



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**Análisis acústico del efecto “Cola de Quetzal”
en “El Castillo” de Chichén Itzá, Yucatán**

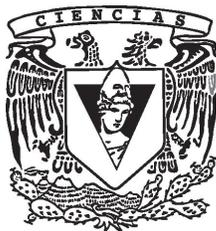
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A:

Adrián Tonatiuh Ruiz Ruiz



DIRECTOR DE TESIS:

Fis. Alejandro Ramos Amézquita

2009



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DATOS DEL JURADO

Datos del alumno

Ruiz
Ruiz
Adrián Tonatiuh
56773834
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Físico
401047989

Datos del tutor

Fis
Alejandro
Ramos
Amézquita

Datos del sinodal 1

Dr
Pablo
Padilla
Longoria

Datos del sinodal 2

Dr
Felipe
Orduña
Bustamante

Datos del sinodal 3

Dr
Pablo
Rendón
Garrido

Datos del sinodal 4

Dr
Marcos
Ley
Koo

Datos del trabajo escrito

Análisis acústico del efecto “Cola de Quetzal” en “El Castillo” de Chichén Itzá, Yucatán
166p.
2010



A mis padres Isabel y Jesús

A mi hermano Mauricio

A mi mujer Tania

por su incesante apoyo e inmenso amor.

ÍNDICE

RESUMEN	1
1 INTRODUCCIÓN	3
1.1 ARQUEOACÚSTICA	3
1.2 ARQUEOACÚSTICA EN MÉXICO	5
1.3 EL SONIDO EN LA CULTURA MESOAMERICANA	5
1.4 EFECTOS ACÚSTICOS EN CHICHÉN ITZÁ	6
1.5 INTENCIONALIDAD EN LA “COLA DE QUETZAL”	8
1.6 CARACTERÍSTICAS SONORAS DE LA “COLA DE QUETZAL”	9
1.7 RESUMEN DE LOS TRABAJOS ACÚSTICOS Y PROBLEMÁTICA	10
2 MARCO TEÓRICO	15
2.1 FÍSICA ONDULATORIA	15
2.1.1 <i>Onda</i>	15
2.1.2 <i>Representación General y la Ecuación de Onda</i>	15
2.1.3 <i>Principio de Superposición</i>	17
2.1.4 <i>Ondas armónicas y sus propiedades</i>	17
2.1.5 <i>Frente de onda</i>	19
2.1.6 <i>Onda Plana</i>	20
2.1.7 <i>Onda esférica</i>	20
2.2 ACÚSTICA	21
2.2.1 <i>Ondas acústicas</i>	21
2.2.2 <i>Intensidad y sus escalas de medición</i>	22
2.3 DIFRACCIÓN	24
2.3.1 <i>Interferencia de dos ondas armónicas</i>	24
2.3.2 <i>Arreglo de fuentes puntuales</i>	25
2.3.3 <i>Arreglo Lineal de N fuentes puntuales</i>	26
2.3.4 <i>Ley de Bragg</i>	30
2.3.5 <i>Red de difracción</i>	31
2.3.6 <i>Difracción de una superficie periódica</i>	32
2.3.7 <i>Difracción de Rayleigh para superficies periódicas</i>	33
2.3.8 <i>Teorías posteriores a la teoría de Rayleigh</i>	36

2.4	ANÁLISIS DE FOURIER	38
2.4.1	<i>Funciones Periódicas</i>	38
2.4.2	<i>Series de Fourier</i>	39
2.4.3	<i>Transformada de Fourier</i>	39
2.4.4	<i>Transformada de Fourier de un paquete de ondas gaussiano</i>	41
2.4.5	<i>Principio de incertidumbre</i>	42
2.5	PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES	43
2.5.1	<i>Señales</i>	43
2.5.2	<i>Audio digital</i>	43
2.5.3	<i>Rango dinámico</i>	45
2.5.4	<i>Teorema del Muestreo y el fenómeno de Aliasing</i>	46
2.5.5	<i>Transformada Discreta de Fourier (DFT)</i>	46
2.5.6	<i>Señales No Estacionarias: Barrido de Frecuencias</i>	47
2.5.7	<i>Espectrograma</i>	47
3	ANTECEDENTES	51
3.1	MODELO BASADO EN LAS REDES DE DIFRACCIÓN	51
3.1.1	<i>Redes de difracción y la Difracción de Bragg</i>	52
3.1.2	<i>Calculo de las frecuencias iniciales y finales</i>	53
3.2	MODELO BASADO EN LA DIFRACCIÓN DE RAYLEIGH	54
3.2.1	<i>Teoría de Difracción de Declercq et al. y su aplicación a la “Cola de Quetzal”</i>	54
3.2.2	<i>Curvas de Difracción de Bragg</i>	57
3.2.3	<i>Simulaciones generadas y grabaciones de campo</i>	58
3.2.4	<i>Análisis y Conclusiones</i>	60
3.3	MODELO BASADO EN EL FENÓMENO DE “TONO POR REPETICIÓN”	62
3.3.1	<i>Desarrollo Teórico</i>	63
3.3.2	<i>Resultados y Conclusiones</i>	65
3.4	DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.....	67
4	DESARROLLO TEÓRICO	69
4.1	OBJETIVOS.....	70
4.2	ASPECTOS GEOMÉTRICOS	70
4.2.1	<i>Rotación de los ejes</i>	72
4.2.2	<i>Dimensiones de “El Castillo” y posición de la fuente</i>	74
4.3	COMPARACIÓN DE LAS CURVAS PARA EL BARRIDO DE FRECUENCIAS	76
4.3.1	<i>Curvas derivadas de la Ecuación de Red</i>	77

4.3.2	<i>Curvas de Difracción de Bragg según Declercq et al.</i>	79
4.3.3	<i>Curvas derivadas de la teoría de Tono por Repetición</i>	81
4.3.4	<i>Resultados: Gráfica de las curvas para el barrido de frecuencias</i>	83
4.3.5	<i>Análisis: Comparación de La Diferencia de Camino</i>	86
4.3.6	<i>El Barrido de frecuencias en relación con las dimensiones de la escalinata</i>	88
4.4	PROPOSICIÓN DEL MODELO.....	91
4.4.1	<i>Evaluación del modelo de Declercq et al.</i>	93
4.4.2	<i>Modelo basado en un arreglo lineal N de fuentes puntuales</i>	95
4.4.3	<i>Modelo de N fuentes puntuales y la Ley de Bragg</i>	97
4.5	CONCLUSIONES.....	100
5	DESARROLLO EXPERIMENTAL.....	103
5.1	OBJETIVOS.....	104
5.2	PULSOS GAUSSIANOS	104
5.3	MÉTODO	106
5.3.1	<i>Obtención de las grabaciones</i>	106
5.3.2	<i>Serie de Pulsos Gaussianos</i>	108
5.3.3	<i>Programa de Cómputo</i>	109
5.3.4	<i>Simulaciones a partir del modelo de N fuentes puntuales</i>	109
5.3.5	<i>Aspectos técnicos de los espectrogramas</i>	111
5.4	RESULTADOS.....	113
5.4.1	<i>Estimación de la velocidad del sonido y tiempo de emisión</i>	114
5.4.2	<i>Espectrogramas de las grabaciones y simulaciones</i>	115
5.5	ANÁLISIS.....	124
5.5.1	<i>Curvas para el barrido de frecuencias</i>	124
5.5.2	<i>Observaciones generales de las grabaciones</i>	125
5.5.3	<i>Respuesta acústica al pulso</i>	127
5.5.4	<i>Comparación de las grabaciones con las simulaciones</i>	129
5.5.5	<i>Influencia del suelo en el eco barrido</i>	130
5.6	CONCLUSIONES.....	131
6	CONCLUSIONES GENERALES	133
7	APÉNDICES	136
7.1	136
7.2	137
7.3	138

7.4	140
8 ANEXOS.....	144
8.1 NÚMEROS COMPLEJOS	144
8.2 ONDAS PLANAS INHOMOGENEAS	144
8.3 CONDICIONES DE FRONTERA.....	145
8.4 SERIE DE FOURIER DE UNA ONDA TRIANGULAR	146
9 BIBLIOGRAFÍA GENERAL.....	147
10 ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS.....	153
10.1 FIGURAS	153
10.2 TABLAS.....	154

RESUMEN

La Arqueoacústica es una nueva interdisciplina que surge del interés y la necesidad de rescatar y estudiar el papel del sonido en las diferentes culturas. El objeto de estudio de la tesis, es un efecto acústico conocido como la “Cola de Quetzal” y tiene como lugar “El Castillo” de Chichén Itzá, Yucatán. Cuando una persona aplaude frente a una de las escalinatas reconstruidas, el eco producido suena muy parecido al canto de un quetzal. Acústicamente, el sonido creado por el efecto “Cola de Quetzal” consiste básicamente en un barrido de frecuencias descendiente. Sobre el mecanismo físico que lo origina se han propuesto principalmente tres modelos, estos son, el modelo de D. Lubman basada en las redes de difracción de Bragg (Lubman 1998a;1998b;1998c), el modelo de Declercq *et al.* (Declercq *et al.* 2004a) basado en una teoría derivada de la Difracción de Rayleigh (Rayleigh 1907); y finalmente, el modelo de Frans A. Bilsen (Bilsen 2006a;2006b) basado en el fenómeno psicoacústico de Tono por Repetición (*Repetition Pitch*).

De manera general, los objetivos de esta tesis son el de analizar y revisar los modelos propuestos, formular un modelo que reproduzca el eco barrido y estudiar la respuesta del efecto acústico a diferentes fuentes sonoras. Para esto se desarrollo una parte teórica y una experimental.

En la parte teórica, para cada modelo, según sus principios físicos, se reformularon las ecuaciones o curvas que describen temporalmente el barrido de frecuencias. Se encontró que bajo ciertas condiciones generales, en principio los tres modelos describen las mismas curvas. Esta comparación permitió encontrar un error teórico de carácter temporal en el trabajo de Declercq *et al.*

Posteriormente se propuso un modelo alternativo para simular el efecto acústico. Este modelo está basado en un arreglo lineal de N fuentes puntuales y es una continuación del modelo de Tono por Repetición, pero también está relacionado con la difracción. Así mismo se explicaron las causas por las cuales el modelo de Declercq *et al.* tiene deficiencias para simular el efecto acústico.

En la parte experimental se analizó acústicamente el eco generado por diferentes fuentes sonoras y se evaluó la capacidad de predicción del modelo propuesto. Los archivos de audio con los que se trabajo fueron obtenidos durante una sesión de grabaciones realizadas en “El Castillo”

de Chichén Itzá bajo permiso del INAH. En esta sesión se reprodujo frente a la escalinata mediante un altavoz una serie de pulsos gaussianos con diferentes características en su espectro y duración.

Analizando las grabaciones mediante espectrogramas, se encontró la relación entre la el eco generado y las características espectrales del pulso gaussiano emitido. A grandes rasgos el eco producido se conforma por las partes del barrido que se encuentran dentro de la distribución espectral del pulso. Se encontró también que si la distribución espectral se encuentra debajo de cierta frecuencia determinada por las dimensiones de los escalones, la respuesta consiste en ecos o reflexiones simples; por arriba de tal umbral el pulso es dispersado temporalmente debido a un fenómeno de difracción. Mediante este análisis se encontraron las condiciones necesarias en el espectro del pulso, para que la dispersión temporal derive en un barrido de frecuencias bien definido.

En cuanto al modelo propuesto de N fuentes puntuales, se encontró que para todos los pulsos, las simulaciones del modelo pueden describir las características más generales del eco barrido. Esto confirma que el mecanismo principal que produce el barrido de frecuencias está relacionado directamente con la difracción. La comparación de las simulaciones mostró que en las grabaciones actúan más factores físicos que no son considerados en el modelo. No obstante con un ejemplo donde se agrega la influencia del suelo, se muestra que el modelo propuesto es perfectible.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 ARQUEOACÚSTICA

Hoy en día, en muchos sitios arqueológicos como plazas, edificios y recintos cerrados, se pueden encontrar una gran cantidad de efectos acústicos que han sobrevivido al paso del tiempo.

A pesar de que arqueológicamente algunos sitios han sido bien estudiados y son comprendidos cada vez más, existen muchos elementos como por ejemplo los fenómenos acústicos, que todavía se desconocen. La Arqueoacústica¹ es una nueva interdisciplina que surge del interés, y en cierto modo de la necesidad, de rescatar y estudiar el legado acústico que se encuentra en cada sitio.

El estudio de los vestigios sonoros no surge como respuesta a una simple curiosidad, sino a la necesidad de comprender a fondo las culturas antiguas. Este es el punto de unión de la Arqueoacústica con otras disciplinas (como la Etnomusicología, Musicología y la Arqueomusicología) que abordan el papel del sonido en las culturas.

Para poder descubrir la relación que tenía un sonido o un efecto acústico con el lugar de estudio, es indispensable determinar si hubo una intención de hacer uso de dicho sonido. Llegar a determinar hoy en día alguna intencionalidad es sumamente difícil, sin embargo se busca proporcionar argumentos cada vez más sólidos y precisos. La incorporación de herramientas tanto físicas como matemáticas, puede ayudar en gran medida a alcanzar los objetivos propuestos. Este es el punto donde la Arqueoacústica adquiere un carácter interdisciplinario.

Como se acaba de mencionar, uno de los objetivos más importantes de la Arqueoacústica es el establecimiento de cierto nivel de intencionalidad. A grandes rasgos la intencionalidad se puede separar en 3 categorías (Scarre 2006):

- *Intencionalidad total.*- Implica que desde la planificación del recinto se haya tomado en cuenta la acústica generada por el mismo. Un buen ejemplo de esta categoría son los

¹ El nombre de esta disciplina es tomado del libro homónimo (Scarre & Lawson 2006).

teatros Greco-Romanos. Es sabido que los griegos tenían un interés por los fenómenos acústicos; en los escritos de Plinio El Viejo (Siglo IV A.C.), hay muestras del entendimiento y comprensión a cierto nivel de los fenómenos acústicos como la dispersión, la reflexión y absorción del sonido. Sin embargo, no es hasta los tratados de *Arquitectura* de Marco Vitrubio en el Siglo I A.C. que se tiene el primer documento que conecta explícitamente estos conocimientos con la arquitectura de los teatros Greco-Romanos. La forma en que sus conocimientos acústicos fueron aplicados en la construcción de estos teatros todavía es campo fértil para la investigación. El fenómeno acústico más importante en los teatros Greco-Romanos es el de la reflexión del sonido por la superficie de la *orchestra*, el lugar donde el coro cantaba y danzaba, el cual está comprobado que incrementa de 42 metros a 60 metros la distancia máxima en el que el habla es inteligible (Rocconi 2006).

- *Intencionalidad media.*- Consiste en el uso de las cualidades o efectos acústicos que fueron encontradas posteriormente de la construcción del edificio. El aprovechamiento de estos efectos acústicos puede derivar en adaptaciones en la arquitectura del lugar. Un ejemplo de esta categoría podría ser el templo de Chavín de Huántar en Perú. Dentro del templo se encuentra una intrincada red de acueductos y ductos de respiración, que al parecer exceden en cantidad las necesidades estructurales del edificio. Se ha propuesto que fueron diseñadas o construidas también con un propósito acústico, cuando el agua fluye por los recovecos de los ductos, el sonido provocado es proyectado y magnificado hacia plazas y terrazas inferiores, produciéndose así un sonido estruendoso (Burger 1992).
- *Intencionalidad nula.*- Por último está el caso en el que no existe intención alguna. Es decir, que la presencia de algún fenómeno acústico es únicamente una casualidad. Existe la posibilidad de que dicho efecto ni siquiera haya sido notado por la gente que construyó o hizo uso de tal edificio. Por ejemplo la gran cúpula de la Catedral de St's Paul en Londres, es conocida como la *galería de los susurros*; aquí, una persona susurrando frente a la pared puede ser escuchada del otro lado de la cúpula de 42 metros de longitud. Sin embargo, este efecto acústico nunca fue pensado en el diseño y construcción de la bóveda, además no existen indicios o pruebas de haber sido utilizado en algún acto ceremonial (Downes 1988; Scarre 2006).

Es importante recalcar que la categorización previa es simplemente una guía y no busca ser determinante. Las fronteras entre una y otra categoría son muy difusas, por lo que algunas veces es difícil determinar exactamente a qué categoría pertenece cada caso.

1.2 ARQUEOACÚSTICA EN MÉXICO

En México existen una gran cantidad de sitios arqueológicos que han sido estudiados durante varios años. Gracias a estos estudios se ha logrado conocer más acerca de las culturas que los edificaron en aspectos culturales, artísticos, religiosos, y arquitectónicos. La cantidad de sitios arqueológicos que presentan algún efecto acústico es grande, lugares como Tulum, Teotihuacán, Palenque, Uxmal, y Chichén Itzá, no son la excepción. No obstante estos sitios no han sido estudiados desde un enfoque que incluya también una perspectiva sonora.

En los últimos años se han realizado algunas investigaciones con este enfoque, por ejemplo la investigación realizada por Roberto Velázquez sobre silbatos en forma de rana, encontrados en templos de la Pequeña Acrópolis de Yaxchilán (Velázquez 2002b;2002a) y el trabajo de Francisca Zalaquett en Palenque acerca de cuartos, templos, instrumentos musicales y la plaza misma (del grupo Norte). En este estudio se lograron identificar los lugares que favorecían la interpretación de instrumentos, o cualquier actividad que necesitara una acústica específica (Zalaquett Rock 2006). Un revisión más detallada y específica de efectos acústicos en la zona maya, incluyendo los citados previamente, se puede encontrar en el trabajo de C. Garza *et al* (Garza *et al.* 2008).

1.3 EL SONIDO EN LA CULTURA MESOAMERICANA

El papel del sonido en las culturas mesoamericanas se encuentra reflejado en diversas fuentes arqueológicas e históricas. Es conocido que la música formaba parte importante en ritos y actos ceremoniales. Un ejemplo de su importancia se encuentra en una breve nota de fray Alonso de Ciudad Real, en esta se relata el final fatídico que conllevó para un músico una ejecución musical equívoca (Ruz 1995; Garza *et al.* 2008). En estas culturas los aspectos relacionados con el sonido son destacables y van más allá de las representaciones escénicas. El ejemplo más característico se encuentra en las representaciones pictográficas del sonido, es decir, las vírgulas o volutas (véase la Figura 1.1). Esta iconografía representa un tipo de comunicación sinestésica (la liberación de una sensación a través de otra) que es poco frecuente en otras culturas del mundo (Houston & Taube 2000). Dentro de la pictografía maya se encuentran casos destacables de representaciones de efectos acústicos, como por ejemplo en la Figura 1.2 se muestra una escena sobre un juego de pelota donde el artista, por medio de vírgulas, posiblemente esté representado ecos o sonidos vibrantes. Cabe aludir que en El Gran Juego de Pelota de Chichén Itzá, además de generarse efectos acústicos peculiares, en todo el arte que decora el edificio se encuentra una copiosa cantidad de volutas (Marquina 1964).

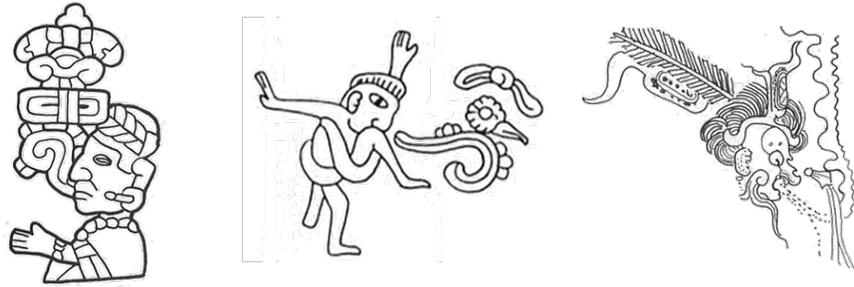


FIGURA 1.1 EJEMPLOS DE VÍRGULAS O VOLUTAS DE LAS CULTURAS MESOAMERICANAS

a) Figura de la cultura Zapoteca b) Figura de un danzante en el mural de Tepantitla, Teotihuacán c) Dios Chac “rugiendo”, arte del Clásico Maya .Ilustraciones extraídas de (Houston & Taube 2000)



FIGURA 1.2 REPRESENTACIÓN DEL JUEGO DE PELOTA.

Vasija maya de Guatemala, periodo Postclásico (600-909 D.C.), policromado, 23 x 17.7cm. Colección del Saint Louis Art Museum (Museum 2009). Fotografía de Justin Kerr (K5435) (Kerr 2004)

1.4 EFECTOS ACÚSTICOS EN CHICHÉN ITZÁ

Chichén Itzá se destaca no sólo por ser una de las ciudades más importantes del mundo maya, sino también por la cantidad de efectos acústicos encontrados. Los más conocidos están relacionados con “El Castillo” y el Gran Juego de Pelota. En este último se encuentran dos efectos acústicos importantes. El primero consiste en una amplificación sonora que permite la comunicación hablada entre el templete norte y el templete sur, a pesar de la enorme separación entre estos de más de 160m (Marquina 1964; Ramos Amézquita *et al.* 2009). El segundo efecto acústico se trata de un “eco batiente”, denominado así por su semejanza con el sonido de una ave

al batir sus alas (Lubman 2006b;2006a). Cuando una persona aplaude entre las paredes laterales de este juego de pelota, se produce un sonido de larga duración compuesto por muchas reflexiones sonoras consecutivas. La acústica peculiar del Gran Juego de Pelota se debe principalmente a sus paredes laterales, estas estructuras por su gran altura (8m) y longitud (95m), son las que diferencian a este juego de pelota de los demás de Mesoamérica (Marquina 1964).



FIGURA 1.3 EL CASTILLO DE CHICHEN ITZÁ ACTUALMENTE

En “El Castillo” o Templo de Kukulcán (Figura 1.3) se encuentra el efecto acústico más conocido y estudiado de Chichén Itzá y México. Cuando una persona aplaude frente a una de las escalinatas reconstruidas, el sonido producido no se escucha como un eco sencillo, sino que se escucha como el canto de un quetzal (Lubman 1998c; Garza *et al.* 2008). Este efecto acústico es conocido localmente como la “Cola de Quetzal” (Ouellette 1999; Garza *et al.* 2008), y también es referido como “eco barrido” (*chirped echo*), ya que acústicamente consiste en un barrido de frecuencias (Lubman 1998c; Declercq *et al.* 2004a).

Además de la “Cola de Quetzal” en “El Castillo” se producen otros dos efectos acústicos. El primero de ellos consiste en un sonido que asemeja a la caída de gotas sobre agua, y es producido por las pisadas de una persona recorriendo las escalinatas. Este sonido sólo puede ser percibido por una persona que se encuentre sobre la escalinata alejada del sujeto que produce las pisadas. Este efecto ha sido nombrado como el efecto de “Gotas de Lluvia” (Declercq *et al.* 2004a). El segundo efecto acústico se trata de otra amplificación sonora, cuando una persona situada en la plataforma superior de “El Castillo” se comunica de forma hablada, la voz puede ser fácilmente escuchada entre unos 40 a 60 metros de distancia sobre de la plaza circundante (Ramos Amézquita *et al.* 2009).



FIGURA 1.4 DOS DIBUJOS DE EL CASTILLO POR FREDERICK CATHERWOOD (1841)

1.5 INTENCIONALIDAD EN LA “COLA DE QUETZAL”

Alrededor del la “Cola de Quetzal” existen algunos datos que para algunos es más que una simple casualidad. Por ejemplo, el efecto ocurre en un templo que sirvió para rendir culto a Kukulcán, el homólogo maya de la deidad Quetzalcóatl, y cuya representación está asociada con la serpiente emplumada (con plumas que son de quetzal). Además el quetzal (*Pharomachrus mocinno*) fue un ave muy apreciada en las culturas de Mesoamérica, incluso en zonas fuera de su distribución natural, como la región maya Puuc a la que pertenece Chichén Itzá (Gendrop 1997).

El primer trabajo donde se plantea una intencionalidad en el diseño de “El Castillo” para generar la “Cola de Quetzal”, fue presentado por el ingeniero norteamericano D. Lubman (Lubman 1998a;1998c;1998b). Este autor argumenta, que en la cultura Maya los ecos pudieron representar a los espíritus, y que además, el quetzal simbolizaba el espíritu de los Mayas. A través su página de internet, algunos arqueólogos han criticado sus argumentos señalando la falta de evidencia histórica o sustento en otro tipo de fuentes. Aunque no se ha hecho un trabajo exhaustivo para descartar o confirmar la hipótesis de D. Lubman, su trabajo ha derivado en una serie de estudios sobre la acústica que genera el “eco barrido” (Declercq *et al.* 2004a; Bilsen 2006b).

Cabe mencionar que en los sitios arqueológicos Mesoamericanos, la presencia de un “eco barrido” es una situación muy común. Como ejemplos están “El Osario” en Chichén Itzá, el Templo del Adivino en Uxmal (Garza *et al.* 2008), la Tumba de Pakal y “El Duque” en Palenque (Ramos Amézquita *et al.* 2009), y el Templo de las Máscaras en Tikal (observación personal). El hecho de que este efecto acústico también esté presente en la escalinata del “Templo de Quetzalcóatl” en Teotihuacán, donde el quetzal también juega un papel simbólico fundamental, presenta la posibilidad de la existencia de una relación explícita entre las construcciones donde se presenta tal efecto y su función religiosa (Ramos Amézquita *et al.* 2009). Estos hechos infieren que

posiblemente la “Cola de Quetzal” sea sólo parte de un fenómeno mucho más general, en el que posiblemente el uso acústico de las escalinatas fuera una práctica común entre las culturas de Mesoamérica.

1.6 CARACTERÍSTICAS SONORAS DE LA “COLA DE QUETZAL”

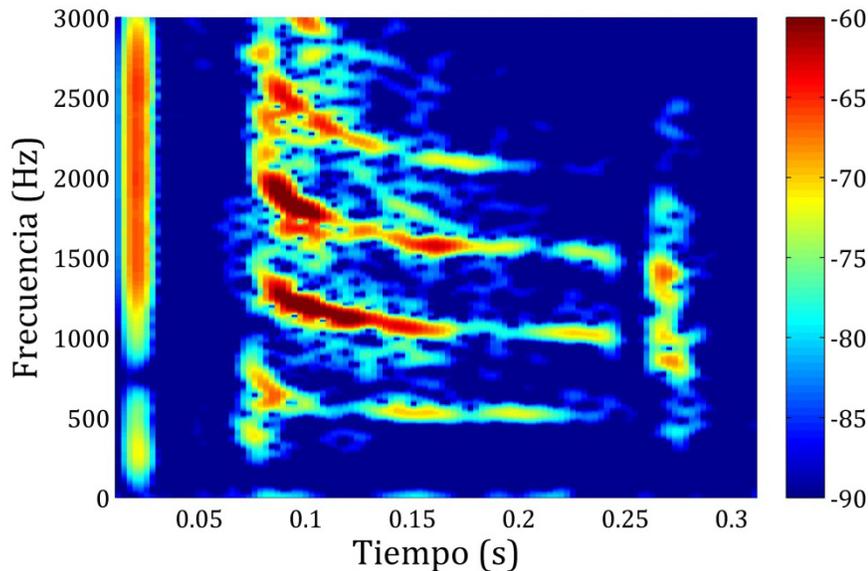


FIGURA 1.5 ESPECTROGRAMA DE LA “COLA DE QUETZAL”

Un espectrograma o sonograma es una gráfica que muestra la evolución de las componentes frecuenciales del sonido (eje vertical) conforme avanza el tiempo (eje horizontal). La amplitud relativa de cada componente en un cierto instante se indica por medio de una paleta de colores (ver extremo derecho).

Acústicamente, el efecto de la “Cola de Quetzal” consiste en un barrido de frecuencias en forma descendiente y por esto se refiere al efecto como un *eco barrido* (*chirped echo*²) (Lubman 1998a;1998b). En acústica un barrido de frecuencias consiste en un sonido tal que las frecuencias que componen su espectro ascienden o descienden continuamente a través del tiempo (véase la Sección 2.5.6). En específico, la “Cola de Quetzal” no se constituye por un barrido simple sino que presenta varios armónicos (véase la Figura 1.5) siendo el segundo el de mayor presencia (Lubman 1998c). Para una persona aplaudiendo a unos 10m de la base de la escalinata, la duración del eco barrido es de unos 200ms aproximadamente (Lubman 1998b; Bilsen 2006b). Durante este tiempo

² La traducción de *chirp* al español es chirrido, pero en muchos textos en inglés se utiliza esta palabra también para referirse a barridos de frecuencias. (Oppenheim et al. 1996; Oppenheim et al. 1999; Smith 2009)

se calcula que la fundamental (o primer armónico) desciende desde los 796Hz a los 471Hz (Bilsen 2006b).

1.7 RESUMEN DE LOS TRABAJOS ACÚSTICOS Y PROBLEMÁTICA

El efecto “Cola de Quetzal” ha sido objeto de estudio de varias investigaciones, en la mayoría de estos trabajos se estudia este efecto desde la perspectiva acústica y se proponen mecanismos físicos por los cuales se genera el eco barrido. Entre los trabajos más importantes acústicamente están los realizados por David Lubman, Nico F. Declercq y Frans A. Bilsen. A continuación se muestra un sumario de los trabajos acústicos realizados.

El primer trabajo acústico sobre la “Cola de Quetzal” fue elaborado por el ingeniero americano David Lubman en 1998, presentado en una conferencia impartida en un congreso de la Sociedad Americana de Acústica (ASA) (Lubman 1998a). En este trabajo además de plantearse por primera vez una posible intencionalidad para el fenómeno, también se planteó una primera explicación física de este. Se propone que la estructura periódica de la escalinata de “El Castillo”, actúa como una red de difracción de Bragg al interactuar con el campo sonoro del aplauso. Dicha interacción provoca una “dispersión temporal” que retrasa las frecuencias bajas del eco, lo cual genera un barrido de frecuencias. En general sus planteamientos son desarrollados de manera heurística por lo que no se demuestran rigurosamente. Aunque sus trabajos son referenciados por muchos autores, sólo se pueden encontrar transcripciones de algunas presentaciones en la internet (Lubman 1998c;1998b;2006a). Hasta el momento este autor no ha publicado sobre el tema en ninguna revista científica indexada, pero se pueden encontrar algunos artículos de divulgación en revistas impresas y electrónicas (Ouellette 1999; Weiss 1999).

A partir del trabajo de D. Lubman, el efecto de la “Cola de Quetzal” ha sido abordado por varios investigadores. En el 2002 en un congreso panamericano de la ASA en Cancún, se realizó una sesión en la que varios expositores mexicanos y de otros países expusieron sobre este efecto acústico (Beristain *et al.* 2002; Carrera & Beristain 2002; Elizondo-Garza 2002; Kirk 2002; Lubman 2002). Desafortunadamente del contenido de estos trabajos no se cuenta con referencias bibliográficas.

A partir de la sesión mencionada, el físico belga Nico F. Declercq, un especialista en difracción de ultrasonido, junto con sus colaboradores realizaron trabajos con el fin de determinar el mecanismo físico que genera el eco barrido (Declercq *et al.* 2003b; Ball 2004; Declercq *et al.* 2004a; Declercq 2005). Para esto utilizaron una teoría basada en la difracción de Rayleigh

(Rayleigh 1907), formulada específicamente para superficies periódicas con condiciones de frontera del tipo fluido-sólido (Declercq *et al.* 2004b; Declercq 2005). En su publicación principal (Declercq *et al.* 2004a), aplicando esta teoría a la geometría y los materiales de construcción de “El Castillo”, Declercq *et al.* elaboraron simulaciones por computadora del efecto acústico que se produce frente a la escalinata. Por otro lado, se formularon de acuerdo con la Difracción de Bragg unas curvas para describir temporalmente la evolución de los armónicos en el eco barrido. Mediante el uso de espectrogramas, las curvas junto con las simulaciones fueron comparadas con una grabación de campo del efecto acústico provista por D. Lubman. Como resultado de su análisis comparativo se concluyó que la “Cola de Quetzal” es generada por un proceso conectado a la Difracción Bragg, pero que también es considerable la presencia de otros efectos acústicos. Cabe mencionar que se encontraron en el espectrograma del eco barrido grabado patrones que no fueron reproducidos y cuyo origen se determinó desconocido. Se concluyó también que hay una fuerte dependencia del efecto acústico con el sonido que sirve como fuente, y por otro lado, que las reflexiones sonoras por el suelo no influyen en la distribución de frecuencias del eco barrido.

De manera adicional al análisis sobre la “Cola del Quetzal”, se presentó una explicación al efecto de “gotas de lluvia” mencionado anteriormente (Declercq *et al.* 2004a). Para esto se emplea también la misma teoría de difracción, de esta manera se establece teóricamente una conexión entre ambos efectos.

