UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

APLICACIÓN DE NÚMEROS BORROSOS A PARÁMETROS DE ALGUNAS VARIABLES BORROSO ALEATORIAS DISCRETAS Y CONTINUAS MÁS USUALES EN PROBABILIDAD

TESINA

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA

ALEJANDRA IVONNE GONZÁLEZ VENANCIO

ASESOR: MTRO. MIGUEL ANGEL SÁNCHEZ BARQUÍN

AGOSTO 2010

Este trabajo representa más que la conclusión de un objetivo, el alcance de una meta, que no hubiera sido posible sin el apoyo de mi familia y amigos, a quienes dedico este trabajo y les digo GRACIAS por su apoyo, confianza y cariño...

Índice

0. Introducción

La lógica difusa es una de las disciplinas de las matemáticas que ha cobrado gran auge en años recientes. No obstante que las primeras investigaciones sobre lógica difusa son de mediados de los años 70's, ésta ha tenido un importante desarrollo teórico y amplias aplicaciones a distintos campos de la ciencia.
Es importante resaltar que, en un primer contacto con el término "*difuso*", éste puede inducirnos al concepto de vaguedad o poca claridad, lo cual es erróneo y por el contrario, existe una serie de fundamentos bien definidos en esta rama de las matemáticas.

A mediados de los años 70's surgieron las primeras investigaciones de la lógica difusa, hechas en California por el profesor de la Universidad de Berkeley en California, Lofti A. Zadeh, uno de sus principales impulsores. Existe antecedente de que antes de 1965 ya se hablaba de una lógica multivalente en un intento por despejar las paradojas de la lógica clásica, que se sostiene en la idea de que toda afirmación lógica debe ser o cierta o falsa. Lo estricto de la afirmación anterior no es aplicable a la vida o sucesos cotidianos, en donde también son admisibles los *grados de veracidad*. Es por lo anterior, que la lógica difusa introduce la idea de que, en términos de conjuntos, un elemento x de un conjunto A, no puede pertenecer totalmente o estar excluído totalmente de dicho conjunto, sino que puede asociársele un determinado *grado de pertenencia* al conjunto.
En este sentido, la lógica tadicional queda incorporada como un caso particular de la lógica difusa o borrosa, o bien, la lógica borrosa es una extención de la lógica convencional, que incluye la incertidumbre hallada entre los límites de la verdad total y la falsedad total.

Con lo anteriormente expuesto, el principio de inclusión propuesto por la lógica clásica, en los que un elemento pertenece o no pertenece, sin términos medios a un conjunto clásico o *crisp*, recibe una contribución importante con las teorías desarrolladas por Zadeh, en las que combina las teorías axiomáticas de la probabilidad, estadística y teoría de conjuntos clásica con el concepto de conjunto *borroso*, que establece bases y le da formalidad a la lógica difusa. El manejo de los conceptos conjunto *difuso* y su *función de pertenecia* constituyen una importante aportación de la lógica borrosa en el manejo de problemas con información imprecisa, ya que existe un gran número de situaciones que no precisan como respuesta un número, sino una etiqueta lingüistica (aproximadamente 5, muy frío, etc.) que facilitan más la comprensión acorde al razonamiento humano.

En este contexto, en el que se expone la utilidad de la lógica difusa para tratar problemas en los que la información con que se cuenta es imprecisa, resulta inminente incorporar al cálculo herramientas usuales como lo es la Teoría de Probabilidad. Es importante mencionar la diferencia que existe entre el cálculo de probabilidades clásico y el objetivo de la lógica difusa; la primera trata de la incertidumbre de la ocurrenacia de sucesos bien definidos mientras que la segunda trata el grado de ocurrencia de sucesos no tan bien deifnidos. Es la fusión de herramientas de ambas teorías en las que se concentra el objetivo de esta tesina, al presentar la modelización de variables aleatorias más usuales en Probabilidad Clásica utilizando subconjuntos borrosos para sus parámetros. La solución de determinados problemas requiere que la aleatoriedad y borrosidad sean tratadas de manera conjunta para poderlo representar de una manera coherente. La fusión de fundamentos de ambas teorías permite la conservación de la información durante la modelización del problema, debido a que los datos son tratados con operadores *flexibles* o "*blandos*" como el máx-mín y el operador suma-producto, y a la vez permiten realizar operaciones de manera sencilla.

El presente trabajo explora algunas de la herramientas dedicadas al tratamiento de datos borroso-aleatorios, particularmente las variables aleatorias con media y varianza cuantificada a través de números borrosos.

1. Conceptos Básicos de la Teoría de Conjuntos Borrosos

1.1. Conjunto Borroso

Un conjunto clásico *(crisp)* se define intuitivamente como una colección de elementos u objetos $x \in X$; los conjuntos a su vez se clasifican en finitos, numerables o no numerables. Cada uno de los elementos puede pertenecer o no pertenecer al conjunto $A,\ A \subseteq X$. Según lo anterior, la sentencia "x pertenece a X" es verdadera o falsa respectivamente.

Un conjunto clásico puede definirse de diferentes maneras:

- pueden enumerarse o enlistar los elementos que pertenecen al conjunto;
- describir el conjunto analíticamente, por ejemplo, establecer las condiciones de los elementos ($A = \{x : x \leq 5\}$); o bien
- definir los elementos del conjunto usando la función indicadora, en la cual 1 indica la pertenencia al conjunto y 0 la no pertenencia.

Para un conjunto borroso, la función que permite diversos grados de pertenencia para los elementos de un conjunto dado se suele llamar función de pertenencia; en otras palabras, la cuestión de pertenencia de un elemento al conjunto no es un opción dicotómica de pertenecer o no (de cierto o falso), sino que son posibles diferentes grados de pertenencia. La función de pertenencia puede tomar cualquier valor en el intervalo real $[0, 1]$.

1.1.1. Definición y concepto

Si X es una colección de objetos denotados generalmente como x, entonces un conjunto difuso o borroso $\widetilde{A}$ en X es un conjunto de pares ordenados:

$$\widetilde{A} = \big\{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) : x \in X)\big\}$$

$\mu_{\widetilde{A}}(x)$ es llamada función de pertenencia, función característica[1] o grado de pertenencia (o bien, grado de verdad o de compatibilidad) de x en $\widetilde{A}$ que mapea X al espacio de pertenencia M. Cuando M contiene solamente los dos puntos 0 y 1, $\widetilde{A}$ es no borroso y $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ es igual a la función indicadora de un conjunto no borroso.

El rango de la función de pertenencia es un subconjunto de los números reales no negativos cuyo supremo es finito. Los elementos con grado cero de pertenencia,

[1] Aquí adoptaremos la expresión función de pertenencia para no confundir algunas funciones en probabilidad como la función $\varphi_X(t) = E(e^{itX})$ que se denomina función característica de la variable aleatoria X.

normalmente no son listados.

En la literatura se encuentran diferentes maneras de describir o denotar conjuntos borrosos, y puede ser:

- Por medio de pares ordenados, cuyo primer elemento denota al elemento en sí, y el segundo, el grado de pertenencia.

- Representado solamente por la indicación de su función de pertenencia [Negoita and Ralescu, 1975].

- $\widetilde{A} = \mu_{\widetilde{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\widetilde{A}}(x_2)/x_2 \cdots = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\widetilde{A}}(x_i)/x_i$ ó $\int_X \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x)}{x}$

Ejemplo 1.1. Un vendedor quiere clasificar la casa que ofrece a sus clientes. Un indicador de la comodidad de las casas es el número de habitaciones que tiene. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, ..., 10\}$ el conjunto del tipo de casas disponibles en el que x representa el número de habitaciones en la casa. Entonces el conjunto borroso "tipo de casa cómoda para una famila de 4 personas" puede ser descrito como:

$$\widetilde{A} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\}$$

Ejemplo 1.2. Si $\widetilde{A}$ = "números reales cercanos a 10", entonces

$$\widetilde{A} = \left\{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) : \ \mu_{\widetilde{A}} = (1 + (x - 10)^2)^{-1}\right\}$$

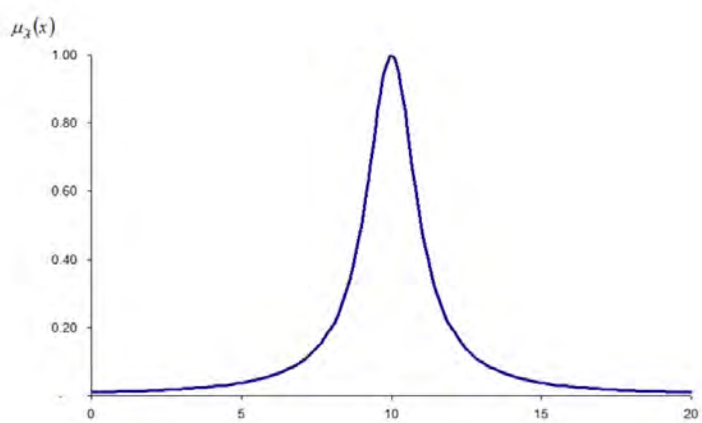


Gráfico1. Números reales cercanos a 10.

Se ha mencionado que la función de pertenencia no es limitada para valores entre 0 y 1. Si $\sup_x \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$, el conjunto borroso $\widetilde{A}$ es llamado normal. Un conjunto borroso no vacío $\widetilde{A}$ siempre puede ser normalizado dividiendo $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ entre $\sup_x \mu_{\widetilde{A}}(x)$: A manera de conveniencia, se generalizará asumir que los conjuntos borrosos son normalizados. Para la representación de conjuntos borrosos, usaré la notación descrita en el Ejemplo 1.2

Como se puede observar un conjunto borroso es una generalización de un conjunto clásico, o bien, un conjunto clásico es un caso particular de un conjunto borroso; en los conjuntos clásicos (crisp) se diferencian dos niveles de pertenencia: la absoluta y la no pertenencia, mientras que en un conjunto borroso podemos hablar además, de niveles o grados de ésta.

Los siguientes conceptos están relacionados con los conjuntos borrosos y serán de utilidad para profundizar en su conocimiento, como uno de los objetivos principales del presente capítulo.

1. El conjunto borroso $\widetilde{A}$ es vacío si $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0 \ \forall x \in X$.

2. El conjunto borroso $\widetilde{A}$ es normal si $\sup_{x \in X} \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$. En este caso, muchos autores consideran que $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ es una "medida" de probabilidad y $\widetilde{A}$ es una distribución de probabilidad.

3. El soporte de un conjunto borroso son aquellos elementos $x \in X$ tales que:

   $$sop(\widetilde{A}) = \left\{x \in X : \ \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\right\}$$

   Podemos considerar el Ejemplo 1.1"tipo de casa cómoda para una familia de cuatro personas" para ilustrar este concepto:

   $$sop(\widetilde{A}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

   Los elementos (tipos de casas) $\{7, 8, 9, 10\}$ no son parte del soporte de $\widetilde{A}$.

   Un concepto más usado y más general es el del $\alpha - corte$ o *conjunto de nivel* α.

4. El conjunto de nivel α o $\alpha - corte$ es el conjunto crisp que contiene aquellos elementos que poseen al menos un nivel de pertenencia α. Para un conjunto borroso $\widetilde{A}$, se denota a este conjunto A_α de la siguiente manera:

   $$A_\alpha = \left\{x \in X : \ \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\right\}$$

   Si se tomaran sólo los valores de x tales que: $A_\alpha = \left\{x \in X : \ \mu_{\widetilde{A}}(x) > \alpha\right\}$ se le llama $\alpha - corte$ *estricto o fuerte.*

5. Definimos como núcleo de un conjunto borroso al α-corte que presenta un grado de verdad igual a 1. Concretamente:

$$nucl(\widetilde{A}) = \left\{x \in X : \ \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1\right\}$$

Ejemplo 1.3. Para ilustrar los conceptos anteriores retomeremos el Ejemplo 1.1 (tipo de casa cómoda para una familia de 4 personas), con una lista de posibles α-cortes del conjunto:

$$A_{0.2} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A_{0.5} = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$A_{0.8} = \{3, 4\}$$
$$A_1 = \{4\}$$

El concepto de *convexidad* también juega un papel importante en la teoría de conjuntos borrosos. En contraste con la teoría clásica de conjuntos, las condiciones de convexidad se definen con referencia a la función de pertenencia.

6. Un conjunto borroso es convexo si $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1]$,

$$\mu_{\widetilde{A}}\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \geq \mu_{\widetilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\widetilde{A}}(x_2)$$

donde $\wedge$ denota el mínimo, en este caso

$$\mu_{\widetilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\widetilde{A}}(x_2) = \min\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{A}}(x_2)\right\}.$$

o bien, $\widetilde{A}$ es convexo si sus α -cortes, A_α son conjuntos convexos.

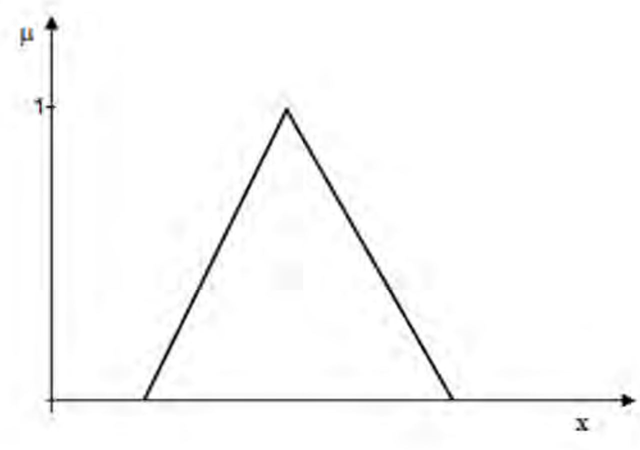


Gráfico 2a. Conjunto borroso convexo

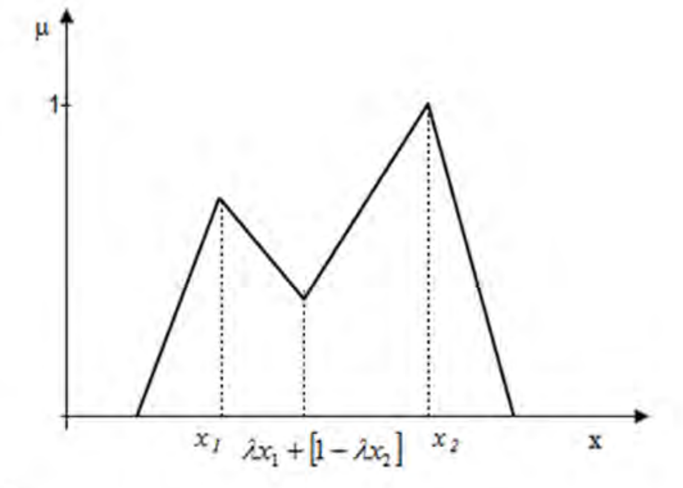


Gráfico 2b. Conjunto borroso no convexo

7. Para un conjunto borroso, la *cardinalidad* se diefine como :

$$\left|\widetilde{A}\right| = \sum_{x \in X} \mu_{\widetilde{A}}(x)$$

$\left\|\widetilde{A}\right\| = \dfrac{\left|\widetilde{A}\right|}{|X|}$ es llamada *cardinalidad relativa.*

Obviamente, la cardinalidad relativa de un conjunto borroso depende de la cardinalidad del universo. Así pues, para comparar la cardinalidad de dos conjuntos borrosos debe tomarse el mismo universo como referencia.

Ejemplo 1.4. Para el conjunto borroso "tipo de casa cómoda para una familia de 4 personas", la cardinalidad es:

$$\left|\widetilde{A}\right| = 0.2 + 0.5 + 0.8 + 1 + 0.7 + 0.3 = 3.5$$

Y la cardinalidad relativa es:

$$\left\|\widetilde{A}\right\| = \frac{3.5}{10} = 0.35$$

Para X infinito, la cardinalidad es definida por:

$$\left\| \widetilde{A} \right\| = \int\limits_{x} \mu_{\widetilde{A}}(x)\, dx.$$

Por supuesto, $\left\| \widetilde{A} \right\|$ no siempre existe.

1.1.2. Operaciones con conjuntos borrosos

La función de pertenencia es obviamente, la componente fundamental de un conjunto borroso. Es por ello, que no es sorprendente que las operaciones con tales conjuntos sean definidas a través de las funciones de pertenencia. Presentando primero, los conceptos sugeridos por Zadeh en 1965, que constituyen un sustento importante para la teoría de conjuntos borrosos.

Diremos que $\widetilde{A}$ en un subconjunto borroso de $\widetilde{B}$, es decir $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$, si

$$\forall x \in X, \quad \mu_{\widetilde{A}}(x) \leq \mu_{\widetilde{B}}(x)$$

La función de pertenencia $\mu_{\widetilde{C}}(x)$ de la *intersección* $\widetilde{C} = \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ es:

$$\mu_{\widetilde{C}}(x) = \text{mín} \left\{ \mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x) \right\}, \quad \forall x \in X$$

La función de pertenencia $\mu_{\widetilde{D}}(x)$ de la *unión* $\widetilde{D} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ se define como:

$$\mu_{\widetilde{D}}(x) = \text{máx} \left\{ \mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x) \right\}, \quad \forall x \in X$$

La función de pertenencia de $\widetilde{A}^c$, *complemento* de un conjunto borroso normalizado $\widetilde{A}$, es definida de la siguiente manera:

$$\mu_{\widetilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x), \quad \forall x \in X$$

Ejemplo 1.5. Sea $\widetilde{A}$ el conjunto borroso "tipo de casa cómoda para una familia de 4 personas", definido en el Ejemplo 1.1 y $\widetilde{B}$ el conjunto borroso "tipo de casa grande" definido así:

$$\widetilde{B} = \{(3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.8), (7, 1), (8, 1)\}$$

La intersección "casas grandes y cómodas" $\widetilde{C} = \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ es:

$$\widetilde{C} = \{(3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.3)\}$$

La unión "casas grandes o cómodas" $\widetilde{D} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ es:

$$\widetilde{D} = \{(1, 0.2), (2, 0.5)(3, 0.8), (4, 0.1), (5, 0.7), (6, 0.8), (7, 1), (8, 1)\}$$

El complemento $\widetilde{B}^c$ "casas no grandes" es:

$$\widetilde{B}^c = \{(1, 1), (2, 1)(3, 0.8), (4, 0.6), (5, 0.4), (6, 0.2), (9, 1), (10, 1)\}$$

Producto cartesiano de conjuntos borrosos: Sean los subconjuntos borrosos

$$\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_n$$

contenidos repsectivamente en los conjuntos referenciales $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Definimos el producto cartesiano de los n conjuntos borrosos $\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times \ldots \times \widetilde{A}_n \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ como:

$$\mu_{\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times \ldots \times \widetilde{A}_n}(x) = \text{mín}\left\{\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2), \ldots, \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)\right\}$$

para toda $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1, X_2, \ldots, X_n$

1.1.3. Principio de Extensión de Zadeh

Es uno de los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos borrosos, y puede ser utilizado para generalizar conceptos de matemática "crisp" a conjuntos borrosos. Fue propuesto por Zadeh (1965) y se trata del principio fundamental en que se sustentan aquellas aplicaciones de los conjuntos borrosos basadas en la extensión de conceptos matemáticos no borrosos cuando los datos de partida son borrosos.

1.1.3.1. Principio de Extensión Generalizado

Sea una aplicación $f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$. Si definimos sobre $X_1, X_2, \ldots, X_n$ los conjuntos borrosos $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_n$ respectivamente, la aplicación f permite defnir un conjunto borroso $\widetilde{B} = f\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_n\right) \subseteq Y$ para el cual su función de pertenencia $\mu_{\widetilde{B}}(y)$ es:

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\ \text{mín}\left\{\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)\right\} & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 1.6. Sea $\widetilde{A} = \{(-1, 0.5), (0, 0.8), (1, 1), (2, 0.4)\}$ y $f(x) = x^2$. Aplicando el principio de extensión, tenemos:

x	$\mu_{\widetilde{A}}(x)$	$y = x^2$	$\mu_{\widetilde{B}}(y)$
-1	0.5	1	1.0
0	0.8	0	0.8
1	1.0	1	1.0
2	0.4	4	0.4

Y el conjunto borroso resultante sería:

$$\widetilde{B} = f(\widetilde{A}) = \{(0, 0.8), (1, 1), (4, 0.4)\}$$

El principio de extensión ha sido reelaborado mediante el uso de la suma algebraica en lugar del supremo, y el producto en lugar del mínimo. Sin embargo, la definición más utilizada sigue siendo la de Zadeh, considerada como la versión "clásica".

1.1.3.2. Principio de Extensión

A partir del principio de extensión generalizado (definido para una función de un produco cartesiano de conjuntos), se puede definir el principio de extensión cuando la imagen inversa consta únicamente de un conjunto, de forma que se evalua una aplicación $f : X \to Y$. Si se define sobre X un subconjunto borroso $\widetilde{A}_1$, $f(\widetilde{A}_1)$ es un subconjunto borroso $\widetilde{B}$ cuya función de pertenencia $\mu_{\widetilde{B}}(y)$ es:

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\widetilde{A}_1}(x) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

1.1.3.3. Aplicación del principio de extensión a través de conjuntos de nivel

En muchas ocasiones, al evaluar una relación funcional entre conjuntos borrosos no será posible operar con sus funciones de pertenencia, pero sí hacerlo con los α-cortes o conjuntos de nivel. Nguyen (1978) demuestra que el principio de extensión puede ser aplicado a través de los α-cortes de los subconjuntos borrosos que forman parte de la imagen inversa. En concreto, dicho autor demuestra que si se parte de la aplicación $f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$ y se definen sobre el conjunto imagen inversa los subconjuntos borrosos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ respectivamente, f induce un subconjunto borroso $\widetilde{B} = f\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_n\right) \subset Y$, cuyos α-cortes, B_α, pueden ser hallados como:

$$B_\alpha = f(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_n)_\alpha = f(\widetilde{A}_{1_\alpha}, \widetilde{A}_{2_\alpha}, , \widetilde{A}_{n_\alpha})$$

1.1.4. Relaciones borrosas binarias

Para dos conjunto X e Y, una relación borrosa en $X \times Y$ será una relacion entre los elementos de dos conjuntos cuyo acaecimiento lleva asociado un determinado nivel de verdad. Dicha relación viene dada por:

$$\widetilde{R} = \left\{ \big((x, y), \mu_{\widetilde{R}}(x, y) \big) : \ (x, y) \in X \times Y \right\}$$

donde $(x, y) \in X \times Y$, $\mu_{\widetilde{R}} : X \times Y \to [0, 1]$ y

$$(x, y) \mapsto \mu_{\widetilde{R}}(x, y) \in [0, 1].$$

Zimmermann (1991) propone como Ejemplo de una relación borrosa a $\widetilde{R}$, donde $\widetilde{R}$ representa "bastante más grande que". Esta relación está definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y propone la función de pertenencia como:

$$\mu_{\widetilde{R}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq y \\ \dfrac{x - y}{10y} & \text{si } y < x \leq 11y \\ 1 & \text{si } x > 11y \end{cases}$$

A partir de estas relaciones borrosas, donde para $(x, y) \in X \times Y$, $\widetilde{R}_1(x, y)$, y para $(y, z) \in Y \times Z$, $\widetilde{R}_2(y, z)$, se puede obtener la relación borrosa de los elementos de $X \times Z$ a través de la composición máx-mín realizando:

$$\widetilde{R}_1 \circ \widetilde{R}_2 = \left\{ \Big((x, z), \mu_{\widetilde{R}_1 \circ \widetilde{R}_2}(x, z) \Big) : \ x \in X, y \in Y, z \in Z \right\},$$

donde

$$\mu_{\widetilde{R}_1 \circ \widetilde{R}_2}(x, z) = \text{máx} \left\{ \text{mín} \left\{ \mu_{\widetilde{R}_1}(x, y), \mu_{\widetilde{R}_2}(y, z) \right\} \right\}.$$

1.2. Números Borrosos

1.2.1. Definición

Un número borroso o número difuso $\widetilde{A}$, es un conjunto borroso *normal, convexo* cuyo conjunto referencial son los números reales, tal que:

- Existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ con $\mu_{\widetilde{A}}(x_0) = 1$; x_0 es llamado el valor central del número difuso.
- $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ es continua a trozos.

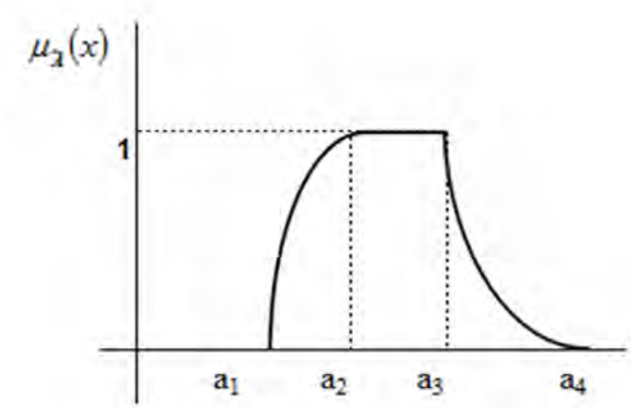
Un número borroso es el elemento del que dispone la lógica borrosa para representar cuantías estimadas u observadas de forma difusa.

El valor que toma un elemento $x \in \mathbb{R}$ en la función de pertenencia de $\widetilde{A}$, $\mu_{\widetilde{A}}(x)$, es intepretado por muchos autores como una "medida" de la probabilidad de ocurrencia de x, por lo que el número borroso $\widetilde{A}$ es interpretado como una distribución de probabilidad.

