

**Sistemas dinámicos con fricción expresados en ecuaciones  
hamiltonianas controladas por puerto**

por

**M. en I. Cecilia Cornejo Romero**

**Tesis presentada para obtener el grado de**

**Doctora en Ingeniería Eléctrica opción Control**

en el

**Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería**

de la

**Universidad Nacional Autónoma de México**

Director de tesis

Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi querido maestro  
Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria*

## Agradecimientos

Agradezco a mi familia el apoyo incondicional que siempre me ha brindado, pues ello a facilitado mi desarrollo profesional y personal.

Agradezco al Dr. Luis Álvarez-Icaza Longoria su calidad humana, su interés, aportaciones y enseñanzas que me permitieron llevar a buen termino este trabajo de investigación.

Agradezco especialmente a los Doctores Luis Álvarez-Icaza Longoria y Sebastián Ibarra Rojas todas las facilidades que me otorgaron para llevar a cabo mis estudios de doctorado.

Agradezco a mi comité tutorial Dr. Gerardo Espinosa, Dr. Marco Arteaga, Dr. Leonid Friedman y Dr. Edmundo Rocha, todas las observaciones y aportaciones hechas al presente trabajo doctoral.

Agradezco a todos mis amigos del Instituto de Ingeniería de la UNAM, aquellas discusiones académicas, intercambios de ideas, la ayuda mutua y desde luego los momentos agradables y solidarios que disfrutamos juntos.

Agradezco a los Doctores de la Coordinación de Eléctrica y Computación del Instituto de Ingeniería de la UNAM. Dra. Cristina Verde Rodarte, Dr. Luis Álvarez-Icaza Longoria y Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez, por proveer a los estudiantes del posgrado de Ingeniería Eléctrica opción Control de todos los recursos materiales necesarios para llevar a cabo el cotidiano trabajo de investigación.

Agradezco al CONACYT la beca que tuvo a bien otorgarme para realizar mis estudios de doctorado.

# Índice General

|   |          |
|---|----------|
| <b>Índice de Figuras</b>  | <b>3</b> |
| <b>1 Introducción</b>   | <b>4</b> |
| <b>2 Estado del arte</b>  | <b>7</b> |
| 2.1 Modelado desde una perspectiva de energía . . . . .                                     | 8        |
| 2.1.1 Euler-Lagrange . . . . .  | 8        |
| 2.1.2 Ecuaciones de Hamilton . . . . .  | 11       |
| 2.1.3 Ecuaciones Hamiltonianas Controladas por Puerto . . . . .                             | 12       |
| 2.2 Hamiltoniano, disipatividad y pasividad . . . . .                                       | 14       |
| 2.2.1 Definiciones básicas . . . . .  | 14       |
| 2.2.2 Interconexión de sistemas disipativos . . . . .                                       | 17       |
| 2.3 Control Basado en Pasividad con Asignación de Interconexión y Amortiguamiento . . . . . | 19       |
| 2.3.1 Sistema dinámico en EHCP . . . . .  | 19       |
| 2.3.2 Condiciones de existencia para la ley de CBP . . . . .                                | 20       |
| 2.3.3 Dinámica de lazo cerrado . . . . .  | 22       |
| 2.4 Estadios y modelos de fricción . . . . .  | 23       |
| 2.4.1 Modelo de Fricción de Coulomb . . . . .   | 23       |
| 2.4.2 Fricción viscosa . . . . .  | 24       |
| 2.4.3 Fricción: estática, de ruptura, de Coulomb y viscosa . . . . .                        | 25       |
| 2.4.4 Relación fricción-lubricación . . . . .   | 26       |
| 2.4.5 Efecto Stribeck en la fricción . . . . .  | 27       |
| 2.4.6 Histéresis . . . . .  | 27       |
| 2.4.7 Modelo de fricción estático . . . . .   | 28       |
| 2.4.8 Modelo de siete parámetros . . . . .  | 29       |
| 2.5 Modelos Dinámicos de Fricción . . . . .   | 30       |
| 2.5.1 Modelo de fricción de Dahl . . . . .  | 30       |
| 2.5.2 Modelo Bliman-Sorine . . . . .  | 31       |
| 2.5.3 Modelo de cerdas . . . . .  | 32       |
| 2.5.4 Modelo de fricción LuGre . . . . .  | 33       |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>3</b> | <b>Modelo del fricción PUMA</b>   | <b>35</b> |
| 3.1      | Modelo de fricción Puma . . . . .   | 35        |
| 3.1.1    | Antecedentes . . . . .  | 35        |
| 3.1.2    | Modelo de Fricción Puma en EHCP con señal de excitación . . . . .                 | 37        |
| 3.1.3    | Modelo de Fricción Puma en EHCP . . . . .   | 39        |
| 3.1.4    | Punto de equilibrio del modelo de fricción . . . . .                              | 40        |
| 3.1.5    | Alcances del esquema de fricción Puma del modelo de fricción . . . . .            | 41        |
| <b>4</b> | <b>Estructura civil</b>   | <b>42</b> |
| 4.1      | Síntesis de técnicas de control . . . . .   | 43        |
| 4.2      | Modelo matemático de la estructura civil . . . . .                                | 44        |
| 4.3      | Características del actuador (amortiguador magneto-reológico) . . . . .           | 46        |
| 4.4      | Modelo matemático edificio-actuador en EHCP . . . . .                             | 47        |
| 4.5      | Diseño de la Ley de CBP-AIA para una estructura civil . . . . .                   | 48        |
| 4.5.1    | Condiciones de existencia de la ley de control . . . . .                          | 49        |
| 4.5.2    | Ley de control . . . . .  | 51        |
| 4.6      | Simulación numérica para una estructura civil de tres plantas . . . . .           | 52        |
| <b>5</b> | <b>Péndulo doble</b>  | <b>57</b> |
| 5.1      | Descripción del sistema . . . . .   | 57        |
| 5.2      | Modelo matemático del péndulo doble . . . . .                                     | 58        |
| 5.3      | Diseño de la Ley de CBP-AIA para el doble péndulo con fricción dinámica . . . . . | 59        |
| 5.3.1    | Condiciones de existencia de la Ley de Control . . . . .                          | 61        |
| 5.4      | Simulación numérica para el péndulo doble . . . . .                               | 66        |
| <b>6</b> | <b>Péndulo de Furuta</b>  | <b>68</b> |
| 6.1      | Descripción del sistema . . . . .   | 69        |
| 6.2      | Modelo matemático del péndulo de Furuta . . . . .                                 | 69        |
| 6.3      | Diseño de la Ley de la ley de CBP-AIA . . . . .                                   | 71        |
| 6.4      | Ley de control . . . . .  | 73        |
| 6.5      | Condición de aparejamiento . . . . .  | 73        |
| 6.6      | Simulación numérica . . . . .   | 77        |
| <b>7</b> | <b>Conclusiones</b>   | <b>81</b> |
| <b>A</b> | <b>Parámetros del edificio</b>  | <b>87</b> |
| <b>B</b> | <b>Parámetros del péndulo doble</b>   | <b>88</b> |
| <b>C</b> | <b>Parámetros del péndulo de Furuta</b>   | <b>91</b> |
| <b>D</b> | <b>Artículos</b>  | <b>93</b> |

# Índice de Figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Conexión en paralelo de sistemas disipativos . . . . .   | 17 |
| 2.2 | Conexión en realimentación de sistemas disipativos . . . . .   | 18 |
| 2.3 | Modelo de fricción de Coulomb . . . . .  | 24 |
| 2.4 | Fricción viscosa y de Coulomb . . . . .  | 25 |
| 2.5 | Fricción estática + Fricción de Coulomb + Fricción viscosa . . . . .                                       | 25 |
| 2.6 | Fricción Stribeck, incluyendo los cuatro regimenes de lubricación . . . . .                                | 27 |
| 2.7 | Retardo velocidad fricción . . . . .   | 28 |
| 2.8 | Fenómeno de histéresis en la fricción . . . . .  | 28 |
| 4.1 | Estructura civil y amortiguador magneto-reológico. . . . .   | 45 |
| 4.2 | Aceleración del terreno sismo SCT-NS, México 1985. . . . .   | 52 |
| 4.3 | Señal de control fuerza . . . . .  | 53 |
| 4.4 | Señal de control tensión . . . . .   | 53 |
| 4.5 | Desplazamiento del primer piso con y sin control. . . . .  | 54 |
| 4.6 | Desplazamiento del segundo piso con y sin control. . . . .   | 54 |
| 4.7 | Desplazamiento del tercer piso con y sin control. . . . .  | 55 |
| 5.1 | Diagrama de cuerpo libre de un manipulador de dos grados de libertad(Kelly<br>y Santibáñez 2003) . . . . . | 58 |
| 5.2 | Posición angular $q_1$ . . . . .   | 66 |
| 5.3 | Suma de las posiciones angulares $q_1 + q_2$ . . . . .   | 67 |
| 5.4 | Señal de control (par) . . . . .   | 67 |
| 6.1 | Péndulo de Furuta . . . . .  | 69 |
| 6.2 | Posición angular del péndulo . . . . .   | 77 |
| 6.3 | Posición angular del brazo . . . . .   | 78 |
| 6.4 | Momento generalizado del péndulo . . . . .   | 79 |
| 6.5 | Momento generalizado del brazo . . . . .   | 80 |
| 6.6 | Señal de control (par) . . . . .   | 80 |

# Capítulo 1

## Introducción

El presente trabajo doctoral aborda el control de sistemas mecánicos subactuados sujetos a efectos de fricción. Esta clase de sistema tiene, en muchos casos, comportamiento no lineal complejo, lo que dificulta la síntesis de las leyes de control. Por esta razón, los sistemas mecánicos subactuados se han usado como medio de prueba para el ensayo y verificación de estrategias de control no lineal en los últimos años, como lo atestigua el gran volumen de publicaciones en el tema (ver por ejemplo (Angeli David 2000; Iwashiro, M. and Astrom, K.J. 1996; Aracil J. and Gordillo F. 2005; Astrom K. J. and Gordillo F. 2008; Aracil J. and Astrom K. 2006; Siciliano Bruno and Valavanis Kimon P. 1998)).

Para abordar el problema de control de los sistemas mecánicos subactuados, en este trabajo de investigación se han adoptado dos marcos teóricos principales. Por un lado, el modelado de esos sistemas se realiza en el marco de las Ecuaciones Hamiltonianas Controladas por Puerto (EHCP) que fue introducido en (Blankenstein, G. and Van der Schaft, A. J. 2001; Ortega, R., van der Schaft, A. J., Mareels, I., and Maschke B. 2001). Para realizar el control en este marco, se recurre al control basado en pasividad por asignación de interconexión y amortiguamiento (CBP-AIA) que fue presentado en (Ortega, van der Schaft, Bernhard, and Escobar 2002). El uso de este marco teórico provee al diseño de la ley de control de una estructura con una fuerte base física y con una relación estrecha con el manejo de la energía en el sistema. Además, permite manejar de manera natural la interconexión de sistemas que posean propiedades de pasividad (Ortega, R. and García-Canseco Eloísa 2004).

Por otro lado, para representar el fenómeno de fricción, se decidió recurrir a su representación a través de modelos dinámicos de fricción. Este tipo de modelos permite repro-

ducir la mayor parte de los fenómenos no lineales que se observan en la fricción: adhesión-deslizamiento, fricción estática, fricción dinámica, histéresis, etc., y que se reportan en la literatura especializada<sup>1</sup>. En particular este trabajo se basa en los modelos de fricción dinámica desarrollados por (Dahl 1976) y (Canudas, C., Olsson, H., Åstrom, K. J., and Lischinsky, P. 1995), este último conocido como modelo LuGre.

Aunque existen trabajos que analizan los modelos dinámicos de fricción bajo la perspectiva de pasividad, como es el caso del modelo de LuGre (Barabanov, N. and Ortega, R. 2000b), no existen al fecha trabajos que incorporen directamente los efectos de fricción en la síntesis de las leyes de control en el marco de EHCP. Uno de los objetivos primordiales de este trabajo es incorporar los modelos dinámicos de fricción en el marco de las EHCP, para así poder diseñar leyes de control basadas en el enfoque de CBP-AIA.

Para proponer el modelado de efectos dinámicos de fricción en el marco de las EHCP fue necesario modificar el modelo dinámico de fricción de LuGre (Canudas, C., Olsson, H., Åstrom, K. J., and Lischinsky, P. 1995) a fin que su incorporación preservara las propiedades de dicha estructura. La modificación al modelo, a la que se denominó modelo Puma, fue probada con datos experimentales obtenidos de un amortiguador magneto-reológico (Jiménez, R. and Álvarez, L. 2005). El modelo de este amortiguador en el marco de EHCP es un caso general que permite describir la fricción dinámica presente cada grado de libertad de un sistema mecánico subactuado. Los resultados de la prueba del modelo modificado con datos experimentales tienen una precisión similar a la obtenida con el modelo de LuGre y, por tanto, proveen evidencia empírica sobre la posibilidad de su uso en el marco de las EHCP.

Una vez formulado el modelo de sistema mecánico subactuado y el de la fricción dinámica en el marco de las EHCP se realizó la síntesis de leyes de CBP-AIA para tres sistemas distintos. El primer caso de estudio corresponde a un edificio de tres pisos sujeto a excitación sísmica, donde el actuador es un amortiguador magneto-reológico acoplado entre el suelo y el primer piso. El objetivo de control es reducir el desplazamiento de los pisos, para evitar que se presenten deformaciones plásticas que dañen el edificio. Para ello se considera que se dispone de las mediciones de la aceleración de terreno y de la aceleración, velocidad y desplazamiento de cada uno de los pisos. Con está información, se obtuvo el modelo del conjunto edificio-amortiguador magneto-reológico en EHCP y se diseñó una ley de control

---

<sup>1</sup>Ver, por ejemplo, el trabajo de (Armstrong, B. and Canudas de Wit C. 1994) para un resumen de los efectos de fricción bajo la perspectiva de control.

bajo la metodología de CBP-AIA que genera la señal de voltaje que se aplicará al amortiguador<sup>2</sup>. Los resultados muestran una reducción considerable del desplazamiento de los pisos, cuando se compara con la respuesta libre de la estructura a la excitación sísmica.

Los otros dos casos de estudio corresponden a sistemas con grado de subactuación uno: el péndulo doble y el péndulo de Furuta. En esos sistemas mecánicos subactuados se incluye el efecto de fricción dinámico en cada una de las dos articulaciones. Se derivan leyes de control que estabilizan ambos péndulos en las posiciones que corresponden con puntos de equilibrio inestables en lazo abierto. Las leyes de control desarrolladas son continuas, a diferencia de muchas de las leyes de control sugeridas en la literatura, que recurren a estrategias de conmutación entre leyes de control para conseguir el mismo fin.

Las aportaciones de este trabajo se pueden resumir como sigue:

- Se propone y valida experimentalmente un nuevo modelo dinámico de fricción.
- Se incorpora el nuevo modelo dinámico en el marco de las EHCP y se demuestra que el sistema resultante mantiene las propiedades de dicha estructura.
- Se diseñan leyes de control bajo el enfoque de CBP-AIA para tres sistemas subactuados: edificio, péndulo doble y péndulo de Furuta. Las leyes de control, en todos los casos son continuas por lo que no tienen ninguna conmutación.

La organización del trabajo es la siguiente. En el capítulo 2 se presenta el estado del arte respecto a la técnica de modelado utilizada, de EHCP, la técnica de control CBP-AIA y finalmente sobre modelos de fricción. El capítulo 3 presenta el modelo de fricción Puma, analiza sus propiedades y lo incorpora en el marco de las EHCP. Los capítulos 4, 5 y 6 describen el diseño de leyes de control por CBP-AIA para los tres casos de estudio: un edificio, un péndulo doble y el péndulo de Furuta. Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones del trabajo y las líneas abiertas para trabajo futuro.

---

<sup>2</sup>El funcionamiento de estos dispositivos se describe con mayor detalle en (Jiménez, R. and Álvarez, L. 2005) .

## Capítulo 2

# Estado del arte

Este trabajo se enfoca a sistemas dinámicos bajo la presencia de fricción, modelados desde un enfoque de energía. Dicho enfoque permite al esquema de control manipular la interconexión y la disipación de energía del sistema para inducir un estado de equilibrio deseado. Para hacer una descripción detallada las herramientas mencionadas, este capítulo se divide en tres tópicos fundamentales, el primero corresponde al esquema de modelado, el segundo al esquema de control y el tercer apartado aborda un resumen de los modelos de fricción.

Respecto a las técnicas de modelado basadas en un enfoque de intercambio de energía se toman como referencia las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (EL) debido a que la dinámica se construye a partir de la diferenciación del Lagrangiano, que a su vez se define en función de la energía cinética y potencial. Posterior a este enfoque, está el propuesto por Hamilton, que retoma algunos elementos de las ecuaciones EL, pero redefine las variables del sistema y con la transformación de Legendre genera las Ecuaciones Dinámicas de Hamilton (EDH). Adicionalmente, los sistemas físicos modelados en EDH satisfacen que las variables de entrada o salida corresponden a señales de flujo y esfuerzo, por lo tanto el producto entrada-salida genera unidades de potencia. Estos sistemas poseen una estructura matemática que permite evidenciar los intercambios y las pérdidas de energía en el sistema por medio de arreglos matriciales y se denominan Ecuaciones Hamiltonianas Controladas por Puerto (EHCP) (Van der Schaft 1999).

El segundo tema abordado en esta sección corresponde a la técnica de control utilizada, denominada Control Basado en Pasividad con Asignación de Interconexión y Amor-tiguamiento (CBP-AIA) (Ortega, R., van der Schaft, A. J., Mareels, I., and Maschke B.

2001). Como su nombre lo indica el esquemas de control utilizado usa el enfoque de pasividad que ofrece múltiples ventajas que se comentan a lo largo de este trabajo, por ejemplo, se puede hacer referencia a la facilidad para analizar la estabilidad. El dúo EHCP y CBP-AIA hace más simple el desarrollo de las condiciones de existencia de la ley de control, de igual manera que su construcción.

El tercer tema abordado se refiere al fenómeno de fricción, siempre presente cuando existe desplazamiento relativo entre dos cuerpos. Desde la antigüedad ha habido interés al respecto, primeramente para reconocer cuando se produce y las distintas etapas que se generan alrededor de él. Posteriormente, con fines de un análisis detallado, se han construido prototipos de laboratorio para reproducir completa o parcialmente sus etapas y así reconocerlas plenamente, definir sus características y diferencias. Una vez lograda esta tarea se puede considerar la modelación matemática que ofrece la ventaja de hacer generalizaciones y simplificar la experimentación mediante la simulación numérica.

## 2.1 Modelado desde una perspectiva de energía

### 2.1.1 Euler-Lagrange

Respecto al modelado de sistemas dinámicos, es obligado hacer referencia a la dinámica clásica. Una fracción de ella corresponde a la dinámica newtoniana en un marco de referencia inercial denominada *dinámica vectorial*. La otra es la *dinámica analítica* que es más general que la vectorial, ya que el marco de referencia es generalizado, sus coordenadas son una posición y un momento generalizado. A partir de esta construcción, se definen funciones escalares que modelan la energía cinética y potencial del sistema y una función de estas dos energías resulta ser el Lagrangiano. Así con el Lagrangiano y el principio de mínima acción se llega a la dinámica de un sistema en ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. Para generar el modelo de la dinámica de un sistema por medio de Euler-Lagrange se plantea un objeto de de  $N$  partículas cuyas posiciones relativas en un marco inercial generalizado, en coordenadas cartesianas son  $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$ . La energía cinética total del sistema está dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} m_k \dot{x}_k^2 \quad (2.1)$$

donde  $m_1 = m_2 = m_3$  porque es la masa de la primera partícula y  $(x_1, x_2, x_3)$  especifica su posición, para el caso de la segunda partícula su masa es  $m_4 = m_5 = m_6$  y su posición  $(x_4, x_5, x_6)$  y así sucesivamente. Ahora se recurre a las coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  para definir la posición de una partícula.

$$x_k = x_k(q, t) \quad (2.2)$$

se asume que estas ecuaciones son dos veces diferenciables respecto a  $q$  y  $t$ . Si se deriva con respecto al tiempo  $x_k(q, t)$  se tiene que

$$\dot{x}_k(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_k}{\partial t} \quad (2.3)$$

Debe hacerse la precisión que  $\dot{x}_k$  guarda una relación lineal con los términos. Además  $\dot{q}$  y que  $\frac{\partial x_k}{\partial t}$  son funciones de  $q$  y  $t$ . Al derivar parcialmente la Ec. (2.3) respecto a  $\dot{q}_j$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \dot{x}_k(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_k}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.4)$$

se debe recordar que  $x$  sólo es función de  $q$  y  $t$  entonces la segunda derivada es cero por lo que (2.4) se reduce a

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}. \quad (2.5)$$

Por otra parte al sustituir la Ec.(2.3) en Ec.(2.1), se obtiene

$$T(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} m_k \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_k}{\partial t} \right)^2. \quad (2.6)$$

Al desarrollar la ecuación de la energía cinética (2.6)

$$T(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^{3N} m_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^{3N} m_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial t} \right) \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} m_k \left( \frac{\partial x_k}{\partial t} \right)^2. \quad (2.7)$$

Como un punto de partida para encontrar las ecuaciones de Lagrange se recurre al Principio de D'Alembert, que está dado por

$$\sum_{k=1}^{3N} (F_k - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k = 0, \quad (2.8)$$

Al derivar la Ec. (2.1), se escribe la ecuación del momento generalizado de la forma

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{3N} m_k \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.9)$$

Al usar la Ec. (2.5), la Ec. (2.9) puede reescribirse como

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{3N} m_k \dot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i}. \quad (2.10)$$

Derivando con respecto al tiempo la Ec. (2.10) se llega a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{3N} m_k \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i}. \quad (2.11)$$

Ahora al derivar con respecto a  $q$  la Ec. (2.1) se tiene

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{3N} m_k \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} \quad (2.12)$$

al sustituir la Ec. (2.12) en (2.11) se obtiene

$$\sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (2.13)$$

Por otra parte la fuerza generalizada está dada por.

$$Q_i = \sum_{k=1}^{3N} F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \quad (2.14)$$

De las Ecs. (2.8), (2.13) y (2.14) se obtiene

$$\sum_{i=1}^{3N} \left[ Q_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0$$

En el caso de un sistema holónomo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (1 = 1, 2, \dots, n)$$

La energía potencial está dada por:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Entonces las ecuaciones de movimiento de Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (1 = 1, 2, \dots, n) \quad (2.15)$$

para escribir la Ec. (2.15) en forma más simplificada se recurre a la definición del Lagrangiano

$$L = T - V$$

Así las ecuaciones de movimiento están dadas por.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.16)$$

### 2.1.2 Ecuaciones de Hamilton

El enfoque Hamiltoniano parte de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange y la transformación de Legendre  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . Se plantea una ecuación de energía denominada Hamiltoniano que es la suma de las ecuaciones escalares que definen la energía cinética y potencial, descritas en las variables de posición y momento generalizado. Este enfoque para es útil, pues facilita el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado desde una perspectiva de Lyapunov, ya que el Hamiltoniano resulta ser una función candidata de Lyapunov. A continuación se presentan los elementos básicos para la construcción de la dinámica de un sistema en Ecuaciones de Hamilton.