Considerando que el modelo de Declercq *et al.* no reproduce satisfactoriamente la “Cola del Quetzal”, el psicofísico holandés Frans A. Bilsen propuso un modelo alternativo basado en el fenómeno psicoacústico de Tono por Repetición (*Repetition Pitch* en inglés), que consiste en la percepción de un tono por el escucha cuando se combinan un sonido con su repetición retrasada (Bilsen 2004;2006a). El tono percibido está relacionado con las frecuencias que son reforzadas en el sonido compuesto y estas son los múltiplos de la frecuencia $1/\tau$, donde τ es el tiempo de retraso. En el modelo de Bilsen (Bilsen 2006b) se considera que el eco barrido se compone por una serie de repeticiones sonoras originadas por la reflexión de cada escalón. Con un desarrollo sencillo Bilsen formula unas curvas para describir las frecuencias que componen al eco barrido en función del tiempo. Para esto calcula el tiempo de arribo de cada reflexión y las frecuencias reforzadas según el tiempo de retardo entre cada par de reflexiones sucesivas. Para cotejar estas curvas con las medidas experimentales, se graficaron dichas curvas sobre un espectrograma del eco barrido. Como resultado se obtuvo que las curvas se ajustaron con los patrones del eco

barrido en el espectrograma, incluyéndose así también aquellos patrones que Declercq *et al.* consideran como de origen desconocido.

Posteriormente al artículo de Bilsen, se han presentado trabajos acústicos por otros autores únicamente en congresos. Unos de ellos es un método computacional para simular ambientes acústicos de edificios y fue aplicado a la estructura de “El Castillo” (Tsingos *et al.* 2007). Los otros dos consisten en métodos para simular el eco barrido (Cruz Calleja 2008; Lubman 2008). Cabe agregar que desde el punto físico, los últimos dos métodos mencionados están basados o relacionados con la propuesta de Bilsen.

Los trabajos hechos por D. Lubman, Declercq *et al.* y F. Bilsen proponen modelos o mecanismos físicos diferentes por el cual se genera el eco barrido. En relación a cuál es el modelo que reproduce satisfactoriamente el eco barrido la respuesta no es clara. Los modelos mencionados no pueden ser comparados o evaluados de manera directa ya que estos fueron desarrollados a diferentes niveles. El modelo de Declercq *et al.* es el más avanzado pues con este se pueden producir simulaciones del sonido generado por la escalinata. Además, desde el punto de vista físico es el más completo ya que incluso considera la influencia de los materiales en el efecto. A pesar de esto hay componentes del eco barrido grabado que su modelo no logra reproducir. En cambio, Bilsen con un modelo menos riguroso en sus fundamentos logra determinar la frecuencia de estas componentes. No obstante el modelo de Bilsen no fue desarrollado lo suficiente como para poder generar simulaciones y de esta manera ser comparadas, ya sea con las simulaciones de otros modelos, o con grabaciones del efecto acústico.

En relación a las medidas experimentales, hay una carencia de estas pues en los trabajos mencionados se trabaja con una única grabación del eco barrido tomada por D. Lubman, la cual es de mala calidad ya que tiene una relación señal-ruido muy pobre. En su artículo Declercq *et al.*, hacen invitaciones a realizar experimentos tanto para analizar la influencia del suelo, como el comportamiento del efecto acústico con diferentes fuentes sonoras. Cabe mencionar que hasta el momento sólo se ha estudiado a la “Cola de Quetzal” considerando como fuente sonora el aplauso y una Delta de Dirac que es la representación matemática de un pulso ideal.

De manera general, los objetivos de esta tesis son el de analizar los modelos propuestos, formular un modelo que reproduzca el eco barrido y estudiar la respuesta del efecto acústico a diferentes fuentes sonoras. Para esto se desarrollo una parte teórica y una experimental. En la parte teórica (Capítulo 4), fueron revisados y analizados los modelos anteriormente mencionados

y como resultado se propone un modelo alternativo para simular el sonido del eco barrido. En la parte experimental (Capítulo 5), se compararon las simulaciones generadas por el modelo propuesto, con nuevas grabaciones del efecto acústico realizadas en 2008. Asimismo, se analizó acústicamente la respuesta a diferentes fuentes sonoras y se evaluó la capacidad de predicción del modelo propuesto.

Al ser ésta una tesis de Física, sus objetivos no se centran en comprobar una intencionalidad en el efecto de la “Cola de Quetzal”, sino en realizar un estudio acústico del fenómeno. Sin embargo, de los resultados de esta tesis se pueden crear en un futuro, herramientas o procedimientos de análisis acústico, que aplicados junto con un estudio arqueológico profundo, contribuyan a descartar o confirmar no sólo la hipótesis de intencionalidad relacionada a la “Cola de Quetzal”, sino cualquier hipótesis en la que se plantee el uso acústico de una estructura escalonada.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

En esta tesis se abordará al fenómeno sonoro de la “Cola de Quetzal” desde un punto de vista acústico y bajo este enfoque, el fenómeno es el producto de la interacción de una onda sonora con la estructura periódica de la escalinata de “El Castillo”. A continuación se presentan los conceptos físicos y matemáticos relevantes para el estudio, abarcando temas de Física Ondulatoria, Acústica, Difracción, Análisis de Fourier y Procesamiento Digital de Señales.

2.1 FÍSICA ONDULATORIA.

2.1.1 ONDA

Una onda se puede definir como una perturbación autónoma en un medio que se mueve en el espacio transportando energía (Hecht 2000). La perturbación generalmente se entiende como una variación en las propiedades físicas del medio (Blackstock 2000).

Existe una amplia gama de tipos de ondas y se caracterizan según el medio o el tipo de perturbación, por ejemplo, las ondas mecánicas son aquellas que viajan en medios deformables o elásticos como los fluidos, en este caso la perturbación puede ser un cambio de presión o de densidad entre otros. Otro ejemplo es una onda de luz visible que se caracteriza por una variación en el campo electromagnético y se puede propagar por varios medios e incluso en el vacío (Resnick *et al.* 2000a).

Existen dos tipos de onda dependiendo del movimiento de la perturbación. En las *ondas longitudinales* el movimiento de la perturbación es paralelo a la dirección con que se propaga la onda, como ejemplos están las ondas sonoras y las ondas sísmicas P. En las *ondas transversales* el movimiento de la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación, ondas como las electromagnéticas, las de una membrana o una cuerda son de este tipo (Blackstock 2000).

2.1.2 REPRESENTACIÓN GENERAL Y LA ECUACIÓN DE ONDA

Las ondas pueden ser representadas por expresiones matemáticas ya sea de manera explícita o por medio de ecuaciones cuyas soluciones representan la onda.

Para empezar, supóngase que el símbolo ψ representa la perturbación del medio que se quiere estudiar. Como la perturbación esta en movimiento, ésta debe ser una función tanto de la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ como del tiempo t , lo que matemáticamente se expresa como $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$.

El caso más simple es en el que la perturbación depende de una sola coordenada, entonces la perturbación es de la forma $\psi = \psi(x, t)$. Supóngase que $f(x)$ es una función que describe *la forma o el perfil* de la perturbación en un instante, dígase en $t = 0$, entonces $\psi(x, 0) = f(x)$. Si reemplazamos la variable x por $x - a$ donde a es una cantidad positiva, la curva obtenida $\psi = f(x - a)$ tiene la misma forma que $f(x)$ pero esta desplazada hacia la derecha una distancia a . Del mismo modo $\psi = f(x + a)$ corresponde a un desplazamiento de la función hacia la izquierda por una distancia a . Dejando correr el tiempo, como la perturbación se mueve con una velocidad v la distancia que recorre en un tiempo t es igual a vt , entonces se deduce que la perturbación en el instante t es de la forma

$$\psi(x, t) = f(x \mp vt) \quad \text{Ec. 2.1-1}$$

Esta es la representación matemática general de una onda unidimensional, donde $f(x - vt)$ corresponde al caso de una onda que viaja en la dirección positiva del eje x y $f(x + vt)$ en el sentido contrario. La Ec. 2.1-1 también puede ser expresado en función del argumento $(t \pm x/v)$:

$$\psi(x, t) = F\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$$

donde $F(t \pm x/v) = f(-v[t \pm x/v]) = f(x \mp vt)$ (Hecht 2000).

Para garantizar que cierta perturbación del medio se propague convirtiéndose en una onda, la perturbación debe cumplir con la *ecuación de onda*. Esta ecuación se puede obtener a partir de las expresiones matemáticas que describen las propiedades físicas del medio. Un caso sencillo es la oscilación de una cuerda elástica tensada con una fuerza F y que tiene una densidad lineal μ . En este caso la perturbación se trata del desplazamiento vertical de la cuerda, fuera de su posición de equilibrio. Analizando las fuerzas que actúan sobre un tramo de la cuerda, considerando que la amplitud de oscilación es pequeña y despreciando las fuerzas gravitatorias y de fricción, se llega a la ecuación

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{Ec. 2.1-2}$$

Esta es la *ecuación de onda unidimensional* y v representa la velocidad de la onda y para la cuerda tensada $v = \sqrt{F/\mu}$ (Resnick et al. 2000a).

Se puede demostrar que la solución general a la ecuación de onda (unidimensional) es de la forma $\psi = f(x - vt) + g(x + vt)$ donde f y g son funciones que representan una onda que viaja a la derecha y la izquierda respectivamente (Blackstock 2000).

Cuando la perturbación depende completamente de todas las coordenadas entonces debe cumplir con la *ecuación de onda tridimensional*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{Ec. 2.1-3}$$

(Hecht 2000)

2.1.3 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

El Principio de Superposición resuelve el caso en que dos ondas o más interactúan en un mismo punto. Supóngase que las funciones ψ_1 y ψ_2 representan dos ondas diferentes y que son soluciones por separado de la ecuación de onda. Puede demostrarse que la suma de estas funciones $\psi = \psi_1 + \psi_2$ también es solución de la ecuación de onda. Esto se denomina el *Principio de Superposición* que establece que la perturbación resultante en cada punto de la zona de superposición es la suma algebraica de las ondas constituyentes de ese punto (Hecht).

$$\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i \quad \text{Ec. 2.1-4}$$

2.1.4 ONDAS ARMÓNICAS Y SUS PROPIEDADES

Las *ondas armónicas* o *sinusoidales* son las ondas periódicas más simples y como dice su nombre tienen forma de seno o coseno. Adquieren un significado especial ya que cualquier forma de onda compleja se puede sintetizar a través de la suma de estas ondas (Hecht 2000), más adelante se abordará este tema en el Análisis de Fourier.

La forma más general de una onda armónica (unidimensional) es:

$$\psi(x, t) = A \text{sen}(kx - \omega t + \varepsilon) \quad \text{Ec. 2.1-5}$$

Se analizará esta expresión para determinar el papel de las constantes $A, k, \omega, \varepsilon$. Dado que la función seno varía de -1 a $+1$ entonces los valores máximos y mínimos de $\psi(x, t)$ son A y $-A$ respectivamente, por esto se le nombra a la constante A como la *amplitud* de la onda.

Ahora, supóngase que $\varepsilon = 0$ y que se detiene el tiempo en $t = 0$, en este instante la perturbación tiene la forma $\psi(x, 0) = A \text{sen}(kx)$. Entre las crestas o entre los valles de la sinodal estática existe una distancia λ y a este periodo espacial se le conoce como *longitud de onda*. Dado que la función seno no acepta cantidades en unidades físicas como la distancia, el *número de onda* k da la razón de radianes por longitud de onda, con lo que cada λ se completa un ciclo de 2π radianes. Entonces

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Ec. 2.1-6}$$

Si ahora se observa un punto fijo del espacio, $x = 0$, la variación de la perturbación en este punto a través del tiempo es de la forma $\psi(0, t) = A \text{sen}(-\omega t)$, es decir que ψ en ese punto variará cíclicamente, siendo el *periodo temporal* T definido como el tiempo que tarda cada ciclo en completarse. De manera análoga al número de onda, la *frecuencia angular* ω da la razón de radianes por periodo temporal, entonces

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{Ec. 2.1-7}$$

La *frecuencia* f mide el número de ciclos por unidad de tiempo y por lo tanto es el inverso del periodo:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{Ec. 2.1-8}$$

La unidad más empleada son los ciclos por segundo o Hertz (Hz).

Regresando a la representación general, vemos que cuando $x = 0$ y $t = 0$ el valor inicial de la función seno esta dado por la constante ε y por eso se le nombra como la *fase inicial*. La *fase*, denotado por φ , es el argumento completo dentro de la función seno, es decir $\varphi = kx - \omega t + \varepsilon$.

Ahora, dado que durante un periodo temporal T una parte de la onda, digamos una cresta, recorrerá una distancia λ , entonces la velocidad c con que se propaga la onda de la onda será

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad \text{Ec. 2.1-9}$$

Utilizando la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen} \theta$ (véase el Anexo 10.3), se puede obtener la *representación compleja* de una onda armónica unidimensional:

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t + \varepsilon)} \quad \text{Ec. 2.1-10}$$

Aunque solo la parte real de esta representación ($Re(\psi)$) es la que tiene significado físico, por razones prácticas esta representación es la más utilizada.

2.1.5 FRENTE DE ONDA

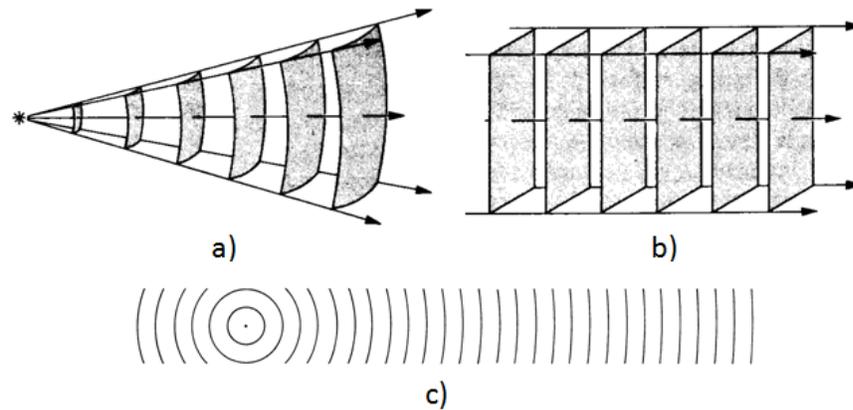


FIGURA 2.1 FRENTE DE ONDAS DE UNA ONDA PLANA Y UNA ESFÉRICA

a) *Onda plana.* Los planos representan frentes de onda espaciados en una longitud de onda, y las flechas representan los rayos. b) *Onda esférica.* Los frentes de onda, espaciados en una longitud de onda, son superficies esféricas y los rayos están en dirección radial. c) *Aplanamiento de un frente de onda esférico con la distancia*

Para una onda en general que se propaga en el espacio, en un instante dado t , los *frentes de onda* son las superficies que une a todos los puntos \mathbf{r} cuya perturbación $\psi(\mathbf{r}, t)$ tiene el mismo valor. La línea que es normal a los frentes de ondas se dice que es un *rayo*.

Los frentes de onda pueden tener muchas formas. En el caso de la piedra arrojada al estanque, en la superficie se producen ondas bidimensionales con frentes de onda circulares y rayos que salen hacia afuera desde el punto de impacto. En cambio, cuando se arroja un palo muy largo horizontalmente al agua se producen perturbaciones que viajan como líneas rectas, y cuyos rayos serían líneas paralelas. La analogía tridimensional, en la cual las perturbaciones viajan en una sola dirección, es la *onda plana*. En un instante dado, las condiciones son las mismas en todas partes de cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. Los frentes de onda son planos y los rayos son líneas rectas paralelas (Figura 1.1b). La analogía tridimensional de las ondas circulares son las *ondas esféricas*. Aquí, la perturbación se propaga hacia afuera en todas direcciones desde una fuente puntual de ondas. Los frentes de onda son esferas, y los rayos son líneas radiales que salen de la fuente puntual en todas direcciones (Figura 1.1a). Lejos de esta fuente de ondas los frentes de

onda esféricas tienen una curvatura muy pequeña, y dentro de una región limitada pueden considerarse a menudo como planos (Figura 1.1c).

2.1.6 ONDA PLANA

La expresión matemática de una *onda plana armónica*, se construye a partir del *vector de onda* \mathbf{k} , el cual apunta en la dirección de propagación de la onda y su magnitud es el número de onda $k = 2\pi/\lambda$, este vector cumple que:

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) \quad \text{Ec. 2.1-11}$$

$$k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad \text{Ec. 2.1-12}$$

Dentro de un eje de coordenadas cartesiano de tres dimensiones, el vector de posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ representa cualquier punto en el espacio. Los puntos pertenecientes a un plano perpendicular al vector de onda son aquellos para los que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \text{constante}$$

De esta manera se construye la expresión matemática de una *onda plana armónica*:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{Ec. 2.1-13}$$

(Hecht 2000)

2.1.7 ONDA ESFÉRICA

En un espacio con coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) una onda esférica originada por una fuente situada en el origen debe depender (espacialmente) sólo del radio r , esto es $\psi(r, \theta, \phi, t) = \psi(r, t)$. Las superficies esféricas con la misma fase son aquellas para los que

$$kr = \text{constante}$$

Entonces la representación matemática de una *onda esférica armónica* es:

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad \text{Ec. 2.1-14}$$

Donde en coordenadas cartesianas $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y la constante A es la *intensidad de la fuente*. Obsérvese que la amplitud de la onda está en función de r de manera que la amplitud

disminuye conforme se aleja de la fuente debido a que las superficies esféricas de fase constante se van expandiendo (Hecht 2000).

La expresión general para una onda esférica es de la forma

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} f\left(t - \frac{r}{v}\right) \quad \text{Ec. 2.1-15}$$

donde la función f representa cualquier perfil de la onda (Blackstock 2000).

2.2 ACÚSTICA

Puede definirse a la Acústica como el estudio de la generación, transmisión, y recepción de energía en la forma de ondas vibratorias en la materia (Kinsler *et al.* 2008). La Acústica es la base de muchos fenómenos fundamentales como la propagación de ondas en sólidos o fluidos, las oscilaciones en cuerdas o en membranas, o también la absorción, transmisión, difracción, dispersión de las ondas acústicas, entre muchos otros. Por sus aplicaciones hoy en día la Acústica es una ciencia interdisciplinaria y está conectada con campos como la ingeniería mecánica y electrónica, la medicina, la psicología, la biología, la arquitectura, la música, entre otros (Kuttruff 2006).

2.2.1 ONDAS ACÚSTICAS

Las ondas acústicas que producen la sensación de sonido, son parte de una variedad de perturbaciones de presión que se pueden propagar a través de un fluido compresible. Las ondas acústicas son ondas longitudinales ya que el movimiento de las partículas es paralelo a la propagación. Por este movimiento, se generan en el fluido zonas de compresión y rarefacción que son propagadas a través del medio gracias a las fuerzas elásticas de restauración del fluido (Kinsler *et al.* 2000).

La ecuación de onda para el sonido es derivada de las ecuaciones de conservación para un fluido. Utilizando la *ecuación de continuidad lineal* y la *ecuación de fuerza no viscosa* para los fluidos, y combinándola con el módulo volumétrico adiabático que da una relación entre la presión del fluido y la densidad de este, se obtiene la siguiente expresión para la presión acústica

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{Ec. 2.2-1}$$

Esta expresión es la *ecuación de onda acústica* donde c es la velocidad del sonido en el fluido y p es una función $p(r, t)$ que describe la *presión acústica* para todo punto del fluido en cualquier

tiempo. La *presión acústica* que se define como la diferencia entre la presión total P y la presión atmosférica o la presión del fluido en equilibrio P_0 , o sea $p = P - P_0$ (Kinsler *et al.* 2008).

Debido a que un cambio de presión afecta directamente otras propiedades del fluido, una onda acústica puede ser representada, además de la presión acústica, por magnitudes como la *condensación* s , la *velocidad de partícula* \mathbf{u} o el *potencial de velocidad* ϕ . Todas estas magnitudes también cumplen la ecuación de onda (Kinsler *et al.* 2008).

La condensación se define como $s = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ donde ρ_0 es la densidad del fluido en equilibrio y ρ la densidad del fluido. La *velocidad de partícula* \mathbf{u} es la velocidad de un *elemento o partícula de fluido* el cual es un “pedazo” de fluido lo suficientemente chico para que el comportamiento individual de las moléculas contenidas en ella no afecte sus propiedades macroscópicas como la densidad, la presión, o la temperatura. El potencial de velocidad es una función tal que $\mathbf{u} = \Delta\phi$ (Blackstock 2000).

La relación entre la presión y la condensación se da por la relación $p = \rho_0 c^2 s$ y la relación entre la presión acústica y la velocidad de partícula se da por medio de la *impedancia acústica específica* z que se define como $z = p/u$. Dependiendo del tipo de onda, la impedancia acústica cambia, siendo para una onda plana $z = \pm\rho_0 c$ y para una onda esférica armónica $z = \rho_0 c kr(kr + i)/(1 + k^2 r^2)$ donde z es un número complejo (Kinsler *et al.* 2008).

Cabe mencionar que el fluido donde se propaga la onda es considerado como homogéneo, isotrópico y perfectamente elástico, por consiguiente no existen efectos disipadores. También que los cambios de densidad provocados por la onda se consideran pequeños con relación al punto de equilibrio. Estas consideraciones son necesarias para llegar a la teoría más simple del sonido en fluidos, no obstante con estas simplificaciones la teoría es exitosa en describir la mayoría de los fenómenos acústicos (Kinsler *et al.* 2008).

2.2.2 INTENSIDAD Y SUS ESCALAS DE MEDICIÓN.

En la propagación de una onda sonora existe un flujo de energía que va en la dirección en que viaja la onda. La *Intensidad Instantánea* $I(t)$ es la razón instantánea por unidad de área con la que se transmite energía (en forma de trabajo) de un elemento del fluido a otro elemento adyacente, tal medida cumple que $I(t) = pu$. Utilizando la impedancia acústica específica se puede calcular la intensidad instantánea, para el caso de una onda plana $z = p/u = \pm\rho_0 c u$ resultando así $I(t) = \pm p^2/\rho_0 c$ (Kinsler *et al.* 2008).

La *Intensidad acústica* I , se define como el promedio temporal de la *Intensidad Instantánea* $I(t)$, el tiempo T sobre el que se promedia $I(t)$, depende del tipo de onda: para ondas periódicas es igual al periodo; para ondas transitorias, al tiempo de duración de la onda, y para ondas no periódicas continuas se toma una T "muy grande" ($T \rightarrow \infty$) (Blackstock 2000). Para una onda plana la *intensidad acústica* I es

$$I = \langle I(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T p u dt = \pm \frac{P_e^2}{\rho_0 c} \quad \text{Ec. 2.2-2}$$

El signo indica la dirección de propagación y P_e es la *Presión efectiva*, es decir la *raíz cuadrada media de la presión* sobre el tiempo T :

$$P_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt} \quad \text{Ec. 2.2-3}$$

Para cualquier tipo de onda armónica con amplitud P , la amplitud efectiva $P_e = P/\sqrt{2}$ por lo que $I = \pm P^2/2\rho_0 c$. En este caso, como en muchos, la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud (Kinsler *et al.* 2008).

En la práctica es más conveniente describir las magnitudes relativas a la intensidad del sonido a través de una escala logarítmica. Una de las principales razones es que el oído humano tiene la amplia capacidad de oír sonidos con intensidades que van, aproximadamente desde los 10^{-12}W/m^2 hasta los 10W/m^2 abarcando así 12 órdenes de magnitud.

El *nivel de intensidad* IL (de *Intensity Level*) de un sonido con intensidad I se define por

$$IL = 10 \text{Log} \frac{I}{I_0} \quad (\text{dB}) \quad \text{Ec. 2.2-4}$$

Siendo establecido que la intensidad de referencia $I_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2$ y cuyo valor esta relacionado con el umbral de audición humana. Como se muestra, el *nivel de intensidad* se expresa en decibeles (dB).

Dado que la intensidad está relacionada con el cuadrado de la presión efectiva ($I = P_e^2/\rho_0 c$) otra escala para medir la intensidad del sonido es el *nivel de presión sonora* (de *Sound Pressure Level*) y se define como:

$$SPL = 20 \text{Log} \frac{P_e}{P_0} \quad (\text{dB}_{SPL}) \quad \text{Ec. 2.2-5}$$

En donde P_e es la medida de la presión efectiva y P_0 la presión de referencia siendo establecido que $P_0 = 2\mu Pa = 2 \cdot 10^{-6} Pa$. Esta escala resulta ser la más usada en acústica ya que para campos sonoros complejos (Blackstock 2000).

2.3 DIFRACCIÓN

En el siglo XVII Francesco Grimaldi realizó el primer estudio publicado sobre la desviación de la luz de su propagación rectilínea al bordear un obstáculo interpuesto, a este fenómeno lo denominó *difracción* y proviene del latín *diffRACTus*: roto o quebrado (Hecht 2000). La difracción es un fenómeno que ocurre para todo tipo de ondas y se caracteriza por una desviación en la dirección de propagación de la onda cuando se enfrenta a un objeto. Para que se presente, es necesario que las dimensiones características del objeto sean del mismo orden de magnitud que la longitud de onda de la onda incidente. Cuando la longitud de onda es mucho menor que el tamaño del obstáculo, por lo general, la difracción no se observa y el objeto forma una sombra definida (Resnick *et al.* 2000b).

La difracción es un fenómeno bastante común en el ámbito acústico. Sin haber de por medio una trayectoria directa o por reflexiones, la difracción es la que permite que una persona pueda mantener una conversación con otra ubicada a la vuelta de la esquina de un edificio (Blackstock 2000).

En la física no hay distinción significativa entre la difracción y la interferencia ya que ambas son explicadas por el principio de superposición. Se usa el término de interferencia cuando se analiza un fenómeno por la superposición de pocas ondas, y difracción cuando se trata de un gran número de ondas (Hecht 2000).

2.3.1 INTERFERENCIA DE DOS ONDAS ARMÓNICAS

La interferencia es la primera consecuencia del principio de superposición de las ondas. Partiendo del ejemplo más sencillo, considérese dos ondas armónicas unidimensionales p_1 y p_2 con las mismas características (amplitud, longitud de onda y frecuencia) pero con diferentes inicios de fase ε_1 y ε_2 respectivamente, esto es

$$p_1 = P \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varepsilon_1) \quad y \quad p_2 = P \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varepsilon_2)$$

Cuando estas ondas se juntan en un punto, por el Principio de Superposición, la onda resultante p es entonces la suma de las ondas $p = p_1 + p_2 = P[\operatorname{sen}(kx - \omega t + \varepsilon_1) +$

$\text{sen}(kx - \omega t + \varepsilon_2)]$. Usando la identidad trigonométrica $\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \text{sen } \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, se obtiene que

$$p = 2P \cos(\Delta\varepsilon/2) \text{sen}(kx - \omega t + \varepsilon) \quad \text{Ec. 2.3-1}$$

El resultado de la suma es una nueva onda armónica con la misma frecuencia y longitud de onda pero con una alteración en la amplitud que depende directamente de la *diferencia de fase* $\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Por la función coseno, cuando la diferencia de fase $\Delta\varepsilon$ es cercana a un múltiplo de 2π la amplitud de la onda resultante p alcanza su máximo, este es el caso de la *interferencia constructiva*, donde la intensidad total (que es proporcional al cuadrado de la amplitud) es mayor que las intensidades individuales. Por el contrario, si la diferencia de fase $\Delta\varepsilon$ es cercana a un múltiplo de π la amplitud de p se anula, y se presenta la *interferencia destructiva*, donde la intensidad total es menor que las intensidades individuales.

En muchos casos de difracción o interferencia, la diferencia de fase se origina por una *diferencia de camino* en la trayectoria de las ondas. Por lo tanto la *interferencia constructiva* se da cuando la diferencia de camino Λ es un múltiplo de la longitud de onda, es decir cuando:

$$\Lambda = m\lambda \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad \text{Ec. 2.3-2}$$

y la *interferencia destructiva* cuando:

$$\Lambda = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad \text{Ec. 2.3-3}$$

(Resnick *et al.* 2000a;2000b)

2.3.2 ARREGLO DE FUENTES PUNTUALES

En el estudio de arreglos de fuentes puntuales como monopolos, dipolos, arreglos lineales, etc, uno de los principales intereses es determinar el patrón de radiación del arreglo. Para un arreglo con fuentes puntuales armónicas, la onda de presión p total del arreglo en el campo lejano generalmente puede expresarse como:

$$p = P(r, \theta)e^{-i\omega t} \quad \text{Ec. 2.3-4}$$

Donde $P(r, \theta)$ es una función que solo depende de variables espaciales, como la distancia r al arreglo y del ángulo de dirección θ . El *factor direccional* de amplitud $D(\theta)$ es una función que depende sólo de θ y determina las direcciones en que el patrón de radiación alcanza sus máximos y mínimos. Este factor se define como

$$D(\theta) = \frac{P(r, \theta)}{P(r, \theta_{max})} \quad \text{Ec. 2.3-5}$$

donde θ_{max} es un ángulo determinado en el que $|P(r, \theta)|$ alcanza un máximo. Por su definición el factor $D(\theta)$ es una función normalizada tal que $-1 \leq D(\theta) \leq 1$ (Blackstock 2000; Kinsler *et al.* 2008).

2.3.3 ARREGLO LINEAL DE N FUENTES PUNTUALES

Un ejercicio teórico que sirve como un puente simple y lógico entre los estudios de la interferencia y la difracción es el arreglo lineal de N fuentes puntuales (Hecht 2000). Este consiste en una conformación lineal de N fuentes puntuales separadas por una distancia a como se muestra en la Figura 2.2. En esta sección solo se considerará el caso acústico.

En el siguiente desarrollo las fuentes puntuales pueden ser sustituidas por fuentes simples. Una *fente simple* se refiere a cualquier cuerpo (cerrado y compacto) que vibre con una distribución de velocidades superficiales arbitraria, pero de tamaño tal que sus dimensiones son mucho menores que la longitud de onda del sonido emitido. De esta manera el campo de presión producido por una fuente simple es similar al de una fuente puntual (Kinsler *et al.* 2008).

Regresando al arreglo lineal de N fuentes puntuales, en este es considerado que las fuentes radian una onda esférica con la misma longitud de onda, frecuencia, amplitud y fase inicial. Entonces la onda de presión de la n -ésima fuente tiene la forma

$$p_n = \frac{A}{r_n} e^{i(kr_n - \omega t)} \quad \text{Ec. 2.3-6}$$

Donde r_n representa la distancia entre la fuente n y un punto \mathbf{R} . El propósito de este arreglo es conocer la onda de presión p que incide sobre el receptor situado en el punto \mathbf{R} , debido al principio de superposición tenemos que

$$p = \sum_{n=1}^N p_n = \sum_{n=1}^N \frac{A}{r_n} e^{i(kr_n - \omega t)} \quad \text{Ec. 2.3-7}$$

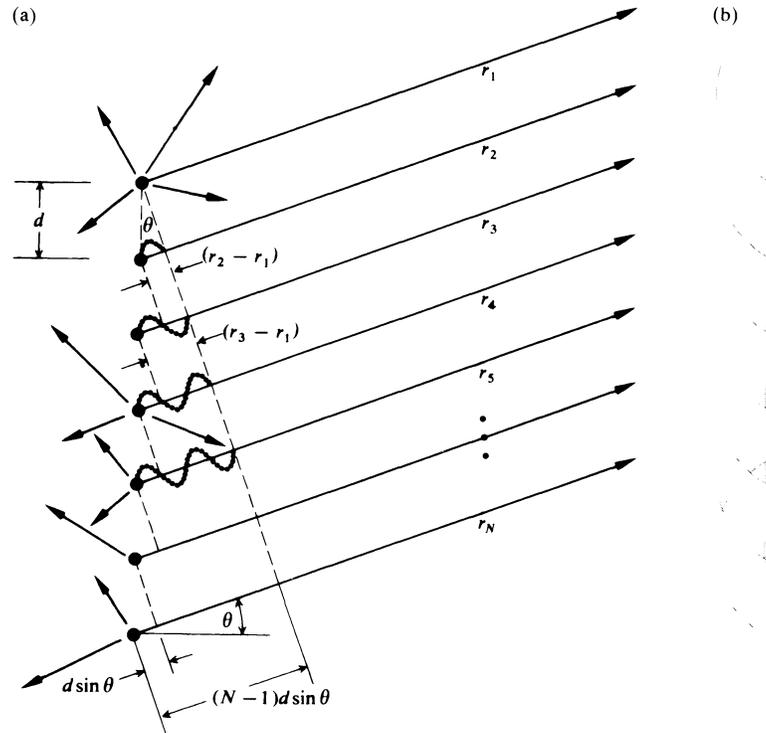


FIGURA 2.2 ARREGLO DE N FUENTES PUNTUALES

Si el tamaño del arreglo $L = (N - 1)a$ es comparativamente pequeña con las distancias al punto R , esto es $r_n \gg L$ para toda n ; entonces las amplitudes de onda individuales que lleguen a R serán esencialmente iguales, habiendo recorrido aproximadamente la misma distancia r (Hecht 2000), es decir

$$\frac{A}{r_1} = \frac{A}{r_2} = \dots = \frac{A}{r_N} = \frac{A}{r} \tag{Ec. 2.3-8}$$

De esta manera la onda de presión p puede reescribirse como

$$p = \frac{A}{r} e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \cdot [1 + e^{ik(r_2-r_1)} + e^{ik(r_3-r_1)} \dots + e^{ik(r_N-r_1)}] \tag{Ec. 2.3-9}$$

Esta es una expresión en términos de las diferencias de fase de las fuentes con respecto a la fuente escogida ($n = 1$), y tal ecuación se simplifica de la siguiente manera.