De forma general, la función de pertenencia de un número borroso $\widetilde{A}$ puede escribirse como:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } a_1 < x \leq a_2 \\ 1 & \text{si } a_2 < x \leq a_3 \\ g(x) & \text{si } a_3 < x \leq a_4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El intervalo $[a_1, a_4]$ es el soporte del número borroso y $[a_2, a_3]$ es el núcleo del número borroso. Además, $f(x)$ es creciente en $[a_1, a_2]$ y $g(x)$ es decreciente en $[a_3, a_4]$. Gráficamente, le representación de un número borroso, sería:



1.2.2. Operaciones con números borrosos

Estamos familiarizados con la operaciones algebraicas con números *crisp*, sin embargo cuando se quiere utilizar conjuntos borrosos para tales aplicaciones, se deben ocupar números borrosos, y el principio de extensión es una manera de extender las operaciones algebraicas de números crisp a números borrosos a través de los α-cortes.

1.2.2.1. Transformaciones

Para efecto de los conceptos siguientes se debe tomar en cuenta el principio de extensión de Zadeh, tomando en cuenta que la aplicación f a evaluar es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y el número borroso sobre el que se realiza la operación será:

$$\widetilde{A} = \big\{(x, \mu_{\widetilde{A}})\big\} = \{A_\alpha = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)] : \ 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

- **Opuesto**: Sea un número borroso $\widetilde{A}$. Su opuesto $\widetilde{B} = \ -\widetilde{A}$ tiene la siguiente función de pertenencia:

  $$\mu_{\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(-x)$$

  y α-cortes:

  $$B_\alpha = [B_1(\alpha), B_2(\alpha)] = \Big[\ln[A_1(\alpha)], \ln[A_2(\alpha)]\Big]$$

- **Exponencial**: Para el número borroso $\widetilde{A}$, el numero borroso $\widetilde{B} = \mathrm{e}^{\widetilde{A}}$ tiene la función de pertenencia:

  $$\mu_{\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}\big(\ln(x)\big)$$

  y α-cortes:

  $$B_\alpha = \big[B_1(\alpha), B_2(\alpha)\big] = \big[\mathrm{e}^{A_1(\alpha)}, \mathrm{e}^{A_2(\alpha)}\big]$$

- **Potencia**: Sea $\widetilde{A}$ un número borroso tal que $sop(\widetilde{A}) \in \mathbb{R}^+$, y un escalar $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Su potencia $\widetilde{B} = \widetilde{A}^k$ tiene como función de pertenencia:

  $$\mu_{\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}\big(x^{\frac{1}{k}}\big)$$

y α-cortes:

$$\widetilde{B}_\alpha = \big[B_1(\alpha), B_2(\alpha)\big] = \begin{cases} \big[(A_1(\alpha))^k, (A_2(\alpha))^k\big] & \text{si } k > 0 \\ \\ \big[(A_2(\alpha))^k, (A_1(\alpha))^k\big] & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Si $k = 0$:

$$\mu_{\widetilde{B}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

y

$$B_\alpha = \big[B_1(\alpha), B_2(\alpha)\big] = [1, 1].$$

1.2.2.2. Operaciones Binarias

Como se hace mención en líneas anteriores, este apartado se refiere a la extensión de operaciones algebraicas tradicionales con números crisp a operaciones con números borrosos, utilizando el principio de extensión de Zadeh.
Las transformaciones citadas anteriormente, dejan claros conceptos que se utilizarán en lo sucesivo. Ahora bien, para abordar el presente tema, operaciones binarias, necesitamos más definiciones.

Sea $F(\mathbb{R})$ el conjunto de los números borrosos reales y $X = X_1 \times X_2$. Entonces se definen las siguientes propiedades de operaciones binarias.

Una operación binaria $*$ en $\mathbb{R}$ es llamada creciente (decreciente) si para:

$$x_1 > y_1 \quad \text{y} \quad x_2 > y_2$$

se tiene que

$$x_1 * x_2 > y_1 * y_2 \quad (x_1 * x_2 < y_1 * y_2)$$

Ejemplo 1.7. Consideremos las siguientes funciones:

$f(x, y) = x + y$	es una operación creciente
$f(x, y) = x \cdot y$	es una operación creciente en $\mathbb{R}^+$
$f(x, y) = -(x + y)$	es una operación decreciente

Para extender las operaciones algebraicas usuales de suma ($+$), resta ($-$), multiplicación ($\cdot$) y división ($\div$) a operaciones con números borrosos, se utiliza la siguiente simbología $\oplus$, $\ominus$, $\odot$, $\oslash$.

Veamos a continuación algunas afirmaciones:

Proposición 1.8.

1. Si $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ son números borrosos cuyas funciones de pertenencia son continuas y sobreyectivas de $\mathbb{R}$ a $[0,1]$ y $*$ es un operador binario continuamente creciente (decreciente), entonces $\widetilde{A} \circledast \widetilde{B}$ es un número borroso cuya función de pertenencia es continua y sobreyectiva de $\mathbb{R}$ a $[0,1]$. [*Dubois y Prade, 1980*]

2. Si $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B} \in F(\mathbb{R})$con $\mu_{\widetilde{B}}(x)$ y $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ funciones de pertenencia continuas, entonces, por la aplicación del principio de extensión, para la operación binaria $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función de pertenencia del número borroso está dada por:
$$\mu_{\widetilde{A} \circledast \widetilde{B}}(z) = \sup_{z=x*y} \text{mín} \left\{ \mu_{\widetilde{A}}(x) \,,\, \mu_{\widetilde{B}}(y) \right\}$$

Proposición 1.9 (Propiedades de la operación extendida $\circledast$)**.**

1. Para una operación conmutativa $*$, la operación extendida $\circledast$ es también conmutativa.
2. Para una operación asociativa $*$, la operación extendida $\circledast$ es también asociativa.

Con los conceptos citados previamente, se puede entrar en materia para la definición de las operaciones extendidas así como sus propiedades.

Para operaciones monarias $f : X \to Y$, el principio de extensión se reduce a:
$$\mu_{f(\widetilde{A})}(z) = \sup_{x \in f^{-1}(z)} \mu_{\widetilde{A}}(x), \quad \forall \ \widetilde{A} \in F(\mathbb{R}).$$

En lo sucesivo, se aplicará el principio de extensión para las operaciones binarias:

Proposición 1.10 (Operaciones Extendidas)**.**

1. **Suma:** La suma es una operación creciente, de acuerdo a la afirmación 1) de la Proposición 1.8. Por tanto, se tiene para la suma $\oplus$ de números borrosos que $f(\widetilde{B}, \widetilde{A}) = \widetilde{B} \oplus \widetilde{A}, \quad \widetilde{B}, \, \widetilde{A} \in F(\mathbb{R})$ es un número borroso, esto es $\widetilde{B} \oplus \widetilde{A} \in F(\mathbb{R})$.

   Las propiedades más importantes de la suma son:

- $\oplus$ es conmutativa

- $\oplus$ es asociativa

- $0 \in \mathbb{R} \subseteq F(\mathbb{R})$ es el elemento neutro de $\oplus$, es decir, $\widetilde{A} \oplus 0 = \widetilde{A}, \quad \forall \widetilde{A} \in F(\mathbb{R})$.

- Para $\oplus$ no existe ningún elemento inverso, es decir, $\forall \widetilde{A} \in F(\mathbb{R}) \backslash \mathbb{R}$: $\widetilde{A} \oplus (\oplus \widetilde{A}) \neq 0 \in \mathbb{R}$

- $\ominus(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}) = (\ominus \widetilde{A}) \oplus (\ominus \widetilde{A})$

2. **Producto:** La multipicación es una operación creciente en $\mathbb{R}^+$ y es operación decreciente en $\mathbb{R}^-$. Por tanto, de acuerdo al principio de extensión de Zadeh, el producto de números borrosos positivos o negativos, resulta un número borroso positivo. Sea $\widetilde{A}$ un número borroso positivo y $\widetilde{B}$ un número borroso negativo. Entonces $\ominus \widetilde{A}$ es también negativo y $\widetilde{A} \odot \widetilde{B} = \ominus(\ominus \widetilde{A} \odot \widetilde{B})$ resulta un número borroso negativo.

   Las propiedades más importantes del producto son:

   - $(\ominus \widetilde{A}) \odot \widetilde{B} = \ominus(\widetilde{A} \odot \widetilde{B})$.

   - $\odot$ es conmutativa.

   - $\odot$ es asociativa.

   - $\widetilde{A} \odot 1 = \widetilde{A}$, $1 \in \mathbb{R} \subseteq F(\mathbb{R})$ es el elemento neutro para $\odot$, es decir, $\widetilde{A} \odot 1 = \widetilde{A}, \quad \forall \widetilde{A} \in F(\mathbb{R})$.

   - Para $\odot$ no existe elemento inverso, es decir, $\forall \widetilde{A} \in F(\mathbb{R}) \backslash \mathbb{R} : \widetilde{A} \odot \widetilde{A}^{-1} \neq 1$.

3. **Resta:** La resta no es una operación creciente ni decreciente. Es por ello que no se puede aplicar directamente el principio de extensión de Zadeh. La operación $\widetilde{A} \ominus \widetilde{B}$ puede, sin embargo, ser siempre escrita como $\widetilde{A} \ominus \widetilde{B} = \widetilde{A} \oplus (\ominus \widetilde{B})$. Aplicando el principio de extensión [Dubois and Prade] de la afirmación 2) de la Proposición 1.8, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}}(z) &= \sup_{z=x-y} \text{mín}\left(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(y)\right) \\
&= \sup_{z=x+y} \text{mín}\left(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(-y)\right) \\
&= \sup_{z=x-y} \text{mín}\left(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{-\widetilde{B}}(y)\right)
\end{aligned}
$$

Así $\widetilde{A} \ominus \widetilde{B}$ es un número borroso siempre que $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ lo sean.

4. **División:** La división no es una operación creciente ni decreciente. Si $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ son números borrosos estrictamente positivos, de cualquier modo $(\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0$ y $\mu_{\widetilde{B}}(x) = 0 \quad \forall x \leq 0)$ se obtiene una analogía de la resta:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\widetilde{A}\oslash\widetilde{B}}(z) &= \sup_{z=x/y} \text{mín}\left(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(y)\right) \\
&= \sup_{z=xy} \text{mín}\left(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(\tfrac{1}{y})\right) \\
&= \sup_{z=xy} \text{mín}\left(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}^{-1}}(y)\right)
\end{aligned}
$$

$\widetilde{B}^{-1}$ es un número borroso positivo. Por lo tanto, puede ser aplicadó el principio de extención de Zadeh. Lo mismo sucede si $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ fueran estrictamente negativos.

Las operaciones con números borrosos implican cálculos extensivos, si no se imponen restricciones a la forma de las funciones de pertenencia. Dubois y Prade [1979 y 1980] propone un algoritmo general para ejecutar las operaciones extendidas, basado en la propiedad de que todo conjunto borroso continuo puede descomponerse en unión de conjuntos borrosos conexos cuyas funciones de pertenencia son estrictamente crecientes, decrecientes o constantes y que la operación extendida es distributiva respecto a la unión. Por tanto, la operación puede llevarse a cabo sobre cada parte monótona.
No obstante, este principio no siempre puede aplicarse a "números borrosos" con soporte discreto, por que puede ser que el conjunto borroso resultante no sea convexo y, por lo tanto, no sea considerado como número borroso. El siguiente ejemplo ilustra lo anterior:

Ejemplo 1.11. Sean $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$, números borrosos que representan valores próximos a 2 y 3 respectivamente.

$$\text{Sea } \widetilde{A} = \{(1, 0.3), (2, 1), (3, 0.4)\}$$
$$\widetilde{B} = \{(2, 0.7), (3, 1), (4, 0.2)\}$$

Entonces, utilizando el principio de extensión (inciso 2) de la Proposición 1.8) para calcular su producto $\odot$, se tiene:

$$\mu_{\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}}(z) = \sup_{z=x\cdot y} \text{mín}\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x)\,,\ \mu_{\widetilde{B}}(y)\right\}$$

	2	**3**	**4**
1	**(2, 0.3)**	**(3,0.3)**	(4,0.2)
2	**(4, 0.7,)**	**(6,1)**	**(8,0.2)**
3	(6,0.4)	**(9,0.4)**	**(12,0.2)**

y el número borroso resultante es:

$$\widetilde{A} \odot \widetilde{B} = (2, 0.3), (3, 0.3), (4, 0.7), (6, 1), (8, 0.2), \underline{\mathbf{(9{,}0.4)}}, (12, 0.2)$$

Así pues, el conjunto resultante no es convexo. Como se mencionó el el párrafo anterior, el principio de extensión es una posibilidad para extender las oparaciones algebraicas entre números convencionales a números borrosos, sin embargo, existen otras alternativas para operar con números borrosos con características especiales.

En la siguiente sección se profundizará en el concepto de número borroso presentando algunos tipos especiales de ellos.

1.2.3. Tipos especiales de números borrosos

Proponer al principio de extensión de Zadeh para operar o modelar con números borrosos en general, no siempre resulta tan sencillo y funcional. Para propósitos prácticos, es decir, aquellos casos en los que las características de los conjunto o números borrosos con los que se pretenda modelar presenten particularidades, resulta más apropiado especificar tipos de números borrosos, objetivo de la presente sección.

Las formas más usuales para modelar con números borrosos son los *L-R de Dubois y Prade, los trapezoidales y los triangulares.*

1.2.3.1. Números borrosos L-R de Dubois y Prade

Para facilitar las operaciones con números borrosos, Dubois y Prade [1979] sugiere un tipo especial de representación para éstos, y son los llamados *L-R* (Left-Right). Éstos números están definidos como funciones de $\mathbb{R}$ en $[0,1]$, y tienen las siguientes propiedades:

- Son simétricas: $L(x) = L(-x)$ y $R(x) = R(-x)$.

- $L(0) = R(0) = 1$ y $L(1) = R(1) = 0$.
- son monótonas crecientes en $[-\infty,\, 0)$ y monótonas decrecientes en $[0,\, \infty)$.

Los números borrosos L-R se definen de la siguente manera:

Un número borroso $\widetilde{A}$ es del tipo R-L si existen funciones de referencia L (for left o a la izquierda), R (for right o a la derecha), y escalares $\alpha > 0,\ \beta > 0$ con:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right) & \text{para } x \leq a \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right) & \text{para } x \geq a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde a se llama valor central de $\widetilde{A}$ y es un número real; α y β son las *dispersiones* a la izquierda y derecha, respectivamente. Simbólicamente, $\widetilde{A}$ es representado por $(a, \alpha, \beta)_{LR}$. En términos de α-cortes:

$$A_\alpha = \left[a - \alpha^* L^{-1}(\alpha)\,,\, a + \beta^* R^{-1}(\alpha)\right] \qquad \forall \alpha \in [0,1]$$

donde α^*, β^* *son los parámetros de dispersión a la izquierda y derecha respectivamente, de* $\widetilde{A}$.

Ejemplo 1.12. Sea

$$L(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$R(x) = \frac{1}{1+2|x|}$$

$$\alpha = 2,\ \beta = 3,\ m = 5$$

Entonces:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{5-x}{2}\right) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{5-x}{2}\right)} & \text{para } x \leq 5 \\ \\ R\left(\frac{x-5}{3}\right) = \dfrac{1}{1+\left|\dfrac{2(x-5)}{3}\right|} & \text{para } x \geq 5 \end{cases}$$

Si a no es un número real sino un intervalo $[a_1, a_2]$, entonces $\widetilde{A}$ no es un número sino un *intervalo* borroso.

Un intervalo borroso definido en representación L-R se define de la siguiente manera:

Definición 1.13. Un intevalo borroso $\widetilde{A}$ es del tipo L-R si existen funciones de la forma L y R y cuatro parámetros $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \cup [-\infty, +\infty]$, y α, β. Su función de pertenencia es:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a_1 - x}{\alpha}\right) & \text{para } x \leq a_1 \\ \\ 1 & \text{para } a_1 < x \leq a_2 \\ \\ R\left(\dfrac{x - a_2}{\beta}\right) & \text{para } x > a_2 \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y se denota como:

$$\widetilde{A} = (a_1,\, a_2,\, \alpha,\, \beta)_{LR}$$

En términos de α-cortes:

$$A_\alpha = \left[a_1 - \alpha^* L^{-1}(\alpha)\,,\, a_2 + \beta^* R^{-1}(\alpha)\right] \qquad \forall \alpha \in [0, 1]$$

donde α^*, β^* *son los parámetros de dispersión a la izquierda y derecha respectivamente, de* $\widetilde{A}$.

Esta definición es muy general y permite la cuantificación de diversos tipos de información. Así, si se supone que $\widetilde{A}$ es un número real para $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\widetilde{A} = (a, a, 0, 0)_{LR} \qquad \forall L, \forall R$$

Si $\widetilde{A}$ es un intervalo crisp, entonces

$$\widetilde{A} = (m, n, 0, 0)_{LR} \qquad \forall L, \forall R$$

Es necesario introducir el concepto de intervalo de confianza en números R-L, ya que las operaciones con este tipo de números borrosos pueden ser establecidas en función de la aritmética de intervalos de confianza.

1.2.3.2. Operaciones con números borrosos L-R de Dubois y Prade

En esta sección se presentan los conceptos de transformaciones (u operaciones monarias) y operaciones binarias con números borrosos L-R, utilizando la aritmética de intervalos de confianza. Cabe mencionar que, dentro de las operaciones binarias con números borrosos, la suma y resta, $\oplus$ y $\ominus$, muestran como resultado un número borroso. Sin embargo, en el caso del producto y la división, $\odot$ y $\oslash$, el resultado es representado por una aproximación que es mejor cuando las dispersiones son más pequeñas comparadas con el valor central.

Sea $\widetilde{A} = (a_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR}$ y $\widetilde{B} = (b_1, b_2, \gamma, \delta)_{LR}$ dos números borrosos L-R, entonces definamos sobre ellos las transformaciones:

- Opuesto: $\widetilde{B} = -\widetilde{A} = (-a, \beta, \alpha)_{LR}$.

- Multiplicación por un escalar: $\widetilde{B} = k\widetilde{A}, \quad k \in \mathbb{R}$.
  - Si $k > 0$, $\widetilde{B} = (ka_1, ka_2, k\alpha, k\beta)_{LR}$
  - Si $k < 0$, $\widetilde{B} = (ka_2, ka_1, k\alpha, k\beta)_{LR}$
  - Si $k = 0$, $\widetilde{B} = (0, 0, 0, 0)_{LR}$

- Inverso: $\widetilde{B} = \widetilde{A}^{-1}$. $\widetilde{B}$ no conserva su condición de L-R. Sin embargo, se puede aproximar a:

$$\widetilde{B} \approx \left(\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}, \frac{\alpha}{(a_2)^2}, \frac{\beta}{(a_1)^2} \right)_{LR}$$

  En todo caso, se supondrá que $0 \notin sop(\widetilde{A})$.

Ahora definamos las operaciones binarias con números L-R de Dubois y Prade:

Proposición 1.14.

1. **Suma:** $\widetilde{C} = \widetilde{A} \oplus \widetilde{B}$

$$\begin{aligned}\widetilde{C} &= (a_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR} \oplus (b_1, b_2, \gamma, \delta)_{LR} \\ &= (a_1 + b_1\,,\ a_2 + b_2\,,\ \alpha + \gamma\,,\ \beta + \delta)_{LR}\end{aligned}$$

2. **Resta:** $\widetilde{C} = \widetilde{A} \ominus \widetilde{B}$

$$\begin{aligned}\widetilde{C} &= (a_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR} \ominus (b_1, b_2, \gamma, \delta)_{LR} \\ &= (a_1 - b_2\,,\ a_2 - b_1\,,\ \alpha + \delta\,,\ \beta + \gamma)_{LR}\end{aligned}$$

3. **Producto:** Para $\widetilde{C} = \widetilde{A} \otimes \widetilde{B}$ el resultado obtenido no es un número borroso L-R, no obstante Dubois y Prade proponen la siguiente aproximación, bajo el supuesto de que $sop(\widetilde{A})$, $sop(\widetilde{B}) \subset \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\widetilde{C} &= (a_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (b_1, b_2, \gamma, \delta)_{LR} \\ &\approx (a_1 \cdot b_1\,,\ a_2 \cdot b_2\,,\ a_1 \cdot \gamma\ +\ b_1 \cdot \alpha\,,\ a_2 \cdot \delta\ +\ b_2 \cdot \beta)_{LR}\end{aligned}$$

4. **División:** Para $\widetilde{C} = \widetilde{A} \oslash \widetilde{B}$, tampoco se obtiene como resultado un número borroso L-R; la aproximación propuesta por Dubois y Prade, bajo el supuesto de que $sop(\widetilde{A})$, $sop(\widetilde{B}) \subset \mathbb{R}^+$ es:

$$\begin{aligned}\widetilde{C} &= (a_1, a_2, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (b_1, b_2, \gamma, \delta)_{LR} \\ &\approx \left(\frac{a_1}{b_2}\,,\ \frac{a_2}{b_1}\,,\frac{a_1 \cdot \gamma\ +\ b_2 \cdot \beta}{(b_2)^2}\,,\frac{a_2 \cdot \delta\ +\ b_1 \cdot \alpha}{(b_1)^2} \right)_{LR}\end{aligned}$$

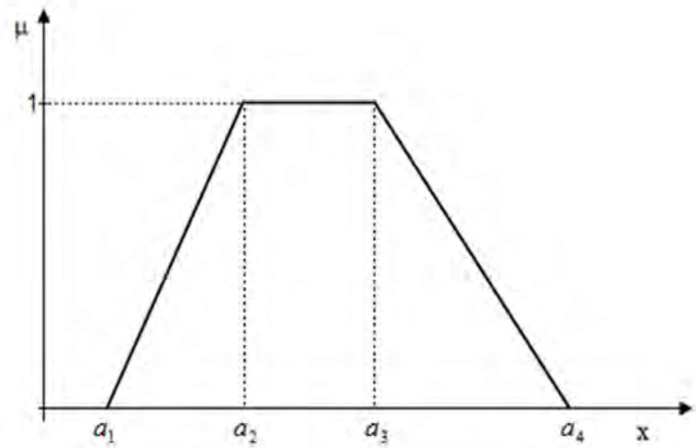
1.2.3.3. Números borrosos trapezoidales

Un número borroso trapezoidal es una versión más sencilla de los números borrosos L-R de Dubois y Prade $\widetilde{A} = (a_1,\, a_2,\, \alpha,\, \beta)_{LR}$.
Si $\widetilde{A}$ es un número borroso trapezoidal, $L(x) = R(x) = \text{máx}\{0,\, 1 - |x|\}$.

Los números borrosos trapezoidales tienen como núcleo un intervalo de confianza $[a_2, a_3]$, y dicho número borroso se denota por $[a_1, a_4]$ haciendo alusión a su soporte. La función de pertenencia de $\widetilde{A}$ está dada por:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{si } a_1 < x \leq a_2 \\[2ex] 1 & \text{si } a_2 < x \leq a_3 \\[2ex] \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & \text{si } a_3 < x < a_4 \\[2ex] 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y su representación gráfica es:



En relación a los puntos de esta gráfica, un número borroso trapezoidal se denota por: $\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, donde las $a_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ son respectivamente, el valor más pequeño posible, el valor inferior y más elevado con presunción 1, y el extremo del 0-corte.
También puede denotarse con respecto a su núcleo como: $\widetilde{A} = (a_1, a_2, \alpha, \beta)$.

Los α-cortes del número borroso trapezoidal estás dados por:

$$A_\alpha = \big[a_1 + (a_2 - a_1)\alpha\,,\, a_4 - (a_4 - a_3)\alpha\big] \qquad \forall \alpha \in [0, 1]$$

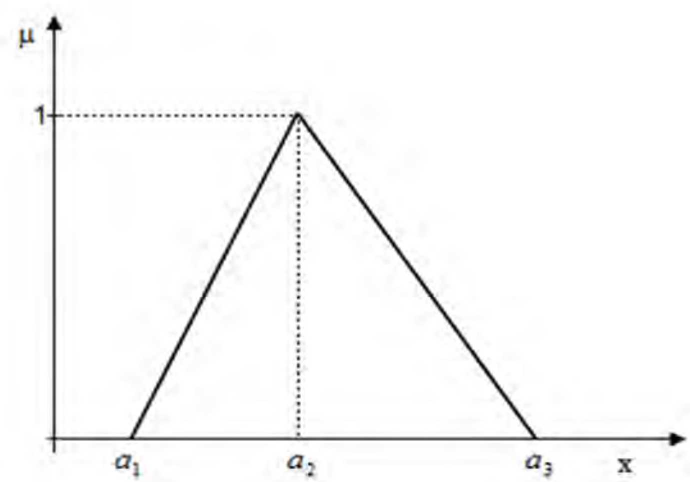
1.2.3.4. Números borrosos triangulares

Los números borrosos triangulares son, en la práctica, los más usados, ya que son de facil manipulación. Se trata de la versión más simple de los números borrosos L-R de Dubois y Prade y son un caso particular de los números borrosos trapezoidales.