En mecánica clásica se recurre a la transformada de Legendre para generar la formulación Hamiltoniana a partir de la formulación Lagrangiana, y viceversa. Dicha transformación permite el cambio de variable de velocidad generalizada (usadas en el Lagrangiano) a momento generalizado (usada en el Hamiltoniano), está dada por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

A partir de la transformación de Legendre y el Lagrangiano, es posible definir el Hamiltoniano como

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t). \quad (2.17)$$

Otra relación entre  $p$  y  $\dot{q}$  está dada por

$$\begin{aligned} p &= M(q, t) \dot{q} \\ \dot{q} &= M^{-1}(q, t) p \end{aligned}$$

donde:  $M(q, t)$  es la matriz de inercia.

Al considerar una variación arbitria en el Hamiltoniano, se obtiene

$$\delta H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial t} \delta t \quad (2.18)$$

Al sustituir la Ec. (2.17) en la Ec.(2.18)

$$\begin{aligned} \delta H(q, p, t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \right) \delta q_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial p_j} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \right) \delta p_i \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \right) \delta t \end{aligned} \quad (2.19)$$

La Ec. (2.19) puede reescribirse como

$$\delta H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \quad (2.20)$$

Las Ecs. (2.18) y (2.20) deben ser iguales, para que ello se cumpla

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.21)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.23)$$

Así al asegurar las igualdades anteriores, se obtienen las ecuaciones canónicas de movimiento de Hamilton dadas por (2.21) y (2.22) (Greenwood 1997).

### 2.1.3 Ecuaciones Hamiltonianas Controladas por Puerto

Como se ha descrito en los párrafos anteriores, las ecuaciones Hamiltonianas de movimiento tienen su origen en las Lagrangianas de movimiento y la transformación de Legendre. Las Ecuaciones Hamiltonianas Controladas por Puerto (EHCP), adicionalmente a las propiedades de las Ecuaciones Hamiltonianas, tienen asociada una estructura de interconexión de energía y una estructura geométrica dada por la estructura de Dirac (Secchi Cristian and Fantuzzi 2007), bajo dos espacios vectoriales, el primero que corresponde a las variables de flujo y su espacio dual, las variables de esfuerzo. Por su parte el Hamiltoniano se construye como una función de la energía total del sistema, o equivalentemente, la suma de la energía cinética y potencial (Secchi Cristian and Fantuzzi 2007).

Para iniciar la construcción de la dinámica del modelo en EHCP se identifican las variables de flujo y esfuerzo correspondientes con los puertos de entrada y salida. Para construir el Hamiltoniano se suman la energía cinética y potencial en función de la posición y el momento generalizado, en forma general puede describirse como

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p + P(q) \quad (2.24)$$

donde:  $\frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p$  es la energía cinética y  $P(q) \geq C$  es la energía potencial que está acotada por debajo por una constante  $C$ . Una vez propuesta la función de energía se desarrollan las ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica del sistema y se determinan las matrices de interconexión y disipación de energía. La estructura de un sistema dinámico en EHCP es.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \\ y &= g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) \end{aligned}$$

donde  $J(x) = -J^T(x)$  es la matriz de interconexión,  $R(x) = R^T(x) \geq 0$  es la matriz de amortiguamiento,  $H(x)$  es el Hamiltoniano o función de almacenamiento de energía y  $u$  y  $y$  son la entrada y la salida respectivamente.

Hasta ahora se han planteado los elementos necesarios para la construcción de EHCP y la definición de su estructura matemática, descrita a continuación.

Como un primer punto se analiza la derivada del hamiltoniano con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \dot{H}(x) &= \frac{\partial H^T(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ \dot{H}(x) &= \frac{\partial H^T(x)}{\partial x} [J(x) - R(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \frac{\partial H^T(x)}{\partial x} g(x)u \end{aligned}$$

Por definición la matriz  $J(x)$  es antisimétrica, por lo que  $\dot{H}(x)$  es

$$\dot{H}(x) = -\frac{\partial H^T(x)}{\partial x} R(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + u^T y \quad (2.25)$$

Al aplicar el operador integral a la Ec. (2.25) (Ortega, R., van der Schaft, A. J., Mareels, I., and Maschke B. 2001)

$$\underbrace{H[x(t)] - H[x(0)]}_{\text{energía-almacenada}} = \underbrace{\int_0^t u^T(t)y(t)dt}_{\text{fuente-de-energía}} - \underbrace{\int_0^t \frac{\partial H(x)^T}{\partial x} R(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x}}_{\text{energía-disipada}}$$

Observaciones importantes a partir de la Ec. (2.25) (Ortega, R., van der Schaft, A. J., Mareels, I., and Maschke B. 2001).

- Cuando la entrada es cero,  $u = 0$ , por la definición de la matriz de disipación  $R(x) \geq 0$ , se puede asegurar que la primera parte del lado derecho de la Ec. (2.25) es negativa.
- Cuando la entrada es cero  $u = 0$ , el Hamiltoniano en la Ec.(2.25) es no incremental, esto es  $H[x(t)] \leq H[x(0)]$  y, más aún, es decreciente en presencia de disipación.
- Si la función de energía es acotada por debajo, el sistema tiene un punto de equilibrio, en el punto de mínima energía. Además si  $H(x)$  es no negativa se tiene  $-\int_0^t u(t)y(t)dt \leq H[x(0)] < \infty$ , que muestra que la energía que el sistema puede disipar está acotada.

## 2.2 Hamiltoniano, disipatividad y pasividad

En esta sección se presentan la formalización de la definición de un sistema disipativo, las condiciones para asegurar que el sistema es pasivo y las ventajas que ofrece, desde un punto de vista de control dinámico, el uso de sistemas pasivos (Sepulchre R. 1997). A partir de las definiciones presentadas en esta sección, se muestra la relación entre pasividad y la dinámica del sistema en EHCP, para posteriormente extenderla al diseño del controlador. Para iniciar, se presentan las definiciones de tasa de suministro, función de energía, disipatividad y pasividad; posteriormente se presentan las ventajas de la interconexión en realimentación en sistemas pasivos y se finaliza con la conceptualización de CBP-AIA.

### 2.2.1 Definiciones básicas

Aunque los conceptos de pasividad son aplicables a una amplia gama de sistemas, en este trabajo se restringe a aquellos modelados en ecuaciones diferenciales ordinarias con un vector de entrada  $u$  y uno de salida  $y$ . En forma general se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), & x &\in \mathfrak{R}^n \\ y &= h(x, u), & u, y &\in \mathfrak{R}^m \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde:

$x(t)$ : es el estado del sistema y representa una función del tiempo,

$u(t)$ : es la función de entrada y se asume que  $u(t) : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^m$  pertenece a un conjunto  $U$  de funciones de entrada las cuales son acotadas.

Otra restricción es que el sistema es cuadrado es decir la entrada y la salida son de dimensión

$m$ . Un hecho más es asumir que  $f(0,0)=0$  y  $h(0,0)=0$ . Existen tres casos especiales del sistema de referencia (2.26).

1. Sistemas no lineales afines en control

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x) + j(x)u$$

2. No linealidad estática

$$y = \varphi(u)$$

3. Sistemas lineales

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

**Definición 1** *Disipatividad (Secchi Cristian and Fantuzzi 2007)*

Asuma que el sistema (2.26) tiene asociada una función  $\omega : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , llamada función de suministro la cual es localmente integrable para todo  $u \in U$ , esto es, satisface  $\int_{t_0}^{t_1} |\omega(u(t), y(t))| dt < \infty$  para todo  $t_0 \leq t_1$ . Por otra parte sea  $X$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene el origen. Entonces un sistema se dice que es disipativo en  $X$  con una función de energía  $\omega(u, y)$  si existe una función de energía  $S(x)$ , con  $S(0) = 0$  que cumple que para todo  $x \in X$ .

$$S(x) \geq 0 \quad y$$

$$S(x(T)) - S(x(0)) \leq \int_0^T \omega(u(t), y(t)) dt \quad (2.27)$$

para todo  $u \in U$  y todo  $T \geq 0$  tal que  $x(t) \in X$  para todo  $t \in [0, T]$ . La función  $S(x)$  es llamada función de almacenamiento.

**Definición 2** *Pasividad (Secchi Cristian and Fantuzzi 2007)*

Se dice que el sistema (2.26) es pasivo si es disipativo y además cumple que la función fuente de energía está dada por  $\omega = u^T y$ .

De la definición anterior se observa que la pasividad es un caso especial de la disipatividad, esto es, cuando se cumple que la función de suministro es el producto de la entrada por la salida. En un sistema físico,  $S$  la función de almacenamiento es la función de energía del sistema, y la función fuente de suministro es la potencia de entrada y  $\int_0^T \omega(u(t), y(t))dt$  es la energía suministrada a la sistema por fuentes externas. El sistema es disipativo si el incremento en su energía durante el intervalo  $(0, T)$  no es más grande que la energía suministrada al sistema durante ese intervalo.

Si la función de almacenamiento  $S(x)$  es diferenciable, la Ec. (2.27) puede reescribirse como:

$$\dot{S}(x(t)) \leq \omega(u(t), y(t)) \quad (2.28)$$

Nuevamente, la interpretación es que la razón de cambio en la energía no es mayor que la potencia de entrada.

Si el sistema dado por la Ec. (2.26) es disipativo se puede asociar con una función de almacenamiento  $S_a(x)$ , llamada función de almacenamiento disponible y se define como:

$$S_a(x) = \sup_{u \geq T} \left\{ - \int_0^T \omega(u(t), y(t))dt \mid x(0) = x; y \forall t \in [0, T] : x(t) \in X \right\} \quad (2.29)$$

Una interpretación de la energía disponible  $S_a(x)$  es que es la mayor energía que puede ser extraída del sistema, dada una condición inicial  $x(0) = x$ . La función de almacenamiento disponible  $S_a(x)$  es por ella misma, una función de almacenamiento de energía y debe satisfacer  $S(x) \geq S_a(x)$  Esto puede ser visto reescribiendo

$$S[x(0)] \geq S[x(0)] - S[x(T)] \geq - \int_0^T \omega(u(t), y(t))dt \quad (2.30)$$

lo cual da

$$S[x(0)] \sup_{u \geq T} \left\{ - \int_0^T \omega(u(t), y(t))dt \right\} = S_a[x(0)] \quad (2.31)$$

Las propiedades de  $S_a(x)$  se resumen en el siguiente teorema.

**Teorema 1** *Energía disponible (Secchi Cristian and Fantuzzi 2007)*

*El sistema es disipativo en  $X$  con fuente de energía  $\omega(u, y)$  si y sólo si  $S_a(x)$  está definida para toda  $x \in X$ . Además  $S_a(x)$  es por sí misma una función de almacenamiento de energía y si  $S(x)$  es otra función de almacenamiento con la misma fuente de energía  $\omega(u, y)$ , entonces  $S(x) \geq S_a(x)$*

### 2.2.2 Interconexión de sistemas disipativos

Los métodos de control aplicados en este trabajo de investigación se enfocan a explotar la estructura de los sistemas conformados por interconexiones de subsistemas que poseen propiedades de pasividad. A continuación se presenta un teorema útil en este sentido.

**Teorema 2** (Secchi Cristian and Fantuzzi 2007) *Suponga que  $H_1$  y  $H_2$  son pasivos. Entonces la conexión en paralelo de estos dos sistemas genera un sistema pasivo.*

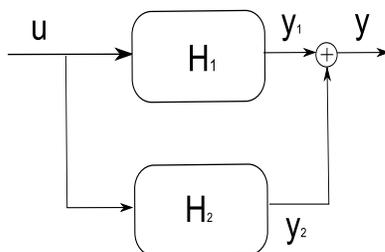


Figura 2.1: Conexión en paralelo de sistemas disipativos

**Prueba** Por la definición de  $H_1$  y  $H_2$  pasivos,

1. Existen dos funciones de almacenamiento de energía  $S_1(x)$  y  $S_2(x)$  respectivamente.
2. Entonces  $S_1(x_1(T)) - S_1(x_1(0)) \leq \int_0^T u_1(t)^T y_1(t) dt$  y  $S_2(x_2(T)) - S_2(x_2(0)) \leq \int_0^T u_2(t)^T y_2(t) dt$
3. Defina  $x = (x_1, x_2)$  y  $S(x) = S_1(x_1) + S_2(x_2)$ , además  $S(x)$  es semidefinida positiva.
4. Para la conexión en paralelo la salida es  $y = y_1 + y_2$  tal que

$$\begin{aligned} S(x(T)) - S(x(0)) &\leq \int_0^T (u^T y_1 + u^T y_2) dt = \\ &= \int_0^T (u^T (y_1 + y_2)) dt = \int_0^T u^T y dt \end{aligned}$$

**Teorema 3** (Secchi Cristian and Fantuzzi 2007) *Suponga que  $H_1$  y  $H_2$  son pasivos. Entonces la conexión en configuración realimentación de estos dos sistemas genera un sistema pasivo (ver Fig. 2.2).*

**Prueba**

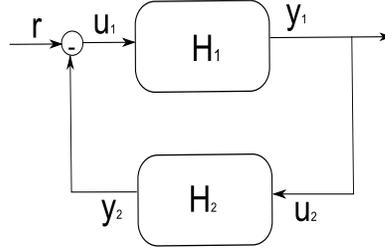


Figura 2.2: Conexión en realimentación de sistemas disipativos

1. Existen dos funciones de almacenamiento de energía  $S_1(x)$  y  $S_2(x)$  respectivamente.
2. Entonces  $S_1(x_1(T)) - S_1(x_1(0)) \leq \int_0^T u_1(t)^T y_1(t) dt$  y  $S_2(x_2(T)) - S_2(x_2(0)) \leq \int_0^T u_2(t)^T y_2(t) dt$
3. Defina  $x = (x_1, x_2)$  y  $S(x) = S_1(x_1) + S_2(x_2)$ , además  $S(x)$  es semidefinida positiva.
4. Para la conexión realimentación se guardan las siguientes relaciones

$$u_2 = y_1 \quad (2.32)$$

$$u_1 = r - y_2 \quad (2.33)$$

y la función de energía está dada por:

$$S(x(T)) - S(x(0)) = \int_0^T (u_1^T y_1 + u_2^T y_2) dt = \quad (2.34)$$

al sustituir (2.32) y (2.33) en (2.34) se tiene

$$S(x(T)) - S(x(0)) = \int_0^T \{(r - y_2)^T y_1 + y_1^T y_2\} dt \\ \int_0^T \{r^T y_1 - y_2^T y_1 + y_1^T y_2\} dt$$

Por otra parte el producto interno de vectores cumple que  $y_2^T y_1 = y_1^T y_2$ , entonces

$$S(x(T)) - S(x(0)) = \int_0^T (r^T y_1 - y_1^T y_2 + y_1^T y_2) dt \quad (2.35)$$

$$\int_0^T r^T y_1 dt \quad (2.36)$$

## 2.3 Control Basado en Pasividad con Asignación de Interconexión y Amortiguamiento

El esquema de CBP-AIA se aplica a sistemas de parámetros concentrados que satisfacen el principio de balance de energía y donde la interconexión con el ambiente se hace por medio de las variables de puerto (variables de entrada y salida) que son variables conjugadas de flujo y esfuerzo, por lo que su producto genera unidades de potencia. El resultado es un sistema dinámico en función de los intercambios y consumo de energía, descrito en ecuaciones en derivadas parciales, nombrado EHCP. Para simplificar el procedimiento en la obtención de la ley de control, se modela en EHCP la dinámica de la planta y el controlador, ya que la interconexión en realimentación de sistemas expresados en EHCP preserva la estructura Hamiltoniana del sistema completo planta-controlador.

El objetivo CBP-AIA es regular el estado de equilibrio del sistema en lazo cerrado sin modificar o eliminar las características no lineales que definen la dinámica de la planta, mas bien busca aprovecharlas en una redefinición del sistema, planteando una dinámica de lazo cerrado deseada, con las siguientes bondades. Primero, se propone una función de energía de lazo cerrado con mínimo en el estado de operación deseado del sistema de lazo cerrado. Para lograrlo, fundamentalmente se modifica la energía potencial del sistema y si se requiere también la energía cinética. Además se pueden replantear las estructuras de intercambios y disipación de la energía del sistema original.

Una alternativa para diseñar el controlador es proponer una dinámica de lazo cerrado bajo el conocimiento previo que el diseñador posee de la planta. Esta situación que simplifica la construcción de la ley de control, pues evita resolver las ecuaciones diferenciales parciales, lo que constituye un trabajo considerable. Otra bondad del planteamiento CBP-AIA es que su estructura permite el uso de las técnicas de Lyapunov para el análisis de estabilidad.

### 2.3.1 Sistema dinámico en EHCP

Las EHCP permiten modelar dinámicas de sistemas de parámetros concentrados y evidenciar las aportaciones de interconexión y disipación de energía internas del sistema (Ortega, Loria, Nicklasson, and Sira-Ramírez 1998). Otra ventaja de utilizar esta metodología es que la conexión en configuración de retroalimentación de bloques modeladas en EHCP genera un sistema que conserva las propiedades intrínsecas de las EHCP, además de permi-

tir aplicar CBP-AIA de forma más simple. Una forma general del sistema en EHCP es la que se presenta a continuación.

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \quad (2.37)$$

$$y = g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) \quad (2.38)$$

donde  $J(x) = -J(x)^T$  es la matriz de interconexión,  $R(x) = R(x)^T \geq 0$  es la matriz de amortiguamiento,  $H(x)$  es la función de almacenamiento de energía y  $u \cdot y$  son la entrada y la salida respectivamente cuyo producto genera unidades de potencia.

Si el sistema es pasivo, cumple con la ecuación de balance de energía que se analiza a través de la función de almacenamiento de energía (Ortega, R., van der Schaft, A. J., Mareels, I., and Maschke B. 2001).

Para el diseño de la ley de control se propone un sistema deseado:

$$\dot{x} = [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (2.39)$$

Cuyos elementos aseguren que  $J_d(x) = -J_d^T(x)$  (matriz antisimétrica de interconexión deseada),  $R_d(x) = R_d^T(x) \geq 0$  (matriz de amortiguamiento deseada),  $H_d$  con mínimo en  $x_*$  (función de almacenamiento de energía deseada) y  $x_*$  el punto de equilibrio estable del sistema en lazo cerrado.

### 2.3.2 Condiciones de existencia para la ley de CBP

Para el diseño del CBP-AIA además de que el sistema debe ser expresado en EHCP se debe cumplir una proposición referente a la existencia de la ley de control y la asignación de interconexión y amortiguamiento, que son descritas con mayor detalle a continuación.

**Proposición 1** (Ortega, van der Schaft, Bernhard, and Escobar 2002) *Dados  $J(x)$ ,  $R(x)$ ,  $H(x)$ ,  $g(x)$  y el punto de equilibrio deseado a ser estabilizado  $x_* \in \mathbb{R}^n$ , asumir que se pueden encontrar las funciones  $\beta(x)$ ,  $J_a(x)$ ,  $R_a(x)$  y el vector  $\kappa(x)$  que satisfagan.*

$$[J(x) + J_a - (R(x) + R_a(x))] \kappa(x) = -[J_a(x) - R_a(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) + g(x) \beta(x) \quad (2.40)$$

Donde  $J_a$  es la asignación de interconexión,  $R_a$  la asignación de amortiguamiento,  $H_a$  la función de almacenamiento de energía asignada y  $\beta(x)$  la ley de control.

Tal que se asegure:

- *Preservación de estructura*

$$J_d = J + J_a = -[J + J_a]^T \quad (2.41)$$

- *Integrabilidad*

$$\frac{\partial \kappa(x)}{\partial x} = \left[ \frac{\partial \kappa(x)}{\partial x} \right]^T \quad (2.42)$$

- *Asignación de equilibrio.*

$\kappa(x)$  en  $x_*$ , *satisface:*

$$\kappa(x_*) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x_*) \quad (2.43)$$

- *Estabilidad de Lyapunov El Jacobiano  $\kappa(x)$  en  $x_*$ , *satisface la cota**

$$\frac{\partial}{\partial x} \kappa(x_*) > -\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x_*) \quad (2.44)$$

Bajo estas condiciones, la ley de control  $u = \beta(x)$  proporciona un sistema de lazo cerrado (2.49), cuya función de almacenamiento de energía es de la forma.

$$H_d(x) = H(x) + H_a(x)$$

además se cumple que

$$\frac{\partial H_a}{\partial x}(x) = \kappa(x) \quad (2.45)$$

La solución del sistema en equilibrio esta dado por:

$$x_* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \left[ \frac{\partial H_d}{\partial x} \right]^T R_d \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) = 0 \right\}$$

y el estimado del dominio de atracción está dado por  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid H_d(x) \leq c\}$  (Ortega, van der Schaft, Bernhard, and Escobar 2002).

La ley de control puede construirse directamente por medio de la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \beta(x) = & [g^T(x)g(x)]^{-1}g^T(x)[(J(x) + J_a(x)) - (R(x) + R_a(x))]\nabla_x H_a(x) \\ & + [J_a(x) - R_a(x)]\nabla_x H(x) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Para la construcción del sistema deseado se pueden proponer  $J_a$  y  $R_a$  y satisfacer la condición de apareamiento.

$$g^\perp [J(x) + J_a(x) - (R(x) + R_a(x))]\nabla_x H_a(x) = -g(x)^\perp [J_a(x) - R_a(x)]\nabla_x H(x) \quad (2.47)$$

donde  $g(x)^\perp$  es el aniquilador izquierdo de  $g(x)$  por lo que se asegura  $g(x)^\perp g(x) = 0$

### 2.3.3 Dinámica de lazo cerrado

La dinámica de lazo cerrado para un sistema mecánico con estado  $x = (q, p)$  se establece en EHCP, para ello se propone la función de energía de lazo cerrado como

$$H_d(x) = \frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q)p + P_d(q) \quad (2.48)$$

donde  $\frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q)p$  es la energía cinética deseada y  $P_d(q)$  es la energía potencial deseada. La función de energía de lazo cerrado  $H_d(q, p)$  tiene mínimo local en  $x_*$ , que al mismo tiempo es el estado de operación deseado de lazo cerrado. Al generar las derivadas parciales de la ecuación de energía respecto al estado surgen naturalmente la matrices de interconexión y disipación.

$$\dot{x} = [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (2.49)$$

La matriz de interconexión de lazo cerrado  $J_d$  permite generar interconexiones virtuales entre los elementos que constituyen al sistema y también permite hacer el moldeo de energía cinética del sistema original. La matriz de disipación permite reducir la energía del sistema para inducir al sistema al punto de equilibrio  $x_*$

#### AIA parametrizado

En un sistema dinámico es deseable restringir la función de energía, eligiendo la estructura de la función de energía deseada que genere una nueva ecuación diferencial parcial con términos asignables que mejoren algunas restricciones de las matrices de interconexión y amortiguamiento del sistema original, por ejemplo con la parametrización siguiente (Ortega, R. and García-Canseco Eloísa 2004).