Debido a que el punto R está muy alejado del arreglo ($r_n \gg L$) los rayos provenientes de las fuentes son prácticamente paralelos entre sí. Observando la Figura 2.2 se deduce que la diferencia de trayectoria entre dos fuentes adyacentes cualesquiera es constante

$$r_n - r_{n-1} = a \sin \theta \tag{Ec. 2.3-10}$$

Asignando $2\delta = ka \sin \theta$ y observando de nuevo la Figura 2.2 se deduce que $k(r_2 - r_1) = 2\delta$, $k(r_3 - r_1) = 2(2\delta)$, $k(r_4 - r_1) = 3(2\delta)$, etc. Entonces la presión en el punto \mathbf{R} se puede escribirse como

$$p = \frac{A}{r} e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \left[1 + (e^{i2\delta})^1 + (e^{i2\delta})^2 + (e^{i2\delta})^3 + \dots + (e^{i2\delta})^{N-1} \right] \quad \text{Ec. 2.3-11}$$

La serie entre los paréntesis es una serie geométrica

$$1 + x^2 + x^3 + \dots + x^{N-1} = \frac{1 - x^N}{1 - x} \quad \text{Ec. 2.3-12}$$

Junto con la igualdad $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/2i$, la serie de exponenciales puede reducirse a un solo término:

$$\sum_{j=0}^{N-1} (e^{i2\delta})^j = \frac{1 - e^{iN2\delta}}{1 - e^{i2\delta}} = \frac{-e^{iN\delta} (e^{iN\delta} - e^{-iN\delta})}{-e^{i\delta} (e^{i\delta} - e^{-i\delta})} = e^{i(N-1)\delta} \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right) \quad \text{Ec. 2.3-13}$$

Con todo esto, se llega a una expresión simplificada para la onda de presión p :

$$p = \frac{A}{r} e^{-i\omega t} e^{i[kr_1 + (N-1)\delta]} \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right) \quad \text{Ec. 2.3-14}$$

Obsérvese que si se define a r como la distancia desde el centro del arreglo al punto \mathbf{R} , es decir $r = \frac{1}{2}(N-1)a \sin \theta + r_1$, entonces

$$p = \frac{A}{r} \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right) e^{i(kr - \omega t)} \quad \text{Ec. 2.3-15}$$

De esta manera, la onda de presión del arreglo puede expresarse de la forma $p = P(r, \theta) e^{-i\omega t}$ donde

$$P(r, \theta) = \frac{A}{r} \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right) e^{ikr} = \frac{A \sin(N\frac{1}{2}ka \sin \theta)}{r \sin(\frac{1}{2}ka \sin \theta)} e^{ikr}$$

Cuando $\theta = 0$, $\sin \delta = 0$ y entonces $P(r, \theta)$ alcanza un máximo, utilizando la regla de L'Hopital se obtiene que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sin N\delta / \sin \delta = N$ y por lo tanto $P(r, 0) = N(A/r) e^{ikr}$. Insertando este resultado en la Ec. 2.3-5 ($\theta_{max} = 0$), resulta que el factor direccional de amplitud $D(\theta)$ del arreglo es

$$D(\theta) = \frac{\sin N\delta}{N \sin \delta} = \frac{\sin(N\frac{1}{2}ka \sin \theta)}{N \sin(\frac{1}{2}ka \sin \theta)} \quad \text{Ec. 2.3-16}$$

El término $\text{sen } N\delta$ fluctúa rápidamente, mientras que la función que lo modula, $1/\text{sen } \delta$, varía relativamente más lento. Los máximos principales ocurren entonces cuando el denominador $\text{sen } \delta = 0$, o sea, cuando $\delta = m\pi$ donde $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ Dado que $\delta = \frac{1}{2}ka \text{sen } \theta$, entonces los máximos principales de $D(\theta)$ se encuentran en las direcciones θ_m que cumplen que

$$a \text{sen } \theta_m = m\lambda \tag{Ec. 2.3-17}$$

En una gráfica polar los máximos principales están representados por los lóbulos mayores como se ve en la Figura 2.3.

(Blackstock 2000)

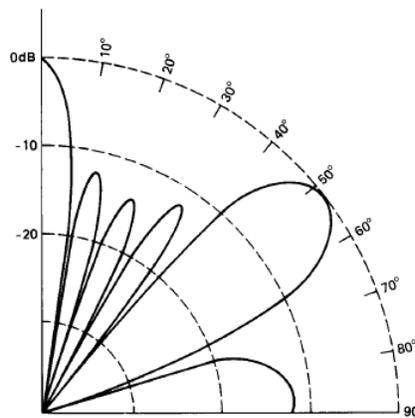


FIGURA 2.3 FACTOR DIRECCIONAL DE AMPLITUD DE UN ARREGLO LINEAL DE FUENTES PUNTUALES ($N = 5, ka = 8$).

En dispositivos basados en el arreglo lineal de fuentes comúnmente es deseado poder transmitir en varias direcciones sin girar físicamente el arreglo. Esto se logra introduciendo un retardo temporal en la señal de las fuentes. Para la fuente n el retraso temporal es $n\tau$, la expresión para la onda de presión de la fuente n es entonces

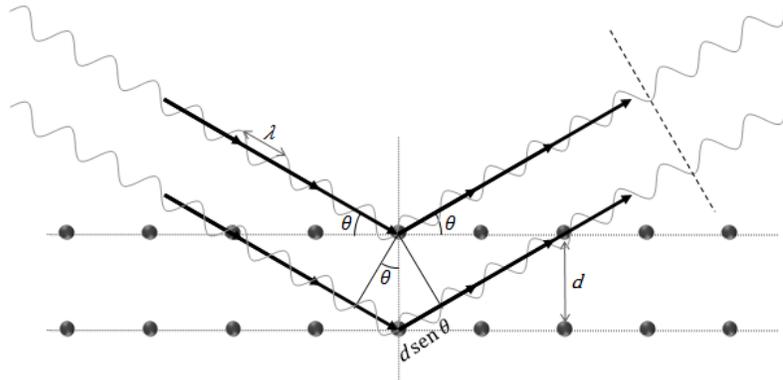
$$p_n = \frac{A}{r_n} e^{i(kr_n - \omega[t + n\tau])} \tag{Ec. 2.3-18}$$

Definiendo a $\text{sen } \theta_0 = v_s \tau / a$, el factor direccional para este caso es de la forma

$$D(\theta) = \frac{\text{sen} \left[\frac{N}{2} ka (\text{sen } \theta - \text{sen } \theta_0) \right]}{N \text{sen} \left[\frac{1}{2} ka (\text{sen } \theta - \text{sen } \theta_0) \right]} \tag{Ec. 2.3-19}$$

De manera que el lóbulo mayor (máximo principal) ahora apunta en la dirección de θ_0 (Kinsler *et al.* 2000).

2.3.4 LEY DE BRAGG

**FIGURA 2.4 DIFRACCIÓN DE BRAGG**

La ley de Bragg establece el patrón de difracción de un cristal, al ser irradiado por un haz de rayos X. La longitud de onda de los rayos X es similar a la separación de los átomos en el cristal y por lo tanto un fenómeno de difracción es observado, el descubrimiento de esta ley confirmó la idea de que los cristales están conformados por una estructura periódica de átomos. (Franks 1996).

Cuando se irradia un cristal con un haz de rayos X, cada átomo dispersa la onda incidente en todas direcciones. La estructura atómica del cristal puede verse como un conjunto de planos paralelos de átomos. La difracción en cada plano es considerado equivalente a la reflexión del haz por el plano de manera especular, esto es, que el ángulo de incidencia y el ángulo es de reflexión son iguales ($\theta = \theta_i, \theta_r$). A diferencia de lo acostumbrado en óptica, los ángulos son medidos con respecto al plano. El patrón de difracción del cristal es generado entonces por la interferencia entre los rayos reflejados por cada plano y se calcula de la siguiente manera (Cullity 1978):

Como se ve la Figura 2.4, los planos de átomos están separados por una distancia d , la diferencia de camino Λ entre los rayos reflejados por dos planos adyacentes es $2d \sin \theta$. La interferencia constructiva se da cuando la diferencia de camino es un múltiplo de la longitud de onda, o sea $\Lambda = m\lambda$ donde $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ Así se obtiene la *Ley de Bragg*

$$2d \sin \theta = m\lambda$$

Ec. 2.3-20

En esta ecuación está implícito que la difracción sólo puede ocurrir para longitudes de onda $\lambda \leq 2d$ (Kitell 2005).

2.3.5 RED DE DIFRACCIÓN

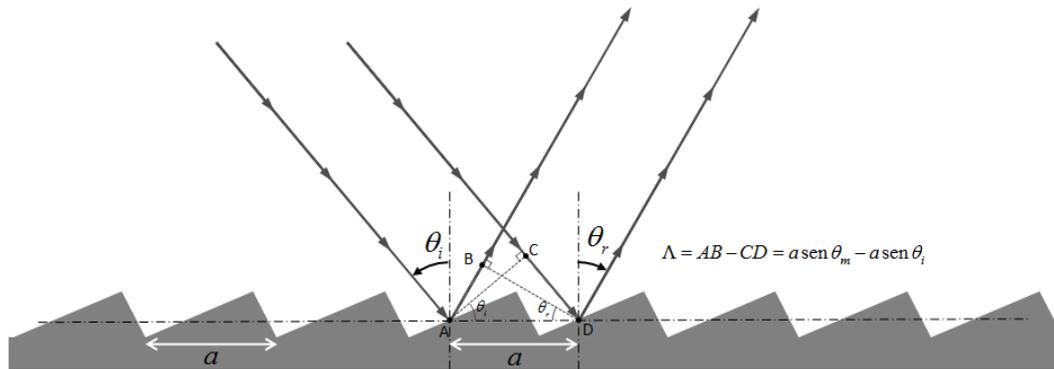


FIGURA 2.5 DIFRACCIÓN POR UNA RED DE REFLEXIÓN

En Óptica, una *red de difracción* es un conjunto repetitivo de elementos, como aberturas u obstáculos, capaz de difractar una onda emergente por medio de alteraciones periódicas en la fase, en la amplitud o en ambas (Hecht 2000). Una categoría de redes de difracción son las denominadas *redes de reflexión de fase*; estas consisten en películas de materiales reflejantes con hendiduras periódicas que usualmente tienen forma de escalón (véase la Figura 2.5).

Cuando una luz monocromática (de una sola longitud de onda) incide sobre una red de difracción, esta se difracta en varios haces con diferentes direcciones. Cada haz corresponde a un *orden* de difracción y las direcciones de los haces dependen de las dimensiones de los surcos o rendijas, y de la longitud de onda de la luz incidente. De este modo una red actúa como un elemento dispersivo; para el caso de una luz compuesta por varias longitudes de onda, esta se difracta o separa por la red, dentro de cada orden, en haces de diferente longitud de onda. Las redes de difracción son los dispositivos principales en los espectrógrafos que son utilizados para analizar el espectro de las fuentes de luz (Resnick *et al.* 2000b).

Las direcciones de propagación favorecidas por la difracción en las redes se determinan por medio de la *Ecuación de Red* que a continuación se deducirá.

Al incidir una onda de luz monocromática sobre la red, el reflejo de cada surco llegará a un punto *P* arbitrario con una relación de fase definida. La diferencia de fase que hay entre el reflejo de dos surcos consecutivos es proporcional a la diferencia de camino Λ de estos surcos. Como se ve en la Figura 2.5, la diferencia de camino es

$$\Lambda = a(\sin \vartheta - \sin \theta)$$

Ec. 2.3-21

En donde a es la distancia entre los surcos, θ el ángulo de incidencia y ϑ el ángulo reflexión, los ángulos son medidos con respecto a la normal al plano general de la red. Por convención ϑ y θ se miden en sentidos opuestos (véase la Figura 2.5). Cabe mencionar que se presupone que tanto la fuente como el punto P están muy lejanos, y por lo tanto los rayos de la onda incidente como la reflejada de cada surco son paralelos entre sí.

Ahora bien, los rayos reflejados tendrán una interferencia constructiva si la diferencia de camino es un múltiplo de la longitud de onda incidente λ , es decir si $\Delta = m\lambda$ en donde $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ Esto nos lleva a la *Ecuación de Red*:

$$a \sin \vartheta_m - a \sin \theta = m\lambda \quad \text{Ec. 2.3-22}$$

Dado un valor para m , el ángulo ϑ_m denota el ángulo de reflexión específico que cumple esta igualdad. En la dirección determinada por ϑ_m se propaga entonces, por la interferencia constructiva, una onda la cual corresponde al orden de difracción m . Por lo tanto la Ecuación de Red indica las direcciones en que se propagan todos los órdenes de difracción.

Para el orden cero ($m = 0$), la Ecuación de Red deriva en $\sin \vartheta_0 = \sin \theta$, por lo que $\vartheta_0 = \theta$. Entonces el orden cero es la reflexión especular (en espejo) del rayo incidente. Debido a la convención en los sentidos de ϑ y θ , los ordenes positivos ($m > 0$) corresponden a los que se encuentran, con respecto al orden cero, en el sentido de ϑ ; y los ordenes negativos ($m < 0$), a los que se hallan en el sentido contrario de ϑ (véase la Figura 2.6).

En términos del número de onda k la Ecuación de Red se puede escribir de la siguiente manera:

$$k \sin \vartheta_m = k \sin \theta + m \frac{2\pi}{a} \quad \text{Ec. 2.3-23}$$

Cuando la incidencia es normal, es decir cuando $\theta = 0$, se obtiene la siguiente ecuación

$$a \sin \vartheta_m = m\lambda \quad \text{Ec. 2.3-24}$$

Esta es una expresión de la Ecuación de Red bastante utilizada.

2.3.6 DIFRACCIÓN DE UNA SUPERFICIE PERIÓDICA

El problema de transmisión y reflexión de ondas por una superficie periódica ha sido abordado por muchos autores a partir del Siglo XIX. La teorías desarrolladas para explicar el fenómeno han sido aplicadas principalmente para el desarrollo y diseño de las redes de difracción (Neviere &

Popov 2002), pero también han tenido muchas otras aplicaciones como la detección de irregularidades superficiales y la difracción de ultrasonido en líquidos (LaCasce & Tamarkin 1956; Claeys *et al.* 1983). Otras de sus aplicaciones también fue la de simular la acústica de sitios arqueológicos como el Teatro de Epidauro de la antigua Grecia (Declercq & Dekeyser 2007) y “El Castillo” de Chichén Itzá (Declercq *et al.* 2004a). Desde el comienzo el interés se centro en saber cuál es el patrón de difracción generado a partir de una geometría de superficie conocida. Actualmente también se trabaja en el problema inverso (Colton & Kress 1998; Arens 1999). Todos estos trabajos son derivados de un artículo escrito por el premio nobel Lord Rayleigh en 1907.

2.3.7 DIFRACCIÓN DE RAYLEIGH PARA SUPERFICIES PERIÓDICAS

En 1907, Lord Rayleigh publicó un artículo titulado *On the Dynamical Theory of Gratings* (Rayleigh 1907), que representó la primera solución para el problema de la reflexión de ondas por una superficie periódica. En este trabajo se considera que la onda reflejada está constituida, en el espacio libre y sobre la superficie, por la suma de un conjunto discreto de ondas emergentes cuyos vectores de onda se derivan de la Ecuación de Red. La teoría desarrollada es aplicable solo a los casos en que la altura de la corrugación es muy pequeña en comparación de la longitud de la onda incidente (Waterman 1975). A continuación se muestran los aspectos básicos en la teoría propuesta por Rayleigh:

Se considera una superficie periódica que se describe por los puntos (x, y) tales que

$$y = f(x) \quad \text{con} \quad -\infty < x < \infty$$

donde $f(x + a) = f(x)$ siendo a el periodo de la superficie. La amplitud, altura o profundidad de la superficie se denota por b .

Sobre la superficie periódica incide una onda plana armónica p_i , con un número de onda $k = 2\pi/\lambda$ y con un ángulo de incidencia θ determinados. El ángulo de incidencia esta medido con respecto a la normal al plano general de la superficie $f(x)$, y cumple que $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. El vector de onda \mathbf{k}_i de la onda incidente en términos de k y θ es de la forma:

$$\mathbf{k}_i = (k_{ix}, k_{iy}) = k(\text{sen } \theta, \text{cos } \theta) \quad \text{Ec. 2.3-25}$$

La onda incidente p_i puede entonces expresarse como:

$$p_i = e^{-ik(x \text{ sen } \theta - y \text{ cos } \theta)} \quad \text{Ec. 2.3-26}$$

Por simplicidad el factor dependiente del tiempo $e^{-i\omega t}$ es extraído en todas las ondas planas.

Cuando la onda p_i incide sobre la superficie $f(x)$ se produce una onda reflejada p_r y debido a la periodicidad de la superficie esta onda es difractada. Según Rayleigh, fuera de la superficie (es decir donde $y > b$), la onda p_r está compuesta por un conjunto infinito de ondas planas p_m donde cada uno tiene su propio vector de onda \mathbf{k}_m y amplitud A_m :

$$p_r = \sum_{-\infty}^{\infty} p_m = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{-i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}} \quad \text{Ec. 2.3-27}$$

Cada onda plana p_m representa un orden de difracción m y la dirección en que se propaga está determinada por el vector de onda \mathbf{k}_m . Definiendo a ϑ_m como el ángulo que forma \mathbf{k}_m con la normal del plano general de la superficie, entonces

$$\mathbf{k}_m = (k_{m_x}, k_{m_y}) = k(\sin \vartheta_m, \cos \vartheta_m) \quad \text{Ec. 2.3-28}$$

Las componentes k_{m_x} y k_{m_y} del vector \mathbf{k}_m son definidas de manera que los órdenes se propagan conforme a la Ecuación de Red. Ya que $k_{x,m} = k \sin \vartheta_m$, por la Ecuación de Red (véase la Ec. 2.3-23) la componente horizontal k_{m_x} se define como

$$k_{m_x} = k \sin \theta + m \frac{2\pi}{a} = k_{i_x} + m \frac{2\pi}{a} \quad \text{Ec. 2.3-29}$$

donde a es el periodo de la superficie. Utilizando el Teorema de Pitágoras, la componente vertical k_{m_y} se define como

$$k_{m_y} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - (k_{m_x})^2}, & k^2 \geq (k_{m_x})^2 \\ i\sqrt{(k_{m_x})^2 - k^2}, & k^2 \leq (k_{m_x})^2 \end{cases} \quad \text{Ec. 2.3-30}$$

Debido a que $k_{m_x}^2$ puede ser mayor a k^2 dependiendo del entero m , la componente vertical $k_{y,m}$ puede ser un positivo real o un positivo imaginario. Cuando $k_{y,m}$ es real, la onda p_m corresponde a una onda plana (homogénea) que se propaga hacia fuera de la superficie periódica. Este es el caso de un *orden de propagación*. Cuando $k_{y,m}$ es imaginario, la onda plana p_m se convierte en una onda evanescente cuya amplitud disminuye exponencialmente hacia fuera de la superficie (véase el Anexo10.2). Este es el caso de un *orden evanescente* (Neviere & Popov 2002).

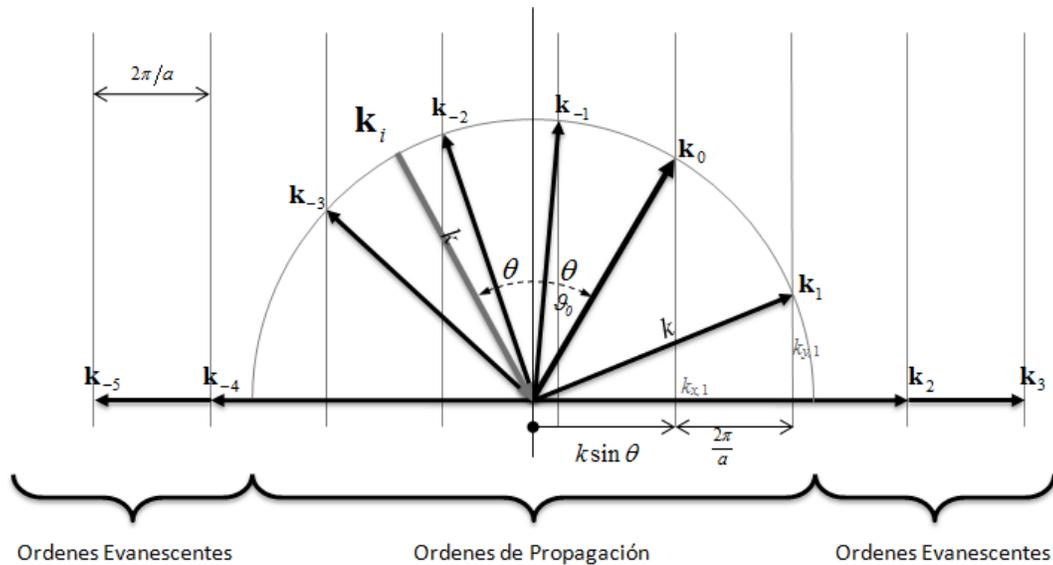


FIGURA 2.6 REPRESENTACIÓN DE LOS VECTORES DE ONDA k_m .

Una representación gráfica de las direcciones que toman los órdenes de difracción, se encuentra en la Figura 2.6. El orden cero, representado por el vector de onda \mathbf{k}_0 , es justamente la reflexión especular ($\vartheta_0 = \theta$) de la onda incidente cuyo vector de onda es \mathbf{k}_i . Los demás órdenes se construyen a partir del orden cero. Para el orden m , su respectivo vector de onda \mathbf{k}_m se obtiene sumándole a \mathbf{k}_0 , un desplazamiento horizontal de m veces la cantidad $2\pi/a$. Geométricamente, los órdenes de propagación son las intersecciones del círculo de radio k con las líneas verticales cuya separación es de $2\pi/a$. Los órdenes evanescentes son las intersecciones de las líneas verticales con el eje horizontal fuera de círculo (Loewen & Popov 1997).

En su artículo, Rayleigh hizo una consideración crucial que se conoce como la *Hipótesis de Rayleigh*. Propuso que la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{-i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}}$ constituía una representación válida para p_r no solo para $y > b$, sino en todos los lugares que $y \geq f(x)$ incluyéndose así los espacios entre las corrugaciones de la superficie. (Millar 1973; Neviere & Popov 2002). Gracias a esta hipótesis, se puede aplicar un método por el cual se calculan las amplitudes A_m (véase la Ec. 2.3-27), y así obtener una descripción numérica de la onda difractada p_r . Dicho método, en general consiste en generar sistemas de ecuaciones linealmente independientes donde se puedan despejar las amplitudes A_m . Estos sistemas de ecuaciones se obtienen, de la expresión de la superficie $f(x)$ como una Serie de Fourier, y de la serie de funciones armónicas que se derivan de las condiciones de frontera (véase el Anexo 10.3) aplicados a la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{-i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}}$. Entre más ordenes m se inserten en el sistema de ecuaciones más preciso es el cálculo de A_m pero crece la complejidad del sistema. Para dar un ejemplo del método, en su artículo Rayleigh lo aplica para una superficie de

forma sinusoidal con condiciones de frontera de Dirichlet, de Neumann y otras más (Rayleigh 1907).

2.3.8 TEORÍAS POSTERIORES A LA TEORÍA DE RAYLEIGH

Si bien el método de Rayleigh es fácil de entender y sencillo de formular, es necesario el uso de una computadora para obtener de resultados numéricos precisos (Neviere & Popov 2002). Esta es la razón por la cual hasta cincuenta años después se empezó a trabajar sobre la validez y capacidad de predicción de la teoría de Rayleigh (Petit 1975).

Uno de los primeros cuestionamientos de la teoría de Rayleigh, apareció en 1953 en un breve artículo de Lippmann (Lippmann 1953). En este artículo se conjeturó que, para proporcionar una representación completa de la onda difractada entre las corrugaciones de la superficie ($b > y \geq f(x)$), no solo se debe incluir un conjunto de ondas planas emergentes (hacia fuera de la superficie), sino también un conjunto de varias ondas entrantes o incidentes. Tales ondas incidentes resultan no estar contempladas por la Hipótesis de Rayleigh (Waterman 1975).

A partir de 1960 fueron desarrollados nuevos métodos o teorías que son consideradas como más “rigurosos” comparadas con la teoría de Rayleigh y sus derivados directamente. Estos nuevos métodos son rigurosos en el sentido en que proveen, sin una aproximación teórica de por medio, soluciones numéricas para las ecuaciones que describen la propagación de la onda y las condiciones de frontera. No obstante en el proceso de los cálculos numéricos por computadora, persisten errores debido al recorte en el número de ecuaciones, en el número de armónicos, o en la resolución de bits, entre otros (Neviere & Popov 2002). Los métodos o teorías posteriores a la de Rayleigh pueden ser agrupados en tres categorías principales (Petit 1975; Wirgin 1980; Neviere & Popov 2002), los de enfoque diferencial (Cerutti-Maori *et al.* 1969; Neviere *et al.* 1973; Wolken 1973), los de enfoque integral (Meecham 1956; Uretsky 1965; García & Cabrera 1978) y los basados en la teoría de Waterman (Waterman 1975; Whitman & Schwering 1977; Bagieu & Maystre 1998).

En cuanto a la validez de la teoría de Rayleigh, este depende de la forma de superficie ($f(x)$), como de la proporción entre el periodo y la amplitud (b/a), así como de la longitud de onda incidente en relación con la amplitud (b/λ). Generalmente la teoría de Rayleigh es aplicable para superficies poco rugosas, es decir para b/a pequeños. En una demostración convincente, Petit y Cadilhac establecieron que para una superficie descrita por $f(x) = (b/2) \cos \frac{2\pi}{a} x$ con condiciones

de Dirichlet, la hipótesis de Rayleigh es inválida o insostenible si $b/a > 0.144$ (Petit & Cadilhac 1966). Más adelante, fue demostrado por Millar que tal hipótesis si es válido para $b/a < 0.144$ (Millar 1971).

Wirgin afirma que, contrario a la opinión común, la teoría de Rayleigh es aplicable para un amplio rango de superficies corrugadas. Asevera que dicha teoría es válida siempre y cuando

$$0 < \frac{b}{2a} < 0.34 \quad y \quad 0 < \frac{kb}{2} < 4.1 \quad \text{Ec. 2.3-31}$$

El análisis desarrollado por Wirgin está restringido para superficies periódicas del tipo $f(x) = (b/2) \cos \frac{2\pi}{a} x$ (Wirgin 1980).

Van der Berg, basado en los trabajos de Millar, estableció un método para derivar las condiciones en las que la Hipótesis de Rayleigh es válida en función del perfil o forma de la superficie (van den Berg & Fokkema 1979). Para una superficie de perfil triangular, la Hipótesis de Rayleigh nunca es válida ya que existen singularidades (discontinuidades) en la forma de este tipo de superficie. Sin embargo, esta hipótesis puede ser sostenible si se aproxima el perfil triangular por medio una serie finita de Fourier (véase la Sección 2.4.2 y el Anexo10.4):

$$z(x) = \frac{h}{2} - h \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=1}^K \frac{\cos\left(2\pi(2j-1)\frac{x}{D}\right)}{(2j-1)^2} \quad \text{Ec. 2.3-32}$$

Esta aproximación mejora conforme el entero K aumenta. Dependiendo del valor de K , la altura h tiene una cota superior h_{max} , en la que si $h < h_{max}$ entonces la hipótesis es válida. En la Figura 2.7 se muestra el comportamiento de la altura máxima h_{max} en función del entero K (van den Berg & Fokkema 1979). Como se observa, el rango de validez de la Hipótesis de Rayleigh disminuye si la superficie $z(x)$ se parece más a una función triangular. Cuando $K = 1$, $z(x)$ es igual a una función coseno y se reproduce el resultado de Millar (tómese $h_{max} = b$).

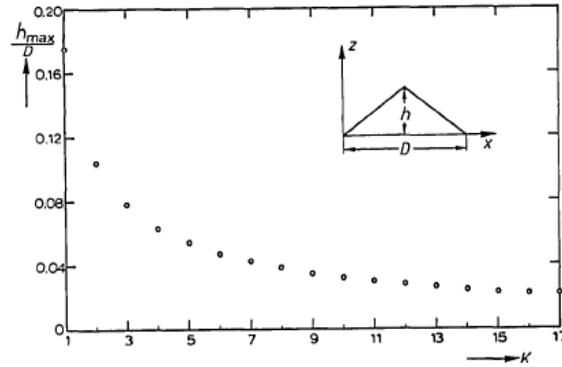


FIGURA 2.7 COEFICIENTE h_{max}/D EN FUNCIÓN DEL NÚMERO DE COMPONENTES K DE LA SERIE DE FOURIER PARA UN PERFIL TRIANGULAR (VAN DEN BERG & FOKKEMA 1979)

2.4 ANÁLISIS DE FOURIER

Una onda cualquiera no solo se puede representar en su forma temporal sino también de manera única por una representación utilizando de funciones armónicas simples. Si se descompone una forma de onda en componentes sinusoidales de la misma manera que un prisma separa la luz blanca en diferentes colores, es posible formar la forma de onda original si se suman apropiadamente estas componentes sinusoidales. Si cualquiera de estas componentes está ausente entonces el resultado es otra forma de onda.

El análisis de Fourier es principalmente una forma de análisis frecuencial (o espectral). La motivación de desarrollar una herramienta de análisis frecuencial es la de proveer una representación gráfica y matemática para las componentes frecuenciales que están contenidos en una señal dada. El análisis frecuencial de una señal implica la descomposición de la señal en sus componentes frecuenciales o sinusoidales. Las herramientas matemáticas que nos proporciona información sobre estas componentes son las Series de Fourier y la Transformada de Fourier (Proakis & Manolakis 1996).

2.4.1 FUNCIONES PERIÓDICAS

Las funciones armónicas (simples) como el seno y el coseno son ejemplos sencillos de una función periódica. Una función $f(t)$ se dice que es *periódica* con *periodo* T si para toda t se cumple que

$$f(t + T) = f(t)$$

Ec. 2.4-1

en donde T es una constante real positiva. De esta manera el periodo del seno y el coseno es igual a 2π (Spivak 1998).

2.4.2 SERIES DE FOURIER

En la naturaleza, muchos fenómenos ondulatorios se caracterizan por presentar movimientos periódicos muy complicados. El teorema de Fourier permite analizar un movimiento ondulatorio complejo periódico como una combinación de ondas sencillas (Resnick *et al.* 2000a). Este teorema establece que una función $f(t)$ periódica con periodo T puede sintetizarse por la suma de funciones armónicas, de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sen n\omega t \quad \text{Ec. 2.4-2}$$

donde $\omega = 2\pi/T$ (Hecht 2000). Esta serie de sumas infinita se conoce como la *Serie de Fourier*. Los coeficientes A_n y B_n se son constantes que se determinan con las siguientes integrales:

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t \, dt \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sen n\omega t \, dt \quad \text{Ec. 2.4-3}$$

donde se integra sobre el periodo $[t_0, t_0 + T]$, con t_0 arbitrario.

(Kinsler *et al.* 2008)

Las condiciones de Dirichlet garantizan que las Series de Fourier sean iguales a la función $f(t)$, excepto en los valores de t donde $f(t)$ es discontinua y por tanto las Series de Fourier convergen a un valor medio de la discontinuidad. Para que se cumplan estas condiciones la función $f(t)$, dentro de cualquier periodo, debe tener un número finito de discontinuidades como de máximos y mínimos, así como ser absolutamente integrable, esto es $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| \, dt < \infty$ para toda t_0 . Cabe recalcar que estas condiciones son suficientes mas no necesarias (Proakis & Manolakis 1996).

2.4.3 TRANSFORMADA DE FOURIER

La siguiente herramienta matemática resuelve el problema de representar funciones no periódicas o también funciones transitorias (Arfken 1985).

Una manera de deducir la Transformada de Fourier, es a partir de las Series de Fourier. Si se toma un periodo de la función y se expande hasta el infinito, esto es $T \rightarrow \infty$; entonces la

frecuencia angular fundamental $2\pi/T$ tiende a cero y la sumatoria sobre todos los armónicos debe ser remplazada por una integración sobre todas las frecuencias.