El núcleo de un número borroso triangular no está dado por un intervalo de confianza, sino, por un punto, es decir cuando $a_2 = a_3$.
Siendo $\widetilde{A}$ un número borroso triangular, $[a_1, a_3]$ su soporte y sus dispersiones $\alpha = a_2 - a_1$ y $\beta = a_3 - a_2$, la función de pertenencia de $\widetilde{A}$ es:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{\alpha} & \text{si } a_1 < x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{\beta} & \text{si } a_2 < x \leq a_3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Gráficamente, $\widetilde{A}$ es:



Y sus α-cortes son:

$$A_\alpha = \left[a_1 + (\alpha^*)\alpha \, , \, a_3 - (\beta^*)\alpha\right] \qquad \forall \alpha \in [0, 1]$$

donde α^*, β^* *son los parámetros de dispersión a la izquierda y derecha de* $\widetilde{A}$ respectivamente.

Un número borroso triangular se denota, con respecto a su núcleo por: $\widetilde{A} = (a_2, \alpha, \beta)$, o a través de la terna $\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$, donde las a_i, $i = 1, 2, 3$ son respectivamente, el valor más pequeño posible, el valor más verosímil, y el más elvado posible.

1.2.3.5. Operaciones con números borrosos triangulares y trapezoidales

Las transformaciones u operaciones monarias que se describen en esta sección, son las ya vistas con anterioridad. Cabe mencionar que las operaciones $\otimes$ y $\oslash$, no muestran como resultado números borrosos triangulares y trapezoidales propiamente, pero se utilizan algunas aproximaciones propuestas. Las operaciones siguientes, se definirán en términos de números borroso trapezoidales, partiendo del hecho de que los triangulares son un caso particular de éstos. La notación utilizada para ello será la cuarteta mencionada anteriormente $\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Para el caso de los números triangulares, se asume que $a_2 = a_3$. Primero, se definen las transformaciones siguientes:

- Opuesto: $\widetilde{B} = -\widetilde{A} = (-a_4, -a_3, -a_2, -a_1)$.
- Multiplicación por escalar: $\widetilde{B} = k\widetilde{A}$, con $k \in \mathbb{R}$.
  - Si $k > 0$, $\widetilde{B} = (ka_1, ka_2, ka_3, ka_4)$
  - Si $k < 0$, $\widetilde{B} = (ka_4, ka_3, ka_2, ka_1)$
  - Si $k = 0$, $\widetilde{B} = (0, 0, 0, 0)$
- Inverso: $\widetilde{B} = -\widetilde{A}$. Bajo esta transformación, $\widetilde{B}$ no conserva su condicíón de número borroso trapezoidal; si se sopone que $0 \notin sop(\widetilde{A})$, entonces su función de pertenencia es:

$$\mu_{\widetilde{B}}(x) = \begin{cases} \dfrac{a_4 - x^{-1}}{a_4 - a_3} & \text{si } \frac{1}{a_4} < x \leq \frac{1}{a_3} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{a_3} < x \leq \frac{1}{a_2} \\ \dfrac{x^{-1} - a_1}{a_2 - a_1} & \text{si } \frac{1}{a_2} < x < \frac{1}{a_1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  Aproximación propuesta [Kauffman 1986b], para un número borroso trapezoidal con el mismo soporte y núcleo:

$$\widetilde{B} \approx \left(\frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}\right)$$

A continuación, se presentan las operaciones binarias con números borrosos trapezoidales:

Proposición 1.15.

- Suma: $\widetilde{C} = \widetilde{A} \oplus \widetilde{B}$; para $\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\widetilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ está dada por:

$$\begin{aligned}\widetilde{C} &= \widetilde{A} + \widetilde{B}\\ &= (a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4)\\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)\end{aligned}$$

- Resta: Para $\widetilde{C} = \widetilde{A} \ominus \widetilde{B}$; para $\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\widetilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\widetilde{C} &= \widetilde{A} - \widetilde{B}\\ &= (a_1, a_2, a_3, a_4) - (b_1, b_2, b_3, b_4)\\ &= (a_1 - b_4, a_3 - b_2, a_2 - b_3, a_4 - b_1)\end{aligned}$$

- Producto: Como se menciona al inicio de esta sección, el resultado de $\widetilde{C} = \widetilde{A} \otimes \widetilde{B}$ no es un número borroso triangular. Si se considera $sop(\widetilde{A}), sop(\widetilde{B}) \subset \mathbb{R}^+$, la función de pertenencia de $\widetilde{C}$ es:

$$\mu_{\widetilde{C}}(x) = \begin{cases} \gamma & \text{si } a_1b_1 < x \leq a_2b_2 \\ \\ 1 & \text{si } a_2b_2 < x \leq a_3b_3 \\ \\ \delta & \text{si } a_3b_3 < x \leq a_4b_4 \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde

$$\gamma = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4(a_1b_1 - x)(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}}{2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}$$

y

$$\delta = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4(a_4b_4 - x)(a_4 - a_3)(b_4 - b_3)}}{2(a_4 - a_3)(b_4 - b_3)},$$

con $c = a_1(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1)$ y $d = a_4(b_4 - b_3) + b_4(a_4 - a_3)$. La aproximación propuesta [Kaufmann 1986b], para un número borroso trapezoidal con el mismo soporte y núcleo es la siguiente:

$$\widetilde{C} \approx (a_1 \cdot b_1,\ a_2 \cdot b_2,\ a_3 \cdot b_3,\ a_4 \cdot b_4)$$

- División: Para $\widetilde{C} = \widetilde{A} \oslash \widetilde{B}$, $\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\widetilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, el resultado no es propiamente un número borroso trapezoidal. Si $sop(\widetilde{A})$ y $sop(\widetilde{B})$

son positivos, la función de pertenencia de $\widetilde{(C)}$ es:

$$\mu_{\widetilde{C}}(x) = \begin{cases} \dfrac{xb_4 - a_1}{(a_2 - a_1) + x(b_4 - b_3)} & \frac{a_1}{b_4} < x \leq \frac{a_2}{b_3} \\ 1 & \frac{a_2}{b_3} < x \leq \frac{a_3}{b_2} \\ \dfrac{a_4 - xb_1}{(a_4 - a_3) + x(b_2 - b_1)} & \frac{a_3}{b_2} < x \leq \frac{a_4}{b_1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La aproximación propuesta [Kaufmann 1986], para un número borroso trapezoidal es:

$$\widetilde{C} \approx \left(\frac{a_1}{b_4}, \frac{a_2}{b_3}, \frac{a_3}{b_2}, \frac{a_4}{b_1} \right)$$

2. Conceptos de Probabildad Clásica y Probabilidad Borrosa

2.1. Probabilidad Clásica

La teoría de la Probabilidad es la parte de las matemáticas que se encarga del estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios. Se entiende por experimento aleatorio a todo aquél tal que cuando se le repite bajo las mismas condiciones iniciales, el resultado que se obtiene no siempre es el mismo. No obstante, es necesario aceptar que no es posible predecir el resultado de un experimento particular aun cuando se le haya efectuado con anterioridad en las mismas condiciones, por tanto, se considera aleatorio.
Dadas estas circunstancias, la teoría de la Probabilidad tiene como objeto modelar matemáticamente cualquier experimento aleatorio de interés.

2.1.1. Espacios de Probabilidad

Se trata del modelo matemático creado durante el primer tercio del siglo XX para estudiar los experimentos aleatorios.

Espacio de Probabilidad. Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ en donde Ω, es un conjunto arbitrario, $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra de subcojuntos de Ω, y P es una medida de probabilidad definida sobre $\mathscr{F}$.

Espacio Muestral. Es el conjunto Ω, también llamado *espacio muestra*, y tiene como objetivo agrupar a todos los posibles resultados del experimento aleatorio en cuestión.

σ-álgebra. Una clase o colección no vacía $\mathscr{F}$ de subconjuntos de Ω es una σ-álgebra si es cerrada bajo las operaciones de tomar complementos y uniones numerables. A los elementos de una σ-álgebra se les llama *eventos, sucesos,* o *conjuntos medibles.*

Medida de Probabilidad. Una función P definida sobre una σ-álgebra $\mathscr{F}$ y con valores en el intervalo $[0, 1]$ es una medida de probabilidad si $P(\Omega) = 1$ y si P es σ-aditiva, es decir, si cumple que:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

cuando $A_1, A_2, \ldots$ son elementos de $\mathscr{F}$ que cumplen con ser disjuntos dos a dos, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para i y j distintos. $P(A)$ representa una forma de medir la posibilidad de observar la ocurrencia del evento A, al efectuar el experimento aleatorio.

2.1.2. σ-álgebras

En esta sección se estudia el concepto de σ-álgebra y se define la mínima σ-álgebra generada por una colección arbitraria de subconjuntos del espacio muestral.

σ-álgebra Una colección $\mathscr{F}$ de subconjuntos de Ω es una σ-álgebra si cumple las siguientes condiciones:

i. $\Omega \in \mathscr{F}$.

ii. Si $A \in \mathscr{F}$, entonces $A^c \in \mathscr{F}$.

iii. Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

A la pareja $(\Omega, \mathscr{F})$ se le llama espacio medible y a los elementos de $\mathscr{F}$ se les llama eventos o conjuntos medibles.

Una σ-álgebra es una estructura que permite grupar ciertos subconjuntos de Ω, a los cuales se les desea calcular su probabilidad, y esta estructura constituye el dominio de definición de una *medida de probabilidad*.
Cuando el espacio muestral es finito, usualmente se toma como σ-álgebra el *conjunto potencia* de Ω, pero para espacios más generales no siempre puede tomarse una estructura tan grande como esa, sino σ-álgebras más pequeñas. A continuación se enuncian algunas propiedades importantes de las σ-álgebras.

Proposición 2.1. Sea $\mathscr{F}$ una σ-álegbra de subconjuntos de Ω. Entonces:

i. $\emptyset \in \mathscr{F}$.

ii. Si $A, A, \ldots$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

iii. Si $A, B \in \mathscr{F}$, entonces $A - B \in \mathscr{F}$, y $A \Delta B \in \mathscr{F}$.

Proposición 2.2. La intersección de dos σ-álgebras es una σ-álgebra.

Proposición 2.3. La intersección finita, infinita numerable, o bien, arbitraria de σ-álgebras es nuevamente una σ-álgebra.

Proposición 2.4. Sea $\mathscr{C}$ una colección no vacía de subconjuntos de Ω. La *σ-álgebra generada* por $\mathscr{C}$, denotada por $\sigma(\mathscr{C})$, es la colección

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcap \{\mathscr{F} : \mathscr{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathscr{C} \subseteq \mathscr{F}\}.$$

Proposición 2.5. Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos colecciones de subconjuntos de Ω tales que $\mathscr{C}_1 \subseteq \mathscr{C}_2$. Entonces $\sigma(\mathscr{C}_1) \subseteq \sigma(\mathscr{C}_2)$

Proposición 2.6. Si $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra, entonces $\sigma(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$.

Antes de pasar a la siguiente subsección (medidas de probabilidad) se enunciarán un par de conceptos: el de *álgebra* y *semiálgebra*, así como su relación con las σ-álgebras. Si bien no se profundizará en el tema, es importante mencionarlos ya que juegan un papel importante en la construcción y extensión de medidas de probabilidad.

Álgebra. Una colección $\mathscr{A}$ de subconjuntos de Ω es una álgebra si cumple las siguientes condiciones:

i. $\Omega \in \mathscr{A}$.

ii. Si $A \in \mathscr{A}$ entonces $A^c \in \mathscr{A}$.

iii. Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$, entonces $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A}$.

Semiálgebra. Una colección $\mathscr{I}$ de subconjuntos de Ω es una semiálgebra si cumple las siguientes condiciones:

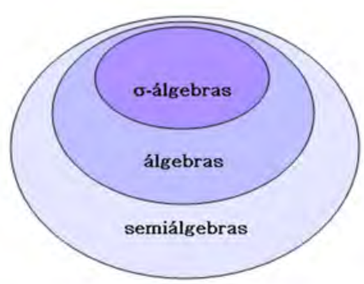
i. $\Omega \in \mathscr{I}$.

ii. Si $A, B \in \mathscr{I}$ entonces $A \cap B \in \mathscr{I}$.

iii. Si $A, A_1 \in \mathscr{I}$ son tales que $A_1 \subseteq A$, entonces existen $A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{I}$ tales que los subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$ son ajenos dos a dos y se cumple que:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Gráficamente, la relación entre σ-álgebras, álgebras y semiálgebras está dada de esta manera:



2.1.3. Medidas de Probabilidad

Como preámbulo de esta sección, se enuncian las definiciones de los números *reales extendidos* denotados por $\mathbb{R}^*$ y la *σ-álgebra de Borel.*

Reales Extendidos. La coleección $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ se denomina sistema de los números reales extendidos.

Ahora bien, si se considera la colección de todos los intervalos abiertos (a,b) de $\mathbb{R}$, en donde $a \leq b$, a la mínima σ-álgebra generada por esta colección se le llama *σ-álgebra de Borel* de $\mathbb{R}$, y se le denota $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

σ-álgebra de Borel. $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\}$.

Proposición 2.7. Para cualesquiera números reales $a \leq b$, los intervalos

$$[a,b],\ (a,\infty),\ (-\infty,b),\ [a,b),\ (a,b] \text{ y } \{a\}$$

son todos elementos de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Medida. Una medida sobre una σ-álgebra $\mathscr{F}$, es una función real extendida no negativa μ en $\mathscr{F}$ tal que si $\{A_n\}$ $n = 1,..,\infty$ es una suseción de conjuntos ajenos dos a dos en $\mathscr{F}$, entonces

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Medida de Probabilidad. Sea $(\Omega, \mathscr{F})$un espacio medible. Una medida de probabilidad es una función $P : \mathscr{F} \to [0,1]$ que satisface:

i. $P(\Omega) = 1$.
ii. $P(A) \geq 0,$ para cualquier $A \in \mathscr{F}$.
iii. (σ-aditividad). Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ son ajenos dos a dos, entonces $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

A continuación enunciamos algunas propiedades básicas de las medidas de probabilidad:

Proposición 2.8 (Propiedades Elementales.)**.** Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Entonces:

i. $P(\emptyset) = 0$.

ii. Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ son ajenos dos a dos, entonces

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

iii. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

iv. Si $A \subseteq B,$ entonces, $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

v. Si $A \subseteq B,$ entonces, $P(A) \leq P(B)$.

vi. $0 \leq P(A) \leq 1$.

vii. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

viii. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Proposición 2.9. Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de eventos.

1. Si $P(A_n) = 1$ para toda n, entonces $P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.
2. Si $P(A_n) = 1$ para alguna n, entonces $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.
3. Si $P(A_n) = 0$ para alguna n, entonces $P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.
4. Si $P(A_n) = 0$ para toda n, entonces $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

De las propiedades más conocidas y de más amplia aplicación son el *teorema de Probabilidad Total y el teorema de Bayes*. El teorema de probabilidad total permite calcular la probabilidad de un suceso a partir de probabilidades condicionadas, mientras que el teorema de Bayes sigue el proceso inverso. Es decir, el teorema de Probabilidad total deduce la probabilidad de ocurrencia del evento B dado un evento A; y el de Bayes establece que, a partir de ocurrido el suceso B se deduce la probabilidad del evento A.

Teorema 2.10 (Probabilidad Total)**.** Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, y sea $A_1, A_2, \ldots$ una partición de Ω, tal que cada elemento de la partición es un evento con probabilidad estrictamente positiva. Entonces, para cualquier evento B,

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n).$$

Teorema 2.11 (Bayes)**.** Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, y sea $A_1, A_2, \ldots$ una partición de Ω, tal que cada elemento de la partición es un evento con probabilidad estrictamente positiva. Entonces, para cualquier evento B, tal que $P(B) > 0$ y para cualquier $m \geq 1$ fijo,

$$P(A_m|B) = \frac{P(B|A_m)P(A_m)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n)}$$

La independencia de eventos es un tema central en la teoría de la probabilidad y uno de sus rasgos distintivos. La definición es la siguiente:

Definición 2.12 (Independencia de dos eventos)**.** Dos eventos A y B son independientes, $A \perp B$, cuando

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

.

Definición 2.13 (Independencia)**.** Los eventos $A_1, \ldots, A_n$ son independientes si se cumplen todas y cada una de las siguientes condiciones:

$$P(A_i \cap A_j) \;=\; P(A_i)P(A_j),\ i, j \text{ distintos.}$$

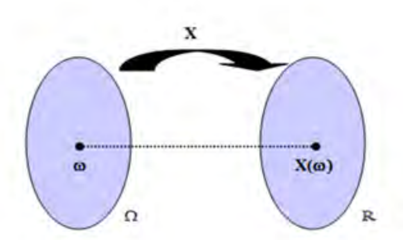
$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) \;=\; P(A_i)P(A_j)P(A_k),\ i,j,k \text{ distintos.}$$
$$\vdots$$
$$P(A_1 \cap \ldots A_n) \;=\; P(A_1)\ldots P(A_n).$$

2.1.4. Variables Aleatorias

En la presente sección se presentan los conceptos de *variable aletoria, función de distribución, función de densidad y esperanza.*

Variable Aleatoria. Una variable aleatoria real es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier conjunto Boreliano B se cumple que el conjunto $X^{-1}B$ es un elemento de $\mathscr{F}$.

Una variable aleatoria es una función del espacio muestral en el conjunto de números reales que además satisface cierta condición de *medibilidad*. Representa una traducción de cada uno de los resultados del espacio muestral en números reales.
Gráficamente, una variable aleatoria puede representarse de la manera siguiente



Si P es una medida de probabilidad definida sobre el espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$ y X una variable aleatoria (v.a.), se puede trasladar la medida de probabilidad P al espacio medible $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$; esto es, si B es un conjunto Boreliano, se define $P_X B = P(X^{-1}B)$, y se debe a que él conjunto $X^{-1}B$ es un elemento de $\mathscr{F}$, dominio de definición de P. La función $P_X : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ es una medida de probabilidad, y se denota *medida de probabilidad inducida* por la variable aleatoria X.

Para comprobar que una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es realmente v.a., por definición es necesario verificar que $X^{-1}B \in \mathscr{F}$ para cualquier conjunto Boreliano B. Sin embargo, probar tal condición no siempre es inmediato. La siguiente proposición establece que basta comprobar lo anterior con intervalos de la forma $(-\infty, x]$, para cada x en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.14. Una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria $\Leftrightarrow$ para cada x en $\mathbb{R}$ se cumple que $(X \leq x) \in \mathscr{F}$.

Si se consideran los espacios medibles $(\Omega, \mathscr{F})$ y $(\mathbb{R}, \mathscr{F}(\mathbb{R}))$ y X v.a. de Ω en $\mathbb{R}$, se denota por $\sigma(X)$ a la mínima σ-álgebra de subconjuntos de Ω respecto a la cual X es v.a.

Definición 2.15. $\sigma(X) = \{X^{-1}B : B \in (\mathbb{R})\}$.

Como establecen los siguientes enunciados, algunas operaciones con variables aleatorias producen nuevas variables aleatorias. Se parte, pues, del supuesto de que tales v.a. están definidas sobre el mismo espacio de probabilidad dado $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Proposición 2.16. La función constante $X = c$ es una v.a.

Proposición 2.17. Si X es v.a. y c es una constante , entonces cX es también v.a.

Proposición 2.18. Si X e Y son variables aleatorias, entonces $X + Y$ es v.a.

Proposición 2.19. Si X e Y son variables aleatorias, entonces XY es v.a.

Proposición 2.20. Sean X e Y variables aleatorias con $Y \neq 0$, entonces X/Y es v.a.

Proposición 2.21. Si X e Y son variables aleatorias, entonces $\max\{X, Y\}$ y $\min\{X, Y\}$ también lo son.

Proposición 2.22. Si X es variable aleatoria, entonces $|X|$ es v.a.

A continuación se considerarán algunas operaciones límite en sucesiones infinitas de variables aleatorias, considerando sólo variables aleatorias con valores finitos; de tal modo que se imponen condiciones sobre la finitud del resultado al tomar tales operaciones límite.

Proposición 2.23. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión infinita de variables aleatorias tales que para cada ω en Ω, los números

$$\sup\{X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots\} \text{ e } \inf\{X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots\}$$

son finitos. Entonces las funciones $\limsup_{n\to\infty} X_n$ y $\liminf_{n\to\infty} X_n$ son variables aleatorias.

Proposición 2.24. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión infinita de variables aleatorias tales que $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ existe y es finito para cada $\omega \in \Omega$. Entonces la función $\lim_{n\to\infty} X_n$ es una variable aleatoria.

Función de Distribución

Se trata de la función asociada a toda variable aleatoria, también es llamada *función de acumulación de probabilidad* o *función de distribución acumulada.* Su definición y propiedades son las siguientes:

Función de distribución. La función de distribución de una v.a. es la función $F(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$, definida como

$$F(x) = P(X \leq x).$$

La función de distribución cumple las siguientes propiedades:

a. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

b. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

c. Si $x_1 \leq x_2$, entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$.

d. $F(x)$ es continua por la derecha, esto es, $F(x+) = F(x)$.

Proposición 2.25. Sea $F(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función de distribución. Entonces existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ y una variable aleatoria X cuya distribución es $F(x)$.

Proposición 2.26. Sea X una v.a. con función de distribución $F(x)$. Para cualesquiera números reales $a < b$ se tiene que

1. $P(X < a) = F(a-)$.
2. $P(X = a) = F(a) - F(a-)$.
3. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.
4. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$.
5. $P(a < X < b) = F(b-) - F(a)$.
6. $P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-)$.

Proposición 2.27. Toda función de distribución tiene, a lo más, un número numerable de discontinuidades.

El tener una función de distribución permite caracterizar o clasificar a una v.a. Como se mencionó antes, una variable aleatoria es una función que asocia un número real, perfectamente definido, a cada punto muestral, y a veces las v.a. están ya implícitas en los puntos muestrales. Si estas variables aleatorias están definidas sobre espacios muestrales discretos (con número finito o infinito numerable de elementos), se llaman *variables aleatorias discretas* y si es sobre espacios muestrales continuos (con número infinito no numerable de elementos) se llaman *variables aleatorias continuas*.

Definición 2.28 (Variable aleatoria discreta)**.** La v.a. X se llama discreta su su correspondiente función de distribución $F(x)$ es una función constante por pedazos. Sean $x_1, x_2, \ldots$ los puntos de discontinuidad de $F(x)$. En cada uno de estos puntos el tamaño de la discontinuidad es $P(X = x_i) = F(x_i - F(x_i-) > 0$. A la función $f(x)$ que indica estos incrementos se le llama función de probabilidad de X y se define así:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{si } x = x_1, x_2, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de distribución se reconstruye de la siguiente manera:

$$F(x) = \sum_{u \leq x} f(u).$$

Definición 2.29 (Variable aleatoria continua)**.** La v.a. X se llama continua si su correspondiente función de distribución es una función continua.
A su vez, estas v.a.s se clasifican en *absolutamente contínuas, singulares* y *mixtas.*

- *Absolutamente Continua.* La v.a. continua X con función de distribución $F(x)$ se llama absolutamente contínua, si existe una función no negativa e integrable f tal que para cualquier valor de x se cumple

  $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du.$$

  En tal caso la función $f(x)$ se le llama función de densidad de X.

- *Singular.* La v.a. contínua X o su correspondiente distribución $F(x)$, se llama singular si $F'(x) = 0$ casi seguramente[2].

- *Mixtas.* Una v.a. que no es discreta ni continua se lama variable aleatoria mixta.

Proposición 2.30. Toda función de distrubución $F(x)$ se puede escribir como una combinación lineal convexa de una función de distribución discreta $F^d(x)$ y otra contínua $F^c(x)$, es decir, admite la siguiente representación

$$F(x) = \alpha F^d(x) \, + \, (1 - \alpha) F^c(x),$$

en donde $0 \leq \alpha \leq 1$.

Definición 2.31 (Igualdad de Variables Aleatorias)**.** Se dice que dos v.a.s. X e Y son

a) iguales casi seguramente, y se escribe $X = Y$ c.s., o bien $X \overset{c.s.}{=} Y$, si se cumple que $P(X = Y) = 1$. Más generalmente, un evento ocurre casi seguramente si su probabilidad es uno.

b) iguales en distribución, y se escribe $X \overset{d}{=} Y$, si sus correspondientes funciones de distribución coinciden, es decir, si $F_X(x) = F_Y(x)$ para cada número real x.

[2]Se dice que una propiedad Q ocurre casi seguramente si el conjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ en donde la propiedad Q no es válida tiene probabilidad cero, es decir, $P(\Omega_0) = 0$.

Observación 2.32. La igualdad casi segura es más fuerte que la igualdad en distribución, es decir, si X e Y son iguales casi seguramente, entonces son iguales en distribución. Sin embargo, si X e Y tienen la misma distribución, no necesariamente son iguales casi seguramente.

A continuación se exhiben algunas características numéricas adociadas a variables aleatorias. En particular, la definición de *esperanza* y *varianza*, y de manera general, los momentos de una variable aleatoria.
La esperanza de una v.a. es un número que representa el promedio ponderado de sus posibles valores, también se le conoce con el nombre de *media, valor esperado, valor prmedio* ó *valor medio*, y en general, se le denota con la letra μ.

Definición 2.33.

Esperanza. Sea X con función de distribución $F(x)$. La esperanza de X, se denota por $E(X)$, se define como el número

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x),$$

cuando esta integral sea absolutamente convergente, es decir, cuando

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF(x) < \infty,$$

y en tal caso se dice que X es integrable, o que tiene esperanza finita.

