitas, se basa en la siguiente propiedad de escala  $F(p) = a^{-p} F(p)$ , tal que

$$f(nx) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} n^{-p} F(p) dp, \quad (4.79)$$

es alguna función a la cual le corresponde una transformada de Mellin inversa  $F(p)$ .

Tomando a ambos lados de la Ec. (4.79) una suma que converge uniformemente, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f(nx) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} n^{-p} F(p) dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x^{-p} n^{-p} F(p) dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} \zeta(p) F(p) dp, \end{aligned} \quad (4.80)$$

donde  $\zeta(p)$  es la función Zeta de Reimann, y el intercambio entre la suma e integral es permitido debido a la suposición de convergencia uniforme de la suma en el contorno de integración de  $p$  [80], por lo tanto cuando  $x = 1$ , la Ec. (4.80) se reduce a

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) \zeta(p) dp, \quad (4.81)$$

de lo anterior podemos concluir que el problema de calcular la suma sobre  $n$  se ha convertido en hallar la transformada de Mellin de  $f(n)$ .

En lo que sigue, se procede a implementar la técnica de la transformada de Mellin, teniendo en cuenta el método de regularización dimensional y siguiendo de cerca la Ref. [81]. Será común en los cálculos de las auto-energías encontrar sumas sobre frecuencias de Matsubara de la forma

$$S = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{w_n^{2t} k^{2a}}{(w_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma}, \quad (4.82)$$

donde el término  $\mu$  es un factor de escala adicional, que preserve las unidades globales de energía, y la invariancia de norma, empleado en los métodos de regularización dimensional.

En el caso particular de  $t = 0$  y frecuencias para bosones  $n \neq 0$ , y debido a que el sumando es par, en la suma infinita, se tomará el doble de las frecuencias positivas. Se calculará primero el término  $n \neq 0$  y posteriormente  $n = 0$ . De acuerdo a lo anterior, las sumas a realizar con  $n \neq 0$  serán de la forma

$$S = 2T \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{w_n^{2t} k^{2a}}{(w_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma}. \quad (4.83)$$

Debido a que la contribución del vacío no ha sido aislada, es esperado que algunos resultados presenten divergencias, en general ultravioletas, provenientes de la contribución del vacío de los propagadores.

Para implementar la técnica de Mellin a la Ec. (4.83), identificamos a  $f(n)$  como

$$f(w_n) = \mu^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{w_n^{2t} k^{2a}}{(w_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma}. \quad (4.84)$$

Usando la Ec. (4.76), se tiene que

$$\begin{aligned} F(P) &= \mu^{-d} \int_0^\infty w_n^{p-1} dw_n \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{w_n^{2t} k^{2a}}{(w_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma} \\ &= \mu^{-d} \int_0^\infty w_n^{2t+p-1} dw_n \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{2a}}{(w_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Suponiendo que la integral sobre  $w_n$  es sobre  $2t + p$  dimensiones, entonces multiplicando y dividiendo por el elemento de ángulo sólido en  $2t + p$  dimensiones

$$\frac{\Gamma(\frac{2t+p}{2})}{2\pi^{2t+p/2}} \int d\Omega_{2t+p} = 1, \quad (4.86)$$

la Ec. (4.85) se reescribe como

$$F(P) = \mu^{-d} \frac{\Gamma(t + \frac{p}{2})}{2\pi^{1+\frac{p}{2}}} \int_0^\infty d^{2t+p} w_n \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{2a}}{(w_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma}. \quad (4.87)$$

De manera similar se procede a hacer la integral del momento y extendiendo aún más el espacio para fusionar las integrales, multiplicamos y dividimos por  $1 = \left(\frac{2\pi}{2\pi}\right)^{2a}$  y el hecho que  $(\pi)^d/2 = (d\Omega_d) \cdot \frac{1}{2}\Gamma(d/2)$ , después de un poco de álgebra se obtiene

$$\begin{aligned} F(P) &= \mu^{-d} \frac{\Gamma(t + \frac{p}{2})\Gamma(a + \frac{d}{2})}{2\pi^{t+\frac{p}{2}}} \frac{(4\pi)^a}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty d^{2t+p} w_n \\ &\quad \times \int \frac{d^{d+2a} k}{(2\pi)^{d+2a}} \frac{1}{(w_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

y haciendo el cambio  $k' = w_n + \mathbf{k}$  podemos fusionar las dos integrales en una sola, esto es

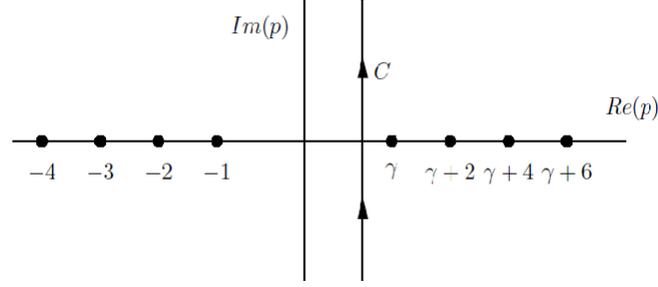
$$F(P) = \mu^{-d} \frac{\Gamma(t + \frac{p}{2})\Gamma(a + \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{(4\pi)^{t+a+\frac{p}{2}}}{2} \int \frac{d^{2t+p+d+2a} k'}{(2\pi)^{2t+p+d+2a}} \frac{1}{(\mathbf{k}'^2 + m^2)^\sigma}. \quad (4.89)$$

Ya en esta forma, siguiendo la referencia [82] y teniendo en cuenta que estamos en el espacio Euclideo, la integración después de simplificar algunos términos es

$$F(P) = \frac{\Gamma(t + \frac{p}{2})\Gamma(a + \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{\mu^{-d}}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\sigma - \frac{2t+2a+d+p}{2})}{\Gamma(\sigma)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\sigma - \frac{2t+2a+d+p}{2}}. \quad (4.90)$$

Ahora, tomando la transformada inversa de la Ec. (4.81) en términos de  $w_n$ , en donde la Ec. (4.78) es

$$\begin{aligned} f(w_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} w_n^{-p} F(p) dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-p} (n-s)^{-p} F(p) dp, \end{aligned} \quad (4.91)$$



**Figura 4.2:** Contorno de integración que consiste en un semicírculo que encierra los polos de la función  $\Gamma(\sigma - t - \frac{d}{2} - \frac{p}{2})$  con  $\gamma = 2\sigma - 2t - d - 2a$ .

y en general la frecuencia de Matsubara se denota como  $w_n = 2\pi(n - s)\beta^{-1}$ , siendo para bosones  $s = 0$  y para fermiones  $s = 1/2$  con  $\beta^{-1} = T$ . Con lo anterior la suma de la Ec. (4.81) y usando la definición de la función Zeta de Reinmann generalizada, se convierte en

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-1} \zeta(p, 1-s) F(p) dp. \quad (4.92)$$

Sustituyendo ahora la Ec. (4.90) en la Ec. (4.92), se obtiene

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\mu^{-d}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(a + \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\sigma)} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\sigma - (2t+2a+d)} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\sigma - \frac{2t+2a+d+p}{2}\right) \\ &\times \Gamma\left(\frac{2t+p}{2}\right) \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{-p} \zeta(p, Z) dp, \end{aligned} \quad (4.93)$$

con  $Z = 1, 1/2$  para bosones o fermiones, respectivamente [81]. Puede observarse que las funciones gamma tienen un comportamiento asintótico que se anula mutuamente, debido a que sus argumentos tienen signos contrarios, entonces la convergencia de la integral estaría básicamente determinada por el factor  $\frac{(2\pi)}{(\beta m)}$ . Esta integral tendrá comportamientos asintóticos diferentes dependiendo de si el contorno de integración se cierra a la derecha ó a la izquierda.

Desde el punto de vista de nuestro problema, las condiciones presentes en el universo alrededor de la transición de fase, en donde la masa de las partículas dependen del  $vev$  y es proporcional a las constantes de acoplamiento, imponen la jerarquía de escalas  $\frac{m}{T} < 1$  o en términos del factor de convergencia  $\frac{(2\pi)}{(\beta m)} > 1$ . Entonces el contorno de integración debe cerrarse hacia la derecha, y por el teorema del residuo la evaluación de la integral estará determinada por los polos de la función gamma  $\Gamma\left(\sigma - \frac{2t+2a+d+p}{2}\right)$ . Dichos polos que sólo se incluyen dentro del contorno de integración son simples, y se determinan cuando el argumento de la función gamma toma valores enteros negativos  $-j$ , es decir

$$\sigma - \frac{2t+2a+d+p}{2} = -j \Rightarrow p = 2j + 2\sigma - 2t - 2a - d, \quad (4.94)$$

donde  $j = 0, 1, 2, \dots, \infty$ , y en cuyo caso los residuos de la función gamma correspondientes son  $-2(-1)^j/j!$ , que se localizan tal y como se muestra en la Fig. 4.2.

Al aplicar el teorema del residuo a la Ec. (4.93), la suma de manera simplificada toma la forma

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{(2\pi i)} \frac{\mu^{-d}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(a + \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\sigma)} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\sigma - (2t + 2a + d)} \\
&\times (-2\pi i) \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{-2(-1)^j}{j!} \Gamma\left(\frac{2j + 2\sigma - d - 2a}{2}\right) \right. \\
&\times \left. \zeta(2j + 2\sigma - 2t - d - 2a, Z) \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{-(2j + 2\sigma - 2t - d - 2a)} \right\} \\
&= \frac{2\mu^{-d}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(a + \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\sigma)} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-2\sigma + 2t + 2a + d} \\
&\times \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j}{j!} \Gamma\left(j + \sigma - \frac{d}{2} - a\right) \zeta(2j + 2\sigma - 2t - d - 2a, Z) \right. \\
&\times \left. \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{-2j} \right\}. \tag{4.95}
\end{aligned}$$

Del resultado anterior podemos ver que al cerrar el contorno de integración a la derecha, se ha obtenido una expansión descendente en términos del cociente  $m/T < 1$ . De haber cerrado el contorno a la izquierda, tendríamos una expansión ascendente del cociente  $m/T > 1$ .

La evaluación de la integral para el término  $t = 0$  y frecuencia de bosones con  $n = 0$  a partir de la Ec. (4.82) se obtiene

$$\begin{aligned}
S &= \mu^{-d} T \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^{2a}}{(\mathbf{k}^2 + m^2)^\sigma} \\
&= \frac{\mu^{-d} T}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(a + \frac{d}{2})\Gamma(\sigma - a - \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\sigma)} \left(\frac{1}{m}\right)^{(2\sigma - d - 2a)}. \tag{4.96}
\end{aligned}$$

## 4.5. Parametrización de Feynman a $T \neq 0$

En el FTI, la introducción de la parametrización de Feynman para el cálculo de integrales a un lazo que contiene dos propagadores, tal como la teoría  $\lambda\phi^3$ , puede evitarse ya que hay técnicas que permiten realizar la suma sobre frecuencias de Matsubara de una manera directa. Sin embargo, si se estudia la influencia de campos magnéticos débiles sobre algunos procesos físicos a temperatura finita, los propagadores de las partículas en el lazo implican el producto de dos o más propagadores como se ha demostrado en la Ref. [79] y como veremos en el siguiente capítulo de este trabajo.

Siguiendo la Ref. [83] veamos como la parametrización de Feynman es implementada en el FTI (dentro de la técnica de suma de Mellin) sin introducir puntos rama y singularidades en el origen. Los ingredientes clave para esta implementación son: la aplicación de la periodicidad en las expresiones antes de la continuación analítica, el uso del intervalo original de integración para el parámetro Feynman  $x$  y la contabilización del término adicional que corrige la fórmula original de Feynman, cuando la suma de los denominadores se anula.

Para tal efecto, en la expresión para la auto-energía dada en la Ec. (4.62) la suma sobre las frecuencias de Matsubara se separa en tres partes:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{-\|l\|-1} + \sum_{n=\|l\|+1}^{\infty} + \sum_{n=-\|l\|}^{+\|l\|}, \quad (4.97)$$

en las dos primeras las frecuencias implicadas tienen signo definido mientras que en la tercera tiene signo mezclado.

Los dos primeros términos, donde las frecuencias tienen signo definido, definiendo

$$\begin{aligned} \Pi_1(p_{0l}, \mathbf{p}) &= \frac{\lambda^2}{2} T \left( \sum_{n=-\infty}^{-\|l\|-1} + \sum_{n=\|l\|+1}^{\infty} \right) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Delta(k_{0n}, E_k) \Delta(k_{0n} - p_{0l}, E_{k-p}) \\ &= \frac{\lambda^2}{2} T \left( \sum_{n=-\infty}^{-\|l\|-1} + \sum_{n=\|l\|+1}^{\infty} \right) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)D_2 + xD_1]^2}, \end{aligned} \quad (4.98)$$

donde se ha introducido la parametrización de Feynman, sobre el parámetro de Feynman  $x$  y en la cual  $D_1 = w_n^2 = E_k^2$  y  $D_2 = (w_n - w_l)^2 + E_{k-p}^2$  con  $k_{0n} = 2\pi nT$  y  $p_{0l} = 2\pi lT$ . Haciendo ahora un cambio en el tri-momento de integración  $k \rightarrow -(1-x)p$ , y después de hacer este renombramiento apropiado del índice de la suma, la expresión para  $\Pi_1$  es en el límite infrarrojo es Ref. [83]

$$\Pi_1(0, p \rightarrow 0) = \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \left[ \frac{1}{2\epsilon} + \ln \left( \frac{\mu}{2\sqrt{\pi T}} \right) + \frac{\gamma_E}{2} - \frac{m^2 \zeta(3)}{8\pi^2 T^2} \right]. \quad (4.99)$$

Para el cálculo del término con frecuencias de signos mezclados, se define

$$\Pi_2(p_{0l}, \mathbf{p}) = \frac{\lambda^2}{2} T \sum_{n=-\|l\|}^{+\|l\|} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_0^1 \frac{dx}{[(w_n - xw_l) + y]^2}, \quad (4.100)$$

donde  $y = (k - xp)^2 - x(1-x)(p_{0l}^2 - p^2) + m^2$ .

Limitándonos a valores reales de  $p_0$ , se fija  $p_0 = \alpha p$ , y tomando el límite de  $p \rightarrow 0$  se obtiene, con  $\alpha = 0$

$$\Pi_2(0, p \rightarrow 0) = \frac{\lambda^2}{2(2\pi)^2} T \int dk \frac{1}{E_k^2} = \frac{\lambda^2}{2(2\pi)^2} T \left( \frac{\pi}{2m} \right). \quad (4.101)$$

Al combinar los resultados dados en las Ecs. (4.99) y (4.101), los cuales son independientes de  $\alpha$ , se obtiene

$$\Pi(0, p \rightarrow 0) = \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2} \left[ \frac{\pi T}{m} + \frac{1}{2\epsilon} + \ln \left( \frac{\mu}{2\sqrt{\pi T}} \right) + \frac{\gamma_E}{2} - \frac{m^2 \zeta(3)}{8\pi^2 T^2} \right]. \quad (4.102)$$

El análisis de la dependencia de  $\alpha$ , como muestra la Ref. [78], la forma habitual de la parametrización de Feynman a temperatura finita debe ser corregida cuando la suma de los denominadores puede anularse. La expresión correcta en este caso es

$$\frac{1}{D_1 D_2} \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)D_2 + xD_1]^2} = 4\pi i \frac{\delta(D_1 + D_2)}{D_1 - D_2}, \quad (4.103)$$

donde el primer término es tomado como el valor principal.

Ya que en el cálculo, mediante la técnica de sumas de Mellin, las frecuencias de Matsubara en la suma son primero tratadas como continuas en la transformación de Mellin, y una continuación analítica es necesaria, existe la posibilidad de que el segundo término de la Ec. (4.103) contribuya. Como se demuestra en el apéndice II de Ref. [83].

Para comparar los resultados de las Ecs. (4.102) y (4.75), se debe sustraer de la Ec. (4.102) la contribución de vacío, debido a que el procedimiento de suma de Mellin explícitamente no separa este de la contribución térmica.

La contribución del vacío para la auto-energía  $\Pi$ , donde la integral se ha extendido a  $d$  dimensiones, evaluado explícitamente en el límite infrarrojo es

$$\Pi^{vac}(0, p \rightarrow 0) = \frac{\lambda^2}{8(2\pi i)^2} \mu^{1-d} \int \frac{d^d k}{E_k} = \frac{\lambda^2}{8(2\pi i)^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{\mu^2}{\pi m^2} \right) - \gamma_E \right]. \quad (4.104)$$

Por lo tanto, la contribución térmica se obtiene restando la Ec. (4.104) de la Ec. (4.102) esto es

$$\begin{aligned} \Pi^T(0, p \rightarrow 0) &= \Pi(0, p \rightarrow 0) - \Pi^{vac}(0, p \rightarrow 0) \\ &= \frac{\lambda^2}{4(2\pi i)^2} \left[ \frac{\pi T}{m} + \ln \left( \frac{\mu^2}{\pi m^2} \right) - \gamma_E - \frac{m^2 \zeta(3)}{8\pi^2 T^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Como puede verse, una vez que se ha sustraído la contribución del vacío, el resultado coincide con la Ec. (4.75).

Los resultados aquí obtenidos se emplearán, en el siguiente capítulo, en el cálculo de las auto-energías, dentro del MEM después de la ruptura espontánea de simetría.

# Capítulo 5

## AUTO-ENERGÍAS

En este capítulo se calculan las auto-energías del MEM que a su vez serán utilizadas para el cálculo de los diagramas de anillo en el potencial efectivo.

Es bien sabido que en ausencia de un campo magnético externo la parte dominante en la expansión a alta temperatura las auto-energías térmicas del MEM son independientes del parámetro de norma [77]. Sin embargo, como veremos, al considerar los efectos de un campo magnético externo débil, estas auto-energías dependen de este parámetro.

En lo que sigue, trabajamos en el formalismo de tiempo imaginario de la teoría térmica de campos. En primer lugar, recordemos que la integración a lo largo del cuadri-momento se lleva a cabo en el espacio Euclidiano con  $k_0 = ik_4$ . Esto significa que

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \rightarrow i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}. \quad (5.1)$$

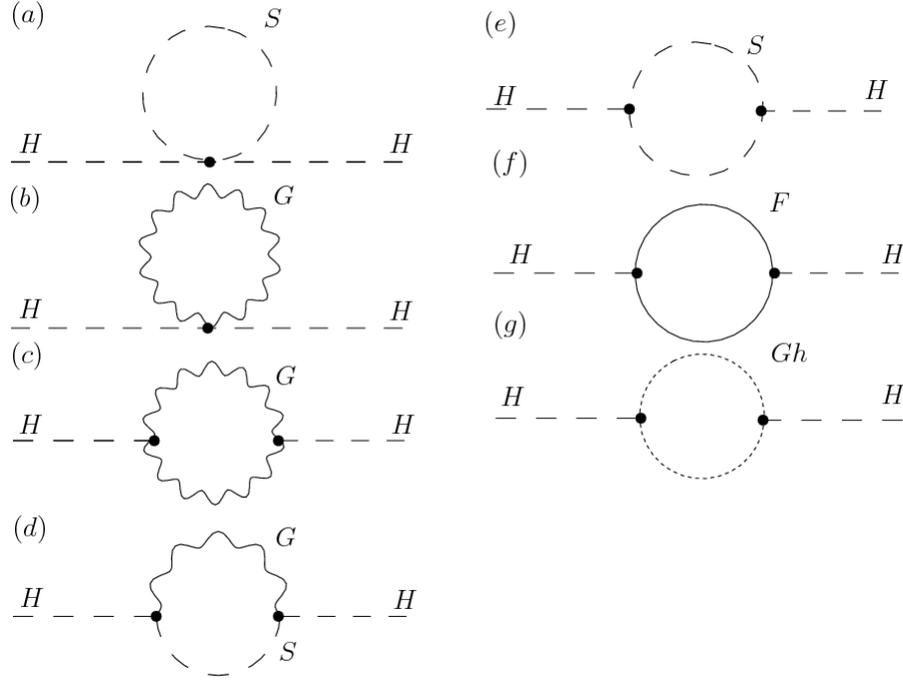
Además, las energías de los bosones toman solamente valores discretos, es decir,  $k_4 = \omega_n = 2n\pi T$  con  $n$  un número entero, por lo tanto

$$\int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \rightarrow T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (5.2)$$

### 5.1. Bosón de Higgs

La Fig. 5.1 muestra los diagramas de Feynman que contribuyen a la auto-energía del bosón de Higgs afectados por el campo magnético. Calculamos explícitamente el diagrama independiente del momento que se muestra en la Fig. 5.1(a) para un solo campo escalar. En el límite de campo débil, su expresión es

$$\Pi_{(a)}^{H-S} = \frac{\lambda}{4} T \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} D_B(\omega_n, \mathbf{k}; m^2), \quad (5.3)$$



**Figura 5.1:** Diagramas de Feynman para la auto-energía del bosón de Higgs, que contienen lazo cuyos propagadores corresponden a partículas afectadas y no afectadas por el campo magnético.  $\eta$  representa los campos fantasmas.

donde  $D_B$  está dado por la Ec. (3.69). Utilizando la versión Euclidea de la Ec. (3.69), tenemos

$$\begin{aligned} \Pi_a^{H-S} &= 2\lambda T \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)} \\ &\times \left( 1 - \frac{(eB)^2}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^2} + \frac{2\mathbf{k}_\perp^2 (eB)^2}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)^3} \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

La integral en la Ec. (5.4) contiene factores cuya forma general es

$$I_\alpha(\mathbf{k}; m^2) \equiv \frac{1}{[\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2]^\alpha}. \quad (5.5)$$

Además, involucra la suma sobre frecuencias de Matsubara, la cual se lleva a cabo recurriendo a las Refs. [81, 83]. Para los términos con  $n \neq 0$  el resultado es

$$\begin{aligned} T \sum_{n \neq 0} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \mathbf{k}^{2a} \omega_n^{2t} I_\alpha(\mathbf{k}; m^2) &= \frac{(2T)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\alpha)} (2\pi T)^{d+2a+2t-2\alpha} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + a)}{\Gamma(\frac{d}{2})} \mu^{2\epsilon} \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \zeta(2(j + \alpha - t - \frac{d}{2} - a)) \Gamma(j + \alpha - \frac{d}{2} - a) \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{2j}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

en donde  $\mu$  es la escala de energía empleada para la regularización dimensional y  $d = 3 - 2\epsilon$ .