La *transformada de Fourier* es una función que asocia a una función $f(t)$, en el espacio temporal, una función $F(\omega)$ en el espacio de frecuencias de la siguiente manera:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{Ec. 2.4-4}$$

La función $F(\omega)$ se dice que es la *transformada de Fourier* de $f(t)$, lo cual se indica simbólicamente como

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad \text{Ec. 2.4-5}$$

La transformada inversa de Fourier es una función que nos lleva de regreso a la función $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{Ec. 2.4-6}$$

(Hecht 2000). En general, la función $F(\omega)$ es compleja y usualmente es expresada en su forma polar

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{-i\theta(\omega)} \quad \text{Ec. 2.4-7}$$

Al modulo $|F(\omega)|$ se le denomina como la *amplitud del espectro* y a $\theta(\omega)$ como la *fase del espectro*.

En los fenómenos ondulatorios, la energía de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, si $f(t)$ representa la amplitud de una onda transitoria sobre un punto fijo, la energía total se obtiene integrando el cuadrado de la amplitud $|f(t)|^2$ sobre todo el tiempo. Por la *fórmula de Parseval*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad \text{Ec. 2.4-8}$$

De esta manera se deduce que la energía total es proporcional al área bajo la curva de $|F(\omega)|^2$ y por consiguiente la cantidad $|F(\omega)|^2$ representa la *distribución de energía espectral* (Proakis & Manolakis 1996).

De manera parecida que en las series de Fourier, las condiciones de Dirichlet se aplican a la Transformada de Fourier. En este caso se piden que las discontinuidades, los máximos y mínimos sean finitos para cualquier intervalo y que la función sea absolutamente integrable en todo el eje temporal, esto es $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. (Proakis & Manolakis 1996)

2.4.4 TRANSFORMADA DE FOURIER DE UN PAQUETE DE ONDAS GAUSSIANO

Desde un enfoque general, la expresión matemática de un paquete de ondas se construye modulando la amplitud de una onda armónica $\psi(x, t) = e^{-i(k_0x - \omega_0t)}$ con una función $f(t)$ con forma de pulso. Utilizando una envolvente del tipo $f(t) = \sqrt{\alpha/\pi}e^{-\alpha t^2}$ se obtiene un paquete de ondas gaussiano o pulso gaussiano:

$$\psi(t) = f(t)e^{-i(\omega_0t)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha t^2}e^{-i(\omega_0t)} \tag{Ec. 2.4-9}$$

(Hecht 2000)

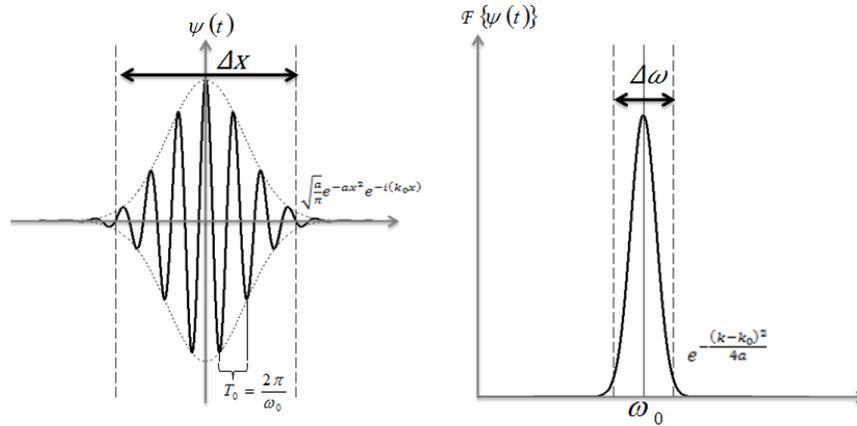


FIGURA 2.8 PAQUETE DE ONDAS GAUSSIANO Y SU TRANSFORMADA DE FOURIER

Aquí se ignora la parte espacial por cuestiones de homogeneidad. Como se muestra en la Figura 2.8, el resultado de la modulación es una sinusoidal restringido a un intervalo de tiempo de duración Δt que es proporcional a $1/\sqrt{\alpha}$.

Aplicando la Transformada de Fourier al paquete de ondas gaussiano se obtiene que

$$\Psi(\omega) = \mathcal{F}\{\psi(t)\} = e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4\alpha}} \tag{Ec. 2.4-10}$$

(Hecht 2000)

Lo que indica que el espectro del paquete de ondas tiene una distribución gaussiana centrado en la frecuencia angular ω_0 proveniente de la onda armónica. En otras palabras el paquete de onda no solo contiene una sola frecuencia ω_0 , sino más bien una variedad de frecuencias distribuidos alrededor de ω_0 (Resnick, Halliday et al. 2000). En contraste con Δt , el ancho $\Delta\omega$ de

la distribución de frecuencias angulares es directamente proporcional a $\sqrt{\alpha}$. Esto conduce al comportamiento general de los paquetes de onda

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \quad \text{Ec. 2.4-11}$$

(Jackson 1998)

Para paquetes de onda cortos su espectro tiene una distribución muy ancha de frecuencias, y por el contrario para paquetes de ondas muy largos (similares a una onda armónica) su espectro es casi monofrecuente (Arfken 1985).

2.4.5 PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

La desigualdad mostrada en la sección anterior es una forma de representación del conocido *Principio de Incertidumbre* de la teoría de la Mecánica Cuántica. En la Mecánica Cuántica, el momento de una partícula está representado por la Transformada de Fourier de la posición, y por este principio ambas magnitudes no pueden ser medidas simultáneamente de manera exacta (Stein 2000). Algo similar sucede cuando se trata de estimar el espectro de una señal.

Una función armónica simple como el seno está definida en toda la recta del tiempo y tiene un espectro con una sola componente frecuencial. En la realidad las señales tienen una duración finita Δt y no pueden tener un espectro limitado a un valor pues para construir una señal que sea distinto de cero dentro Δt pero que se anule fuera de este es necesario sumar muchas componentes frecuenciales. Entre más corto sea Δt más frecuencias se tienen que añadir y por lo tanto el ancho $\Delta \omega$ de la distribución de frecuencias aumenta.

El principio de incertidumbre visto desde otro enfoque es el siguiente. Si se puede observar una señal sinusoidal por un periodo infinito de tiempo se puede determinar exactamente su frecuencia. Pero en la práctica solo se es permitido observar la señal sinusoidal por un periodo limitado de tiempo y por lo tanto su frecuencia solo puede ser determinada dentro de intervalo de tolerancia. Entre menos tiempo es permitido observar la sinusoidal, mayor es la incertidumbre sobre su verdadera frecuencia y viceversa (Stein 2000).

2.5 PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

2.5.1 SEÑALES

El término *señal* se aplica generalmente a algo que lleva información y comúnmente es sobre el estado o el comportamiento de un sistema físico. Una señal se representa matemáticamente por una función de una o más variables independientes, por ejemplo la señal de un sonido se representa matemáticamente por una función del tiempo y su valor representa la presión acústica generada por la onda sonora. Una convención común es referirse a la variable independiente de la representación matemática como el tiempo.

Existen tres tipos de señales, las *señales en tiempo continuo* o *señales analógicas* que se definen en un continuo temporal, las *señales en tiempo discreto* que se definen en instantes discretos del tiempo, y las *señales digitales* que son discretas tanto en el tiempo como en la amplitud de la señal (Oppenheim *et al.* 1999).

2.5.2 AUDIO DIGITAL

El audio digital consiste en la grabación en formato digital de una señal eléctrica que representa una onda sonora, así como también la reproducción de un sonido por medio de una señal eléctrica a partir de la señal digital.

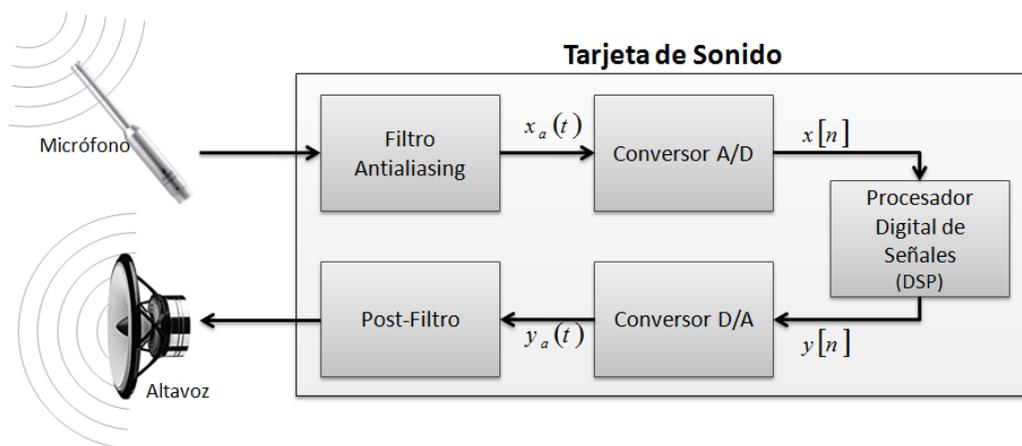


FIGURA 2.9 DIGITALIZACIÓN Y REPRODUCCIÓN DE AUDIO DIGITAL

En la Figura 2.9 se muestra un esquema simplificado del proceso de digitalización y reproducción de un sonido pasando por un proceso digital de señales dentro de una *tarjeta de sonido*.

El primer paso es convertir la onda acústica en una señal eléctrica análoga, esta es la función de los *micrófonos*. En muchos de los casos estos dispositivos están compuestos por *transductores electroacústicos*, que en un puerto es aplicado una fuerza oscilante producto de la onda sonora, y en el otro puerto, se conduce un voltaje o una corriente eléctrica análoga a la señal mecánica de entrada (Kuttruff 2006).

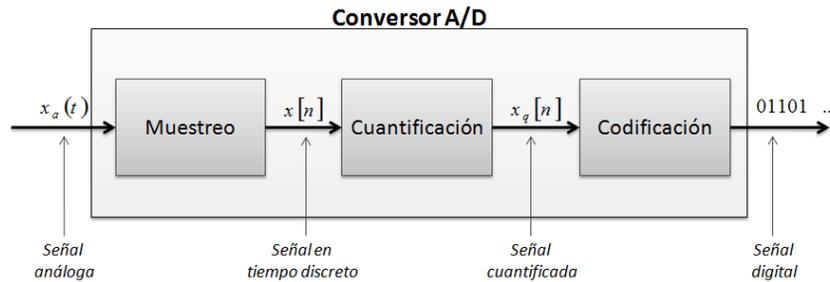


FIGURA 2.10 CONVERSOR ANALÓGICO/DIGITAL

En los siguientes procesos realizados por el *filtro antialiasing* y *Conversor A/D* la finalidad es obtener una señal digital que represente verazmente la señal analógica de entrada. El proceso de convertir la señal analógica a digital es realizado por el *Conversor A/D* (Analogico/Digital) y conceptualmente está compuesto de tres procesos como se ve en la Figura 2.10. Estos procesos son:

1. *Muestreo*. Esta es la conversión de una señal en tiempo continuo en una señal en tiempo discreto y se obtiene tomando “muestras” (samples) de la señal analógica en instantes discretos de tiempo. Entonces, si $x_a(t)$ es la señal que entra al dispositivo de muestreo (sampler), la señal de salida es $x_a(nT_s) \equiv x[n]$ donde n es un número entero y T_s es llamado el intervalo de muestreo. La *frecuencia de muestreo* f_s es el recíproco del intervalo de muestreo, esto es $f_s = 1/T_s$, este parámetro especifica el número de muestras por unidad de tiempo y usualmente se expresa en Hertz (Hz) (Proakis & Manolakis 1996).
2. *Cuantificación*. Esta es la conversión de una señal en tiempo discreto de valores continuos en una señal en tiempo discreto de valores discretos. Cada $x[n]$ entrante es remplazado mediante una regla de aproximación por un valor $x_q[n]$ que solo puede tomar valores dentro de un conjunto finito y predefinido. (Proakis & Manolakis 1996). En el audio digital la precisión de la cuantificación se expresa en número de bits, esta medida es conocida como la *profundidad* o *resolución de bits*. Si una señal digital tiene una resolución de bits

de 16-bits quiere decir que la amplitud de la señal puede tomar $2^{16} = 65,356$ valores posibles (Lyons 2001).

3. *Codificación*. Este es el proceso por el cual cada valor discreto de $x_q[n]$ es codificado en una secuencia binaria de b-bits (Proakis & Manolakis 1996).

El *filtro antialiasing* es un filtro que antecede al Conversor A/D y es un filtro pasabajos analógico que suprime en la señal analógica las componentes frecuenciales mayores a la mitad de la frecuencia de muestreo ($f_s/2$). De esta manera se evade el fenómeno de *aliasing*. (Oppenheim *et al.* 1999).

A continuación, la señal digital obtenida llega a un *procesador digital de señales* (DSP). Estos procesadores pueden realizar operaciones programables como filtraciones, supresión de ruido, análisis espectral, entre muchos otros (Proakis & Manolakis 1996). También se puede transmitir la señal digital con o sin procesar para su almacenamiento en una computadora y posteriormente mediante software especializado realizar un análisis de la señal digital obtenida.

En aplicaciones donde es necesaria que la señal de salida del procesador digital de señales sea devuelta en forma analógica, se utiliza un *Conversor D/A* (Digital/Analógico) (Proakis & Manolakis 1996). El proceso final es la conversión en sonido de la señal eléctrica analógica de salida de la tarjeta de sonido. Usualmente se logra amplificando análogamente la señal eléctrica y transmitiéndola a un *altavoz*, que a grandes rasgos es un transductor electroacústico como el micrófono pero donde la de transducción ocurre de manera inversa (Kinsler *et al.* 2008).

2.5.3 RANGO DINÁMICO

El *rango dinámico* es la diferencia expresada en niveles de intensidad (dB) entre el sonido más débil y el sonido más fuerte. Por ejemplo, los sonidos más débiles de una orquesta (pianísimo) son de unos $40dB$ y los más fuertes (fortísimo) es de unos $100 dB$, lo que da un rango dinámico de $60dB$ (Steiglitz 1996). En el audio digital, el rango dinámico está directamente relacionado con la resolución de bits b . Para señales digitales, el rango dinámico es la razón entre la amplitud de señal más pequeña y la más grande posible, esto es aproximadamente $2^b/1$ y expresado en decibeles es igual a $20 \log_{10}(2^b) = b \times 6.02dB$ (por cada bit se aumenta $6.02dB$ en el rango dinámico). Para una resolución de 16 bits el rango dinámico es de $96dB$ y para 24 bits el rango dinámico resulta de $144dB$ (Lyons 2001).

Comúnmente en señales digitales, como unidad de medida para la energía o intensidad se utilizan los decibeles, pero en este caso, el nivel de referencia corresponde a la amplitud máxima que la señal puede alcanzar (2^b). De esta manera 0dB es la lectura máxima que se puede obtener. Consecuentemente para una señal digital con una profundidad de 24 bits, la lectura mínima posible es de 144dB.

2.5.4 TEOREMA DEL MUESTREO Y EL FENÓMENO DE ALIASING

El *Teorema de Muestreo*, también conocido como el *Teorema de Nyquist- Shannon*, establece un criterio para que en el proceso de muestreo no se pierda información de la señal analógica original. Según este teorema, cuando una señal analógica es muestreada, esta puede ser recuperada de manera exacta a partir de la secuencia de muestras, si la frecuencia máxima contenida en la señal analógica (F) es menor a la mitad de la frecuencia de muestreo f_s , es decir, si se cumple que $f_s/2 > F$. (Proakis & Manolakis 1996). Si este criterio no es satisfecho, en el espectro de la señal análoga reconstruida aparecerán componentes frecuenciales inexistentes en la señal original. Estos artefactos o *alias* son generados por las componentes (en la señal original) cuya frecuencia es mayor a $f_s/2$. Este fenómeno es conocido como *aliasing* (Steiglitz 1996).

Aunque en el proceso de muestreo normalmente se cumple con el Teorema del Muestreo, usualmente la señal discreta obtenida pasa por un proceso de cuantificación que produce una pérdida irreversible de información. Esta pérdida se debe al *error de cuantificación* que es la diferencia numérica entre la señal entrante no cuantificada y la señal de salida cuantificada. Para minimizar la pérdida de información se debe aumentar la resolución de bits y eliminar las fuentes de ruido (Proakis & Manolakis 1996).

2.5.5 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

La Transformada de Fourier de una señal continua (analógica) en el espacio temporal consiste en una función continua en el espacio de frecuencias, y con esto se puede obtener la distribución espectral o frecuencial de la señal continua. Para obtener la distribución frecuencial de una señal discreta, se debe emplear la *Transformada Discreta de Fourier* (DFT). Esta es una herramienta matemática que a partir de una secuencia de N muestras en el espacio temporal ($x[0], x[1], \dots, x[N-1]$), calcula N muestras en el espacio de frecuencias ($X[f_0], X[f_1], \dots, X[f_{N-1}]$). Para una señal discreta $x[n]$, la DFT se define como

$$X[f_k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i2\pi n f_k} \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, N-1 \\ f_k = k f_s / N \end{array}$$

donde f_s es la frecuencia de muestreo. A la frecuencia f_k le corresponde el número complejo $X[f_k]$. En el eje de frecuencias, el conjunto de frecuencias f_k son equidistantes con una separación $\Delta f = f_s/N$, por otro lado, en el eje temporal la distancia entre las muestras $x[n]$ es $\Delta t = 1/f_s$. Por lo tanto la resolución frecuencial (Δf) y la temporal (Δt) cumplen que

$$\Delta f \Delta t = \frac{1}{N}$$

Debido a la naturaleza discreta y finita de la DFT, esta transformada tiene un comportamiento cíclico ($X[f_k] = X^*[f_s - f_k]$). Como consecuencia, cuando la DFT se utiliza para un análisis espectral, solo tienen significado las componentes frecuenciales $X[f_k]$ tales que $f_k < f_s/2$ (Lyons 2001).

2.5.6 SEÑALES NO ESTACIONARIAS: BARRIDO DE FRECUENCIAS

Una señal no estacionaria es una señal cuyas propiedades (amplitudes, frecuencias y fases) varían con el tiempo, el habla es un claro ejemplo de una señal no estacionaria. (Oppenheim *et al.* 1999). Un ejemplo conocido de estas señales es el *barrido de frecuencias* (chirp), estas se obtienen modulando la frecuencia de una función armónica. Una expresión matemática sería $x(t) = \cos(\phi(t))$ donde $\omega(t) = d\phi/dt$ se denomina la *frecuencia angular instantánea* (Oppenheim *et al.* 1996). Un barrido lineal de frecuencias en tiempo discreto es de la forma $x[n] = \cos \omega_0 n^2$ y entonces la frecuencia instantánea es $2\omega_0 n$ (Oppenheim *et al.* 1999).

2.5.7 ESPECTROGRAMA

El *espectrograma* o *sonograma*, es una herramienta gráfica basada en la Transformada de Fourier Discreta que provee una útil descripción de cómo las propiedades de la señal cambian en el tiempo (Oppenheim *et al.* 1999). Esta herramienta es básica en el análisis espectral de audio y otros campos, por ejemplo, ha sido usado ampliamente en el análisis de la voz. Es una representación importante de los datos de audio, debido a que el oído humano funciona como un tipo de espectrograma en tiempo real. (Smith 2007)

En la Figura 2.11 se muestra el procedimiento para obtener un espectrograma. Se comienza segmentando la señal de entrada $x[n]$ en *bloques* de N muestras de longitud, con un *traslape* de

O muestras entre los bloques, la distancia entre los bloques está dada por $M = N - O$. En seguida, cada bloque es multiplicado por una *ventana* $w[n]$ para reducir la fuga espectral (leakage) ocasionado por las discontinuidades en los bordes del bloque. Seguido de esto, se aplica la Transformada Discreta de Fourier (DFT) a cada bloque. El proceso se puede resumir con la siguiente fórmula la cual es conocida como la *Transformada de Fourier en Tiempo Corto*,

$$X[m, k] = \sum_{n=0}^{N-1} w[n] x[mM + n] e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

(Vaseghi 2000)

Aquí m es el índice del m -ésimo bloque que inicia en la muestra $n = mM$ y termina en la muestra $n = mM + N - 1$. Finalmente se grafica cada componente frecuencial obtenida, sobre una gráfica de frecuencia contra tiempo e indicando su energía mediante una paleta de colores o una escala de grises (véase Figura 2.11). A la componente $X[m, k]$, cuya energía es $|X[m, k]|^2$, le corresponden las coordenadas $(t_m, f_k) = (mMT_s, k f_s/N)$ donde $f_s = 1/T_s$ es la frecuencia de muestreo (Vaseghi 2000).

Por el principio de incertidumbre, no se puede medir simultáneamente con arbitraria precisión las componentes frecuenciales y los tiempos en que estas componentes cambian (Stein 2000). En el espectrograma de banda ancha se utilizan bloques (también llamados ventanas) relativamente pequeñas en tiempo, esta se caracteriza por una resolución pobre en la dimensión de frecuencias y una buena resolución en la dimensión del tiempo. En contraste, en el espectrograma de banda corta una ventana larga es usada y se obtiene una alta resolución en frecuencias con un correspondiente decremento en la resolución temporal (Oppenheim *et al.* 1999).

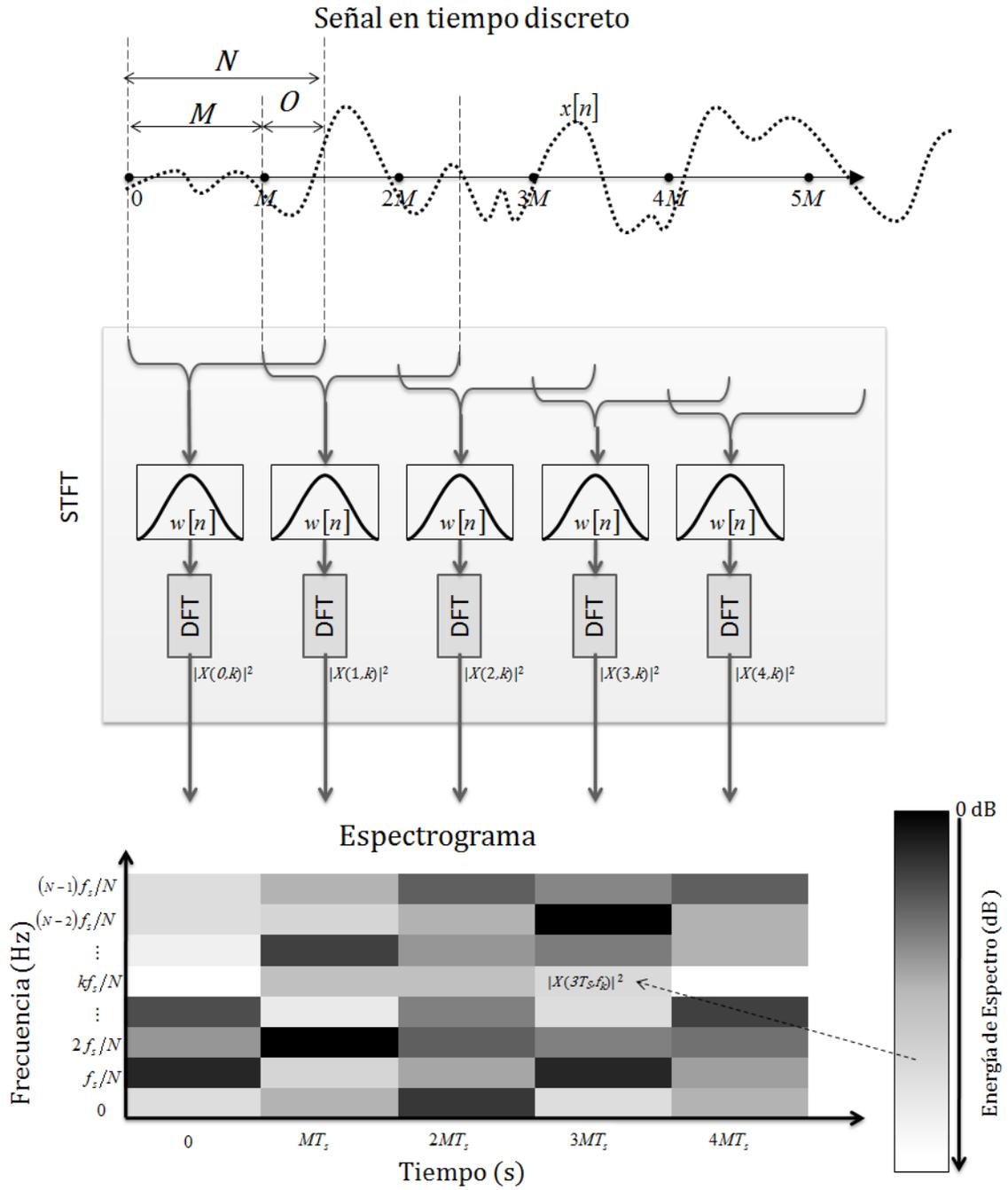


FIGURA 2.11 ESPECTROGRAMA

CAPÍTULO 3

ANTECEDENTES

Sobre el mecanismo físico que origina el efecto acústico de la “Cola de Quetzal” se han propuesto principalmente tres modelos: el modelo de D. Lubman basado en las redes de difracción de Bragg (Lubman 1998a;1998b;1998c), el modelo de Declercq *et al.* basado en una teoría derivada de la Difracción de Rayleigh (Declercq *et al.* 2004a); y finalmente, el modelo de Frans A. Bilsen (Bilsen 2006a;2006b) basado en el fenómeno psicoacústico de Tono por Repetición (*Repetition Pitch*). En este capítulo se hace una descripción detallada de los trabajos acústicos de dichos autores. Al final se realiza una discusión donde se identifica la problemática entre los resultados de los tres trabajos descritos.

3.1 MODELO BASADO EN LAS REDES DE DIFRACCIÓN

En la presentación de D. Lubman de 1998 (Lubman 1998a), además de plantearse por primera vez una posible intencionalidad en el efecto “Cola de Quetzal”, también se planteó la primera explicación física del efecto. Se propuso principalmente que la escalinata de “El Castillo” actúa como una red de difracción, específicamente como una *red de difracción de Bragg*. Adicionalmente se realizaron algunas predicciones para la frecuencia inicial y final del eco barrido. En general sus planteamientos son desarrollados de manera heurística y por lo tanto no son demostrados rigurosamente.

En esa misma presentación, D. Lubman realizó una comparación de la grabación del eco barrido producido frente a “El Castillo” con el canto de un quetzal a través de espectrogramas (véase la Figura 3.1). Menciona que hay una cierta similitud entre ambos sonidos en cuanto a sus cualidades, como el rango de frecuencias, la duración y la conformación por armónicos; sin embargo estos sonidos no pueden considerarse idénticos (Lubman 1998b). Analizando el espectrograma del eco barrido, este autor describe cualitativamente las características acústicas del efecto, como se muestra a continuación:

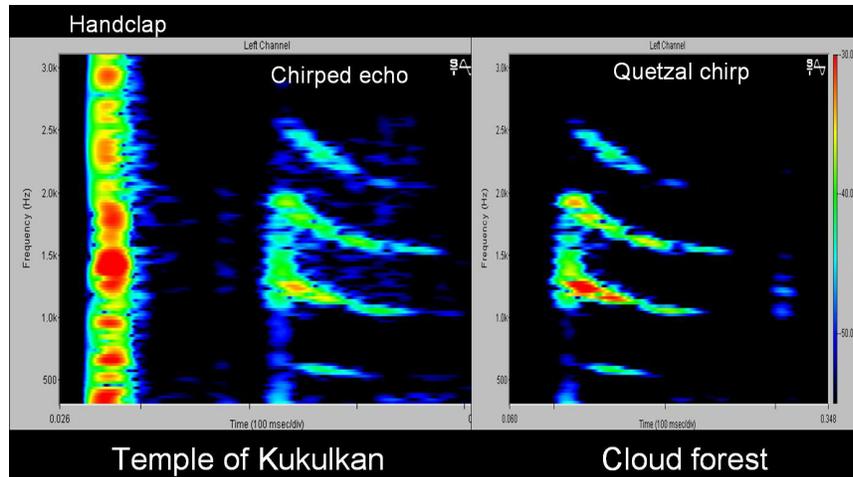


FIGURA 3.1 COMPARACIÓN DE ESPECTROGRAMAS DEL ECO BARRIDO DE “EL CASTILLO” Y EL CANTO DE UN ESPÉCIMEN DE QUETZAL.

El espectrograma de la izquierda corresponde a un aplauso (handclap) y su eco barrido (chirped echo), el de la derecha corresponde al canto de un espécimen de quetzal.

En el espectrograma del eco barrido, véase la Figura 3.1, el sonido directo del aplauso (handclap) se observa como una barra continua vertical de colores, esto indica que el aplauso es un sonido impulsivo, es decir, un sonido corto en tiempo y que tiene un espectro con energía esparcida continuamente en un amplio intervalo de frecuencias. El aplauso fue producido por un observador parado a 10m de la base de la escalinata. El espacio negro a la derecha de la barra vertical de colores, representa el tiempo que tarda el aplauso en ir hacia la escalinata y regresar como un eco barrido. El conjunto de 3 curvas que se observa representa al eco barrido, donde cada curva es un armónico de la fundamental, es decir la curva de más baja frecuencia (esta no se aprecia completamente porque se enmascara con el ruido de fondo). En el eco barrido, las frecuencias bajas están más retrasadas en comparación con las altas frecuencias. Dado que el eco barrido dura más que su estímulo, o sea el aplauso, entonces el efecto acústico consiste en una “dispersión temporal” de las frecuencias que constituyen al espectro del aplauso.

3.1.1 REDES DE DIFRACCIÓN Y LA DIFRACCIÓN DE BRAGG

Para explicar la generación del eco barrido, D. Lubman argumenta que la estructura periódica de la escalinata actúa como una *red o rejilla de difracción de Bragg* al interactuar con el campo sonoro del aplauso (Lubman 1998c). Dicha interacción provoca una “dispersión temporal” que retrasa las frecuencias bajas del espectro del aplauso, lo cual genera el barrido de frecuencias. Como argumento a favor de su hipótesis menciona que este comportamiento es característico de

las redes de difracción de Bragg (Lubman 1998c). En la Óptica moderna, este tipo de redes son referidas usualmente a dispositivos cuya difracción es conforme a la Ley de Bragg, estos dispositivos usualmente son redes de transmisión o fibras ópticas modificadas (Loewen & Popov 1997). A pesar de no haber una cita textual por parte de D. Lubman, varios autores le adjudican la Difracción de Bragg como la base de su propuesta física (Declercq *et al.* 2004a; Cruz Calleja 2007).

3.1.2 CALCULO DE LAS FRECUENCIAS INICIALES Y FINALES

A pesar de mencionar el cálculo de una curva para describir temporalmente la fundamental del eco barrido, en ninguna de las fuentes se muestra la ecuación para la misma (Lubman 1998c;1998b). Sólo se muestran ecuaciones para la frecuencia inicial f_i y la frecuencia final f_f de la fundamental del eco barrido(Lubman 1998c). Estas ecuaciones están en función de la velocidad del sonido v_s y las dimensiones características de la escalinata, que son, la longitud de la huella o escalón d y la longitud de la contrahuella o peralte h .

$$f_i = \frac{v_s}{2d} \quad f_f = \frac{v_s}{2\sqrt{d^2 + h^2}} \quad \text{Ec. 3.1-1}$$

Estas expresiones las dedujo considerando que el eco barrido es producido por las reflexiones periódicas causadas por las caras de los escalones (Lubman 1998b). Después de emitirse el aplauso, los primeros reflejos en arribar al receptor son los producidos por los escalones ubicados abajo del nivel de la cabeza de este. El periodo de tiempo entre estos reflejos iniciales es proporcional al tamaño de la huella d y por lo tanto la frecuencia inicial es proporcional a $1/d$. Para los reflejos que provienen de escalones superiores, el periodo gradualmente se alarga y por lo tanto la frecuencia va disminuyendo. En el límite el sonido recorre una trayectoria casi paralela al ángulo de la escalinata, y por lo tanto el periodo entre los reflejos es proporcional a la hipotenusa del triangulo rectángulo formado por el escalón (o sea $\sqrt{d^2 + h^2}$). Entonces la frecuencia final es proporcional a $1/\sqrt{d^2 + h^2}$. La frecuencia final es más baja que la frecuencia inicial ya que la hipotenusa es más larga que la longitud de la huella.

3.2 MODELO BASADO EN LA DIFRACCIÓN DE RAYLEIGH

Considerando que D. Lubman solo había dado una explicación del barrido acústico de una manera heurística, Nico F. Declercq *et al.* realizaron un trabajo desde un punto de vista más formal dentro de la física ondulatoria, con la intención de encontrar los mecanismos que generan al eco barrido (Declercq *et al.* 2004a). Empleando una teoría basada en la difracción de Rayleigh elaboraron simulaciones por computadora del efecto acústico, así como unas curvas basadas en la Difracción de Bragg. Mediante el uso de espectrogramas, las curvas de difracción junto con las simulaciones fueron comparadas con una grabación de campo del eco barrido.