En Teoría de la medida se define la esperanza de una variable aleatoria o función medible X mediante la *integral de Lebesgue*, y se denota por:

$$\int_{\Omega} X(\omega) \, dP(\omega).$$

Para el caso en que se desea calcular esperanzas de funciones $g(X)$ de v.a. puede aplicarse directamente la definición de esperanza, pero para ello se requiere encontrar primero la distribución de $g(X)$, lo cual puede no ser fácil en muchos casos. El siguiente teorema establece una forma muy conveniente de calcular la esperanza de $g(X)$, sin conocer la distribución, pero suponiendo conocida la distribución de X.

Proposición 2.34 (Esperanza de una función de una v.a.)**.** Sea X con función de distribución $F_X(x)$, y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Borel medible tal que $g(X)$ tiene esperanza finita, entonces:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dF_X(x).$$

Estas son algunas de las propiedades de la esperanza:

Proposición 2.35 (Propiedades de Esperanza)**.** Sean X e Y con esperanza finita y sea c una constante. Entonces:

1. $E(c) = c$.
2. $E(cX) = cE(X)$.
3. Si $X \geq 0$, entonces $E(X) \geq 0$.
4. Si $X \leq Y$, entonces $E(X) \leq E(Y)$.
5. $E(X + Y) = E(Y) + E(Y)$.

Definición 2.36 (Varianza)**.** La varianza de una v.a. X, denotada por $\mathrm{Var}(X)$, se define como la siguiente esperanza, si ésta existe:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X - (X))^2$$

Proposición 2.37 (Propiedades de la Varianza)**.** Sean X e Y con varianza finita, y sea c una constante. Entonces:

1. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$.
2. $\mathrm{Var}(c) = 0$.
3. $\mathrm{Var}(cX)) = c^2\mathrm{Var}(X)$.
4. $\mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(X)$.
5. $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$
6. En general, $\mathrm{Var}(X + Y) \neq \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$.

Los momentos de una variable aleatoria son números que representan algunas características de la distribución de probabilidad asociada. Bajo ciertas condiciones el conjunto de momentos determinan de manera única a la distribución de probabilidad.

Definición 2.38 (Momentos)**.** Sea X una v.a. con esperanza μ y sea n un número natural. Cuando existe, el número

1. $E(X^n)$ es el n-ésimo momento de X.
2. $E\,|X|^n$ es el n-ésimo momento absoluto de X.
3. $E[(X - \mu)^n]$ es el n-ésimo momento central de X.
4. $E\,|X - \mu|^n$ es el n-ésimo momento central absoluto de X.
5. $E[X(X - 1)\ldots(X - n + 1)]$ es el n-ésimo momento factorial de X.

Observación 2.39. Al determinar las probaiblidades de algunas variables aleatorias discretas y continuas, es común hacer uso de ciertas aproximaciones mediante otras distribuciones para facilitar los cálculos. Así, se pueden aproximar las probabilidades de una binomial, mediante una Poisson, bajo cierto tipo de supuestos, y aproximar a la Binomial y Poisson a partir de la distribución Normal.

1. En muchas aplicaciones se trabaja con experimentos Bernoulli, en donde n es suficientemente grande y p relativamente pequeña, donde $\lambda = np$ es de magnitud considerable. En estos casos, es conveniente aproximar la $\text{Binomial}(x; n, p)$ a través de la distribución Poisson:

$$\text{Binomial}(x; n, p) \approx \text{Poisson}(x; \lambda).$$

2. La aproximación Normal a la Binomial, es conocida como el Teorema de DeMoivre-Laplace y establece que si npq es suficientemente grande y $q = 1 - p$, entonces

$$\text{Binomial}(x; n, p) \approx \text{Normal}(x; np, npq).$$

3. La aproximación Normal a la distribución Poisson, establece que si $\lambda > 0$ es suficientemente grande, entonces

$$\text{Poisson}(x; \lambda) \approx \text{Normal}(x; \lambda, \lambda).$$

2.2. Probabilidad Borrosa

Las nociones de un evento y su probabilidad constituye el concepto fundamental de la Teoría de Probabilidad. Como ya se ha definido, un evento es una colección específica de puntos en el espacio muestra. En contraste, en la experiencia diaria, frecuentemente se encuentran situaciones en las cuales un "evento" dado no está bien definido y pareciera no estar completamente delimitado. Por ejemplo, los eventos definidos como "es un día *cálido*", "x es *aproximadamente* igual a 5", "Se deja caer una moneda 20 veces y se observan *muchas más* águilas que soles", son difusos por la impresición del significado de las palabras resaltadas.
Usando el concepto de conjunto borroso, las nociones de un evento y su probabilidad pueden ser extendidos a eventos borrosos como los ejemplos anteriores. Dicha extensión puede ampliar considerablemente el ámbito de aplicabilidad de la teoría de la probabilidad, sobre todo en aquellos ámbitos en los que borrosidad es un fenómeno generalizado.

2.2.1. Evento Borroso

Se asume, por simplicidad, que Ω es un espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$, y el espacio de probabilidad estás dado por la tripleta $(\mathbb{R}^n, \mathscr{A}, P)$, donde $\mathscr{A}$ es la σ-álgebra

de conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^n$ y P una medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}^n$. Un punto en $\mathbb{R}^n$ es denotado por x.
Sea $A \in \mathscr{A}$, entonces, la probabilidad de A puede ser expresada como

$$P(A) = \int_A dP$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mu_A(x)\, dP. \\ &= E(\mu_A) \end{aligned}$$

donde μ_A denota la función indicadora de A ($\mu_A(x) = 0$ o 1) y $E(\mu_A)$ es la esperanza de μ_A. Y es en la última ecuación donde puede fácilmente ser extendido al concepto de evento borroso mediante el uso del concepto de conjunto borroso.
Específicamente, dado un conjunto A en $\mathbb{R}^n$ se puede definir a través de la función de pertenencia $\mu_A : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ el conjunto borroso $\widetilde{A}$. Ésta función identifica a cada x en $\mathbb{R}^n$ su "grado de pertenencia", $\mu_{\widetilde{A}}(x)$. en A.

Definición 2.40 (Evento Borroso)**.** Sea $(\mathbb{R}^n, \mathscr{A}, P)$ un espacio de probabilidad en el cual $\mathscr{A}$ es la σ-álgebra de conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^n$ y P una medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces, un evento borroso en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto borroso $\widetilde{A}$ en $\mathbb{R}^n$ cuya función de pertenencia, $\mu_{\widetilde{A}} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ es Borel medible.

Definición 2.41 (Probabilidad de un Evento Borroso)**.** La probabilidad de un evento borroso $\widetilde{A}$ está definida por la integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\begin{aligned} P(\widetilde{A}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mu_{\widetilde{A}}(x)\, dP \\ &= E(\mu_{\widetilde{A}}), \end{aligned} \tag{1}$$

donde P es la función de probabilidad. Ahora bien, si el conjunto referencial Ω es discreto, y se expresa con $p(x)$ a la probabilidad de un elemento x, entonces:

$$P(\widetilde{A}) = \sum_{\Omega} \mu_{\widetilde{A}}(x) p(x)$$

y si es continuo:

$$P(\widetilde{A}) = \int_{\Omega} \mu_{\widetilde{A}}(x) f(x) dx$$

Las definiciones de evento borroso y su probabilidad constituyen una base para la generalización dentro del marco de la teoría de conjuntos borrosos.Los siguientes resultados de operaciones con conjuntos borrosos fueron explicados previamente en el Capítulo 1 y se retoman para definir la probabilidad en dichos conjuntos:

Recordatorio 2.42 (Operaciones con Conjuntos Borrosos)**.**

1. **Contención.** $\widetilde{A} \subset \widetilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\widetilde{A}}(x) \leq \mu_{\widetilde{B}}(x) \quad \forall x.$

2. **Igualdad.** $\widetilde{A} = \widetilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\widetilde{A}}(x) = \mu_{\widetilde{B}}(x) \quad \forall x.$

3. **Complemento** El complemento de $\widetilde{A}$ se determina por

$$\mu_{\widetilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x) \quad \forall x.$$

4. **Unión** La unión $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ se obtiene como

$$\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x) = \text{máx}\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\} \quad \forall x.$$

5. **Intersección** La intersección $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ está dada por

$$\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x) = \text{mín}\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\} \quad \forall x.$$

6. **Producto** El producto $\widetilde{A}\widetilde{B}$ se obtiene de

$$\mu_{\widetilde{A}\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x)\mu_{\widetilde{B}}(x) \quad \forall x.$$

Ahora algunas identidades derivadas directamente de la ecuación (1):

Proposición 2.43.

1. $P(\emptyset) = 0$

2. $P(\widetilde{A}^c) = 1 - P(\widetilde{A})$

3. $\widetilde{A} \subset \widetilde{B} \Rightarrow P(\widetilde{A}) \leq P(\widetilde{B}).$

4. $P(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) = P(\widetilde{A}) + P(\widetilde{B}) - P(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}).$

5. $P(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}) = P(\widetilde{A}) + P(\widetilde{B}) - P(\widetilde{A}\widetilde{B}).$

Definición 2.44 (Conjuntos Borrosos de Borel)**.** Un conjunto borroso $\widetilde{A}$ se llama Conjunto Borroso de Borel si todos sus conjuntos de nivel para $0 \leq \alpha \leq 1$ son conjuntos de Borel.

A partir de que la función de pertenencia de un evento borroso sea medible, se sigue que todo lo asociado a conjuntos de nivel con un evento borroso son conjuntos de Borel y por tanto, un evento borroso es un conjunto borroso de Borel.
También es bien sabido que si $\mu_{\widetilde{A}}$ y $\mu_{\widetilde{B}}$ son Borel medibles, también lo son $\max\left\{\mu_{\widetilde{A}}, \mu_{\widetilde{B}}\right\}$, $\min\left\{\mu_{\widetilde{A}}, \mu_{\widetilde{B}}\right\}$, $\mu_{\widetilde{A}} + \mu_{\widetilde{B}}$, y $\mu_{\widetilde{A}}\mu_{\widetilde{B}}$. Ésto mismo es válido, de manera más general, para cualquier colección infinita de funciones de Borel medibles. Consecuentemente se puede afirmar que, tal como los conjuntos de Borel, los conjuntos borrosos de Borel también forman una σ-álgebra con respecto a las operaciones de complemento, unión e intersección. También cabe destacar que los conjuntos borrosos cumplen la ley distributiva

$$(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) \cap \widetilde{C} = (\widetilde{A} \cup \widetilde{C}) \cap (\widetilde{B} \cup \widetilde{C}).$$

pero no necesariamente se cumple lo siguiente:

$$(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B})\widetilde{C} = \widetilde{A}\widetilde{C} \oplus \widetilde{B}\widetilde{C}.$$

Empleando el principio de inducción y haciendo uso de las igualdades vistas anteriormente, se obtiene las siguientes identidades para conjuntos borrosos, similar a la de conjuntos crisp:

$$P(\bigcup_{i=1}^{m} \widetilde{A}_i) = \sum_i P(\widetilde{A}_i) - \sum_{i,j} P(\widetilde{A}_i \cap \widetilde{A}_j) + \ldots + (-1)^m P(\cap_i \widetilde{A}_i)$$

$$P(\widetilde{A}_1 \oplus \ldots \oplus \widetilde{A}_m) = \sum_i P(\widetilde{A}_i) - \sum_{i,j} P(\widetilde{A}_i \widetilde{A}_j) + \ldots + (-1)^m P(\widetilde{A}_1 \ldots \widetilde{A}_m)$$

2.2.2. Probabilidad Borrosa

Es ya sabido, que la Teoría de Probabilidad se encarga de modelar eventos aleatorios o bien, sucesos en los que se encuentra involucrada cierta *incertidumbre* con respecto a su resultado. Tales resultados se ven afectados de alguna manera ya sea por la casualidad (o azar) e incluso por la opinión particular de un experto que analice los posibles resultados.
La probabilidad clásica entonces, se refiere a la ocurrencia de ciertos eventos bien definidos dentro de un conjunto dado de posibilidades, mientras que la teoría de conjuntos borrosos trata conceptos poco claros, midiendo así el "grado" con el que se cumple cierto concepto o evento. La aplicación que tienen ambas teorías constituye en fusión, una herramienta de uso más amplio en el cálculo de probabilidades como lo dijeron Dubois y Prade [1994]:

"Los conjuntos difusos y la Probabilidad son dos herramientas complementarias (no contrarias) y existen sistemas que utilizan ambas herramientas..."

Tanto en este capítulo como en el siguiente, adoptaremos la notación de $(a/b/c)$ para describir un número triangular, en lugar de la notación (a, b, c) y

$(a/b, c/d)$ para los números borrosos trapezoidales en lugar de (a, b, c, d), a la que nos referimos con anterioridad. Será de utilidad también calcular los $\alpha-$cortes de una probabilidad borrosa, la cual podrá resolverse como un problema de optimización. Dicho problema consistirá en determinar el máximo y el mínimo de una función $f(p_1, \ldots, p_n)$ sujeta a ciertas restricciones. En esencia se considerarán dos tipos de problemas de optimización, los cuales se describen en la observación (3.15).

Consideremos primeramente a un conjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y P una medida de probabilidad definida en el conjunto potencia de X, tal que $P(\{x_i\}) = a_i$, $1 \leq i \leq n$ y $a_i \in (0, 1)$ donde $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. En la práctica se requiere que todos los valores de a_i se conozcan con exactitud. En algunos casos éstos valores son estimados o son dados por expertos. Sin embargo, es usual que al menos uno de los valores a_i sea desconocido y en este caso podemos modelar la incertidumbre del o los valores desconocidos a través de números borrosos. Si algunos valores se conocen exactamente, recordemos que podemos escribirlos como números borrosos, ya que los números crisp son un caso particular de los números borrosos.

Debido a la posible incertidumbre en los valores a_i, sustituiremos dicho valor por el número borroso $\widetilde{a}_i$, obteniendo en X una distribución de probabilidad borrosa, en este caso discreta (finita). Escribiremos entonces $\overline{P}$ para la probabilidad difusa de P y de este modo $\overline{P}(\{x_i\}) = \widetilde{a}_i$, con $\widetilde{a}_i \in (0, 1)$.

Es importante observar la diferencia entre la probabilidad borrosa que acabamos de definir y la Definición 2.41. Según la Definición 2.41 tenemos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ y un evento borroso $\widetilde{A}$ al cual le calculamos su probabilidad de manera natural $P(\widetilde{A})$, según la ecuación (1). En este caso $P(\widetilde{A}) \in [0, 1]$ es un número crisp. Por otro lado, dado un espacio de probailidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, consideramos la probabilidad borrosa $\overline{P}$ de un evento crisp $A \in \mathscr{A}$. En este caso $\overline{P}(A)$ es un número borroso.

Habiendo explicado lo anterior y enfatizando en que los temas siguientes están relacionados con la probabilidad borrosa, procedemos a desarrollarla. Sea A un subconjunto crisp de X, es decir, $A \subset X$. Dado un espacio de probabilidad, sabemos cómo calcular $P(A)$, sin embargo requerimos conocer $\overline{P}(A)$. Para ello recurrimos a la aritmética borrosa, la cual describimos en el Capítulo 1. Hemos mencionado que puede existir incertidumbre acerca de los valores a_i, sin embargo sabemos con seguridad contamos con distribución de probabilidad discreta. Esto es, para $a_i \in \widetilde{a}_i[\alpha]$ se tiene que $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Esta es la premisa para desarrollar la probabilidad difusa, la cual se basa en la aritmética borrosa restringida. Supongamos que $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, para $1 \leq k < n$, entonces definimos

$$\overline{P}(A)[\alpha] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i : \mathbf{S} \right\}, \tag{2}$$

para $0 \leq \alpha \leq 1$ y donde $\mathbf{S}$ se refiere a aquellos "$a_i \in \widetilde{a}_i[\alpha]$ tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, con $1 \leq i \leq n$." A esto nos referimos con aritmética difusa restringida. Notemos que primeramente escogemos una medida de probabilidad discreta a través de los $\alpha-$cortes antes de calcular la probabilidad $\overline{P}$ en la ecuación (2). Notemos además que $\overline{P}(A)[\alpha]$ **no es** la suma de los intervalos[3] $\widetilde{a}_i[\alpha]$, $1 \leq i \leq k$. Recordemos que los $\alpha-$cortes de un número borroso, caracterizan a dicho número, por lo que debemos demostrar que $\overline{P}(A)[\alpha]$ son precisamente los $\alpha-$cortes del número borroso $\overline{P}(A)$. Antes de esto requerimos algunas definiciones.

Definamos

$$\mathbf{S} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) : \; x_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}. \tag{3}$$

y también definamos a

$$Dom[\alpha] = \Big(\prod_{i=1}^{n} \widetilde{a}_i[\alpha] \Big) \cap \mathbf{S}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{4}$$

Ahora definimos a una función $f : Dom[\alpha] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{k} a_i, \quad (a_1, \ldots, a_n) \in Dom[\alpha]. \tag{5}$$

Notemos que f es continua y como $Dom[\alpha]$ es cerrado, conexo y acotado, entonces el rango de f es un intervalo cerrado y acotado en los reales. Definimos así

$$\Gamma[\alpha] = f\big(Dom[\alpha]\big), \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{6}$$

Ahora, de la ecuación (2), tenemos que

$$\overline{P}(A)[\alpha] = \Gamma[\alpha], \quad \forall \; 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{7}$$

Por lo tanto $\overline{P}(A)$ es un número borroso ya que está normalizado, es decir, $\overline{P}(A)[1] \neq \emptyset$. De estas definiciones tenemos lo siguiente:

Proposición 2.45 (Propiedades)**.** Sea X un conjunto y $A, B \subset X$.

1. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $\overline{P}(A) + \overline{P}(B) \geq \overline{P}(A \cup B)$.
2. Si $A \subset B$ y $\overline{P}(A)[\alpha] = [p_{a_1}(\alpha), p_{a_2}(\alpha)]$ y $\overline{P}(B)[\alpha] = [p_{b_1}(\alpha), p_{b_2}(\alpha)]$, entonces $p_{a_i}(\alpha) \leq p_{b_i}(\alpha)$ para $i = 1, 2$ y $0 \leq \alpha \leq 1$.

[3]La suma de intervalos se calcula a partir de la aritmética de intervalos vistos en las Operaciones con Números Borrosos de la sección **1.2.2.**

3. $0 \leq \overline{P}(A) \leq 1, \quad \forall\ A$. En particular, $\overline{P}(\emptyset) = 0$ y $\overline{P}(X) = 1$, donde el cero y uno son números crisp.

4. $\overline{P}(A) + \overline{P}(A^c) \geq 1$.

5. Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $\overline{P}(A \cup B) \leq \overline{P}(A) + \overline{P}(B) - \overline{P}(A \cap B)$.

Nótese cómo los símbolos $\leq$ y $\geq$ en la Proposición 2.45 se refieren a $\subset$ y $\supset$ respectivamente. Se hará uso de esta notación en lo subsecuente por facilidad y para mantener cierta analogía con la probabilidad clásica. ***Demostración:*** Los incisos 2) y 3) son claramente ciertos. Notemos que el inciso 4) se sigue directamente de los incisos 1) y 3). Por lo tanto, basta demostrar los incisos 1) y 5).

1. Basta demostrar que

$$\big(\overline{P}(A) + \overline{P}(B)\big)[\alpha] = \overline{P}(A)[\alpha] + \overline{P}(B)[\alpha] \supset \overline{P}(A \cup B)[\alpha], \quad \forall\ \alpha.$$

Supongamos por simplicidad que $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ y $B = \{x_\ell, \ldots, x_m\}$ para $1 \leq k < \ell \leq m \leq n$, donde $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Nuevamente, sea $\mathbf{S}$ la proposición de aquellos "$a_i \in \widetilde{a}_i[\alpha]$ tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, con $1 \leq i \leq n$." Entonces debemos demostrar según la ecuación (2) que:

$$\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i : \mathbf{S}\right\} + \left\{\sum_{i=\ell}^{m} a_i : \mathbf{S}\right\} \supset \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=\ell}^{m} a_i : \mathbf{S}\right\}. \tag{8}$$

Sea $r = s + t$ un elemento del lado derecho de la ecuación (8), donde $s = a_1 + \cdots + a_k$ y $t = a_\ell + \cdots + a_m$. Entonces s pertenece al primer miembro y t al segundo miembro del lado izquierdo de la ecuación (8), obteniendo lo la contención deseada.

5. Con la misma notación que en la demostración del inciso anterior, debemos demostrar que

$$\overline{P}(A)[\alpha] + \overline{P}(B)[\alpha] - \overline{P}(A \cap B)[\alpha] \supset \overline{P}(A \cup B)[\alpha]$$

o equivalentemente

$$\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i : \mathbf{S}\right\} + \left\{\sum_{i=\ell}^{m} a_i : \mathbf{S}\right\} - \left\{\sum_{i=\ell}^{k} a_i : \mathbf{S}\right\} \supset \left\{\sum_{i=1}^{m} a_i : \mathbf{S}\right\} \tag{9}$$

Sea r un elemento del lado derecho de la ecuación (9). Entonces se puede escribir a r como $r = s + t - u$, donde $s = a_1 + \cdots + a_k$, $t = a_\ell + \cdots + a_m$ y $u = a_\ell + \cdots + a_k$. De esto, obtenemos que r está en el lado izquierdo de la ecuación (9).

$\blacksquare$

Con el siguiente Ejemplo exhibimos que no necesariamente se obtienen igualdades en los incisos 1) y 5) de la Proposición 2.45.

Ejemplo 2.46. Sean $n = 5$, $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{x_4, x_5\}$ y $a_i = 0.2$ para $i = 1, \ldots, 5$. Supongamos que todas las probabilidades son desconocidas excepto a_3. Entonces suponemos que $\widetilde{a}_1 = \widetilde{a}_2 = \widetilde{a}_4 = \widetilde{a}_5(0.19/0.2/0.21)$ y $\widetilde{a}_3 = 0.2$. Entonces $\overline{P}(A)[0] = [0.38, 0.42]$ dado que $p_1 = p_2 = 0.19$ y $p_1 = p_2 = 0.21$ son factibles. Además determinamos $\overline{P}(B)[0] = [0.38, 0.42]$, de donde el lado derecho de la ecuación (8) para $\alpha = 0$ es el intervalo $[0.76, 0.84]$. Sin embargo, $\overline{P}(A \cup B)[0] = [0.8, 0.8]$. Por lo tanto, para A y B disjuntos, podemos tener que $\overline{P}(A \cup B)[\alpha]$ es un subconjunto propio de $\overline{P}(A)[\alpha] + \overline{P}(B)[\alpha]$.

Sea ahora $n = 6$, $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $B = \{x_3, x_4, x_5\}$, donde $a_i = 0.1$ para $i = 1, \ldots, 5$ y $a_6 = 0.5$. Asumamos que todas las probabilidad son inciertas y sustituyamos $\widetilde{a}_i = (0.05/0.1/0.15)$ para $i = 1, \ldots, 5$ y $\widetilde{a}_6 = (0.25/0.5/0.75)$. De esto obtenemos que $\overline{P}(A \cup B)[0] = [0.25, 0.75]$, $\overline{P}(A)[0] = \overline{P}(B)[0] = [0.15, 0.45]$ y $\overline{P}(A \cap B)[0] = [0.05, 0.15]$. De la aritmética de intervalos tenemos que

$$[0.25, 0.75] \neq [0.15, 0.45] + [0.15, 0.45] - [0.05, 0.15] = [0.15, 0.85] \qquad (10)$$

Por lo tanto $\overline{P}(A \cup B)[\alpha]$ puede ser un subconjunto propio de $\overline{P}(A)[\alpha] + \overline{P}(B)[\alpha] - \overline{P}(A \cap B)[\alpha]$.

Más aun, es posible obtener $\overline{P}(A)[\alpha] + \overline{P}(B)[\alpha] = \overline{P}(A \cup B)[\alpha]$ cuando $A \cap B = \emptyset$. Sea $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $A = \{x_1\}$, $B = \{x_3\}$ donde $\widetilde{a}_1 = \widetilde{a}_3 = (0.3/0.33/0.36)$ y $\widetilde{a}_2 = (0.28/0.34/0.40)$. Entonces $\overline{P}(A) = \widetilde{a}_1$ y $\overline{P}(B) = \widetilde{a}_3$, de donde $\overline{P}(A \cup B) = (0.6/0.66/0.72)$. Los $\alpha-$cortes de $\overline{P}(A \cup B)$ son

$$\overline{P}(A \cup B)[\alpha] = \{a_1 + a_2 : \mathbf{S}\} \qquad (11)$$

Haciendo $\widetilde{a}_i[\alpha] = [a_{i_1}(\alpha), a_{i_2}(\alpha)]$, para $i = 1, 2, 3$, podemos evaluar la ecuación (11) usando los puntos extremos de los $\alpha-$cortes ya que para toda α, existe $a_2 \in \widetilde{a}_2[\alpha]$ tal que $a_{1_1}(\alpha) + a_2 + a_{3_1}(\alpha) = 1$ y para cada α, existe $a_2' \in \widetilde{a}_2[\alpha]$ tal que $a_{1_2}(\alpha) + a_2' + a_{3_2}(\alpha) = 1$. Entonces

$$\overline{P}(A \cup B)[\alpha] = [a_{1_1}(\alpha) + a_{3_1}(\alpha), a_{1_2}(\alpha) + a_{3_2}(\alpha)] \qquad (12)$$

de donde $\overline{P}(A \cup B) = (0.6/0.66/0.72)$.