Para el término  $n = 0$  se tiene

$$T \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\mathbf{k}^{2a}}{(\mathbf{k}^2 + m^2)^\alpha} = \frac{T}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + a)}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2} - a)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\alpha - \frac{d}{2} - a}. \quad (5.7)$$

En términos de la Ec. (5.5), la Ec. (5.4) se escribe como

$$\Pi_a^{H-S} = 2\lambda T \sum_n \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ I_1(\mathbf{k}; m_i^2) - \frac{(eB)^2}{3} \left( I_3(\mathbf{k}; m_i^2) - 2\mathbf{k}^2 I_4(\mathbf{k}; m_i^2) \right) \right]. \quad (5.8)$$

Usando la Ec. (5.6) para los términos con  $n \neq 0$  y la Ec. (5.7) para  $n = 0$ , y después de considerar las contribuciones de todos los campos escalares corriendo en el lazo, se obtiene

$$\Pi_a^H = \lambda \frac{T^2}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2\pi T} (2m_1 + m_3 + 3m_4) \right] - \lambda \frac{(eB)^2}{48\pi m_1^2} \left[ \frac{T}{m_1} + \frac{\zeta(3)m_1^2}{4\pi^3 T^2} \right], \quad (5.9)$$

donde las  $m_i$  representan las masas del bosón de Goldstone, dadas por la Ec. (2.40).

La contribución del diagrama en la Fig. 5.1(b) para el bosón de norma  $W^\pm$  circulando en el lazo es

$$\Pi_b^{H-W} = \frac{g^2}{2} T \sum_n \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} G_{B\mu}^\mu(\omega_n, \mathbf{k}; m_W). \quad (5.10)$$

Procedemos a calcular la Ec. (5.10), así como el resto de las auto-energías explícitamente, en el límite de infrarrojo,  $q_0 = 0, \mathbf{q} \rightarrow 0$  [78].

En términos de la función  $I_\alpha$  definida en la Ec. (5.5), se escribe la Ec. (5.10) como

$$\begin{aligned} \Pi_b^{H-W} &= \frac{g^2}{2m_W^2} T \sum_n \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ 4m_W^2 I_1(\mathbf{k}; m_W^2) \right. \\ &+ (\omega_n^2 + \mathbf{k}^2) [I_1(\mathbf{k}; m_W^2) - I_1(\mathbf{k}; \xi m_W^2)] \\ &+ \frac{(eB)^2}{3} \left[ -6(I_2(\mathbf{k}; m_W^2) - I_2(\mathbf{k}; \xi m_W^2)) \right. \\ &- (3\omega_n^2 + 7\mathbf{k}^2)(I_3(\mathbf{k}; m_W^2) - I_3(\mathbf{k}; \xi m_W^2)) \\ &+ 4\mathbf{k}^2(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2)(I_4(\mathbf{k}; m_W^2) - I_4(\mathbf{k}; \xi m_W^2)) \\ &\left. + 36m_W^2 I_3(\mathbf{k}; m_W^2) + 16\mathbf{k}^2 m_W^2 I_4(\mathbf{k}; m_W^2) \right] \left. \right\}. \quad (5.11) \end{aligned}$$

Usando la Ec. (5.6) para los términos con  $n \neq 0$  y la Ec. (5.7) para los términos con  $n = 0$ , e incluyendo todas las contribuciones de los bosones de norma en el lazo, se tiene

$$\begin{aligned} \Pi_b^H &= \frac{T^2}{16} \left[ g^2(3 + \xi) + g'^2 \left( 1 + \frac{\xi}{3} \right) - \frac{3 + \xi^{3/2}}{\pi T} (2g^2 m_W + (g^2 + g'^2) m_Z) \right] \\ &+ \frac{(eB)^2 g^2}{64\pi m_W^2} \left[ \left( 3 + \frac{35}{3\xi^{1/2}} \right) \frac{T}{m_W} + \frac{11\zeta(3)m_W^2}{3\pi^3 T^2} \right]. \quad (5.12) \end{aligned}$$

De manera similar se pueden calcular las contribuciones de los diagramas (c) hasta (g) mostrados en la Fig. 5.1, en el límite de infrarrojo. El resultado explícito, para valores arbitrarios del parámetro de norma  $\xi$  se muestran en el Apéndice A.

La contribución principal a la auto-energía del bosón de Higgs se obtiene mediante la suma de las expresiones (a) hasta (g) en el Apéndice A. Manteniendo el término dominante, para cada contribución, el resultado es independiente del parámetro de norma y está explícitamente dado por

$$\Pi_1 = \frac{T^2}{4} \left\{ \frac{3}{4}g^2 + \frac{1}{4}g'^2 + 2\lambda + f^2 \right\}. \quad (5.13)$$

Hemos tenido en cuenta que para valores grandes de la masa del quark top, es decir, una constante de acoplamiento  $f$  grande, un cálculo perturbativo no es del todo justificado. Sin embargo, aquí consideramos nuestro cálculo como una herramienta de análisis para explorar este dominio no perturbativo.

En las expresiones para las auto-energías desde (a) hasta (g) del bosón de Higgs dadas en el Apéndice A, se han mantenido los términos que representan la contribución principal de cada tipo que surge en el cálculo, es decir, términos que después de la extracción de un factor de  $T^2$ , son del orden  $(eB)^2/T^4$ ,  $m/T$ ,  $v^2/Tm$  y  $(eB)^2/Tm^3$ , donde  $m$  es una masa genérica. Para la jerarquía de las escalas considerada, el primer tipo de términos pueden ser despreciados. Por otra parte, términos del orden de  $m/T$  son pequeños. Esta clase de términos incluyen la razón de las masas del bosón de norma a la temperatura, que de acuerdo con la Ec. (2.27) conduce a la razón  $v/T$ . Cuando las masas aparecen en el denominador y son escalares, los términos son potencialmente peligrosos, ya que su cuadrado puede llegar a ser negativo. Sin embargo, como se mostrará más adelante, este tipo de términos son de manera natural cancelados en el potencial efectivo y sustituidos por términos en los que la masa que contribuye es la térmica, definida por

$$\tilde{m}_i = \sqrt{m_i^2 + \Pi_1}. \quad (5.14)$$

Cuando las masas de los bosones de norma aparecen en todos los denominadores, hay que recordar que tales masas han de ser consideradas como las calculadas en el fase rota. Sin embargo, en nuestro análisis consideramos al potencial efectivo como una función de  $v \geq 0$ . Esta restricción es implementada, sustituyendo en el potencial efectiva las masas de los bosones de norma que aparecen en los denominadores por las térmicas, cuya definición, en analogía con el caso escalar, se da como la raíz cuadrada de la suma de la masa del bosón de norma al cuadrado y el principal término para la correspondiente auto-energía, como se definirá en el siguiente capítulo [véase las Ecs. (5.29) y (5.30)].

## 5.2. Bosones de Norma

Para expresar las auto-energías de los bosones de norma, en presencia de un campo externo, nos damos cuenta que tenemos tres vectores independientes a nuestra disposición para formar estructuras tensoriales transversales al momento de los bosones de norma, a saber,  $q^\mu, u^\mu, b^\mu$ , donde estos últimos dos vectores tienen componentes en el sistema en reposo, dadas por la Ec. (3.46). Esto significa que, en general, estas auto-energías se puede escribir como combinaciones lineales de nueve estructuras independientes [50, 85]. Puesto que estamos interesados en considerar el límite infrarrojo  $q_0 = 0, \mathbf{q} \rightarrow 0$ , sólo  $u^\mu$  y  $b^\mu$  permanecen. Obsérvese que la propiedad de simetría correcta para la auto-energía es  $\Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi^{\nu\mu}(-q)$  [86]. Sin embargo, en el límite infrarrojo, esta condición significa que la auto-energía debe ser simétrica bajo el cambio de índices de Lorentz y por lo tanto podemos escribir:

$$\Pi^{\mu\nu} = \Pi^Q Q^{\mu\nu} + \Pi^R R^{\mu\nu} + \Pi^S S^{\mu\nu} + \Pi^M g^{\mu\nu}, \quad (5.15)$$

donde

$$Q^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu, \quad R^{\mu\nu} = b^\mu b^\nu, \quad S^{\mu\nu} = u^\mu b^\nu + u^\nu b^\mu, \quad (5.16)$$

y la condición de transversalidad  $q_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$  es trivialmente satisfecha en el límite infrarrojo. Además, trabajando en el marco de reposo del medio [ver Ec. (3.46)]

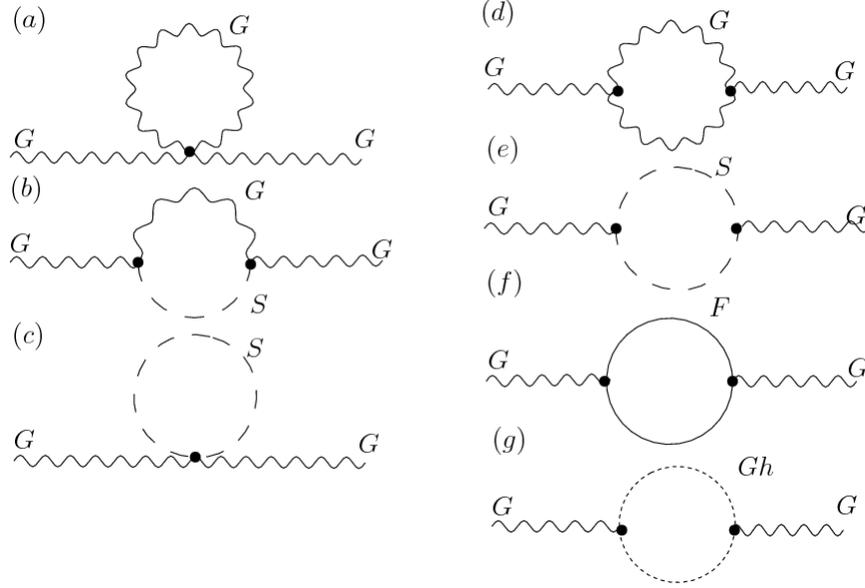
$$\Pi^{00} = \Pi^Q + \Pi^M. \quad (5.17)$$

La Fig. 5.2 muestra los diagramas de las auto-energías de los bosones de norma, los cuales involucran a los bosones de Goldstone, los fermiones, así como a los bosones de norma en el lazo. Calculamos de manera explícita la componente  $\Pi_a^{00}$  para la auto-energía del diagrama mostrado en la Fig. 5.2 (a), en donde la partícula externa y la del lazo son bosones  $W^\pm$ . La expresión para todas las componentes del tensor es

$$\Pi_{(a)}^{\mu\nu W}(q) = ig^2(2g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\rho\nu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G_{B\rho\sigma}(k). \quad (5.18)$$

Utilizando la versión Euclideana del propagador de los bosón de norma  $G_B^{\mu\nu}$ , Ec. (3.80), y en términos de la función  $I_\alpha$  definida en la Ec. (5.5), podemos escribir la componente que se está considerando a temperatura finita como

$$\begin{aligned} \Pi_a^{W-W} &= \frac{g^2}{3m_W^2} T \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ 9m_W^2 I_1(\mathbf{k}; m_W^2) + 3\mathbf{k}^2 \left( I_1(\mathbf{k}; m_W^2) - I_1(\mathbf{k}; \xi m_W^2) \right) \right. \\ &+ (eB)^2 \left[ -3 \left( I_2(\mathbf{k}; m_W^2) - I_2(\mathbf{k}, 0; \xi m_W^2) \right) - 7\mathbf{k}^2 \left( I_3(\mathbf{k}; m_W^2) - I_3(\mathbf{k}; \xi m_W^2) \right) \right. \\ &+ \left. \left. 4\mathbf{k}^4 \left( I_4(\mathbf{k}; m_W^2) - I_4(\mathbf{k}; \xi m_W^2) \right) + 15m_W^2 I_3(\mathbf{k}; m_W^2) + 12\mathbf{k}^2 m_W^2 I_4(\mathbf{k}; m_W^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$



**Figura 5.2:** Diagramas de Feynman para la auto-energía de bosones de norma.

En lo sucesivo utilizamos la notación compacta  $\Pi^{00\ gb} \equiv \Pi^{gb}$  para denotar las auto-energías de los bosones de norma.

Usando las Ecs. (5.6) y (5.7) en la Ec. (5.19), he incluyendo todas las contribuciones de los bosones de norma en el lazo y manteniendo sólo los términos principales obtenemos

$$\begin{aligned} \Pi_a^W &= 2g^2T^2(\xi + 1) - \frac{(2 + \xi^{3/2})g^2T}{4\pi(g^2 + g'^2)} \left( (g^2 + g'^2)m_W + g^2m_Z + g'^2m_\gamma \right) \\ &\quad - \frac{g^2(eB)^2}{128\pi m_W^2} \left( \frac{4T}{3m_W} \left( 2 - \frac{23}{\xi^{1/2}} \right) + \frac{7\zeta(3)m_W^2}{\pi^3T^2} \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Pasamos ahora a calcular las expresiones para  $\Pi_b^{W-Z(\gamma)-S}$  representadas en la Fig. 1.2(b). Para el caso en donde la partícula externa es un bosón  $W^\pm$  y las internas son un bosón de norma neutro y un bosón de Goldstone cargado. Su expresión explícita es

$$\Pi_b^{\mu\nu}(q) = \frac{g^2g'^2}{g^2 + g'^2} \left\{ \begin{array}{c} (m_Z^2 - m_W^2) \\ m_W^2 \end{array} \right\} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g_{\mu\rho} G^{\rho\sigma}(k) g_{\nu\sigma} D_B(k - q), \quad (5.21)$$

en donde la línea interna superior (inferior) corresponde a un  $Z$  ( $\gamma$ ).

Teniendo en cuenta que la carga neta que fluye en el lazo no es cero, el factor de fase referido en la Ec. (3.32) no se anula y debe en principio, ser incluido en el cálculo de esta auto-energía. Sin embargo, como estamos interesados en el cálculo de diagramas de anillo para el PE que a su vez está representado por lazos cerrados, el factor de fase

se convierte en la identidad y por lo tanto no tiene que ser calculado para cada auto-energía. Lo mismo se aplica para el resto de diagramas de auto-energías, que tienen una carga neta que fluye en el lazo y en consecuencia, no consideramos sus correspondientes fases.

Usando la versión Euclideana de la Ec. (3.69) y Ec. (3.80), tenemos

$$\begin{aligned} \Pi_b^{W-Z(\gamma)-S} &= -\frac{g^2 g'^2}{(g^2 + g'^2)} \left\{ \begin{array}{c} (m_Z^2 - m_W^2) \\ m_W^2 \end{array} \right\} T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ m_{Z(\gamma)}^2 I_{11}(\mathbf{k}, 0; m_i^2, m_{Z(\gamma)}^2) \right. \\ &+ \omega_n^2 (I_{11}(\mathbf{k}, 0; m_i^2, m_{Z(\gamma)}^2) - I_{11}(\mathbf{k}, 0; m_i^2, \xi m_{Z(\gamma)}^2)) + \frac{(eB)^2}{3} \left[ 4\mathbf{k}^2 m_{Z(\gamma)}^2 I_{41}(\mathbf{k}, 0; m_i^2, m_{Z(\gamma)}^2) \right. \\ &- 3m_{Z(\gamma)}^2 I_{31}(\mathbf{k}, 0; m_i^2, m_{Z(\gamma)}^2) - 3\omega_n^2 (I_{31}(\mathbf{k}, 0; m_i^2, m_{Z(\gamma)}^2) - I_{31}(\mathbf{k}, 0; m_i^2, \xi m_{Z(\gamma)}^2)) \\ &\left. \left. + 4\omega_n^2 \mathbf{k}^2 (I_{41}(\mathbf{k}, 0; m_i^2, m_{Z(\gamma)}^2) - I_{41}(\mathbf{k}, 0; m_i^2, \xi m_{Z(\gamma)}^2)) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

El integrando en la Ec. (5.22) contiene términos cuya forma general es

$$I_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; m^2, \xi m^2) \equiv \frac{1}{[\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2]^\alpha} \frac{1}{[\omega_n^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + \xi m^2]^\beta}. \quad (5.23)$$

Haciendo uso de la parametrización de Feynman escribimos  $I_{\alpha\beta}$  como

$$I_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; m^2, \xi m^2) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[\omega_n^2 + \mathbf{k}'^2(x) + m'^2(x)]^{\alpha+\beta}}, \quad (5.24)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'(\mathbf{x}) &= \mathbf{k} - (1-x)\mathbf{q}, \\ m'^2(x) &= m_W^2(\xi + x - \xi x) + x(1-x)\mathbf{q}^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Teniendo en cuenta los resultados de la Ref. [83], esta parametrización es permitida ya que se está llevando a cabo una descripción en el límite infrarrojo. Para llevar a cabo la suma sobre las frecuencias de Matsubara junto con la integración en la Ec. (5.22), una vez más se recurre a los resultados de la Ref. [81] (ver también la Ref. [1]). El resultado explícito y generalizado para incluir el caso de los fermiones es

$$\begin{aligned} T \sum_n \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \mathbf{k}^{2a} \omega_n^{2t} I_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; m^2, \xi m^2) &= \frac{(2T)}{(4\pi)^{d/2}} \frac{(2\pi T)^{d+2a+2t-2(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + a)}{\Gamma(\frac{d}{2})} \mu^{2\epsilon} \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \zeta(2(j + \alpha + \beta - t - \frac{d}{2} - a), Z) \Gamma(j + \alpha + \beta - \frac{d}{2} - a) \\ &\times \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \left( \frac{m'(x)}{2\pi T} \right)^{2j}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde para fermiones la suma corre sobre todos los valores enteros de  $n$  y  $Z = 1/2$ . Para los términos que involucran la frecuencia bosónica de Matsubara con  $n = 0$ , usamos el resultado

$$T \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \mathbf{k}^{2a} I_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; m^2, \xi m^2) = \frac{T}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + a)}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \left( \frac{1}{m'(x)} \right)^{2\alpha+2\beta-d+2a}. \quad (5.27)$$

Usando la Ec. (5.26) para los términos con  $n \neq 0$  y la Ec. (5.27) para  $n = 0$ , y después de considerar las contribuciones de todos los campos de norma corriendo en el lazo, se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi_b^W = & - \frac{(g^2 + g'^2) m_W^2}{8\pi^2} \ln \left( \frac{m_W}{T} \right) - \frac{T m_W^2}{4\pi (g^2 + g'^2)} \\ & \times \left( \frac{g^2 (g^2 + g'^2)}{m_4 + m_W} + \frac{g'^4}{m_1 + m_Z} + \frac{g^2 g'^2}{m_1 + m_\gamma} \right) \\ & + (eB)^2 T \left( - \frac{g^2 m_W^2}{48\pi m_W (m_4 + m_W)^4} \left( \frac{m_4^2}{m_W^2} + \frac{4m_4}{m_W} + 1 \right) \right. \\ & - \frac{7g^2 m_4 m_W^2}{32\pi m_W^2 (m_4 + m_W)^3} \left( \frac{m_4}{m_W} + 3 \right) \\ & + \frac{g^2 m_W^2}{8\pi m_W^3} \left( \frac{1}{(m_4 + m_W)^2} - \frac{1}{\xi^{1/2} (m_4 + \xi^{1/2} m_W)^2} \right) \\ & - \frac{g'^4 m_W^2}{48\pi m_1 (g^2 + g'^2) (m_1 + m_Z)^4} \left( 1 + \frac{4m_Z}{m_1} + \frac{m_Z^2}{m_1^2} \right) \\ & + \frac{g'^4 m_W^2}{32 (g^2 + g'^2) \pi m_1^2 (m_1 + m_Z)^3} \left( 3 + \frac{m_Z}{m_1} \right) \\ & - \frac{g^2 g'^2 m_W^2}{48 (g^2 + g'^2) \pi m_1 (m_1 + m_\gamma)^4} \left( 1 + \frac{4m_\gamma}{m_1} + \frac{m_\gamma^2}{m_1^2} \right) \\ & + \frac{g^2 g'^2 m_W^2}{32 (g^2 + g'^2) \pi m_1^2 (m_1 + m_\gamma)^3} \left( 3 + \frac{m_\gamma}{m_1} \right) \\ & + \frac{(eB)^2 m_W^2 \zeta(5)}{2048\pi^6 T^4} (g'^4 - 15g^4 - 14g^2 g'^2). \end{aligned} \quad (5.28)$$