3.2.1 TEORÍA DE DIFRACCIÓN DE DECLERCQ *ET AL.* Y SU APLICACIÓN A LA “COLA DE QUETZAL”

Para simular el eco barrido generado por una escalinata se empleó una teoría derivada de la difracción de Rayleigh para superficies periódicas (véase la Sección 2.3.7). En específico, Declercq *et al.* utilizan lo que nombran como la “Teoría de Claeys” (Claeys *et al.* 1983), que consideran como un caso simplificado de su teoría de difracción formulada con ondas planas inhomogéneas (Declercq *et al.* 2002;2003a;2004b; Declercq 2005). La teoría de difracción de Declercq *et al.* se plantea de modo similar a la de Rayleigh (véase la Sección 2.3.7), pero en este caso, se considera una interface del tipo fluido-sólido. Esto implica que el campo sonoro además de componerse de una onda incidente y una onda reflejada en el fluido, se compone también por dos ondas de transmisión en el sólido: una en forma de onda longitudinal o de compresión, y otra en forma de onda transversal o de corte. De la misma manera que la onda reflejada (véase la Ec. 2.3-27), las dos ondas de transmisión son descompuestas en un conjunto de ondas planas cuyas direcciones también están relacionadas con la Ecuación de Red.

Para calcular las amplitudes de cada componente de la onda reflejada, como de las ondas de transmisión (de compresión y de corte), se utiliza un sistema de ecuaciones lineales, el procedimiento para obtenerlas se encuentra de manera más detallada en varios trabajos (Declercq *et al.* 2003a; Declercq 2005; Declercq & Dekeyser 2007). A grandes rasgos, consiste en aplicar sobre la interface ciertas *condiciones de frontera o continuidad* en el tensor de estrés fluido-sólido, con lo que se llega a un conjunto de ecuaciones periódicas sobre el eje paralelo a la superficie. La aplicación de una Transformada de Fourier Discreta en este punto resulta en un sistema de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones que incógnitas (las cuales son las

amplitudes). Después de incorporar información sobre la forma de la superficie por medio de una integral determinada, este sistema de ecuaciones se puede resolver por computadora de manera matricial, y así se obtienen finalmente los valores numéricos de las amplitudes.

Según Declercq *et al.*, su teoría de difracción es válida solo si cumple con las Condiciones de Lipmann, esto es, que la longitud de onda de la onda incidente sea simultáneamente del mismo orden de magnitud que el periodo ($a \sim \lambda$) y mayor que la altura de la superficie periódica ($b < \lambda$) (Declercq *et al.* 2004a). Estas condiciones no son del todo rigurosas y cabe mencionar que en otro trabajo (Declercq & Dekeyser 2007), donde Declercq *et al.* también aplican su teoría de difracción, no consideran las Condiciones de Lipmann sino las Condiciones de Wirgin (véase la Sección 2.3.8).

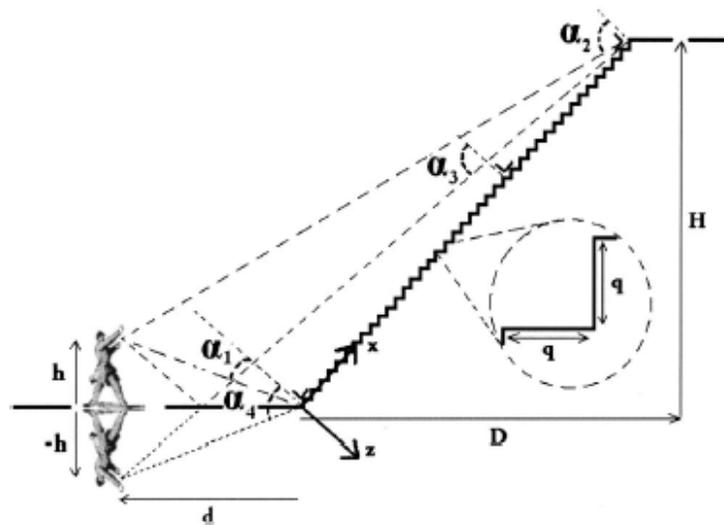


FIGURA 3.2 REPRESENTACIÓN DE LA ESCALINATA DE LA PIRÁMIDE CON UNA FUENTE SONORA DE FRENTE. (DECLERCQ ET AL. 2004A)

Distancia	Medida	Propiedad de los materiales	Medida
Altura de la escalinata	24.02 m	Densidad del aire	1.1466 kg/m ³
Profundidad de la escalinata	23.84 m	Velocidad del sonido en el aire (v_s)	343 m/s
Altura y profundidad del escalón	0.263 m	Densidad de la piedra caliza	2,000 kg/m ³
Altura de la fuente	1.80 m	Vel. de compresión del sonido	4,100 m/s
Distancia de la fuente a la escalinata	10.0 m	Vel. de corte del sonido	2,300 m/s

TABLA 3.1 DIMENSIONES DE LA ESCALINATA DE “EL CASTILLO”, POSICIÓN DE LA FUENTE SONORA Y PROPIEDADES DE LOS MATERIALES CONSIDERADAS EN (DECLERCQ ET AL. 2004A)

Para generar simulaciones del eco barrido frente a “El Castillo”, la teoría de difracción de Declercq *et al.* es aplicada de la siguiente manera (Declercq *et al.* 2004a):

Primero se considera un arreglo como en la Figura 3.2 con distancias y propiedades de los materiales como se muestra en la Tabla 3.1. En este arreglo, una fuente sonora es situada frente a la escalinata de la pirámide, la cual está representada por una superficie periódica de perfil triangular. Dicha fuente emite una onda esférica y esta es aproximada por un conjunto de ondas planas incidentes armónicas. A lo largo del artículo, se da a entender que existe una doble descomposición en la onda esférica emitida: una *espacial* y otra *temporal*.

En lo referente a la espacial, el frente esférico (véase la Sección 2.1.5) es modelado por un conjunto de ondas planas con diferentes direcciones de propagación. Estas pueden incidir de manera directa en la escalinata o indirectamente por una reflexión en el suelo. Como se indica en la Figura 3.2, las ondas con trayectoria directa son aquellas con un ángulo de incidencia θ tal que $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$. Las ondas reflejadas por el piso, geoméricamente, son equivalentes a ondas que salen de una “Fuente espejo” e inciden directamente con un ángulo θ tal que $\alpha_3 \leq \theta \leq \alpha_4$ (véase la Figura 3.2).

Respecto a la descomposición temporal, sobre cada dirección viajan un conjunto de ondas planas armónicas de determinadas amplitudes y frecuencias (o longitudes de onda). Con la suma de estas ondas se sintetiza así, a manera de una Transformada Discreta de Fourier, la forma compleja de oscilación del sonido emitido por la fuente sonora.

Para cada onda plana que sintetiza la onda esférica emitida, cuando incide sobre la escalinata su reflejo es difractado conforme a la teoría de difracción de Declercq *et al.*, antes mencionada. Aunque no se especifica cómo, se puede suponer que las simulaciones se obtienen al sumar todas las ondas planas producidas por la difracción de la escalinata y que llegan a la fuente, considerando que las ondas difractadas llegan a la fuente en diferentes tiempos debido a la dinámica del fenómeno. Como producto final de la simulación, se obtiene una señal digital que representa el sonido del eco escuchado desde la posición de la fuente.

Debido a las condiciones de Lippmann, los autores advierten que se reduce la capacidad de predicción de las simulaciones en función de la frecuencia. Considerando las dimensiones de “El Castillo”, la velocidad del sonido en piedra caliza y en el aire (véase la Tabla 3.1) para frecuencias menores a los 1,844Hz, se afirma que las simulaciones son perfectas. Por arriba de este límite

hasta los 5,000 Hz aprox. los errores son tolerables, y más arriba las estimaciones del campo sonoro son completamente erróneas.

3.2.2 CURVAS DE DIFRACCIÓN DE BRAGG

Empleando su teoría de difracción, adicionalmente Declercq *et al.*, formularon unas curvas para describir temporalmente las principales componentes frecuenciales del efecto. Estas curvas se obtienen a partir de la Ecuación de Red que define a la componente k_{m_x} (véase la Ec. 2.3-29). Considerando que inciden varias ondas planas armónicas con diferentes longitudes de onda y ángulos de incidencia, para que un orden de difracción m con su respectiva frecuencia sea registrado por la fuente, la onda incidente que la genere debe cumplir que

$$k_{i_x} = m \frac{\pi}{a} \quad \text{Ec. 3.2-1}$$

Si esta relación es combinada con la relación de dispersión ($v_s = \omega/k$), a cada ángulo de incidencia se le puede asociar una frecuencia (la cual es registrada por la fuente). Si se toma en cuenta la trayectoria de las ondas planas, se obtiene el retraso de cada frecuencia en función del ángulo de incidencia. De esta manera se obtiene una expresión para el barrido de frecuencias en relación con el tiempo:

$$t(-m, f) = \frac{|y_F|}{v_s \cos \text{Re} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{\left(\frac{2\pi f}{v_s}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{\frac{m\pi}{a}}} \right)} \quad \text{Ec. 3.2-2}$$

Aquí v_s es la velocidad del sonido en el aire y $|y_F|$ es la coordenada del eje y del vector de posición de la fuente, respecto al sistema de coordenadas que se muestra en la Figura 3.2. Considerando las dimensiones de la escalinata, la posición de la fuente y una velocidad del sonido de 343m/s (véase la Tabla 3.1), se obtienen un conjunto de curvas como se muestra en la Figura 3.3. En esta figura, cada curva corresponde a un orden m de valor negativo.

Declercq *et al.*, afirman que estas curvas son derivados de la Difracción de Bragg, sin embargo, no se da referencia o explicación concreta que demuestre tal relación. Por otro lado, mencionan que dicho tipo de difracción es la que propone D. Lubman como causa del eco barrido frente a "El

Castillo”, agregan también que de acuerdo con esta proposición, las curvas de Difracción de Bragg deberían observarse en el espectrograma del eco barrido.

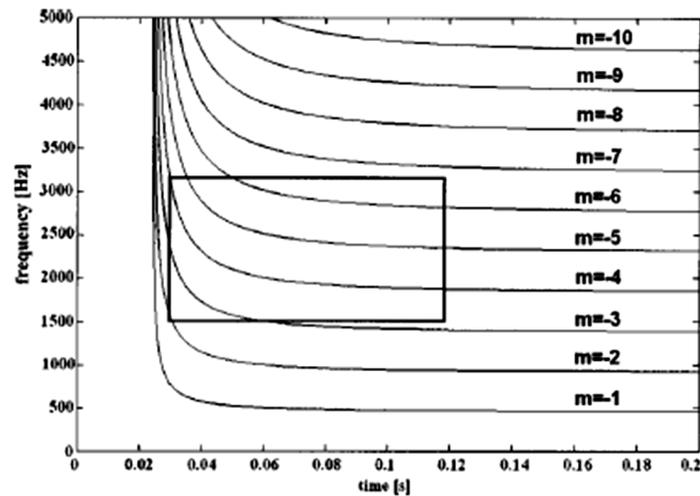


FIGURA 3.3 DESCRIPCIÓN DEL ECO BARRIDO EN FUNCIÓN DEL TIEMPO Y EL ORDEN DE DIFRACCIÓN M DEBIDO A LA “DIFRACCIÓN DE BRAGG”. (DECLERCQ ET AL. 2004A)

3.2.3 SIMULACIONES GENERADAS Y GRABACIONES DE CAMPO

Aplicando el desarrollo teórico mostrado anteriormente, Declercq *et al.*, generaron tres simulaciones por computadora del eco frente a la escalinata de “El Castillo”. Las primeras dos fueron generadas utilizando dos sonidos diferentes como fuentes sonoras, estos son: un pulso semejante a una delta de Dirac y un aplauso. Este último sonido fue extraído de una grabación del eco barrido tomada por D. Lubman. En estas simulaciones, el sonido incide directamente y su reflejo regresa a la fuente también directamente (sin ser reflejado por el suelo). Para complementar, se creó una tercera simulación en donde se suman todas las trayectorias posibles del sonido, estas trayectorias son las cuatro combinaciones posibles de una incidencia directa o indirecta, con una reflexión directa o indirecta. Aquí la fuente sonora empleada es la grabación del aplauso ya mencionada.

Como datos técnicos en la creación de las simulaciones, el frente esférico fue modelado utilizando 300 direcciones de propagación, igualmente distribuidas entre α_1 y α_2 para la incidencia directa, y entre α_3 y α_4 para la indirecta. En el caso del pulso como fuente sonora, esta forma de onda por 500 frecuencias de igual amplitud, e igualmente distribuidas entre los 500Hz y los 3,000Hz. En el caso del aplauso, por limitaciones en la capacidad de cómputo, la síntesis de la

grabación digital original fue reducida a 1,968 frecuencias equitativamente distribuidas entre los 400Hz y los 10,240Hz. Esto consecuentemente influyó en la resolución de las simulaciones para esta fuente.

Junto a las simulaciones generadas, se muestran dos grabaciones de campo: una del canto de un espécimen de quetzal y otra del eco barrido frente a “El Castillo” (ya mencionada anteriormente). Estas grabaciones fueron facilitadas a los autores por D. Lubman mediante su página electrónica (Lubman 1998c).

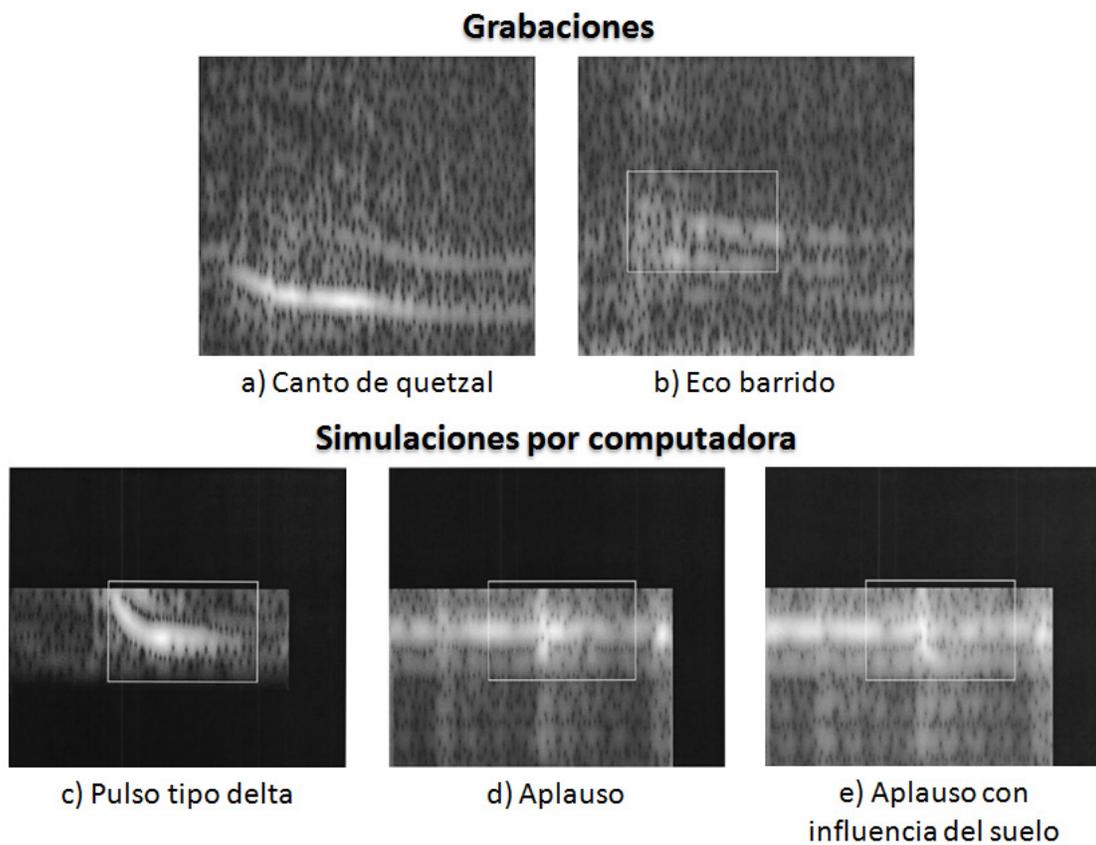


FIGURA 3.4 ESPECTROGRAMAS DE GRABACIONES DE CAMPO Y SIMULACIONES POR COMPUTADORA DEL ECO BARRIDO (DECLERCQ ET AL. 2004A).

a) Grabación del canto de un espécimen de quetzal. b) Grabación del eco barrido frente a “El Castillo”. c) Simulación del eco barrido con un pulso tipo delta como fuente. d) Simulación del eco barrido con un aplauso como fuente. e) Simulación del eco barrido con un aplauso como fuente e incorporando la influencia del suelo. En todos los espectrogramas, el eje vertical de frecuencias va de 0 a 5,000Hz y el eje horizontal abarca un lapso de 0.2 s

3.2.4 ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

El análisis de las señales digitales, de las simulaciones y de las grabaciones de campo, lo realizaron por medio de la comparación de sus espectrogramas (véase la Figura 3.4). Como un sistema de referencia fue dibujado sobre los espectrogramas una ventana o rectángulo cuya posición en tiempo y frecuencia es absoluta. Este rectángulo también se puede encontrar en la gráfica de las curvas de Difracción de Bragg (véase la Figura 3.3). A continuación se presenta un resumen del análisis comparativo realizado por Declercq *et al.*:

Sobre la grabación del canto del quetzal (Figura 3.4.a), Declercq *et al.*, sólo mencionan que se observa en su espectrograma un barrido de bajas frecuencias con respecto a los demás, y posiblemente una mejor similitud se daría para quetzales más jóvenes.

A continuación comparan las curvas de Difracción de Bragg (Figura 3.3) con el espectrograma de la simulación del pulso como fuente (Figura 3.4.c). Cuando se analiza la correspondencia entre las curvas con los patrones visibles en el espectrograma, determinan que la concordancia es inexacta, y se lo adjudican a una posible interferencia provocada por la forma esférica de la onda incidente. También, observan la falta de algunos patrones predichos por las curvas y mencionan que se debe a las condiciones de frontera. En todas las simulaciones, no sólo es considerado la Ecuación de Red (como sucede en las curvas de Difracción de Bragg), sino también las condiciones de frontera.

Posteriormente se comparó la grabación de campo del eco barrido (Figura 3.4.b) con las curvas de Difracción de Bragg (Figura 3.3) y también con la simulación del pulso como fuente (Figura 3.4.c). Esto con el propósito de encontrar si la Difracción de Bragg o esta junto con las condiciones de frontera reproducen a la grabación de campo. En el espectrograma de dicha grabación, observan que la similitud de patrones es regular para el caso de la simulación y nula para el caso de las curvas de difracción. Señalan además, que “hay algo incluso más oscuro, que es la presencia de patrones fuera de la ventana de referencia” (véase la Figura 3.4.b). Dado que estas anomalías no se observan en ninguna de las demás figuras comparadas, concluyen entonces que estos patrones “no pueden simplemente ser el resultado de una Difracción de Bragg pura y un efecto extra debe estar involucrado”.

Con el fin de esclarecer la causa de estos patrones fuera de la ventana de referencia, en seguida comparan la grabación del eco barrido (Figura 3.4.b) con la simulación del aplauso como fuente (Figura 3.4.d). Argumentan que debido a las dificultades en el proceso de cómputo y las

condiciones de Lipmann, dicha simulación no ofrece una descripción temporal en la distribución de frecuencias. Los autores aseguran que no obstante, se pueden apreciar las mismas 4 bandas de frecuencias en los espectrogramas de las señales comparadas (Figura 3.4.b y d). Esta situación difiere para la simulación del pulso como fuente (Figura 3.4.c), donde sólo 2 de dichas bandas se pueden encontrar. Debido a la diferencia en el número de bandas, concluyen entonces que el eco barrido depende del tipo del sonido incidente. Concluyen también que “sigue sin resolver la interrogante sobre que distribución de frecuencias en la fuente es necesaria para simular el eco barrido”.

Para finalizar el análisis comparativo, se examina la simulación donde se añadió la influencia del suelo (véase Figura 3.4.e). Nuevamente la simulación no puede describir la evolución temporal de la distribución de frecuencias. Por la presencia también de las 4 bandas de frecuencias mencionadas, concluyen entonces que el suelo no tiene ninguna influencia sobre la presencia o ausencia de estas bandas.

Como conclusiones generales, consideran que fue mostrado que el eco barrido consiste en un sonido difractado proveniente de la escalinata. Concluyen también que este eco es formado por un proceso conectado con la Difracción de Bragg, pero son más relevantes en la generación del eco barrido otros efectos como las condiciones de continuidad y la distribución de frecuencias de la onda incidente.

3.3 MODELO BASADO EN EL FENÓMENO DE “TONO POR REPETICIÓN”

A partir de que Declercq *et al.* afirmaran que la Difracción de Bragg no es suficiente para reproducir el barrido acústico, Frans A. Bilsen propuso una explicación alternativa al eco barrido usando una teoría basada en lo que llama como Repetition Pitch que podría traducirse al español como Tono por Repetición (Bilsen 2006b).

En el fenómeno de Tono por Repetición se percibe un tono por el escucha cuando se juntan un sonido y su repetición retrasada temporalmente. Tal tono corresponde al recíproco del tiempo de retraso, esto es, que si τ es el retraso temporal entonces el tono generado tiene una frecuencia $1/\tau$. El espectro del sonido compuesto por lo general tiene forma de peine o “rizado”, y sus máximos o picos se ubican sobre los múltiplos de la frecuencia $1/\tau$, o sea, sobre los armónicos de la “fundamental” $1/\tau$. Por ejemplo, para los casos de un ruido blanco o el de una delta de Dirac y su repetición, el espectro es de forma cosenoidal y sus máximos cumplen la misma regla. Cuando se añaden más repeticiones con el mismo retardo generalmente los armónicos se acentúan más y la sensación de tono se incrementa (véase la Figura 3.5).

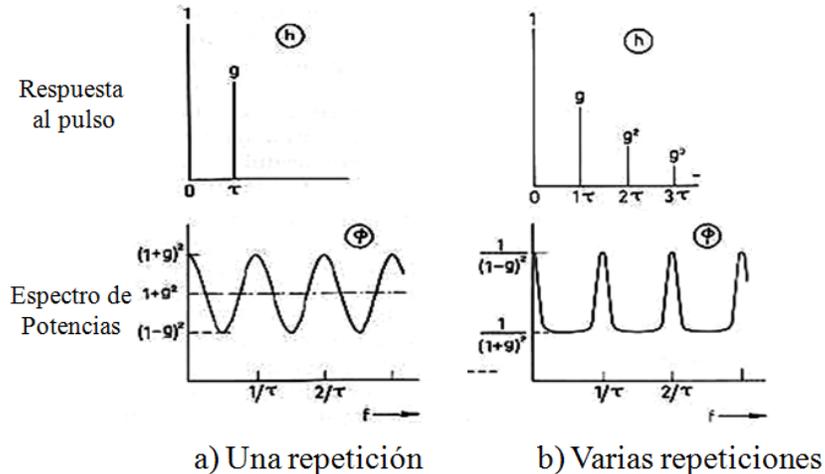


FIGURA 3.5 DOS CASOS DE REPETICIÓN DE SEÑALES CON UN TIEMPO DE RETARDO T .

a) *Respuesta al pulso y Espectro de Potencias de una repetición (con una ganancia g).* b) *Respuesta al pulso y Espectro de Potencias de una serie de repeticiones.*

El fenómeno de Tono por Repetición puede ser escuchado cuando pasa un avión o un tren debido al reflejo del suelo. Otro caso es lo que se conoce en la síntesis de sonido como “flanger”.

Para escuchar ejemplos de este fenómeno se recomienda visitar la página electrónica del autor (Bilsen 2004).

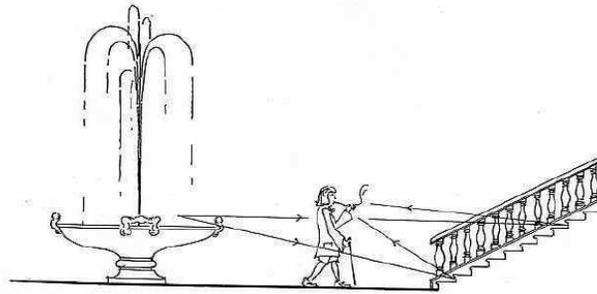


FIGURA 3.6 CHRISTIAN HUYGENS EN EL CASTILLO DE CHANTILLY (BILSEN 2006A)

Como nota histórica relacionado con este fenómeno, Bilsen menciona las indagaciones hechas por Christian Huygens en 1693 (Bilsen 2006a;2006b). El reconocido científico en sus cartas de correspondencia (Huygens 1905), menciona que estando de frente a la escalera del Castillo de Chantilly percibió un cierto tono en el ruido de la fuente ubicada a sus espaldas (véase la Figura 3.6). Intuyó que, análogamente a como se forma un tono musical en tubo de órgano por las reiteradas pulsaciones de aire, la formación del tono en el ruido de la fuente se debe al reflejo del sonido de cada escalón. Huygens logró especificar la frecuencia del tono al compararlo con el tono producido por un tubo de papel enrollado, cerrado por un extremo, y con la misma longitud que la de los escalones (17 plg.). Asimismo determinó que la escalera era la responsable del efecto al no percibir tono alguno cuando estas estaban cubiertas de nieve en invierno. Bilsen reporta que en el Castillo de Chantilly también es posible escuchar un barrido acústico al aplaudir, pero a diferencia de “El Castillo” de Chichen Itzá la fundamental del barrido desciende a unos 370 Hz.

3.3.1 DESARROLLO TEÓRICO

Con un modelo basado en la teoría sobre el fenómeno de Tono por Repetición, Bilsen calcula las frecuencias que caracterizan a la “Cola de Quetzal”. En tal modelo, se considera al barrido acústico como una secuencia de reflexiones del sonido emitido, donde cada reflexión es generada por cada grada de la escalinata. Conforme al fenómeno de Tono por Repetición, en el sonido compuesto son reforzadas ciertas frecuencias por las reflexiones, tales frecuencias son justamente las que caracterizan al eco barrido. En este modelo, las pérdidas de intensidad por distancia o por absorción no son consideradas y para fines prácticos se considera al aplauso emitido por la fuente

como una delta de Dirac. A continuación se muestra el desarrollo teórico con el que se calcularon las frecuencias del barrido acústico.

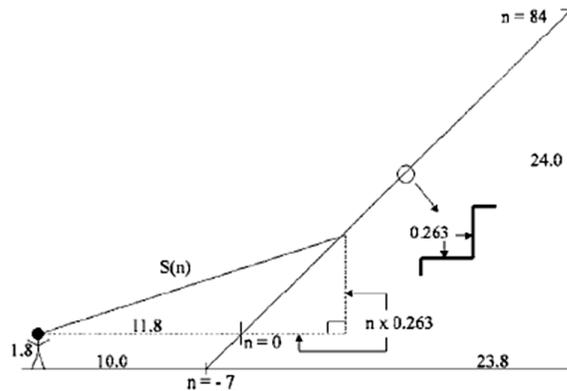


FIGURA 3.7 ESQUEMA DE LA ESCALINATA DE “EL CASTILLO” CON UNA FUENTE SONORA DE FRENTE (BILSEN 2006B).

Las dimensiones consideradas son las utilizadas por Declercq et al, véase la Tabla 3.1

En un principio se calcula la distancia r_n de la fuente (también receptor) a la grada número n de la escalera. La grada con $n = 0$ corresponde a la grada a la altura de la fuente. Utilizando las dimensiones de la pirámide que se muestran en la Figura 3.1 y aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$r_n = \sqrt{(11.8 + nd)^2 + (nh)^2} \quad \text{con } n = -7, -6, \dots, 0, \dots, 84 \quad \text{Ec. 3.3-1}$$

Donde se denota con d y h el tamaño de la huella y la contrahuella respectivamente.

En seguida, a partir del momento en que se emite un pulso por la fuente, se calcula el tiempo t_n que tarda en llegar a la fuente la reflexión de la grada n . Dada la velocidad del sonido v_s y considerando que el sonido toma un camino de ida y de vuelta, el tiempo t_n se calcula simplemente con

$$t_n = 2r_n/v_s \quad \text{con } n = -7, -6, \dots, 0, \dots, 84 \quad \text{Ec. 3.3-2}$$

A continuación se estima el tiempo de retraso Δt_n entre la reflexión de la grada n y su sucesiva (la grada $n + 1$). Entonces

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n \quad \text{con } n = -7, -6, \dots, 0, \dots, 84 \quad \text{Ec. 3.3-3}$$

Conforme al fenómeno de Tono por Repetición, las frecuencias que componen al eco barrido en el tiempo t_n son la frecuencia $1/\Delta t_n$ y sus múltiplos. Entonces, una descripción del eco barrido a través del tiempo está dado por

$$f_m(t_n) = m \frac{1}{\Delta t_n} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} n = -7, \dots, 0, \dots, 84 \\ m = 1, 2, 3 \dots \end{array} \quad \text{Ec. 3.3-4}$$

De esta manera, el eco barrido se compone de los armónicos f_m donde m indica el número de armónico. Cuando $m = 1$, entonces la curva $f_1 = 1/\Delta t_n$ describe al barrido de la “fundamental”. Por último, cabe mencionar que al tiempo t_n se le asocia de manera instantánea las frecuencias $f_m(t_n)$.

3.3.2 RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Utilizando la fórmula anterior, Bilsen procede a comparar su descripción del barrido de frecuencias con el espectrograma mostrado por Declercq *et al.*, correspondiente a la grabación del eco barrido frente a “El Castillo” (véase la Figura 3.4.b y la Figura 3.8). En sus cálculos las magnitudes utilizadas coinciden con las usadas por Declercq *et al.* (véase la Tabla 3.1).

Los resultados de esta comparación se muestran en la Figura 3.8, aquí solo se muestran los primeros cuatro armónicos ($m = 1, 2, 3, 4$). Con respecto a los puntos que describen a la fundamental ($m = 1$), estos empiezan a los 796 Hz y terminan a los 471 Hz en un tiempo aproximado de 0.177s.

De manera breve, Bilsen concluye que las líneas de puntos se ajustan satisfactoriamente a las regiones iluminadas del espectrograma. Por otro lado declara también que el modelo predice correctamente el eco barrido.

Con respecto al uso de diferentes fuentes, Bilsen conjetura que el uso de un ruido continuo de larga duración como fuente no produciría un efecto notable, contrariamente a lo que pasaría en el Castillo de Chantilly. Esto se debe a que en “El Castillo” de Chichén Itzá, por la longitud de la escalinata se mezclarían simultáneamente en el eco muchas reflexiones con muy diversos tiempos de retraso.

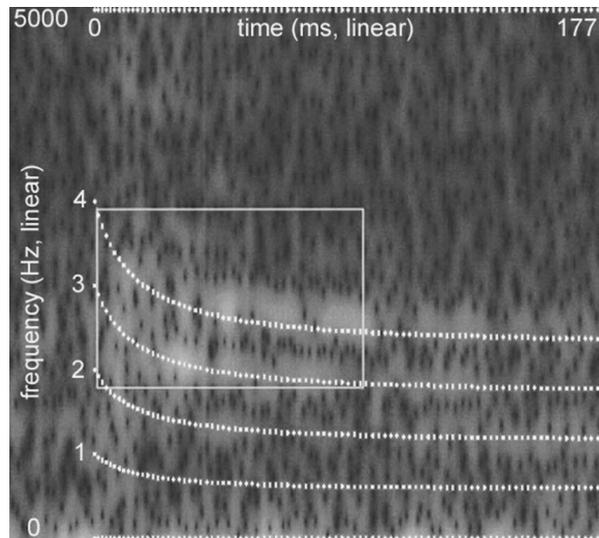


FIGURA 3.8 COMPARACIÓN DE UN ESPECTROGRAMA DEL ECO BARRIDO CON LAS PREDICIONES DE HECHAS POR BILSEN (BILSEN 2006B).

El espectrograma corresponde al elaborado por Declercq et al. (Declercq et al. 2004a) (véase la Figura 3.4.b) y que fue extraído de la página electrónica de D. Lubman.

3.4 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Entre los tres modelos existen muchas coincidencias y diferencias en cuanto sus planteamientos y resultados. Todos los modelos consideran que la interacción entre el sonido impulsivo del aplauso y la escalinata de “El Castillo” genera un barrido de frecuencias con varios armónicos. También en todos los modelos es considerado que para producir un eco barrido, es necesario un sonido corto en tiempo y que contenga energía distribuida continuamente en un amplio rango de frecuencias.