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -M^{-1}(q)M_d(q) \\ M^{-1}(q)M_d(q) & J_2(q, p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_d \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d(q, p) \\ \nabla_p H_d(q, p) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

De la Ec. (2.50)  $\dot{q}$  y  $\dot{p}$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -M^{-1}(q)M_d(q)\nabla_p H_d(q, p) \\ \dot{p} &= M^{-1}(q)M_d(q)\nabla_q H_d(q, p) + J_2(q, p)\nabla_p H_d(q, p) - R_d\nabla_p H_d(q, p) \end{aligned} \quad (2.51)$$

La matriz de disipación de lazo cerrado  $R_d(x)$  permite disipar energía del sistema para inducir al sistema de lazo cerrado al mínimo de la función de energía y con ello lograr que el

sistema de lazo cerrado alcance y permanezca en el estado de operación deseado. La matriz  $M_d(q)$  permite hacer la modificación de la energía cinética. Finalmente  $J_2(q, p) = -J_2^T(q, p)$  permite modificar la interconexión del sistema original a la forma deseada en lazo cerrado.

Al retomar la ecuación de energía de lazo cerrado (2.48) y obtener la derivada, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dH_d(q, p)}{dt} &= \nabla_q H_d(q, p) \dot{q} + \nabla_p H_d(q, p) \dot{p} \\ \frac{dH_d(q, p)}{dt} &= -\nabla_q H_d(q, p) M^{-1}(q) M_d(q) \nabla_p H_d(q, p) + \nabla_p H_d(q, p) M^{-1}(q) M_d(q) \nabla_q H_d(q, p) + \\ &+ \nabla_p H_d(q, p) J_2(q, p) \nabla_p H_d(q, p) - \nabla_p H_d(q, p) R_d(x) \nabla_p H_d(q, p) \end{aligned} \quad (2.52)$$

De la Ec. (2.52) se puede observar que el primer y segundo término se cancelan, el tercer término por el arreglo de los elementos y como  $J_2(q, p)$  es antisimétrica también se anula entonces solo queda el último término, con lo cual la derivada es.

$$\frac{dH_d(q, p)}{dt} = -\nabla_p H_d(q, p) R_d(x) \nabla_p H_d(q, p) \leq 0$$

Así  $H_d(q, p)$  cumple los requerimientos para ser una función de Lyapunov. Se puede asegurar estabilidad asintótica al usar el principio de invariancia de LaSalle y la condición.

$$x_* = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid [\nabla H_d]^T R_d(x) \nabla H_d = 0\}$$

Por ello las soluciones permanecen acotadas y el dominio de atracción estimado está dada por.

$$x_* = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \nabla H_d \leq c\}$$

Así el sistema de lazo cerrado será asintóticamente estable.

## 2.4 Estadios y modelos de fricción

### 2.4.1 Modelo de Fricción de Coulomb

Adicionalmente al descubrimiento de la fricción estática, Coulomb generó un modelo simple de fricción en el que la plantea como una fuerza de valor constante y directamente proporcional al signo de la velocidad.

$$F = F_C \text{sign}(v)$$

donde:

$F_C$ : nivel de fricción de Coulomb

$v$ : velocidad relativa de un cuerpo respecto a otro

$F$ : Fuerza de fricción, ver Figura 2.3

El nivel de fricción de Coulomb está directamente relacionado con el coeficiente de fricción  $\mu$  y la carga normal  $N$ .

$$F_C = \mu N$$

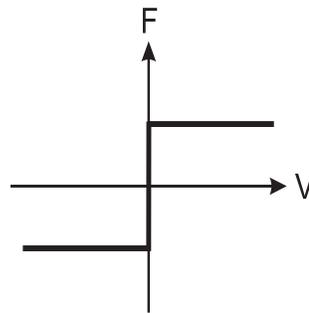


Figura 2.3: Modelo de fricción de Coulomb

#### 2.4.2 Fricción viscosa

En una búsqueda por reducir los efectos de la fricción y evitar el desgaste de los mecanismos se introducen entre las superficies en contacto aceites lubricantes. Cumplen su objetivo en la mayoría de los casos, pero definitivamente modifican la dinámica del fenómeno de fricción. Como una referencia en el caso de cuerpos lubricados se puede hacer mención a los estudios de Reynolds en el área de dinámica de fluidos, a partir de los cuales se plantea un modelo denominado modelo de fricción viscosa (ver Figura 2.4), en el que se propone que la fuerza de fricción es directamente proporcional a la velocidad.

$$F_v = c\dot{x} = cv$$

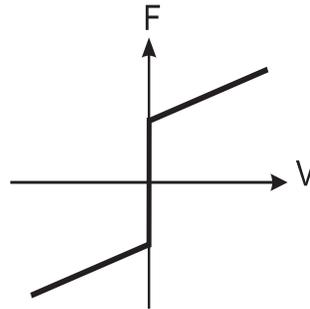


Figura 2.4: Fricción viscosa y de Coulomb

### 2.4.3 Fricción: estática, de ruptura, de Coulomb y viscosa

Debido a que los modelos anteriormente presentados sólo enfocan su análisis a una parte de la dinámica del fenómeno de fricción, Reynolds y Morin hacen un acoplamiento de ellos en búsqueda de una descripción más precisa del fenómeno de fricción

- Fricción estática
- Fricción de ruptura
- Fricción de Coulomb
- Fricción viscosa

En forma gráfica este acoplamiento se muestra en la Figura 2.5

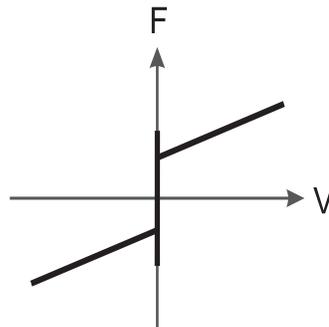


Figura 2.5: Fricción estática + Fricción de Coulomb + Fricción viscosa

#### 2.4.4 Relación fricción-lubricación

Para encontrar una explicación más completa de las etapas por las que atraviesa el fenómeno de fricción, otros investigadores enfocaron su estudio a cuerpos en contacto introduciendo sustancias lubricantes bajo la premisa de reducir los efectos de fricción. Se identifican varias fases de la lubricación entre dos cuerpos en contacto con movimiento relativo que se han clasificado en función del grosor de la película lubricante (Armstrong, B. and Canudas de Wit C. 1994). Puede hablarse de cuatro etapas: lubricación límite, lubricación acotada, lubricación fluida parcial y lubricación fluida completa. A continuación se hace una descripción detallada de cada una de ellas.

- **Lubricación límite.** Este tipo de lubricación presenta una película muy delgada e irregular de material de lubricante por tal motivo se presenta contacto sólido-sólido. En relación a la dinámica de fricción en la lubricación límite se reduce la fricción estática hasta llegar al nivel de fricción de Coulomb y el sistema se prepara para iniciar el desplazamiento.
- **Lubricación acotada** en este caso la película lubricante es delgada y con algunas imperfecciones, lo que causa contacto sólido-sólido en algunas ocasiones. Respecto a la dinámica de fricción se vence el nivel de fricción estática e inicia una muy lenta velocidad de deslizamiento.
- **Lubricación fluida parcial.** En este caso la película lubricante es gruesa pero no más que la altura de las asperezas que presentan los cuerpos. En esta lubricación la carga es soportada por el fluido, es decir los dos cuerpos están flotando pero en función de la velocidad y las asperezas se puede presentar el caso en el que la capa lubricante se perfora y se presente el contacto sólido-sólido. La dinámica de fricción es de tipo viscosa, con una reducción de la fuerza de fricción y un incremento de la velocidad.
- **Lubricación fluida completa.** Este es el tipo de lubricación ideal, debido a que la película lubricante es uniforme, gruesa y sin orificios, con ello se evita completamente el contacto sólido-sólido y se evita el desgaste de los mecanismos. En el caso de la dinámica de fricción se reduce la fuerza de fricción y se incrementa la velocidad

### 2.4.5 Efecto Stribeck en la fricción

Este modelo plantea una transición suave de fricción estática a dinámica, que pasa por los estadios de lubricación límite, acotada, fluida parcial y fluida completa, siendo la primera de ellas la que corresponde a cero velocidad y la última de ellas a la de mayor velocidad. La incorporación del fenómeno Stribeck que se muestra en la Figura 2.6 incorpora las cuatro etapas.

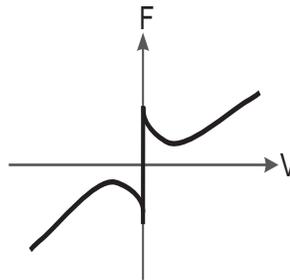


Figura 2.6: Fricción Stribeck, incluyendo los cuatro regimenes de lubricación

### 2.4.6 Histéresis

Al analizar el fenómeno de fricción desde una posición de equilibrio y al aplicar una fuerza cortante sobre uno de los cuerpos, en un inicio no hay deslizamiento hasta cierto nivel de fuerza en que presentan microdeslizamientos regidos por un comportamiento elástico donde no hay velocidad. Al aumentar la fuerza hasta llegar a una fuerza cortante máxima, conocida como fuerza de ruptura y que corresponde al nivel de fricción estática, inicia el movimiento. En este momento la dinámica se transforma en una dinámica de tipo plástica caracterizada por una dinámica no lineal. A esta transición de fricción estática a dinámica se le conoce como adhesión-deslizamiento (*stick-slip*). Una vez que inicia el deslizamiento, la fuerza cortante que se requiere para mantener el estado de movimiento es menor que la necesaria para vencer el estado estático. La fuerza de excitación genera un desplazamiento y esto a su vez una velocidad. Como se ha expresado en las figuras anteriores, la fuerza de fricción tiene una dependencia no lineal de la velocidad. Naturalmente puede considerarse que un cambio inmediato en la velocidad genera un cambio en la fricción. Esto no es así, al generar un cambio en la velocidad, la fricción tiene la misma dinámica pero con un retraso en el tiempo (ver Figura 2.7). Este retraso aunado a la dinámica plástica que se tiene cuando

inicia el movimiento, genera ciclos de histéresis (ver Figura 2.8).

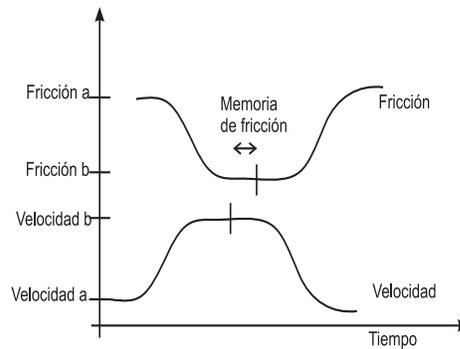


Figura 2.7: Retardo velocidad fricción

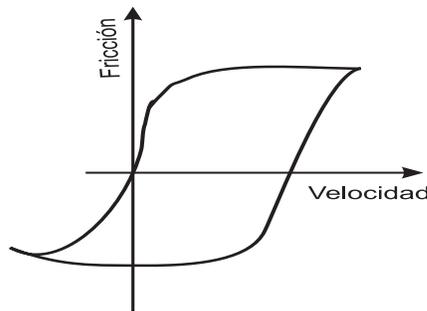


Figura 2.8: Fenómeno de histéresis en la fricción

#### 2.4.7 Modelo de fricción estático

Como una alternativa para describir algunas de las etapas que presenta el fenómeno de fricción puede escribirse un modelo que refleja de fricción estática, la fricción de Coulomb, la fricción viscosa y el efecto Stribeck en una sola ecuación que evita la conmutación entre modelos que corresponden al efecto de adhesión y los que reflejen las características del deslizamiento. Estas ventajas las ofrece el modelo siguiente (Armstrong-Helouvry 1991)

$$F(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-|\frac{v}{v_s}|^{\delta_s}} + F_v v \quad (2.53)$$

donde:

$F_c$ : nivel de fricción de Coulomb

$F_s$ : nivel de fricción estática

$F_v$ : fricción viscosa

$v$ : velocidad relativa.

$v_s$ : velocidad de Stribeck

$\delta_s$  es un exponente arbitrario que modela el efecto Stribeck

La principal desventaja de este modelo para propósitos de simulación o control es la detección de la velocidad cero. Una alternativa es usar el modelo de Karnopp (D. 1985) que supera esta situación bajo el siguiente planteamiento.

$$F_{Karnopp} = \begin{cases} F_{slip} = \begin{cases} F_c + F_v v & v \geq DV \\ -F_c + F_v v & v \leq -DV \end{cases} \\ F_{stick} = \begin{cases} \min(F_e(t), F_s) & |v| < DV, F_e(t) \geq 0 \\ \max(F_e(t), F_s) & |v| < DV, F_e(t) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.54)$$

donde:  $F_e(t)$  es la fuerza externa.

El modelo de fricción de Karnopp identifica la velocidad cero y determina una vecindad alrededor de ella y la acota por una constante  $\pm DV$ . En este intervalo se le asigna a la fuerza de fricción el valor de la fricción estática.

#### 2.4.8 Modelo de siete parámetros

El modelo de siete parámetros es un modelo estático que busca describir distintas etapas que acontecen en el fenómeno de fricción, tales como:

- Adhesión  $F = F_C \text{sign}(v)$
- Fricción de ruptura  $F_s(\gamma, t_d)$
- Deslizamiento  $F_v$ : coeficiente de fricción viscosa, y
- $v_s$ : velocidad de Stribeck

A continuación se presenta el modelo completo y se describe con detalle cada uno de sus componentes. El modelo consta de dos ecuaciones.

$$F = \sigma_0 x$$

$$F = \left\{ F_c + F_s(\gamma, t_d) \frac{1}{1 + \left[ \frac{v(t-\tau_l)}{v_s} \right]^2} \right\} \text{sign}(v) + F_v v$$

donde

$$F_s(\gamma, t_d) = F_{s,a} + (F_{s,\infty} - F_{s,a}) \frac{t_d}{t_d + \gamma}$$

donde:

$F_{s,a}$ : es el coeficiente de fricción estática, previo al desplazamiento.

$t_d$ : es el tiempo

$\tau_l$ : tiempo de retraso que ocurre en la fricción

$\gamma$ : tiempo de fricción estática

$\sigma_0$ : coeficiente de rigidez previo al deslizamiento

$F_C$ : es el coeficiente de fricción de Coulomb

$F_{s,\infty} = F_s - F_C$ : coeficiente de fricción de estado estable

$F_v$ : Coeficiente de fricción viscosa

$v_S$ : velocidad de Stribeck.

## 2.5 Modelos Dinámicos de Fricción

### 2.5.1 Modelo de fricción de Dahl

El modelo de fricción de Dahl es un punto de referencia debido a que es el primer modelo de fricción dinámico (Dahl 1976) que surge como una necesidad para comprender las propiedades quasi-estáticas de dos cuerpos bajo desplazamiento. Dahl propuso una transición suave entre la fricción estática y la dinámica además de dedicar gran parte de su estudio a modelar el efecto de histéresis presente en el fenómeno de fricción.

$$\frac{dF}{dx} = \sigma \left\| 1 - \frac{F}{F_c} \text{sign}(\dot{x}) \right\|^\alpha S \quad (2.55)$$

donde:

$F$ : fuerza de fricción

$\sigma$ : parámetro de rigidez en reposo

$F_c$ : parámetro de fricción de Coulomb

$\alpha$ : exponente del modelo de fricción sólida (fricción de Coulomb o stiction)

$S$ : Factor de estabilización para el término  $\left\| 1 - \frac{F}{F_c} \text{sign}(\dot{x}) \right\|$ .

La función signo tiene como objetivo tomar en cuenta el sentido de la velocidad. Si se

toma  $S=1$ , el modelo de fricción de Dahl puede reescribirse como la curva tensión compresión

$$\frac{dF}{dx} = \sigma \left( 1 - \frac{F}{F_c} \text{sign}(v) \right)^\alpha$$

Al diferenciar la fricción con respecto al tiempo

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx} v = \sigma \left( 1 - \frac{F}{F_c} \text{sign}(v) \right)^\alpha v$$

Ahora, si se toma el caso particular  $\alpha = 1$

$$\frac{dF}{dt} = \sigma v - \frac{F}{F_c} |v|$$

Al introducir la variable interna  $z$  dada por

$$F = \sigma z$$

se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{\sigma |v|}{F_c} z$$

Al analizar el modelo de Dahl en estado estable, la fuerza de fricción y la variable interna quedan como

$$\begin{aligned} F &= F_c \text{sign}(v) \\ z &= \frac{F_c}{\sigma} \text{sign}(v) \end{aligned} \tag{2.56}$$

Al observar la Ec. (2.56) que corresponde a la fuerza de fricción, se observa que es la fricción de Coulomb. El planteamiento matemático hecho por Dahl no captura adhesión ni el efecto Stribeck

### 2.5.2 Modelo Bliman-Sorine

A partir del modelo dinámico de Dahl, los autores Bliman y Sorine desarrollaron una familia de modelos dinámicos de fricción. La magnitud de esta depende de la variable  $s$  definida como:

$$s = \int_0^t |v(\tau)| d\tau$$

El modelo Bliman-Sorine solo depende de la trayectoria, lo que hace posible el uso de la teoría de operadores de histéresis. Los modelos son descritos por un sistema lineal en el espacio de variables de estado.

$$\begin{aligned}\frac{dx_s}{ds} &= Ax_s + Bv_s \\ F &= Cx_s\end{aligned}$$

Dependiendo de los parámetros planteados en las matrices  $A, B$  y  $C$ , la complejidad del modelo se incrementa, pero también permite modelar una mayor cantidad de fenómenos.

En el modelo de primer orden  $A = -\frac{1}{\xi_f}$ ,  $B = \frac{f_1}{\xi_f}$  y  $C = 1$

$$\begin{aligned}\frac{dx_s}{ds} &= -\frac{1}{\xi_f}x_s + \frac{f_1}{\xi_f}v_s \\ F &= x_s\end{aligned}$$

Al proponer  $F_C = f_1$ ,  $\sigma = \frac{f_1}{\xi_f}$ ,  $\alpha = 1$  y  $v_s = \text{sign}(v)$ , entonces se tiene el modelo de fricción de Dahl.

El modelo de primer orden de Bliman-Sorine no modela la fricción estática, ni el efecto Stribeck que pueden ser modelados en un modelo de segundo orden con parámetros

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\eta\xi_f} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\xi_f} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{\eta\xi_f} \\ -\frac{f_2}{\xi_f} \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El modelo de fricción de segundo orden modela la fricción de Coulomb y la fricción estática.

### 2.5.3 Modelo de cerdas

El modelo creado por Haessig and Friedland toma como referencia el análisis microscópico del fenómeno de fricción y plantea los puntos de contacto como cerdas, las cuales tienen una deflexión y deciden modelarla como un resorte

$$F = \sum_{i=1}^N \sigma_0 (x_i - b_i)$$

donde:

$N$ : número de cerdas

$\sigma_0$ : rigidez de las cerdas

$x_i$ : posición relativa de las cerdas

$b_i$ : ubicación del punto de contacto

Cuando  $|x_i - b_i|$  se aproxima a  $\delta_s$  el punto de contacto se rompe y se genera uno nuevo que toma una ubicación relativa aleatoria diferente de la anterior esta nueva ubicación está dada por la ecuación

$$b_i^{k+1} = b_i^k + \Delta \text{sign}(x_i - b_i^k)$$

donde  $\Delta$  representa una distribución uniforme.

Este modelo utiliza un número grande de cerdas, por lo que tiene una alta complejidad al aplicarlo en una simulación numérica. El planteamiento del modelo de cerdas es una idea clave que ha sido retomada por otros autores para modelar el fenómeno de fricción.

#### 2.5.4 Modelo de fricción LuGre

El modelo LuGre (Canudas, C., Olsson, H., Åstrom, K. J., and Lischinsky, P. 1995) surge a partir del modelo de Dahl e intenta dar una generalización del mismo. Es un modelo de dos variables, la primera de ellas corresponde a la fuerza de fricción y la segunda, a una variable interna  $z$  que representa la deformación promedio de las imperfecciones microscópicas del material en la zona real de contacto. A las imperfecciones se les asocia la idea del modelo de cerdas anteriormente descrito, dichas cerdas o peines, tienen una similitud de comportamiento mecánico con el de objetos con estas formas geométricas, que primero se deforman y luego se deslizan<sup>1</sup>. Así el modelo LuGre está dado por.

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad (2.57)$$

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{|v|z}{g(v)}, \quad (2.58)$$

donde  $F$  es la fuerza de fricción,  $v$  es la velocidad relativa de las superficies en contacto,  $z$  es el estado interno de deformación promedio de las cerdas,  $\sigma_0$  coeficiente de rigidez,  $\sigma_1$  coeficiente de amortiguamiento y  $g(v)$  es un función incluida para describir el efecto Stribeck, que puede ser modelada como

$$\sigma_0 g(v) = F_C + (F_S - F_C) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2}.$$

---

<sup>1</sup>Ver (Armstrong, B. and Canudas de Wit C. 1994) para un resumen extensivo de distintos modelos de fricción.

El punto de pseudo-equilibrio del modelo arroja

$$z = \frac{g(v)}{\sigma_0} \text{sign}(v)$$

$$F = g(v) \text{sign}(v) + \sigma_2 v$$

donde:

$g(v) \text{sign}(v)$ : es el nivel de fricción de Coulomb.

$\sigma_2 v$ : es la fricción viscosa.

### Pasividad del modelo LuGre

En el trabajo desarrollado por Barabanov y Ortega (Barabanov, N. and Ortega, R. 2000b) se presentan las condiciones de suficiencia para asegurar que en el modelo LuGre el mapa  $v \mapsto F$  es pasivo. La propiedad de pasividad es una propiedad importante para un modelo que pretenda reflejar las características de la fricción ya que es un fenómeno con una naturaleza disipativa.

Para ello se reescribe la función  $g(v)$  del modelo LuGre como:

$$g(v) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-(v/v_0)^2}$$

donde:  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $v_0$ : son coeficientes positivos.

La función  $g(v)$  debe estar acotada por

$$\gamma_1 |v| \leq g(v) \leq \gamma_2 |v| \tag{2.59}$$

con

$$\gamma_1 = \inf \frac{1}{g(v)} > 0$$

$$\gamma_2 = \limsup_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{g(v)} \in (0, \infty]$$

Específicamente  $\gamma_1$   $\gamma_2$  son  $\gamma_1 = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1}$ ,  $\gamma_2 = \frac{1}{\alpha_0}$ .