El resto de los diagramas que se muestran en la Fig. 5.2 se pueden calcular de la misma manera y el resultado se muestra en el Apéndice B. Para las expresiones correspondientes a los diagramas desde (a) hasta (g) de la Fig. 5.2, es importante hacer mención a sus propiedades: En primer lugar, obsérvese que los términos de orden  $m_{gb}/T$ , donde  $m_{gb}$  significa cualquiera de las masas de los bosones de norma, son proporcionales a  $v/T$  y por lo tanto, como en la discusión de la auto-energía de los escalares, estos términos son pequeños cuando la posición del mínimo en la fase rota es pequeño, en comparación

con la temperatura crítica. En segundo lugar, cuando la masa de los bosones de norma aparecen en todas partes en los denominadores, se debe de tener en cuenta que el análisis es válido en la fase rota, en donde el  $vev$  de los campos de Higgs es diferente de cero. Sin embargo, ya que el análisis considera al potencial efectivo como una función de  $v \geq 0$ , implementamos esta restricción mediante la sustitución de la masa de los bosones de norma por las térmicas, cuando esta masa aparezca en los denominadores. Esto es con la intención de regular la singularidad en  $v = 0$  y no hacer una diferencia numérica al mismo tiempo que nos permite tratar el potencial efectivo como una función en el dominio  $v \geq 0$ . Las masas térmicas de los bosones de norma se definen como

$$\tilde{m}_W = \sqrt{m_W^2 + (\Pi_W^Q)_1}, \quad \tilde{m}_Z = \sqrt{m_Z^2 + (\Pi_Z^Q)_1}, \quad \tilde{m}_\gamma = \sqrt{(\Pi_\gamma^Q)_1}, \quad (5.29)$$

donde  $(\Pi_W^Q)_1$ ,  $(\Pi_Z^Q)_1$  y  $(\Pi_\gamma^Q)_1$  son los términos dominantes de la auto-energía del bosón de norma y está formado por la adición de los términos correspondientes mostrados en el Apéndice B, para cada bosón de norma. Los principales términos resultan ser independientes del parámetro de norma y están explícitamente dados por

$$(\Pi_W^Q)_1 = \frac{11}{6}g^2T^2, \quad (\Pi_Z^Q)_1 = \frac{11}{6}\frac{(g^4 + g'^4)}{(g^2 + g'^2)}T^2, \quad (\Pi_\gamma^Q)_1 = \frac{11}{3}\frac{g^2g'^2}{(g^2 + g'^2)}T^2. \quad (5.30)$$

Como se describe en la Ref. [47], las otras componentes de las auto-energías de los bosones de norma distintas de cero son despreciables

$$\Pi^{11} = \Pi^{22}, \quad \Pi^{33} \sim \mathcal{O}(m_i^2), \quad \Pi^{03} = \Pi^{30} \sim \mathcal{O}(eB). \quad (5.31)$$

De las Ecs. (5.15) y (5.17), se observa que si  $\Pi^M = -\Pi^{11}$  entonces  $\Pi^{00} \simeq \Pi^Q$ . Por lo tanto

$$\Pi^{\mu\nu} \simeq \Pi^{00}Q^{\mu\nu}. \quad (5.32)$$

Los resultados obtenidos en este capítulo serán utilizados en el siguiente para la determinación del potencial efectivo a temperatura finita, a orden un lazo.

# Capítulo 6

## POTENCIAL EFECTIVO A TEMPERATURA FINITA

La herramienta básica para investigar la naturaleza de la transición de fase electrodébil es el potencial efectivo, cantidad que tiene el significado de una densidad de energía potencial del sistema bajo consideración. La discusión dada en la sección 2.2 sobre simetría y en especial sobre el concepto de rompimiento espontáneo de ésta, era puramente clásica. El espectro de partículas se determinó mediante la minimización del potencial clásico  $V(\Phi)$  tal y como aparece en el Lagrangiano de la Ec. (2.19) y describe la densidad de energía potencial de un campo escalar constante. De otra parte, una teoría cuántica de campos involucra partículas virtuales, las cuales afectan a la densidad de energía del campo a través de procesos de emisión y reabsorción. Esta generalización del potencial clásico para incluir las correcciones cuánticas se conoce como potencial efectivo. La minimización del potencial efectivo da la configuración de campo con la mínima energía, el vacío de la teoría. En este capítulo, se desarrolla el tema central de esta tesis.

### 6.1. Potencial Efectivo a un Lazo

En el Modelo Estándar el potencial a nivel árbol es

$$V_{\text{tree}}(v) = -\frac{1}{2}c^2v^2 + \frac{1}{4}\lambda v^4. \quad (6.1)$$

A un lazo, el PE recibe contribuciones de cada uno de los sectores del MEM, esto es

$$V^{(1)}(v) = V_H^{(1)}(v) + V_f^{(1)}(v) + V_{\text{gb}}^{(1)}(v) + V_{\text{FP}}^{(1)}(v), \quad (6.2)$$

donde en general cada una de estas contribuciones está dada por

$$V^{(1)}(v) = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} (\ln [D(\omega_n, \mathbf{k})^{-1}]), \quad (6.3)$$

con  $D$  denotando ya sea el propagador de los campos escalar, fermiónico, de bosones de norma, ó de fantasmas. La traza se toma en todos los índices internos. En primer lugar, se discutirán las contribuciones térmicas procedentes de cada sector, como se describe anteriormente, y luego se implementara el procedimiento de renormalización a las contribuciones independientes de la temperatura.

En el límite de campo débil, la contribución del sector de Higgs está dada por

$$V_H^{(1)} = \sum_{i=1}^4 \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln [D_B^{-1}(\omega_n, \mathbf{k})] \simeq \sum_{i=1}^4 \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \ln(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_i^2) + (eB)^2 \left[ \frac{1}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_i^2)^2} - \frac{2(k_\perp^2)}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_i^2)^3} \right] \right\}, \quad (6.4)$$

donde se han tenido en cuenta las contribuciones de todos los escalares.

El primer término en la Ec. (6.4) representa la contribución de orden más bajo para el PE a temperatura finita y campo magnético externo nulo. A este término se le conoce como la contribución del *gas ideal* de bosones [77]. La parte térmica de esta contribución está dada por [87]

$$V_H^{(1)T \neq 0} \simeq \sum_{i=1}^4 \left( -\frac{\pi^2 T^4}{90} e + \frac{m_i^2 T^2}{24} - \frac{m_i^3 T}{12\pi} - \frac{m_i^4}{32\pi^2} \ln \left( \frac{m_i}{4\pi T} \right) + \mathcal{O}(m_i^4) \right). \quad (6.5)$$

Notemos que en la Ec. (6.5) hay términos potencialmente peligrosos, puesto que pueden llegar a ser imaginarios para valores negativos de  $m_i$ . Sin embargo, como mostraremos, estos términos se cancelan cuando se incluye la contribución del campo de Higgs de la renormalización del vacío, así como los diagramas de anillo.

El segundo término dependiente de  $B$  en la Ec. (6.4) se anula idénticamente [47]. Por lo tanto, a orden de un lazo, la contribución térmica al PE en el caso de campo débil del sector de Higgs es independiente de  $eB$  y está dada por la Ec. (6.5).

En el límite de campo débil, la contribución del sector fermiónico está dada por

$$V_f^{(1)} = N_c T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln[S_B^{-1}(\omega_n, \mathbf{k}; m_t)] \simeq N_c 2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \ln[\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_t^2] + 2(eB)^2 \frac{\omega_n^2 + k_3^2 + m_t^2}{(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m_t^2)^3} \right\}, \quad (6.6)$$

donde  $N_c = 3$  es el número de colores. Recordemos que la única masa de fermiones que mantenemos en el análisis es la masa del quark top  $m_t$ .

El primer término en la Ec. (6.6) representa la contribución de *gas ideal* de fermiones [77], cuya parte térmica está explícitamente dado por

$$V_f^{(1)T \neq 0} \simeq 3 \left[ -7 \frac{\pi^2 T^4}{180} + \frac{m_t^2 T^2}{12} + \frac{m_t^4}{16\pi^2} \ln \left( \frac{m_t^2}{T^2} \right) + \mathcal{O}(m_t^4) \right]. \quad (6.7)$$

El segundo término en la Ec. (6.6) es subdominante, después de tomar en cuenta la renormalización, como se muestra en la Ref. [79]. Por lo tanto, a orden de un lazo, la contribución térmica al PE del sector fermiónico en el límite de campo débil está solamente dado por la Ec. (6.7).

En los sectores de norma y fantasmas, notemos que inicialmente en la fase rota, los campos cargados se acoplan al campo magnético externo, por lo tanto, su contribución al PE a un lazo contiene términos tanto independientes como dependientes del campo magnético. En el primer caso, las contribuciones de los campos fantasmas cancelan los grados de libertad espurios que se originan en el sector de los bosones de norma, cuando se trabaja en una norma covariante arbitraria. En esta última, los campos fantasmas cargados contribuyen como regulador de los campos escalares con el signo opuesto y se anulan idénticamente [47] [véase la discusión después de la Ec. (6.5)]. Esto significa que la contribución dependiente del campo magnético de estos sectores viene solamente de la parte del propagador del bosón  $W^\pm$ . Por lo tanto, la contribución de la parte térmica al PE del sector de los bosones de norma está explícitamente dada por

$$\begin{aligned}
V_{\text{gb}}^{(1)T \neq 0} + V_{\text{FP}}^{(1)T \neq 0} = & - 11 \frac{\pi^2 T^4}{90} + 3 \frac{(2m_W^2 + m_Z^2)T^2}{24} - 3 \frac{(2m_W^3 + m_Z^3)T}{12\pi} \\
& - 6 \frac{m_W^4}{32\pi^2} \ln\left(\frac{m_W}{4\pi T}\right) - 3 \frac{m_Z^4}{32\pi^2} \ln\left(\frac{m_Z}{4\pi T}\right) - \frac{(eB)^2}{256\pi^2} [\mathcal{P}_0(\xi) \\
& + \mathcal{P}_1(\xi) \ln\left(\frac{\tilde{m}_W}{T}\right) + \pi \mathcal{P}_2(\xi) \frac{T}{\tilde{m}_W} + \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \mathcal{P}_3(\xi) \frac{m_W^2}{T^2} \\
& + \frac{\zeta(5)}{\pi^4} \frac{m_W^4}{T^4}] , \tag{6.8}
\end{aligned}$$

donde se ha mantenido el principal término en el campo magnético y hemos definido

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0(\xi) &= \frac{32(1-5\xi)}{3\xi}, \quad \mathcal{P}_1(\xi) = \frac{64(3+7\xi)}{\xi}, \\
\mathcal{P}_2(\xi) &= \frac{8}{3\xi(1+\xi^{1/2})} (14 + 53\xi^{1/2} + 361\xi + 170\xi^{3/2} - 120\xi^2 + \xi^{5/2} + \xi^3), \\
\mathcal{P}_3(\xi) &= \frac{8(1+16\xi)}{3\xi}. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Notamos que los factores en frente de cada contribución independiente del campo magnético, dada en la Ec. (6.8), corresponden a las polarizaciones de los dos  $W$ 's, del  $Z$  y la del fotón [6]. También, se puede notar que en los términos que vienen dentro de las contribuciones proporcionales al cuadrado del campo magnético, se han sustituido la masa del bosón  $W$  por su masa térmica en el argumento de la función logarítmica así como en los términos donde la masa aparece en el denominador. La razón de esta sustitución es, como se señaló anteriormente, que aunque el análisis es en sentido estricto sólo válido en la fase rota, al considerar al potencial efectivo como una función de  $v \geq 0$ , para evitar divergencias cerca de  $v \simeq 0$ , reemplazamos la masa del bosón de norma por la térmica.

Para implementar el procedimiento de renormalización, se observa de la Ec. (6.3) que en el cálculo del PE a un lazo a  $T = 0$  aparece la integral

$$\mathcal{V}(m) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (6.10)$$

donde  $m$  representa la masa de cualquiera de las especies que contribuyen. Esta integral diverge y debe ser regularizada. El procedimiento lo implementamos introduciendo un corte ultravioleta  $\Lambda$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(m; \Lambda) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk \\ &\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi^2} \left[ \Lambda^4 + m^2 \Lambda^2 + \frac{m^4}{8} + \frac{m^4}{2} \ln \left( \frac{m}{2\Lambda} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Por lo tanto, la parte a  $T = 0$  del PE a un lazo puede ser escrita como

$$\begin{aligned} V^{(1)T=0} &= \mathcal{V}(m_H; \Lambda) + \sum_{i=1}^3 \mathcal{V}(m_i; \Lambda) + 8\mathcal{V}(m_W; \Lambda) + 4\mathcal{V}(m_Z; \Lambda) - 12\mathcal{V}(m_t; \Lambda) \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \mathcal{V}(m_{\eta_i}; \Lambda), \end{aligned} \quad (6.12)$$

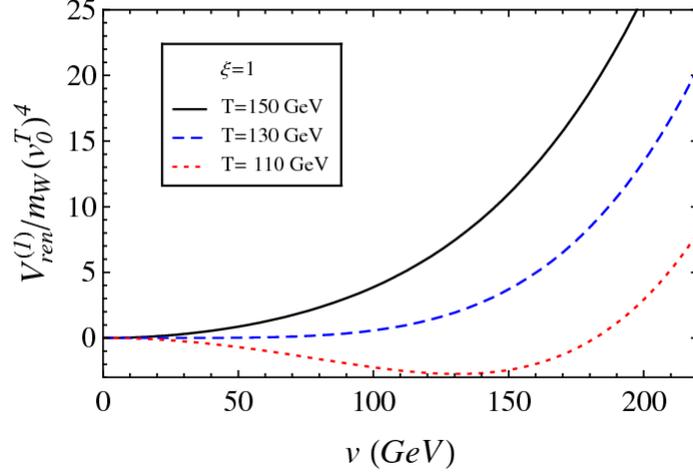
donde los factores en frente de cada término dan cuenta de los grados de libertad de las correspondientes especies y las masas dependen del  $v$ . Teniendo en cuenta que estamos trabajando en una norma covariante arbitraria, los grados de libertad no físicos para los bosones de norma son cancelados por las contribuciones de los campos de fantasma, que dejan la Ec. (6.12), con únicamente los grados de libertad físicos. Enfatizamos que el único fermión tomado en cuenta es el quark top. Dado que la teoría es renormalizable, debería ser posible absorber los términos dependientes de  $\Lambda$  con la introducción de contratérminos adecuados que mantienen la forma del potencial a orden árbol. Por lo tanto, la estructura general del potencial efectivo a  $T = 0$  hasta un lazo, después de la renormalización, debe ser

$$V_{\text{ren}}^{(1)T=0}(v) = -\frac{1}{2}c^2v^2 + \frac{1}{4}\lambda v^4 + \frac{a(\Lambda) - \delta c^2}{2}v^2 + \frac{b(\Lambda) + \delta\lambda}{4}v^4 + V^{(1)T=0}, \quad (6.13)$$

donde los coeficientes  $a(\lambda)$  y  $b(\lambda)$  se introducen para cancelar los términos dependientes de  $\Lambda$  en  $V^{(1)T=0}$  y los coeficientes  $\delta c^2$  y  $\delta\lambda$  para cuidar de posibles correcciones finitas de  $v^2$  y términos  $v^4$ , respectivamente. La condición de renormalización, requiere que el mínimo de  $V_{\text{ren}}^{(1)T=0}(v)$  se mantenga en su valor clásico, es decir, necesitamos que

$$\left. \frac{dV_{\text{ren}}^{(1)T=0}}{dv} \right|_{v=v_0} = 0. \quad (6.14)$$

Completamos este requerimiento introduciendo términos constantes adecuados para



**Figura 6.1:** Potencial efectivo renormalizado a un lazo para  $\xi = 1$  y diferentes valores de  $T$ , sustrayendo términos independientes de  $v$  y dividiendo por la cuarta potencia de la masa del  $W$  dependiente del  $v$ , evaluada en  $v = v_0^T$ , el valor del  $vev$  que minimiza el potencial efectivo después que la transición de fase se ha completado para una temperatura de  $T = 110$  GeV. En esta norma la transición de fase ocurre a  $T_C = 128.9$  GeV y es de segundo orden.

hacer que los argumentos de los logaritmos sean adimensionales. Sin tener en cuenta las constantes aditivas y los términos explícitamente proporcional a  $\lambda^2$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
V_{\text{ren}}^{(1)T=0}(v) = & - \left( 1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2} + \frac{(g^2 + g'^2)\xi}{128\pi^2} + 2\frac{g^2\xi}{128\pi^2} \right) \frac{c^2v^2}{2} \\
& + \left( \lambda + \frac{3f^4}{32\pi^2} - \frac{3g^4}{256\pi^2} - \frac{3(g^2 + g'^2)^2}{512\pi^2} - \frac{g^4\xi^2}{256\pi^2} - \frac{(g^2 + g'^2)^2\xi^2}{512\pi^2} \right) \frac{v^4}{4} \\
& + \frac{m_H^4}{64\pi^2} \ln \left( \frac{m_H^2}{4c^2} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{m_i^4}{64\pi^2} \ln \left( \frac{m_i^2}{4c^2} \right) + 6 \frac{m_W^4}{64\pi^2} \ln \left( \frac{m_W^2}{m_W(v_0)^2} \right) \\
& + 3 \frac{m_Z^4}{64\pi^2} \ln \left( \frac{m_Z^2}{m_Z(v_0)^2} \right) - 12 \frac{m_f^4}{64\pi^2} \ln \left( \frac{m_f^2}{m_f(v_0)^2} \right). \tag{6.15}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, después de la renormalización, el PE a 1-lazo a temperatura finita está dado por

$$\begin{aligned}
V_{\text{ren}}^{(1)}(v) = & - \left( 1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2} + \frac{(g^2 + g'^2)\xi}{128\pi^2} + 2\frac{g^2\xi}{128\pi^2} \right) \frac{c^2v^2}{2} + \left( \lambda + \frac{3f^4}{32\pi^2} - \frac{3g^4}{256\pi^2} \right. \\
& - \left. \frac{g^4\xi^2}{256\pi^2} - \frac{3(g^2 + g'^2)^2}{512\pi^2} - \frac{(g^2 + g'^2)^2\xi^2}{512\pi^2} \right) \frac{v^4}{4} + \sum_{i=1}^4 \left[ \frac{m_i^2 T^2}{24} - \frac{m_i^3 T}{12\pi} \right. \\
& \left. + \frac{m_i^4}{64\pi^2} \ln \left( \frac{(4\pi T)^2}{c^2} \right) \right] + 3 \frac{m_t^2 T^2}{12} - 3 \frac{m_t^4}{16\pi^2} \ln \left( \frac{T^2}{m_t^2(v_0)} \right) + 3 \frac{(2m_W^2 + m_Z^2)T^2}{24}
\end{aligned}$$

$\xi$	$T_C$ (GeV)	$v_0$ (GeV)
3.5	120.8	102.3
1	128.9	130.9
0.1	132.4	139.0

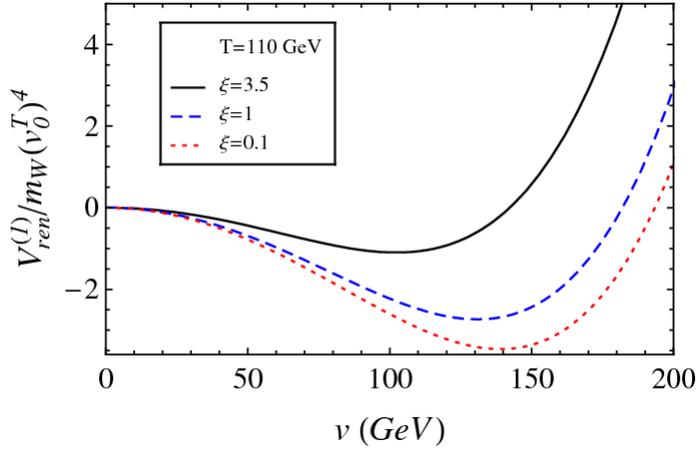
**Tabla 6.1:** Temperatura crítica  $T_C$  (segunda columna) y posición de los mínimos  $v_0$  para la temperatura constante  $T = 110$  GeV (tercera columna) del potencial efectivo renormalizado a un lazo, después que la transición de fase ha sido completada. Los valores elegidos de  $\xi$  están cerca de 1. Observemos que la temperatura crítica es sólo ligeramente dependiente de  $\xi$ . Sin embargo, la posición del mínimo para una temperatura donde la transición de fase se ha completado muestra una mayor dependencia de  $\xi$ .

$$\begin{aligned}
& - 3 \frac{(2m_W^3 + m_Z^3)T}{12\pi} + 6 \frac{m_W^4}{64\pi^2} \ln \left( \frac{(4\pi T)^2}{m_W(v_0)^2} \right) + 3 \frac{m_Z^4}{64\pi^2} \ln \left( \frac{(4\pi T)^2}{m_Z(v_0)^2} \right) \\
& - \frac{(eB)^2}{256\pi} \mathcal{P}_2(\xi) \frac{T}{\tilde{m}_W}, \tag{6.16}
\end{aligned}$$

donde se han mantenido solamente el término dominante, dependiente del campo magnético, con  $\mathcal{P}_2$  tal como se define en la Ec. (6.9) y las masas sin argumento son las masas dependientes del  $v$ . Como se ha señalado, la dependencia peligrosa en la masa de los escalares en los argumentos de las funciones logarítmicas han desaparecido. Sin embargo, para cancelar los términos cúbicos en la masa de los escalares se necesita ir al siguiente orden, esto es, diagramas de anillo. Vamos por el momento a ignorar los términos proporcionales a la masa cúbica de los escalares y explorar las propiedades del potencial efectivo renormalizado a un lazo. La Fig. 6.1 muestra  $V_{\text{ren}}^{(1)}(v)$  para  $\xi = 1$  y diferentes valores de  $T$ , sustrayendo términos independientes de  $v$  y dividiendo por la cuarta potencia de la masa del  $W$  dependiente del  $v$  evaluada en  $v = v_0^T$ , el  $vev$  que minimiza el PE después que la transición de fase se ha completado, para una temperatura de  $T = 110$  GeV. Podemos ver que la transición de fase es de segundo orden y en esta norma esto sucede para  $T_C = 128.9$  GeV. Para ilustrar la dependencia en la norma de los parámetros de la transición de fase, la Fig. 6.2 muestra  $V_{\text{ren}}^{(1)}(v)$  para una temperatura baja de  $T = 110$  GeV, para la cual la transición de fase se ha completado, para diferentes valores del parámetro de norma  $\xi$ . Observamos que hay una dependencia apreciable sobre el mínimo, de la fase rota del parámetro norma a esta temperatura. Los valores numéricos se muestran en la segunda columna de la Tabla 6.1. La dependencia en el parámetro de norma de la temperatura crítica es más suave, como se muestra en la primera columna de la Tabla 6.1.