En cada modelo se propone un mecanismo diferente por el cual se genera el eco barrido. En el modelo de Lubman el eco barrido se produce por efecto de la superficie periódica de la escalinata similarmente a la difracción generada por una red. Además esta difracción se comporta según la Ley de Bragg. En el modelo de Declercq *et al.* además de considerarse mediante la Ecuación de Red la difracción producida por la periodicidad de la superficie, se consideran las condiciones de frontera o continuidad derivados de una interface fluido-sólido. Cabe mencionar que el modelo de Declercq *et al.* es el más completo ya que son considerados incluso factores como la forma del frente y la señal de la onda emitida, la reflexión y transmisión de esta onda en la piedra caliza, y hasta la influencia del suelo. Por último en el modelo de Bilsen cada escalón produce una reflexión individual con lo que el eco barrido se genera por una serie de repeticiones sonoras en la que son reforzadas ciertas frecuencias.

Sobre cuál es el mecanismo que reproduce mejor el efecto acústico la respuesta no es muy clara y existe una cierta controversia. Aunque D. Lubman asevera presentar argumentos a favor de su explicación, según Declercq *et al.*, en la grabación del eco barrido se muestran patrones de origen “oscuro” que “no pueden ser el resultado de una Difracción de Bragg pura y un efecto extra debe estar involucrado”. Declercq *et al.* proponen que dentro de estos efectos están las condiciones de continuidad que son derivados de su modelo, no obstante esta aseveración no puede ser completamente demostrada ya que en sus simulaciones no se reproducen dichos patrones. Esto contrasta con el trabajo de Bilsen ya que con un modelo menos desarrollado donde solo se consideran reflexiones sonoras sencillas se obtienen curvas que se ajustan a todos los patrones en el espectrograma mencionado, incluyendo los de origen “oscuro”. Sin embargo el modelo de Tono por Repetición no fue lo suficientemente desarrollado como para poder ofrecer simulaciones del efecto acústico, y así ser comparadas directamente con las hechas por otros

modelos. Dado que los tres modelos o propuestas son desarrollados a diferentes niveles, no se puede llegar a una conclusión de cuál es el modelo que mejor reproduce el efecto.

Sobre la relación entre el efecto de la “Cola de Quetzal” y la fuente sonora, según Declercq *et al.*, existe una “fuerte” dependencia con la distribución de frecuencias en la fuente. Esta aseveración se basa en el número de “bandas de frecuencias” que los autores observaron en varios espectrogramas (véase las Figura 3.4.b, c, d y e) pero no hay elementos gráficos en estos que ayuden a visualizar dichas bandas. Respecto al uso de diferentes fuentes sonoras no se cuenta con una descripción detallada sobre la respuesta del efecto acústico, tanto Bilsen como Declercq *et al.* se limitan hacen algunas conjeturas.

Cabe mencionar que hay una gran carencia de mediciones experimentales, en los trabajos mencionados se trabaja con una única grabación del eco barrido tomada por D. Lubman, la cual es de mala calidad pues la proporción señal-ruido es muy baja. En su artículo Declercq *et al.*, hacen invitaciones a realizar experimentos tanto para analizar la influencia del suelo, como el comportamiento del efecto acústico con diferentes fuentes sonoras.

Se puede decir que por el momento no existe un modelo que reproduzca completamente el efecto de la “Cola de Quetzal”. Tampoco respecto al mecanismo físico que lo produce hay un estudio que valore y valide todas las propuestas hechas al respecto. Por otro lado tampoco existe un estudio que determine específicamente la respuesta del efecto acústico con diferentes fuentes, así como para un receptor y una fuente en posiciones separadas. A partir de estos rubros serán desarrollados los objetivos de los siguientes capítulos.

CAPÍTULO 4

DESARROLLO TEÓRICO

Como se mencionó en el capítulo anterior, los modelos de D. Lubman, Declercq *et al.* y Bilsen, no fueron desarrollados a un mismo nivel, y por lo tanto, no pueden ser comparados de manera directa.

Uno de los objetivos en este capítulo es encontrar las diferencias y relaciones entre los modelos estudiados. Para esto se revisarán las curvas que cada modelo, según sus principios físicos, predice para el barrido de frecuencias de la “Cola de Quetzal”. Posteriormente se hará una comparación y un análisis entre las curvas de los modelos.

En esta tesis se enfatiza en la diferencia que hay entre una curva para el barrido de frecuencias y una simulación del eco barrido. El primero es una descripción temporal de las frecuencias de las principales componentes del eco barrido, y el segundo consiste en una descripción de las variaciones de presión acústica en el receptor (es decir un sonido), donde pueden estar contenidas mucho más componentes frecuenciales.

En base al análisis de los modelos, el propósito final de este capítulo es el de proponer un modelo que pueda generar una simulación de un eco barrido producido por una escalinata. Previo a la proposición se hará una evaluación del modelo de Declercq *et al.*, en relación a las ventajas y desventajas que implica usar este modelo para simular el efecto acústico.

En todos los modelos estudiados, se considera que la escalinata de “El Castillo” es la estructura arquitectónica más relevante en la generación del eco barrido. En este capítulo, toda la teoría será desarrollada para un arreglo general de una escalinata con una fuente y un receptor enfrente, así que primeramente se hará una descripción geométrica de tal arreglo.

4.1 OBJETIVOS

- Obtener las curvas para el barrido de frecuencias para una escalinata en general en base a los tres modelos considerados
- Comparar y analizar las diferencias y semejanzas de las curvas obtenidas
- Revisión y evaluación del modelo Declercq *et al.* con respecto a su capacidad para simular un eco barrido.
- Proponer un modelo que simule el eco barrido generado por una escalinata en general

4.2 ASPECTOS GEOMÉTRICOS

Desde una perspectiva bidimensional, a continuación se desarrolla una descripción geométrica para un arreglo de una escalinata en general con una fuente sonora de frente. En la Figura 4.1 se indican los vectores, distancias y ángulos que se consideran característicos del arreglo.

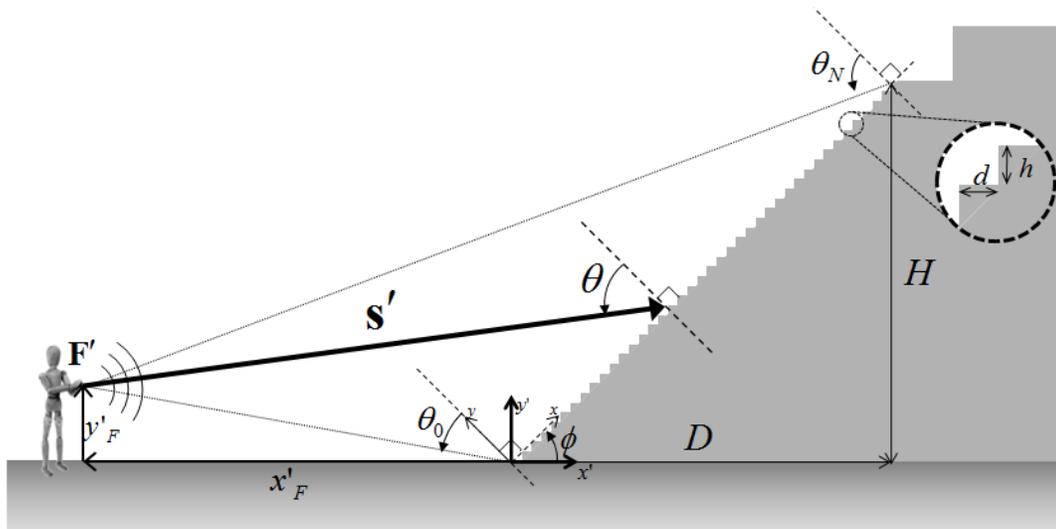


FIGURA 4.1 ESQUEMA DE UNA ESCALINATA Y UNA FUENTE SONORA DE FRENTE

Dimensiones características de la escalinata			
Símbolo	Medida	Símbolo	Medida
H	Altura de la escalinata	h	Altura del escalón (contrahuella)
D	Profundidad de la escalinata	d	Profundidad del escalón (huella)
L	Longitud (diagonal) de la escalinata	a	Distancia entre los cantos de los escalones
ϕ	Ángulo de inclinación de la escalinata	N	Número de escalones

TABLA 4.1 NOTACIÓN PARA LAS DIMENSIONES CARACTERÍSTICAS DE LA ESCALINATA

Empezando por la escalinata, en la Tabla 4.1 se muestran las magnitudes que caracterizan a una escalinata en general y su notación establecida. Los escalones están enumerados por un índice entero n tal que

$$n = 0, 1, 2, \dots, N$$

donde N es el número total de escalones. Cuando $n = 0$ corresponde entonces al suelo y al origen del eje de coordenadas $x'y'$ que se muestra en la Figura 4.1. Se considera que la escalinata tiene una geometría perfecta con escalones de las mismas dimensiones, lo que implica que $H = Nh$ y $D = Nd$. Con esto, el ángulo de inclinación de la escalinata se obtiene por la igualdad

$$\tan \phi = \frac{H}{D} = \frac{h}{d}$$

La *longitud de la escalinata* L es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos lados miden H y D , entonces $L = \sqrt{D^2 + H^2}$. De manera similar, el *periodo de la escalinata* a es la hipotenusa del triángulo formado por los escalones, entonces $a = \sqrt{d^2 + h^2}$. La relación entre la longitud de la escalinata y el periodo es:

$$L = Na$$

Sobre los escalones y perpendicular al plano de dibujo de la Figura 4.1, es trazado el *plano general de la escalinata*, su proyección en el esquema corresponde a la línea:

$$\eta \mathbf{e}' = \eta(d, h)$$

Donde η es cualquier escalar real ($-\infty \leq \eta \leq \infty$). Esta línea está definida de manera que toca las aristas exteriores de los escalones cuando $\eta = n$. Las aristas de los escalones entonces se encuentran en los puntos donde

$$n \mathbf{e}' = n(d, h) \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

Como se ve en la Figura 4.1, frente a la escalinata se ubica una fuente sonora, y su posición está indicada por el vector de posición $\mathbf{F}' = (x'_F, y'_F)$, donde y'_F es la altura de la fuente y x'_F la distancia horizontal a la base de la escalinata. El campo sonoro es medido por un receptor cuya ubicación es indicada por el vector $\mathbf{R}' = (x'_R, y'_R)$. Los vectores \mathbf{F}' y \mathbf{R}' están definidos con respecto al sistema de coordenadas $x'y'$ que tiene una orientación paralela al suelo. En el desarrollo de este capítulo será común colocar la fuente sonora y el receptor en un mismo punto, es decir $\mathbf{F}' = \mathbf{R}'$.

El vector de distancia \mathbf{s}' se define como $\mathbf{s}' = \eta \mathbf{e}' - \mathbf{F}'$, su norma o magnitud s es entonces la distancia de la fuente sonora a un punto dado del plano de la escalinata. Este vector forma un ángulo θ con la normal al plano de la escalinata y es el ángulo de incidencia (véase la Figura 4.1). Cuando el vector \mathbf{s}' apunta al escalón n , es decir al punto $n(d, h)$, este es denotado como \mathbf{s}'_n , así mismo, se denota su magnitud como s_n y su ángulo de incidencia como θ_n . La distancia s_n se obtiene mediante la igualdad

$$s_n' = \sqrt{(x'_F - nd)^2 + (y'_F - nh)^2} \quad \text{Ec. 4.2-1}$$

Por la longitud finita de la escalinata, el vector \mathbf{s}' esta limitado inferiormente por la base de la escalinata ($n = 0$), y superiormente por el último escalón ($n = N$) (véase la Figura 4.2). Por la ecuación anterior la distancia de la fuente a estos puntos límites son

$$s_0' = \sqrt{(x'_F)^2 + (y'_F)^2} \quad \text{y} \quad s_N' = \sqrt{(x'_F - D)^2 + (y'_F - H)^2} \quad \text{Ec. 4.2-2}$$

Dado que $\mathbf{s}'_0 = -\mathbf{F}'$, entonces s'_0 representa también la distancia directa de la fuente al origen de sistema $x'y'$.

Para finalizar, el vector de distancia \mathbf{r}' se define como $\mathbf{r}' = \eta \mathbf{e}' - \mathbf{R}'$, r es su magnitud, y ϑ es el ángulo con respecto a la normal al plano de la escalinata. A diferencia de θ , el ángulo ϑ se mide en sentido contrario (véase la Figura 4.5).

4.2.1 ROTACIÓN DE LOS EJES

Para obtener expresiones matemáticas simplificadas, se aplica una rotación al sistema de coordenadas hasta que el eje x sea paralelo a la escalinata (véase la Figura 4.2). Esto equivale a una rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj por un ángulo ϕ que es el ángulo de inclinación de la escalinata. La transformación o translación de cualquier vector en el nuevo sistema de coordenadas xy se obtiene utilizando una matriz de rotación. Por ejemplo, en el sistema rotado, las coordenadas x_F y y_F del vector de posición de la fuente (\mathbf{F}) se consiguen mediante la operación

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_F \\ y'_F \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 4.2-3}$$

Aquí x'_F y y'_F son las coordenadas del vector \mathbf{F}' del sistema sin rotación $x'y'$. En el desarrollo del capítulo, la coordenada y_F será una cantidad muy usada, ya que para todos los vectores

$\mathbf{s} = (x_s, y_s)$ (véase la Figura 4.2), se cumple que $y_F = y_s$. Además, dicha coordenada representa también la distancia directa entre la fuente sonora y el plano de la escalinata.

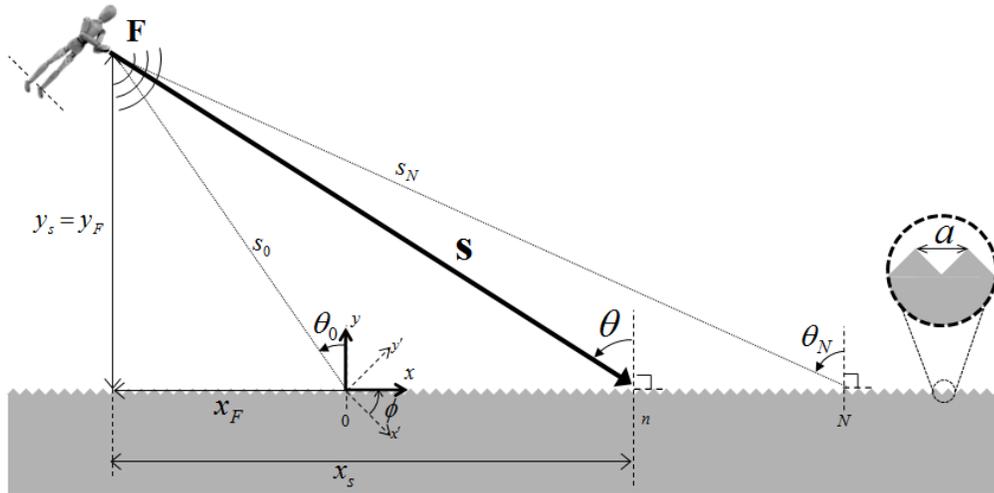


FIGURA 4.2 ESQUEMA DE UNA ESCALINATA VISTA DE MANERA HORIZONTAL Y UNA FUENTE SONORA.

La translación del vector $\mathbf{s}' = (x'_s, y'_s)$ al vector $\mathbf{s} = (x_s, y_s)$ no afecta en su magnitud s , como en su ángulo de incidencia θ . En el sistema rotado xy , las expresiones relacionadas con θ resultan más simples, por ejemplo, el ángulo de incidencia θ_n se obtiene mediante la igualdad

$$\tan \theta_n = \frac{x_s}{y_s} = \frac{na - x_F}{y_F}$$

Una cantidad que será muy útil es el $\text{sen } \theta$, observando la Figura 4.2 y aplicando el *Teorema de Pitágoras* se encuentra que

$$\text{sen } \theta = \frac{x_s}{s} = \frac{\sqrt{s^2 - y_F^2}}{s} \tag{Ec. 4.2-4}$$

En el caso de los ángulos θ_n a los escalones

$$\text{sen } \theta_n = \frac{na - x_F}{s_n} \tag{Ec. 4.2-5}$$

Con la rotación aplicada es más fácil ahora describir el perfil de la escalinata. En la Figura 4.3 se muestra la superficie periódica triangular que dibuja la siguiente función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{d}{h}x, & 0 \leq x \leq \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + d^2}} \\ -\frac{h}{d}x, & \frac{-d^2}{\sqrt{h^2 + d^2}} \leq x \leq 0 \end{cases} \tag{Ec. 4.2-6}$$

La función $g(x)$ está adecuada para cualquier proporción en los escalones. El periodo a y la amplitud o altura b de la función triangular $g(x)$ se definen como:

$$a = \sqrt{h^2 + d^2} \quad \text{y} \quad b = \frac{hd}{a} \quad \text{Ec. 4.2-7}$$

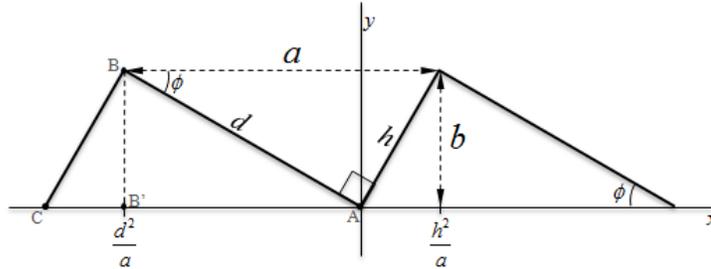


FIGURA 4.3 FUNCIÓN PERIÓDICA TRIANGULAR

El periodo a de la superficie periódica es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\triangle ABC$, por lo tanto $a = \sqrt{h^2 + d^2}$. La amplitud b , se deduce de calcular el $\text{sen } \phi$ en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$, ya que $\text{sen } \phi = h/a = b/d$, entonces $b = dh/a$.

En específico, la superficie de la escalinata se conforma por todos los puntos (x, y) tales que $y = g(x - d^2/a) - b$. De esta manera la superficie periódica queda justo por debajo del plano general, que en el sistema rotado xy , es justamente el eje x . Las aristas ahora se encuentran ahora en los puntos

$$ne = n(a, 0) \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad \text{Ec. 4.2-8}$$

Para finalizar, con respecto al sistema de coordenadas rotado xy la distancia s_n adquiere la forma

$$s_n = \sqrt{y_F^2 + (na - x_F)^2} \quad \text{Ec. 4.2-9}$$

4.2.2 DIMENSIONES DE "EL CASTILLO" Y POSICIÓN DE LA FUENTE

Todo el desarrollo teórico de este capítulo será aplicado a la escalinata norte de "El Castillo" que es la más reconstruida. Como características generales, la edificación es de planta cuadrada (55.50m. por lado) y se compone de nueve cuerpos escalonados y en talud, con un templo en la parte superior. Los cuerpos escalonados dan una altura de 24 m. que junto con el templo dan una altura total de 30m. El acceso se hace por cuatro grandes escaleras, de las cuales la más importante es la del lado norte, pues conduce a la fachada principal. Junto con la oeste estas son las escalinatas más reconstruidas actualmente. Cada una de estas escalinatas cuenta con 91 escalones, este número tiene relación directa con los días del año ya que juntando las 4

escalinas y el escalón que rodea al edificio en la planta alta, da un total 365 escalones (Marquina 1964) .

Cabe mencionar que en todos los trabajos relativos a la “Cola del Quetzal” no se da una referencia sobre las medidas de la escalinata utilizadas. Al respecto sólo pude encontrar una fuente bibliográfica (Arochi 2005) donde se especifica que los escalones miden 0.27m de alto (h) por 0.26 de ancho (d); además de que las escalinatas cuentan a los lados con balaustras que tienen una inclinación próxima a los 45° (ϕ), tienen 34.18 metros de largo (L) y están separadas por 8.85m. En este capítulo se considerarán unas medidas aproximadas a estas tomando en cuenta una escalinata de 45° de inclinación exactos y 24.0m de alto. Estas medidas también son aproximadas a los considerados por los modelos analizados (véase la Tabla 3.1). Cabe recalcar que todavía no se ha hecho un estudio topográfico completo y detallado de “El Castillo”. En la siguiente tabla se muestran las medidas que serán consideradas en este capítulo, tanto en las dimensiones de la escalinata, como en la posición de la fuente, y como en la velocidad del sonido.

Medidas con respecto a la escalinata				Medidas con respecto a la posición de la fuente				Velocidad del sonido	
N	91			x'_F	-10.00 m	x_F	-5.80 m	v_s	343 m/s
H	24.00 m	ϕ	45.0 °	y'_F	1.80 m	y_F	8.34 m		
D	24.00 m	L	33.94 m	s_θ	10.16 m	θ_0	34.8 °		
h	0.2637 m	a	0.373 m	s_N	40.61 m	θ_N	78.1 °		
d	0.2637 m	b	0.186 m						

TABLA 4.2 DIMENSIONES Y MEDIDAS CONSIDERADAS

4.3 COMPARACIÓN DE LAS CURVAS PARA EL BARRIDO DE FRECUENCIAS

Excluyendo el trabajo de D. Lubman, en los trabajos de Declercq *et al.* y Bilsen se muestra una ecuación para describir temporalmente las principales componentes frecuenciales del eco barrido (véase las Ec. 3.2-2 y Ec. 3.3-4). En esta sección se deducirá la ecuación faltante y se revisarán las demás para posteriormente graficarlas y compararlas entre sí. Asimismo se examinarán dichas ecuaciones mediante la diferencia de camino y finalmente se analizarán en relación con las dimensiones de la escalinata.

La ecuación (o curvas) para el barrido de frecuencias consiste en una función $f(t)$ de la frecuencia f con respecto al tiempo t . El tiempo t es medido desde que de la fuente sonora se emite un impulso. Al estar el eco barrido está compuesto por varios armónicos, entonces la ecuación en si representa una familia de curvas $f_m(t)$ donde m indica el número de armónico. Estas curvas cumplen que

$$f_m(t) = m f_1(t) \quad \text{con } m = 1, 2, 3 \dots$$

La curva $f_1(t)$ corresponde entonces a la fundamental.

En los siguientes desarrollos teóricos, se parte primero de un escenario general e ideal. Se considera que la escalinata es una superficie periódica infinita (véase la Figura 4.2), y además que es perfectamente reflejante. El pulso emitido por la fuente consiste en una onda esférica que contiene una distribución de frecuencias uniforme e infinita, como en una delta de Dirac. Se considera que el aire es un medio homogéneo y no dispersivo por lo que el sonido viaja en todas direcciones y frecuencias a una velocidad constante v_s .

Poniendo en contexto las curvas $f_m(t)$, estas son las que modulan las frecuencias de las componentes $A_m \cos(2\pi f_m(t) \cdot t)$, y estas componentes son las que constituyen a un barrido de frecuencias "ideal" que tiene la forma:

$$p(\mathbf{F}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(2\pi f_m(t) \cdot t)$$

Aquí $p(\mathbf{F}, t)$ denota la onda sonora producto de la interacción de la onda emitida por la fuente con la superficie periódica y que es evaluada en el lugar de la fuente.

4.3.1 CURVAS DERIVADAS DE LA ECUACIÓN DE RED

El siguiente desarrollo está basado en la proposición de D. Lubman de que la escalinata funciona como una red de difracción (Lubman 1998b). La formulación inicia considerando la Ecuación de Red (véase la Ec. 2.3-22):

$$a(\sin \vartheta_m - \sin \theta) = m\lambda$$

Donde a es el periodo de la superficie y $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Para una onda compuesta por muchas longitudes de onda que incide con un cierto ángulo θ , esta ecuación describe por cada longitud de onda λ , las direcciones ϑ_m en que se difracta o separa la reflexión de la onda incidente. Cada ϑ_m corresponde a un "orden m de difracción". Dado que la fuente se encuentra en la misma posición que el receptor ($\mathbf{F} = \mathbf{R}$), entonces solo nos interesan los órdenes de difracción con la misma dirección que la onda incidente, es decir $-\vartheta_m = \theta$. Entonces la Ecuación de Red se convierte en:

$$-2a \sin \theta = m\lambda \quad \text{Ec. 4.3-1}$$

Es decir que la Ecuación de Red deriva en la Ley de Bragg (Ec. 2.3-20) cuando $-\vartheta_m = \theta$. Aunque en este caso se rijan por la misma ecuación, cabe diferenciar que la difracción producida por la escalinata no ocurre de manera análoga a la producida por un cristal. Entre ambos casos los elementos periódicos son geoméricamente muy diferentes, y además el ángulo de incidencia se mide de manera distinta (véase la Figura 2.4 y la Figura 4.2).

Siguiendo con el desarrollo, dependiendo del ángulo de incidencia θ , la Ec. 4.3-1 especifica el conjunto de longitudes de onda que serán propagados de regreso a la fuente. En término de frecuencias, recordando que $v_s = f\lambda$, esta ecuación³ es equivalente a

$$f_m = \frac{mv_s}{2a \sin \theta} \quad \text{Ec. 4.3-2}$$

Por la geometría del arreglo y el frente esférico de la onda emitida, esta onda incide con un ángulo θ diferente en cada punto del plano de la escalinata. Entonces por cada punto del plano se registra en el receptor un conjunto diferente de frecuencias. Debido a la distancia entre la

³ Por simplicidad se omitirá el signo negativo de la Ec. 4.3-1 así como en sus derivadas. Este cambio no es relevante ya que sólo afecta en el signo de m . Como se vio en la Sección 2.3.5, el signo de m se deriva de una convención para enumerar los órdenes de difracción. Con la omisión del signo el orden " m " corresponde ahora al orden " $-m$ ".

fuente/receptor y la superficie periódica, las frecuencias se registran con un cierto retardo temporal, y esto es lo que genera un barrido de frecuencias. Para obtener una descripción temporal de la frecuencia f_m es necesario expresar el ángulo θ en función del tiempo. De la Ec. 4.2-4 (véase también la Figura 4.2) se puede ver que

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{s^2 - y_F^2}}{s} = \sqrt{1 - \frac{y_F^2}{s^2}} \quad \text{Ec. 4.3-3}$$

La variable t es el tiempo en que tarda en ir el sonido a un punto de la escalinata a una distancia s , y regresar por la misma trayectoria a la fuente. Durante este tiempo t la distancia recorrida por el sonido es igual a $2s$. Dado que el sonido se movió a velocidad constante v_s esta distancia también es igual a $v_s t$. Entonces $2s = v_s t$, o bien

$$s = \frac{1}{2} v_s t \quad \text{Ec. 4.3-4}$$

Introduciendo esta igualdad en la Ec. 4.3-3 se obtiene entonces que:

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2y_F}{v_s t}\right)^2} \quad \text{Ec. 4.3-5}$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. 4.3-3, se llega a la expresión final para el barrido de frecuencias $f_m(t)$ desarrollada a partir de la Ecuación de Red:

$$f_m(t) = \frac{mv}{2a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2y_F}{v_s t}\right)^2}} \quad \text{Ec. 4.3-6}$$

En un análisis temporal, para que el factor dentro de la raíz sea positivo, el tiempo debe ser tal que $t > 2y_F/v_s$. Esto tiene sentido ya que la distancia más corta que puede recorrer el sonido resulta ser $2y_F$. Considerando una escalinata infinita, cuando se deja correr el tiempo al infinito ($t \rightarrow \infty$), el denominador $\sqrt{1 - (2y_F/v_s t)^2}$ tiende a 1, por lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_m(t) = \frac{mv_s}{2a} = mf_{2a} \quad \text{Ec. 4.3-7}$$

Esto quiere decir que para el caso de la fundamental $f_1(t)$, esta curva se va acercando asintóticamente con el tiempo a la frecuencia $v_s/2a$, esta frecuencia será denominada como f_{2a} . En general la ecuación anterior indica que cada armónico $f_m(t)$ del barrido de frecuencias tiende a su respectiva asíntota mf_{2a} . Esta frecuencia f_{2a} está determinada por el periodo a de la escalinata

y por lo tanto por las dimensiones de los escalones (véase la Ec. 4.2-7). Visto de otra forma, f_{2a} es la frecuencia que corresponde a una longitud de onda igual al doble del periodo a .

En el caso de una escalinata finita de N escalones, el reflejo de la escalinata se encuentra limitado por el vector \mathbf{s}_0 , que corresponde a la intersección con el suelo, y por el vector \mathbf{s}_N , que corresponde al último escalón (véase la Figura 4.2). Considerando la Ec. 4.3-4 el tiempo está acotado de la siguiente manera

$$2s_0/v_s \leq t \leq 2s_N/v_s \quad \text{Ec. 4.3-8}$$

4.3.2 CURVAS DE DIFRACCIÓN DE BRAGG SEGÚN DECLERCQ ET AL.

Como se vio en la Sección 3.2.2, Declercq *et al.* obtuvieron una ecuación para el barrido de frecuencias (véase la Ec. 3.2-2) la cual afirman que es producto de la Difracción de Bragg. Dicha ecuación fue derivada a partir de la Ec. 3.2-1, en la cual, si se substituyen las igualdades $k_{ix} = k \sin \theta$ (véase la Ec. 2.3-28) y $k = 2\pi/\lambda$ se obtiene entonces la Ley de Bragg:

$$2a \sin \theta = m\lambda \quad \text{Ec. 4.3-9}$$

La ecuación para el barrido de frecuencias (Ec. 3.2-2) fue obtenida con razonamientos similares a los de la sección anterior. No obstante dicha ecuación esta expresada de manera que el tiempo está en función de la frecuencia, es decir $t = t(f)$, y para poder ser comparada es necesario invertirla de manera que la frecuencia sea una función del tiempo, o sea $f = f(t)$. A continuación se muestran los pasos para despejar la frecuencia.

Primeramente, no es necesario aplicar ninguna rotación ya que la Ec. 3.2-2 fue formulada con un sistema de coordenadas paralelo a la escalinata (véase la Figura 4.2 y la Figura 3.2). Simplificando el argumento dentro del arco tangente, la Ec. 3.2-2 se puede escribir como:

$$t = \frac{y_F}{v \cos \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\sqrt{\left(\frac{2a}{mv} f \right)^2 - 1} \right) \right]} \quad \text{Ec. 4.3-10}$$

Definiendo a una nueva variable β como $\beta = \frac{2a}{mv} f$ y utilizando las igualdades $\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$ y $\tan^{-1} x = \sin^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)$ para $-\infty < x < \infty$ (Jeffrey & Dai 2008), la función coseno de la ecuación anterior se simplifica de la siguiente manera

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\sqrt{\beta^2 - 1} \right) \right] = \sin \left[\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{(\beta^2 - 1) + 1}} \right) \right] = \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}}$$

De esta manera la Ec. 4.3-10 se reduce a

$$t = \frac{y_F}{v} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}}}$$

Despejando β se tiene que

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_F}{vt}\right)^2}}$$

Sustituyendo ahora $\beta = \frac{2a}{mv} f$ y despejando la frecuencia f finalmente se llega a una expresión para el barrido de frecuencias en función del tiempo:

$$f_m(t) = \frac{mv}{2a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_F}{v_s t}\right)^2}} \quad \text{Ec. 4.3-11}$$

En comparación de la ecuación derivada de la Ecuación de Red (véase la Ec. 4.3-6), lo que destaca a primera vista es que estas ecuaciones son casi idénticas excepto por un factor de 2 dentro de la raíz cuadrada. Esto sugiere que en los cálculos de Declercq *et al.* se consideró que

$$s = v_s t \quad \text{Ec. 4.3-12}$$

y por lo tanto se consideró sólo la mitad del trayecto de ida y regreso del sonido (el cual mide una distancia de $2s$, véase la Ec. 4.3-4). Esto afecta a las estimaciones temporales reduciéndolas a la mitad de lo debido, por ejemplo, en el caso de una superficie infinita el tiempo está limitado al intervalo $y_F/v_s \leq t < \infty$, y en el caso de una escalinata finita de N escalones el tiempo se acota a

$$s_0/v_s \leq t \leq s_N/v_s \quad \text{Ec. 4.3-13}$$

(compárese con la Ec. 4.3-8). Más adelante se analizará sobre las consecuencias de este error en el trabajo de Declercq *et al.*

Regresando a la Ec. 4.3-11, cuando se deja correr el tiempo al infinito se obtiene de nuevo que $\lim_{t \rightarrow \infty} f_m(t) = \frac{mv}{2a}$. Por lo que el barrido de frecuencias tiene mismo comportamiento asintótico que el formulado a partir de la Ecuación de Red.

4.3.3 CURVAS DERIVADAS DE LA TEORÍA DE TONO POR REPETICIÓN

Como se vio en la Sección 3.3.1, con un desarrollo basado en la teoría de Tono por Repetición, Frans A. Bilsen obtiene una ecuación para el barrido de frecuencias de “El Castillo” (véase la Ec. 3.3-4). En esta sección se reformulará dicha ecuación para una escalinata en general con respecto al sistema rotado xy .