Hasta ahora hemos trabajado con distribuciones de probabilidad difusas finitas. En este sentido determinaremos la media y varianza de dichas distribuciones.

Definición 2.47. Dada una distribución de probabilidad borrosa finita, la media o esperanza borrosa definida por sus $\alpha-$cortes está dada por

$$\widetilde{\mu}[\alpha] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i : \mathbf{S} \right\} \qquad (13)$$

donde donde $\mathbf{S}$ se refiere a aquellos "$a_i \in \widetilde{a}_i[\alpha]$ tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, con $1 \leq i \leq n$."

Definición 2.48. Dada una distribución de probabilidad borrosa finita, la varianza borrosa definida a partir de sus $\alpha-$cortes está dada por

$$\widetilde{\sigma}^2[\alpha] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 : \mathbf{S} \right\} \tag{14}$$

En este caso, tanto $\widetilde{\mu}$ y $\widetilde{\sigma}^2$ son números borrosos, ya que $\widetilde{\mu}[\alpha]$ y $\widetilde{\sigma}^2[\alpha]$ son intervalos, cerrados y acotados, para toda $0 \leq \alpha \leq 1$. Esto se sigue de manera similar a lo expuesto previamente en la explicación de $\overline{P}(A)[\alpha]$.

Ejemplo 2.49. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ con $a_0 = a_4 = \frac{1}{16}$, $a_1 = a_3 = \frac{1}{4}$ y $a_2 = \frac{3}{8}$. Entonces, $\mu = 2$ y $\sigma^2 = 1$. Si hay incertidumbre sólo en a_1 y a_3, sustituyamos éstos por $\widetilde{a}_1$ y $\widetilde{a}_3$ respectivamente. Supongamos además que $\widetilde{a}_1 = \widetilde{a}_3 = (0.2/0.25/0.3)$. Primero calculemos $\widetilde{\mu}[\alpha]$. Usando los valores numéricos de x_i, a_0, a_2, a_4 y $a_1 \in \widetilde{a}_1[\alpha]$ con $a_3 = 0.5 - a_1$ en $\widetilde{a}_3$ tal que la suma de los a_i sea uno. Entonces la fórmula para la media crisp es $\mu = f_1(a_1) = 2.5 - 2a_1$, la cual sólo de pende de a_1. Observamos que $\partial f_1 / \partial a_1 < 0$. Esto nos permite calcular los extremos del intervalo $\widetilde{\mu}[\alpha]$, obteniendo así $\widetilde{\mu}[\alpha] = [1.9 + 0.1\alpha, 2.1 - 0.1\alpha]$, es decir, $\widetilde{\mu} = (1.9/2/2.1)$ es un número triangular. Dado que $\widetilde{a}_1[\alpha] = [0.2 + 0.05\alpha, 0.3 - 0.05\alpha]$, utilizamos $0.3 - 0.05\alpha$ para obtener $1.9 + 0.1\alpha$ y usamos $0.2 + 0.05\alpha$ para obtener $2.1 - 0.1\alpha$.
Hacemos algo similar con la fórmula crisp para σ^2 y deducimos que $\sigma^2 = f_2(a_1) = 0.75 + 2a_1 - 4a_1^2$, para $a_1 \in \widetilde{a}_1[\alpha]$. Si $\widetilde{\sigma}^2[\alpha] = [\sigma_1^2(\alpha), \sigma_2^2(\alpha)]$ determinamos de $f_2(a_1)$ que $\sigma_1^2(\alpha) = f_2(0.2 + 0.05\alpha)$, pero $\sigma_2^2(\alpha) = 1, \ \forall \ \alpha$. Por lo que los $\alpha-$cortes de la varianza borrosa son $[0.99 + 0.02\alpha - 0.01\alpha^2, 1]$ para $0 \leq \alpha \leq 1$.

Notemos que pueden ser complicados los cálculos de los intervalos $\overline{P}(A)[\alpha]$ en la ecuación (2), $\widetilde{\mu}[\alpha]$ en la ecuación (13) y $\widetilde{\sigma}^2$ en la ecuación (14). Lo que realmente requerimos es determinar los puntos extremos de dichos intervalos, los cuales pueden verse como un problema de optimización no-lineal. Por ejemplo, para $\widetilde{\sigma}^2[\alpha]$ tendríamos

$$\sigma_1^2(\alpha) = \text{mín} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 a_i : \mathbf{S} \right\} \tag{15}$$

y

$$\sigma_2^2(\alpha) = \text{máx} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 a_i : \mathbf{S} \right\} \tag{16}$$

donde $\mathbf{S}$ es la proposición “$a_i \in \widetilde{a}_i[\alpha], 1 \leq i \leq n$, $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$.” Para estimar $\sigma_i^2(\alpha)$ es posible hacer uso de algoritmos genéticos o evolucionarios para ciertos valores de α.

2.2.3. Probabilidad Condicional Borrosa

Sea $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $B = \{x_\ell, \ldots, x_m\}$ para $1 \leq \ell \leq k \leq m \leq n$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces se puede definir la *probabilidad condicional borrosa* de A dado B, denotada por $\overline{P}(A|B)$, como:

$$\overline{P}(A|B) = \left\{ \frac{\sum_{i=\ell}^{k} a_i}{\sum_{i=\ell}^{m} a_i} : \mathbf{S} \right\} \tag{17}$$

En esta definición el numerador, es la suma de las a_i en la intersección de A y B; mientras que el denominador es la suma de las a_i en B. Otra posible definición puede ser

$$\overline{P}(A|B) = \frac{\overline{P}(A \cap B)}{\overline{P}(B)} \tag{18}$$

La definición de la ecuación (18) parece muy natural, sin embargo, al estar involucrada la aritmética de números difusos, puede salir del intervalo $[0, 1]$ como se muestra en el Ejemplo 2.50.
Sólo la definición dada por la ecuación (17) produce siempre una probabilidad borrosa en $[0, 1]$ y por tanto, será la utilizada de aquí en adelante.

Ejemplo 2.50. Sean $A = \{x_1, x_2\}$ y $B = \{x_2, x_3\}$ con $n = 4$ donde todas las a_i son inciertas y proponemos $\widetilde{a}_1 = (0.1/0.2/0.3)$, $\widetilde{a}_2 = (0.2/0.3/0.4)$, $\widetilde{a}_3 = (0/0.1/0.2)$ y $\widetilde{a}_4 = (0.3/0.4/0.5)$. Haciendo uso de la definición según la ecuación (18) obtendríamos el número borroso $[(0.2/0.3/0.4)]/[(0.2/0.4/0.6)]$ cuyo $\alpha = 0-$corte es el intervalo $[1/3, 2]$, lo cual no define una probabilidad.

Por otro lado, haciendo uso de la definición dada en la ecuación (17) requerimos evaluar

$$\overline{P}(A|B) = \left\{ \frac{a_2}{a_2 + a_3} : \mathbf{S} \right\} \tag{19}$$

para $\alpha \in [0, 1]$. Definamos $f(a_2, a_3) = \frac{a_2}{a_2+a_3}$. Notemos que $\partial f/\partial a_2 > 0$ y $\partial f/\partial a_3 < 0$. Esto nos permite encontrar los puntos extremos que definen los $\alpha-$cortes de la probabilidad condicional borrosa, obteniendo así

$$\overline{P}(A|B)[\alpha] = [0.5 + 0.25\alpha, 1 - 0.25\alpha], \quad \forall\ 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{20}$$

Sean $\widetilde{a}_i[\alpha] = [a_{i_1}(\alpha), a_{i_2}(\alpha)]$ para $i = 1, \ldots, 4$. Observemos que $a_{2_1}(\alpha)$ y $a_{3_2}(\alpha)$ son factibles; donde también $a_{2_2}(\alpha)$ y $a_{3_1}(\alpha)$ son factibles. De este modo obtuvimos el extremo izquierdo del intervalo de la ecuación (20) como sigue: 1) sustituimos el extremo izquierdo del intervalo $\widetilde{a}_2[\alpha]$ el cual es $0.2 + 0.1\alpha$, por a_2 y 2) sustituimos el extremo derecho del intervalo $\widetilde{a}_3[\alpha]$ el cual es $0.2 - 0.1\alpha$ por a_3. Similarmente, para obtener el extremo derecho del intervalo de la ecuación (20): 1) se sustituyó el extremo derecho del intervalo $\widetilde{a}_2[\alpha]$ por a_2 y 2) se reemplazó el extremo izquierdo del intervalo $\widetilde{a}_3[\alpha]$ por a_3. Finalmente obtenemos que

$$\overline{P}(A|B) = (0.5/0.75/1),$$

es decir $\overline{P}(A|B)$, un número borroso triangular.

A continuación se presentan sus propiedades básicas de la Definición de probabilidad condicional borrosa dada por la ecuación (17).

Proposición 2.51 (Propiedades Básicas)**.**

1. $0 \leq \overline{P}(A|B) \leq 1$.
2. $\overline{P} = (B|B) = 1$, uno *crisp*.
3. $\overline{P}(A_1 \cup A_2|B) \leq \overline{P}(A_1|B) + \overline{P}(A_2|B)$, si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
4. $\overline{P}(A|B) = 1$, uno crisp, si $B \subseteq A$; y
5. $\overline{P}(A|B) = 0$, cero crisp, si $B \cap A = \emptyset$.

Demostración: Los incisos 1), 2) y 4) se siguen directamente de la ecuación (17). Ahora, si definimos el valor de una suma vacía como cero en la ecuación (17) entonces se cumple el inciso 5). Faltaría demostrar el inciso 3). Entonces nos basta probar que

$$\overline{P}(A_1 \cup A_2|B)[\alpha] \subset \overline{P}(A_1|B)[\alpha] + \overline{P}(A_2|B)[\alpha], \ \forall \ \alpha \in [0, 1].$$

Fijemos α y sea $x \in \overline{P}(A_1 \cup A_2|B)[\alpha]$. Entonces $x = \frac{r+s}{t}$ donde r es la suma de todos los a_i para los que $x_i \in A_1 \cap B$; s es la suma de los a_i para los $x_i \in A_2 \cap B$ y t es la suma de los a_i para los $x_i \in B$. Como la suma $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ para $a_i \in \widetilde{a}_i[\alpha]$ entonces $r/t \in \overline{P}(A_1|B)[\alpha]$ y $s/t \in \overline{P}(A_2|B)[\alpha]$. Por lo tanto $x \in \overline{P}(A_1|B)[\alpha] + \overline{P}(A_2|B)[\alpha]$ ■

2.2.4. Independencia Borrosa

Se dice que dos eventos A y B son fuertemente independientes si:

$$\overline{P}(A|B) = \overline{P}(A) \qquad \text{y} \qquad \overline{P}(B|A) = \overline{P}(B).$$

No obstante, la igualdad en las ecuaciones anteriores a veces son difíciles de cumplir, ya que se tiene una definición más debil de independencia, que enuncia que A y B son débilmente independientes si:

$$\overline{P}(A|B)[1] = \overline{P}(A)[1] \qquad \text{y} \qquad \overline{P}(B|A) = \overline{P}(B)[1].$$

En la versión de independencia débil, únicamente se requiere la igualdad para el núcleo (donde los valores de la función de pertenencia son iguales a uno) de los números borrosos. Claramente, si dos eventos son fuertemente independientes, son débilmente independientes.

Existe también la definición de independencia entre dos eventos A y B, que establece que tales sucesos son independientes si: $\overline{P}(A \cap B) = \overline{P}(A)\overline{P}(B)$, pero debido a la multiplicación borrosa, este supuesto es difícil de sostener, de manera general. De este modo se adopta la primera como definición formal de independencia borrosa.

Ejemplo 2.52. Sean $n = 4$, $\widetilde{a}_i = (0.2/0.25/0.3)$, $\forall\ i$, $A = \{x_1, x_2\}$ y $B = \{x_2, x_3\}$. Entonces $\overline{P}(A) = (0.4/0.5/0.6) = \overline{P}(B)$. Para determinar a $\overline{P}(A|B)$ necesitamos calcular

$$\overline{P}(A|B)[\alpha] = \left\{\frac{a_2}{a_2 + a_3} : \mathbf{S}\right\},\ \forall\ \alpha \tag{21}$$

Como en el Ejemplo 2.50, obtenemos que $\overline{P}(A|B) = (0.4/0.5/0.6) = \overline{P}(B)$. Análogamente tenemos que $\overline{P}(B|A) = (0.4/0.5/0.6) = \overline{P}(B)$, por lo que A y B son fuertemente independientes.

Para exhibir que la segunda definición de independencia no se cumple por lo general, tenemos que $\overline{P}(A \cap B) = \widetilde{a}_2 = (0.2/0.25/0.3)$. Pero $\overline{P}(A)\overline{P}(B) \approx (0.16/0.25/0.36)$, una aproximación a un número borroso triangular. Aun cuando $\overline{P}(A|B)$, $\overline{P}(A)$ y $\overline{P}(B)$ son números borrosos triangulares, $\overline{P}(A)\overline{P}(B)$ no es un número triangular.

Habiendo establececido las propiedades básicas de independencia borrosa, recordardemos las mencionadas en la teoría de probabilidad clásica. Se sabe que si A y B son independientes, lo son también A y B^c; A^c y B; y A^c y B^c. Notemos que en el Ejemplo 2.52, A y B son fuertemente independientes; también lo son A y B^c, así como A^c y B, y también A^c y B^c. Sin embargo, este resultado puede no ser cierto para independencia fuerte y probabilidad borrosas como lo muestra el siguiente Ejemplo.

Ejemplo 2.53. Sea $n = 4$ con $\widetilde{a}_i = (0.2/0.25/0.30)$ para $i = 1, 2, 3$ y $\widetilde{a}_4 = (0.1/0.25/0.4)$ donde $A = \{x_1, x_2\}$ y $B = \{x_2, x_3\}$. De manera similar que en el Ejemplo 2.52 obtenemos que A y B son fuertemente independientes. Sin embargo A y B^c no lo son, es decir, $\overline{P}(A|B^c) \neq \overline{P}(A)$. Sabemos que $\overline{P}(A) = (0.4/0.5/0.6)$. Para encontrar los $\alpha-$cortes de $\overline{P}(A|B^c)$ requerimos calcular

$$\left\{\frac{a_1}{a_1 + a_4} : \mathbf{S}\right\} \tag{22}$$

Notemos que en la ecuación (22) la fracción es una función creciente para a_1 y decreciente para a_4. Por lo que obtenemos

$$\overline{P}(A|B^c)[\alpha] = \left[\frac{0.2 + 0.05\alpha}{0.6 - 0.1\alpha}, \frac{0.3 - 0.05\alpha}{0.4 + 0.1\alpha}\right],\ \forall\ \alpha \in [0, 1] \tag{23}$$

Por lo tanto $\overline{P}(A|B^c) \approx (0.33/0.5/0.75)$, de donde A y B^c no son fuertemente independientes.

2.2.5. Teorema de Bayes

Sea A_i, $1 \leq i \leq m$ y una partición de $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Tal que las A_i son no vacías y mutuamente disjuntas, y su unión es X.
Supóngase que no se conoce la probabilidad de A_i, pero se conoce su probabilidad condicional dado cierto estado de la naturaleza. Sean tales estados de la

naturaleza, el conjunto finito de eventos posibles denotado por $S = \{S_1, \ldots, S_K\}$ sobre los cuales no se tiene control. Entonces se tiene que:

$$a_{ik} = P(A_i|S_k)$$

para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq k \leq K$.

Si el estado operativo de la naturaleza es S_k, a_{ik} proporciona las probabilidades de los eventos A_i. Pero no se conocen las probabildades de los estados de la naturaleza, una posible solución sería solicitar la ayuda de un grupo de expertos para que den sus estimaciones para $a_k = P(S_k)$ $1 \leq k \leq K$ (también llamada *distribución inicial a priori* sobre los estados de la naturaleza), y a partir de estas estimaciones construir probabilidades borrosas $\widetilde{a}_k$.
Utilizando la fórmula de Bayes, y probabilidades crisp para los estados de la naturaleza tenemos:

$$P(S_k|A_j) = \frac{P(A_j|S_k)P(S_k)}{\sum_{k=1}^{K} P(A_j|S_k)P(S_k)}$$

para $1 \leq k \leq K$.

La $a_{kj} = P(S_k|A_j)$, $1 \leq k \leq K$, es la *distribución final* sobre los estados de la naturaleza.
Este resultado puede ser aplicado, usando las a_{ik} y la distribución inicial a_k para clacular $P(A_i)$ de la siguiente manera:

$$P(A_i) = \sum_{k=1}^{K} P(A_i|S_k)P(S_k)$$

para $1 \leq i \leq m$, es decir, la fórmula de probabilidad total

Si se reúnen algunos datos y se observa que evento A_j ocurrió, se actualiza la distribución inicial a la final y se obtienen mejores estimaciones de las probabilidades para A_i, de esta manera:

$$P(A_i) = \sum_{k=1}^{K} P(A_i|S_k)P(S_k|A_j),$$

para $1 \leq i \leq m$.

Sustituyendo $\widetilde{a}_k$ para a_k, $1 \leq k \leq K$, y suponiendo que se observa que ha ocurrido el evento A_j; los α-cortes de la distribución final son:

$$\overline{P} = (S_k|A_j)[\alpha] = \left\{ \frac{a_{jk}a_k}{\sum\limits_{k=1}^{K} a_{jk}a_k} : \mathbf{S} \right\},$$

para $1 \leq k \leq K$, donde **S** es el estado "$a_k \in \widetilde{a}_k[\alpha],\ 1 \leq k \leq K,\ \sum_{k=1}^{K} a_k = 1$". Para encontrar los α-cortes, suponiendo $K = 3, k = 2$ se tiene:

$$f(a_1, a_2, a_3) = \frac{a_{j2}a_2}{\sum\limits_{k=1}^{3} a_{jk}a_k}.$$

Entonces $\partial f/\partial a_1 < 0, \partial f/\partial a_2 > 0$ y $\partial f/\partial a_3 < 0$.

Sea $\widetilde{a}_k[\alpha] = [a_{k1}(\alpha), a_{k2}(\alpha)]$ para $k = 1, 2, 3$. Si $a_{12}(\alpha) + a_{21}(\alpha) + a_{32}(\alpha) = 1$ y $a_{11}(\alpha) + a_{22}(\alpha) + a_{31}(\alpha) = 1$ se tiene el punto final izquierdo (derecho) del intervalo para el α-corte, al sustituir

$$a_{12}(\alpha), a_{21}(\alpha), a_{32}(\alpha), (a_{11}(\alpha), a_{22}(\alpha), a_{31}(\alpha))$$

por a_1, a_2, a_3 respectivamente.
Una vez que se tiene la distribución de probabilidad borrosa posterior, se puede actualizar la probabilidad borrosa para A_i.
Existe un metodo alternativo para calcular la regla de Bayes borrosa, y esto es mediante la sustitución de los números borrosos $\overline{P}(S_k) = \widetilde{a}_k$ en la ecuación crisp, y calcular el resultado. No obstante, puede darse el caso de que el resultado arroje un número borroso pero que salga del intervalo $[0, 1]$.

2.2.6. Aplicaciones

Se presentan aplicaciones de probabilidad borrosa, probabilidad condicional y la fórmula de Bayes.

Aplicación 2.54 (Tipos de Sangre)**.** Existen cuatro tipos de sangre básicos: A, B, AB y O. Cierta ciudad tendrá un control de los tipos de sangre y desean saber, si seleccionan una persona aleatoriamente, del grupo de posibles donantes de sangre, ¿cuál es la probabilidad de que esa persona no tenga tipo de sangre O?. El tipo O es el grupo de donantes de sangre universal. Se lleva a cabo una muestra aleatoria de 1000 personas del grupo de donantes de sangre y determinan los siguientes puntos estimados:

1. $p_a = 0.33$ 33 %, tienen tipo de sangre A
2. $p_b = 0.23$ 23 %, son tipo de sangre B
3. $p_{ab} = 0.35$ 35 %, tienen tipo de sangre AB
4. $p_o = 0.09$ 9 %, pertenecen al tipo de sangre O

Dado que estos puntos estimados están basados en una muestra aleatoria, se sustituirán tales valores con números borrosos. Sean

1. $\widetilde{p}_a = (0.3/0.33/0.36)$

2. $\widetilde{p}_b = (0.2/0.23/0.26)$

3. $\widetilde{p}_{ab} = (0.32/0.35/0.38)$

4. $\widetilde{p}_o = (0.06/0.09/0.12)$

Después, sea $\overline{P}(O^c)$ la probabilidad borrosa de que un donante no tenga tipo de sangre O. Dada la aritmética de los números borrosos y las propiedades de la probabilidad borrosa, tal probabilidad no puede estar dada por $1-\overline{P}(O)$. Sin embargo, pueden encontrarse los α-cortes de esta probabilidad difusa como:

$$\overline{P}(O^c)[\alpha] = \{p_a + p_b + p_{ab} : \mathbf{S}\}$$

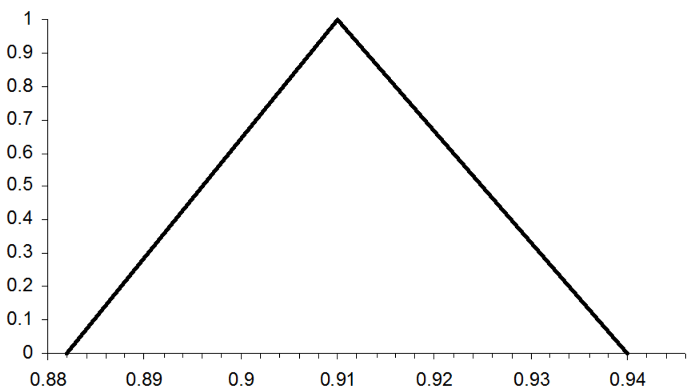
donde $\mathbf{S}$ denota la sentencia "$p_a \in \overline{p}_a[\alpha]$, $p_b \in \widetilde{p}_b[\alpha]$, $p_{ab} \in \widetilde{p}_{ab}[\alpha]$, $p_o \in \widetilde{p}_o[\alpha]$, $p_a + p_b + p_{ab} + p_o = 1$". Definamos $\widetilde{p}_w[\alpha] = [p_{w1}(\alpha), p_{w2}(\alpha)]$ para $w = a, b, ab, o$.

Sea $\overline{P}(O^c)[\alpha] = [o_{n1}(\alpha), o_{n2}(\alpha)]$. Sería práctico sustituir $p_{a1}(\alpha) + p_{b1}(\alpha) + p_{ab1}(\alpha)$ por $p_a + p_b + p_{ab}$ en la ecuación utilizada para encontrar los α-cortes, y así obtener $o_{n1}(\alpha)$, pero este conjunto de p_i no es factible. Y esto es porque $p_{a1}(0) + p_{b1}(0) + p_{ab1}(0) = 0.82$ y éste no es un valor de $p_o \in \widetilde{p}_o[0]$, que hace la suma igual a 1.

No obstante pueden utilizarse métodos numéricos para obtener los α-cortes, calculando $\overline{P}(O^c)[\alpha] = [0.88 + 0.03\alpha\, 0.94 - 0.03\alpha]$:

α	$\overline{P}(O^c)[\alpha]$
0	[0.88,0.94]
0.2	[0.886, 0.934]
0.4	[0.892, 0.928]
0.6	[0.898, 0.922]
0.8	[0.904, 0.916]
1.0	0.91

Es decir, es un número borroso triangular $(0.88/0.91/0.94)$, como lo muestra la siguiente figura:



Probabilidad borrosa en la aplicación tipos de sangre.

Aplicación 2.55. Es importante tener una prueba precisa para el virus del VIH. Supónga que se tiene una prueba, llamada $\mathcal{T}$ y se desea ver precisamente, cómo es que se predice que una persona tiene el virus del VIH. Sea A_1 el evento de que una persona esté infectada con el virus del VIH y A_2 el evento de que una persona no esté infectada. Además, sea B_1 el evento de que la prueba $\mathcal{T}$ sea "positiva" indicando que la persona tiene el virus, y sea el conjunto B_2 el evento de que la prueba $\mathcal{T}$ dé resultado "negativo", o que la persona no tenga el virus.

Se quiere encontrar la *probabilidad condicional* de A_1 dado B_1 o bien $P(A_1|B_1)$. Para estimar esta probabilidad se reunen algunos datos. De una población grande, de la población "en riesgo" se toma una muestra aleatoria para calcular las probabilidades $p_{11} = P(A_1 \cap B_1),\ p_{12} = P(A_1 \cap B_2),\ p_{21} = P(A_2 \cap B_1)$, y $p_{22} = P(A_2 \cap B_2)$. Suponiendo que se obtienen las estimaciones $p_{11} = 0.095,\ p_{12} = 0.005,\ \ p_{21} = 0.045,\ \ p_{22} = 0.855$.
Ahora, para mostrar la incertidumbre en estos puntos estimados los puntos p_{ij} se sustituyen con números borrosos. Sean $\widetilde{p}_{11} = (0.092/0.095/0.098),\ \widetilde{p}_{12} = (0.002/0.005/0.008),\ \widetilde{p}_{21} = (0.042/0.045/0.048),\ \widetilde{p}_{22} = (0.825/0.855/0.885)$.