## 6.2. Diagramas de Anillo

Es bien conocido que la corrección al siguiente orden para el PE viene de los llamados *diagramas de anillo*. Estos son esquemáticamente representados en la Fig. 6.3. Su con-



**Figura 6.2:** El potencial efectivo renormalizado a un lazo, normalizado por la cuarta potencia de la masa del  $W$  dependiente de  $v$  evaluada en  $v = v_0^T$ , el valor del  $vev$  que minimiza el potencial efectivo después que la transición de fase se completa, para una temperatura de  $T = 110$  GeV y  $\xi = 1$ , como una función de  $v$  y para diferentes valores del parámetro de norma  $\xi$ . A esta temperatura, la posición del mínimo de  $v_0$  muestra una dependencia significativa en el parámetro de norma para valores de  $\xi$  alrededor de 1.

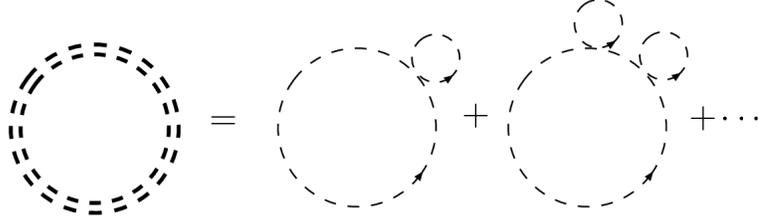
tribución al PE renormalizado es más claramente hallada de forma explícita separando las dos contribuciones [77] procedentes del sector escalar y se puede escribir como

$$V_H^{(\text{ring})}(v) \simeq \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ (\ln[1 + \Pi^H D^H] - \Pi^H D^H) + (\ln[1 + \Pi^{G^0} D^{G^0}] - \Pi^{G^0} D^{G^0}) + 2(\ln[1 + \Pi^{G^c} D^{G^c}] - \Pi^{G^c} D^{G^c}) \right\} + V_S^{(2)}, \quad (6.17)$$

donde  $\Pi^H$ ,  $\Pi^{G^0}$  y  $\Pi^{G^c}$  son respectivamente, las auto-energía del bosón de Higgs, de escalares neutros y cargados en presencia del campo magnético,  $D^H$ ,  $D^{G^0}$  y  $D^{G^c}$  sus correspondientes propagadores y  $V_S^{(2)}$  la contribución del potencial efectivo a dos lazos, procedente exclusivamente del sector escalar. El factor de 2 toma en cuenta los dos grados de libertad de los escalares cargados. La manera en que la Ec. (6.17) está escrita merece algunos comentarios: Primero, la contribución dominante viene de la frecuencia de Matsubara con  $n = 0$ . Segundo, las divergencias ultravioletas son canceladas explícitamente. Tercero, la contribución total a dos lazos en la que participa el sector escalar contiene diagramas con otras partículas escalares. Para los efectos del presente análisis, consideramos sólo la subclase de los diagramas que contienen únicamente escalares y por lo tanto tenemos que

$$V_S^{(2)} \simeq \frac{\lambda}{24} T^4 - \frac{\lambda}{16\pi} (m_H + m_3 + 2m_1) T^3 - (eB)^2 \frac{\lambda}{192\pi m_1^3} T^3, \quad (6.18)$$

donde mantenemos sólo las contribuciones principales, dentro de la jerarquía de escalas de energía considera. Los términos potencialmente peligrosos, con potencias impares



**Figura 6.3:** Representación esquemática de la resumación de los diagramas de anillo.

en la masa de los escalares en la Ec. (6.18) cancelan de manera exacta los términos que vienen de la integral de la Ec. (6.17), bajo la aproximación de que las auto-energías involucran sólo la contribución escalar. La prueba completa de esta cancelación, en ausencia de campos magnéticos ha sido tratada en detalle para el modelo estándar en la Ref. [88]. En presencia de un campo magnético externo, se ha demostrado en el modelo sigma lineal en la Ref. [89]. Dentro de nuestra aproximación, este resultado muestra que considerando solamente las contribuciones escalares, esta cancelación también sucede en el modelo estándar con campo magnético. Una prueba completa a este punto se espera desarrollar más adelante.

La contribución dominante en la Ec. (6.17) proviene del modo  $n = 0$ . La expresión explícita para la Ec. (6.17) es [47]

$$\begin{aligned}
 V_H^{(\text{ring})} &= \frac{\lambda}{24} T^4 - \frac{T}{12\pi} \left\{ (m_H^2 + \Pi^H)^{3/2} - m_H^3 + (m_3^2 + \Pi^{G^0})^{3/2} \right. \\
 &\quad \left. - m_3^3 + 2 \left[ (m_1^2 + \Pi^{G^c})^{3/2} m_1^3 + \frac{(eB)^2 \Pi_1}{16 (m_1^2 + \Pi^{G^c})^{3/2}} \right] \right\}. \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

Como se preveía, los términos de masa cúbica en la Ec. (6.19) se cancelan exactamente con términos similares que aparecen en la Ec. (6.16) después de sumar ambas ecuaciones.

A continuación, pasamos a la contribución de anillo de los sectores de bosones de norma y de los fantasmas de Faddeev-Popov. El cálculo se simplifica al recordar que los grados de libertad de los fantasmas cancelan las contribuciones dominantes en la temperatura de los grados de libertad espurios que surjan del tratamiento covariante de los campos de norma. La contribución que depende del campo magnético, siendo subdominante, no se cancela, como fue el caso de la contribución a un lazo. Así que escribimos

$$\begin{aligned}
 V_{\text{gb}}^{(\text{ring})}(v) + V_{\text{FP}}^{(\text{ring})} &= -\frac{T}{2} \sum_{\text{gb}} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N} [-\Pi_{\mu\lambda \text{gb}}(0) G_{\text{gb}}^{\lambda\nu}(\omega_n, \mathbf{k})]^N \right\} \\
 &\quad + V_{\text{charged FP}}^{(\text{ring})}, \quad (6.20)
 \end{aligned}$$

donde la suma sobre “gb” corre sobre los cuatro grados libertad de los bosones de norma y  $V_{\text{charged FP}}^{(\text{ring})}$  representa el término subdominante dependiente del campo magnético,

derivado de la contribución del anillo de los campos fantasma cargados. Debemos tener en cuenta que en esta ocasión, en contraste con el caso escalar, no añadimos explícitamente la contribución a dos lazos y, por consiguiente la suma sobre el índice  $N$  parte de  $N = 2$ .

En primer lugar, calculamos la contribución de los bosones de norma neutros, Ec. (6.20). En la aproximación donde la partícula tiene un momento pequeño (el límite infrarrojo), la versión Euclideana del propagador de los bosones de norma neutros, para un valor arbitrario del parámetro de norma  $\xi$ , puede ser escrita como

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{(k^2 + m_{\text{gb}}^2)} \left\{ P_{\mu\nu}^L + P_{\mu\nu}^T + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + \xi m_{\text{gb}}^2)} \right\}, \quad (6.21)$$

donde

$$\begin{aligned} P_{00}^T &= P_{0i}^T = 0, & P_{ij}^T &= \delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j, \\ P_{\mu\nu}^L &= \delta^{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - P_{\mu\nu}^T. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Mediante el uso de las Ecs. (5.32) y (6.22), es fácil ver que el producto  $\Pi_{\mu\lambda}(0)G^{\lambda\nu}(\omega_n, \mathbf{k})$  se convierte en

$$\Pi_{\mu\lambda} G^{\lambda\nu} = \frac{(\Pi_{\text{gb}}^Q)_1}{(k^2 + m_{\text{gb}}^2)} \left[ 1 + \xi \frac{(k \cdot u)^2}{(k^2 + \xi m_{\text{gb}}^2)} \right] Q_\mu^\nu, \quad (6.23)$$

en donde, teniendo en cuenta el término  $n = 0$  y tomando la traza, podemos escribir la Ec. (6.20) como

$$\begin{aligned} V_{\text{neutral gb}}^{(\text{ring})}(v) &\simeq \sum_{\text{gb}} \frac{1}{2} T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \ln \left( 1 + \frac{(\Pi_{\text{gb}}^Q)_1}{\mathbf{k}^2 + m_{\text{gb}}^2} \right) - \frac{(\Pi_{\text{gb}}^Q)_1}{\mathbf{k}^2 + m_{\text{gb}}^2} \right] \\ &= -\frac{T}{12\pi} \{ \tilde{m}_Z^3 - m_Z^3 + \tilde{m}_\gamma^3 \}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Notemos que los efectos de apantallamiento del plasma en la Ec. (6.24) aparecen naturalmente en la modificación térmica a la masa del bosón de norma  $\tilde{m}_{\text{gb}}$  ( $\tilde{m}_Z$  y  $\tilde{m}_\gamma$ ). Sin embargo, las cancelaciones que tuvieron lugar en el sector escalar entre las potencias impares de las masas no van a suceder en este caso, cuando incluimos estos términos en la Ec. (6.16). Esto es porque en el límite infrarrojo no hay contribución de los grados de libertad de bosones de norma transversales, por lo tanto no hay ninguna coincidencia en los coeficientes para producir la cancelación. Esta es una característica del límite infrarrojo que estamos considerando. Sin embargo, ya que el cuadrado de las masas de los bosones de norma nunca es negativa, estos términos no suponen un problema.

Pasamos ahora a la contribución de los campos de norma cargados. En el límite de campo débil, el producto  $\Pi_{\mu\lambda}(0)G^{\lambda\nu}(\omega_n, \mathbf{k})$  se puede escribir como

$$\Pi_{\mu\lambda}G^{\lambda\nu} = \frac{(\Pi_W^Q)_1}{k^2 + m_W^2} \left[ 1 + (eB)^2 \left( \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} - \frac{2k_\perp^2}{(k^2 + m^2)^3} \right) \right] Q_\mu^\nu. \quad (6.25)$$

Usando la Ec. (6.25), y llevando a cabo una expansión en el argumento del logaritmo, podemos explícitamente escribir

$$\begin{aligned} \ln[1 + \Pi_{\mu\lambda}G^{\lambda\nu}] &= \ln \left\{ 1 + \left[ \frac{(\Pi_W^Q)_1}{\mathbf{k}^2 + m_W^2} \right] Q_\mu^\nu \right\} + \ln \left\{ 1 + \left[ \frac{(\Pi_W^Q)_1}{\mathbf{k}^2 + m_W^2 + (\Pi_W^Q)_1} \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left( \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m_W^2)^2} - \frac{2k_\perp^2}{(\mathbf{k}^2 + m_W^3)^3} \right) (eB)^2 \right] Q_\mu^\nu \right\}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Utilizando este resultado en la Ec. (6.20), teniendo en cuenta el término con  $n = 0$ , y tomando la traza en la Ec. (6.20) obtenemos

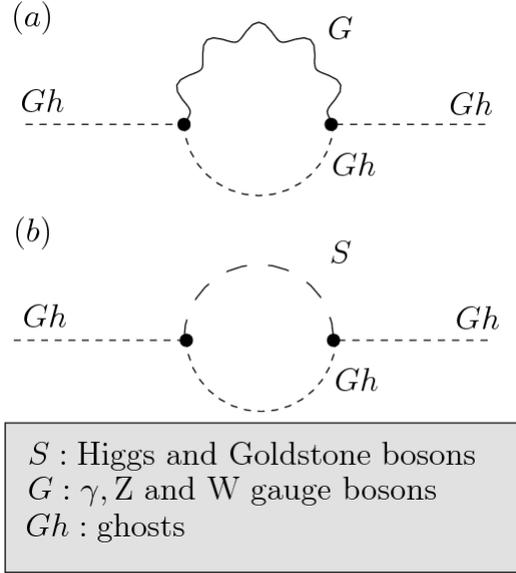
$$\begin{aligned} V_{\text{charged gb}}^{(\text{ring})}(v) &= \sum_{\text{gb}} \frac{1}{2} T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ \ln \left( 1 + \frac{(\Pi_W^Q)_1}{\mathbf{k}^2 + m_{\text{gb}}^2} \right) - \frac{(\Pi_W^Q)_1}{\mathbf{k}^2 + m_{\text{gb}}^2} \right] \right. \\ &+ \ln \left[ 1 + \frac{(\Pi_W^Q)_1}{(\mathbf{k}^2 + m_{\text{gb}}^2 + (\Pi_W^Q)_1)} \left( \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m_{\text{gb}}^2 + (\Pi_W^Q)_1)^2} \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{2k_\perp^2}{(\mathbf{k}^2 + m_{\text{gb}}^2 + (\Pi_W^Q)_1)^3} \right) (eB)^2 \right] \left. \right\} \\ &= -2 \frac{T}{12\pi} (\tilde{m}_W^3 - m_W^3) - \frac{(eB)^2}{4\pi} \left( \frac{(\Pi_W^Q)_1}{48} \right) \left( \frac{T}{\tilde{m}_W^3} \right). \end{aligned} \quad (6.27)$$

En esta aproximación, los efectos de apantallamiento en el plasma, Ec. (6.27), surgen naturalmente como una modificación térmica de la masa del bosón de norma  $\tilde{m}_W$  definida en las Ecs. (5.29) y (5.30). Finalmente, la contribución dependiente del campo magnético de los campos de fantasmas cargados al potencial del anillo, se calcula fácilmente recordando que esta contribución es equivalente a la que viene de dos escalares (una por cada campo  $W$ ) pero con signo opuesto. Por lo tanto tenemos

$$V_{\text{charged FP}}^{(\text{ring})} = 2 \frac{(eB)^2}{2\pi} \left( T \frac{(\Pi_{\eta W})_1}{48(\tilde{m}_{\eta W})^3} \right), \quad (6.28)$$

donde el diagrama que representa los fantasmas de Faddeev-Popov se muestra en la Fig. 6.4 y como se muestra en el Apéndice C, la principal contribución a la auto-energía de los fantasmas asociados al  $W$  viene dada por

$$\begin{aligned} (\Pi_{\eta W})_1 &= \frac{\xi^2 T m_W g^2}{16\pi} \left\{ \frac{m_W}{\tilde{m}_3 + \xi^{1/2} m_W} - \frac{m_W}{\tilde{m}_4 + \xi^{1/2} m_W} \right. \\ &+ \left. \frac{g^2 - g'^2}{g(g^2 + g'^2)^{1/2}} \left( \frac{m_Z}{\tilde{m}_1 + \sqrt{\xi} m_Z} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.29)$$



**Figura 6.4:** Diagramas de Feynman para las auto-energías de los fantasmas de Faddeev-Popov. Dado que trabajamos en el límite infrarrojo, diagramas del tipo (a), no contribuyen a las auto-energías de los fantasmas.

en donde la masa térmica de los fantasmas asociados al  $W(Z)$  está dada por

$$\tilde{m}_{\eta_{W(Z)}} = \sqrt{\xi m_{W(Z)}^2 + (\Pi_{\eta_{W(Z)}})_1}, \quad (6.30)$$

$m_W$  y  $m_Z$  son respectivamente, las masas del  $W$  y  $Z$  dependientes del  $v$ , y  $\tilde{m}_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) es definida en las Ecs. (2.24) y (5.14). Notemos que en la Ec. (6.29), hemos reemplazado  $m_i$  por  $\tilde{m}_i$  donde, aunque el análisis es válido, cerca del mínimo de la fase rota, consideramos el potencial efectivo como una función de  $v \geq 0$ , y para pequeños valores de  $v$ , el cuadrado de las masas de los escalares puede llegar a ser negativo.

### 6.3. Potencial Efectivo Hasta Orden Anillo

La expresión final para el potencial efectivo

$$V_{\text{eff}}(v) = V_{\text{tree}}(v) + V_H^{(1)} + V_f^{(1)} + V_{\text{gb}}^{(1)} + V_{\text{FP}}^{(1)} + V_H^{(\text{ring})} + V_{\text{gb}}^{(\text{ring})} + V_{\text{FP}}^{(\text{ring})}, \quad (6.31)$$

se obtiene mediante la suma de los resultados de las Ecs. (6.1), (6.5), (6.7), (6.8), (6.19), (6.27) y (6.28).

Con el fin de que los términos que involucran el cuadrado de la masa térmica del bosón escalar sean reales, la temperatura debe ser tal que

$$T > T_1 \equiv \sqrt{\frac{16c^2}{3g^2 + g'^2 + 8\lambda + 4f^2}}, \quad (6.32)$$

define un límite inferior para la temperatura. Una cota más restrictiva para trabajar con la expansión de campo débil se obtiene al exigir que  $eB < \tilde{m}_H^2$ . Esta condición se traduce en la cota

$$T > T_2 \equiv \sqrt{\frac{eB + 16c^2}{3g^2 + g'^2 + 8\lambda + 4f^2}}. \quad (6.33)$$

El factor relevante que aumenta el orden de la transición, presente tanto en  $V_H^{(\text{ring})}$  y  $V_{\text{gb}}^{(\text{ring})}$ , es  $(eB)^2/\tilde{m}_i^3$  que puede ser localizado de nuevo en los diagramas que involucran la auto-energía de un *tadpole* de escalares cargados en presencia del campo externo.