El sistema dinámico (2.57) y (2.58) definen el operador pasivo de  $v \mapsto F$  si y sólo si

$$\gamma_2 \leq \gamma_1 \left( 1 + \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \right).$$

## Capítulo 3

# Modelo del fricción PUMA

### 3.1 Modelo de fricción Puma

#### 3.1.1 Antecedentes

El modelo de fricción Puma desarrollado en la presente tesis doctoral está enfocado a su aplicación en problemas de control automático más que a una descripción exacta de todos los estadios presentes en el fenómeno de fricción, pues como se ha abordado en la sección anterior son numerosos, de gran complejidad y con conmutaciones abruptas entre ellos. Este es un modelo dinámico no lineal de primer orden, que describe la fricción de Coulomb, la fricción viscosa y el efecto de histéresis. Su estructura lineal entre parámetros y variables simplifica el uso de algoritmos convencionales de identificación paramétrica. La integración a la dinámica de la planta se realiza de forma sencilla al igual que la de simulación numérica. Dicho modelo se expresa en coordenadas generalizadas en un marco de EHCP hecho que naturalmente lleva a satisfacer las propiedades de pasividad.

Para la construcción del modelo de fricción Puma se toma como referencia el modelo de fricción LuGre y se reescribe en coordenadas generalizadas  $[q \ p]$  donde  $q$  es la posición generalizada y  $p$  es el momento generalizado, ellas cumplen con la relación  $p = m\dot{q}$ . La dinámica de fricción LuGre se integra a la de un oscilador armónico de masa  $m$  y resorte de rigidez  $k$ .

Se propone la función de energía del oscilador como la suma de su energía cinética y potencial del sistema.

$$H(q, p, z) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 + \frac{1}{2}\sigma_0 z^2 \quad (3.1)$$

Al derivar parcialmente de la función de energía, respecto a cada una de las variables

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{1}{m}p \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= kq \\ \frac{\partial H}{\partial z} &= \sigma_0 z\end{aligned}$$

La ecuación dinámica del oscilador en variables generalizadas  $q$  y  $p$  es

$$\dot{p} = -kq - F_{fr} + u(t) \quad (3.2)$$

En la Ec. (3.2) la fuerza de fricción es  $F_{fr}$ , que se sustituye por el modelo de fricción LuGre (Canudas, C., Olsson, H., Åstrom, K. J., and Lischinsky, P. 1995) descrito por las Ecs. (2.57) y (2.58) en variables generalizadas y con  $g(p) = 1$ .

$$-F = -\sigma_0 z - \sigma_1 \frac{dz}{dt} - \frac{\sigma_2}{m} p \quad (3.3)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{m} p - \sigma_0 \left| \frac{1}{m} p \right| z \quad (3.4)$$

Al sustituir (3.4) en (3.3) la ecuación de fricción es

$$-F_{fr} = -\sigma_0 z - (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m} p + \sigma_0 \sigma_1 \left| \frac{1}{m} p \right| z \quad (3.5)$$

Una vez que se tiene la Ec.(3.5) se aplica a la Ec. (3.2) que corresponde a la dinámica del sistema masa resorte

$$\dot{p} = -kq - \sigma_0 z - (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m} p + \sigma_0 \sigma_1 \left| \frac{1}{m} p \right| z + u(t) \quad (3.6)$$

Finalmente con las ecuaciones dinámicas del oscilador Ec. (3.6), el estado interno del modelo de fricción Ec. (3.4) y las derivadas parciales de la función de energía. La descripción del modelo LuGre con  $g(p) = 1$  en EHCP es

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 + \sigma_2 & -\sigma_1 \left| \frac{1}{m} p \right| \\ 0 & 0 & \left| \frac{1}{m} p \right| \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \\ \nabla_z H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (3.7)$$

De la dinámica en EHCP (3.7) la matriz de interconexión y disipación están dadas respectivamente por

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 + \sigma_2 & -\sigma_1 \left| \frac{1}{m} p \right| \\ 0 & 0 & \left| \frac{1}{m} p \right| \end{bmatrix}.$$

En un esquema de EHCP la matriz de interconexión debe satisfacer la condición  $J = -J^T$  y la de disipación  $R = R^T \geq 0$ . Para el sistema masa resorte (3.7) la matriz de interconexión satisface la condición, pero en el caso de la matriz de disipación no es así. Por ello se inicia con la construcción de un modelo permita la representación de EHCP.

### 3.1.2 Modelo de Fricción Puma en EHCP con señal de excitación

El esquema de fricción Puma con señal de excitación resuelve en un primer momento el modelo de un amortiguador magneto-reológico que funciona como actuador en un edificio sujeto a un terremoto. Posteriormente dados sus buenos resultados se omite la señal de excitación y se extiende su uso a sistemas dinámicos que presentan fricción.

Respecto al amortiguador magneto-reológico, este tiene la cualidad de cambiar las propiedades reológicas del fluido en función de un campo magnético que lo energiza. Como en cualquier dispositivo de este tipo su objetivo es contrarestar el desplazamiento del émbolo. El fenómeno que sucede dentro del amortiguador claramente puede ser modelado como un fenómeno de fricción, y la señal de excitación se hace necesaria para generar el campo magnético variable, este elemento se explicará con más detalle en el capítulo 4.

En relación al modelo matemático para el amortiguador magneto-reológico, se propone un sistema de fricción dinámico de primer orden, función del estado interno de la fricción, de la velocidad generalizada y una señal externa de excitación.

Respecto al estado interno, cuando inicia el movimiento relativo entre dos cuerpos, puede considerarse en primer momento que hay un empalme total de las dos superficies en cuestión, situación falsa porque visto a nivel microscópico se observa que los cuerpos no son completamente lisos, existen minúsculas protuberancias y es en ellas donde únicamente se presenta contacto, a esta área de unión se le denomina área real de contacto. En una idealización, puede verse como dos peines con cerdas flexibles donde al tiempo que inicia el movimiento de uno respecto al otro o de los dos, las cerdas de cada peine sufren deflexión hasta un límite donde deja de haber contacto, y vuelven a encontrarse con otras cerdas donde se repite

el proceso recursivamente. El promedio de deflexión de las cerdas se asocia a la variable interna del modelo denotada por  $z$ .

Una vez descrito el significado del estado interno del modelo de fricción se plantea el modelo matemático de fricción Puma con señal de excitación integrado a un oscilador armónico. Para ello se propone la función de energía del sistema como la suma de la energía cinética y potencial.

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 + \frac{1}{2}\sigma_0z^2 \quad (3.8)$$

donde  $q$  y  $p$ , son la posición y el momento generalizado respectivamente,  $m$  la masa,  $k$  la rigidez del resorte y  $z$  la variable interna del modelo de fricción. La energía cinética del oscilador es  $\frac{1}{2m}p^2$  y la energía potencial del oscilador y del modelo de fricción son respectivamente  $\frac{1}{2}kq^2$  y  $\frac{1}{2}\sigma_0z^2$ . Una vez planteada la función de energía y el modelo de fricción. La dinámica del oscilador armónico es

$$\dot{p} = -kq - F_{fr} + u(t) \quad (3.9)$$

donde  $F_{fr}$  es la fuerza de fricción y  $u(t)$  una señal de excitación externa.

La fuerza de fricción  $F_{fr}$  está dada por el modelo dinámico de fricción Puma con señal de excitación descrito a continuación

$$F_{fr} = \sigma_0z + \sigma_2zv - \sigma_1a_2 \left| \frac{1}{m}p \right| \frac{1}{m}p + \sigma_1 \frac{dz}{dt} \quad (3.10)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{m}p + a_2 \left| \frac{1}{m}p \right| \frac{1}{m}p - \frac{\sigma_0}{\sigma_1}(a_2 + a_1v) \left| \frac{1}{m}p \right| z \quad (3.11)$$

donde  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $a_1$ , son parámetros del modelo de fricción y  $v$  es la señal de excitación del modelo de fricción.

Al sustituir la Ec. (3.11) en la Ec. (3.10), la fuerza de fricción es

$$F_{fr} = \sigma_0z + \sigma_1 \frac{1}{m}p - a_2 \left| \frac{1}{m}p \right| \sigma_0z + \left( \sigma_2z - \sigma_0a_1 \left| \frac{1}{m}p \right| z \right) v \quad (3.12)$$

así la ecuación del oscilador armónico integrando el modelo de fricción Puma con señal de excitación se encuentra al sustituir (3.12) en (3.9)

$$\dot{p} = -kq - \sigma_0z - \sigma_1 \frac{1}{m}p + a_2 \left| \frac{1}{m}p \right| \sigma_0z - \left( \sigma_2z + \sigma_0a_1 \left| \frac{1}{m}p \right| z \right) v + u(t) \quad (3.13)$$

a partir de las derivadas parciales de la función de energía (3.8) y las ecuaciones dinámicas del oscilador armónico (3.13) y el estado interno del modelo de fricción (3.11) se presenta

el modelo en EHCP

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & -a_2 \left| \frac{1}{m} p \right| \\ 0 & -a_2 \left| \frac{1}{m} p \right| & \frac{a_2}{\sigma_1} \left| \frac{1}{m} p \right| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \\ \nabla_z H \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2 z - \sigma_0 a_1 \left| \frac{1}{m} p \right| z \\ \frac{\sigma_0 a_1}{\sigma_1} \left| \frac{1}{m} p \right| z \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.14)$$

De las EHCP dadas por (3.14) la matriz de interconexión y disipación están dadas respectivamente por.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & -a_2 \left| \frac{1}{m} p \right| \\ 0 & -a_2 \left| \frac{1}{m} p \right| & \frac{a_2}{\sigma_1} \left| \frac{1}{m} p \right| \end{bmatrix}$$

Dichas matrices cumplen las propiedades  $J = -J^T$  y  $R = R^T \geq 0$ . La forma de integrar el modelo de fricción a la dinámica de la planta siempre se hace de la misma forma, esto es, se plantea la función de energía del sistema planta controlador, posteriormente se obtienen las ecuaciones dinámicas de la planta y en ellas se introduce el efecto de fricción.

### 3.1.3 Modelo de Fricción Puma en EHCP

El modelo de fricción con señal de excitación (3.14) presentado en la sección anterior es el modelo más general de este trabajo de investigación. De él se puede derivar un esquema de fricción más simple al omitir la entrada  $v$  pues en general la entrada está asociada a la dinámica de la planta y no al esquema de fricción. Para construir su modelo matemático en EHCP nuevamente se recurre al sistema masa resorte incorporando la dinámica de fricción que se presenta a continuación.

$$-F_{fr} = -\sigma_0 z - \sigma_1 \frac{dz}{dt} - \sigma_2 \frac{1}{m} p + \sigma_1 a_2 \left| \frac{1}{m} p \right| \frac{1}{m} p \quad (3.15)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{m} p - \frac{a_2 \sigma_0}{\sigma_1} \left| \frac{1}{m} p \right| z + a_2 \left| \frac{1}{m} p \right| \frac{1}{m} p \quad (3.16)$$

Al sustituir (3.16) en (3.15) la fuerza de fricción queda como

$$-F = -\sigma_0 z - (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m} p + a_2 \sigma_0 \left| \frac{1}{m} p \right| z \quad (3.17)$$

La función de energía es la misma que se ha presentado en (3.1). Ahora al reescribir

la dinámica a partir de las derivadas parciales de la función de energía se tiene.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 + \sigma_2 & -a_2 \left| \frac{1}{m} p \right| \\ 0 & -a_2 \left| \frac{1}{m} p \right| & \frac{a_2}{\sigma_1} \left| \frac{1}{m} p \right| \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \\ \nabla_z H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.18)$$

La matriz de interconexión y mortiguamiento están dadas por:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 + \sigma_2 & -a_2 \left| \frac{1}{m} p \right| \\ 0 & -a_2 \left| \frac{1}{m} p \right| & \frac{a_2}{\sigma_1} \left| \frac{1}{m} p \right| \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Así se observa que la matriz de interconexión del modelo (3.18)  $J = -J^T$ , se asegura de forma trivial y que en el caso de la matriz de disipación tiene la propiedad  $R = R^T \geq 0$  y se requiere garantizar  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1} > a_2$ .

El modelo de fricción dado por las Ecs. (3.15) y (3.16), es un modelo general de fricción aplicable a cualquier planta.

### 3.1.4 Punto de equilibrio del modelo de fricción

A continuación se presenta el punto de equilibrio del modelo de fricción y a partir de el se presentan claramente algunos estadios de fricción que dicho modelo exhibe. Para ello se hace  $\frac{dz}{dt} = 0$  y se despeja  $z$  de la Ec. (3.16).

$$z = \frac{\sigma_1}{\sigma_0 a_2} \text{sign} \left( \frac{1}{m} p \right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \frac{1}{m} p$$

Una vez que se tiene el estado interno del modelo de fricción se sustituye en la Ec. (3.15) que corresponde a la fuerza de fricción

$$F_{fr} = \frac{\sigma_1}{a_2} \text{sign} \left( \frac{1}{m} p \right) + (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m} p - \sigma_1 a_2 \left| \frac{1}{m} p \right| \frac{1}{m} p \quad (3.20)$$

La Ec. (3.20) muestra la fuerza de fricción, de ella es claro observar que:

- El primer término corresponde a una constante multiplicada por el signo de la velocidad, que está asociado a la fricción de Coulomb,
- El segundo término es el producto de una constante por la velocidad que corresponde a la fricción viscosa,
- Finalmente el tercer término describe los efectos acoplados entre la velocidad relativa la dirección del movimiento relativo de la superficie.

### 3.1.5 Alcances del esquema de fricción Puma del modelo de fricción

Se han presentado dos versiones del modelo de fricción Puma en EHCP. La primera de ellas corresponde a un esquema de fricción con una señal externa de excitación, que permite modificar sus propiedades. El segundo deriva del primero pues si la señal externa de excitación es cero se llega a este. Las aplicaciones del esquema de fricción pueden ser de lo más variadas debido a su estructura lineal entre parámetros y variables, útil en el campo de identificación paramétrica. En el caso de modelado de sistemas físicos, también presenta ventajas pues su fácil incorporación a la dinámica de la planta en el marco de EHCP se ha mostrado en la presente sección. Adicionalmente, en el caso de simulación numérica el modelo de fricción Puma es noble pues su implementación computacional y numérica es simple. Finalmente en el caso de control automático permite ser un esquema de disipación de energía para inducir el estado de equilibrio del sistema. En las siguientes tres secciones se presentan tres casos de estudio aplicando los esquemas de fricción Puma aquí abordados, sus ventajas y alcances.

## Capítulo 4

# Estructura civil

El interés en desarrollar estrategias de control automático que compensen los efectos provocados en estructuras civiles sujetas a excitación sísmica surge debido a las consecuencias económicas y sociales que representa un sismo en ciudades grandes. El considerar sistemas de prevención que ayuden a las edificaciones a tener una mayor resistencia ante un movimiento telúrico genera un beneficio considerable. En este sentido, se han realizado avances en diversas áreas de ingeniería civil, como en la parte del diseño, el tipo de materiales y propiamente la construcción de los edificios. Adicionalmente, se han introducido dispositivos externos de medición y actuación para tener una mayor ingerencia en la dinámica de la estructura civil.

El caso de estudio que se aborda en esta sección corresponde a un edificio de tres pisos sujeto a una excitación sísmica. Este se supone instrumentado, situación que permite conocer las mediciones de los desplazamientos en cada uno de los pisos. Dichas mediciones son leídas por un sistema computacional y simultáneamente introducidas a un algoritmo de control automático que genera una señal de control (señal eléctrica) que es la que excita al amortiguador magneto-reológico conectado entre el suelo y la primera planta (hecho que lo convierte en un sistema subactuado) para manipular el edificio y con ello reducir el desplazamiento de los entrepisos.

A continuación se hace una descripción más detallada del sistema, el esquema de modelado, el esquema de control y su implementación en un edificio de tres pisos mediante simulación numérica.

## 4.1 Síntesis de técnicas de control

Los edificios han permitido un uso eficiente de los espacios destinados a la vivienda y a los centros de trabajo. Ante la presencia de terremotos pueden sufrir daños con repercusiones en la vida de las personas y en la economía. Por ello surge la necesidad de crear estructuras civiles resistentes ante la presencia de sismos. En este sentido una área de conocimiento se ha enfocado a diseño de nuevos materiales para la construcción de estructuras y otra se ha enfocado a provocar una respuesta que atenúe los efectos del sismo.

- 1 Modificación de diseño y uso de nuevos materiales en la construcción. Estas investigaciones corresponden al desarrollo de nuevos productos para la construcción. En este apartado se han creado materiales aplicados al diseño estructural que minimizan el efecto de movimientos sísmicos. Se proponen, por ejemplo, materiales deformables tales como aceros blandos o materiales tipo goma, que son colocados como esqueleto entre la base y la parte superior de la estructura, que producen un incremento en el periodo natural de la estructura civil, que puede ayudar a minimizar los daños en la estructura civil a causa de terremotos. Las desventajas que presentan este tipo de sistemas son que la reacción por parte de la estructura a diferentes tipos de excitación sísmica está limitada a la respuesta del material utilizado, que en ocasiones tiene vida limitada. Además hay un incremento moderado en el costo de la estructura civil. Otra corriente de la ingeniería estructural busca nuevas formas de construcción que provean de una mayor resistencia al colapso de las construcciones ante la presencia de un sismo.
- 2 Técnicas de control semiactivo. Estas técnicas complementan a los sistemas que absorben energía de un sismo por el diseño estructural y a los materiales con los que es construido un edificio. Requieren un esquema de control automático y un actuador que genere una señal de reacción que busca compensar el efecto del sismo. Entre los dispositivos utilizados en el control semiactivo para estructuras civiles pueden mencionarse los amortiguadores electro-reológicos y los magneto-reológicos. Representan una alternativa importante pues pueden ajustarse a las características del sismo y tienen un costo moderado. Este tipo de dispositivos típicamente consiste de un cilindro que contiene un fluido (generalmente aceite) y pequeñas partículas eléctricas/magnéticas. Cuando se aplica un campo eléctrico/magnético que polariza las pequeñas partículas

en dirección del campo se provoca que el fluido cambia de ser líquido a semi-sólido.

- 3 Técnicas de control activo. Se enfocan a ejercer una acción de control automático sobre un edificio de forma artificial. Los sistemas de control activo modifican las propiedades dinámicas inerciales y, en menor proporción, la rigidez de la estructura. La señal de control para contrarrestar el efecto del terremoto se produce a través de dispositivos electro-mecánicos o electro-hidráulicos alimentados por poderosas fuentes de potencia. La principal desventaja de este tipo de sistemas es que la cantidad de energía requerida es alta e indispensable durante la excitación sísmica, situación que no puede ser satisfecha generalmente cuando se presenta un terremoto, además de su alto costo.

Desde un punto de vista práctico, resulta evidente que ante una excitación sísmica es mayor el efecto de compensación que se puede conseguir con una acción de reacción que el que se obtiene con una estructura con ciertos materiales que absorban la energía provocada por el terremoto. La combinación de un correcto diseño estructural, el uso de materiales poco rígidos y el uso de un esquema de control automático ofrece más ventajas que el uso de estas técnicas por separado.

En este trabajo se recurre únicamente al control semiactivo. La estructura del edificio no cambia y el actuador es un amortiguador magneto-reológico.

## 4.2 Modelo matemático de la estructura civil

Para el modelo de dinámico del sistema se sugiere un modelo de parámetros concentrados, con la masa de cada planta concentrada y el acoplamiento entre piso y piso representado por un amortiguador y un resorte. Los coeficientes de amortiguamiento y de rigidez se asignan de acuerdo a las propiedades estructurales del edificio. El actuador está conectado físicamente entre el primer piso y el suelo. Cualquier acción a la que sea sometida la estructura en la base se propagará del primer al segundo piso, del segundo al tercer piso y así sucesivamente. Esta situación hace evidente que la acción de control sobre los últimos pisos se diluye en el tránsito hacia ellos y que su intensidad es menor entre más alto sea el edificio. Adicionalmente, si se ve al edificio como un péndulo invertido hay una longitud de arco de desplazamiento mayor a mayor altura de la construcción. La Fig. (4.1) proporciona un esquema del modelo del edificio bajo estudio.

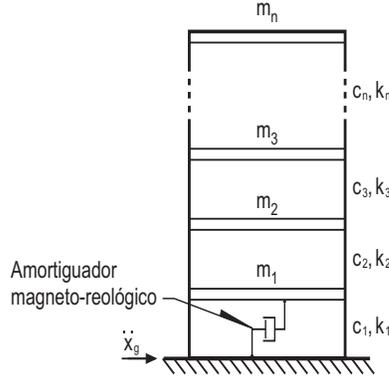


Figura 4.1: Estructura civil y amortiguador magneto-reológico.

Aquí  $m_i$  es la masa del  $i$ -ésimo piso,  $c_i$  es el coeficiente de amortiguamiento viscoso entre el piso  $i$  y el piso  $i - 1$ ,  $k_i$  es el coeficiente de rigidez entre el piso  $i$  y el piso  $i - 1$  y  $\ddot{x}_g$  la aceleración del terreno. Al desarrollar el modelo matemático para un edificio de tres pisos, se obtiene el siguiente modelo

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{fr} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{x}_g \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

En este modelo matemático  $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + lF_{fr} = M\ddot{x}_g$   $x$  corresponde al desplazamiento y  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  la velocidad y la aceleración de cada uno de los pisos. Las matrices cumplen con las siguientes propiedades  $M = M^T > 0$ ,  $C = C^T \geq 0$  y  $K = K^T > 0$  y  $l = [1 \ 0 \ 0]^T$ .

Las matrices de masa, coeficiente de amortiguamiento y rigidez tienen una estructura en banda tal que la energía se transmite en cadena desde la base del edificio, hasta el piso más alto. Es decir, que no existe una conexión natural entre el primer y el último piso, situación a la que se hará referencia posteriormente.

### 4.3 Características del actuador (amortiguador magneto-reológico)

Para abordar esta sección, se presenta una rápida descripción de un amortiguador electro/magneto-reológico, se presentan sus características técnicas y las ventajas del uso de dichos dispositivos en control de vibraciones. Posteriormente se presenta el modelo matemático sugerido para su descripción.

Un amortiguador magneto-reológico es un dispositivo que consiste de un cilindro con un émbolo que contiene un fluido (generalmente aceite) y pequeñas partículas de metal que al someterse a un campo eléctrico/magnético son polarizadas alinándose en dirección del campo, situación que provoca un cambio en la viscosidad del fluido. A mayor campo eléctrico/magnético el fluido llega a ser semi-sólido generando una fuerza de resistencia que se incrementa en función de dicho campo.

Respecto a los amortiguadores electro-reológicos, estos tienen alta sensibilidad a impurezas en el fluido, esto es, si el fluido no es completamente dieléctrico al someterlo un campo eléctrico se generan dipolos en el fluido que provocan una alteración su funcionamiento (Gavin, H., Hanson, R., and Filisco, F. 1996a). En un prototipo descrito en (Gavin, H., Hanson, R., and Filisco, F. 1996b) los requerimientos de energía son los que se describen a continuación 15 [mA] generan un desplazamiento en el émbolo de hasta 0.2 [cm] y generar una fuerza de reacción menor a 60 [N].

En el caso de amortiguadores magneto-reológicos la variación en su comportamiento debido a impurezas y cambios en la temperatura es mínimo. De acuerdo al prototipo utilizado en (Jiménez, R. 2006) los requerimientos de energía para el amortiguador magneto-reológico comercial de escala reducida, modelo RD-1005-3 son de 0-2 [A] con un desplazamiento de hasta 53.34 [mm] el cual proporciona a una fuerza de reacción de hasta 2224 [N].