Primero se calcula la distancia de la fuente a cada escalón n , respecto al sistema de coordenadas $x'y'$ de la Figura 4.1, esta distancia es $s'_n = \sqrt{(x'_F - nd)^2 + (y'_F - nh)^2}$ (véase al Ec. 4.2-1). Cabe mencionar que esta ecuación difiere de la usada por Bilsen (véase la Ec. 3.3-1) por que en su desarrollo los escalones están numerados de manera distinta, siendo el escalón $n = 0$ el que se encuentra justo a la altura de la fuente (véase la Figura 3.7). Existe un error en su estimación de la distancia porque se fuerza la ecuación a esta coincidencia, sin embargo este error puede ser despreciable (véase el Apéndice 7.1). Continuando con la distancia s'_n , con respecto al sistema de coordenadas rotado xy de la Figura 4.2, este es de la forma

$$s_n = \sqrt{y_F^2 + (na - x_F)^2}$$

El siguiente paso es calcular el tiempo en que llega a la fuente el reflejo de cada escalón. Aquí también se considera el trayecto de ida y vuelta que recorre el sonido (a velocidad constante v_s), es decir

$$s_n = \frac{1}{2}v_s t_n \quad \text{Ec. 4.3-14}$$

A continuación se estima el tiempo de retraso τ entre dos reflexiones consecutivas, este simplemente es $\tau = t_{n+1} - t_n$. De acuerdo con Bilsen, por la teoría de Tono por Repetición, al tiempo t_n se refuerzan las frecuencias que corresponden a $1/\tau$ y los armónicos de este, es decir las frecuencias $f = m/\tau$ donde $m = 1, 2, 3, \dots$. De esta manera se obtiene una descripción temporal para el barrido de frecuencias:

$$f_m(t_n) = m \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \quad \text{con} \quad t_n = \frac{2s_n}{v_s} = \frac{2}{v_s} \sqrt{y_F^2 + (na - x_F)^2} \quad \text{Ec. 4.3-15}$$

Considerando una superficie infinita, entonces $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. A comparación de los desarrollos anteriores, la frecuencia está determinada de manera discreta en la línea del tiempo. Desde el punto de vista físico, la Ec. 4.3-15 no representa más que un fenómeno de interferencia, trasladando esta ecuación en términos de longitudes de onda (utilizando la Ec. 4.3-14 junto con $\lambda f = v_s$) se obtiene que

$$2(s_{n+1} - s_n) = m\lambda \quad \text{Ec. 4.3-16}$$

Lo que indica que cuando interfieren dos reflexiones consecutivas, las longitudes de onda que son reforzadas son aquellas que son múltiplos exactos de la diferencia de camino $\Lambda = 2(s_{n+1} - s_n)$. Este es el caso típico de la interferencia constructiva (véase la Sección 2.3.1). En el trabajo de Bilsen no se hace una distinción clara de conceptos entre lo que son las cualidades del estímulo físico, es decir el sonido producto de la interferencia, y las cualidades psicofísicas del tono que se percibe el escucha.

Al calcular el valor de f_m cuando el tiempo tiende al infinito ($t_n \rightarrow \infty$), dado que $t_n = 2s_n/v_s$ se obtiene entonces que

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} f_m(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{t_{n+1} - t_n} = \frac{mv_s}{2} \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - s_n}$$

De manera que es necesario calcular el límite de la diferencia $s_{n+1} - s_n$ cuando n tiende al infinito. Utilizando la igualdad $x + y = \frac{(x+y)(x-y)}{x-y} = \frac{x^2-y^2}{x-y}$, y multiplicado y dividiendo por $1/n$ simultáneamente (véase el Apéndice 7.2), se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - s_n = a$$

Lo cual resulta lógico, ya que para los escalones lejanos la trayectoria del sonido es casi paralela al plano de la escalinata, y por lo tanto la diferencia $s_{n+1} - s_n$ es cercana a la distancia entre las esquinas de los escalones. En resumen, el valor de $f_m(t_n)$ cuando el tiempo tiende al infinito es entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_m(t_n) = \frac{mv_s}{2a}$$

De igual manera que en los desarrollos anteriores, las asíntotas de los armónicos $f_m(t)$ son respectivamente los armónicos de la frecuencia $f_{2a} = \frac{v_s}{2a}$.

Con respecto los valores que puede tomar el tiempo t_n , de la Ec. 4.3-15 se puede ver que el valor mínimo es próximo a $2y_F/v_s$ y este se alcanza para la n más cercana al valor x_F/a . Por último, en el caso de una escalinata finita de N escalones, por la Ec. 4.3-14 la función $f_m(t_n)$ se acota entonces a los tiempos

$$t_0 = \frac{2s_0}{v_s} \leq t_n \leq \frac{2s_N}{v_s} = t_N \quad \text{Ec. 4.3-17}$$

4.3.4 RESULTADOS: GRÁFICA DE LAS CURVAS PARA EL BARRIDO DE FRECUENCIAS

Utilizando las medidas de la Tabla 4.2 se graficaron las tres ecuaciones para el barrido de frecuencias, estas curvas se muestran en la Figura 4.4. Como se esperaba, todas estas ecuaciones describen en efecto un barrido de frecuencias descendiente, las curvas comienzan con una frecuencia muy alta (algunas con una frecuencia en el infinito) y descienden de manera que se asientan cerca de su respectiva asíntota y lentamente se van acercando a esta. Como fue descrito anteriormente, las tres ecuaciones para el barrido coinciden en que tienden a los armónicos de la frecuencia $f_{2a} = \frac{v_s}{2a}$. Utilizando las medidas de la Tabla 4.2 se obtiene como resultado:

$$f_{2a} = 461.1\text{Hz.}$$

Como se observa en la Figura 4.4, las curvas derivadas de la Ecuación de Red como la de Tono por Repetición describen prácticamente la misma curva, la razón de esta similitud se explicará en la siguiente sección. Por el contrario, las curvas provenientes de la ecuación de Declercq *et al.* difieren de todos los demás, esto se debe a que esta ecuación es equivalente a la derivada de la Ecuación de Red pero es distinta por la ausencia de un factor de 2 (véase la pag. 80). Omitiendo esta discrepancia puede decirse que todas las ecuaciones describen las mismas curvas para una escalinata infinita.

En el caso de una escalinata finita, el barrido de frecuencias está limitado a un intervalo de tiempo y por lo tanto las frecuencias también están acotadas. En la Tabla 4.3 se muestra el tiempo inicial y final respecto a cada una de las ecuaciones, en la Figura 4.4 estos tiempos corresponden a las líneas verticales punteadas. En dicha figura las intersecciones de estas líneas con las curvas corresponden a las frecuencias iniciales y finales del barrido, sus valores también se muestran en la Tabla 4.3. Si se observa la Figura 3.4 de Declercq *et al.*, se encontrará que los límites temporales de la ventana de referencia coinciden con los límites temporales de la Tabla 4.3.

Como muestran las Ec. 4.3-8 y Ec. 4.3-17, tanto la ecuación de Bilsen como la derivada de la Ecuación de Red, tienen las mismas cotas temporales y por lo tanto para ambos la duración del barrido es la misma: $\Delta t = (2s_N - 2s_0)/v_s$. En el caso de la ecuación de Declercq *et al.*, los límites en tiempos son reducidos a la mitad y de esta manera también la duración del barrido: $\Delta t = (s_N - s_0)/v_s$. Esta reducción en la duración del barrido de frecuencias, podría ser la razón por la que Declercq *et al.* encontraran patrones fuera de la ventana de referencia en el

espectrograma de la grabación del eco barrido (véase la Figura 3.4 y la Figura 3.8). Dichos autores determinaron que estos patrones “no pueden ser producto puro de la Difracción de Bragg”. Sin embargo, como se mostró en la Sección 4.3.1, la Ley de Bragg está directamente relacionado con el barrido de frecuencias derivado de la Ecuación de Red, y en el siguiente capítulo se mostrara que el eco barrido de “El Castillo” es satisfactoriamente descrito estas curvas (véase la Sección 5.5.1). Esta situación afecta gravemente los resultados del trabajo de Declercq *et al.*, pues gran parte de los análisis y conclusiones se basan en la presencia de estos patrones de origen desconocido (véase la Sección 3.2.4).

Con respecto a las frecuencias iniciales y finales, se puede decir que todos los modelos para el barrido predicen valores muy cercanos. El hecho de que tales frecuencias sean iguales para el modelo de Declercq *et al.* y el de la Ecuación de Red, sugiere que el error en la ecuación de Declercq *et al.* es solo de naturaleza temporal. Las frecuencias finales es de notar que son casi idénticos entre si y muy cercanos a la frecuencia f_{2a} . Más adelante, en la Sección 4.3.6 se mostrará la relación de entre las dimensiones de la escalinata con la frecuencia inicial y la final.

Ecuación	Tiempos (ms)			Frecuencias para $m = 1$ (Hz)		
	Inicial	Final	Duración	Inicial	Final	Intervalo
Ecuación de red	59.2	236.8	177.5	805.8	469.8	335.9
Difracción de Bragg	29.6	118.4	88.8	805.8	469.8	335.9
Tono por Repetición	59.2	236.8	177.5	789.0	469.9	319.1

TABLA 4.3 TIEMPOS Y FRECUENCIAS INICIALES Y FINALES DE LAS ECUACIONES PARA EL BARRIDO DE FRECUENCIAS.

*Considerando las medidas de la Tabla 4.2 se muestran los tiempos iniciales (t_0) y finales (t_N), así como las frecuencias iniciales ($f_{1,0}$) y finales ($f_{1,N}$) de la fundamental ($m = 1$); según las ecuaciones para el barrido de frecuencia: Ecuación de Red (Ec. 4.3-6), Difracción de Bragg según Declercq *et al.* (Ec. 4.3-11) y Tono por Repetición (Ec. 4.3-15).*

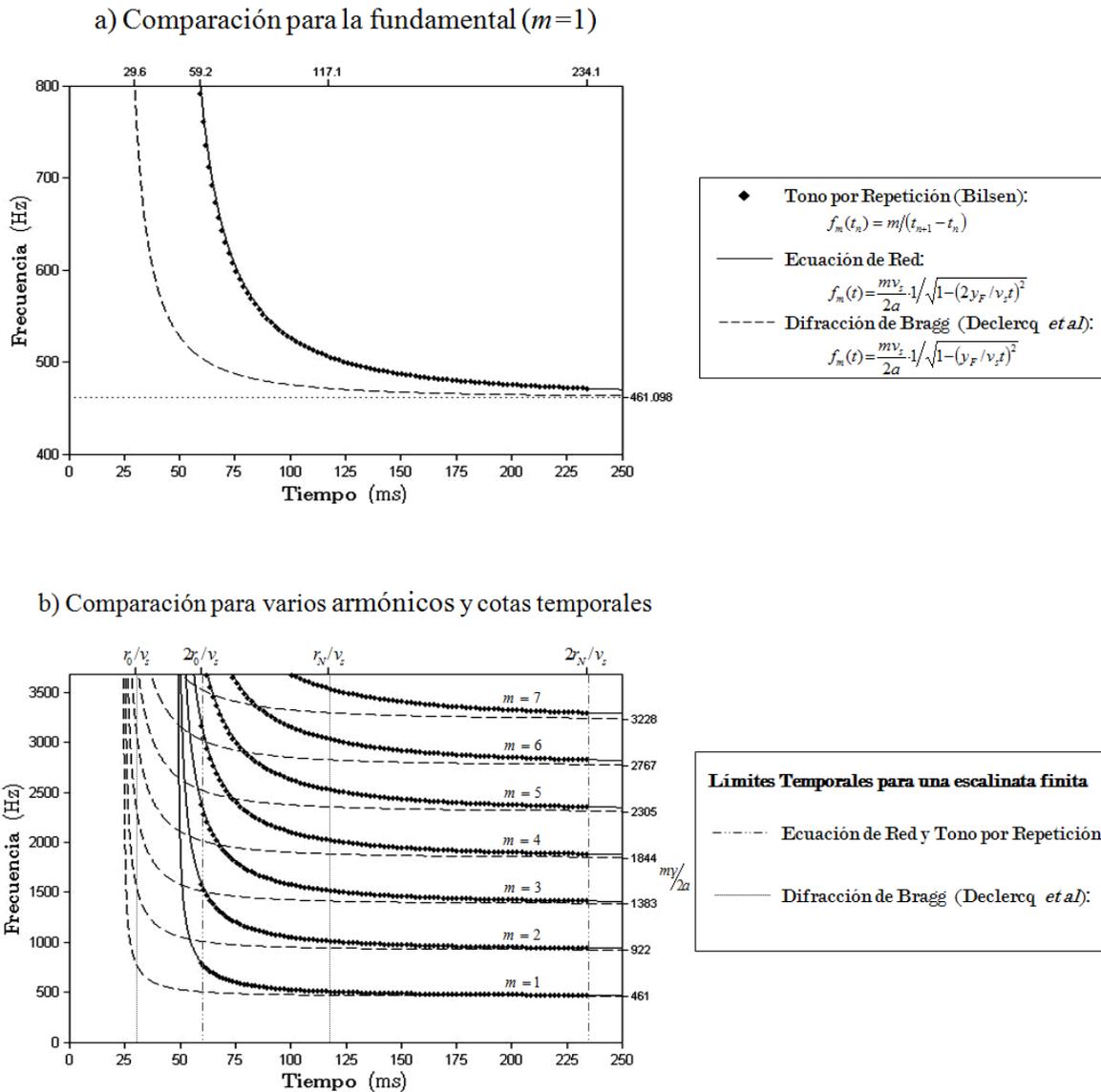


FIGURA 4.4 COMPARACIÓN DE LAS ECUACIONES PARA EL BARRIDO DE FRECUENCIAS $f_m(t)$.

Considerando las medidas de la Tabla 4.2 y una escalinata infinita, en esta figura se comparan las ecuaciones para el barrido $f_m(t)$ derivados de la Ecuación de Red (Ec. 4.3-6), la Difracción de Bragg según Declercq et al. (Ec. 4.3-11) y la teoría de Tono por Repetición de Bilsen (Ec. 4.3-15). a) Comparación para la fundamental $f_1(t)$. b) Comparación para varios armónicos. Dependiendo de la ecuación, las líneas verticales punteadas indican los límites temporales del barrido de frecuencias, para el caso de una escalinata finita como la de “El Castillo” (véase la Tabla 4.3). En el eje de las frecuencias (véase a la derecha) están marcados los múltiplos de la asíntota $f_{2a} = v_s/2a = 461\text{Hz}$ (véase la Ec. 4.3-7)

4.3.5 ANÁLISIS: COMPARACIÓN DE LA DIFERENCIA DE CAMINO

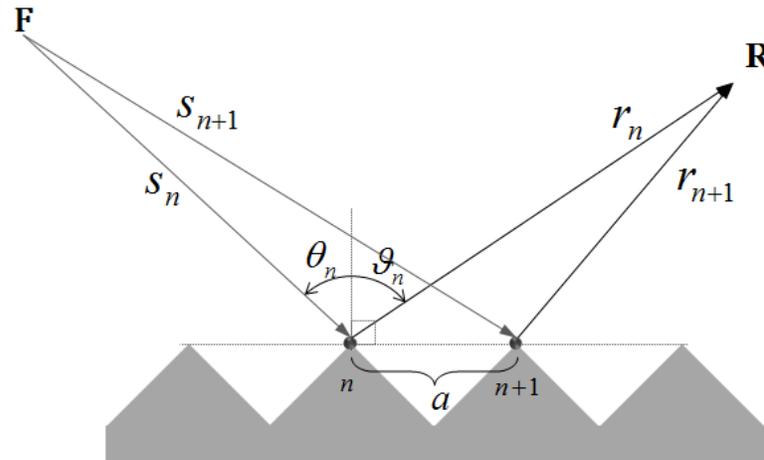


FIGURA 4.5 DIFERENCIA DE CAMINO PARA ESCALONES ADYACENTES

La similitud que hay entre las curvas procedentes de la Ecuación de Red (Ec. 4.3-6) y de la teoría de Tono por Repetición (Ec. 4.3-15) en la Figura 4.4, puede explicarse por medio de la diferencia de camino, como se expondrá a continuación. Partiendo de la situación general en la que la fuente (F) y el receptor (R) no se encuentran en el mismo punto (véase la Figura 4.5), la diferencia de camino Λ entre una trayectoria del sonido que sale de F y llega a R pasando por el escalón n , y otra que pasa por el escalón $n + 1$, es igual a

$$\Lambda = (s_n + r_n) - (s_{n+1} + r_{n+1}) = r_n - r_{n+1} + s_n - s_{n+1}$$

Esta diferencia de distancia puede expresarse en términos del periodo a , y los ángulos θ_n y ϑ_n relativos a la fuente y el receptor respectivamente (véase la Figura 4.5). Utilizando la ley de los cosenos y la serie de Maclaurin (véase el Apéndice 7.3), los términos $r_n - r_{n+1}$ y $s_n - s_{n+1}$ son iguales a las siguientes series de sumas:

$$r_n - r_{n+1} = a \sin \vartheta_n - \frac{a^2}{2r_n} \cos^2 \vartheta_n - \frac{a^3}{2r_n^2} \sin \vartheta_n + \frac{a^4}{8r_n^3} + \dots,$$

$$s_n - s_{n+1} = -a \sin \theta_{i,n} - \frac{a^2}{2s_n} \cos^2 \theta_{i,n} + \frac{a^3}{2s_n^2} \sin \theta_{i,n} + \frac{a^4}{8s_n^3} + \dots$$

Si la fuente y el receptor están lo suficientemente alejados como para que r_n y s_n sean mucho mayores que a^2 ($r_n, s_n \gg a^2$), entonces en las series anteriores, a excepción del primero, todos los demás términos son prácticamente nulos. En tal caso, si se suman ambas series se tiene que

$$r_n - r_{n+1} + s_n - s_{n+1} \cong a \sin \vartheta_n - a \sin \theta_n \quad (\text{Si } r_n, s_n \gg a^2)$$

Es decir que para distancias grandes, la diferencia de camino Λ puede aproximarse por la distancia $a \sin \vartheta_n - a \sin \theta_n$. Esta distancia es justamente la diferencia de trayectoria que se considera en la Ecuación de Red y emerge al considerar que las trayectorias son paralelas entre sí (véase la Ec. 2.3-21). En el caso en que el receptor esté en la posición de la fuente ($\mathbf{F} = \mathbf{R}$), entonces $\vartheta_n = -\theta_n$ y $r_n = s_n$. Por lo tanto la Ec. 4.3-18 se convierte en

$$2(s_n - s_{n+1}) \cong -2a \sin \theta_n \quad (\text{Si } s_n \gg a^2) \quad \text{Ec. 4.3-19}$$

Este es un punto de conexión entre todos los modelos estudiados. El lado izquierdo de la igualdad, es la diferencia de camino calculada de manera exacta y es la que considera Bilsen en su modelo (véase la Ec. 4.3-16). El lado derecho, es la diferencia de camino derivada de la Ecuación de Red y que implícitamente se considera en los modelos basados en la difracción de Lubman y de Declercq *et al.* (véase la Ec. 4.3-1 y la Ec. 4.3-9). En el caso considerado de “El Castillo” (véase la Tabla 4.2), si se comparan ambas estimaciones son aproximadamente iguales. Para los escalones más cercanos a la fuente, donde la discrepancia es mayor, la diferencia entre $2(s_0 - s_1)$ y $-2a \sin \theta_0$ es de 9cm, lo que representa una diferencia del -2.1% con respecto a $2(s_1 - s_0)$. Para los últimos escalones esta diferencia disminuye a un 0.8%.

En todas las ecuaciones presentadas para el barrido se considera que las frecuencias reforzadas son aquellas cuya longitud de onda correspondiente, cabe m veces exactas en la diferencia de camino (véase las Ec. 4.3-1, Ec. 4.3-9 y Ec. 4.3-16), es decir, el caso clásico de la interferencia constructiva: $\Lambda = m\lambda$ (véase la Ec. 2.3-2). Ya que sus estimaciones en diferencia de camino son similares, es por esto que las ecuaciones para el barrido de frecuencias describen prácticamente las mismas curvas. En el caso de la ecuación de Declercq *et al.*, como fue mencionado, la discrepancia se debe a un error de origen temporal.

En resumen, con algunas correcciones y considerando que la fuente y el receptor están lo suficiente alejados, los modelos estudiados describen las mismas curvas para el barrido de frecuencias. Su semejanza se debe básicamente a que sus estimaciones en la diferencia de camino son equivalentes.

4.3.6 EL BARRIDO DE FRECUENCIAS EN RELACIÓN CON LAS DIMENSIONES DE LA ESCALINATA

Como una extensión del desarrollo teórico elaborado hasta ahora, en esta sección se analizará la influencia de las dimensiones de la escalinata (finita) en las características del barrido de frecuencias. Para esto se estudiarán las frecuencias iniciales y finales del barrido en base a estas dimensiones. Para un análisis más sencillo se emplearán las curvas derivadas de la Ecuación de Red (véase la Ec. 4.3-6).

Como se vio anteriormente, el tiempo inicial t_0 y el tiempo final t_N para el barrido de frecuencias son $t_0 = 2s_0/v$ y $t_N = 2s_N/v$ (véase la Ec. 4.3-8 y la Ec. 4.3-17). Sustituyendo estos tiempos en la ecuación para el barrido (Ec. 4.3-6), se obtienen así la frecuencia inicial $f_{m,0}$ y la final $f_{m,N}$ para cada armónico m :

$$f_{m,0} = \frac{mv}{2a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_F}{s_0}\right)^2}} \quad f_{m,N} = \frac{mv}{2a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_F}{s_N}\right)^2}} \quad \text{Ec. 4.3-20}$$

Debido a las definiciones de y_F , s_0 y s_N (véase las Ec. 4.2-3 y Ec. 4.2-2), la ecuación anterior indica que la frecuencia inicial y final están determinadas por una gran variedad de medidas, unas relacionadas con las dimensiones de la escalinata, otras que son derivadas de la posición de la fuente/receptor, y una ambiental que es la velocidad del sonido en el aire. En el apéndice 7.4 se muestran los pasos para expresar dichas frecuencias en términos de: el periodo (a), la longitud (L) y el ángulo de inclinación (ϕ) de la escalinata, las coordenadas de la fuente/receptor en el sistema paralelo al suelo (x'_F y y'_F), y por último la velocidad del sonido (v). Para la frecuencia inicial se obtiene que:

$$f_{m,0} = -\frac{mv}{2a} \cdot \frac{1}{\frac{x'_F}{\sqrt{(x'_F)^2 + (y'_F)^2}} \cos \phi + \frac{y'_F}{\sqrt{(x'_F)^2 + (y'_F)^2}} \sin \phi} \quad \text{Ec. 4.3-21}$$

En cuanto a la frecuencia final se llega a que:

$$f_{m,N} = \frac{mv}{2a} \frac{\sqrt{L + (x'_F)^2 + (y'_F)^2 + 2L(-x'_F \sin \phi + y'_F \cos \phi)}}{L - x'_F \cos \phi - y'_F \sin \phi} \quad \text{Ec. 4.3-22}$$

Como se puede observar, en la determinación de las frecuencias iniciales y finales del barrido influyen un numeroso conjunto de cantidades o medidas. Desde el punto de vista en la

Arqueoacústica, es importante encontrar bajo qué condiciones el barrido de frecuencias está principalmente determinado por aquellas cantidades que son fijas y pueden ser controlables, nos referimos entonces a las dimensiones de la escalinata.

Analizando la ecuación para $f_{m,0}$, se encuentra que bajo una situación muy común, la frecuencia inicial está definida principalmente por el tamaño de la huella de los escalones:

Usualmente, la altura de una persona que sirve de fuente/receptor es mucho menor que la separación horizontal de este con la escalinata, es decir $y'_F \ll |x'_F|$. Esto implica que la distancia $s_o = \sqrt{(x'_F)^2 + (y'_F)^2}$ sea muy similar a $|x'_F|$, es decir $s_o \approx |x'_F|$. Por lo tanto

$$\frac{x'_F}{s_o} \approx -1 \quad \text{y} \quad \frac{y'_F}{s_o} \approx 0$$

ya que $x'_F \leq 0$ (véase la Figura 4.1). Con estas aproximaciones, en la Ec. 4.3-21 se encuentra que

$$f_{m,0} \approx \frac{mv}{2a \cos \phi}$$

La cantidad $a \cos \phi$ no es otra más que el tamaño de la huella del escalón, o sea d (véase la Figura 4.3). En resumen

$$f_{m,0} \approx \frac{mv}{2d} \quad \text{si } |x'_F| \gg y'_F \quad \text{Ec. 4.3-23}$$

O sea que la frecuencia inicial del barrido depende más del tamaño de la huella que de otras dimensiones bajo la situación mencionada.

Respecto a la frecuencia final $f_{m,N}$, analizando su ecuación se encuentra que bajo una condición específica, dicha frecuencia resulta muy cercana a su valor asintótico (véase la Ec. 4.3-7), el cual está determinado por el periodo a :

Dividiendo y multiplicando por $1/L$ en la Ec. 4.3-22, la fórmula para $f_{m,N}$ es igual a

$$f_{m,f} = \frac{mv}{2a} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{x'_F}{L}\right)^2 + \left(\frac{y'_F}{L}\right)^2 - 2\frac{y'_F \cos \phi}{L} + 2\frac{x'_F \sin \phi}{L}}{1 - \frac{x'_F \cos \phi}{L} - \frac{y'_F \sin \phi}{L}}}$$

Si se considera que tanto $|x'_F|$ como $|y'_F|$ son mucho menores que L , esto es $|x'_F|, |y'_F| \ll L$, entonces los términos

$$\frac{|x'_F|}{L} \approx 0 \quad \text{y} \quad \frac{|y'_F|}{L} \approx 0$$

Por otro lado, dado que $-1 \leq \sin \phi \leq 1$ entonces

$$\frac{x'_F \sin \phi}{L} \leq \frac{|x'_F|}{L} \approx 0 \quad \text{y} \quad \frac{y'_F \sin \phi}{L} \leq \frac{|y'_F|}{L} \approx 0$$

De manera similar sucede para los demás términos con $\cos \phi$. Por lo tanto en la Ec. 4.3-24 todos los términos divididos por L son nulos, resultando así que $f_{m,f} \approx mv/2a$. En resumen

$$f_{m,f} \approx \frac{mv}{2a} \quad \text{si } L \gg |x'_F|, |y'_F| \quad \text{Ec. 4.3-24}$$

Dado que la posición de la fuente/receptor se puede variar fácilmente, la situación anterior puede lograrse casi para cualquier dimensión de escalinata. Por otro lado, entre más escalones tenga la escalinata, no solo el barrido es más prolongado en tiempo, sino que hay un mayor espacio donde el barrido de frecuencias producido tenga una curva más asentada y cercana a la frecuencia f_{2a} .

4.4 PROPOSICIÓN DEL MODELO

En la primera parte de este capítulo, se analizaron las curvas o ecuaciones que describen el barrido de frecuencias, según los 3 modelos estudiados en esta tesis. Se encontró que, con algunas correcciones y ciertas condiciones, los tres modelos describen las mismas curvas. Estas curvas describen temporalmente la frecuencia de sólo las componentes producidas o reforzadas por una interferencia enteramente constructiva, y además no describen la amplitud (o energía) de estas componentes. Reproducir o simular el sonido captado frente a la escalinata por un receptor, implica obtener una descripción temporal de los cambios de presión, y para esto es necesario tener una descripción completa de todos los componentes frecuenciales producidos en el eco barrido. Cabe agregar que en la formulación de las curvas se consideraron condiciones físicas ideales.

En un modelo que simule el eco barrido generado por “El Castillo”, deben considerarse las características de la onda emitida, las características geométricas y las condiciones ambientales y de los materiales. De los tres rubros mencionados, a continuación se especifican los aspectos más relevantes:

1. *Características de la onda emitida.* Las características sonoras del eco barrido dependen directamente de la forma o perfil de la onda emitida, en este se incluye tanto la duración como el contenido espectral del sonido de la fuente. Por otro lado, está la forma en que se propaga el sonido en el espacio, es decir el frente de onda, que debe ser aproximadamente esférico.
2. *Características Geométricas.* Desde una perspectiva integral, tanto la estructura de la escalinata (en sus tres dimensiones) como las que lo rodean (i.e. el suelo) influyen en el efecto. Así mismo, interviene tanto la posición de la fuente y la del receptor. Cabe mencionar que la superficie periódica triangular que forman los escalones genera una forma específica de reflexión del sonido.
3. *Condiciones ambientales y de los materiales.* Cuando el sonido viaja en un medio como el aire, está sujeto a condiciones ambientales (como la temperatura, la humedad y la presión atmosférica). Una variación de estas cantidades cambia las características con las que se propaga el sonido, esencialmente la velocidad de propagación, pero también otras como la dispersión o absorción por el medio mismo. Por otro lado, las condiciones de frontera caracterizan la forma en que se refleja y transmite el sonido

entre dos medios diferentes. El empleo de diferentes materiales de construcción (recubrimiento) modifica considerablemente características sonoras de los edificios.

Resolver o modelar el campo sonoro que se produce en “El Castillo”, implica resolver matemáticamente el problema general de una fuente puntual frente a una superficie periódica triangular con condiciones de frontera definidas. Esto conlleva a resolver la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Donde p es la onda de presión sonora total, que es la suma de la onda esférica emitida más la reflexión de la misma producida por una superficie periódica triangular (cuyo perfil debe estar definido por la Ec. 4.2-6). Al mismo tiempo, sobre esta superficie se deben cumplir para p las condiciones de frontera. Estas condiciones están determinadas por las características físicas del material de construcción y el aire. Una forma aproximada de resolver esta ecuación de onda con condiciones de frontera definidas es mediante la técnica de elementos finitos. Paralela a esta tesis está la de Alux Medina donde se aplica esta herramienta para simular la “Cola de Quetzal”. Una de las ventajas de estas simulaciones es que se puede analizar simultáneamente el campo de presión sonora en todo el espacio, y también el efecto de los materiales de construcción.

La técnica de elementos finitos es una técnica numérica que afronta de manera directa la ecuación de onda y por lo tanto la solución obtenida es de carácter generalista. Debido a esto con este método no es posible distinguir de manera directa, cuales son los mecanismos principales que determinan al efecto acústico en cuestión. En este sentido siempre conviene partir de un entendimiento particular para llegar a una comprensión general. Como se ha visto hasta ahora en la tesis, tanto un modelo basado en la difracción como uno basado en reflexiones consecutivas son equivalentes para describir las principales componentes frecuenciales del eco barrido. En base a estos dos mecanismos se pueden desarrollar entonces simulaciones.

El modelo de Declercq *et al.* basado en la teoría de la Difracción de Rayleigh, puede considerarse como una mejora al modelo basado en las redes de difracción de D. Lubman. Para generar las simulaciones no sólo se considera la Ecuación de Red (que deriva en la Ley de Bragg para una fuente y un receptor en un mismo lugar) sino también la forma en que se refleja y transmite la onda incidente según el material de la escalinata. Sin embargo por la naturaleza de la teoría empleada, el modelo en si tiene varias dificultades para simular el efecto acústico en cuestión. Esta problemática se analiza a detalle en la Sección 4.4.1.

Por otro lado está el modelo basado en un proceso de reflexiones consecutivas propuesto por Bilsen, la cual no fue desarrollada para generar simulaciones. En este modelo está implícito que la reflexión de cada escalón se dispersa en todas direcciones con la misma intensidad, de manera similar a una onda esférica emitida por una fuente puntual. El modelo que se propone en esta tesis para simular el eco barrido, es una continuación del modelo de Bilsen y está basado de en un arreglo lineal de N fuentes puntuales. Como se vio en la Sección 2.3.3, estos arreglos son el paso intermedio entre el fenómeno de interferencia y el de difracción. En la Sección 4.4.3 se analizará la relación entre el modelo propuesto y la Ley de Bragg.

Como se verá en la Sección 4.4.2 donde se propone el modelo, el modelo basado un arreglo lineal de N fuentes puntuales presenta varias ventajas, una de ellas es que no requiere de muchos cálculos numéricos y pueden obtenerse resultados en computadora rápidamente. Además permite simular la respuesta de la escalinata al empleo de diferentes fuentes sonoras, diferentes tamaños en las dimensiones de la escalinata, y también para una fuente y un receptor en variadas posiciones.

4.4.1 EVALUACIÓN DEL MODELO DE DECLERCQ *ET AL.*

El problema de una fuente puntual frente a una superficie periódica, es un problema muy similar al que resuelven la teorías basadas en la Difracción de Rayleigh (véase la Sección 2.3.6), entre ellas la teoría desarrollada por Declercq *et al.* En estas además de considerarse el efecto de la periodicidad de la superficie en la onda reflejada, se consideran también las condiciones de frontera. En el artículo de Rayleigh se estudia tanto el caso de una frontera acústica suave (Condiciones de Dirichlet) como el de una dura (Condiciones de Newman). En el caso de Declercq *et al.* se consideran unas condiciones de frontera o continuidad derivados del tensor de esfuerzos correspondiente a una interface fluido-sólido. Como producto final, en las teorías derivadas de Rayleigh, se obtiene la amplitud de cada orden de reflexión y transmisión, es decir, la forma en que se distribuye la energía de la onda incidente en las ondas producidas por la superficie periódica. Para la “Cola de Quetzal”, este tipo de teorías permite saber la intensidad con que se dispersa hacia el receptor una onda monofrecuente. A partir de esta cualidad Declercq *et al.* aplican su teoría de la difracción para generar una simulación del eco barrido (véase la Sección 3.2.1).