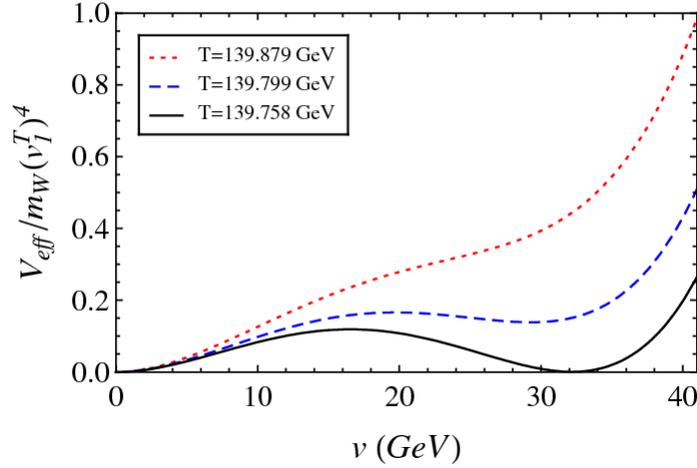
## 6.4. Restauración de la Simetría

Con el fin de verificar cuantitativamente el efecto del campo magnético durante la TFED, en esta sección se procede a graficar el  $V_{\text{eff}}$  como una función del valor esperado del vacío  $v$ . Para este análisis utilizamos los parámetros conocidos del ME, esto es  $g' = 0.344$  y  $g = 0.637$ ,  $m_Z = 91$  GeV,  $m_W = 80$  GeV,  $f = 1$ ,  $\lambda = 0.11$ , que corresponde a la actual cota para la masa del Higgs.

La Fig. 6.5 muestra el potencial efectivo, en ausencia del campo magnético, dividido por  $[m_W(v_1^T)]^4 = (10.5 \text{ GeV})^4$ , donde  $v_1^T$  es el valor donde aparece el mínimo en la fase rota a la temperatura crítica, que en este caso pasa a ser  $T_C = 139.758$  GeV. El valor del parámetro de norma es  $\xi = 0.1$ . La transición de fase es débilmente de primer orden. Observamos que los resultados son consistentes con los obtenidos en la referencia Ref. [1], los cuales son calculados utilizando los grados de libertad en la fase simétrica.

La Fig. 6.6 muestra el potencial efectivo dividido por  $[m_W(v_1^T)]^4 = (10.5 \text{ GeV})^4$  para las mismas temperaturas de la Fig. 6.5 y un valor fijo del campo magnético, parametrizado en términos de la temperatura de la TFED,  $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$ , con  $b = 0.01$ . El cuadro insertado en esta gráfica muestra la diferencia ( $\Delta V_{\text{eff}}$ ) con respecto a el potencial efectivo mostrado en la Fig. 6.5, en ausencia de campo magnético, sobre una pequeña región en el rango donde el segundo mínimo se desarrolla y ahora está retrasado por la presencia del campo magnético. Este mismo efecto se puede observar si mantenemos la temperatura fija y aumentamos el valor del campo magnético. Dado que se utiliza un campo magnético débil, el efecto es pequeño. Para apreciar tal efecto, en la Fig. 6.7 se muestra la diferencia entre los potenciales efectivos en presencia y en ausencia de campo magnético. Comenzando con campo magnético nulo, la transición de fase ocurre a la temperatura crítica  $T_C = 139.758$  GeV. La transición de fase se retrasa al aumentar los valores del campo magnético, también parametrizado como  $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$ , mientras que la temperatura se mantiene fija. En ambas Figs. 6.6 y 6.7, el valor del parámetro de norma es  $\xi = 0.1$ .

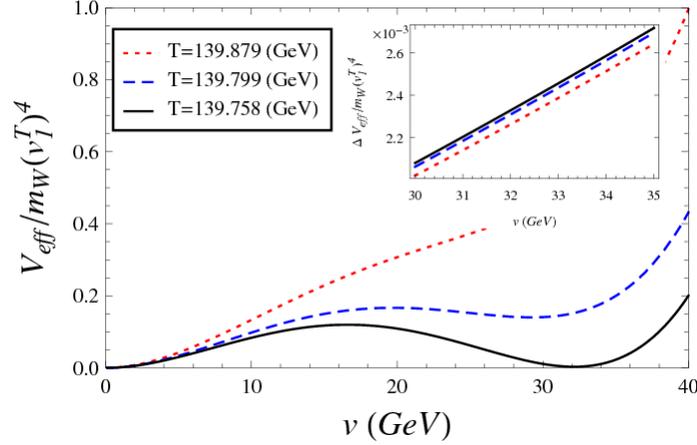
La Fig. 6.8 muestra una pequeña región alrededor del segundo mínimo que se desarrolla en el potencial efectivo dividido por la cuarta potencia de la masa del  $W$  dependiente



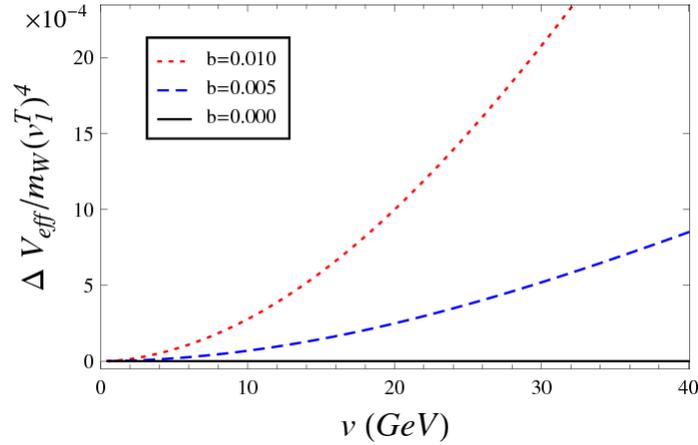
**Figura 6.5:** Potencial efectivo dividido por la cuarta potencia de la masa del  $W$  dependiente de  $v$  evaluada en  $v_1^T$  (el valor donde el mínimo de la fase rota aparece a la temperatura crítica en ausencia de campo magnético). Con parámetro de norma  $\xi = 0.1$  y valor del campo magnético nulo. La transición de fase es débilmente de primer orden. Notamos que los resultados son consistentes con los obtenidos por [79], utilizando los grados de libertad de la fase simétrica.

de  $v$  evaluada en  $v_1^T$ , para tres diferentes valores del campo magnético que se calculan a su correspondiente temperatura crítica, manteniendo el valor de  $\xi = 0.1$ . Notamos que al aumentar los valores del campo magnético, la transición de fase se inicia a una temperatura crítica  $T_C$  más baja y el mínimo de la fase rota  $v_0$  también se desplazó a valores más altos de tal manera que el cociente  $v_0/T_C$  aumenta. Este aumento, aunque modesto, es una característica deseada que puede eventualmente ayudar a que una posible asimetría bariónica no sea borrada después de la finalización de la transición de fase [4]. Para explorar la dependencia del parámetro de norma de los parámetros relevantes en el potencial efectivo, las Figs. 6.9 – 6.11 muestran la diferencia en el comportamiento con y sin campo magnético de  $v_0$ ,  $T_C$  y el cociente  $v_0/T_C$  para valores de  $\xi$  alrededor de 1. Usamos un valor fijo del campo magnético, parametrizado como  $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$ , con  $b = 0, 0.005, 0.010$ .

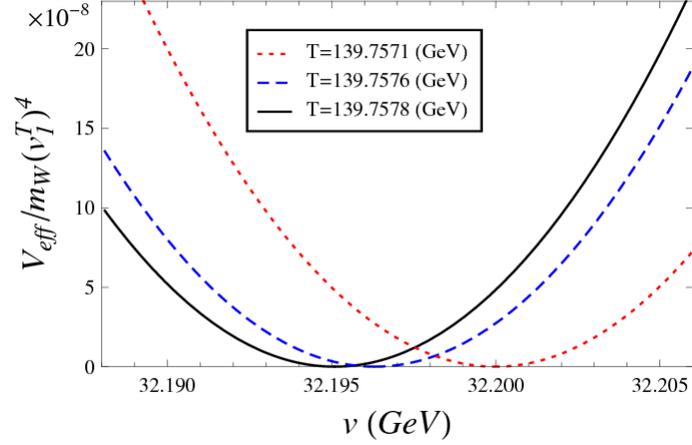
Podemos ver que  $v_0$ ,  $T_C$  y  $v_0/T_C$  se mantienen estables para una variación de  $\xi$  hasta de 1.5. Para estos valores pequeños de la intensidad de campo magnético, de acuerdo con la jerarquía de escalas de energía asumida, el campo magnético no introduce una fuerte dependencia en la norma.



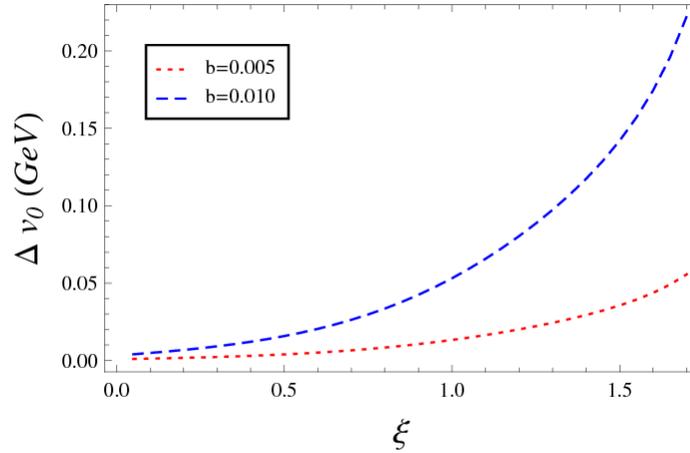
**Figura 6.6:** Potencial efectivo dividido por la cuarta potencia de la masa del  $W$  dependiente de  $v$  evaluada en  $v_1^T$  (el valor donde el mínimo de la fase rota aparece a la temperatura crítica en ausencia de campo magnético) para las mismas temperaturas de la Fig. 6.5 y un valor fijo del campo magnético parametrizado como  $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$ , con  $b = 0.01$ . El parámetro de norma es  $\xi = 0.1$ . En el cuadro superior derecho se muestra la diferencia ( $\Delta V_{eff}$ ) con respecto al potencial efectivo mostrado en la Fig. 6.5 en ausencia de campo magnético sobre una pequeña región en el rango de  $\nu$  donde el segundo mínimo estaría desarrollándose y ahora está retrasado por la presencia de un campo magnético.



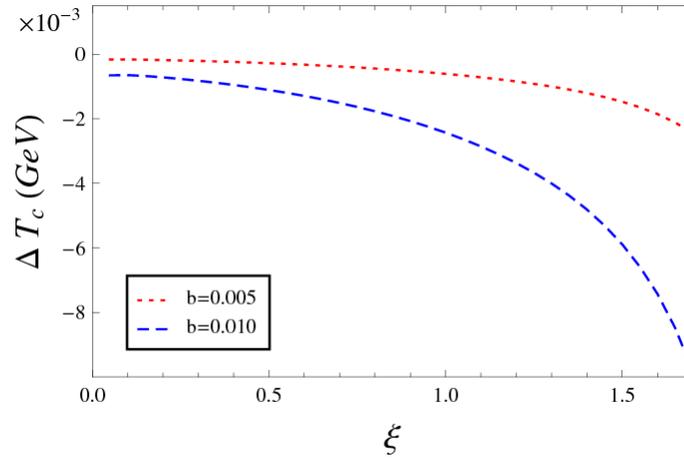
**Figura 6.7:** Diferencia entre los potenciales efectivos en presencia y en ausencia de campo magnético dividido por la cuarta potencia de la masa del  $W$  dependiente de  $v$  evaluada en  $v_1^T$  (el valor donde el mínimo de la fase rota aparece a la temperatura crítica  $T = T_C^{B=0} = 139.758 \text{ GeV}$  en ausencia del campo magnético) para diferentes valores del campo magnético parametrizado como  $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$ . El parámetro de norma es  $\xi = 0.1$ . A pesar de que el campo magnético es débil, se puede apreciar que la transición de fase se retrasa al aumentar los valores del campo magnético.



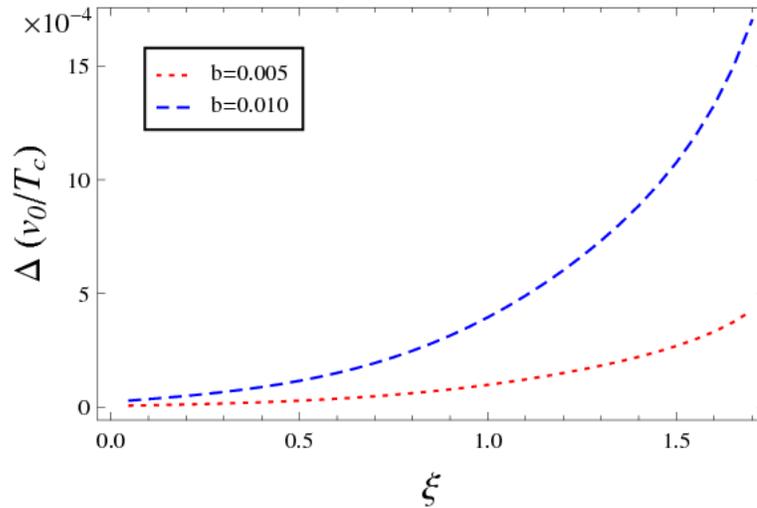
**Figura 6.8:** Una pequeña región alrededor del segundo mínimo que se desarrolla en el potencial efectivo dividido por la cuarta potencia de la masa del  $W$  dependiente de  $v$  evaluada en  $v_1^T$  (el valor donde el mínimo en la fase rota aparece a la temperatura crítica en ausencia de campo magnético) para tres diferentes valores del campo magnético a su correspondiente temperatura crítica y para  $\xi = 0.1$ . Notamos que al aumentar los valores del campo magnético, la transición de fase se inicia a una temperatura más baja y el mínimo de la fase rota también se desplaza a valores más altos de tal manera que la razón  $v_0/T_C$  incrementa la transición de fase.



**Figura 6.9:** Diferencias de  $v_0$ , con y sin campo magnético, en función de  $\xi$ . La posición del mínimo en la fase rota a la temperatura crítica, para dos valores del campo magnético parametrizado como  $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$  se mantiene estable a lo largo de una amplia gama de valores de  $\xi$ , aún en la presencia de campo magnético.



**Figura 6.10:** Diferencias de  $T_C$ , con y sin campo magnético, en función de  $\xi$ . La posición de la temperatura crítica para el desarrollo del mínimo en la fase rota, para dos valores del campo magnético parametrizado como  $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$  se mantiene estable a lo largo de una amplia gama de valores de  $\xi$ .



**Figura 6.11:** Diferencia de la razón  $v_0/T_c$  con y sin campo magnético, para dos valores del campo magnético parametrizado como  $B = b \times (100 \text{ GeV})^2$ , en función de  $\xi$ . Donde se observa cómo el valor del cociente  $v_0/T_c$  es estable para una variación de  $\xi$  hasta 1.5. La presencia del campo magnético no introduce una fuerte dependencia en la norma.

# Capítulo 7

## CONCLUSIONES

En la presente tesis se ha estudiado el problema de la restauración de la simetría del Modelo Estándar Mínimo, a temperatura finita, en presencia de un campo magnético externo. El estudio se ha realizado mediante el análisis del potencial efectivo a temperatura finita, considerando los efectos de los diagramas de anillo. El cálculo del potencial efectivo, en la presencia del campo magnético, nos ha permitido concluir que la TFED se vuelve más fuertemente de primer orden comparado con el caso en el que el campo está ausente. Nuestro tratamiento se ha aplicado en el límite de campo magnético débil, dentro de la jerarquía de escalas con la que se trabaja, es decir  $eB \ll m^2 \ll T^2$ , donde  $m$  se toma como una masa genérica que participa en el cálculo.

Se ha trabajado explícitamente con los grados de libertad en la fase con simetría electrodébil rota, donde el campo magnético externo pertenece al grupo  $U(1)_{em}$ , y en una norma covariante, con valor arbitrario de un único parámetro que fija la norma. Para la inclusión de los efectos del campo magnético externo y para describir los propagadores de las partículas, se ha hecho uso del formalismo del tiempo propio de Schwinger. De este modo, la contribución de todos los niveles de Landau ha sido tomada en cuenta. Además, se ha llevado a cabo una expansión sistemática hasta orden  $(eB)^2$  en el campo magnético y como un paso intermedio se ha calculado la dependencia de las auto-energías en el MEM, del campo magnético y del parámetro de norma.

La presencia del campo magnético origina términos en el potencial efectivo, proporcionales a  $1/\tilde{m}_i^3$ , donde  $\tilde{m}_i^2 = m_i^2 + \Pi_1$  es la masa térmica de los campos escalares, con  $m_i$  su masa y  $\Pi_1$  la corrección térmica a la masa. Estos términos vienen de los diagramas de *tadpole* en la auto-energía del bosón, donde la partícula del lazo es un escalar cargado y resultan ser los más relevantes para hacer que la transición de fase se vuelva más fuertemente de primer orden, en comparación con el caso cuando el campo no está presente. Los resultados obtenidos están en acuerdo cualitativo y cuantitativo con los encontrados previamente [1] usando los grados de libertad del ME en la fase simétrica.

Durante la transición de fase, el cociente  $\frac{\langle v \rangle}{T_C}$  se incrementa a medida que los valores del campo magnético aumentan. Esta característica funciona en favor de la supresión

de las transiciones de *sphaleron* en la fase rota después que la TFED es completada y por lo tanto, en contra de un posible supreción en la producción de número barionico.

El incremento del anterior cociente es modesto, aunque es importante tener en cuenta que hemos utilizado valores muy restrictivos de la intensidad de campo, consistentes con las escalas de energía usadas en este trabajo. Los términos dominante en la temperatura del potencial efectivo son independientes del parámetro de norma, aunque los otros son subdominantes, es decir, los que vienen con el campo magnético llegan a ser dependientes del parámetro de norma. La dependencia de este parámetro sobre los observables de la transición de fase tales como: la posición del mínimo, en la fase con simetría rota y la temperatura crítica para la transición, no es despreciable para valores de  $\xi$  cerca de  $\xi \sim 1$ . Esta dependencia señala que el corte en la expansión en serie de potencias del campo magnético, podría no ser un procedimiento invariante de norma. Este último punto merece una mirada más cercana y se espera investigar más adelante.

# Apéndice A

## Auto-energías de escalares en una norma arbitraria

En este apéndice, listamos los resultados para los diagramas de las auto-energías representados en la Fig. 5.1 (para el bosón de Goldstone neutro, no hay una contribución del tipo mostrado en el diagrama (c) de la Fig. 5.1).