En general los amortiguadores electro-reológicos son más sensibles que los amortiguador magneto-reológico y tiene un mayor consumo de energía, con beneficios menores. Ante esta situación, es más atractivo el uso de amortiguador magneto-reológico para el diseño de sistemas de control semiactivo en estructuras civiles.

Para aplicaciones en control del estructuras civiles de amortiguadores magneto-reológicos como actuadores. Se realizan mediciones del desplazamiento de los entresijos del edificio sujeto a movimiento telúrico, mismos que son procesados por un algoritmo de control que genera una respuesta de compensación a dicho efecto, que en términos prácticos es la señal

de tensión que se aplica al amortiguador. Esta señal genera a su vez un campo magnético variable que origina el cambio de viscosidad en el fluido del amortiguador para generar una fuerza de resistencia que se oponga a la aceleración del suelo.

Desde un punto de vista matemático, las variables a considerar son el desplazamiento y velocidad del émbolo, la fuerza de reacción y la tensión que genera el campo magnético. El resto son parámetros que corresponden a cada prototipo. Por la naturaleza del funcionamiento de un amortiguador, resulta natural plantear su dinámica como la de un mecanismo bajo efectos de fricción, al que adicionalmente se le plantea desde un enfoque de EHCP y cuyo modelo ya se ha descrito en el capítulo 3 y está dado por las Ecs. (3.10) y (3.11), para simplificar su integración al modelo del edificio.

#### 4.4 Modelo matemático edificio-actuador en EHCP

Una vez que se ha hecho una breve descripción del sistema dinámico y del actuador se plantea un modelo matemático completo en EHCP. Considerando que el actuador sólo está conectado en la primera planta y que las matrices que definen la dinámica del edificio tienen la misma estructura para los  $n$  pisos, se puede hacer un esquema general para una estructura de  $n$  pisos y un amortiguador magneto-reológico como actuador.

Se plantea una función de energía del sistema y las ecuaciones dinámicas del sistema edificio-amortiguador. Se inicia planteando la función energía, esto es la suma de la energía cinética y potencial del sistema incorporando la dinámica del actuador a través de la variable interna del modelo de fricción anteriormente descrito,

$$H(q, p, z) = \frac{1}{2}q^T Kq + \frac{1}{2}p^T M^{-1}p + \frac{1}{2}\sigma_0 z^2 \quad (4.2)$$

donde  $q \in \mathfrak{R}^n$  y  $p \in \mathfrak{R}^n$  representan respectivamente la posición y el momento generalizado para un edificio de  $n$  pisos,  $K$  y  $M^{-1}$  son respectivamente la matriz de rigidez y la matriz inversa de la masa del edificio y  $\sigma_0$  y  $z$  son respectivamente la constante de rigidez y el estado interno del modelo del amortiguador magneto-reológico. Al desarrollar las derivadas parciales de la función de energía

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= M^{-1}p \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= Kq \\ \frac{\partial H}{\partial z} &= \sigma_0 z \end{aligned}$$

A partir de la posición convencional, la posición y el momento generalizado están dados respectivamente por  $q = x$ ,  $p = M\dot{q}$ . Además la derivada de momento generalizado es en general  $\dot{p} = \dot{M}\dot{q} + M\ddot{q}$ . Tomando como referencia las ecuaciones anteriores, se reescribe la dinámica de la estructura civil el dada por Ec. (4.1),  $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + lF_{fr} = M\ddot{x}_g$  en función de la posición y el momento generalizado, y queda como  $\dot{p} = (\dot{M} - C)M^{-1}p - Kq - lF_{fr} + M\ddot{x}_g$  como la matriz de inercia es una matriz constante en este caso particular, su derivada es cero, esto es  $\dot{M} = 0$  como consecuencia la dinámica de la estructura civil se reduce a  $\dot{p} = -CM^{-1}p - Kq - lF_{fr} + \ddot{x}_g$ , donde  $F_{fr}$  se sustituye por el modelo de fricción Puma con señal de excitación (3.10) y (3.11) y con la función de energía (4.2) y sus derivadas parciales se genera la dinámica del edicio amortiguador en EHCP para n pisos.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} & \vdots \\ 0_{1 \times n} & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ 0_{n \times n} & C_{n \times n} & \vdots \\ 0_{1 \times n} & a_2 \|\frac{1}{m_1} p_1\| & \cdots & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1} \|\frac{1}{m_1} p_1\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{n \times n} q_{n \times 1} \\ M_{n \times n}^{-1} p_{n \times 1} \\ \sigma_0 z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ m_{n \times 1} \ddot{x}_g - \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \sigma_2 z - \sigma_0 a_1 \|\frac{1}{m_1} p_1\| z \\ 0_{(n-1) \times 1} \\ \sigma_0 \sigma_1 a_1 \|\frac{1}{m_1} p_1\| z \end{bmatrix} v. \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$y = - \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \sigma_2 z - \sigma_0 a_1 \|\frac{1}{m_1} p_1\| z \\ 0_{(n-1) \times 1} \\ \frac{\sigma_0}{\sigma_1} a_1 \|\frac{1}{m_1} p_1\| z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{n \times n} q_{n \times 1} \\ M_{n \times n}^{-1} p_{n \times 1} \\ \sigma_0 z \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Se observa además de la Ec. (4.3), que la matriz de interconexión cumple con las condiciones del modelo y que para la de amortiguamiento de debe asegurar  $C \geq 0$ , condición que es satisfecha por características propias de la estructura, además para el modelo del amortiguador se debe asegurar que  $\frac{a_2}{\sigma_1} \geq 0$ .

## 4.5 Diseño de la Ley de CBP-AIA para una estructura civil

Para simplificar la construcción de la ley de CBP-AIA se ha escrito el modelo de la estructura civil y el modelo de fricción en EHCP. Adicionalmente, se requiere construir la dinámica objetivo en este mismo marco. El primer paso es generar una función de energía deseada, cuyo mínimo es el estado de equilibrio del sistema en lazo cerrado y al mismo

tiempo el punto de operación del sistema la función propuesta es

$$H_d = \frac{1}{2}q^T K_d q + \frac{1}{2}p^T M^{-1}p + \frac{1}{2}\sigma_0 z^2. \quad (4.5)$$

De la Ec. (4.5) se puede observar que la matriz que corresponde a la masa permanece intacta, en lugar de  $K$  se usa  $K_d$ , debido a que en la dinámica deseada se opta por un cambio en la rigidez además de proponer una interconexión virtual entre el piso de la base y el último piso, con el objetivo generar una manipulación directa por medio del actuador a la última planta, que resulta más eficaz que esperar el efecto del control de forma natural en el sistema (estructura en cadena entre los pisos del edificio hecho que limita la acción del actuador en los últimos pisos del edificio).

Una vez que se ha planteado la función de energía, Ec. (4.5), se pueden calcular las derivadas parciales respecto a cada uno de los estados y a partir de ellas construir la dinámica deseada del sistema edificio-actuador, como

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0 \\ 0_{1 \times n} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ 0_n & C_{d \times n \times n} & \begin{matrix} -a_2 \|\frac{1}{m_1} p_1\| \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0_{1 \times n} & -a_2 \|\frac{1}{m_1} p_1\| & \cdots & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1} \|\frac{1}{m_1} p_1\| \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} K_{d \times n \times n} q_{n \times 1} \\ M_{n \times n}^{-1} p_{n \times 1} \\ \sigma_0 z \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

De la Ec. (4.6) se observa que la matriz de interconexión y disipación cumplen con ser antisimétrica y simétrica, respectivamente. Al comparar el sistema original con el sistema deseado se observa que la matriz de interconexión permanece igual, pero la matriz de disipación tiene un nuevo elemento denotado por  $C_d$ . Esta matriz genera una mayor disipación de energía en el sistema para acelerar la llegada al punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado.

#### 4.5.1 Condiciones de existencia de la ley de control

A partir de función de energía deseada y la dinámica de lazo cerrado en EHCP, se inicia el procedimiento para verificar las condiciones de existencia de la ley de control para finalmente obtenerla.

De la función de energía de lazo cerrado y la del sistema se puede obtener la función de energía asignada denotada por  $H_a$ , como.

$$H_a = H_d - H = \frac{1}{2}q^T (K_d - K)q \quad (4.7)$$

Para satisfacer la condición dada por (2.45) se recurre a (4.7) y se tiene.

$$\varkappa(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_a}{\partial q} \\ \frac{\partial H_a}{\partial p} \\ \frac{\partial H_a}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_d - K)q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

A continuación se presenta el desarrollo de la *Proposición 1* dada por la Ec. (2.40).

i. Preservación de estructura

$$J_d = J + J_a = -[J + J_a]^T$$

De acuerdo con el sistema deseado propuesto  $J_a = 0$ , entonces.

$$J_d = J = -[J]^T$$

Para el caso del amortiguamiento se tiene

$$R_d = R + R_a = [R + R_a]^T \geq 0 \quad (4.9)$$

$$R_d = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ 0_{n \times n} & C_{d \times n \times n} & -a_2 \left\| \frac{1}{m_1} p_1 \right\| \\ 0_{1 \times n} & -a_2 \left\| \frac{1}{m_1} p_1 \right\| & \cdots 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

□□□

De acuerdo con (4.9) se asegura que  $R_d = R_d^T$  y para asegurar que  $R_d \geq 0$  se debe cumplir que  $C_d \geq 0$  y que  $\frac{a_2}{\sigma_1} \geq 0$ .

ii. Integrabilidad de  $\varkappa(x)$

$$\frac{\partial \varkappa(x)}{\partial x} = \left[ \frac{\partial \varkappa(x)}{\partial x} \right]^T$$

$$\begin{bmatrix} (K_d - K) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_d - K) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□□□

iii. Asignación de equilibrio  $\varkappa(x)$  en  $x_*$ , satisfice

$$\begin{aligned} \varkappa(x_*) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x_*) \\ \begin{bmatrix} (K_d - K)q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{x_*} &= - \begin{bmatrix} Kq \\ Cp \\ \sigma_0 z \end{bmatrix}_{x_*} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \square\square\square \end{aligned}$$

iv. Estabilidad de Lyapunov El Jacobiano  $\varkappa(x)$  en  $x_*$ , satisfice la cota

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varkappa(x_*) &> -\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x_*) \\ \begin{bmatrix} (K_d - K) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &> - \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \quad \square\square\square \end{aligned}$$

Por propiedades de la estructura civil se cumple que  $K > 0$ ,  $M^{-1} > 0$  y se debe asegurar que  $(K_d - K) > 0$  y  $\sigma_0 > 0$ , para satisfacer (2.44).

Ahora se realiza el desarrollo de la Ec. (2.40) para encontrar la ley de control  $\beta(x)$ .

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} O_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ -I_{n \times n} & -C_{d \times n \times n} & \begin{bmatrix} a_2 \|\frac{1}{m_1 p_1}\| \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0_{n \times 1} & 1 + a_2 \|\frac{1}{m_1 p_1}\| \cdots 0 & -\frac{a_2}{\sigma_1} \|\frac{1}{m_1 p_1}\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (K_d - K)_{n \times n} q_{n \times 1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ 0_{n \times n} & (C_d - C)_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0_{1 \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{n \times n} q_{n \times 1} \\ M_{n \times n}^{-1} p_{n \times 1} \\ \sigma_0 z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ m_{n \times 1} \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_g + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \sigma_0 a_1 \|\frac{1}{m_1 p_1}\| z - \sigma_2 z \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\sigma_0}{\sigma_1} a_1 \|\frac{1}{m_1 p_1}\| z \end{bmatrix} \beta(x) \end{aligned} \quad (4.10)$$

#### 4.5.2 Ley de control

Debido a que las matrices  $C$ ,  $K$ ,  $M$ ,  $C_d$  y  $K_d$  son matrices de parámetros conocidas así como las constantes del modelo de fricción  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $a_1$  y  $a_2$ . La Ec. (4.10) se resuelve

algebraicamente y se encuentra la señal de control  $\beta(x)$

$$\beta(x) = \frac{\sigma_0 a_1 \left\| \frac{1}{m_1} p_1 \right\| - \sigma_2}{\left[ (\sigma_0 a_1 \left\| \frac{1}{m_1} p_1 \right\| - \sigma_2)^2 + \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} a_1 \left\| \frac{1}{m_1} p_1 \right\| \right)^2 \right] z} \left\{ -(k_{1d} - k_1) q_1 + (k_{2d} - k_2) q_2 + \dots \right. \\ \left. \dots + k_{nd} q_n - (c_{1d} - c_1) \frac{1}{m_1} p_1 - (c_{2d} - c_2) \frac{1}{m_2} p_2 + \dots + (c_{nd} - c_n) \frac{1}{m_n} p_n - m_1 \ddot{x}_g \right\}. \quad (4.11)$$

## 4.6 Simulación numérica para una estructura civil de tres plantas

Una vez satisfechos los requisitos para construir una ley de CBP-AIA, se diseñó en la Ec. (4.11) una acción de control generalizada para cualquier cantidad de pisos del edificio. Para el caso que ocupa esta sección se aplica el esquema de control a un edificio de tres plantas propuesto en (Dyke, S.J., Spencer, B.F., Sain, M.K., and Carlson, J.D. 1998). El terremoto se introduce como una señal de aceleración del terreno, específicamente el registro del sismo acaecido el 19 de septiembre de 1985 tomado en la Secretaría de Comunicaciones y Transportes, componente norte-sur escalado apropiadamente para la simulación numérica que se lleva a cabo (ver Figura 4.2). Los parámetros de masa, rigidez y amortiguamiento, se presentan en el apéndice A.

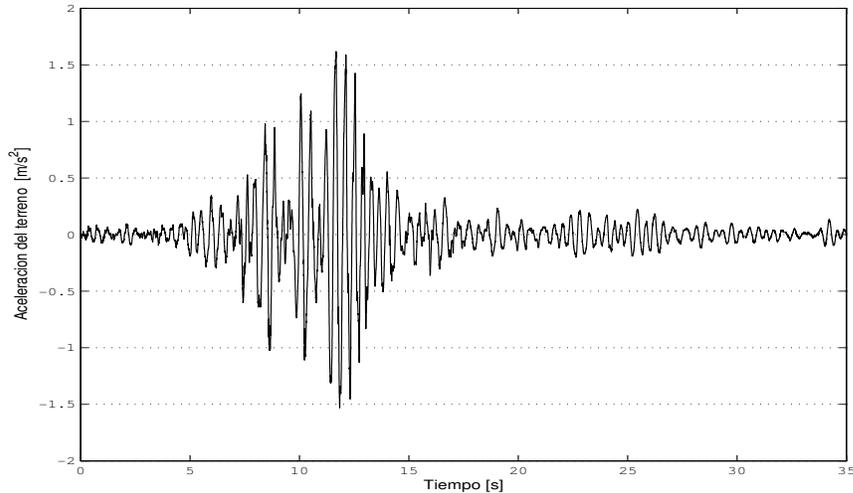


Figura 4.2: Aceleración del terreno sismo SCT-NS, México 1985.

Al someter el edificio al movimiento telúrico dado por Figura 4.2, se generan despla-

mientos en cada uno de los pisos . Estas mediciones dedesplazamiento son introducidas al algoritmo de control que genera la ley de control como una señal de fuerza. Dicha señal se introduce a las Ecs. (3.10) y (3.11) y a partir de estas dos ecuaciones se obtiene una señal de voltaje que es la que se introduce al amortiguador magneto-reológico así en función de ella al amortiguador absorbe más o menos energía de la producida por el movimiento del terreno.

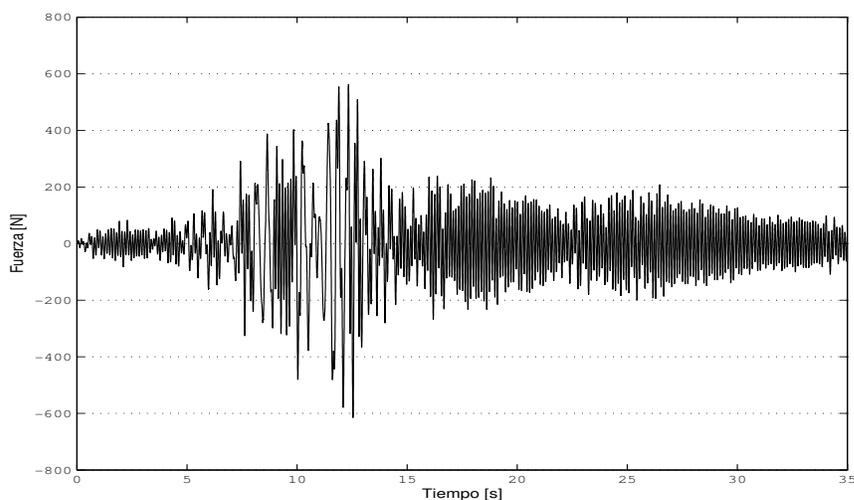


Figura 4.3: Señal de control fuerza

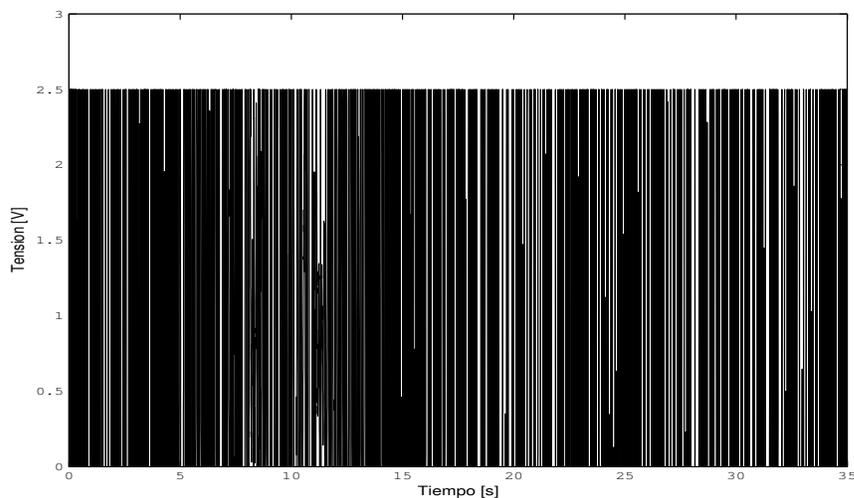


Figura 4.4: Señal de control tensión

A continuación se presentan las gráficas de desplazamiento para la respuesta con y sin

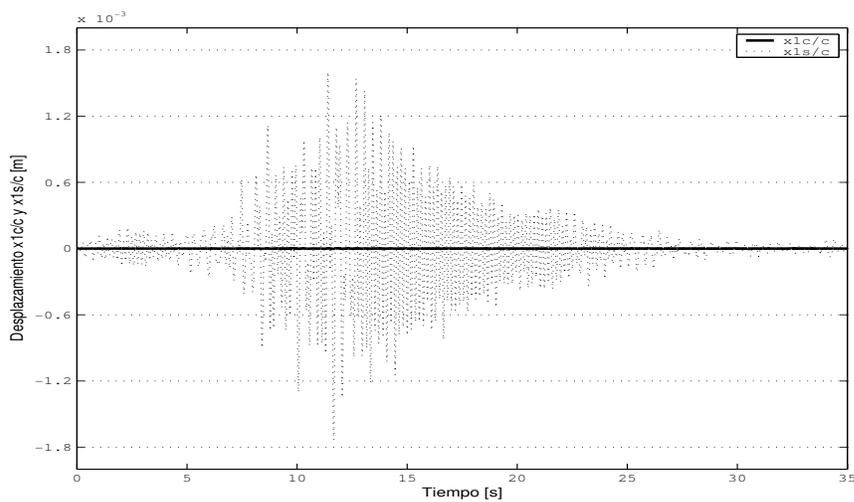


Figura 4.5: Desplazamiento del primer piso con y sin control.

control, para la estructura civil de tres pisos.

Como es común, para revisar la efectividad de la acción de control sobre la planta primero se realiza un prueba sometiendo al edificio al sismo, y se toman como referencia la medición de los desplazamientos de cada piso para conocer la respuesta de la planta ante dicha excitación (respuesta libre). Posteriormente se somete al sistema a la misma excitación pero con control, se superponen las señales y se realiza la comparación entre ambas para exhibir la efectividad del esquema de control (veáse Figuras 4.5, 4.6 y 4.7) De

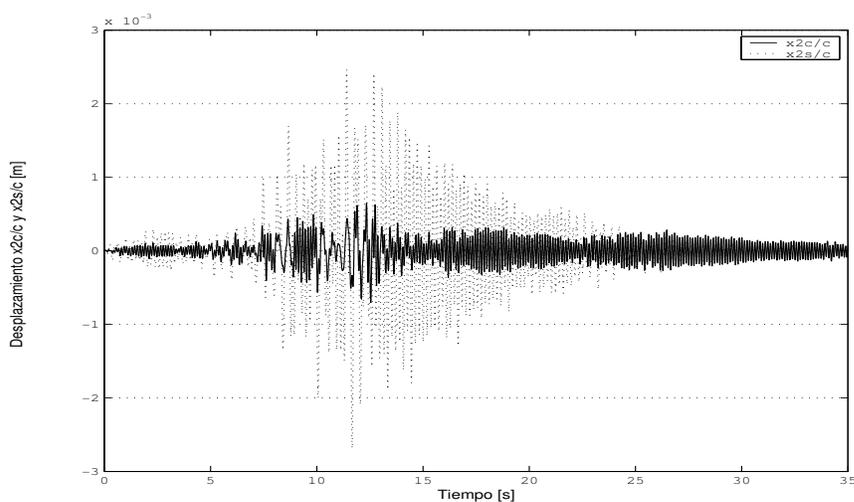


Figura 4.6: Desplazamiento del segundo piso con y sin control.

las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7, se observa que la mayor reducción de desplazamiento se genera en la primera planta. Ello se debe a que el amortiguador está conectado entre el suelo y la primera planta, entonces la compensación del desplazamiento en los subsecuentes pisos es una acción encadenada debida al grado de subactuación que posee el sistema.

Para tener una idea más precisa de la reducción de los desplazamientos en cada piso, a partir de las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7 en la Tabla 4.1 se presenta un resumen de los desplazamientos con y sin control para la estructura de tres pisos.

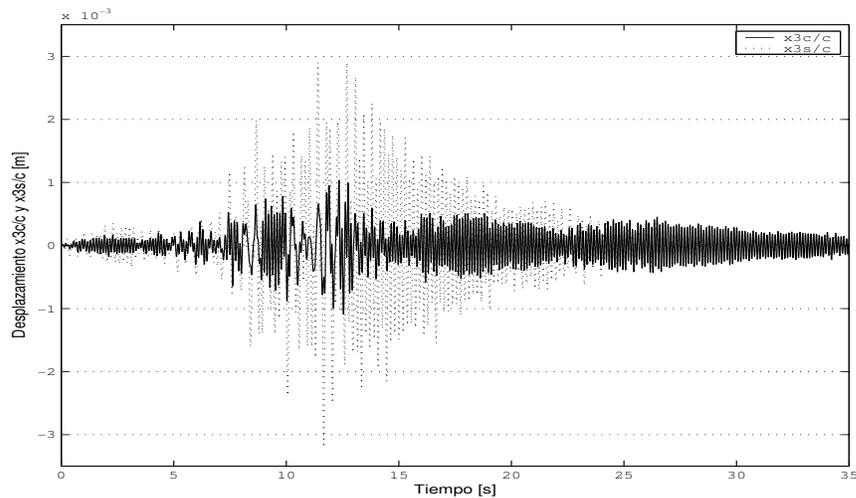


Figura 4.7: Desplazamiento del tercer piso con y sin control.