La probabilidad borrosa que se quiere es $\overline{P}(A_1|B_1)$ cuyos α-cortes son:

$$\overline{P}(A_1|B_1)[\alpha] = \left\{ \frac{p_{11}}{p_{11} + p_{21}} : \mathbf{S} \right\},$$

para todo α, donde $\mathbf{S}$ es "$p_{ij} \in \widetilde{p}_{ij}[\alpha],\ 1 \leq i, j \leq 2$ y $p_{11} + \ldots + p_{22} = 1$".
Sea $H(p_{11}, p_{21}) = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{21}}$. Se determina que H es una función creciente de p_{11} y función decreciente de p_{21}. Por tanto, si $\overline{P}(A_1|B_1)[\alpha] = [P_\ell(\alpha), P_u(\alpha)]$ entonces

$$P_\ell = H(p_{111}(\alpha), p_{212}(\alpha)),$$

y

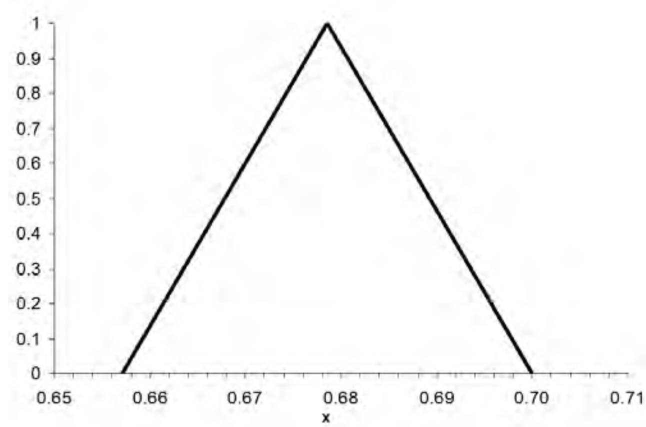
$$P_u(\alpha) = H(p_{112}(\alpha), p_{211}(\alpha)),$$

donde $\overline{P}_{ij} = [p_{ij1}(\alpha), p_{ij2}(\alpha)],$ para $1 \leq i, j \leq 2$.
Las ecuaciones anteriores son correctas porque:

1. para todo α existen valores de $p_{12} \in \widetilde{p}_{12}[\alpha]$ y $p_{22} \in \widetilde{p}_{22}[\alpha]$, tales que $p_{111}(\alpha) + p_{212}(\alpha) + p_{12} + p_{22} = 1$; y,

2. para todo α existen valores de $p_{12} \in \widetilde{p}_{12}[\alpha]$ y $p_{22} \in \widetilde{p}_{22}[\alpha]$, tales que $p_{112}(\alpha) + p_{211}(\alpha) + p_{12} + p_{22} = 1$

La siguiente gráfica es la probabilidad borrosa $\overline{P}(A_1|B_1)$, la cual es un número borroso triangular $(\frac{92}{140}/\frac{95}{140}/\frac{98}{140})$ para $\overline{P}(A_1|B_1)$.



El siguiente Ejemplo es una aplicación que muestra cómo una probabilidad borrosa $\overline{P}(A_1)$ cambia de difusa inicial a difusa final.

Aplicación 2.56 (Bayes difusa)**.** Consideremos únicamente dos estados de la naturaleza S_1 y S_2 con probabilidades borrosas iniciales $\widetilde{p}_1 = \overline{P}(S_1) = (0.3/0.4/0.5)$ y $\widetilde{p}_2 = \overline{P}(S_2) = (0.5/0.6/0.7)$. Además existen sólo dos eventos A_1 y A_2 en la partición de X con probabilidades condicionales conocidas $p_{11} = P(A_1|S_1) = 0.2$, $p_{21} = P(A_2|S_1) = 0.8$, $p_{12} = P(A_1|S_2) = 0.7$, y $p_{22} = P(A_2|S_2) = 0.3$.
Primero, se encuentra la probabilidad difusa $\overline{P}(A_1)$ utilizando la probabilidad inicial borrosa. Cuyos α-cortes son:

$$\overline{P}(A_1)[\alpha] = \{(0.2)p_1 + (0.7)p_2 : \mathbf{S}\}$$

donde $\mathbf{S}$ es "$p_i \in \widetilde{p}_i[\alpha], 1 \leq i \leq 2,$ y $p_1 + p_2 = 1$." Posteriormente, al evaluar la ecuación anterior, se obtiene el número borroso triangular $\overline{P}(A_1) = (0.41/0.50/0.59)$.
Ahora, suponiendo que se tiene información de que el evento "A_1" ocurrirá, se

necesita obtener $\overline{P}(S_1|A_1)$ y $\overline{P}(S_2|A_1)$ de la fórmula de Bayes vista en la sección 2.2.5. Primero se calcula:

$$\overline{P}(S_1|A_1)[\alpha] = \Big\{\frac{(0.2)p_1}{(0.2)p_1 + (0.7)p_2}|\mathbf{S}\Big\}$$

y

$$\overline{P}(S_2|A_1)[\alpha] = \Big\{\frac{(0.7)p_2}{(0.2)p_1 + (0.7)p_2}|\mathbf{S}\Big\}$$

donde **S** es "$p_i \in \widetilde{p}_i[\alpha],\ 1 \leq i \leq 2$, y $p_1 + p_2 = 1$." Ambos α-cortes pueden encontrarse fácilmente. Sea $\widetilde{p}_i[\alpha] = [p_{i1}(\alpha), p_{i2}(\alpha)],$ para $i = 1, 2$. Entonces,

$$\overline{P}(S_1|A_1)[\alpha] = \left[\frac{0.2p_{11}(\alpha)}{0.2p_{11}(\alpha) + 0.7p_{22}(\alpha)}, \frac{0.2p_{12}(\alpha)}{0.2p_{12}(\alpha) + 0.7p_{21}(\alpha)}\right],$$

y

$$\overline{P}(S_2|A_1)[\alpha] = \left[\frac{0.7p_{21}(\alpha)}{0.2p_{12}(\alpha) + 0.7p_{21}(\alpha)}, \frac{0.7p_{22}(\alpha)}{0.2p_{11}(\alpha) + 0.7p_{22}(\alpha)}\right],$$

para todo α. Y entonces, se tiene

$$\overline{P}(S_1|A_1)[\alpha] = \left[\frac{0.06 + 0.02\alpha}{0.55 - 0.05\alpha}, \frac{0.10 - 0.02\alpha}{0.45 + 0.05\alpha}\right],$$

y

$$\overline{P}(S_2|A_1)[\alpha] = \left[\frac{0.35 + 0.07\alpha}{0.45 + 0.05\alpha}, \frac{0.49 - 0.07\alpha}{0.55 - 0.05\alpha}\right].$$

Ahora, se debe calcular $\overline{P}(A_1)$ usando la probabilidad final borrosa, cuyos α-cortes son:

$$(0.2)\overline{P}(S_1|A_1)[\alpha] + (0.7)\overline{P}(S_2|A_1)[\alpha].$$

2.2.7. Variable Borroso Aleatoria

Las variables borroso aleatorias analizan cómo trasponer y generalizar las variables aleatorias y los conceptos que de tal instrumento se derivan, al caso en que las realizaciones de la misma sean subconjuntos borrosos en $\mathbb{R}$.
Una variable borroso aleatoria se construye reaizando la siguiente aplicación sobre Ω, que es la colección de sucesos sobre los cuáles se ha definido una ley de probabilidad:

$$\tilde{X} : \Omega \to F(R)$$

$$x \in \Omega \to \tilde{A}_\omega$$

donde $F(R)$ es el conjunto de números borrosos y $\tilde{A}_\omega$ es el número borroso asociado al suceso ω, es decir:

$$\tilde{A}_\omega = \{(x, \mu_{\tilde{A}_\omega(x)})\} = \{A_\omega = [A_{1\omega}(\alpha),\, A_{2\omega}(\alpha)]\ :\ 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

3. Aplicación de Números Borrosos a Variables Borroso Aleatorias

En este capítulo trabajaremos con las variables borroso aleatorias más usuales. La idea central se sigue de los que hemos expuesto acerca de la probabilidad borrosa: buscamos sustituir los parámetros de algunas variables aleatorias por números borrosos. Dentro del caso discreto abordaremos las variables borroso aleatorias Binomial[4] y Poisson y para el caso continuo la Normal, Uniforme y Exponencial negativa. Además consideraremos algunas de sus aplicaciones. Aquí también abordaremos por vez primera variables aleatorias cuyas con valores en conjuntos que no son finitos, sino numerables (como en el caso de la Poisson) e incluso infinitas no numerables (como en las continuas). Esta extensión es importante e involucra al segundo tipo de problema de optimización mencionado en la sección (2.2.2) y que está definido en el Problema 3.20 de la observación (3.15).

3.1. Variables Borroso Aleatorias Discretas

3.1.1. Binomial Difusa

Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y sea E un subconjunto propio y no vacío de X. Se tiene un experimento donde el resultado es considerado *"un éxito"* si el punto muestral x_1 obtenido pertenece a E. De otro modo, el resultado es considerado *"un fracaso"*.
Sea $P(E) = p$ tal que $P(E^c) = q = 1 - p$. $P(E)$ es la probabilidad de éxito y $P(E^c)$ es la probabilidad de fracaso. Se asume que $0 < p < 1$.

Supóngase que se tienen "m" repeticiones independientes de este experimento. Si $P(r)$ es la probabilidad de r éxitos en los m experimentos, entonces

$$P(r) = \binom{m}{r} p^r q^{m-r},$$

para $r = 0, 1, 2, \ldots, m$, es decir, tenemos una distribución binomial. En estos experimentos se sume que $P(E)$ no es conocida con precisión y necesita ser estimada, o bien, obtenida con base en la opinión de un experto. Así que el valor de p es incierto y sutituido por el número borroso $\widetilde{p}$ y q por $\widetilde{q}$, tal que existe una $p \in \widetilde{p}[1]$ y una $q \in \widetilde{q}[1]$ con $p + q = 1$.

Ahora sea $\overline{P}(r)$ la probabilidad borrosa de r éxitos en m intentos independientes del experimentos. Bajo el álgebra borrosa se obtiene

$$\overline{P}(r)[\alpha] = \left\{ \binom{m}{r} p^r q^{m-r} : \mathbf{S} \right\} \tag{24}$$

[4] Un caso particular es la variable borroso aleatoria Bernoulli, cuando $n = 1$.

para $0 \leq \alpha \leq 1$, donde ahora **S** es la sentencia “$p \in \widetilde{p}[\alpha]$, $q \in \widetilde{q}[\alpha]$, $p+q=1$”. Nótese que $\overline{P}(r)$ **no es** $\binom{m}{r}p^r q^{m-r}$. Si $\overline{P}(r)[\alpha] = [P_{r1}(\alpha), P_{r2}(\alpha)]$, entonces

$$P_{r1}(\alpha) = \text{mín}\left\{ \binom{m}{r} p^r q^{m-r} : \mathbf{S} \right\} \tag{25}$$

y

$$P_{r2}(\alpha) = \text{máx}\left\{ \binom{m}{r} p^r q^{m-r} : \mathbf{S} \right\} \tag{26}$$

Ejemplo 3.1. Sean $p = 0.4$ y $q = 1-p$ con $m = 3$. Suponiendo que p y q son inciertos proponemos $\widetilde{p} = (0.3/0.4/0.5)$ para p y $\widetilde{q} = (0.5/0.6/0.7)$ para q. Ahora, calculemos el número borroso $\overline{P}(2)$. Si $p \in \widetilde{p}[\alpha]$, entonces $q = 1-p \in \widetilde{q}[\alpha]$. Usando las ecuaciones (25) y (26) se tiene que:

$$P_{r1}(\alpha) = \text{mín}\left\{3p^2 q : \mathbf{S}\right\}, \quad \text{y} \quad P_{r2}(\alpha) = \text{máx}\left\{3p^2 q : \mathbf{S}\right\}.$$

Como $d(3p^2(1-p))/dp > 0$ en $\widetilde{p}[0]$, obtenemos

$$\overline{P}(2)[\alpha] = \left[3(p_1(\alpha))^2(1-p_1(\alpha)), 3(p_2(\alpha))^2(1-p_2(\alpha))\right],$$

donde $\widetilde{p}[\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)] = [0.3 + 0.1\alpha, 0.5 - 0.1\alpha]$.

Los $\alpha-$cortes de la media y varianza de una binomial difusa se calculan según las ecuaciones (13) y (14) respectivamente. En el caso crisp, sabemos que $\mu = mp$ y $\sigma^2 = mpq$. Parecería natural afirmar entonces que $\widetilde{\mu} = m\widetilde{p}$ y $\widetilde{\sigma}^2 = m\widetilde{p}\widetilde{q}$, sin embargo se tiene que $\widetilde{\mu} \leq m\widetilde{p}$ y $\widetilde{\sigma}^2 \leq m\widetilde{p}\widetilde{q}$. Tenemos que

$$\widetilde{\mu}[\alpha] = \left\{ \sum_{r=1}^{m} r \binom{m}{r} p^r q^{m-r} : \mathbf{S} \right\} \tag{27}$$

lo cual se simplifica por

$$\widetilde{\mu}[\alpha] = \{mp : \mathbf{S}\} \tag{28}$$

Sea $s \in \widetilde{\mu}[\alpha]$, entonces $s = mp$ para $p \in \widetilde{p}[\alpha]$, $q \in \widetilde{q}[\alpha]$ y $p+q = 1$. Por lo tanto $s \in m\widetilde{p}[\alpha]$, es decir, $\widetilde{\mu} \leq m\widetilde{p}$. Para demostrar que puede ocurrir que $\widetilde{\mu} \neq m\widetilde{p}$ considérese $\widetilde{p} = (0.2/0.3/0.4)$ y $\widetilde{q} = (0.65/0.7/0.75)$. Entonces $\widetilde{\mu}[0] = m[0.25, 0.35]$ pero $m\widetilde{p}[0] = m[0.2, 0.4]$. Si $\widetilde{q} = 1 - \widetilde{p}$, entonces se tiene $\widetilde{\mu} = m\widetilde{p}$.

Para demostrar que $\widetilde{\sigma}^2 \leq m\widetilde{p}\widetilde{q}$ notemos primeramente que

$$\widetilde{\sigma}^2[\alpha] = \{mpq : \mathbf{S}\} \tag{29}$$

Entonces si $s \in \widetilde{\sigma}^2$, entonces $s \in m\widetilde{p}[\alpha]\widetilde{q}[\alpha]$. Esto demuestra que $\widetilde{\sigma}^2 \leq m\widetilde{p}\widetilde{q}$. Para demostrar que puede no darse la igualdad proponemos $\widetilde{p}$ y $\widetilde{q}$ como antes, es decir, $\widetilde{p} = (0.2/0.3/0.4)$ y $\widetilde{q} = (0.65/0.7/0.75)$. Entonces $m\widetilde{p}[0]\widetilde{q}[0] = m[0.13, 0.30]$, pero $\widetilde{\sigma}^2[0] = m[(0.25)(0.75), (0.35)(0.65)] = m[0.1875, 0.2275]$.

Ejemplo 3.2. Podemos encontrar explícitamente los $\alpha-$cortes de $\widetilde{\sigma}^2$ si $\widetilde{q} = 1-\widetilde{p}$. Sean $\widetilde{p} = (0.4/0.6/0.8)$ y $\widetilde{q} = (0.2/0.4/0.6)$. Entonces de la ecuación (29) tenemos que

$$\widetilde{\sigma}^2[\alpha] = \{mp(1-p) : p \in \widetilde{p}[\alpha]\} \tag{30}$$

Sea $h(p) = mp(1-p)$. Nótese que $h(p)$ es decreciente en $[0, 0.5]$, su máximo es $m0.25$ en $p = 0.5$ y es decreciente en $[0.5, 1]$. Entonces, el valor de la ecuación (30) depende de si $p = 0.5$ pertenece al $\alpha-$corte de $\widetilde{p}$. Sea $\widetilde{p}[\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)] = [0.4 + 0.2\alpha, 0.8 - 0.2\alpha]$. De donde $p = 0.5$ pertenece al $\alpha-$corte de $\widetilde{p}$ sólo para $0 \leq \alpha \leq 0.5$. Entonces

$$\widetilde{\sigma}^2[\alpha] = \begin{cases} [h(p_2(\alpha)), 0.25m] & \text{si } 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ \\ [h(p_2(\alpha)), h(p_1(\alpha))] & \text{si } 0.5 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{31}$$

3.1.2. Poisson Difusa

Sea X una variable aleatoria que tiene la función de masa de probabilidd Poisson. Si $P(x)$ establece la probabilidad de que $X = x$, entonces

$$P(x) = \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}$$

para $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$, y parámetros $\lambda > 0$. Ahora se sustituye el número borroso $\widetilde{\lambda} > 0$ por λ para producir la función de masa de probabilidad Poisson difusa o borrosa. El conjunto $\overline{P}(x)$ es la probabilidad borrosa de que $X = x$. Luego, se enuentran los α-cortes del número difuso como

$$\overline{P}(x)[\alpha] = \left\{ \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} : \ \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \right\}, \ \forall\ \alpha \in [0, 1] \tag{32}$$

El valor de la ecuación (32) depende de la relación de x con $\widetilde{\lambda}[0]$. Sea

$$h(\lambda) = \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}, \quad \text{para } x \text{ y } \lambda > 0 \text{ fijos.}$$

Se tiene que, $h(\lambda)$ en una función creciente de λ para $\lambda < x$, el valor máximo de $h(\lambda)$ se da cuando $\lambda = x$, y $h(\lambda)$ es una función decreciente de λ para $\lambda > x$. Sea $\widetilde{\lambda}[\alpha] = [\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)]$, para $0 \leq \alpha \leq 1$. Entonces se tiene que:

1. Si $\lambda_2(0) < x$, entonces $\overline{P}(x)[\alpha] = [h(\lambda_1(\alpha)), h(\lambda_2(\alpha))]$
2. Si $x < \lambda_1(0)$, entonces $\overline{P}(x)[\alpha] = [h(\lambda_2(\alpha)), h(\lambda_1(\alpha))]$

El otro caso, es decir, donde $x \in \widetilde{\lambda}[0]$, se aborda en el siguiente Ejemplo.

Ejemplo 3.3. Sea $x = 6$ y $\widetilde{\lambda} = (3/5/7)$. Como puede observarse $x \in [3, 7] = \widetilde{\lambda}[0]$. Se determina $\widetilde{\lambda}[\alpha] = [3 + 2\alpha, 7 - 2\alpha]$. Se define $\overline{P}(6)[\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$. Para determinar los α-cortes de $\overline{P}(6)$ se debe resolver las siguientes ecuaciones:

$$p_1(\alpha) = \text{mín}\left\{ h(\lambda) : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \right\}$$

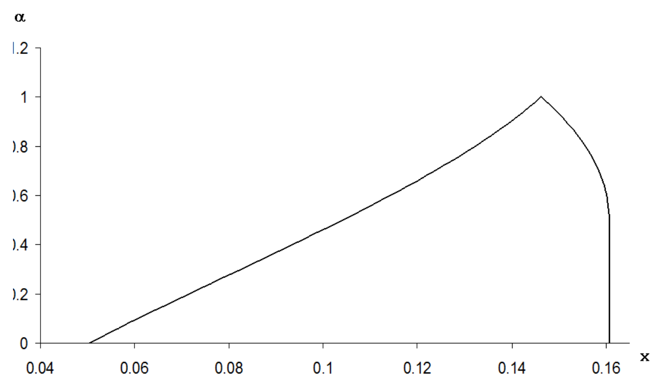
y

$$p_2(\alpha) = \text{máx}\left\{h(\lambda) : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha]\right\}$$

De tales ecuaciones se obtiene:

$$\overline{P}(6)[\alpha] = \begin{cases} [h(3+2\alpha), h(6)] & \text{si } 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ \\ [h(3+2\alpha), h(7-2\alpha)] & \text{si } 0.5 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

La gráfica de $\overline{P}(6)$ es la siguiente:



Probabilidad Borrosa de $\overline{P}(6)$

Consideremos otro Ejemplo que involucre la Poisson difusa.

Ejemplo 3.4. Sea $\widetilde{\lambda} = (8/9/10)$ y sea $\overline{P}(P)([3,\infty))$ la probabilidad borrosa de que $X \geq 3$, y sea $\overline{P}([3,\infty))[\alpha] = [q_1(\alpha), q_2(\alpha)]$. Entonces para toda α :

$$q_i(\alpha) = \begin{cases} \text{mín}\left\{1 - \sum\limits_{x=0}^{2} h(\lambda) : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha]\right\} & \text{si } i = 1 \\ \\ \text{máx}\left\{1 - \sum\limits_{x=0}^{2} h(\lambda) : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha]\right\} & \text{si } i = 2 \end{cases} \tag{33}$$

Sea $k(\lambda) = 1 - \sum\limits_{x=0}^{2} h(\lambda)$. Entonces $dk/d\lambda > 0$ para $\lambda > 0$. Por lo que podemos evaluar las ecuaciones (33) y obtener

$$\overline{P}([3,\infty))[\alpha] = [k(\lambda_1(\alpha)), k(\lambda_2(\alpha))].$$

Para concluir con la Poisson borrosa, calculemos la media borrosa y varianza borrosa de la Poisson difusa. Según la ecuación (13), los $\alpha-$cortes de la media borrosa son

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}[\alpha] &= \Big\{ \sum_{x=0}^{\infty} xh(\lambda) : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \Big\} \\ &= \Big\{ \lambda : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \Big\}\end{aligned}$$

Por lo que $\widetilde{\mu} = \widetilde{\lambda}$, es decir, la media difusa de la Poisson borrosa, no es más que el número borroso $\widetilde{\lambda}$ que proviene de la media crisp de la Poisson.

La varianza difusa $\widetilde{\sigma}^2$ se puede obtener mediante los $\alpha-$cortes como

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}^2[\alpha] &= \Big\{ \sum_{x=0}^{\infty} (x-\mu)^2 h(\lambda) : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha],\ \mu = \lambda \Big\} \\ &= \Big\{ \lambda : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \Big\}\end{aligned}$$

ya que la varianza de la Poisson crisp es λ. Por lo tanto $\widetilde{\sigma}^2 = \widetilde{\lambda}$.

3.1.3. Ejemplos

Los siguientes ejemplos y aplicaciones, ilustan de manera más concreta algunas aplicaciones de las variables borroso aleatorias discretas, vistas en los incisos anteriores:

1. Se usa la Poisson difusa para aproximar valores de la Binomial difusa.
2. Aplicación de la Binomial difusa para calcula las probabilidades borrosas de sobreventa[5].
3. El uso de la Poisson difusa para estimar la prontitud de respuesta de un equipo a ataques teroristas.

Aplicación 3.5 (Aproximación Poisson difusa a Binomial difusa)**.** Sea X una variable aleatoria con función de masa de probabilidad Binomial(n, p). De la teoría de probabilidad *crisp* se sabe que si n es suficientemente grande y p es pequeña, se puede usar la Poisson para aproximar valores de la Binomial.
Para enteros no negativos a y b, $0 \leq a \leq b$, sea $P([a, b])$ la probabilidad de que $a \leq X \leq b$. Entonces usando la binomial se tiene,

$$P([a,b]) = \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad q = 1-p.$$

Usando la Poisson, con $\lambda = np$, podemos calcular

$$P([a,b]) \approx \sum_{x=a}^{b} \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}$$

[5] En inglés el término es “overbooking.”

Ahora, cambiando al caso difuso, sea $\widetilde{p}$ pequeña, lo cual significa que todas las $p \in \widetilde{p}[0]$ son suficientemente pequeñas.
Sea $\overline{P}([a,b])$ la probabilidad borrosa de que $a \leq X \leq b$. Para simplificar la notación sea $\overline{P}_{b\alpha} = \overline{P}([a,b])[\alpha]$ usando la binomial difusa. Además el conjunto $\overline{P}_{p\alpha} = \overline{P}([a,b])[\alpha]$ usando la aprosimación Poisson borrosa. Entonces

$$\overline{P}_{b\alpha} = \Big\{ \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} : \ p \in \widetilde{p}[\alpha] \Big\},$$

y

$$\overline{P}_{p\alpha} = \Big\{ \sum_{x=a}^{b} \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} : \ \lambda \in n\widetilde{p}[\alpha] \Big\}$$

En la ecuación de $\overline{P}_{b\alpha}$ se usa un modelo ligeramente diferente al de la binomial difusa $P([a,b])$ dada en la ecuación (24) el cual es similar, pero no exactamente igual a $\widetilde{q} = 1 - \widetilde{p}$. Así se puede concluir que $\overline{P}_{b\alpha} \approx \overline{P}_{p\alpha}$ $\forall \alpha$.
Esta aproximación es interpretada de la siguiente manera:

i) dado $z \in \overline{P}_{b\alpha}$, existe $y \in \overline{P}_{p\alpha}$ tal que $z \approx y$

ii) dado $y \in \overline{P}_{p\alpha}$ existe $z \in \overline{P}_{b\alpha}$ tal que $y \approx z$.

Además $z \approx y$ y $y \approx z$ se interpretan como en probabilidad crisp. Para verificar i) basta tomar $z \in \overline{P}_{b\alpha}$, de donde $z = \sum_{x=a}^{b} p^x(1-p)^{n-x}$ para alguna $p \in \widetilde{p}[\alpha]$. Para esta p sea $\lambda = np$ y sea $y = \sum_{x=a}^{b} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, de donde $z \approx y$. Análogamente para el inciso ii) concluimos que $y \approx z$.