### A.1. Auto-energías del bosón de Higgs ( $H$ )

$$\begin{aligned}\Pi_a^H &= \lambda \frac{T^2}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2\pi T} (2m_1 + m_3 + 3m_4) \right] \\ &\quad - \lambda \frac{(eB)^2}{48\pi m_1^2} \left[ \frac{T}{m_1} + \frac{\zeta(3)m_1^2}{4\pi^3 T^2} \right].\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}\Pi_b^H &= \frac{T^2}{16} \left[ g^2(3 + \xi) + g'^2 \left( 1 + \frac{\xi}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3 + \xi^{3/2}}{\pi T} (2g^2 m_W + (g^2 + g'^2) m_Z) \right] \\ &\quad + \frac{(eB)^2 g^2}{64\pi m_W^2} \left[ \left( 3 + \frac{35}{3\xi^{1/2}} \right) \frac{T}{m_W} + \frac{11\zeta(3)m_W^2}{3\pi^3 T^2} \right].\end{aligned}\tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}\Pi_c^H &= -\frac{(3g^4 + 2g^2 g'^2 + g'^4) m_W^2}{4g^2 \pi^2} \ln \left( \frac{m_W}{T} \right) \\ &\quad - \frac{T}{2\pi} \left[ g^2 m_W + \frac{g^2 m_W^2}{2m_Z} + \frac{g'^2 m_W^2}{m_Z} + \frac{g'^4 m_W^2}{2g^2 m_Z} \right] \\ &\quad \times \left( \frac{3}{4} + \frac{5\xi^{3/2}}{4} - \frac{\xi^{3/2}}{(1 + \xi^{1/2})} - \frac{\xi^2}{(1 + \xi^{1/2})} \right)\end{aligned}\tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
& +(eB)^2 \frac{g^2 T}{\pi m_W^3} \left( -\frac{83}{192} + \frac{13}{12(1+\xi^{1/2})^4} + \frac{13}{48(1+\xi^{1/2})^3} \right. \\
& - \frac{5}{4(1+\xi^{1/2})^2} - \frac{1}{192\xi^{1/2}} + \frac{5}{24(1+\xi^{1/2})^4 \xi^{1/2}} - \frac{7}{16(1+\xi^{1/2})^3 \xi^{1/2}} \\
& - \frac{1}{2(1+\xi^{1/2})^2 \xi^{1/2}} + \frac{9\xi^{1/2}}{4(1+\xi^{1/2})^4} + \frac{3\xi^{1/2}}{16(1+\xi^{1/2})^3} - \frac{3\xi^{1/2}}{4(1+\xi^{1/2})^2} \\
& \left. + \frac{9\xi}{4(1+\xi^{1/2})^4} - \frac{17\xi}{48(1+\xi^{1/2})^3} + \frac{7\xi^{3/2}}{8(1+\xi^{1/2})^4} + \frac{1}{4(1+\xi^{1/2})} \right) \\
& - \frac{9(eB)^2 g^2 m_W^2 \zeta(5)}{256\pi^6 T^4}. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_d^H &= -T^2 \frac{(3g^2 + g'^2)\xi}{48} + T \left[ \frac{g^2 m_1^3}{8\pi m_W (m_1 + m_W)} \right. \\
& \left( \frac{m_1^2 (m_1 + m_W)}{m_W (m_1^2 - \xi m_W^2)} - \frac{\xi^{5/2} m_W^4 (m_1 + m_W)}{m_1^3 (m_1^2 - \xi m_W^2)} - \frac{m_1}{m_W} - 1 \right) \\
& \left. + (g^2 + g'^2) \frac{m_3^3}{16\pi m_Z (m_3 + m_Z)} \right] \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{m_3^2 (m_3 + m_Z)}{m_Z (m_3^2 - \xi m_Z^2)} - \frac{\xi^{5/2} m_Z^4 (m_3 + m_Z)}{m_3^3 (m_3^2 - \xi m_Z^2)} - \frac{m_3}{m_Z} - 1 \right) \\
& + (eB)^2 \frac{g^2 T}{\pi} \left[ \frac{1}{(m_1 + m_W)^4} \right] \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( -\frac{9m_1}{16} - \frac{7m_1^3}{32m_W^2} - \frac{9m_1^2}{16m_W} - \frac{13m_W}{48} - \frac{5m_W^2}{96m_1} \right) \\
& + \frac{1}{(m_1 + m_W)^3} \left( \frac{31}{192} + \frac{11m_1^2}{64m_W^2} + \frac{13m_1}{64m_W} + \frac{3m_W}{64m_1} \right) \\
& + \frac{1}{m_W (m_1 + m_W)^2} \left( \frac{m_1}{24m_W} + \frac{1}{48} \right) \\
& + \frac{m_1}{(m_1 + \xi^{1/2} m_W)^4} \left( \frac{49\xi}{96} + \frac{7m_1^2}{32m_W^2} + \frac{49\xi^{1/2} m_1}{96m_W} + \frac{7\xi^{3/2} m_W}{32m_1} \right) \\
& - \frac{1}{(m_1 + \xi^{1/2} m_W)^3} \left( \frac{11\xi}{64} + \frac{11m_1^2}{64m_W^2} + \frac{9\xi^{1/2} m_1}{32m_W} \right) \\
& - \frac{1}{m_W (m_1 + \xi^{1/2} m_W)^2} \left( \frac{m_1}{24m_W} + \frac{\xi^{1/2}}{48} \right) \left] - \frac{7(eB)^2 g^2 \zeta(3)}{384\pi^4 T^2}. \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$\Pi_e^H = -\frac{\lambda^2 m_W^2}{g^2 \pi} \left[ \frac{12}{\pi} \ln \left( \frac{m_W}{T} \right) + T \left( \frac{2}{m_1} + \frac{1}{m_3} + \frac{9}{m_4} \right) \right]$$

$$+ \frac{(eB)^2 \lambda^2 m_W^2}{4g^2 \pi m_1^4} \left[ \frac{T}{m_1} + \frac{\zeta(5)m_1^4}{16\pi^5 T^4} \right]. \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \Pi_f^H &= \frac{m_t^2 T^2}{2v_0^2} \left[ 1 + \frac{3m_t^2}{\pi^2 T^2} \ln \left( \frac{4m_W}{T} \right) \right] \\ &\quad - \frac{(eB)^2 m_t^2}{2\pi^4 T^2 v_0^2} \left[ \frac{7\zeta(3)}{9} - \frac{31m_t^2 \zeta(5)}{16\pi^2 T^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \Pi_g^H &= \frac{g^2 \xi^2 m_W^2}{16\pi} \left[ \frac{1}{2\pi} \left( 3 + 2\frac{g'^2}{g^2} + \frac{g'^4}{g^4} \right) \ln \left( \frac{m_W}{T} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{T}{m_W} + \left( 1 + 2\frac{g'^2}{g^2} + \frac{g'^4}{g^4} \right) \frac{T}{2m_W} \right] \\ &\quad - \frac{(eB)^2 g^2 \xi^2 m_W^2}{128\pi m_W^4} \left[ \frac{T}{m_W} + \frac{\zeta(5)m_W^4}{16\pi^5 T^4} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

## A.2. Auto-energías del bosón de Goldstone Neutro ( $G^0$ )

$$\Pi_a^{G^0} = \frac{\lambda T^2}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2\pi T} (2m_1 + 3m_3 + m_4) - \frac{(eB)^2}{24\pi T m_1^3} - \frac{(eB)^2 \zeta(3)}{96\pi^4 T^4} \right]. \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \Pi_b^{G^0} &= \frac{T^2}{16} \left[ (3 + \xi)g^2 + \left( 1 + \frac{\xi}{3} \right) g'^2 \right] \\ &\quad - \frac{T}{16\pi} \left[ (6 + 2\xi^{3/2})g^2 m_W + (g^2 + g'^2)(3 + \xi^{3/2})m_Z \right] \\ &\quad + (eB)^2 T \frac{g^2}{\pi m_W^3} \left( \frac{3}{64} + \frac{35}{192\xi^{1/2}} + \frac{11\zeta(3)m_W^3}{192\pi^3 T^3} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \Pi_d^{G^0} &= - (3g^2 + g'^2) \frac{\xi T^2}{48} - \frac{g^2 T}{8\pi} \left[ \left( 1 + \frac{m_1}{m_W} \right) \frac{m_1^3}{m_W(m_1 + m_W)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(m_1^2 - \xi m_W^2)} \left( \xi^{5/2} m_W^3 - \frac{m_1^5}{m_W^2} \right) + \left( 1 + \frac{g'^2}{g^2} \right) \frac{m_4^4}{2m_Z^2(m_4 + m_Z)} \right] \\ &\quad + (eB)^2 \frac{g^2 T}{\pi} \left[ \frac{1}{(m_1 + m_W)^4} \left( -\frac{9m_1}{16} - \frac{7m_1^3}{32m_W^2} - \frac{9m_1^2}{16m_W} - \frac{13m_W}{48} - \frac{5m_W^2}{96} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(m_1 + m_W)^3} \left( \frac{31}{192} + \frac{11m_1^2}{64m_W^2} + \frac{13m_1}{64m_W} + \frac{3m_W}{64m_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m_W(m_1 + m_W)^2} \left( \frac{m_1}{24m_W} + \frac{1}{48} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_1}{(m_1 + \xi^{1/2}m_W)^4} \left( \frac{49\xi}{96} + \frac{7m_1^2}{32m_W^2} + \frac{49\xi^{1/2}m_1}{96m_W} + \frac{7\xi^{3/2}m_W}{32m_1} \right) \\
& + \frac{1}{(m_1 + \xi^{1/2}m_W)^3} \left( -\frac{11\xi}{64} - \frac{11m_1^2}{64m_W^2} - \frac{9\xi^{1/2}m_1}{32m_W} \right) \\
& + \frac{1}{m_W(m_1 + \xi^{1/2}m_W)^2} \left( -\frac{m_1}{24m_W} - \frac{\xi^{1/2}}{48} \right) \Big]. \tag{A.13}
\end{aligned}$$

$$\Pi_e^{G^0} = -\frac{\lambda^2 m_W^2}{g^2} \left[ \frac{2}{\pi^2} \ln\left(\frac{m_W}{T}\right) + \frac{16T}{4\pi(m_3 + m_4)} \right]. \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_f^{G^0} &= \frac{m_t^2}{2v_0^2} \left[ T^2 - \frac{3m_t^2}{\pi^2} \ln\left(\frac{4m_W}{T}\right) - \frac{7(eB)^2\zeta(3)}{9\pi^4 T^2} \right. \\
& \left. + \frac{31(eB)^2 m_t^2 \zeta(5)}{16\pi^6 T^4} \right]. \tag{A.15}
\end{aligned}$$

$$\Pi_g^{G^0} = -\frac{g^2 \xi^2 m_W^2}{16\pi} \left[ \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{m_W}{T}\right) + \frac{T}{m_W} - \frac{(eB)^2 T}{8m_W^5} - \frac{(eB)^2 \zeta(5)}{128\pi^5 T^4} \right]. \tag{A.16}$$

### A.3. Auto-energías del bosón de Goldstone cargado ( $G^c$ )

$$\Pi_a^{G^c} = \frac{T^2 \lambda}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2\pi T} (2m_1 + m_3 + m_4) - \frac{(eB)^2}{12\pi T m_1^3} - \frac{(eB)^2 \zeta(3)}{48\pi^4 T^4} \right]. \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_b^{G^c} &= T^2 \frac{(\xi + 3)(3g^4 + g'^4 + 4g^2 g'^2)}{48(g^2 + g'^2)} \\
& - T \frac{(\xi^{3/2} + 3)}{4\pi(g^2 + g'^2)} \left( \frac{g^2(g^2 + g'^2)m_W}{2} + \frac{(g^2 - g'^2)^2 m_Z}{4} + g^2 g'^2 m_\gamma \right) \\
& + (eB)^2 T \frac{g^2}{\pi m_W^3} \left( \frac{3}{64} + \frac{35}{192\xi^{1/2}} \right) + \frac{11(eB)^2 g^2 \zeta(3)}{192\pi^4 T^2}. \tag{A.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_c^{G^c} &= -\frac{g'^2 m_W^2}{2\pi^2} \ln\left(\frac{m_W}{T}\right) \\
& + \frac{T m_W^2}{4\pi(g^2 + g'^2)} \left[ -\frac{3g'^4}{(m_W + m_Z)} - \frac{g'^4}{(\xi^{1/2}m_W + m_Z)} \left( \xi + \frac{\xi^{1/2}m_Z}{m_W} + \frac{m_Z^2}{m_W^2} \right) \right. \\
& - \frac{g'^4}{(m_W + \xi^{1/2}m_Z)} \left( \xi + \frac{m_W^2}{m_Z^2} + \frac{\xi^{1/2}m_W}{m_Z} \right) + \frac{g'^4}{(\xi m_W^2 - m_Z^2)} \left( \frac{\xi^{5/2}m_W^3}{m_Z^2} - \frac{m_Z^3}{m_W^2} \right) \\
& \left. + \frac{g'^4}{(m_W^2 - \xi m_Z^2)} \left( \frac{m_W^3}{m_Z^2} - \frac{\xi^{5/2}m_Z^3}{m_W^2} \right) - \frac{g'^4 \xi^{3/2}}{(m_W^2 - m_Z^2)} \left( \frac{m_W^3}{m_Z^2} + \frac{m_Z^3}{m_W^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3g^2g'^2}{(m_W + m_\gamma)} - \frac{g^2g'^2}{(\xi^{1/2}m_W + m_\gamma)} \left( \xi + \frac{\xi^{1/2}m_\gamma}{m_W} + \frac{m_\gamma^2}{m_W^2} \right) \\
& -\frac{g^2g'^2}{(m_W + \xi^{1/2}m_\gamma)} \left( \xi + \frac{m_W^2}{m_\gamma^2} + \frac{\xi^{1/2}m_W}{m_\gamma} \right) + \frac{g^2g'^2}{(\xi m_W^2 - m_\gamma^2)} \left( \frac{\xi^{5/2}m_W^3}{m_\gamma^2} - \frac{m_\gamma^3}{m_W^2} \right) \\
& + \frac{g^2g'^2m_W^3}{m_\gamma^2(m_W^2 - \xi m_\gamma^2)} - \frac{g^2g'^2\xi^{5/2}m_\gamma^3}{m_W^2(m_W^2 - \xi m_\gamma^2)} - \frac{g^2g'^2\xi^{3/2}}{(m_W^2 - m_\gamma^2)} \left( \frac{m_W^3}{m_\gamma^2} - \frac{m_\gamma^3}{m_W^2} \right) \Big] \\
& + (eB)^2 T \frac{m_W^2}{\pi(g^2 + g'^2)} \left[ -\frac{g'^4}{16(m_W + m_Z)^4} \left( \frac{13}{m_W} + \frac{2m_W}{m_Z^2} + \frac{8}{m_Z} + \frac{12m_Z}{m_W^2} + \frac{3m_Z^2}{m_W^3} \right) \right. \\
& - \frac{g'^4}{(m_W + m_Z)^3} \left( \frac{77}{96m_W^2} - \frac{1}{24m_Z^2} - \frac{1}{8m_W m_Z} + \frac{5m_Z}{32m_W^3} \right) \\
& + \frac{g'^4}{(m_W + m_Z)^2} \left( \frac{1}{4m_W^3} + \frac{1}{24m_W m_Z^2} + \frac{1}{12m_W^2 m_Z} \right) \\
& + \frac{5g'^4}{(\xi^{1/2}m_W + m_Z)^4} \left( \frac{\xi^{1/2}}{8m_W} + \frac{\xi^{3/2}m_W}{48m_Z^2} + \frac{\xi}{12m_Z} + \frac{m_Z}{12m_W^2} + \frac{m_Z^2}{48\xi^{1/2}m_W^3} \right) \\
& - \frac{g'^4}{(\xi^{1/2}m_W + m_Z)^3} \left( \frac{31}{96m_W^2} + \frac{3\xi}{32m_Z^2} + \frac{9\xi^{1/2}}{32m_W m_Z} + \frac{7m_Z}{32\xi^{1/2}m_W^3} \right) \\
& - \frac{g'^4}{(\xi^{1/2}m_W + m_Z)^2} \left( \frac{1}{4\xi^{1/2}m_W^3} + \frac{\xi^{1/2}}{24m_W m_Z^2} + \frac{1}{12m_W^2 m_Z} \right) \\
& + \frac{g'^4}{(m_W + \xi^{1/2}m_Z)^4} \left( \frac{17\xi}{24m_W} + \frac{m_W}{8m_Z^2} + \frac{\xi^{1/2}}{2m_Z} + \frac{\xi^{3/2}m_Z}{3m_W^2} \right) \\
& - \frac{g'^4}{(m_W + \xi^{1/2}m_Z)^3} \left( \frac{\xi}{4m_W^2} + \frac{1}{24m_Z^2} + \frac{\xi^{1/2}}{8m_W m_Z} \right) \\
& - \frac{g'^4}{(m_W + \xi^{1/2}m_Z)^2} \left( \frac{1}{24m_W m_Z^2} + \frac{\xi^{1/2}}{12m_W^2 m_Z} \right) \\
& - \frac{g'^4}{\xi^{1/2}(m_W + m_Z)^4} \left( \frac{29}{48m_W} + \frac{5m_W}{48m_Z^2} + \frac{5}{12m_Z} + \frac{m_Z}{3m_W^2} \right) \\
& + \frac{g'^4}{\xi^{1/2}(m_W + m_Z)^3} \left( \frac{1}{4m_W^2} + \frac{3}{32m_Z^2} + \frac{9}{32m_W m_Z} \right) \\
& + \frac{g'^4}{12\xi^{1/2}(m_W + m_Z)^2} \left( \frac{1}{2m_W m_Z^2} + \frac{1}{m_W^2 m_Z} \right) \\
& - \frac{g^2g'^2}{(m_W + m_\gamma)^4} \left( \frac{13}{16m_W} + \frac{m_W}{8m_\gamma^2} + \frac{1}{2m_\gamma} + \frac{3m_\gamma}{4m_W^2} + \frac{3m_\gamma^2}{16m_W^3} \right) \\
& - \frac{g^2g'^2}{m_W^2(m_W + m_\gamma)^3} \left( \frac{77}{96m_W^2} - \frac{1}{24m_\gamma^2} - \frac{1}{8m_W m_\gamma} + \frac{5m_\gamma}{32m_W^3} \right) \\
& + \frac{g^2g'^2}{m_W(m_W + m_\gamma)^2} \left( \frac{1}{4m_W^2} + \frac{1}{24m_\gamma^2} + \frac{1}{12m_W m_\gamma} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5g^2g'^2}{(\xi^{1/2}m_W + m_\gamma)^4} \left( \frac{\xi^{3/2}m_W}{m_\gamma^2} + \frac{\xi}{12m_\gamma} + \frac{m_\gamma}{12m_W^2} + \frac{m_\gamma^2}{48\xi^{1/2}m_W^3} + \frac{\xi^{1/2}}{8m_W} \right) \\
& - \frac{g^2g'^2}{(\xi^{1/2}m_W + m_\gamma)^3} \left( \frac{31}{96m_W^2} + \frac{3\xi}{32m_\gamma^2} + \frac{9\xi^{1/2}}{32m_Wm_\gamma} + \frac{7m_\gamma}{32\xi^{1/2}m_W^3} \right) \\
& - \frac{g^2g'^2}{(\xi^{1/2}m_W + m_\gamma)^2} \left( \frac{1}{4\xi^{1/2}m_W^3} + \frac{\xi^{1/2}}{24m_Wm_\gamma^2} + \frac{1}{12m_W^2m_\gamma} \right) \\
& + \frac{g^2g'^2}{(m_W + \xi^{1/2}m_\gamma)^4} \left( \frac{17\xi}{24m_W} + \frac{m_W}{8m_\gamma^2} + \frac{\xi^{1/2}}{2m_\gamma} + \frac{\xi^{3/2}m_\gamma}{3m_W^2} \right) \\
& - \frac{g^2g'^2}{(m_W + \xi^{1/2}m_\gamma)^3} \left( \frac{\xi}{4m_W^2} + \frac{\xi^{1/2}}{8m_Wm_\gamma} + \frac{1}{24m_\gamma^2} \right) \\
& - \frac{g^2g'^2}{24m_Wm_\gamma(m_W + \xi^{1/2}m_\gamma)^2} \left( \frac{1}{m_\gamma} + \frac{2\xi^{1/2}}{m_W} \right) \\
& - \frac{g^2g'^2}{\xi^{1/2}(m_W + m_\gamma)^4} \left( \frac{29}{48m_W} + \frac{5m_W}{48m_\gamma^2} + \frac{m_\gamma}{3m_W^2} + \frac{5}{12m_\gamma} \right) \\
& + \frac{g^2g'^2}{\xi^{1/2}(m_W + m_\gamma)^3} \left( \frac{1}{4m_W^2} + \frac{3}{32m_\gamma^2} + \frac{9}{32m_Wm_\gamma} \right) \\
& + \frac{g^2g'^2}{\xi^{1/2}(m_W + m_\gamma)^2} \left[ \frac{1}{24m_Wm_\gamma^2} + \frac{1}{12m_W^2m_\gamma} \right] \\
& - \frac{(eB)^2}{T^4} \frac{7g'^2m_W^2\zeta(5)}{512\pi^6}.
\end{aligned}$$