Tabla 4.1: Resultados tres pisos

| Desplazamiento  |                       | Reducción de desplazamiento<br>$x_i$ [%] |
|-----------------|-----------------------|--|
| respuesta libre | respuesta con control |  |
| $1.73x10^{-3}$  | $3.84x10^{-6}$        | 99.78                                    |
| $2.69x10^{-3}$  | $7.04x10^{-4}$        | 73.61                                    |
| $3.20x10^{-3}$  | $1.09x10^{-4}$        | 65.51                                    |

A partir de los datos presentados en la Tabla 4.1 se observa que la primera planta tiene una reducción en el desplazamiento del 99.78 % (veáse Figura 4.5), en el caso del segundo y tercer piso respectivamente la reducción es de 73.61 % (veáse Figura 4.6 y 65.51 % Figura 4.7). La tensión del amortiguador (veáse Figura 4.4) siempre está conmutando entre  $[0V - 2.5V]$  y la fuerza que se generará a partir de esta tensión para contrarrestar el efecto del sismo es de  $600[N]$ , ( veáse la Figura 4.3). Se observa así, que la ley de control es capaz

reducir los efectos del sismo con las limitante de tensión que el actuador tiene. Es importante resaltar que la acción de control se lleva a cabo por el amortiguador y que este elemento está conectado entre el suelo y la primera planta. La compensación del desplazamiento en el resto de los pisos se lleva a cabo a partir de las características de interconexión propias del edificio, debido a que el amortiguador no se conecta con ningún otro piso, aunque el cálculo de la ley de control permite interconexiones virtuales cuyo efecto es resumido en la tabla 4.1.

## Capítulo 5

# Péndulo doble

### 5.1 Descripción del sistema

En el estudio de la teoría de control es común el uso de sistemas subactuados, tales como el sistema carro péndulo, el péndulo de rotatorio o el doble péndulo. Estos sistemas se usan con propósitos didácticos, ya que permiten un primer acercamiento de los estudiantes con las propiedades no lineales, percibir las intuitivamente y verificarlas teóricamente y experimentalmente. El reto consiste, en todos los casos, en diseñar esquemas de control que lleven al sistema a un punto de equilibrio que es inestable en lazo abierto. En la mayoría de los casos, dichos dispositivos son controlados por esquemas de control híbridos, es decir conmutando dos controles. El primer controlador genera oscilaciones que acercan al sistema a una vecindad del estado de equilibrio inestable. Cuando la trayectoria se encuentra en dicha región se acciona un control lineal que conduce al sistema al estado de equilibrio inestable y lo mantiene en el estado de operación de interés (Siciliano Bruno and Valavanis Kimon P. 1998). La idea de hacer un control conmutado radica en que es más fácil diseñar y sintonizar dos controladores que hacerlo en uno sólo.

La técnica de diseño CBP-AIA se basa en generar un moldeo y disipación de energía tal que las trayectorias del sistema converjan al estado de equilibrio. Al proponer apropiadamente el moldeo y disipación de energía, en toda la región de operación del sistema, se puede lograr que a partir de una condición inicial fuera de una vecindad del estado de equilibrio inestable, un solo controlador dirija la trayectoria hacia estado de operación, sin necesidad de conmutar entre controladores (Aracil J. and Astrom K. 2006) y (Angeli David 2000).

## 5.2 Modelo matemático del péndulo doble

El caso que se aborda en esta sección corresponde a un péndulo doble con acción de control en el primer eslabón, por lo que la dinámica del segundo depende de la del primero. Como en el caso de estudio anterior, para facilitar la construcción de la ley de CBP-AIA se describe la dinámica del péndulo doble en EHCP. Para ello en la Fig. 5.1 se presenta el diagrama de cuerpo libre de un doble péndulo con actuación sólo en la primera articulación.

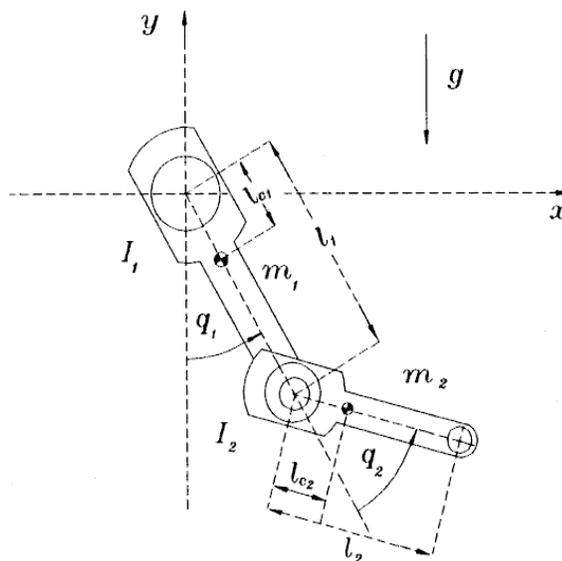


Figura 5.1: Diagrama de cuerpo libre de un manipulador de dos grados de libertad (Kelly y Santibáñez 2003)

Para este sistema mecánico, cuando no se consideran efectos dinámicos de fricción, el modelo en EHCP tiene como estados las posiciones y momentos generalizados  $[q_1 \ q_2]^T$  y  $[p_1 \ p_2]^T$  respectivamente. Además, se introduce el modelo de fricción Puma (3.15) y (3.16) para modelar la fricción en cada articulación mediante los estados internos  $[z_1 \ z_2]^T$ . La función de energía se propone como

$$H = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + U(q) + \frac{1}{2} z^T \Sigma_0 z$$

donde  $\frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p$  es la energía cinética y  $U(q)$  la energía potencial del péndulo doble y  $z^T \Sigma_0 z$  la energía potencial asociada al estado interno del modelo de fricción. Al sustituir

$\frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p$  y  $U(q)$  para el péndulo doble, la función de energía es

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(q_1) \\ - m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + \frac{1}{2} z^T \Sigma_0 z \quad (5.1)$$

donde:

$$\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_{11}(q) & \mu_{12}(q) \\ \mu_{21}(q) & \mu_{22}(q) \end{bmatrix}; \\ \Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}.$$

A partir de la función de energía (5.1) se generan las derivadas parciales respecto a cada uno de los estados y junto con la matriz de interconexión y disipación, se construye el arreglo matricial en EHCP que describe la dinámica del sistema, como

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 + \sigma_2 & 0 & -a_2 |\dot{q}_1| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1 + \sigma_2 & 0 & -a_2 |\dot{q}_2| \\ 0 & 0 & -a_2 |\dot{q}_1| & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1} |\dot{q}_1| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 |\dot{q}_2| & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1} |\dot{q}_2| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H \\ \nabla_{q_2} H \\ \nabla_{p_1} H \\ \nabla_{p_2} H \\ \nabla_{z_1} H \\ \nabla_{z_2} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (5.2)$$

La matriz de interconexión y disipación son funciones del estado  $[q \ p]$ , de la relación entre la posición y el momento generalizado  $p = m\dot{q}$  se cumple que  $\dot{q}_1 = \mu_{11}(q)p_1 + \mu_{12}(q)p_2$  y  $\dot{q}_2 = \mu_{21}(q)p_1 + \mu_{22}(q)p_2$  ( $\mu_{ij}$  son los elementos de la matriz inversa de  $M(q)$ ), como una forma de compactar la redacción de la matriz de disipación se recurrirá a escribir  $\dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$  en lugar de las coordenadas generalizadas  $[q \ p]$ .

### 5.3 Diseño de la Ley de CBP-AIA para el doble péndulo con fricción dinámica

La técnica de control requiere que el mínimo de la función de energía en lazo cerrado corresponda con el estado de equilibrio de lazo cerrado. El caso de interés para el péndulo

doble es la posición de equilibrio inestable que corresponde a la vertical superior, así que la función de energía propuesta se sugiere con mínimo en dicho punto. Para lograr este objetivo se mantiene la energía cinética del sistema y se modifica la energía potencial, los términos que corresponden al modelo de fricción permanecen intactos. Entonces, la función de energía deseada tiene la forma

$$H_d = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \alpha_1(m_1l_{c1} + m_2l_1)g\cos(q_1) + \alpha_2m_2gl_{c2}\cos(q_1 + q_2) + \frac{1}{2}z^T\Sigma_0z \quad (5.3)$$

Adicionalmente a la restricción antes planteada se tiene un grado de libertad adicional que corresponde a la disipación de energía a través de la matriz

$$R_d = R + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11d}(x) & R_{12d}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{12d}(x) & R_{22d}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

La disipación de energía se hace con una función  $R_{11d}(x) = \alpha_3\cos(q_2 - \pi)$ ,  $R_{12d}(x) = R_{21d}(x) = R_{22d}(x) = 0$ . Una vez propuesta la función de energía del sistema de referencia se generan las derivadas parciales de cada una de las variables, a partir de ellas se genera la matriz de interconexión y se aplica la disipación de energía a cada estado, con lo cual se

construye la dinámica deseada del sistema completo en EHCP, descrita en la Ec. (5.5).

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \\
 &- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11d}(x) + \sigma_1 + \sigma_2 & R_{12d}(x) & -a_2|\dot{q}_1| & 0 \\ 0 & 0 & R_{21d}(x) & R_{22d}(x) + \sigma_1 + \sigma_2 & 0 & -a_2|\dot{q}_2| \\ 0 & 0 & -a_2|\dot{q}_1| & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_1| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2|\dot{q}_2| & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_2| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H_d \\ \nabla_{q_2} H_d \\ \nabla_{p_1} H_d \\ \nabla_{p_2} H_d \\ \nabla_{z_1} H_d \\ \nabla_{z_2} H_d \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Al comparar las Ecs. (5.5) y (5.2), se observa la introducción de los términos  $R_{11d}(x)$ ,  $R_{12d}(x)$ ,  $R_{21d}(x)$  y  $R_{22d}(x)$  asociados a la inyección y disipación de energía.

### 5.3.1 Condiciones de existencia de la Ley de Control

Al igual que en el edificio caso anterior se calcula la función de energía asignada como la diferencia entre la función de energía de lazo cerrado y la de lazo abierto.

$$H_a = H_d - H = (1 + \alpha_1)(m l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(q_1) + (1 + \alpha_2) m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \tag{5.6}$$

Para construir la condición dada por (2.45) y generar  $\varkappa$  se deriva parcialmente la función de asignación de energía respecto a los estados.

$$\varkappa(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_a}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H_a}{\partial q_2} \\ \frac{\partial H_a}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H_a}{\partial p_2} \\ \frac{\partial H_a}{\partial z_1} \\ \frac{\partial H_a}{\partial z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1 + \alpha_1)(m l_{c1} + m_2 l_1) g \sin(q_1) - (1 + \alpha_2) m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ -(1 + \alpha_2) m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

A continuación se presenta el desarrollo de la *Proposición 1* dada por la Ec. (2.40).

i. Preservación de estructura

$$J_d = J + J_a = -[J + J_a]^T$$

De acuerdo con el sistema deseado propuesto  $J_a = 0$ , entonces.

$$J_d = J = -[J]^T$$

Para el caso del amortiguamiento se tiene

$$R_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11d}(x) + \sigma_1 + \sigma_2 & R_{12d}(x) & -a_2|\dot{q}_1| & 0 \\ 0 & 0 & R_{21d}(x) & R_{22d}(x) + \sigma_1 + \sigma_2 & 0 & -a_2|\dot{q}_2| \\ 0 & 0 & -a_2|\dot{q}_1| & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_1| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2|\dot{q}_2| & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_2| \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Se cumple que  $R_d^T(x) = R_d(x)$  cuando  $R_{12d}(x) = R_{21d}(x)$ . Además  $R_{11d}(x) > 0$ ,  $R_{12d}(x) > 0$ ,  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ , y  $a_2 > 0$

ii. Integrabilidad  $\varkappa(x)$

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varkappa}{\partial x_1} & -(1 + \alpha_2)m_2gl_{c2}\text{sen}(q_1 + q_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1 + \alpha_2)m_2gl_{c2}\text{sen}(q_1 + q_2) & -(1 + \alpha_2)m_2gl_{c2}\text{sen}(q_1 + q_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

donde  $\frac{\partial \varkappa}{\partial x_1} = -(1 + \alpha_1)(ml_{c1} + m_2l_1)g\text{sen}(q_1) - (1 + \alpha_2)m_2gl_{c2}\text{sen}(q_1 + q_2)$ .

Se asegura que  $\frac{\partial \varkappa}{\partial x} = \frac{\partial \varkappa^T}{\partial x}$

iii. Asignación de equilibrio  $\varkappa(x)$  en  $x_*$ , satisface

$$\varkappa(x) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x_*)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -(1 + \alpha_1)(ml_{c1} + m_2l_1)gsen(q_1) - (1 + \alpha_2)m_2gl_{c2}sen(q_1 + q_2) \\ -(1 + \alpha_2)m_2gl_{c2}sen(q_1 + q_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{x_*} = \\
& = \begin{bmatrix} (m_{lc1} + m_2l_1)gsen(q_1) + m_2gl_{c2}sen(q_1 + q_2) + p_1^2 \frac{\partial \mu_{11}}{\partial q_1} + p_2^2 \frac{\partial \mu_2}{\partial q_1} + p_1 p_2 \left( \frac{\partial \mu_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial \mu_{21}}{\partial q_1} \right) \\ m_2gl_{c2}sen(q_1 + q_2) + p_1^2 \frac{\partial \mu_{11}}{\partial q_2} + p_2^2 \frac{\partial \mu_2}{\partial q_2} + p_1 p_2 \left( \frac{\partial \mu_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial \mu_{21}}{\partial q_2} \right) \\ 2\mu_{11}p_1 + (\mu_{12} + \mu_{21})p_2 \\ \mu_{22}p_2 + (\mu_{12} + \mu_{21})p_1 \\ \sigma_0 z_1 \\ \sigma_0 z_2 \end{bmatrix}_{x_*}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

iv. Estabilidad de Lyapunov El Jacobiano  $\varkappa(x)$  en  $x_*$ , satisface la cota

$$\frac{\partial}{\partial x} \varkappa(x_*) > -\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x_*)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varkappa}{\partial x_1} & -(1 + \alpha_2)m_2gl_{c2}sen(q_1 + q_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1 + \alpha_2)m_2gl_{c2}sen(q_1 + q_2) & -(1 + \alpha_2)m_2gl_{c2}sen(q_1 + q_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{x_*} >$$

$$\left[ \begin{array}{cccccc} (ml_{c1} + m_2l_1)g\cos(q_1) + m_2gl_{c2}\cos(q_1 + q_2) & m_2gl_{c2}\cos(q_1 + q_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_2gl_{c2}\cos(q_1 + q_2) & \Upsilon & \Gamma & \Omega & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & 2\mu_{11} & \mu_{12} + \mu_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \Omega & \mu_{12} + \mu_{21} & 2\mu_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_0 \end{array} \right]_{x_*} \quad (5.10)$$

donde:

$$\Upsilon = m_2gl_{c2}\cos(q_1 + q_2) + p_1^2 \frac{\partial^2 \mu_{11}}{\partial q_2^2} + p_2^2 \frac{\partial^2 \mu_{22}}{\partial q_2^2} + p_1 p_2 \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} (\mu_{12} + \mu_{21})$$

$$\Gamma = 2p_1 \frac{\partial \mu_{11}}{\partial q_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} (\mu_{12} + \mu_{21})$$

$$\Omega = 2p_2 \frac{\partial \mu_{22}}{\partial q_2} + p_1 \frac{\partial}{\partial q_2} (\mu_{12} + \mu_{21})$$

Al evaluar en el equilibrio (5.10) se tiene:

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] > - \left[ \begin{array}{cccccc} (ml_{c1} + m_2l_1)g + m_2gl_{c2} & m_2gl_{c2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_2gl_{c2} & m_2gl_{c2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_{11}(0) & \mu_{12}(0) + \mu_{21}(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{12}(0) & 2\mu_{22}(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_0 \end{array} \right] \quad (5.11)$$

La matriz de la derecha de (5.11) consta solo de constantes positivas por lo que se cumple  $\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{K}(x_*) > -\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x_*)$ .

Finalmente solo queda por construir la ley de control, para ello con  $J(x)$ ,  $R(x)$ ,  $H(x)$ ,

$g(x)$  y la Proposición 1 dada por la Ec. (2.40) se tiene.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -(R_{11d}(x) + \sigma_1 + \sigma_2) & -R_{12d}(x) & -1 + a_2|\dot{q}_1| & 0 \\ 0 & -1 & -R_{21d}(x) & -(R_{22d}(x) + \sigma_1 + \sigma_2) & 0 & -1 + a_2|\dot{q}_2| \\ 0 & 0 & 1 + a_2|\dot{q}_1| & 0 & -\frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_1| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + a_2|\dot{q}_2| & 0 & -\frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_2| \end{bmatrix} \bullet$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} \\ -(1 + \alpha_1)m_2gl_{c2}sen(q_1 + q_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11d}(x) & R_{12d}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{12d}(x) & R_{22d}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (ml_{c1} + m_2l_1)gsen(q_1) + m_2gl_{c2}sen(q_1 + q_2) \\ p_1\mu_{21} + p_2\mu_{22} + m_2gl_{c2}sen(q_1 + q_2) \\ \mu_{11}p_1 + \mu_{12}p_2 \\ \mu_{21}p_1 + \mu_{22}p_2 \\ \sigma_0z_1 \\ \sigma_0z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \beta(x) \quad (5.12)$$

Al despejar  $\beta(x)$  de la Ec. (5.12) se obtiene la ley de CBP-AIA.

$$\beta(x) = \frac{1}{\tau} \left\{ (1 + \alpha_1)(m_1l_{c1} + m_2l_1)gsen(q_1) + (1 + \alpha_2)m_2l_{c2}sen(q_1 + q_2) - R_{11d}(x)(\mu_{11}p_1 + \mu_{12}p_2) - R_{12d}(x)(\mu_{21}p_1 + \mu_{22}p_2) \right\} \quad (5.13)$$

## 5.4 Simulación numérica para el péndulo doble

En esta sección se presentan los resultados de un experimento realizado por simulación que consiste en mostrar que la ley de CBP-AIA puede llevar al doble péndulo a la posición erguida vertical. Se proponen como condiciones iniciales que el primer brazo se localice a 0 [rad] y que la posición angular del segundo brazo sea 0.05 [rad], según el sistema de referencia mostrado en la Figura 5.1.

En las Figuras 5.2 y 5.3 se muestra la trayectoria de cada uno de los brazos del péndulo doble. Se observa que ambos brazos se encuentran cerca de la posición inferior de acuerdo con el sistema de referencia adoptado y que al entrar en acción la ley de CBP-AIA los brazos llegan a la posición vertical superior. La ley de control empleada para el único actuador en el primer brazo se muestra en la figura 5.4.

Es importante notar que esta ley de control es continua por ello no es necesario usar una ley conmutada (Aracil J. and Gordillo F. 2005) para primero impulsar el doble péndulo y luego estabilizarlo en la posición de equilibrio inestable en lazo abierto.

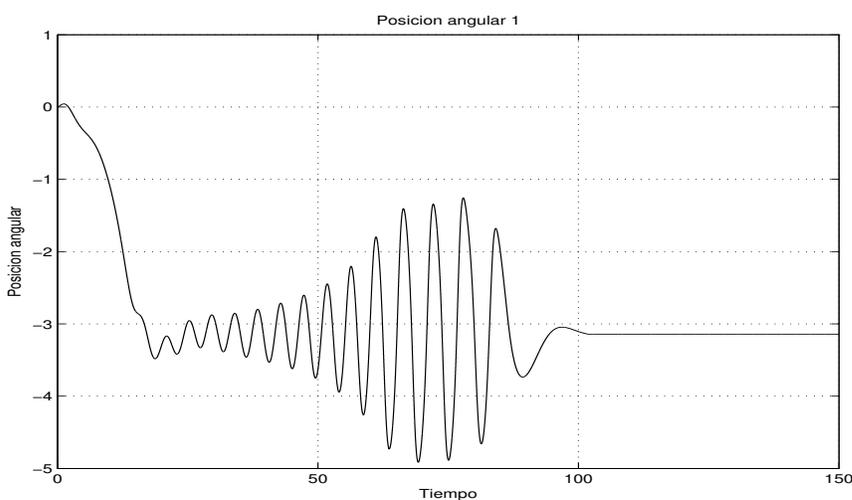


Figura 5.2: Posición angular  $q_1$

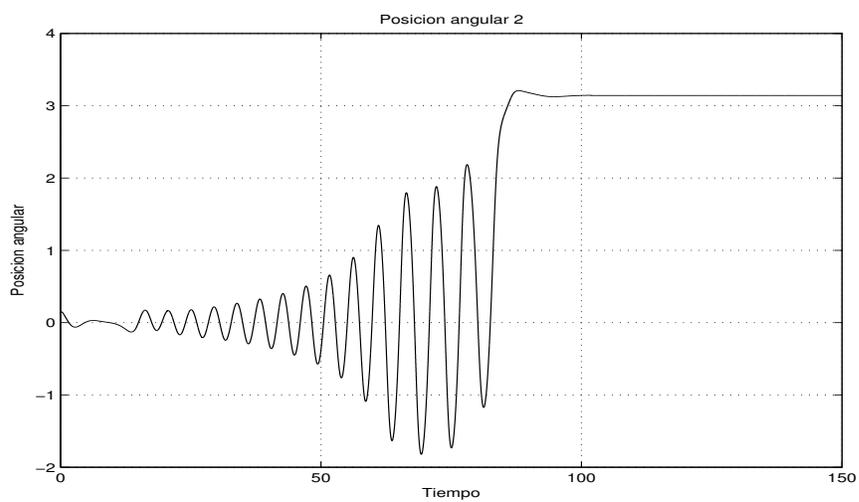
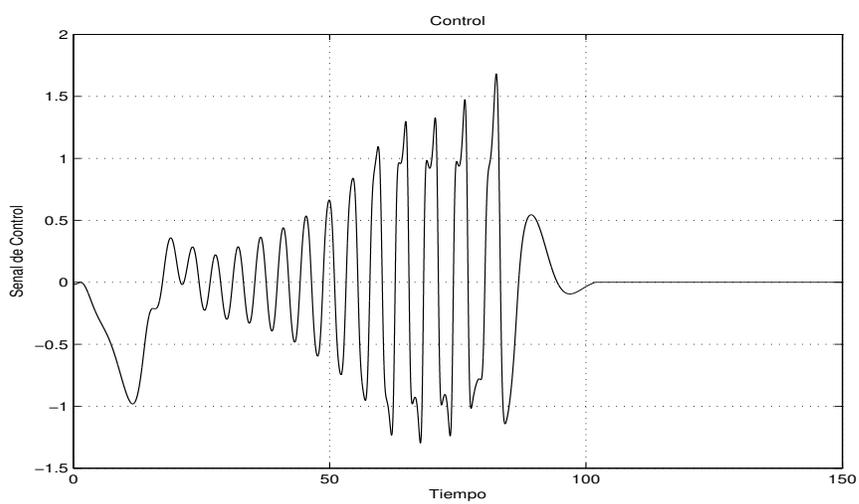
Figura 5.3: Suma de las posiciones angulares  $q_1 + q_2$ 

Figura 5.4: Señal de control (par)

## Capítulo 6

# Péndulo de Furuta

Al igual que en los dos casos de estudio anteriores, el péndulo de Furuta posee más grados de libertad que acciones de control. Es un sistema con grado de subactuación uno y una infinidad de puntos de equilibrio estables e inestables. Como en el caso del péndulo doble, se busca diseñar un esquema de control que permita llevar al sistema desde cualquier estado inicial hasta un estado de equilibrio inestable de lazo abierto con una única ley de control y que permanezca en dicha condición como pasa el tiempo. La solución del problema se plantea desde un punto de vista de moldeo y disipación de energía para ello la dinámica de la planta se describe en un marco de EHCP y la ley de control se construye desde un enfoque de CBP-AIA (Ortega, R., van der Schaft, A. J., Mareels, I., and Maschke B. 2001).