A continuación se presenta un Ejemplo que involucra lo visto en la Aplicación 3.5.

Ejemplo 3.6. Sea $n = 100$ y $p = 0.02$. Proponemos a $\widetilde{p} = (0.01/0.02/0.03)$ y hacemos $a = 0$ y $b = 3$, de donde usando la Binomial difusa tenemos que $\overline{P}_{b\alpha} = \overline{P}([0,3])[\alpha]$ y recurriendo a la aproximación de la Poisson borrosa tenemos que $\overline{P}_{p\alpha} = \overline{P}([0,3])[\alpha]$. Realizando algunos cálculos con distintos valores de α para determinar $\overline{P}_{b\alpha}$ y $\overline{P}_{p\alpha}$ tenemos la siguiente Tabla:

α	$\overline{P}_{b\alpha}$	$\overline{P}_{p\alpha}$
0	[0.647,0.982]	[0.647,0.981]
0.2	[0.693,0.967]	[0.692,0.966]
0.4	[0.737,0.948]	[0.736,0.946]
0.6	[0.780,0.923]	[0.779,0.921]
0.8	[0.821,0.893]	[0.819,0.891]
1.0	0.859	0.857

Tabla del Ejemplo 3.6.
Aproximación Poisson difusa a Binomial difusa.

Aplicación 3.7 (Binomial difusa para calcular las probabilidades borrosas de sobreventa)**.** Las compañías aéreas manejan una política de seguridad en la venta de boletos del 95 % de la capacidad total de los aeroplanos. La información histórica de ventas de las aerolíneas, indica que sólo el 85 % de los boletos vendidos son utilizados en realidad. Queremos encontrar la probabilidad de que si se vende el 100 % de la capacidad de las aeronaves, no haya suficientes lugares disponibles.

Este problema se puede resolver mediante un modelo binomial con $p \approx 0.85$. Como el parámetro p ha sido estimado con información histórica, proponemos el número borroso $\widetilde{p} = (0.75/0.85/0.95)$ para p y modelar así el problema con una Binomial borrosa. Sea $\overline{P}_0$ la probabilidad difusa de tener sobreventa en un areoplano con capacidad de 120 pasajeros[6]. Entonces los $\alpha-$cortes están dados por

$$\overline{P}_0[\alpha] = \Big\{ \sum_{x=115}^{120} \binom{120}{x} p^x (1-p)^{120-x} : p \in \widetilde{p} \Big\}.$$

Haciendo $F(p) = \sum_{x=115}^{120} \binom{120}{x} p^x (1-p)^{120-x}$ para $p \in \widetilde{p}[0]$, observamos que F es creciente en el intervalo $\widetilde{p}[0]$. Con algunos valores seleccionados de α obtenemos que:

α	$\overline{P}_0$
0	$[0.9(10)^{-9}, 0.4415]$
0.5	$[0.5(10)^{-6}, 0.0160]$
1.0	$[0.00014, 0.00014]$

Aplicación 3.8 (Prontitud de respuesta de un equipo contra ataques teroristas)**.** Supongamos que el gobierno de Estados Unidos está planeando un equipo de respuesta rápida contra ataques terroristas al continente americano. Se necesita calcular la probabilidad de ataques múltiples en un día para ver si necesitan uno o varios equipos. Supongamos que estiman que el promedio de ataques terroristas por día es aproximadamente de $\lambda = 0.008$ o equivalentemente 3 al año empezando en 2003.
Usando la función de masa de probabilidad Poisson, se puede encontrar la probabilidad de que el número de ataques en un día es 0, 1, o al menos 2.
El valor de λ fue estimado por un grupo de expertos y es muy impreciso. A partir de ahora se usará el numero borroso trapezoidal $\widetilde{\lambda} = (0.005/0.007, 0.009/0.011)$ para λ. Sea $\overline{P}_m$ la probabilidad difusa de 2 o más ataques por día, para saber si son necesarios varios equipos de respuesta rápida contra ataques terroristas.

[6]En este caso, el límite de seguridad en la venta de boletos es de 114.

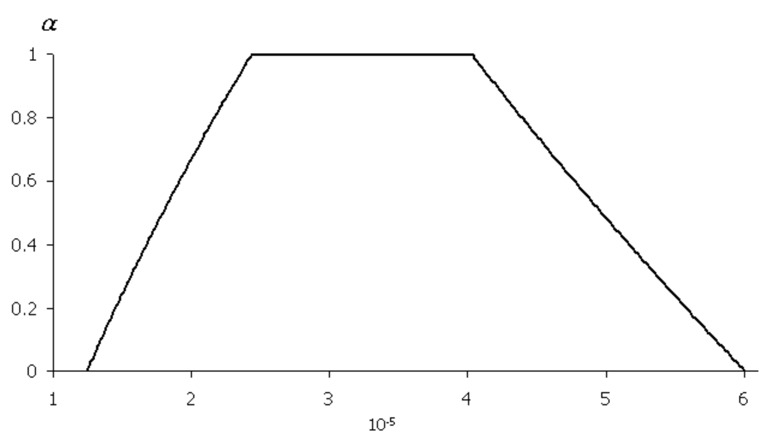
Los α-cortes de esta probabilidad difusa son:

$$\overline{P}_m = \left\{ 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{\lambda^x \exp^{-\lambda}}{x!} : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \right\}$$

para $0 \leq \alpha \leq 1$. Sea $v(\lambda) = 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{\lambda^x \exp^{-\lambda}}{x!}$. Al encontrar que $dv/d\lambda > 0$, entonces $\widetilde{\lambda}[\alpha] = [\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)]$. Por lo que se tiene que:

$$\overline{P}_m[\alpha] = [v(\lambda_1(\alpha)), v(\lambda_2(\alpha))]$$

La gráfica de $\overline{P}_m$ es la siguiente:



Gráfica de la Aplicación 3.8

3.2. Variables Borroso Aleatorias Continuas

En esta sección se exponen algunas de las variables borroso aleatorias continuas más usuales en Probabilidad, tales como la variable aleatoria Normal, Uniforme y Exponencial Negativa difusas.

En cada uno de los casos primero se examina la forma en que se utilizan, para calcular las probabilidades borrosa y luego se encuentran su media y varianza borrosas, siempre sustituyendo números borrosos como parámetros en las funciones de densidad, para producir funciones de densidad borrosas. Cabe destacar que la obtención de las densidades difusas continuas, consiste en resolver el segundo tipo de problema de optimización dada por la ecuación (71) y sujeto a las condiciones de la ecuación (72) que se encuentran la observación (3.15).

3.2.1. Uniforme Difusa

La densidad uniforme $U(a, b)$, $a < b$ está dada por $y = f(x; a, b) = 1/(b-a)$ para $a \leq x \leq b$ y $f(x; a, b) = 0$ en otro caso. Ahora vamos a considerar $U(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ para números difusos $\widetilde{a}$ y $\widetilde{b}$. Si $\widetilde{a}[1] = [a_1, a_2]$ y $\widetilde{b}[1] = [b_1, b_2]$ se asume que $a \in [a_1, a_2], b \in [b_1, b_2]$, tal que $\widetilde{a}$ y $(\widetilde{b})$ representa la incertidumbre en a y b respectivamente. Ahora, usando la densidad uniforme difusa se puede calcular la probabilidad borrosa de obtener un valor en el intervalo $[c, d]$. Tal probabilidad se denota como $\overline{P}([c, d])$.
Hay incertidumbre en los puntos finales de la densidad uniforme, pero no hay ninguna incertidumbre en el hecho de que se tiene una densidad uniforme. Lo que esto significa es que dado algún $s \in \widetilde{a}[\alpha]$ y $t \in \widetilde{b}[\alpha]$, $s < t$, se tiene una uniforme crisp $U(s, t)$, es decir, $f(x; s, t) = 1/(t-s)$ sobre $[s, t]$ y cero en otro caso, para todo $0 \leq \alpha \leq 1$. Esto permite encontrar probabilidades difusas.
Sea $L(c, d; s, t)$ la longitud del intervalo $[s, t] \cup [c, d]$. Entonces

$$\overline{P}([c, d])[\alpha] = \Big\{ L(c, d; s, t)/(t-s) : s \in \widetilde{a}[\alpha],\ t \in \widetilde{b}[\alpha],\ s < t \Big\}, \quad \forall\, \alpha \in [0, 1] \quad (34)$$

La ecuación anterior define los α-cortes y juntando esos α-cortes se obtiene el conjunto borroso $\overline{P}([c, d])$. Para encontrar un α-corte de $\overline{P}[c, d]$ se debe encontrar primero la probabilidad de obtener un valor en el intervalo $[c, d]$ para cada densidad uniforme $U(s, t)$ para todo $s \in \widetilde{a}[\alpha]$, y para todo $t \in \widetilde{b}[\alpha]$, con $s < t$.

Ejemplo 3.9. Sean $\widetilde{a} = (0/1/2), \widetilde{b} = (3/4{,}5)$ y $[c, d] = [1, 4]$. Ahora, $\overline{P}([c, d])[\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$ es un intervalo cuyos puntos extremos son funciones que dependen de α. Entonces $p_1(\alpha)$ es el valor mínimo de la expresión del lado derecho de la ecuación (34) y $p_2(\alpha)$ el máximo valor, es decir,

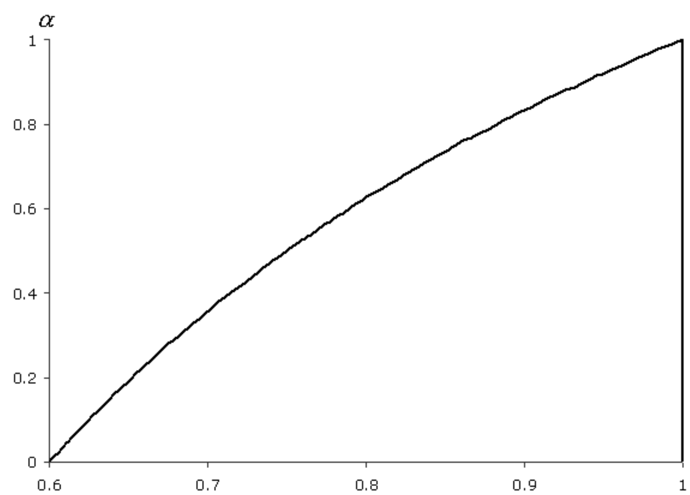
$$p_i(\alpha) = \begin{cases} \text{mín} \Big\{ L(1, 4; s, t)/(t-s) : s \in \widetilde{a}[\alpha], t \in \widetilde{b}[\alpha] \Big\} & \text{si } i = 1 \\ \\ \text{máx} \Big\{ L(1, 4; s, t)/(t-s) : s \in \widetilde{a}[\alpha], t \in \widetilde{b}[\alpha] \Big\} & \text{si } i = 2 \end{cases} \quad (35)$$

Es claro ver que $p_2(\alpha) = 1,\ \forall\ \alpha$. Para encontrar el mínimo debemos considerar cuatro casos, tomando en cuenta que $\widetilde{a}[\alpha] = [\alpha, 2-\alpha]$ y $\widetilde{b}[\alpha] = [3+\alpha, 5-\alpha]$:

1. $\alpha \leq s \leq 1$ y $3 + \alpha \leq t \leq 4$
2. $\alpha \leq s \leq 1$ y $4 \leq t \leq 5 - \alpha$
3. $1 \leq s \leq 2 - \alpha$ y $3 + \alpha \leq t \leq 4$

4. $1 \leq s \leq 2-\alpha$ y $4 \leq t \leq 5-\alpha$

Analizando estos cuatro casos concluimos que el mínimo es igual a $3/(5-2\alpha)$. Por lo tanto, los $\alpha-$cortes de $\overline{P}([1,4])$ son $[3/(5-2\alpha), 1]$ y su gráfica es la siguiente:



Gráfica del Ejemplo 3.9

Ahora queremos encontrar la media y varianza de $U(\widetilde{a}, \widetilde{b})$. Entonces las $\alpha-$cortes de la media $\widetilde{\mu}$ están dados por

$$\widetilde{\mu}[\alpha] = \Big\{ \int_s^t \frac{x}{t-s} dx : s \in \widetilde{a}[\alpha], t \in \widetilde{b}[\alpha], s < t \Big\}, \ \forall \ \alpha. \tag{36}$$

Cada integral de la ecuación (36) es igual a $(s+t)/2$, por lo que al asumir que $\widetilde{a}[0] = [s_1, s_2]$ y $\widetilde{b}[0] = [t_1, t_2]$ con $s_2 < t_1$ tenemos que

$$\widetilde{\mu} = \frac{\widetilde{a} + \widetilde{b}}{2} \tag{37}$$

Si la varianza de $U(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ es $\widetilde{\sigma}^2$, sus $\alpha-$cortes están dados por la ecuación

$$\widetilde{\sigma}^2[\alpha] = \Big\{ \int_s^t \frac{(x-\mu)^2}{t-s} dx : s \in \widetilde{a}[\alpha], t \in \widetilde{b}[\alpha], \mu = \frac{s+t}{2}, s < t \Big\} \tag{38}$$

para toda α. Cada integral de la ecuación (38) es igual a $(t-s)^2/12$. Por lo tanto, $\widetilde{\sigma}^2 = (\widetilde{b} - \widetilde{a})^2/12$.

3.2.2. Normal Difusa

La densidad normal $N(\mu, \sigma^2)$ tiene función $f(x; \mu, \sigma^2)$, $x \in \mathbb{R}$, con media μ y varianza σ^2. Entonces se considera la normal difusa $N(\widetilde{\mu}, \widetilde{\sigma}^2)$ por números borrosos $\widetilde{\mu}$ y $\widetilde{\sigma}^2 > 0$. Ahora, se desea calcular la probabilidad borrosa de obtener un valor en el intervalo $[c, d]$, esta probabilidad se escribe como $\overline{P}([c, d])$. Este resultado se extiende a $\overline{P}(E)$ para otros subconjuntos de $\mathbb{R}$. Para $\alpha \in [0, 1]$, $\mu \in \widetilde{\mu}[\alpha]$ y $\sigma \in \widetilde{\sigma}^2[\alpha]$, sea $z_1 = (c - \mu)/\sigma$ y $z_2 = (d - \mu)/\sigma$, entonces:

$$\overline{P}([c, d])[\alpha] = \left\{ \int_{z_1}^{z_2} f(x; 0, 1)dx : \mu \in \widetilde{\mu}[\alpha],\, \sigma^2 \in \widetilde{\sigma}^2[\alpha] \right\}, \quad \forall\ 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (39)$$

Con esta ecuación obtenemos los α-cortes de $\overline{P}([c, d])$. Además, $f(x; 0, 1)$ representa la densidad de la normal estándar con media cero y varianza uno. Sea $\overline{P}([c, d])[\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$. Entonces el mínimo (máximo) de la expresión en el lado derecho de la ecuación es $p_1(\alpha)$ $(p_2(\alpha))$. En general, será difícil encontrar esos mínimos (máximos) y puede utilizarse para ello algoritmos genéticos o algún método numérico. Sin embargo, en los ejemplos que consideraremos en la sección 3.2.4 se muestra cómo en algunos casos, pueden calcularse fácilmente esos α-cortes.

3.2.3. Exponencial Negativa Difusa

La exponencial negativa ExpNeg(λ) tiene densidad $f(x; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x)$ para $x \geq 0$ y $f(x; \lambda) = 0$ en otro caso, donde $\lambda > 0$. La media y varianza de la exponencial negativa son $1/\lambda$ y $1/\lambda^2$ respectivamente. Ahora se considera EM($\widetilde{\lambda}$) con el número borroso $\widetilde{\lambda} > 0$. Ahora hay que encontrar la probabilidad difusa de obtener un valor en el intervalo $[c, d]$, $c > 0$. Dicha probabilidad se escribe como $\overline{P}([c, d])$. Y esto se extiende para otros subconjuntos E de $\mathbb{R}$, $\overline{P}(E)$; se calcula:

$$\overline{P}([c, d])[\alpha] = \left\{ \int_c^d \lambda \exp(-\lambda x)dx : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \right\} \quad \forall\ \alpha \quad (40)$$

Sea $\overline{P}([c, d])[\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$, entonces

$$p_i(\alpha) = \begin{cases} \text{mín} \left\{ \int_c^d \lambda \exp(-\lambda x)dx : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \right\} & \text{si } i = 1 \\ \\ \text{máx} \left\{ \int_c^d \lambda \exp(-\lambda x)dx : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \right\} & \text{si } i = 2 \end{cases} \quad (41)$$

para $0 \leq \alpha \leq 1$. Sea

$$h(\lambda) = \exp(-c\lambda) - \exp(-d\lambda) = \int_c^d \lambda \exp(-\lambda x)dx,$$

de donde se puede ver que h es una función creciente de λ para $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$; y es una función decreciente de λ para $\lambda^* < \lambda$. Encontramos que

$$\lambda^* = -\frac{\ln(c/d)}{d - c}.$$

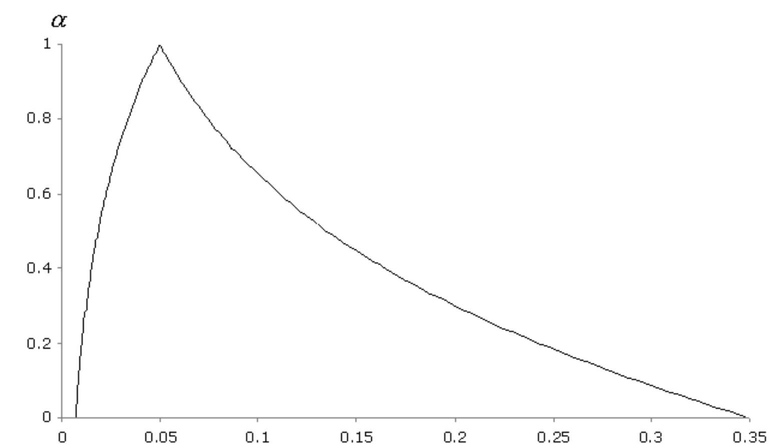
Supongamos que $\widetilde{\lambda} > \lambda^*$. De tal manera que puede encontrarse $\overline{P}([c,d])$. Sea $\widetilde{\lambda}[\alpha] = [\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)]$. Entonces

$$p_1(\alpha) = h(\lambda_2(\alpha)) \quad \text{y} \quad p_2(\alpha) = h(\lambda_1(\alpha))$$

Cuando $c = 1$, $d = 4$ y $\widetilde{\lambda} = (1/3/5)$, los $\alpha-$cortes de $\overline{P}([1,4])$ están dados por

$$\overline{P}([1,4])[\alpha] = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha], \ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

La siguiente gráfica muestra ésta probabilidad:



Gráfica de la Exponencial Negativa Difusa de $\overline{P}([1,4])$ con $\widetilde{\lambda} = (1/3/5)$.

Ahora se encontrarán la media y varianza difusa de ExpNeg($\widetilde{\lambda}$). Si $\widetilde{\mu}$ denota la media, sus α-cortes están dados como:

$$\widetilde{\mu} = \left\{ \int_0^\infty x\lambda \exp(-\lambda x) dx : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \right\} \tag{42}$$

para todo α. Sin embargo, cada integral en la ecuación (42) es igual a $1/\lambda$. Por consiguiente $\widetilde{\mu} = 1/\widetilde{\lambda}$ y la varianza borrosa $\widetilde{\sigma}^2$ estará dada entonces por $1/\widetilde{\lambda}^2$.

3.2.4. Ejemplos

Para concluir este capítulo se mostrarán ejemplos y aplicaciones de las variables aleatorias uniforme, normal y exponencial negativa difusas.

Ejemplo 3.10 (Uniforme Difusa)**.** Consideremos la siguiente situación: Los clientes llegan a comprar aleatoriamente a cierta hora en una tienda. Dado que un cliente llegó durante un periodo determinado de tiempo de T minutos, sea X el tiempo dentro de los T minutos en que el cliente llegó. Si asumimos que la función de densidad de probabilidad para X es $U(0,T)$, encontremos la probabilidad $P(4 \leq X \leq 9)$.
Como T no es conocido de manera exacta, pero se estima que aproximadamente es 10, se usará $\widetilde{T} = (8/10/12)$ para T. Entonces $P(4 \leq X \leq 9)$ se vuelve una probabilidad difusa $\overline{P}([4,9])$, cuyos α-cortes son calculados de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$\overline{P}([4,9])[\alpha] = \left\{ \frac{\text{mín}\{t,9\}-4}{t} : \ t \in [8+2\alpha, 12-2\alpha] \right\}, \qquad \text{si } 0 \leq \alpha \leq 0.5$$

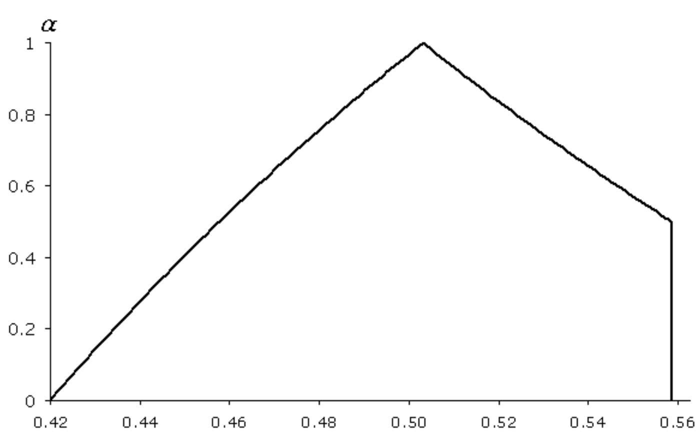
y

$$\overline{P}([4,9])[\alpha] = \left\{ \frac{5}{t} : \ t \in [8+2\alpha, 12-2\alpha] \right\}, \qquad \text{si } 0.5 \leq \alpha \leq 1.$$

De esto se obtiene

$$\overline{P}([4,9])[\alpha] = \begin{cases} [5/(12-2\alpha), 5/9] & \text{si } 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ \\ [5/(12-2\alpha), 5/(8+2\alpha)] & \text{si } 0.5 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{43}$$

Gráficamente, esta probabilidad difusa es la siguiente:



Gráfica del Ejemplo 3.10

Aplicación 3.11 (Aproximación Normal difusa a Binomial difusa)**.** Consideremos nuevamente una distribución binomial difusa, y tratemos de aproximar la probabilidad borrosa de un evento dado mediante la normal difusa. Cambiaremos ligeramente la binomial difusa vista en la ecuación (24) en la sección 3.1.1, al considerar $q = 1 - p$:

$$\overline{P}(r)[\alpha] = \Big\{ \binom{m}{r} p^r (1-p)^{m-r} : p \in \widetilde{p}[\alpha] \Big\}, \quad \forall \ \alpha \tag{44}$$

Si $\overline{P}(r)[\alpha] = [P_{r1}(\alpha), P_{r2}(\alpha)]$ entonces

$$P_{ri}(\alpha) = \begin{cases} \text{mín} \Big\{ \binom{m}{r} p^r (1-p)^{m-r} : p \in \widetilde{p}[\alpha] \Big\} & \text{si } i = 1 \\ \\ \text{máx} \Big\{ \binom{m}{r} p^r (1-p)^{m-r} : p \in \widetilde{p}[\alpha] \Big\} & \text{si } i = 2 \end{cases} \tag{45}$$

Retomando el Ejemplo 3.1, si $p = 0.4$ pero incierta y $m = 3$, entonces proponemos $\widetilde{p} = (0.3/0.4/0.5)$. Supongamos que queremos calcular $\overline{P}(2)$. Entonces, al sustituir en la ecuación (45) tenemos:

$$P_{ri}(\alpha) = \begin{cases} \text{mín} \Big\{ 3p^2(1-p) : p \in \widetilde{p}[\alpha] \Big\} & \text{si } i = 1 \\ \\ \text{máx} \Big\{ 3p^2(1-p) : p \in \widetilde{p}[\alpha] \Big\} & \text{si } i = 2 \end{cases} \tag{46}$$

Dado que $d[3p^2(1-p)]/dp > 0$ en $\widetilde{p}[0]$ obtenemos que

$$\overline{P}(2)[\alpha] = [3p_1^2(\alpha)(1 - p_1(\alpha)), 3p_2^2(\alpha)(1 - p_2(\alpha))],$$

donde $\widetilde{\alpha}[\alpha] = [0.3 + 0.1\alpha, 0.5 + -0.1\alpha]$ En este caso, al utilizar $q = 1 - p$ obtenemos que $\widetilde{\mu} = m\widetilde{p}$. La idea de reescribir lo que habíamos obtenido en el Ejemplo 3.1 es mostrar que haciendo el cambio $q = 1 - p$ los cálculos para la binomial difusa cambian.