(A.19)

$$\begin{aligned}
\Pi_d^{G^c} & = -\frac{\xi(3g^4 + 4g^2g'^2 + g'^4)T^2}{48(g^2 + g'^2)} \\
& + T \left[ -\frac{g^2m_3^3}{16\pi m_W^2} - \frac{g^2m_4^3}{16\pi m_W^2} - \frac{(g^2 - g'^2)^2m_1^3}{16\pi m_Z^2} - \frac{g^2g'^2m_1^3}{4\pi m_\gamma^2} \right. \\
& + \frac{g^2}{16\pi(m_3^2 - \xi m_W^2)} \left( \frac{m_3^5}{m_W^2} - \xi^{5/2}m_W^3 \right) + \frac{g^2}{16\pi(m_4^2 - \xi m_W^2)} \left( \frac{m_4^5}{m_W^2} - \xi^{5/2}m_W^3 \right) \\
& \left. + \frac{(g^2 - g'^2)^2}{16\pi(m_1^2 - \xi m_Z^2)} \left( \frac{m_1^5}{m_Z^2} - \xi^{5/2}m_Z^3 \right) - \frac{g^2g'^2}{4\pi(m_1^2 - \xi m_\gamma^2)} \left( \frac{m_1^5}{m_\gamma^2} - \xi^{5/2}m_\gamma^3 \right) \right] \\
& + \frac{(eB)^2T}{\pi(g^2 + g'^2)} \left[ -\frac{g^2}{(m_3 + m_W)^4} \left( \frac{m_3}{8} + \frac{m_3^3}{12m_W^2} + \frac{17m_3^2}{96m_W} + \frac{m_W}{32} \right) \right. \\
& + \frac{g^2}{(m_3 + m_W)^3} \left( \frac{1}{96} + \frac{m_3^2}{16m_W^2} + \frac{m_3}{32m_W} \right) \\
& \left. + \frac{g^2}{\pi(m_4 + m_W)^3} \left( \frac{1}{96} + \frac{m_4^2}{16m_W^2} + \frac{m_4}{32m_W} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g^2}{(m_3 + m_W)^2} \left( \frac{1}{96} + \frac{m_3}{48m_W} \right) + \frac{g^2}{m_W(m_4 + m_W)^2} \left( \frac{1}{96} + \frac{m_4}{48m_W} \right) \\
& - \frac{g^2}{(m_4 + m_W)^4} \left( \frac{m_4}{8} + \frac{m_4^3}{12m_W^2} + \frac{17m_4^2}{96m_W} + \frac{m_W}{32} \right) \\
& + \frac{g^2}{(m_3 + \xi^{1/2}m_W)^4} \left( \frac{5\xi m_3}{48} + \frac{m_3^3}{12m_W^2} + \frac{29\xi^{1/2}m_3^2}{192m_W} + \frac{5\xi^{3/2}m_W}{192} \right) \\
& - \frac{g^2}{(m_3 + \xi^{1/2}m_W)^3} \left( \frac{3\xi}{128} + \frac{m_3^2}{16m_W^2} + \frac{9\xi^{1/2}m_3}{128m_W} \right) \\
& - \frac{g^2}{m_W(m_3 + \xi^{1/2}m_W)^2} \left( \frac{m_3}{48m_W} + \frac{\xi^{1/2}}{96} \right) \\
& + \frac{g^2}{(m_4 + \xi^{1/2}m_W)^4} \left( \frac{5\xi m_4}{48} + \frac{m_4^3}{12m_W^2} + \frac{29\xi^{1/2}m_4^2}{192m_W} + \frac{5\xi^{3/2}m_W}{192} \right) \\
& - \frac{g^2}{(m_4 + \xi^{1/2}m_W)^3} \left( \frac{3\xi}{128} + \frac{m_4^2}{16m_W^2} + \frac{9\xi^{1/2}m_4}{128m_W} \right) \\
& - \frac{g^2}{m_W(m_4 + \xi^{1/2}m_W)^2} \left( \frac{m_4}{48m_W} + \frac{\xi^{1/2}}{96} \right) \\
& - \frac{5(g^2 - g'^2)^2 m_1}{192(m_1 + m_Z)^4} \left( 6 + \frac{m_1^2}{m_Z^2} + 4\frac{m_1}{m_Z} \right) + \frac{5(g^2 - g'^2)^2 m_Z}{192(m_1 + m_Z)^4} \left( 4 + \frac{m_Z}{m_1} \right) \\
& + \frac{9(g^2 - g'^2)^2}{128(m_1 + m_Z)^3} \left( 1 + \frac{m_1^2}{3m_Z^2} + \frac{m_1}{m_Z} + \frac{m_Z}{3m_1} \right) \\
& + \frac{(g^2 - g'^2)^2}{(m_1 + \xi^{1/2}m_Z)^4} \left( \frac{29\xi m_1}{192} + \frac{5m_1^3}{192m_Z^2} + \frac{5\xi^{1/2}m_1^2}{48m_Z} + \frac{\xi^{3/2}m_Z}{12} \right) \\
& + \frac{(g^2 - g'^2)^2}{(m_1 + \xi^{1/2}m_Z)^3} \left( -\frac{\xi}{16} - \frac{3m_1^2}{128m_Z^2} - \frac{9\xi^{1/2}m_1}{128m_Z} \right) \\
& - \frac{5g^2 g'^2}{(m_1 + m_\gamma)^4} \left( \frac{m_1}{8} + \frac{m_1^3}{48m_\gamma^2} + \frac{m_1^2}{12m_\gamma} + \frac{m_\gamma}{12} + \frac{m_\gamma^2}{48m_1} \right) \\
& + \frac{g^2 g'^2}{(m_1 + m_\gamma)^3} \left( +\frac{9}{32} + \frac{3m_1^2}{32m_\gamma^2} + \frac{9m_1}{32m_\gamma} + \frac{3m_\gamma}{32m_1} \right) \\
& + \frac{g^2 g'^2}{(m_1 + \xi^{1/2}m_\gamma)^4} \left( +\frac{29\xi m_1}{48} + \frac{5m_1^3}{48m_\gamma^2} + \frac{5\xi^{1/2}m_1^2}{12m_\gamma} + \frac{\xi^{3/2}m_\gamma}{3} \right) \\
& - \frac{g^2 g'^2}{(m_1 + \xi^{1/2}m_\gamma)^3} \left( -\frac{\xi}{4} - \frac{3m_1^2}{32m_\gamma^2} - \frac{9\xi^{1/2}m_1}{32m_\gamma} \right) \Big] \\
& + \frac{(eB)^2 (g'^2 - 29g^2)\zeta(3)}{T^2 1536\pi^4}.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_e^{G^c} &= \frac{\lambda^2 m_W^2}{g^2} \left[ -\frac{2}{\pi^2} \ln\left(\frac{m_W}{T}\right) - \frac{4T}{\pi(m_1 + m_4)} \right. \\
&\quad + \frac{(eB)^2 T}{\pi m_1 (m_1 + m_4)^4} \left( -\frac{1}{3} - \frac{4m_4}{3m_1} - \frac{m_4^2}{3m_1^2} + \frac{3(m_1 + m_4)}{2m_1} + \frac{m_4(m_1 + m_4)}{2m_1^2} \right) \\
&\quad \left. + \frac{(eB)^2 \zeta(5)}{128\pi^6 T^4} \right]. \tag{A.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_f^{G^c} &= \frac{1}{v_0^2} \left[ \frac{T^2}{2} (m_b^2 + m_t^2) + \frac{(eB)}{T} \frac{3(m_b^2 - m_t^2)}{16\pi} - \frac{3m_b^2 m_t^2}{\pi^2} \ln\left(\frac{4m_W}{T}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(eB)^2}{T^2} \frac{133(m_b^2 + m_t^2)\zeta(3)}{288\pi^4} + \frac{(eB)^2}{T^4} \frac{31\zeta(5)}{256\pi^6} (m_b^4 + 2m_b^2 m_t^2 + 4m_t^4) \right]. \tag{A.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_g^{G^c} &= -(g^2 - g'^2) \left( \frac{\xi^2 m_W^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{m_W}{T}\right) - \frac{\xi^2 T}{8\pi(m_W + m_Z)} + \frac{(eB)^2 \xi^2 T m_W^2}{\pi m_W (m_W + m_Z)^4} \right. \\
&\quad \times \left( \frac{1}{96} + \frac{m_Z}{24m_W} + \frac{m_Z^2}{96m_W^2} - \frac{3(m_W + m_Z)}{64m_W} - \frac{m_Z(m_W + m_Z)}{64m_W^2} \right) \\
&\quad \left. - \frac{(eB)^2 \xi^2 \zeta(5)}{4096\pi^6 T^4} \right). \tag{A.23}
\end{aligned}$$

# Apéndice B

## Auto-energías de los bosones de norma en una norma arbitraria

En este apéndice, se presentan los resultados para los diagramas de las auto-energías mostrados en la Fig. 5.2

### B.1. Auto-energías del fotón ( $\gamma$ )

$$\begin{aligned} \Pi_a^\gamma &= \frac{g^2 g'^2}{(g^2 + g'^2)} \left[ T^2 \left( \frac{\xi + 1}{4} - (\xi^{3/2} + 2) \frac{m_W}{2\pi T} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(eB)^2}{16\pi m_W^2} \left( \left( \frac{1}{\xi^{1/2}} - 2 \right) \frac{T}{3m_W} + \frac{7\zeta(3)m_W^2}{4\pi^3 T^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \Pi_b^\gamma &= -\frac{g^2 g'^2 m_W^2}{(g^2 + g'^2)} \left[ \frac{1}{4\pi^2} \ln \left( \frac{m_W}{T} \right) + \frac{2T}{4\pi(m_1 + m_W)} \right. \\ &\quad - \frac{(eB)^2 T}{4\pi(m_1 + m_W)^2} \left[ \frac{1}{m_W^3} + \frac{1}{4(m_1 + m_W)} \left( \frac{3}{m_1^2} - \frac{7m_1}{m_W^3} - \frac{21}{m_W^2} + \frac{m_W}{m_1^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(m_1 + m_W)^2}{\xi^{1/2} m_W^3 (m_1 + \xi^{1/2} m_W)^2} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{6(m_1 + m_W)^2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_W} + \frac{m_1^2}{m_W^3} + \frac{m_W^2}{m_1^3} + \frac{4m_1}{m_W^2} + \frac{4m_W}{m_1^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{7(eB)^2 \zeta(5)}{512\pi^6 T^4} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\Pi_c^\gamma = \frac{g^2 g'^2 T^2}{2(g^2 + g'^2)} \left[ \frac{1}{3} - \frac{m_1}{\pi T} \right] - \frac{g^2 g'^2 (eB)^2}{48(g^2 + g'^2) \pi m_1^2} \left[ \frac{T}{m_1} + \frac{\zeta(3)m_1^2}{4\pi^3 T^2} \right]. \quad (\text{B.3})$$

$$\Pi_d^\gamma = \frac{g^2 g'^2}{(g^2 + g'^2)} \left[ \frac{(2 - \xi)T^2}{4} + \frac{\xi T m_W}{2\pi(1 + \xi^{1/2})} (1 + \xi^{1/2} + \xi) + \frac{(eB)^2 T}{2\pi m_W^3} \right] \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{1}{4(1 + \xi^{1/2})^2} \left( -\frac{37}{2} (1 + \xi^{1/2})^2 + \frac{7}{(1 + \xi^{1/2})^2} + \frac{13}{2(1 + \xi^{1/2})} + \frac{14}{3} \right) \right. \\ & + \frac{\xi^{1/2}}{(1 + \xi^{1/2})^2} \left( -\frac{15}{8} (1 + \xi^{1/2})^2 + \frac{49}{12(1 + \xi^{1/2})^2} + \frac{27}{4(1 + \xi^{1/2})} + \frac{13}{3} \right) \\ & + \frac{\xi}{(1 + \xi^{1/2})^2} \left( \frac{49}{12(1 + \xi^{1/2})^2} + \frac{53}{8(1 + \xi^{1/2})} + 5 \right) \\ & \left. + \frac{\xi^{3/2}}{2(1 + \xi^{1/2})^2} \left( \frac{7}{2(1 + \xi^{1/2})^2} + 5 \right) \right] - \frac{157(eB)^2 \zeta(3)}{384\pi^4 T^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\Pi_e^\gamma = \frac{g^2 g'^2}{(g^2 + g'^2)} \left( \frac{T^2}{6} + \frac{(eB)^2 \zeta(3)}{64\pi^4 T^2} \right). \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \Pi_f^\gamma &= \frac{g^2 g'^2}{(g^2 + g'^2)} \left[ \frac{4T^2}{9} - \frac{2m_t^2}{3\pi^2} \ln \left( \frac{4m_W}{T} \right) \right. \\ & \left. + \frac{7(eB)^2 \zeta(3)}{81\pi^4 T^2} - \frac{31(eB)^2 m_t^2 \zeta(5)}{108\pi^6 T^4} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\Pi_g^\gamma = -\frac{g^2 g'^2}{(g^2 + g'^2)} \left( \frac{T^2}{12} + \frac{(eB)^2 \zeta(3)}{128\pi^4 T^2} \right). \quad (\text{B.8})$$

## B.2. Auto-energías del bosón de norma neutro ( $Z$ )

$$\begin{aligned} \Pi_a^Z &= \left( \frac{g^4}{g^2 + g'^2} \right) \left\{ \frac{(1 + \xi)T^2}{4} - \left( \frac{4 + 2\xi^{3/2}}{4\pi} \right) T m_W \right. \\ & \left. + \frac{(eB)^2}{16\pi m_W^2} \left[ \left( \frac{23 - 2\xi^{1/2}}{3\xi^{1/2}} \right) \frac{T}{m_W} + \frac{7\zeta(3) m_W^2}{4\pi^3 T^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \Pi_b^Z &= -\frac{(g^6 + 3g^4 g'^2 + 5g^2 g'^4 + g'^6) m_W^2}{8g^2 (g^2 + g'^2) \pi^2} \ln \left( \frac{m_W}{T} \right) \\ & - \frac{T m_W^2}{4\pi(m_4 + m_Z)} \left( \frac{2g'^4}{(g^2 + g'^2)} \frac{(m_4 + m_Z)}{(m_1 + m_W)} + \frac{(g^2 + g'^2)^2}{g^2} \right) \\ & + \frac{g'^4 m_W^2 (eB)^2}{(g^2 + g'^2)(m_1 + m_W)^4} \left[ \frac{T}{48\pi m_1} \left( 7 - \frac{m_1^3}{m_W^3} - 68 \frac{m_1^2}{m_W^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - 53 \frac{m_1}{m_W} + 4 \frac{m_W}{m_1} + \frac{m_W^2}{m_1^2} - \frac{12}{\xi^{1/2}} \frac{m_1(m_1 + m_W)^4}{m_W^3 (m_1 + \xi^{1/2} m_W)^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{7\zeta(5)}{512\pi^6} \frac{(m_1 + m_W)^4}{T^4} \right]. \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \Pi_c^Z &= \frac{g^4 + g'^4}{g^2 + g'^2} \frac{T^2}{12} - \left[ \frac{2(g^2 - g'^2)^2 m_1 + (g^2 + g'^2)^2 (m_3 + m_4)}{g^2 + g'^2} \right] \frac{T}{16\pi} \\ &\quad - \frac{(g^2 - g'^2)^2}{g^2 + g'^2} \frac{(eB)^2}{192\pi m_1^2} \left[ \frac{T}{m_1} + \frac{\zeta(3)}{4\pi^3} \frac{m_1^2}{T^2} \right]. \\ \Pi_d^Z &= \frac{g^4}{g^2 + g'^2} \left\{ \left( 1 - \frac{\xi}{2} \right) \frac{T^2}{2} + \frac{\xi(1 + \xi^{1/2} + \xi)}{2\pi(1 + \xi^{1/2})} T m_W \right. \\ &\quad + \frac{1}{16\pi} \left[ \frac{14}{(1 + \xi^{1/2})^4} \left( 1 + \frac{7}{3}\xi^{1/2} + \frac{7}{3}\xi + \xi^{3/2} \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{(1 + \xi^{1/2})^3} (13 + 54\xi^{1/2} + 53\xi) \\ &\quad + \left. \frac{8}{(1 + \xi^{1/2})^2} \left( \frac{7}{6} + \frac{13\xi^{1/2}}{3} + 5\xi + \frac{5\xi^{3/2}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - (37 + 15\xi^{1/2}) - \frac{157\zeta(3)}{24\pi^3} \frac{m_W^3}{T^3} \right] \frac{(eB)^2 T}{m_W^3} \right\}. \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

$$\Pi_e^Z = \left( \frac{g^4 + g'^4}{g^2 + g'^2} \right) \frac{T^2}{12} + \frac{(g^2 - g'^2)^2}{g^2 + g'^2} \frac{\zeta(3)}{256\pi^4} \frac{(eB)^2}{T^2}. \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \Pi_f^Z &= \frac{g'^2(3g^2 - g'^2)}{6(g^2 + g'^2)} \frac{m_t^2}{\pi^2} \ln \left( \frac{4m_W}{T} \right) \\ &\quad + \left( \frac{4g^4}{9(g^2 + g'^2)} - \frac{g'^2}{3} + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2) \right) \\ &\quad \left\{ T^2 - \frac{(eB)^2}{T^2} \left[ \frac{31\zeta(5)}{48\pi^6} \frac{m_t^2}{T^2} - \frac{7\zeta(3)}{36\pi^4} \right] \right\}. \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

$$\Pi_g^Z = -\frac{g^4}{(g^2 + g'^2)} \left[ \frac{T^2}{12} + \frac{\zeta(3)}{128\pi^4} \frac{(eB)^2}{T^2} \right]. \quad (\text{B.14})$$

### B.3. Auto-energías del bosón de norma cargado ( $W$ )

$$\begin{aligned} \Pi_a^W &= 2g^2 T^2 (\xi + 1) - \frac{(2 + \xi^{3/2})g^2 T}{4\pi(g^2 + g'^2)} \left( (g^2 + g'^2) m_W + g^2 m_Z + g'^2 m_\gamma \right) \\ &\quad - \frac{g^2 (eB)^2}{128\pi m_W^2} \left( \frac{4T}{3m_W} \left( 2 - \frac{23}{\xi^{1/2}} \right) + \frac{7\zeta(3)m_W^2}{\pi^3 T^2} \right). \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_b^W = & -\frac{(g^2 + g'^2) m_W^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{m_W}{T}\right) \\
& -\frac{T m_W^2}{4\pi (g^2 + g'^2)} \left( \frac{g^2 (g^2 + g'^2)}{m_4 + m_W} + \frac{g'^4}{m_1 + m_Z} + \frac{g^2 g'^2}{m_1 + m_\gamma} \right) \\
& + (eB)^2 T \left[ -\frac{g^2 m_W}{48\pi (m_4 + m_W)^4} \left( \frac{m_4^2}{m_W^2} + \frac{4m_4}{m_W} + 1 \right) \right. \\
& -\frac{7g^2}{32\pi (m_4 + m_W)^3} \left( \frac{m_4}{m_W} + 3 \right) \\
& + \frac{g^2}{8\pi m_W} \left( \frac{1}{(m_4 + m_W)^2} - \frac{1}{\xi^{1/2} (m_4 + \xi^{1/2} m_W)^2} \right) \\
& -\frac{g'^4 m_W^2}{48\pi m_1 (g^2 + g'^2) (m_1 + m_Z)^4} \left( 1 + \frac{4m_Z}{m_1} + \frac{m_Z^2}{m_1^2} \right) \\
& + \frac{g'^4 m_W^2}{32 (g^2 + g'^2) \pi m_1^2 (m_1 + m_Z)^3} \left( 3 + \frac{m_Z}{m_1} \right) \\
& -\frac{g^2 g'^2 m_W^2}{48 (g^2 + g'^2) \pi m_1 (m_1 + m_\gamma)^4} \left( 1 + \frac{4m_\gamma}{m_1} + \frac{m_\gamma^2}{m_1^2} \right) \\
& + \left. \frac{g^2 g'^2 m_W^2}{32 (g^2 + g'^2) \pi m_1^2 (m_1 + m_\gamma)^3} \left( 3 + \frac{m_\gamma}{m_1} \right) \right] \\
& + \frac{(eB)^2 m_W^2 \zeta(5)}{2048\pi^6 T^4} (g'^4 - 15g^4 - 14g^2 g'^2). \tag{B.16}
\end{aligned}$$