En forma sencilla, la idea general es diseñar una función de energía de lazo cerrado con punto de equilibrio en el estado de equilibrio inestable y que adicionalmente posea zonas de mayor energía en regiones alejadas al punto de equilibrio en lazo cerrado y zonas de menor energía en una vecindad de dicho punto, es decir que el moldeo de energía cambie de acuerdo a la posición de la trayectoria del péndulo, ello considerando que la cantidad de energía que se requiere para desplazar el péndulo de una posición cercana a la vertical inferior es mayor que en una posición contigua a la vertical superior. Adicional a las aportaciones que puede generar la función de energía también se plantea un esquema de disipación e interconexión de energía para lograr el objetivo antes planteado.

## 6.1 Descripción del sistema

El péndulo de Furuta es un prototipo académico que está constituido de dos barras conectadas entre si perpendicularmente. El extremo de una de ellas está montada en un motor que genera su desplazamiento angular en el plano horizontal, su otro extremo se ensambla transversalmente la otra barra que funciona como péndulo y tiene movimiento solo en un plano vertical como se muestra en la siguiente Figura 6.1.

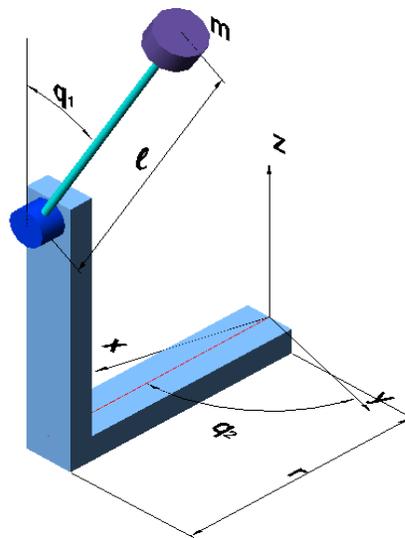


Figura 6.1: Péndulo de Furuta

En la Figura 6.1,  $l$  es la longitud,  $m$  la masa y  $q_1$  la posición angular del péndulo. Para el brazo  $r$  es su longitud,  $q_2$  su posición angular y su masa se considera despreciable. La entrada es el torque  $u$  que se ejerce sobre el brazo únicamente y  $g$  la fuerza gravitacional.

## 6.2 Modelo matemático del péndulo de Furuta

Para la construcción de la dinámica de la planta, se definen los estados del sistema  $x(t) = [q_1 \quad q_2 \quad p_1 \quad p_2 \quad z_1 \quad z_2]$ , donde  $q_i$  es la posición generalizada,  $p_i$  el momento

generalizado,  $z_i$  una variable interna del modelo de fricción. Con  $i = 1$  para el péndulo e  $i = 2$  para el brazo.

Una vez definido el estado, se plantea la función de energía del sistema como la suma de la energía cinética y potencial del péndulo de Furuta.

$$H = \frac{1}{2}p^T M(q)^{-1}p + K_4(\cos q_1 - 1) + \frac{1}{2}z^T \Sigma z \quad (6.1)$$

donde:

$$z^T = [z_1 \quad z_2]$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \text{ es una matriz de parámetros del modelo de fricción}$$

$\frac{1}{2}p^T M(q)^{-1}p$ : es la energía cinética y

$K_4(\cos q_1 - 1) + \frac{1}{2}z^T \Sigma z$  la energía potencial.

A continuación se plantean las derivadas parciales de la función de energía respecto a cada uno de los estados y junto con la matriz de interconexión y disipación se construye la dinámica de la planta en EHCP, que es

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 + \sigma_2 & 0 & -a_2|\dot{q}_1| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1 + \sigma_2 & 0 & -a_2|\dot{q}_2| \\ 0 & 0 & -a_2|\dot{q}_1| & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_1| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2|\dot{q}_2| & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_2| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H \\ \nabla_{q_2} H \\ \nabla_{p_1} H \\ \nabla_{p_2} H \\ \nabla_{z_1} H \\ \nabla_{z_2} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_4(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \beta(x) \quad (6.2)$$

La matriz de interconexión y disipación son funciones del estado  $[q \ p]$ , de la relación entre la posición y el momento generalizado  $p = mq$  se cumple que  $\dot{q}_1 = \mu_{11}(q)p_1 + \mu_{12}(q)p_2$  y  $\dot{q}_2 = \mu_{21}(q)p_1 + \mu_{22}(q)p_2$  ( $\mu_{ij}$  son los elementos de la matriz inversa de  $M(q)$ ), como una forma de compactar la redacción de la matriz de disipación se recurrirá a escribir  $\dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$  en lugar de las coordenadas generalizadas  $[q \ p]$ .

Además  $g_4(x) = 1$  y  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $a_2$  son parámetros del modelo de fricción.

Se observa que la matriz de interconexión cumple con la propiedad  $J = -J^T$  y que mientras  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $a_2$  sean positivos la matriz de disipación asegura la condición  $R = R^T \geq 0$

### 6.3 Diseño de la Ley de la ley de CBP-AIA

El objetivo del esquema de control es que a partir de una condición inicial cualquiera y con un solo esquema de control el péndulo de Furuta tome una trayectoria que lo lleve al punto de equilibrio inestable y lo mantenga ahí. Para ello la función de energía debe poseer un mínimo en el punto de equilibrio de lazo cerrado que corresponde precisamente al punto de equilibrio inestable. Desde esta perspectiva un hecho conveniente es reformular la energía en el péndulo tal forma que los puntos cercanos al equilibrio inestable sean atractivos respecto a este y los que estén más alejados de dicha vecindad lo sean aún más. Para ello se propone la energía potencial de lazo cerrado del sistema con mínimo en el equilibrio inestable y un término de energía potencial tipo resorte que hace aún más atrayente el punto de equilibrio inestable. Por otra parte la energía cinética en lazo abierto y cerrado se mantiene igual así como la energía potencial debida al esquema de fricción no lineal

$$\begin{aligned}
 H_d(x) = & \frac{1}{2}p^T M(q)^{-1}p + k_A(1 - \cos q_1) \\
 + & k_B(1 - \cos 2q_1) + \frac{1}{2}k_D q_1^2 + \frac{1}{2}k_C q_2^2 + \frac{1}{2}\sigma_0 z^T z.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Las matrices de interconexión y disipación para la dinámica de lazo cerrado son.

$$J_d(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_{11d} & J_{12d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{21d} & J_{22d} & 0 & 0 \\ -J_{11d} & -J_{12d} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -J_{21d} & -J_{22d} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$R_d(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 + \sigma_2 + R_{11d} & R_{12d} & -a_2|\dot{q}_1| & 0 \\ 0 & 0 & R_{21d} & \sigma_1 + \sigma_2 + R_{22d} & 0 & -a_2|\dot{q}_2| \\ 0 & 0 & -a_2|\dot{q}_1| & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_1| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2|\dot{q}_2| & 0 & \frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_2| \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Los elementos de la matriz de disipación tienen los siguientes valores  $R_{11d} > 0$ ,  $R_{12d} = R_{21d} > 0$ ,  $R_{22d} > 0$  para asegurar que la matriz de disipación de lazo cerrado satisfaga  $R_d = Rd > 0$ .

Los elementos de la matriz de interconexión deseada  $J_d$  se calculan más adelante de acuerdo a sus propiedades intrínsecas y a los requerimientos de la ley de control.

Una vez propuesta la función de energía y las matrices de interconexión y disipación de energía se construye la dinámica de la función de energía como

$$\dot{x} = [J_d - R_d]\nabla_x H_d$$

## 6.4 Ley de control

Para determinar la ley de control se recurre a la Ec. (2.46)

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_4(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \{(J_d(x) - R_d(x))\nabla H_d(x) - (J(x) - R(x))\nabla H(x)\} \quad (6.6)$$

Al sustituir la dinámica de lazo abierto Ec. (6.2) y lazo cerrado del sistema Ecs. (6.4) y (6.5) en la Ecuación de  $\beta(x)$ , Ec. (6.6) se tiene.

$$\begin{aligned} \beta(x) = & - J_{21d}\nabla_{q_1}H_d - J_{22d}\nabla_{q_2}H_d - R_{12d}\nabla_{p_1}H_d - (\sigma_1 + R_{22d})\nabla_{p_2}H_d \\ & - (1 - a_2|\dot{q}_2|)\nabla_{z_2}H_d + \nabla_{q_2}H + \sigma_1\nabla_{p_2}H + (1 - a_2|\dot{q}_2|)\nabla_{z_2}H \end{aligned} \quad (6.7)$$

De la Ley de Control Ec. (6.7) obtenida se observa que hay valores por conocer, en el caso de la función de energía (6.3) y la matriz de disipación (6.5) de lazo cerrado la situación que se resuelve de forma simple recurriendo al conocimiento intrínseco del diseñador sobre el sistema y a la sintonización en la simulación numérica, por supuesto respetando las restricciones que establece el marco de modelado. Para determinar los elementos desconocidos de la matriz de interconexión de energía del sistema en lazo cerrado Ec. (6.4), se recurre a la condición de aparejamiento Ec. (2.47), que se describe detalladamente a continuación.

## 6.5 Condición de aparejamiento

La condición de aparejamiento plantea la existencia del vector  $g^\perp(x)$  denominado aniquilador izquierdo, el cual satisface  $g^\perp(x)g(x) = 0$ . Para determinar el valor de los elementos del vector  $g^\perp(x)$  se recurre a la definición de la dinámica del sistema de lazo abierto del péndulo de Furuta en EHCP (véase Ec. (6.2)). De dicha Ecuación  $g(x) = [0 \ 0 \ 0 \ g_4(x) \ 0 \ 0]^T$ .

A continuación se presenta la construcción para el aniquilador izquierdo.

$$\begin{bmatrix} g_1^\perp(x) & g_2^\perp(x) & g_3^\perp(x) & g_4^\perp(x) & g_5^\perp(x) & g_6^\perp(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_4(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.8)$$

De la Ec. (6.8),  $g_4^\perp(x)$  debe ser cero para asegurar  $g^\perp(x)g(x) = 0$ . El resto de los elementos del vector  $g^\perp(x)$ , pueden tomar cualquier valor.

$$\begin{bmatrix} g_1^\perp(x) \\ g_2^\perp(x) \\ g_3^\perp(x) \\ g_4^\perp(x) \\ g_5^\perp(x) \\ g_6^\perp(x) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ 0 \\ \star \\ \star \end{bmatrix}^T \quad (6.9)$$

donde  $\star$  representa un valor arbitrario.

Para simplificar el diseño se propone  $g_1^\perp(x) = g_2^\perp(x) = g_5^\perp(x) = g_6^\perp(x) = 0$ , y el único elemento del vector  $g^\perp(x)$  que se escoge como no trivial es  $g_3^\perp(x)$ , para tener una injerencia en la dinámica del péndulo. Para encontrar el valor de  $g_3^\perp(x)$  se reescribe (2.47) y se tiene

$$g^\perp(x) \{ [J_d(x) - R_d(x)]_d(x) - [J(x) - R(x)] \nabla H(x) \} = 0 \quad (6.10)$$

Sustituyendo los valores de las matrices de Ecs. (6.2), (6.4) y (6.5) en la Ec. (6.10) y considerando que el único elemento no trivial de  $g^\perp(x)$  es  $g_3^\perp(x)$ , entonces el tercer elemento del vector del lado derecho de la Ec. (6.10), debe ser cero, esto es:

$$\begin{bmatrix} g_1^\perp(x) \\ g_2^\perp(x) \\ g_3^\perp(x) \\ g_4^\perp(x) \\ g_5^\perp(x) \\ g_6^\perp(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} J_{11d} \nabla_{p1} H_d(x) - J_{12d} \nabla_{p2} H_d(x) - \\ J_{21d} \nabla_{p1} H_d(x) - J_{22d} \nabla_{p2} H_d(x) - \\ J_{11d} \nabla_{q1} H_d(x) - J_{12d} \nabla_{q2} H_d(x) - (R_{11d} + \sigma_1) \nabla_{p1} H_d - R_{12d} \nabla_{p2} H_d + \\ J_{21d} \nabla_{q1} H_d(x) - J_{22d} \nabla_{q2} H_d(x) - R_{21d} \nabla_{p1} H_d - (R_{12d} + \sigma_1) \nabla_{p2} H_d + \\ (a_2 |\dot{q}_1| + 1) \nabla_{p1} H_d - \frac{a_2}{\sigma_1} |\dot{q}_1| \nabla_{z1} H_d - (a_2 |\dot{q}_1| + 1) \nabla_{p1} H + \\ (a_2 |\dot{q}_2| + 1) \nabla_{p2} H_d - \frac{a_2}{\sigma_1} |\dot{q}_2| \nabla_{z1} H_d - (a_2 |\dot{q}_2| + 1) \nabla_{p2} H + \\ -\nabla_{p1} H \\ -\nabla_{p2} H \\ +(a_2 |\dot{q}_1| - 1) \nabla_{z1} H_d + \nabla_{q1} H + \sigma_1 \nabla_{p1} H - (a_2 |\dot{q}_1| - 1) \nabla_{z1} H \\ +(a_2 |\dot{q}_2| - 1) \nabla_{z2} H_d + \nabla_{q1} H + \sigma_1 \nabla_{p1} H - (a_2 |\dot{q}_2| - 1) \nabla_{z2} H \\ + \frac{a_2}{\sigma_1} |\dot{q}_1| \nabla_{z1} \\ + \frac{a_2}{\sigma_1} |\dot{q}_2| \nabla_{z2} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \star \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} J_{11d} \nabla_{p1} H_d(x) - J_{12d} \nabla_{p2} H_d(x) - \\ J_{21d} \nabla_{p1} H_d(x) - J_{22d} \nabla_{p2} H_d(x) - \\ J_{11d} \nabla_{q1} H_d(x) - J_{12d} \nabla_{q2} H_d(x) - (R_{11d} + \sigma_1) \nabla_{p1} H_d - R_{12d} \nabla_{p2} H_d + \\ J_{21d} \nabla_{q1} H_d(x) - J_{22d} \nabla_{q2} H_d(x) - R_{21d} \nabla_{p1} H_d - (R_{12d} + \sigma_1) \nabla_{p2} H_d + \\ (a_2 |\dot{q}_1| + 1) \nabla_{p1} H_d - \frac{a_2}{\sigma_1} |\dot{q}_1| \nabla_{z1} H_d - (a_2 |\dot{q}_1| + 1) \nabla_{p1} H + \\ (a_2 |\dot{q}_2| + 1) \nabla_{p2} H_d - \frac{a_2}{\sigma_1} |\dot{q}_2| \nabla_{z1} H_d - (a_2 |\dot{q}_2| + 1) \nabla_{p2} H + \\ -\nabla_{p1} H \\ -\nabla_{p2} H \\ +(a_2 |\dot{q}_1| - 1) \nabla_{z1} H_d + \nabla_{q1} H + \sigma_1 \nabla_{p1} H - (a_2 |\dot{q}_1| - 1) \nabla_{z1} H \\ +(a_2 |\dot{q}_2| - 1) \nabla_{z2} H_d + \nabla_{q1} H + \sigma_1 \nabla_{p1} H - (a_2 |\dot{q}_2| - 1) \nabla_{z2} H \\ + \frac{a_2}{\sigma_1} |\dot{q}_1| \nabla_{z1} \\ + \frac{a_2}{\sigma_1} |\dot{q}_2| \nabla_{z2} \end{bmatrix} = 0$$

(6.11)

$$J_{11d}\nabla_{p_1}H_d(x) - J_{12d}\nabla_{p_2}H_d(x) - \nabla_{p_1}H = \star \quad (6.12)$$

$$J_{21d}\nabla_{p_1}H_d(x) - J_{22d}\nabla_{p_2}H_d(x) - \nabla_{p_2}H = \star \quad (6.13)$$

$$J_{11d}\nabla_{q_1}H_d - J_{12d}\nabla_{q_2}H_d - (R_{11d} + \sigma_1)\nabla_{p_1}H_d - R_{12d}\nabla_{p_2}H_d + \\ + (a_2|\dot{q}_1| - 1)\nabla_{z_1}H_d + \nabla_{q_1}H + \sigma_1\nabla_{p_1}H - (a_2|\dot{q}_1| - 1)\nabla_{z_1}H = 0 \quad (6.14)$$

$$J_{21d}\nabla_{q_1}H_d(x) - J_{22d}\nabla_{q_2}H_d(x) - R_{21d}\nabla_{p_1}H_d - (R_{12d} + \sigma_1)\nabla_{p_2}H_d \\ + (a_2|\dot{q}_2| - 1)\nabla_{z_2}H_d + \nabla_{q_1}H + \sigma_1\nabla_{p_1}H - (a_2|\dot{q}_2| - 1)\nabla_{z_2}H = \star \quad (6.15)$$

$$(a_2|\dot{q}_1| + 1)\nabla_{p_1}H_d - \frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_1|\nabla_{z_1}H_d - (a_2|\dot{q}_1| + 1)\nabla_{p_1}H + \frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_1|\nabla_{z_1}H = \star \quad (6.16)$$

$$(a_2|\dot{q}_2| + 1)\nabla_{p_2}H_d - \frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_2|\nabla_{z_1}H_d - (a_2|\dot{q}_2| + 1)\nabla_{p_2}H + \frac{a_2}{\sigma_1}|\dot{q}_2|\nabla_{z_2}H = \star \quad (6.17)$$

Como las Ecs. (6.12), (6.13), (6.15), (6.16) y (6.17), pueden tomar cualquier valor, sólo se enfocará la atención en asegurar que la Ec. (6.14) sea igual a cero. Se observa que en dicha ecuación hay dos grados de libertad,  $J_{11d}$  y  $J_{12d}$ . Una elección puede ser  $J_{11d} = 1$  y a partir de este resultado encontrar el  $J_{12d}$

$$J_{12d} = \frac{\nabla_{q_1}H - \nabla_{q_1}H_d - R_{11d}\nabla_{p_1}H_d - R_{12}\nabla_{p_2}H_d}{\nabla_{q_2}H_d}. \quad (6.18)$$

En la matriz de interconexión deseada (6.4) se propone la restricción  $J_{12d} = J_{21d}$  que simplifica la construcción de la ley de control, además de satisfacer la condición de la matriz de interconexión  $J_d = -J_d^T$ .

El valor se genera a continuación a partir de la dinámica de  $\dot{p}_2$  de la Ec. (2.49) .

$$\dot{p}_2 = -J_{21d}\nabla_{q_1}H_d - J_{22d}\nabla_{q_2}H_d - \nabla_{z_2}H_d - R_{21d}\nabla_{p_1}H_d \\ - (R_{22d} + \sigma_1)\nabla_{p_2}H_d - (1 - a_2|\dot{q}_2|)\nabla_{z_2}H_d \quad (6.19)$$

Como la formulación de la ley de CBP-AIA da la posibilidad al diseñador para proponer una dinámica de lazo cerrado deseada para la matriz de interconexión (Ortega, R., van der Schaft, A. J., Mareels, I., and Maschke B. 2001), entonces la idea es expresar la dinámica de  $\dot{p}_2$  en términos de la energía potencial como

$$\dot{p}_2 = -\nabla_{q_2}H_d - (\nabla_{q_1}V_d - \nabla_{q_1}V) - R_{21d}(\nabla_{p_1}H_d - \nabla_{p-1}H_{d*}) - \\ - R_{22d}(\nabla_{p_2}H_d - \nabla_{p_2}H_{d*}) - (1 - a_2|\dot{q}_2|)\nabla_{z_2}H_d. \quad (6.20)$$

donde  $H_{d*}$  es la función de energía de lazo cerrado evaluada en el punto de equilibrio.