Si consideramos ahora $\text{Bin}(100; \widetilde{p})$ y queremos determinar la probabilidad borrosa de obtener de 40 a 60 éxitos, debemos calcular:

$$\overline{P}([40, 60])[\alpha] = \Big\{ \sum_{i=40}^{60} \binom{100}{i} p^i (1-p)^{100-i} : p \in \widetilde{p}[\alpha] \Big\} \tag{47}$$

para cada α. Tratemos de aproximar esta probabilidad mediante la normal difusa. Sea $f(x; 0, 1)$ la densidad de la normal estándar, entonces

$$\overline{P}([40, 60])[\alpha] \approx \Big\{ \int_{z_1}^{z_2} f(x; 0, 1) dx : \ \mu \in \widetilde{\mu}[\alpha], \ \sigma^2 \in \widetilde{\sigma}^2 \Big\}, \ \ \forall \ \alpha \tag{48}$$

donde $z_1 = (39.5 - \mu)/\sigma$ y $z_2 = (60.5 - \mu)/\sigma$ y $\widetilde{\mu}$, $\widetilde{\sigma}^2$ son la media y varianza difusas de la binomial borrosa. Supongamos que $p \approx 0.6$ por lo que proponemos $\widetilde{p} = (0.5/0.6/0.7)$. Para que una aproximación normal para la binomial sea satisfactoria, la literatura usualmente propone que $mp > 5$ y $m(1-p) > 5$. Por analogía, afirmaremos que para que la aproximación normal difusa a una binomial difusa sea lo suficientemente cercana, supondremos que $m\widetilde{p} > 5$ y $m(1-\widetilde{p}) > 5$, lo cual se cumple en nuestro ejemplo. Veamos ahora que la ecuación (48) es una buena aproximación de $\overline{P}([40,60])$. Para un valor fijo de $\alpha \in (0,1]$ escogemos $p_0 \in \widetilde{p}[\alpha]$ y definimos

$$w = \sum_{i=40}^{60} \binom{100}{i} p_0^i (1-p_0)^{100-i}$$

con $w \in \overline{P}([40,60])$. Para realizar la aproximación deseada, requerimos la media y varianza borrosas de la binomial difusa. Tenemos que $\widetilde{\mu} = m\widetilde{p}$ y para calcular $\widetilde{\sigma}^2$, procedemos como en el Ejemplo 3.2 y obtenemos

$$\widetilde{\sigma}^2[\alpha] = [h(p_2(\alpha)), h(p_1(\alpha))],$$

donde $h(p) = 100p(1-p)$ y $\widetilde{p}[\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)] = [0.5 + 0.1\alpha, 0.7 - 0.1\alpha]$. Finalmente

$$\widetilde{\sigma}^2[\alpha] = [21 + 4\alpha - \alpha^2, 25 - \alpha^2],$$

por lo que los $\alpha-$cortes para $\widetilde{\sigma}$ es la raíz cuadrada de los $\alpha-$cortes de $\widetilde{\sigma}^2$.

Haciendo $\mu_0 = 100p_0$ en $100\widetilde{p}[\alpha]$ y sea $\sigma_0 \in \widetilde{\sigma}[\alpha]$, entonces

$$w \approx \int_{z_1}^{z_2} f(x;0,1)dx, \tag{49}$$

donde $z_1 = (39.5 - \mu_0)/\sigma_0$ y $z_2 = (60.5 - \mu_0)/\sigma_0$. Graficando la función

$$H(p) = \sum_{x=40}^{60} \binom{100}{x} p^x (1-p)^{100-x}$$

para $p \in [0.5, 0.7]$ y notando que es una función decreciente en este intervalo, podemos calcular los $\alpha-$cortes. Para calcular algunos valores de la normal difusa, se recurrió al método gráfico para obtener:

α	$\overline{P}([40,60])[\alpha]$	Aproximación Normal Difusa
0	[0.0210,0.9648]	[0.0191,0.9780]
0.2	[0.0558,0.9500]	[0.0539,0.9621]
0.4	[0.1235,0.9025]	[0.1228,0.9139]
0.6	[0.2316,0.8170]	[0.2329,0.8254]
0.8	[0.3759,0.6921]	[0.3786,0.6967]
1.0	[0.5379,0.5379]	[0.5406,0.5406]

Así, bajo supuestos razonables, la normal difusa puede aproximarse a la binomial difusa.

Aplicación 3.12 (Aproximación Normal difusa a Poisson Difusa)**.** De la distribución Poisson difusa, vista en la sección 3.1.2, quisieramos aproximarla a través de una Normal difusa. Sabemos de la probabilidad crisp, que para λ suficientemente grande, podemos aproximar la Poisson crisp a través de la normal crisp. Sea $\lambda = 20$ y $P((16, 21])$ la probabilidad de que $16 < X \leq 21$. Entonces

$$P((16, 21]) \approx \int_{z_1}^{z_2} f(x; 0, 1)dx, \tag{50}$$

donde $z_1 = (16.5\lambda/\sqrt{\lambda}$, $z_2 = (21.5 - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ y $f(x; 0, 1)$ la densidad de una normal estándar. Hemos usado el hecho de que la media y varianza de la Poisson crisp son ambas iguales a λ en la definición de z_1 y z_2. El valor de λ utilizada para la ecuación (50) es de 0.4226 y la aproximación normal es de 0.4133.

Afirmamos entonces que podemos utilizar la Normal difusa para aproximar la Poisson difusa. A manera de ejemplo, sean $\widetilde{\lambda} = (15/20/25)$ y sea $\overline{P}((16, 21])$ la probabilidad difusa de que $16 < X \leq 21$, cuyos $\alpha-$cortes son

$$\overline{P}((16, 21])[\alpha] = \Big\{ \sum_{x=17}^{21} \lambda^x e^{-\lambda}/x! : \ \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \Big\}, \quad \alpha \in [0, 1] \tag{51}$$

Entonces, con $z_1 = (16.5 - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ y $z_2 = (21.5 - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ tenemos que

$$\overline{P}((16, 21])[\alpha] \approx \Big\{ \int_{z_1}^{z_2} f(x; 0, 1)dx : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \Big\} \tag{52}$$

para toda α. Al igual que en el Ejemplo de la Aplicación 3.11, afirmamos que la ecuación anterior es válida y después de realizar algunos cálculos para determinar los $\alpha-$cortes tenemos la siguiente tabla:

α	$\overline{P}((16, 21])[\alpha]$	Aproximación Normal Difusa
0	[0.1868,0.4335]	[0.1690,0.4814]
0.2	[0.2577,0.4335]	[0.2356,0.4814]
0.4	[0.3073,0.4335]	[0.2896,0.4814]
0.6	[0.3546,0.4335]	[0.3371,0.4814]
0.8	[0.3948,0.4335]	[0.3804,0.4814]
1.0	[0.4226,0.4226]	[0.4144,0.4814]

Ejemplo 3.13 (Normal Difusa)**.** Originalmente, las cabinas de los jets de guerra en Estados Unidos fueron diseñadas sólo para varones. Sin embargo, hoy en día la fuerza aérea de Estados Unidos reconoce perfectamente que también las mujeres son buenas como pilotos de estos jets. Así que se requirieron varios cambios en las cabinas para mejorarlas y adaptarlas para las nuevas mujeres pilotos.
El asiento de expulsión en los jets de guerra había sido dideñado para hombres, cuyo peso oscila entre los 140 y los 200 lbs. Basados en los datos, se podría haber obtenido el perfil de nuevas mujeres pilotos cuyo peso se encontrara dentro de

una distribución normal con media aproximada de 143 lbs. y una desviación estándar de 25 lbs., ya que dadas las características con que en un inicio fue diseñado el asiento de expulsión, cualquier mujer que pesara menos de 140 lbs. o más de 200 lbs., tendría mayor probabilidad de sufrir un accidente si fuera expulsada por el asiento.

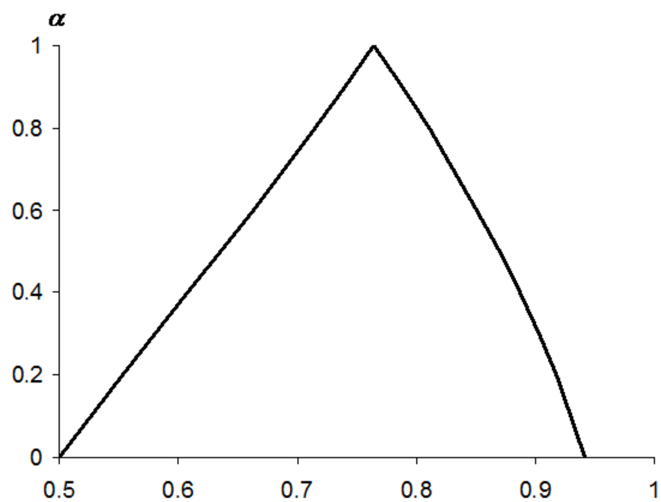
Asi que la fuerza aérea de los Estados Unidos desea saber, dada una muestra aleatoria de n posibles mujeres pilotos, ¿cuál es la probabilidad de que la media del peso esté entre 140 y 200 lbs.?. Responder estas preguntas es importante para el posible rediseño de los asientos de expulsión.
La media de 140 lbs., con desviación estándar de 25 lbs. son estimaciones puntuales y de usar sólo estos números no muestra la incertidumbre de tales estimaciones. Por lo que se usará en su lugar un conjunto de intervalos de confianza para construir números difusos $\widetilde{\mu}$, para la media y $\widetilde{\sigma}$ para la desviación estándar. Se asume que $\widetilde{\mu} = (140/143/146)$ and $\widetilde{\sigma} = (23/25/27)$. Supóngase que y es la media de los pesos de la muestra aleatoria de $n = 36$ posibles mujeres pilotos. Ahora se quiere calcular la probabilidad borrosa $\overline{P}[140, 200]$ de que $140 \leq y \leq 200$ con y teniendo la normal difusa con media $\widetilde{\mu}$ y desviación estándar $\widetilde{\sigma}/\sqrt{36}$. Por lo tanto, necesitamos calcular los α-cortes,

$$\overline{P}[140, 200][\alpha] = \{\int_{z_1}^{z_2} f(x; 0, 1)\, dx : \mu \in \widetilde{\mu}[\alpha],\, \sigma \in \widetilde{\sigma}[\alpha]\},$$

para todo α, donde $z_1 = 6(140 - \mu)/\sigma$ y $z_2 = 6(200 - \mu)/\sigma$. Los $\alpha-$ cortes para $0 \leq \alpha \leq 1$ son los siguientes:

α	$\overline{P}[140, 200][\alpha]$
0	[0.5000,0.9412]
0.2	[0.5538,0.9169]
0.4	[0.6083,0.8869]
0.6	[0.6622,0.8511]
0.8	[0.7146,0.8100]
1	[0.7642,0.7642]

La aproximación de la gráfica de esta probabilidad borrosa se muestra en la siguiente figura:



Gráfica del Ejemplo 3.13

Ejemplo 3.14 (Exponencial Negativa Difusa)**.** La densidad de probabilidad exponenecial negativa crisp se relaciona con la función de masa de probabilidad de la Poisson, y lo mismo sucede en el caso borroso. Como ejemplo supongamos que una máquina tiene una unidad de reserva disponible para sustitución inmediata en caso de fallo. Se asume que se producen fallas de éstas máquinas a una tasa de λ por hora.
Sea X una v.a. que cuenta el número de fallas durante un periodo de T horas, suponiendo que X tiene función de masa de probabilidad Poisson y que la probabilidad $X = x$ denotada por $P_T(x)$, es:

$$P_T(x) = (\lambda T)^x \exp(-\lambda T)/x! \tag{53}$$

para $x = 0, 1, 2, 3 \ldots.$
Ahora sea Y la variable aleatoria cuyo valor es el tiempo de espera para la primera falla y que tiene función de densidad de probabilidad exponencial tal que:

$$P[Y > t] = \int_t^\infty \lambda \exp(-\lambda x)dx,$$

que es la probabilidad de que la primera falla ocurra después de t horas.
Ahora para cambiar a la Poisson difusa sustituímos el valor de λ por el número borroso $\widetilde{\lambda} = (0.07/0.1/0.13)$ y para denotar la probabilidad de que la primera falla ocurra después de 10 horas, escribimos $\overline{P}([10, \infty])$. Así, se tienen los α-cortes, que son:

$$\overline{P}([10, \infty])[\alpha] = \Big\{ \int_{10}^\infty \lambda \exp(-\lambda x)dx : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \Big\}$$

para todo α. Esos α-cortes de la integral anterior están dados por $\exp(-10\lambda)$ para $\lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha]$. De tal modo que si $\widetilde{\lambda}[\alpha] = [\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)]$, entonces

$$\overline{P}[10, \infty][\alpha] = [\exp(-10\lambda_2(\alpha)), \exp(-10\lambda_1(\alpha))]$$

y esto es igual a

$$\overline{P}[10, \infty][\alpha] = [\exp(-1.3 + 0.3\alpha), \exp(-0.7 - 0.3\alpha)]$$

En resumen, si se sustituye $\widetilde{\lambda}$ por λ en la ecuación (53), la Poisson borrosa puede ser usada para encontrar la probabilidad difusa de x fallas en el intervalo de tiempo T y la exponencial negativa borrosa da los tiempos difusos entre las fallas sucesivas. Una propiedad importante de la exponencial *crisp* es su "falta de memoria", es decir:

$$P[Y > t_1 + t_2 | Y > t_2] = P[Y > t_1] \tag{54}$$

El intervalo de tiempo restante hasta la próxima falla es independiente del intervalo de tiempo que ha transcurrido desde la última falla. Ahora, se muestra que eso es también válido en el caso de las exponencial negativa borrosa usando la definición de probabilidad condicional difusa vista en la sección 2.2.3 del capítulo anterior. Usando los α-cortes en la probabilidad condicional difusa del lado izquierdo de la ecuación (54) tenemos:

$$\overline{P}[Y > t_1 + t_2 | Y > t_2][\alpha] = \left\{ \frac{\int_{t_1+t_2}^{\infty} \lambda \exp(-\lambda x) dx}{\int_{t_2}^{\infty} \lambda \exp(-\lambda x) dx} : \lambda \in \widetilde{\lambda}[\alpha] \right\} \tag{55}$$

para $\alpha \in [0, 1]$. Ahora el cociente de la ecuación (55) es igual a $\exp(-t_1\lambda)$, entonces:

$$\overline{P}[Y > t_1 + t_2 | Y > t_2][\alpha] = \left\{ \int_{t_1}^{\infty} \lambda \exp(-\lambda x) dx | \lambda \in \overline{\lambda}[\alpha] \right\},$$

y esto es igual a $\overline{P}[Y > t_1][\alpha]$. Por lo tanto, la ecuación (54) mantiene la propiedad de "falta de memoria" para la exponencial negativa difusa.

Observación 3.15. En el capítulo 2 y 3 se se trabajaron esencialmente con dos tipos de problemas, los cuales describiremos brevemente a continuación.

Problema 3.16. La estructura del primer tipo de problema es el siguiente:

$$\text{máx} \,/\, \text{mín} \;\; f(p_{i_1}, \ldots, p_{i_K}) \tag{56}$$

sujeto a

$$a_i \leq p_i \leq b_i, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n \tag{57}$$

y

$$p_1 + \cdots + p_n = 1 \tag{58}$$

El conjunto $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_K}\} \subset \{p_1, \ldots, p_n\}$, donde $p_i \in [a_i, b_i]$. En nuestras aplicaciones, p_i representarán probabilidades, los intervalos $[a_i, b_i]$ serán $\alpha-$cortes de números borrosos usados como probabilidades borrosas. Entonces, nuestro problema consiste precisamente en resolver para los $\alpha-$cortes de probabilidades borrosas. Si la función f es una función lineal, por lo general es suficiente utilizar un método de optimización clásico. En caso en que f no sea una función lineal, se recurre por lo general al métodos de cálculo o a métodos gráficos.

El método gráfico se aplica para $n = 2$ o a veces para $n = 3$. Primero, sea $n = 2$ y supóngase que $\overline{p}_2 = 1 - \overline{p}_1$ de tal modo que f sea únicamente una función que depende de $\widetilde{p}_1$. De este modo el problema de optimización se traduce en máx / mín $f(p_1)$ sujeto a $a_1 \leq p_1 \leq b_1$. Suponiendo que el método de cálculo no es aplicable, se recurre al método gráfico para aproximar los valores buscados en torno a los puntos extremos de los intervalos con un error previamente determinado. Si $n = 3$ y suponemos que $\widetilde{p}_3 = 1 - \widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_2$. Por ejemplo, $\widetilde{p}_1 = (0.2/0.4/0.6) = \widetilde{p}_2$ y $\widetilde{p}_3 = (0.2/0.6/0.6)$ satisfacen las restricciones. Después, sustituyendo $1 - p_2 - p_1$ por p_3 obtenemos una función $f(p_1, p_2)$. Así, el problema de optimización es máx / mín $f(p_1, p_2)$ sujeto a $a_i \leq p_i \leq b_i,\ i = 1, 2$ y explorando los puntos extremos o bien, vecindades de éstos se aproxima u obtiene la solución para este problema.

Exploremos algunos ejemplos que pueden resolverse con ayuda del cálculo, pero primero definamos algunos conceptos adicionales. Supongamos que $n = 5$ y decimos que p_1, p_2 y p_4 son factibles. Esto significa que podemos escoger cualquier $p_i \in \widetilde{p}_i[\alpha]$, para $i = 1, 2, 4$ y luego encontrar $p_3 \in \widetilde{p}_3[\alpha]$ y $p_5 \in \widetilde{p}_5[\alpha]$ tal que $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$. Sean $\widetilde{p}_i[\alpha] = [p_{i_1}(\alpha), p_{i_2}(\alpha)],\ i = 1, 2, \ldots, 5\ 0 \leq \alpha \leq 1$ y asumamos que $f = f(p_1, p_4)$ es una función creciente para p_1 y p_4 pero decreciente para p_2. Usaremos por simplicidad $[a_i, b_i] = \widetilde{p}_i[\alpha],\ i = 1, \ldots, 5$. Si p_1, p_2 y p_4 son factibles encontraremos que para $\alpha \in [0, 1]$:

1. $\text{mín}\, f(p_1, p_2, p_4) = f(p_{1_1}(\alpha), p_{2_2}(\alpha), p_{4_1}(\alpha))$
2. $\text{máx}\, f(p_1, p_2, p_4) = f(p_{1_2}(\alpha), p_{2_1}(\alpha), p_{4_2}(\alpha))$

Ejemplo 3.17. Consideremos el problema

$$\text{máx} / \text{mín}\, f(p_1, p_2) \tag{59}$$

sujeto a

$$p_1 \in [a_1, b_1],\;\; p_2 \in [a_2, b_2] \text{ y } p_1 + p_2 = 1 \tag{60}$$

Supongamos adicionalmente que $\partial f / \partial p_1 > 0$ y $\partial f / \partial p_2 < 0$ para $p_i \in [0, 1]$. El resultado del problema de optimización depende de los dos intervalos $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$.

Primero asumamos que $1 - a_1 = b_2$ y $1 - b_1 = a_2$. Esto implicaría que $p_1 = a_1$ y $p_2 = b_2$ son factibles ya que $a_1 + b_1 = 1$. Además, $p_1 = b_1$ y $p_2 = a_2$ serían factibles dado que $b_1 + a_2 = 1$. Por ejemplo, $[0.3, 0.6]$ y $[0.4, 0.7]$ son tales intervalos. Entonces

$$\text{mín}\, f(p_1, p_2) = f(a_1, b_2) \tag{61}$$

y

$$\text{máx}\, f(p_1, p_2) = f(b_1, a_2) \tag{62}$$

Ahora, supongamos que $1 - a_1 \neq b_2$ o $1 - b_1 \neq a_2$. En este caso el problema de optimización se complica y se suele recurrir al procedimiento gráfico y graficar la superficie $f(p_1, p_2)$ sobre el rectángulo $a_i \leq p_i \leq b_i$, $i = 1, 2$ para aproximar $\text{máx} / \text{mín}\, f(p_1, p_2)$.

Ejemplo 3.18. Consideremos el problema de optimización

$$\text{máx} / \text{mín}\, f(p_1, p_2, p_3) \tag{63}$$

sujeto a

$$p_i \in [a_i, b_i],\;\; i = 1, 2, 3 \text{ y } p_1 + p_2 + p_3 = 1 \tag{64}$$

Supóngase además que $\partial f / \partial p_1 > 0$ y $\partial f / \partial p_2, \partial f / \partial p_3 < 0$. Si $a_1 + b_2 + b_3 = 1$ y $b_1 + a_2 + a_3 = 1$, entonces la solución es

$$\text{mín}\, f(p_1, p_2, p_3) = f(a_1, b_2, b_3) \tag{65}$$

y

$$\text{máx}\, f(p_1, p_2, p_3) = f(b_1, a_2, a_3) \tag{66}$$

Si $a_1 + b_2 + b_3 \neq 1$ y $b_1 + a_2 + a_3 \neq 1$, se necesita emplear algún método numérico de optimización.

Ejemplo 3.19. Consideremos el problema

$$\text{máx} / \text{mín}\, f(p_1, p_3) \tag{67}$$

sujeto a

$$p_i \in [a_i, b_i],\;\; i = 1, 2, 3 \text{ y } p_1 + p_2 + p_3 = 1 \tag{68}$$

Supóngase además que $\partial f / \partial p_1 > 0$ y $\partial f / \partial p_3 < 0$. Adicionalmente asumamos que:

1. $p_1 = a_1$ y $p_3 = b_3$ son factibles, es decir, $a_1 + p_2 + b_3 = 1$ para cierto $p_2 \in [a_2, b_2]$.

2. $p_1 = b_1$ y $p_3 = a_3$ son factibles, o equivalentemente, $b_1 + p_2 + a_3 = 1$ para algún $p_2 \in [a_2, b_2]$.

Entonces la solución del problema es

$$\text{mín}\, f(p_1, p_3) = f(a_1, b_3) \tag{69}$$

$$\text{máx}\, f(p_1, p_3) = f(b_1, a_3) \tag{70}$$

Es usual abordar el problema utilizando primeramente métodos de cálculo. Si no es posible resolverlo por este conducto, se recurre al método gráfico. Sin embargo, es posible que ninguno de los dos métodos funcione para algún problema en particular, por lo que deberán emplearse métodos más sofisticados que involucren algoritmos de optimización numérica de funciones no lineales con restricciones en forma de igualdad y desigualdad.

Problema 3.20. El segundo tipo de problema consiste en lo siguiente:

$$\text{máx} / \text{mín}\, f(\theta) \tag{71}$$

sujeto a

$$\theta_i \in [a_i, b_i],\ 1 \leq i \leq n \tag{72}$$

donde $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$. En este caso no requerimos que los parámetros sumen uno. En este tipo de problemas, los intervalos $[a_i, b_i]$ son $\alpha-$cortes de algún número borroso utilizado para describir la incertidumbre en los parámetros de las funciones de densidad de probabilidad. Entonces, estos problemas consisten en resolver los $\alpha-$cortes de una probabilidad borrosa.

Lo más frecuente en este tipo de problemas son los casos $n = 1$ o $n = 2$. Este tipo de problema se encuentra por ejemplo en las secciones (3.2.2) y (3.2.3) del Capítulo 3.

4. Conclusiones

La Teoría de Probabilidad Clásica es herramienta útil y poderosa para la solución de problemas en los que es necesario *medir* la posibilidad de que ocurra un suceso bien definido. No obstante, existen situaciones en las que la información con que se cuenta es incierta o bien las estimaciones provistas incluso por expertos son indadecuadas. En este sentido, la lógica difusa aporta elementos tales como el concepto de conjunto difuso como una alternativa a la modelización de este tipo de problemas en combinación con la Teoría de Porbabilidad Clásica.

El objetivo del presente trabajo ha consistido en investigar la sustitución de los parámetros de algunos modelos usuales en probabilidad mediante números borrosos, así como aplicaciones de estos modelos. De dicha investigación podemos concluir que la Probabilidad Difusa es una extensión de la Probabilidad Clásica, y en este sentido las aplicaciones e interpretaciones son más amplias. La Probabilidad Difusa representa una herramienta útil, sobre todo cuando las estimaciones de ciertos parámetros es imprecisa o bien existe incertidumbre respecto a ellos. Las herramientas borrosas también son útiles cuando no hay un modelo simple que represente algún problema en particular, como ciertos esquemas de inversión o procesos ingenieriles. Si bien la modelización de algunos problemas con Probabilidad Borrosa pueden ser complejos y requerir de herramientas de optimización avanzados, sus resultados son generalmente satisfactorios, en contraste con modelos más sencillos que pudieran no ser los óptimos.

La aportación principal de esta tesina, es exhibir algunas variables aleatorias discretas y continuas y la aplicación de números borrosos para sustituir sus parámetros. Conjuntando lo anterior con el cálculo de probabilidades se han exhibido y resuelto problemas de gran aplicabilidad e ilustrativos. Cabe señalar que la exploración de aplicaciones en Probabilidad Difusa es amplia y que el presente trabajo pretende presentar los elementos básicos y por lo tanto no es exhaustiva.

5. Bibliografía

1. Buckley, James J.Sad , “Fuzzy Probability and Statistic”, Ed. Springer,(2006).
2. Feller, W., “An introduction to Probability Theory and its applications” Vol. 1, Ed. John Wiley, (1966).
3. Gnedenko,B.V., “Theory of Probability”, Ed. Chelsea, (1962).
4. Rincón Luis, Curso Intermedio de Probabilidad, Versión (Octubre 2007).
5. Zadeh, L.A., “Probability Measures of Fuzzy Events”, Journal of Mathematical Analysis and Applications 23 (1968).
6. Zadeh, L.A., “Fuzzy Probabilities” Processing and Management 20 (1984).
7. Zimmermann, Hans-Jürgen, “Fuzzy Set Theory - and its Applications”, Ed. Springer, (2001).