$$\Pi_c^W = \frac{g^2 T^2}{12} - \frac{g^2 T}{16\pi} (2m_1 + m_3 + m_4) - \frac{g^2 (eB)^2}{192\pi m_1^2} \left( \frac{T}{m_1} + \frac{\zeta(3) m_1^2}{4\pi^3 T^2} \right). \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_d^W = & \frac{T^2 g^2}{4} (2 - \xi) + \frac{T}{4\pi (g^2 + g'^2)} \left[ -\frac{g^4}{(m_W + m_Z)} \left( \frac{m_W^4}{m_Z^2} + \frac{m_W^3}{m_Z} + \frac{m_Z^3}{m_W} + \frac{m_Z^4}{m_W^2} \right) \right. \\
& + \frac{g^4}{(\xi m_W^2 - m_Z^2)} \left( \xi^{5/2} (m_W^3 - m_Z^3) + \frac{m_W^5}{m_Z^2} - \frac{m_Z^5}{m_W^2} \right) \\
& - \frac{g^2 g'^2}{(m_W + m_\gamma)} \left( \frac{m_W^4}{m_\gamma^2} + \frac{m_W^3}{m_\gamma} + \frac{m_\gamma^3}{m_W} + \frac{m_\gamma^4}{m_W^2} \right) \\
& + \frac{g^2 g'^2}{(\xi m_W^2 - m_\gamma^2)} \left( \xi^{5/2} m_W^3 - \frac{m_\gamma^5}{m_W^2} \right) + \frac{g^2 g'^2}{(\xi m_\gamma^2 - m_W^2)} \left( \xi^{5/2} m_\gamma^3 - \frac{m_W^5}{m_\gamma^2} \right) \left. \right] \\
& + \frac{(eB)^2 T}{\pi (g^2 + g'^2)} \left[ -\frac{g^4}{(m_W + m_Z)^4} \left( \frac{3m_W}{4} + \frac{5m_W^3}{48m_Z^2} + \frac{5m_W^2}{12m_Z} + \frac{11m_Z}{12} + \frac{13m_Z^2}{16m_W} \right) \right. \\
& + \left. \frac{m_Z^3}{3m_W^2} \right] - \frac{g^4}{(m_W + m_Z)^3} \left( \frac{185}{96} + \frac{21m_W^2}{32m_Z^2} + \frac{63m_W}{32m_Z} + \frac{17m_Z}{32m_W} - \frac{m_Z^2}{4m_W^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{g^4}{(m_W + m_Z)^2} \left( \frac{1}{3m_W} + \frac{3m_W}{8m_Z^2} + \frac{3}{4m_Z} - \frac{m_Z}{12m_W^2} \right) \\
& +\frac{g^4}{(m_W + \xi^{1/2}m_Z)^3} \left( \frac{7\xi}{4} + \frac{21m_W^2}{32m_Z^2} + \frac{63\xi^{1/2}m_W}{32m_Z} \right) \\
& +\frac{g^4}{(\xi^{1/2}m_W + m_Z)^4} \left( \frac{5\xi^{3/2}m_W}{48} + \frac{5\xi m_Z}{12} + \frac{29\xi^{1/2}m_Z^2}{48m_W} + \frac{m_Z^3}{3m_W^2} \right) \\
& -\frac{g^4}{(\xi^{1/2}m_W + m_Z)^3} \left( \frac{3\xi}{32} + \frac{9\xi^{1/2}m_Z}{32m_W} + \frac{m_Z^2}{4m_W^2} \right) \\
& +\frac{g^4}{(\xi^{1/2}m_W + m_Z)^2} \left( \frac{\xi^{1/2}}{3m_W} + \frac{3\xi^{3/2}m_W}{8m_Z^2} + \frac{3\xi}{4m_Z} - \frac{m_Z}{12m_W^2} \right) \\
& +\frac{g^4}{(m_W + \xi^{1/2}m_Z)^4} \left( \frac{29\xi m_W}{48} + \frac{5m_W^3}{48m_Z^2} + \frac{5\xi^{1/2}m_W^2}{12m_Z} + \frac{\xi^{3/2}m_Z}{3} \right) \\
& +\frac{g^4}{(m_W + \xi^{1/2}m_Z)^2} \left( \frac{\xi}{2m_W} + \frac{3m_W}{8m_Z^2} + \frac{3\xi^{1/2}}{4m_Z} + \frac{\xi^{3/2}m_Z}{4m_W^2} \right) \\
& -\frac{g^4}{(\xi^{1/2}m_W + \xi^{1/2}m_Z)^2} \left( \frac{\xi^{3/2}}{2m_W} + \frac{3\xi^{3/2}m_W}{8m_Z^2} + \frac{3\xi^{3/2}}{4m_Z} + \frac{\xi^{3/2}m_Z}{4m_W^2} \right) \\
& -\frac{g^2 g'^2}{(m_W + m_\gamma)^4} \left( \frac{3m_W}{4} + \frac{5m_W^3}{48m_\gamma^2} + \frac{5m_W^2}{12m_\gamma} + \frac{11m_\gamma}{12} + \frac{13m_\gamma^2}{16m_W} + \frac{m_\gamma^3}{3m_W^2} \right) \\
& -\frac{g^2 g'^2}{(m_W + m_\gamma)^3} \left( \frac{185}{96} + \frac{21m_W^2}{32m_\gamma^2} + \frac{63m_W}{32m_\gamma} + \frac{17m_\gamma}{32m_W} - \frac{m_\gamma^2}{4m_W^2} \right) \\
& -\frac{g^2 g'^2}{(m_W + m_\gamma)^2} \left( \frac{1}{3m_W} + \frac{3m_W}{8m_\gamma^2} + \frac{3}{4m_\gamma} - \frac{m_\gamma}{12m_W^2} \right) \\
& +\frac{g^2 g'^2}{(\xi^{1/2}m_W + m_\gamma)^4} \left( \frac{5\xi^{3/2}m_W}{48} + \frac{5\xi m_\gamma}{12} + \frac{29\xi^{1/2}m_\gamma^2}{48m_W} + \frac{m_\gamma^3}{3m_W^2} \right) \\
& +\frac{g^2 g'^2}{(\xi^{1/2}m_W + m_\gamma)^2} \left( \frac{\xi^{1/2}}{3m_W} + \frac{3\xi^{3/2}m_W}{8m_\gamma^2} + \frac{3\xi}{4m_\gamma} - \frac{m_\gamma}{12m_W^2} \right) \\
& +\frac{g^2 g'^2}{(m_W + \xi^{1/2}m_\gamma)^4} \left( \frac{29\xi m_W}{48} + \frac{5m_W^3}{48m_\gamma^2} + \frac{5\xi^{1/2}m_W^2}{12m_\gamma} + \frac{\xi^{3/2}m_\gamma}{3} \right) \\
& -\frac{g^2 g'^2}{(\xi^{1/2}m_W + m_\gamma)^3} \left( \frac{3\xi}{32} + \frac{9\xi^{1/2}m_\gamma}{32m_W} + \frac{m_\gamma^2}{4m_W^2} \right) \\
& +\frac{g^2 g'^2}{(m_W + \xi^{1/2}m_\gamma)^3} \left( \frac{7\xi}{4} + \frac{21m_W^2}{32m_\gamma^2} + \frac{63\xi^{1/2}m_W}{32m_\gamma} \right) \\
& +\frac{g^2 g'^2}{(m_W + \xi^{1/2}m_\gamma)^2} \left( \frac{\xi}{2m_W} + \frac{3m_W}{8m_\gamma^2} + \frac{3\xi^{1/2}}{4m_\gamma} + \frac{\xi^{3/2}m_\gamma}{4m_W^2} \right)
\end{aligned}$$

$$-\frac{g^2 g'^2 \xi^{1/2}}{(m_W + m_\gamma)^2} \left( \frac{1}{2m_W} + \frac{3m_W}{8m_\gamma^2} + \frac{3}{4m_\gamma} + \frac{m_\gamma}{4m_W^2} \right) \Big] - \frac{109(eB)^2 \zeta(3) g^2}{768T^2 \pi^4}. \quad (\text{B.18})$$

$$\Pi_e^W = \frac{g^2 T^2}{12} + \frac{(eB)^2 g^2 \zeta(3)}{256\pi^4 T^2}. \quad (\text{B.19})$$

$$\Pi_f^W = \frac{g^2 T^2}{4} + \frac{(eB)^2 g^2}{\pi^4 T^2} \left( \frac{133\zeta(3)}{2304} - \frac{31\zeta(5)(m_b^2 + 4m_t^2)}{1536\pi^2 T^2} \right).$$

$$\Pi_g^W = -\frac{g^2 T^2}{12} - \frac{g^2 (eB)^2 \zeta(3)}{256\pi^4 T^2}. \quad (\text{B.20})$$

# Apéndice C

## Auto-energía de los fantasmas en una norma arbitraria

En este apéndice, listamos los resultados obtenidos para las auto-energías de los diagramas representados en la Fig. 6.4.

### C.1. Auto-energías del bosón $\gamma$ asociadas al fantasma ( $\eta_\gamma$ )

$$\Pi_a^{\eta_\gamma} = \Pi_b^{\eta_\gamma} = 0. \quad (\text{C.1})$$

### C.2. Auto-energías del bosón $Z$ asociadas al fantasma ( $\eta_Z$ )

$$\Pi_a^{\eta_Z} = 0. \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \Pi_b^{\eta_Z} = & \frac{g(g^2 - g'^2)}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \frac{\xi^2 T m_Z}{8\pi} \left( \frac{m_W}{m_1 + \xi^{1/2} m_W} \right. \\ & - \frac{(g^2 + g'^2)^{3/2}}{g(g^2 - g'^2)} \frac{m_Z}{2(m_4 + \xi^{1/2} m_Z)} \\ & \left. - (eB)^2 \frac{\xi^{1/2} (m_1^2 + \xi^{1/2} m_1 m_W + \xi m_W^2)}{96 m_1^3 m_W^2 (m_1 + \xi^{1/2} m_W)} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

### C.3. Auto-energías del bosón $W$ asociadas al fantasma ( $\eta_W$ )

$$\Pi_a^{\eta_W} = 0. \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \Pi_b^{\eta_W} = & \frac{g^2 \xi^2 T m_W}{16\pi} \left[ \frac{m_W}{m_3 + \xi^{1/2} m_W} - \frac{m_W}{m_4 + \xi^{1/2} m_W} \right. \\ & \left. + \frac{g^2 - g'^2}{g(g^2 + g'^2)^{1/2}} \frac{m_Z}{m_1 + \xi^{1/2} m_Z} \right] \\ & + (eB)^2 \frac{g^2 \xi^{1/2} T m_W}{384\pi} \left[ \frac{(m_4^2 + 4\xi^{1/2} m_4 m_W + 7\xi m_W^2)}{m_W^2 (m_4 + \xi^{1/2} m_W)^4} \right. \\ & - \frac{(g^2 - g'^2)}{g(g^2 + g'^2)^{1/2}} \frac{\xi^{3/2} m_Z (7m_1^2 + 4\xi^{1/2} m_1 m_Z + \xi m_Z^2)}{m_1^3 (m_1 + \xi^{1/2} m_Z)^4} \\ & \left. + \frac{2(m_3^2 + 4\xi^{1/2} m_3 m_W + \xi m_W^2)}{m_W^2 (m_3 + \xi^{1/2} m_W)^4} - \frac{3(m_3 + 3\xi^{1/2} m_W)}{m_W^2 (m_3 + \xi^{1/2} m_W)^3} \right]. \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] A. Sánchez, A. Ayala and G. Piccinelli, Phys. Rev. D **75** (2007) 043004.
- [2] M. Giovannini and M. E. Shaposhnikov, Phys. Rev. D **57** (1998) 2186.
- [3] P. Elmfors, K. Enqvist and K. Kainulainen, Phys. Lett. B **440** (1998) 269.
- [4] K. Kajantie, M. Laine, J. Peisa, K. Rummukainen and M. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **544** (1999) 357.
- [5] V. Skalozub and V. Demchik, Electroweak phase transition in strong magnetic fields in the Standard Model of elementary particles; hep-th/9912071; V. Skalozub and M. Bordag, Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000) 349.
- [6] M. E. Carrington, Phys. Rev. D **45** (1992) 2933.
- [7] B. D. Fields and S. Sarkar. J.Phys.G **33** (2006) 1, astro-ph/0601514; B. D. Fields and S. Sarkar, astro-ph/0406663.
- [8] D. N. Spergel et al. (WMAP Science Team), astro-ph/0603449. SDSS collaboration, Astrophys. J. **606** (2004) 702, astro-ph/0310725; W.J. Percival et al., astro-ph/0608635 and previous SDSS works; S. Dodelson, *Modern Cosmology*. Academic Press, (2003).
- [9] S. Caser and R. Omnes, Phys. Lett. B **39** (1972) 369.
- [10] A. D. Sakharov, JETP Lett. B **91** (1967) 24.
- [11] G. t Hooft, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 37; G. t Hooft, Phys. Rev. D **14** (1976) 3432.
- [12] V. Kuzmin, V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **155** (1985) 36; J. Ambjrn, T. Askgaard, H. Porter and M.E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **353** (1991) 346; P. Arnold, D. Son and L.G. Yaffe, Phys. Rev. D **55** 6264 (1997), hep-ph/9609481.
- [13] N.S. Manton, Phys. Rev. D **28** (1983) 2019.

- [14] M. Giorgi, M. S. Sozzi, A. I. Sanda, I. Mannelli, F. Costantini, (Editors). Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”. *CP violation: From quarks to Leptons* (2006) page 5.
- [15] M. E. Shaposhnikov. Nucl. Phys B **287** (1987) 757.
- [16] G. Piccinelli and A. Ayala. Lect. notes Phys. **646** (2004) 293; J. M. Cline, hep-ph/0609145; N. Petropoulos, hep-ph/0304275.
- [17] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. Shaposhnikov. Nucl. Phys. B **466** (1996) 189.
- [18] R. Barate et al, (LEP Working Group for Higgs boson searches), Phys. Lett. B **565** (2003) 61.
- [19] A. D. Dolgov, Phys. Rept., **222** (1992) 309.
- [20] M. Carena, M. Quiros and C. E. Wagner, Phys. Lett. B **380** (1996) 81; Nucl. Phys. B **524** (1998) 3; J. M. Cline and G. D. Moore, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 3315.
- [21] M. Carena, M. Quiros, M. Seco and C. E. Wagner, Nucl. Phys. B **650** (2003) 24.
- [22] S. Fukuda et al. [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Lett. B **539** (2002) 179; B. Aharmim et al. [SNO Collaboration], Phys. Rev. C **72** (2005) 055502 ; Y. Ashie et al. [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. D **71** (2005) 112005.
- [23] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, *Supergravity*, p. 315, edited by F. Van Nieuwenhuizen and D. Freedman, North Holland, Amsterdam, (1979); T. Yanagida, Proc. of the Workshop on Unified Theory and the Baryon Number of the Universe, KEK, Japan, (1979); R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 912.
- [24] M. Fukugita and T. Yanagida, Phys. Lett. B **174** 45 (1986); M. A. Luty, Phys. Rev. D **45**, 455 (1992).
- [25] S. Davidson, E. Nardi and Y. Nir, hep-ph/0802.2962.
- [26] S. Ando and A. Kusenko ApJ **722** (2010) L39; K. Enqvist, Int. J. Mod. Phys. D **7** (1998) 331, astro-ph/9803196; D. Grasso and H. R. Rubinstein, Phys. Rept. **348** (2001) 163, astro-ph/0009061.
- [27] J. D. Barrow, P. Ferreira and J. Silk, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 3610; D. G. Yamazaki, K. Ichiki, T. Kajino and G. J. Mathews, astro-ph/0602224; J. D. Barrow, R. Maartens and C. G. Tsagas, astro-ph/0611537 y referencias ahí citadas; D. Grasso and H. R. Rubinstein, Phys. Lett. **379** (1996) 73.
- [28] P. P. Kronberg, Rept. Prog. Phys. **57** (1994) 325.

- [29] M. S. Turner, L. M. Widrow, Phys. Rev. D **37** (1988) 2743.
- [30] G. Baym, D. Bodeker, L. McLerran, Phys. Rev. D **53** (1986) 662; T. Kahniashvili, A. G. Tevzadze, B. Ratra, astro-ph/0907.0197.
- [31] P. P. Kronberg, Rep. Prog. Phys. **57** (1994) 325; R. Beck, A. Brandenedenburg, D. Moss, A. Shukurov and D. Sokoloff, Annu. Rev. Astron. Astrophysics, **34** (1996) 155; C.L. Carilli and G.B. Taylor, Ann. Rev. Astron. Astrophysics, **40** (2002) 319.
- [32] J. P. Vallee, *Fund. Cosm. Phys.* **19** (1997) 1.
- [33] M. Giovannini and M. E. Shaposhnikov. Phys. Rev. D **57** (1998) 2186.
- [34] D. Grasso, hep-ph/0002197; P. Elmfors, K. Enqvist and K. Kainulainen, Phys. Lett. B**440** (1998) 269.
- [35] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579; S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264; A. Salam, in *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm (Almqvist and Wiksells, Stockholm, 1969), p. 367; S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D**2** (1970) 1285.
- [36] D. Karlen, Plenary talk *Experimental Status of the Standard Model* at the International Conference on High Energy Physics, ICHEP98, Vancouver, July 1998.
- [37] ALEPH, DELPHI, L3, and OPAL Collaborations, LEP Higgs Boson Working Group, *Search for the standard model Higgs boson at LEP*. Phys. Lett. B**565** (2003) 61-75, arXiv:hep-ex/0306033; <http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG>.
- [38] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. B **25** (1967) 29.
- [39] F. Englert and R. Brout. Phys.Rev.Lett. **13** (1964) 321; P. W. Higgs. Physics Letters **12** (1964) 132; P. W. Higgs. Phys.Rev.Lett. **13** (1964) 508.
- [40] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **33** (1971) 173; G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **35** (1971) 167; B. W. Lee K. Fujikawa and Sanda, Phys. Rev. D **6** (1972) 2923.
- [41] R. P. Feynman, Acta Phys. Polon. **24** (1963) 697.
- [42] K. I. Aoki, Z. Hioki, R. Kawabe, M. Konuma and T. Mutua, *Supplement of the Progress of theoretical Physics*, No. **73** 1982.
- [43] S. R. Coleman and E. Weinberg, Radiative Corrections As The Origin Of Spontaneous Symmetry Breaking, Phys. Rev. D **7** (1973) 188; S. Coleman, *Aspects of symmetry: Selected Erice lectures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [44] N. K. Nielsen, Nucl. Phys. B **101** (1975) 173.
- [45] J. Schwinger, Phys. Rev. **82** (1951) 664.

- [46] A. Erdas and G. Feldman. *Nucle. Phys. B* **343** (1990) 397.
- [47] A. Ayala, A. Sánchez, G. Piccinelli and S. Sahu, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 023004; D. Grasso and H.R. Rubinstein, *Phys. Lett.* **73** (1996) 379.
- [48] T. K. Chyi, C. W. Hwang, W. F. Kao, G.L. Lin, K. W. Ng and J. J. Tseng, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 105014.
- [49] M. E. Tejeda-Yeomans, J. Navarro, A. Sanchez, G. Piccinelli and A. Ayala, *AIP Conf. Proc.* **1026** (2008) 182.
- [50] J. C. D’Olivo, J. F. Nieves and S. Sahu. *Phys. Rev. D* **67** (2003) 025018.
- [51] V. V. Usov. *Astrophys. J.* **572** (2002) L87.
- [52] C. N. Leung, S. Y. Wang. *Nucl. Phys. B* **747** (2006) 266.
- [53] Maxim Dvornikov and Jukka Maalampi. *Phys. Rev. D* **79** (2009) 113015; A. Cisneros, *Astrophys. Space Sci.* **10** (1971) 87; M. B. Voloshin, M. I. Vysotskii, and L. B. Okun, *Sov. Phys. JETP* **64** (1986) 446.
- [54] R. Maartens, *Pramana* **55** (2000) 575; D. Grasso and H.R Rubinstein, *Phys. Lett. B* **379** (1996) 73.
- [55] J. Ambjrn and P. Olesen, *Nucl. Phys. B* **315** (1989) 606.
- [56] N. P. Landsman and Ch. G. van Weert, *Phys. Rep.* **145** (1987) 141;
- [57] J. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, 1989.
- [58] R. C. Tolman, *The Principles of Statistical Mechanics*, Oxford University Press, 1938.
- [59] S. Ichimaru, *Plasma Physics, An Introduction to Statistical Physics of Charged Particles* (Benjamin-Cummings, Menlo Park, 1986); E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [60] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. McGraw-Hill, New York, 1971.
- [61] Y. Takahashi, H. Umezawa, *Collective Phenomena 2* (1975) 55.
- [62] Hong-Hua Xu. *Phys. Rev. D* **47** (1993) 2622.
- [63] T. Matsubara, *Prog. Theor. Phys.* **14** (1955) 351.
- [64] J. Schwinger, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 407.
- [65] R. Mills, *Propagators for Many-Particle Systems*. Gordon and Breach, New York (1969).

- [66] L. V. Keldysh, *Sov. Phys.* **20** (1964) 1018.
- [67] K. Enqvist and K. Eskola, *Mod. Phys. Lett. A* **5** (1990) 1919.
- [68] J. C. Mather et al., *Astrophys. J.* 354 (1990) L37; G. F. Smoot et al., *Astrophys. J.* 396 (1992) L1.
- [69] S. Weinberg, *Cosmology and Gravitation*. McGraw-Hill, New York, 1970.
- [70] C. W. Bernard, *Phys. Rev. D* **12** (1974) 3312; A. Linde, *Rep. Prog. Phys.* **42** (1979) 389.
- [71] T. Altherr and K. Kainulainen, *Phys. Lett. B* **262** (1991) 79; E. Braaten and T. C. Yuan, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 2183.
- [72] T. Altherr and U. Kraemmer, *Astroparticle Phys.* **1** (1992) 133; E. Braaten and D. Segel, Northwestern Univ. preprint NUHEP-TH-93-1.
- [73] J. Cleymans, R. V. Gavai and E. Suhonen, *Phys. Rep.* **130** (1986) 217.
- [74] H. Satz, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **35** (1985) 245.
- [75] B. Muller and J. L. Nagle, *Annu. Rev. Nucl. and Part. Phys.* (2006) 1. *nucl-th/0602029*; B. Muller. *nucl-th/0508062*.
- [76] E. Braaten and R. D. Pisarski, *Nucl. Phys.* **B337** (1990) 569; **B339** (1990) 310.
- [77] M. Le Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [78] H. A. Weldon, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 594.
- [79] A. Sánchez, A. Ayala and G. Piccinelli, *Phys. Rev. D* **75** (2007) 043004.
- [80] B. Davies. *Integral Transforms and their Applications*. Springer-Verlag, 2002; L. Debnath and D. Bhatta. *Integral Transforms and Their Applications*. Chapman and Hall/CRC, 2007.
- [81] D. J. Bedingham. *hep-ph/0011012*.
- [82] M. Peskin and D. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [83] A. Ayala, G. Piccinelli, A. Sánchez, and M.E. Tejeda-Yeomans, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 096001 .
- [84] G. Metikas. *Uniqueness of the thermal effective potential*, *hep-th/9910063*.
- [85] N. Sadooghi and K. Sohrabi Anaraki, *Phys. Rev. D.* **78** (2008) 125019.
- [86] J. F. Nieves and P. B. Pal, *Phys. Rev. D.* **39** (1989) 652.

- 
- [87] L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. D **9** (1974) 3320.
- [88] P. Arnold and O. Espinosa, Phys. Rev. D **47** (1993) 3546.
- [89] A. Ayala, A. Bashir, A. Raya, and A. Sánchez, Phys. Rev. D **80** (2009) 036005.