Igualando las Ecs. (6.19) y (6.20), y sustituyendo el valor de  $J_{12d} = J_{21d}$  y al resolver para  $J_{22d}$  se tiene

$$J_{22d} = 1 + \frac{\nabla_{q_1} V_d - \nabla_{q_1} V}{\nabla_{q_2} H_d} - \frac{R_{21d} \nabla_{p_1} H_{d*}}{\nabla_{q_2} H_d} - \frac{R_{22d} \nabla_{p_2} H_{d*}}{\nabla_{q_2} H_d} - \frac{\sigma_1 \nabla_{p_2} H_d}{\nabla_{q_2} H_d} - \frac{\nabla_{q_1} H_d (\nabla_{q_1} H - \nabla_{q_1} H_d - R_{11} \nabla_{p_1} H_d - R_{12d} \nabla_{p_2} H_d)}{(\nabla_{q_2} H_d)^2}.$$

Finalmente la ley de control está dada por.

$$\begin{aligned} \beta(x) = & -(\nabla_{q_2} H_d - \nabla_{q_2} H) - R_{21d} (\nabla_{p_1} H_d - \nabla_{p_1} H_{d*}) - R_{22d} (\nabla_{p_2} H_d - \nabla_{p_2} H_{d*}) \\ & - (\nabla_{q_1} V_d - \nabla_{q_1} V) + \sigma_1 \nabla_{p_2} H_d \end{aligned} \quad (6.21)$$

## 6.6 Simulación numérica

Esta sección está dedicada a la simulación del péndulo de Furuta bajo una ley de CBP-AIA, integrando el esquema de fricción no lineal en cada una de las articulaciones. El experimento se realiza con un tiempo de muestreo de 1 [ms] y bajo la condición inicial de 1 [rad] para el péndulo, las condiciones iniciales de los otros estados son cero. A partir de la Figura (6.2) se observa la condición inicial para la

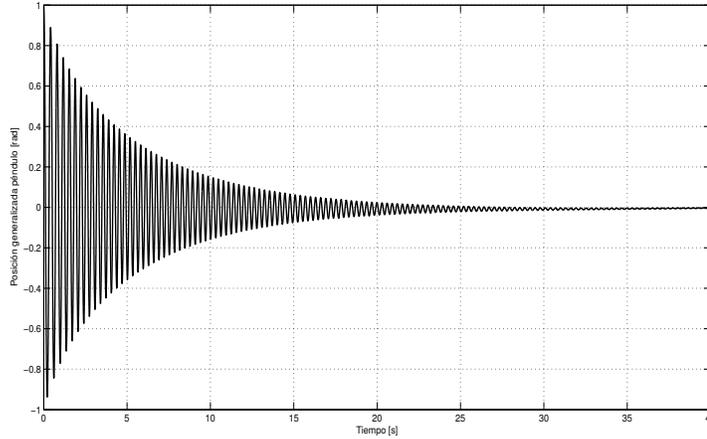


Figura 6.2: Posición angular del péndulo

posición generalizada en un radian, aproximadamente a  $57^\circ$ . A partir de este estado,

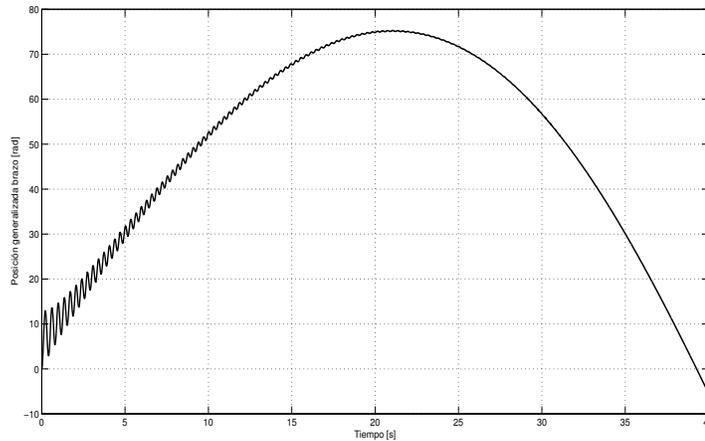


Figura 6.3: Posición angular del brazo

el controlador genera oscilaciones para acercar al péndulo a una vecindad del equilibrio inestable, situación que sucede gracias a que el brazo tiene oscilaciones amplias al mismo tiempo que se desplaza como se muestre en la Figura 6.3. En el caso de los dos momentos generalizados fuera de la vecindad del equilibrio en lazo cerrado se presentan balanceos grandes, que al llegar a dicho equilibrio permanecen en un estado estable (véase en las Figuras. 6.4 y 6.5). Finalmente se observa en la Figura 6.6 que la señal de control suministra una mayor cantidad de energía lejos de la región de operación deseada y una vez en esta región se mantiene en cero. A lo largo de esta sección se presento la construcción de una ley de CPB-AIA, desde una perspectiva distinta a los dos casos de estudio anteriores. En este caso se recurrió a un grado de libertad adicional que genera la condición de aparejamiento (2.47),

Se propuso la función de energía de lazo cerrado con mínimo en el equilibrio inestable de lazo abierto.

En el caso de la disipación se propone una matriz que moldea la energía en las articulaciones de tal manera que se incremente la disipación de energía en ellas para inducir al sistema posición de equilibrio de lazo cerrado.

Adicionalmente a la función de energía y a la matriz de disipación queda por definir la matriz de interconexión de lazo cerrado con la que se busca proponer intercambios de energía que favorezcan la estabilización en el punto de equilibrio deseado en lazo

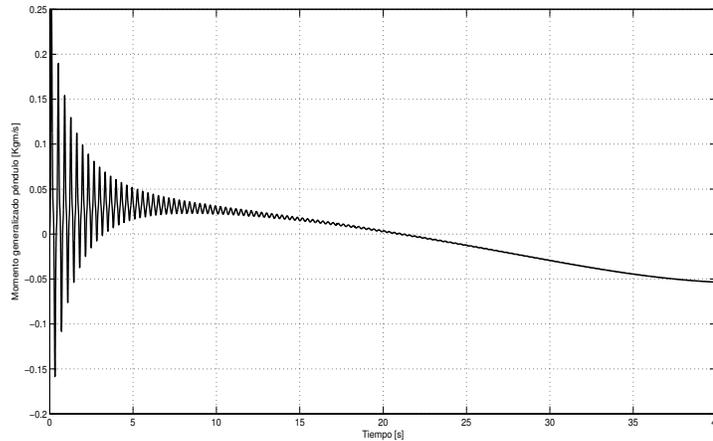


Figura 6.4: Momento generalizado del péndulo

cerrado. En este caso a diferencia de los casos de estudio previos se recurre a un grado de libertad adicional dado por la condición de aparejamiento, donde a partir de ella se definen los elementos propuestos pero desconocidos en la matriz de interconexión. Comparando la ley de control del péndulo doble y el de Furuta, se observa que los dos poseen términos de disipación de energía así como términos debidos al cambio de energía potencial, es decir que la estructura de la ley de control en los dos casos es la misma, pero que para el caso del péndulo doble si se logró llevar desde cualquier condición inicial al sistema al equilibrio inestable y que en el caso del péndulo de furuta se presentó la restricción de solo condición inicial en una vecindad de un radián, en el resto del plano no es posible llevar al péndulo con un sólo controlador al punto de equilibrio inestable. La explicación ante este hecho se debe a que la sintonización de parámetros realizada no permitió dicho objetivo porque el controlador si tiene la estructura y cumple las condiciones establecidas por la técnica para lograr estabilizar al sistema independientemente de su condición inicial.

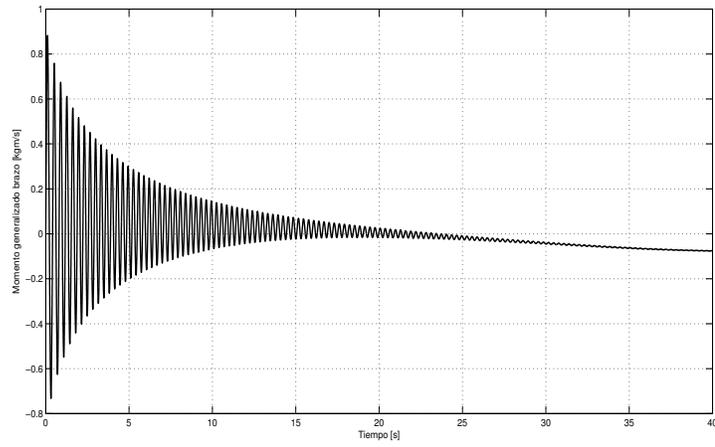


Figura 6.5: Momento generalizado del brazo

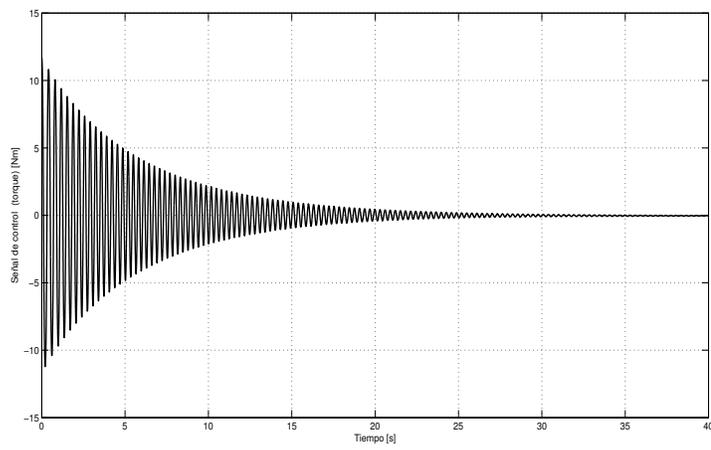


Figura 6.6: Señal de control (par)

## Capítulo 7

# Conclusiones

En este trabajo de tesis se investigó el control de sistemas mecánicos subactuados sujetos a efectos dinámicos de fricción. Se propuso utilizar el marco teórico de las Ecuaciones Hamiltonianas Controladas por Puerto (EHCP) para representar los sistemas mecánicos y los modelos dinámicos de fricción (Blankenstein, G. and Van der Schaft, A. J. 2001).

Se recurrió al modelo de dinámico de fricción de LuGre (Canudas, C., Olsson, H., Åstrom, K. J., and Lischinsky, P. 1995) como punto de partida. Se comprobó que no es posible incorporar los estados internos de este modelo en el marco de EHCP. Para conseguir esta incorporación, se propuso una modificación a dicho modelo de LuGre con la cual los estados asociados con los modelos dinámicos de fricción se unen a los estados del sistema mecánico subactuado en el marco de EHCP, sin que estas pierdan sus propiedades estructurales. La modificación al modelo de LuGre, denominada Puma, fue probada usando datos experimentales de un amortiguador magneto-reológico, con los que se consiguieron resultados similares en cuanto a precisión de reproducción de fuerza de fricción que los obtenidos con el modelo original de LuGre.

Una vez realizada la formulación de sistemas mecánicos subactuados con efectos dinámicos de fricción en el marco de EHCP se realizó el diseño de leyes de control bajo el esquema de CBP-AIA para tres sistemas mecánicos subactuados.

Como primer caso de estudio, se abordó una estructura civil sujeta a excitación sísmica. El modelo de un edificio de tres pisos incluyó un amortiguador magneto-

reológico como actuador, situado entre los cimientos y la primera planta. Para hacer la modelación de la dinámica del amortiguador se recurrió al modelo de fricción Puma. La energía producida por el sismo produce vibración en la estructura, que induce desplazamientos relativos entre los distintos pisos. El objetivo de control consistió en reducir el desplazamiento de los entrepisos con el fin de evitar que la excitación sísmica produzca deformaciones permanentes en la estructura que reduzcan su resistencia. Al utilizar la técnica de CBP-AIA, se propuso incrementar la disipación de energía y se realizó una interconexión virtual entre cada uno de los pisos y la base que mejora el efecto de actuador sobre los desplazamientos de los pisos superiores. Los resultados de simulación numérica fueron muy buenos pues se alcanzó una reducción en el desplazamientos de 99.78 %, 73.61 % y 65.51 % para el primero, segundo y tercer piso respectivamente, comparados estos con los obtenidos de la respuesta libre del sistema. Los otros dos sistemas mecánicos subactuados corresponden al péndulo doble y el péndulo de Furuta. En cada uno de los péndulos la actuación está solo en la primera articulación y la segunda es excitada a través del movimiento de la primera. El objetivo de control fue llevar a los péndulos involucrados a las posiciones de equilibrio inestables en lazo abierto. En ambos casos se incorporó el modelo de fricción Puma en cada una de las articulaciones. Se siguió la metodología de CBP-AIA para diseñar leyes de control suaves que alcanzaran el objetivo de control. Las leyes incorporan de manera directa y continua las fases de inyección y disipación de energía que son necesarias para columpiar los péndulos y estabilizarlos en las posiciones verticales superiores deseadas. En el caso del péndulo doble, se mantuvo la estructura de interconexión del sistema y el control se obtuvo al moldear la energía potencial y la disipación en el sistema de lazo cerrado. La ley obtenida evita la conmutación entre las fases de columpiado y estabilización, comunes al estabilizar este tipo de dispositivo. Para el péndulo de Furuta adicionalmente a lo realizado para el péndulo doble, se propuso una interconexión de energía distinta a la original que permite hacer el moldeo de energía para el sistema y satisfacer el objetivo de control. La ley de control obtenida es también continua. En este caso la condiciones iniciales que cubre el controlador son más restringidas que las obtenidas para el péndulo doble. Este resultado se debe a que no se logró la sintonización adecuada de los parámetros del controlador. Falta aún realizar la verificación experimental de las leyes de control propuestas y

ampliar la región de atracción para el controlador del péndulo de Furuta.

# Referencias

- Angeli David (2000). Almost global stabilization of the inverted pendulum via continuous state feedback. *Automatica* 37, 1103–1108.
- Aracil J. and Gordillo F. (2005). El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 2(2), pp. 8–19.
- Aracil J., G. and Astrom K. (2006). *A family of punping-damping soomth Strategies for swinging up. Lagrangian and Hamiltonian methods for Nonlinear control.* USA: Springer-Verlag London.
- Armstrong, B., D. and Canudas de Wit C. (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica* 30(7), pp. 1083–1138.
- Armstrong-Helouvry, B. (1991). *Control of machines with friction.* USA: Kluwer Academic Publishers.
- Astrom K. J., A. and Gordillo F. (2008). A family of smooth controllers for swingning up a pendulum. *Automatica* 44(7), pp. 1841–1848.
- Barabanov, N. and Ortega, R. (2000b). Necessary and sufficient conditions for passivity of the LuGre friction model. *IEEE Transactions on Automatic Control* 45(4), 830–832.
- Blankenstein, G. and van der Schaft, A. J. (2001). Symmetry and reduction in implicit generalized hamiltonian systems. *Reports on mathematical physics* 47(1), pp. 57–100.
- Canudas, C., Olsson, H., Åstrom, K. J., and Lischinsky, P. (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40(3), pp. 419–425.

- D., K. (1985). Computer simulation of slip-stick friction in mechanical dynamic systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 107(1), 100–103.
- Dahl, P. (1976). Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal* 14(12), pp. 1675–1682.
- Dyke, S.J., Spencer, B.F., Sain, M.K., and Carlson, J.D. (1998). An experimental study of MR dampers for seismic protection. *Smart Materials and Structures* 7, pp. 693–703. Special Issue on Large Civil Structures.
- Gavin, H., Hanson, R., and Filisco, F. (1996b). Electrorheological dampers, part 2: analysis and design. *Journal of Applied Mechanics* 63(5), pp. 676–682.
- Gavin, H., Hanson, R., and Filisco, F. (1996a). Electrorheological dampers, part i: analysis and design. *Journal of Applied Mechanics* 63(5), pp. 669–675.
- Greenwood, D. T. (1997). *Classical Dynamics*. USA: Courier Dover Publications.
- Iwashiro, M., F. and Astrom, K.J. (1996). Energy based control of pendulum. *Control Applications, Proceedings of the 1996 IEEE International Conference*, pp. 715–720.
- Jiménez, R. (2006). Observadores adaptables para edificios con amortiguadores magneto-reológicos. Tesis de Maestría, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Jiménez, R. and Álvarez, L. (2005). LuGre friction model for a magnetorheological damper. *Structural Control and Health Monitoring* 12(1), 91–116.
- Kelly, R. y V. Santibáñez (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. España: Pearson Education.
- Ortega, R., A. Loría, P. Nicklasson, and H. Sira-Ramírez (1998). *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Great Britain: Springer.
- Ortega, R., A. van der Schaft, M. Bernhard, and G. Escobar (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems. *Automatica* 38(4), pp. 585–596.
- Ortega, R. and García-Canseco Eloísa (2004). Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey. *European Journal of Control* 10, pp. 432–450.

- Ortega, R., van der Schaft, A. J., Mareels, I., and Maschke B. (2001). Putting energy back in control. *Control Systems Magazine, IEEE 21*(2), pp. 18–33.
- Rocha-Cózatl E. y Reyes A. (2007). Validación experimental del modelo matemático de un péndulo invertido rotatorio. In *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, Monterrey, Nuevo León, México*, pp. pp. 24–26.
- Secchi Cristian, S. S. and F. Fantuzzi (2007). *Control of Interactive Robotic Interfaces, A Port-Hamiltonian Approach*. Germany: Springer-Verlag.
- Sepulchre R., J. M. K. P. V. (1997). *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag.
- Siciliano Bruno and Valavanis Kimon P. (1998). *Control Problems in Robotics and Automation*. Great Britain: Springer-Verlag London.
- Van der Schaft, A. J. (1999). *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. London: Springer Verlag.

## Apéndice A

# Parámetros del edificio

Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento. <sup>1</sup>

$$M = \begin{bmatrix} 98.3 & 0 & 0 \\ 0 & 98.3 & 0 \\ 0 & 0 & 98.3 \end{bmatrix} [Kg],$$

$$K = 10^5 \begin{bmatrix} 12 & -6.84 & 0 \\ -6.84 & 13.7 & -6.84 \\ 0 & -6.84 & 6.84 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 175 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & -50 \\ 0 & -50 & 50 \end{bmatrix}$$

$$K_d = 10^5 \begin{bmatrix} 15.9 & -9.5 & -0.07 \\ -9.5 & 21.6 & -9.2 \\ -0.07 & -9.2 & 32.4 \end{bmatrix} \quad C_d = \begin{bmatrix} 200 & 0 & -10 \\ 0 & 150 & -50 \\ -10 & -50 & 150 \end{bmatrix}$$

Tabla A.1:

| Parámetros amortiguador |                            |
|-------------------------|----------------------------|
| $\sigma_2$              | $10x10^6 [N \cdot s/m]$    |
| $\sigma_1$              | $2x10^5 [N \cdot s/m]$     |
| $\sigma_0$              | $160x10^6 [N/(V \cdot m)]$ |
| $a_2$                   | $0.8207 [s/m]$             |
| $a_1$                   | $0.1895 [1/V]$             |

---

<sup>1</sup>Unidades  $K = \left[ \frac{N}{m} \right]$  y  $C = \left[ \frac{N \cdot s}{m} \right]$

## Apéndice B

# Parámetros del péndulo doble

A continuación se presentan los parámetros del péndulo doble y del modelo de fricción. También se define la matrice de inercia, de fuerzas centrífugas y de Coriolis y de pares gravitacionales. Matrices del sistema

Tabla B.1: Parámetros del péndulo doble (Kelly y Santibáñez 2003)

|               |           |                        |
|---------------|-----------|------------------------|
| $l_1$         | 0.450     | [m]                    |
| $l_2$         | 0.450     | [m]                    |
| $l_{c1}$      | 0.091     | [m]                    |
| $l_{c2}$      | 0.048     | [m]                    |
| $m_1$         | 23.902    | [kg]                   |
| $m_2$         | 3.880     | [kg]                   |
| $I_1$         | 1.226     | [kg · m <sup>2</sup> ] |
| $I_2$         | 0.093     | [kg · m <sup>2</sup> ] |
| $g$           | 9.81      | [m/s <sup>2</sup> ]    |
| $R_{11d}$     | 2         |                        |
| $R_{12d}$     | 0.2       |                        |
| $\sigma_{oi}$ | $10^{-4}$ |                        |
| $\sigma_{1i}$ | 0.1       |                        |
| $\sigma_{2i}$ | 0.2       |                        |
| $a_{2i}$      | $10^{-4}$ |                        |

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}$$

$$M_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2$$

$$M_{12}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2$$

$$M_{21}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$C_{11}(q) = -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}_{q_2} (\mu_{21} p_1 + \mu_{22} p_2)$$

$$C_{21}(q) = -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}_{q_2} [(\mu_{11} p_1 + \mu_{12} p_2) + (\mu_{21} p_1 + \mu_{22} p_2)]$$

$$C_{22}(q) = 0$$

$$g_1(q) = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \operatorname{sen}(q_1) + m_2 g l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2)$$

$$g_2(q) = m_2 g l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2)$$

La relación entre las velocidades generalizadas y el momento generalizado es.

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = M^{-1}(q) p = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

donde los elementos de  $M^{-1}(q)$  son:

$$\begin{aligned}\mu_{11} &= \frac{1}{\Delta} m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ \mu_{12} &= -\frac{1}{\Delta} m_2 l_{c2}^2 + I_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \\ \mu_{21} &= -\frac{1}{\Delta} m_2 l_{c2}^2 + I_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \\ \mu_{22} &= \frac{1}{\Delta} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2\end{aligned}$$

El determinante  $\Delta$ , está dado por:

$$\begin{aligned}\Delta &= (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 + I_2)(m_2 l_{c2}^2 + I_2) \\ &\quad - (m_2 l_{c2}^2 + I_2)^2 - (m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2))^2\end{aligned}$$

## Apéndice C

# Parámetros del péndulo de Furuta

Tabla C.1: Parámetros del péndulo de Furuta(Rocha-Cózatl E. y Reyes A. 2007)

|       |             |
|-------|-------------|
| $r$   | 0.14        |
| $l$   | 0.5         |
| $I_b$ | $8x10^{-3}$ |
| $I_p$ | $2x10^{-3}$ |
| $m$   | 0.1         |
| $g$   | 9.81        |

Matrices del sistema

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}$$

$$M_{11}(q) = I_p + ml^2$$

$$M_{12}(q) = -mrl\cos(q_1)$$

$$M_{21}(q) = -mrl\cos(q_1)$$

$$M_{22}(q) = I_b + mr^2 + (I_p + ml^2)\text{sen}^2(q_1)$$

$$C_{11}(q) = 0$$

$$C_{12}(q) = -(I_p + ml^2)\dot{q}_2\text{sen}(q_1)\cos(q_1)$$

$$C_{21}(q) = -mrl\dot{q}_1\text{sen}(q_1)$$

$$C_{22}(q) = 2(I_p + ml^2)\text{sen}(q_1)\cos(q_1)$$

$$g_1(q) = -mgl\text{sen}(q_1)$$

$$g_2(q) = 0$$

Tabla C.2:

| Parametros del modelo de Fricción<br>primera articulación |        |
|---|--------|
| $\sigma_2$  | 0.0013 |
| $\sigma_1$  | 0.001  |
| $\sigma_0$  | 0.001  |
| $a_2$   | 0.01   |

Tabla C.3:

| Parametros del modelo de Fricción<br>segunda articulación |        |
|---|--------|
| $\sigma_2$  | 0.0013 |
| $\sigma_1$  | 0.001  |
| $\sigma_0$  | 0.001  |
| $a_2$   | 0.05   |

## Apéndice D

### Artículos

- [1 ] C. Cornejo and L. Alvarez-Icaza. Passivity based control of under-actuated mechanical systems with nonlinear dynamic friction. Accepted for publication in Journal of Vibration and Control. 2010.
- [2 ] C. Cornejo y L. Alvarez-Icaza. Control basado en pasividad de un doble péndulo subactuado con efectos de fricción dinámicos. Research in Computing Science. Vol. 36, pp. 179-188. 2008. ISSN 1870-4069.
- [3 ] C. Cornejo y L. Alvarez-Icaza, Control basado en pasividad de un doble péndulo subactuado con efectos de fricción dinámicos, Congreso de la Asociación de México de Control Automático 2008.
- [4 ] C. Cornejo and L. Alvarez-Icaza, A nonlinear friction model for the passivity-based control of underactuated mechanical systems, Proceedings of the 46th Conference on Decision on Control, 2007.
- [5 ] C. Cornejo and L. Alvarez-Icaza, Vibration control of a building with magneto-rheological-dampers based on interconnection and damping assignment. Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. 2006.
- [6 ] C. Cornejo and L. Alvarez-Icaza, Passivity based control of a seismically excited building, Proceedings of the 16th IFAC World Congress, 2005.
- [7 ] C. Cornejo y L. Alvarez-Icaza, Control basado en pasividad de un edificio con amortiguadores magneto-reológicos, Congreso de la Asociación de México de Control Automático 2005.