No obstante, una gran desventaja de emplear una teoría basada en la Difracción de Rayleigh, es que no puede ser directamente aplicable para simular el eco barrido ya que esta formulada principalmente para una onda incidente plana y armónica, con un único número de onda y único ángulo de incidencia. En el caso acústico esto implica un sonido continuo en el tiempo y monofrecuente, o sea lo opuesto a un pulso. Por lo tanto si se emplean dichas teorías para generar simulaciones a partir de un sonido más complejo, se necesita una descomposición tanto espacial para sintetizar el frente esférico, como una temporal para sintetizar los diversos componentes frecuenciales. Cabe recordar que la Teoría de Rayleigh como sus derivadas, para una simple frecuencia (o número de onda) implica un método numérico complejo, en consecuencia, la síntesis espacial y frecuencial en total requiere una mayor cantidad de cálculos numéricos que pueden sobrepasar las herramientas computacionales, como fue lo sucedido en las simulaciones de Declercq *et al.* Por otro lado, tanto en la obtención de las amplitudes de las componentes, como en la síntesis espacial y temporal, la precisión de los métodos es total solo para una suma infinita de elementos, por lo que en la práctica siempre hay una pérdida de precisión. Por todas estas dificultades es muy posible que las simulaciones obtenidas utilizando una teoría similar a la de Rayleigh sean deficientes, sobre todo para sonidos impulsivos como el de un aplauso (véase la Figura 3.4 y la Sección 3.2.4).

Existe otra limitante al simular el eco barrido con una teoría similar a la de Rayleigh y está relacionado con las proporciones en la periodicidad de la superficie. Como se vio en la Sección 2.3.8, según Wirgin, la teoría de Rayleigh está restringida a los casos en el que el periodo, la amplitud y el número de onda (de la onda incidente) cumplen que $0 < b/2a < 0.34$ y $0 < bk/2 < 4.1$ (Wirgin 1980). Para el caso de la escalinata de “El Castillo”, véase la Tabla 4.2, las dimensiones son tales que

$$\frac{b}{2a} \approx 0.25 < 0.34$$

Considerando una velocidad del sonido $v = 343 \frac{m}{s}$, la condición para $bk/2$ en términos de la frecuencia f es equivalente a:

$$0 < f < 2,406.7\text{Hz}$$

Por lo tanto, la teoría de Rayleigh como sus derivadas solo son capaces de simular verazmente el efecto “Cola de Quetzal” en un rango limitado de frecuencias, esto, considerando que en el eco barrido se presentan varios armónicos cuya frecuencia inicial es mayor a 2,406.7Hz. Las

condiciones de Wirgin fueron empleadas por Declercq *et al.* para validar la aplicación su teoría en un trabajo similar al de la “Cola de Quetzal”, donde estudia la difracción causada por las gradas en un teatro Greco-Romano (Declercq & Dekeyser 2007).

Cabe agregar que aunque las proporciones de las escalones en “El Castillo” cumplen las condiciones de Wirgin, como se vio en la Sección 2.3.8 según Van den Berg la teoría de Rayleigh es inestable cuando se aplica a superficies triangulares debido a sus discontinuidades, o sea las esquinas (van den Berg & Fokkema 1979). Aun en la situación de una superficie aproximada, la proporción de los escalones de “El Castillo” esta fuera de los límites permitidos: $\frac{h_{max}}{D} = \frac{b}{a} \approx 0.5 > 0.144$ (véase la Figura 2.7).

En resumen se puede concluir que generar simulaciones basadas en la Difracción de Rayleigh, a pesar de en este considerarse muchos factores físicos, por su complejidad y formulación específica para ondas planas armónicas y superficies periódicas de amplitud pequeña, no son idóneas o aptas para simular el efecto de la “Cola de Quetzal”.

4.4.2 MODELO BASADO EN UN ARREGLO LINEAL N DE FUENTES PUNTALES

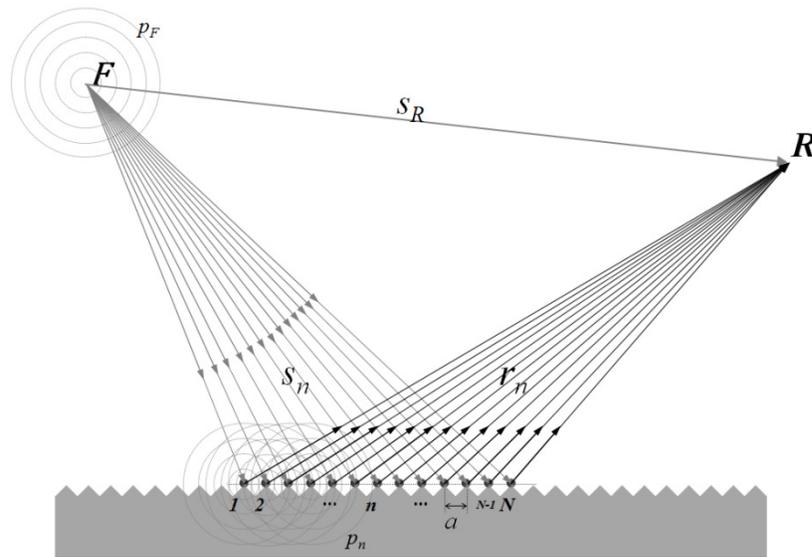


FIGURA 4.6 ARREGLO LINEAL DE N FUENTES

El modelo que se propone en esta tesis consiste en un arreglo lineal de N fuentes puntuales, que están separadas entre sí por una distancia a , como se muestra en la Figura 4.6. La colocación de estas fuentes corresponde a los cantos de los escalones (véase la Ec. 4.2-8) y la medida a

equivale al periodo del arreglo (véase la Ec. 4.2-7 y la Figura 4.3). Como se muestra en la Figura 4.6, frente al arreglo está situada una fuente primaria en un punto **F** y un observador o receptor en el punto **R**.

En un primer instante, la fuente primaria emite una onda esférica p_F . En seguida, conforme llega esta onda al arreglo de N fuentes, cada una de las fuentes del arreglo (numeradas por el índice n) replicará la onda incidente p_F emitiendo una onda esférica p_n de las mismas características. Por el principio de superposición, la onda total p que incide sobre el receptor (**R**) es de la forma:

$$p = p_F + \sum_{n=1}^N p_n$$

En cuanto a la onda esférica p_F , su forma más general (véase la Ec. 2.1-15) es igual a

$$p_F = \frac{A}{s_R} f\left(t - \frac{s_R}{v_s}\right)$$

En esta ecuación la función f es el perfil o forma de la onda (véase la Sección 2.1.2) y s_R es la distancia entre la posición de la fuente, o sea **F**, y el punto de observación que es **R**. La cantidad s_R/v_s es el tiempo de retardo que el sonido tarda en recorrer la distancia s_R .

En cuanto al arreglo de fuentes, la expresión matemática para cada p_n es similar a p_F , teniendo el mismo perfil de onda f . Además del retraso debido a la distancia r_n , que es la distancia entre la fuente número n y el receptor (**R**), debe añadirse un retraso debido a la distancia s_n que es la distancia entre la fuente primaria (**F**) y la fuente n . Entonces

$$p_n = A_n(r_n) f\left(t - \frac{r_n}{v_s} - \frac{s_n}{v_s}\right)$$

La amplitud A_n está en función de la distancia r_n ya que la onda p_n es esférica y pierde intensidad con la distancia. Aunque la determinación de la amplitud A_n merece un análisis más detallado, se puede considerar que en **R**, la amplitud es inversamente proporcional a la distancia total recorrida, es decir

$$A_n = \frac{A}{r_n + s_n}$$

En resumen, la onda total p en el receptor es de la forma

$$p = \frac{A}{s_R} f\left(t - \frac{s_R}{v_s}\right) + \sum_{n=1}^N \frac{A}{r_n + s_n} f\left(t - \frac{r_n}{v_s} - \frac{s_n}{v_s}\right) \quad \text{Ec. 4.4-1}$$

Como se muestra en esta fórmula, una de las ventajas de este modelo, es que a comparación de las simulaciones de Declercq *et al*, no se tiene que descomponer el sonido emitido $f(t)$ en sus componentes frecuenciales. No está limitado al uso de sonidos impulsivos y en principio puede ser utilizado cualquier sonido en general. Por lo tanto con este modelo se puede simular fácilmente el eco producido a diferentes y muy variados sonidos de la fuente. Otra diferencia con el modelo de Declercq *et al*, es que el frente esférico de la onda emitida por la fuente (p_F) no necesita ser descompuesto en un conjunto de ondas planas.

Una cualidad del modelo propuesto es que no requiere cálculos numéricos más allá de $N + 1$ sumas y $N + 1$ multiplicaciones (para cada tiempo t), y por lo tanto utilizando la computadora se pueden obtener simulaciones de manera rápida. Cabe aclarar que el modelo tiene ciertas limitantes, por ejemplo no se puede simular el efecto por cambios en los materiales de construcción.

4.4.3 MODELO DE N FUENTES PUNTUALES Y LA LEY DE BRAGG

Empleando la teoría de la Sección 2.3.3 y algunas aproximaciones razonables, en el siguiente desarrollo se muestra como el modelo propuesto está relacionado con la Ley de Bragg.

En este desarrollo se considera el caso en el que la fuente emite pulsos o sonidos muy cortos con un amplio espectro. En el modelo propuesto se considera que todas las N reflexiones interactúan entre sí (véase la Ec. 4.4-1), no obstante si el sonido emitido es corto, en un instante de tiempo sólo estarán interactuando un número efectivo N_e de reflexiones (donde $N_e \leq N$). Siendo T_F la duración del pulso, N_e es aproximadamente

$$N_e \approx \frac{v_s T_F}{a}$$

A continuación se considerará un arreglo lineal de N_e fuentes puntuales. Para analizar la forma en que se propagan de las frecuencias en todas las direcciones debido al arreglo, primeramente se estudia cómo es el campo sonoro emitido por este para un determinado número de onda k y después se variará su valor (por lo que variaría también la frecuencia f). Al final se obtiene el factor direccional del arreglo también como función de la frecuencia: $D(\varphi_i, f)$.

Primero se considera que la fuente primaria (p_F) emite una onda esférica armónica con un determinado número de onda k . Entonces la onda emitida p_n por cada fuente del arreglo lineal también tiene estas características, pero tiene añadido un desfase ε_n que es el equivalente en radianes del retraso temporal τ_n debido a la distancia s_n , entonces $\varepsilon_n = \omega\tau_n = \omega s_n/v_s = ks_n$. En total la onda producida por el arreglo de N_e fuentes es de la forma

$$\sum_{n=1}^{N_e} p_n = \sum_{n=1}^{N_e} \frac{A}{r_n} e^{-i(\omega t - kr_n - ks_n)}$$

En la Sección 2.3.3, se muestran los pasos para simplificar una expresión similar de manera que se obtiene el factor direccional del arreglo (véase la Ec. 2.3-16). La adición del desfase ks_n implica algunos cambios en las ecuaciones subsecuentes pero en general el procedimiento puede ser aplicado de la misma forma. La Ec. 2.3-9 con la inserción del desfase ks_n se convierte en:

$$\sum_{n=1}^{N_e} p_n = \frac{A}{r} e^{-i\omega t} e^{ik(r_N + s_N)} \cdot [1 + e^{ik(r_{N-1} - r_N + s_{N-1} - s_N)} + e^{ik(r_{N-2} - r_N + s_{N-2} - s_N)} \dots + e^{ik(r_1 - r_N + s_1 - s_N)}] \tag{Ec. 4.4-2}$$

Una condición esencial para simplificar una ecuación de este tipo, es que la diferencia de camino sea constante para los rayos de dos fuentes adyacentes cualesquiera (véase la Ec. 2.3-10). Añadiendo los resultados de la Sección 4.3.5, si los puntos **F** y **R** están muy alejados del arreglo de fuentes de manera que $r_n, s_n \gg a^2$ para toda n , entonces

$$r_n - r_{n+1} + s_n - s_{n+1} \cong a \sin \vartheta_n - a \sin \theta_n$$

Si adicionalmente se considera que las distancias r_n y s_n son mucho mayores que la longitud (efectiva) del arreglo, o sea: $r_n, s_n \gg aN_e$ para toda n . Esto implica que los puntos **F** y **R** están muy alejados de manera que los rayos provenientes de estos son prácticamente paralelos entre sí (véase la Figura 4.6). En otras palabras los ángulos ϑ_n son iguales entre sí, y a un ángulo que se denotará por φ_r , de forma similar $\theta_n = \varphi_i$ para toda n . De esta manera se obtiene que la diferencia de camino es la misma para cualquier par de fuentes vecinas:

$$r_n - r_{n+1} + s_n - s_{n+1} = a \sin \varphi_r - a \sin \varphi_i$$

Dada esta condición la Ec. 4.4-2 se puede simplificar para obtener así el factor direccional del arreglo. Por otro lado, esta condición también implica que el tiempo de retraso para fuentes adyacentes cualesquiera es igual a una constante $\tau = \frac{a}{v_s} \sin \varphi_i$, ya que $\tau_{n+1} - \tau_n = (s_{n+1} -$

$s_n)v_s = \frac{a}{v_s} \sin \varphi_i$ para toda n . Como se vio en la Sección 2.3.3, el factor direccional para este tipo de arreglo es igual a la Ec. 2.3-19. El caso de interés es la situación en que la fuente y el receptor están en el mismo lugar ($\mathbf{F} = \mathbf{R}$), entonces $-\varphi_r = \varphi_i$ y por lo tanto el factor direccional $D(\varphi_i)$, es de la forma

$$D(\varphi_i) = \frac{\sin(N_e k a \sin \varphi_i)}{N_e \sin(k a \sin \varphi_i)}$$

Si ahora $k = 2\pi f/v_s$ se considera como una variable, entonces el factor direccional puede expresarse como una función de la frecuencia f y el ángulo φ_i :

$$D(\varphi_i, f) = \frac{\sin\left(N_{ef} \frac{2\pi a}{v_s} f \sin \varphi_i\right)}{N_{ef} \sin\left(\frac{2\pi a}{v_s} f \sin \varphi_i\right)} \quad \text{Ec. 4.4-3}$$

El factor direccional es un factor que modula, dependiendo de la dirección φ_i , la amplitud de la onda total del arreglo (véase la Sección 2.3.2). Si se agrega la frecuencia como variable, el factor direccional obtenido $D(\varphi_i, f)$ determina las direcciones en que se propaga la onda total del arreglo en función de la frecuencia. En el caso de $-\varphi_r = \varphi_i$, puede decirse también que $D(\varphi_i, f)$ determina las frecuencias que se propagan de regreso a la fuente. En la ecuación para $D(\varphi_i, f)$ se observa que los máximos de este factor se alcanza cuando $\sin\left(\frac{2\pi a}{v_s} f \sin \varphi_i\right) = 0$, es decir, cuando el argumento $\frac{2\pi a}{v_s} f \sin \varphi_i = m\pi$ donde $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$. En resumen los máximos de $D(\varphi_i, f)$ se alcanzan cuando

$$f_m = \frac{m v_s}{2a \sin \varphi_i} \quad \text{Ec. 4.4-4}$$

Esta ecuación es justamente la Ley de Bragg pero expresado en término de frecuencias (véase la Ec. 4.3-2). Como el factor direccional $D(\varphi_i, f)$ es una función de dos variables, entonces no representa una curva sino una superficie donde la altura es justamente el valor de $D(\varphi_i, f)$, y lo mismo sucede con la intensidad de este factor ($|D(\varphi_i, f)|^2$). Si se indica en una gráfica el valor de $|D(\varphi_i, f)|^2$ por medio de una paleta de grises a manera de un espectrograma, por la ecuación anterior, las zonas principales de mayor intensidad (color blanco) corresponderán entonces a las curvas derivadas de la Ley de Bragg. Esto se puede observar en la Figura 4.7 donde se empleó un impulso con una duración $T_F = 10$ ms, siendo $N_{ef} = 9$ considerando las medidas de la Tabla 4.2.

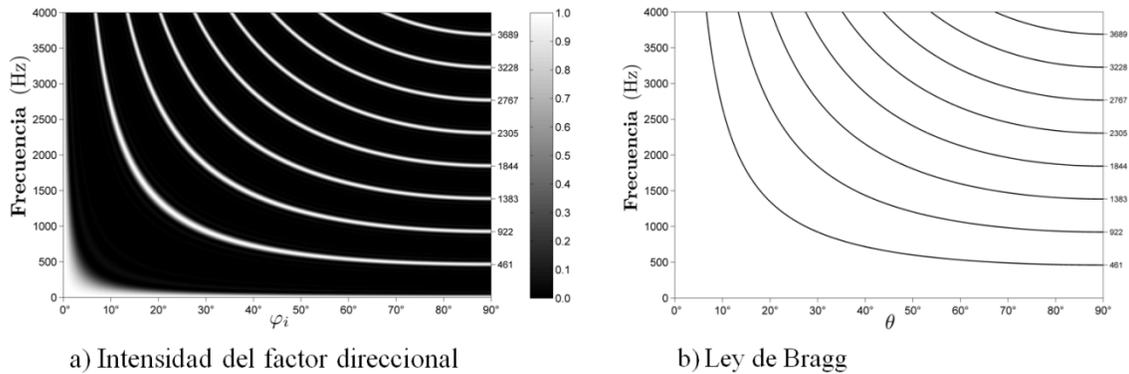


FIGURA 4.7 COMPARACIÓN DEL FACTOR DIRECCIONAL DE UN ARREGLO LINEAL DE 9 FUENTES PUNTUALES ARMÓNICAS CON LA LEY DE BRAGG.

a) *Intensidad del factor direccional $D(\varphi_i, f)$. Utilizando las medidas de la Tabla 4.2 y una $N_{ef} = 9$ en la Ec. 4.4-3, la intensidad de este ($|D(\varphi_i, f)|^2$) se muestra en una gráfica del Ángulo de incidencia (φ_i) contra Frecuencia, como en un espectrograma, el valor de la intensidad se indica por medio de un código o paleta de grises. b) *Ley de Bragg. Utilizando la misma Tabla 4.2 se grafica la Ec. 4.4-4 para diferentes órdenes m .**

4.5 CONCLUSIONES

En general los modelos estudiados predicen curvas semejantes para el barrido de frecuencias, las cuales son curvas descendientes donde cada armónico $f_m(t)$ se acerca asintóticamente a la frecuencia $mf_{2a} = mv_s/2a$. Esta similitud se debe a que en todos los modelos las estimaciones para la diferencia de camino son similares cuando la fuente y el receptor están lo suficientemente alejados (véase Ec. 4.3-18). En el caso de “El Castillo” esta situación ocurre al menos para una fuente y receptor ubicados a una distancia de 10m de la escalinata. Respecto a las curvas formuladas a partir de la Ecuación de Red, cuando la fuente y el receptor están en el mismo lugar estas curvas son iguales a unas derivadas a partir de la Ley de Bragg. En las curvas formuladas por Declercq *et al.* a partir de la Ley de Bragg, existe un error temporal con el cual se puede aclarar la contradicción o inconsistencia entre los resultados de Declercq *et al.* y los de Bilsen.

Aunque para calcular dichas curvas los modelos resultan equivalentes, para la generación de simulaciones del efecto acústico estos modelos presentan cualidades y limitaciones diferentes. El modelo de Declercq *et al.* basado en la Difracción de Rayleigh, es una mejora al modelo de D. Lubman, ya que además de considerar la Ecuación de Red incorpora las condiciones de frontera. No obstante este modelo tiene deficiencias para simular el efecto acústico, debido a su

complejidad y formulación específica para ondas planas armónicas y superficies periódicas de amplitud pequeña.

El modelo que se propone en esta tesis para simular el eco barrido está basado en un arreglo lineal de N fuentes y es una continuación del modelo propuesto por Bilsen. Aunque en este modelo no se consideran condiciones de frontera presenta varias cualidades favorables. Principalmente que el frente de la onda emitida no necesita ser descompuesta espacialmente, y tampoco el sonido de la fuente en sus componentes frecuenciales (como sucede en el modelo de Declercq *et al*). Con este modelo se puede simular fácilmente el eco producido a diferentes y muy variados sonidos de la fuente. Además para obtener simulaciones no se requiere de muchos cálculos numéricos. Cabe agregar que el modelo propuesto no difiere de los basados en la difracción ya que puede reproducir las curvas derivadas de la Ley de Bragg.

CAPÍTULO 5

DESARROLLO EXPERIMENTAL

En el año de 2007, el grupo de investigación dirigido por el Dr. Pablo Padilla y el Fis. Alejandro Ramos, hizo una primera expedición para hacer mediciones acústicas en el sitio arqueológico de Chichén Itzá. Con el conocimiento adquirido, para la siguiente expedición en abril del 2008, se utilizó una metodología más adecuada a los requerimientos técnicos en la grabación del efecto de la “Cola de Quetzal”. Uno de las modificaciones fue el empleo de un altavoz con el propósito de hacer mediciones reproducibles y más controlables. Esta adecuación permitió que se pudieran hacer pruebas con sonidos impulsivos de un espectro y duración bien determinados.

Este capítulo tiene un doble propósito, el primero es analizar las grabaciones experimentales del eco generadas por una serie de pulsos reproducidos; y el segundo es comparar las grabaciones obtenidas, con las simulaciones creadas a partir del modelo propuesto en el capítulo anterior. Con esto se intentará establecer las características necesarias en el sonido de la fuente para generar un eco barrido. De esta manera también se podrá identificar que características en el eco producido son generados por los mecanismos considerados en el modelo.

Cabe mencionar que hasta el momento sólo se ha estudiado a la “Cola de Quetzal” considerando como fuente sonora el aplauso y una Delta de Dirac. Desde el punto de vista arqueológico es importante entonces conocer la respuesta acústica de la escalinata de “El Castillo” al empleo de diferentes fuentes. El siguiente trabajo responde al llamado de Declercq *et al.* de medir el eco en función del sonido emitido, pero también en contestación se emplea un modelo alternativo capaz de simular el eco para diversos sonidos.

Adicionalmente se debe comprobar si las curvas para el barrido analizados en el capítulo anterior describen en efecto a la “Cola de Quetzal”, ya que solo se han hecho comparaciones con la grabación de baja calidad que provee D. Lubman.

5.1 OBJETIVOS

- Grabar el eco generado en la escalinata de “El Castillo” empleando como fuente una serie de pulsos con diferentes distribuciones de frecuencias.
- Para cada pulso de la serie, generar simulaciones del eco en base al modelo propuesto de N fuentes puntuales.
- Comparar con mediciones experimentales las curvas para el barrido derivadas de los modelos estudiados.
- Caracterizar la respuesta acústica de la escalinata para diferentes tipos de pulsos
- Evaluar la capacidad de predicción del modelo

5.2 PULSOS GAUSSIANOS

Como sonido para la fuente, en el experimento se utilizaron pulsos gaussianos cuya señal consiste en una función senoidal modulada por una campana de gauss (véase la Sección 2.4.4). Estos pulsos también son denominados como paquetes de ondas, en el sentido de que su espectro no solo contiene una frecuencia, sino que alrededor de esta se encuentra una distribución determinada de frecuencias.

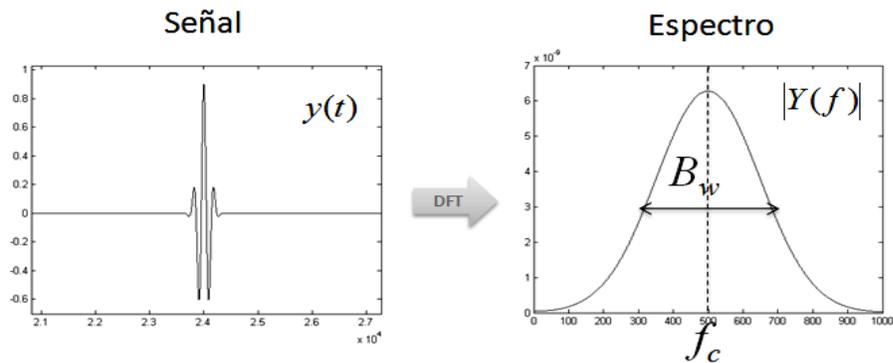


FIGURA 5.1 SEÑAL Y ESPECTRO DE UN PULSO GAUSSIANO

La distribución del espectro puede ser parametrizada por dos cantidades (véase la Figura 5.1). La primera es la *frecuencia central* (f_c) y es la media o “centro” de la distribución en el espectro. Para el caso de los pulsos gaussianos, la frecuencia central corresponde justamente a la frecuencia de la senoidal modulada. El otro parámetro es una cantidad que mide el ancho de la distribución, este se denomina como *ancho de banda* (B_w). Para obtenerla se debe ubicar las frecuencias inferior y superior en los que la distribución desciende a la mitad del valor máximo alcanzado, la

diferencia en el eje de frecuencia entre estas dos cotas es precisamente el ancho de banda. El parámetro que será utilizado en esta tesis, es el *ancho de banda fraccional* (b_w) que es la proporción que tiene el ancho de banda B_w con respecto a la frecuencia central f_c , esto es

$$b_w = \frac{B_w}{f_c} \quad \text{Ec. 5.2-1}$$

En el experimento, los archivos de audio de los pulsos se diseñaron mediante la función `gauspuls` del software MatLab. Para ejecutar dicha función es necesario proveer parámetros como la frecuencia central y el ancho de banda fraccional. Analizando los archivos de programación de dicha función, se encontró que la señal del pulso gaussiano $y(t)$ está definido como

$$y(t) = e^{-t^2/2\sigma_t^2} \cos(2\pi f_c t) \quad \text{Ec. 5.2-2}$$

Donde

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{(2\pi\sigma_f)^2} = \frac{-8 \ln r}{(2\pi b_w f_c)^2} \quad \text{y} \quad r = 10^{-\frac{6}{20}} \approx \frac{1}{2}^4 \quad \text{Ec. 5.2-3}$$

Utilizando los resultados de la Sección 2.4.4, se puede obtener la Transformada de Fourier del pulso $y(t)$ representada por la función $Y(f)$ (véase el Apéndice 7.5). Como resultado la amplitud del espectro $|Y(f)|$, que es la raíz de la distribución de energía espectral $|Y(f)|^2$, es igual a

$$|Y(f)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_f^2}} e^{-(f-f_c)^2/2\sigma_f^2} \quad \text{Ec. 5.2-4}$$

La fórmula resultante muestra la forma en que fue diseñada la función `gauspuls`, pues no solo es una campana de gauss, sino que es también una distribución normal. Esta distribución es usada ampliamente en la estadística matemática y está determinada por la media μ y por la desviación estándar σ_f . En el caso de los pulsos $\mu = f_c$, y la desviación estándar resulta proporcional al ancho del ancho de banda: $B_w = (-8 \ln r)\sigma_f \approx 2.3508 \sigma_f$ (véase la Ec. 5.2-3). En

⁴ En unidades de nivel de presión sonora (SPL), dada una medición en la amplitud de presión P , una reducción o una disminución de la mitad ($\frac{1}{2}P$) es igual a

$$20 \log\left(\frac{1}{2}P/P\right) = 20 \log\left(\frac{1}{2}\right) = -6.0206 \text{ dB}_{\text{SPL}}.$$

Usualmente esta cantidad se redondea a -6dB_{SPL} . La definición r en la Ec. 5.2-3 es la conversión de -6dB_{SPL} en unidades sencillas, lo que resulta en número muy cercano a $\frac{1}{2}$.

este sentido σ_t es la “desviación estándar temporal” y por lo tanto es una medida de la duración del pulso. La Ec. 5.2-3 indica entonces que la duración temporal del pulso es inversamente proporcional al ancho de banda de su espectro.

Por último, cabe mencionar que una de las propiedades de las distribuciones normales es que están normalizadas, es decir que la integral o el área bajo la curva en todo el eje (en este caso el de frecuencias) es igual a la unidad sin importar los valores de la media y la variancia.

5.3 MÉTODO

Durante los días del 27 de Abril al 1er de Mayo de 2008 se realizaron una serie de 4 sesiones de grabaciones en el sitio arqueológico de Chichén Itzá, Yucatán. En estas sesiones se recopilaban mediciones sonoras en varios edificios del sitio, principalmente en “El Castillo”, La Plaza Norte y El Gran Juego de Pelota. Las sesiones se hicieron bajo el permiso tanto del mismo sitio arqueológico, como del Instituto Nacional de Antropología e Historia (INAH). Los archivos de sonido que serán analizados a continuación pertenecen a la 4ta toma de la 2ª sesión (28 de abril a las 11:04p.m.) y tienen como lugar la escalinata norte de “El Castillo” o Templo de Kukulcán. Esta toma fue escogida por tener un bajo ruido ambiental. A continuación se muestra el arreglo experimental utilizado en dicha toma.

5.3.1 OBTENCIÓN DE LAS GRABACIONES

Como se muestra en la Figura 5.2, el arreglo experimental utilizado se constituye principalmente de 4 micrófonos colocados en diferentes puntos de la pirámide, y un altavoz empleada como Fuente sonora. Por medio del altavoz colocado a 15 metros de la base de la escalinata, se emitió una serie de 45 pulsos gaussianos los cuales se especificarán en la siguiente sección. Como Receptor, a unos 5m hacia atrás del altavoz fue colocado el Micrófono 1, su función es la de recopilar la respuesta acústica o el eco generado por la escalinata a la serie reproducida de pulsos. Como micrófonos de apoyo o secundarios, están los Micrófonos 2, 3, y 4, ubicados en diferentes puntos de la escalinata de “El Castillo”, véase la Figura 5.2. Estos posteriormente servirán para un análisis temporal del fenómeno. Los 4 micrófonos mencionados son micrófonos de medición ECM8000 (Behringer), este modelo tiene un patrón de detección omnidireccional y una respuesta plana para todas las frecuencias audibles (15Hz-20kHz). Adicionalmente se colocó el Micrófono 0, que es un micrófono de referencia y se ubicó pegado a el altavoz con el propósito de medir la latencia en la reproducción de los pulsos.

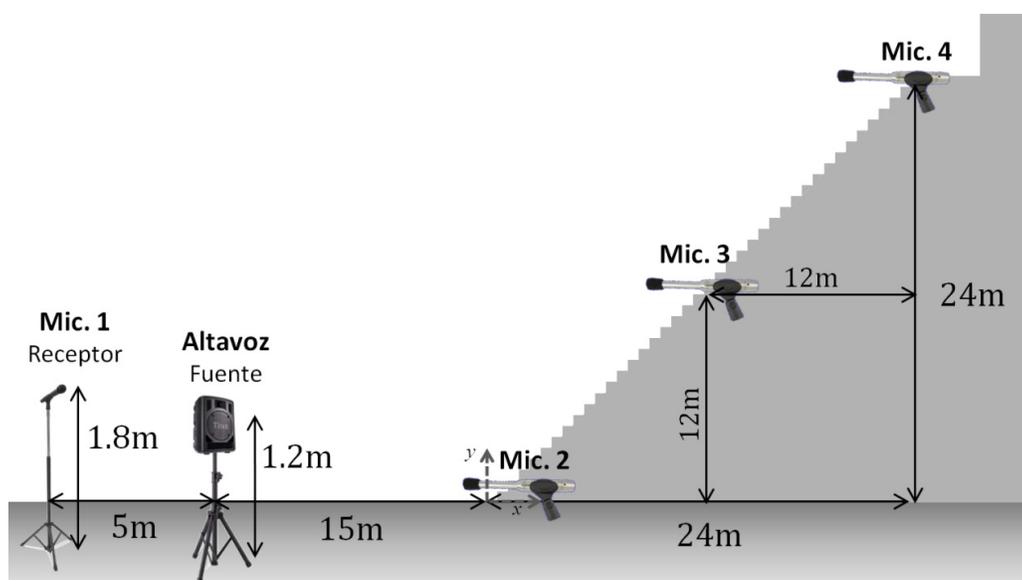


FIGURA 5.2 ARREGLO EXPERIMENTAL DE MICRÓFONOS Y UNA FUENTE SONORA

Medidas de la escalinata		Posición de la Fuente y el Receptor				Posición de los Micrófonos (x,y)	
N	91	x'_F	-15.00 m	x_R	-20.00 m	Altavoz	(-15,1.2) m
D	24.00 m	y'_F	1.20 m	y_R	1.80 m	Mic. 1	(-20,1.8) m
H	24.00 m	s_θ	15.05 m	r_θ	20.08 m	Mic. 2	(0,0) m
d	0.2637 m	s_N	45.18 m	r_N	49.28 m	Mic. 3	(12,12) m
h	0.2637 m					Mic. 4	(24,24) m

TABLA 5.1 MEDIDAS CARACTERÍSTICAS DEL ARREGLO

Tanto para la digitalización y almacenamiento de la señal de los micrófonos, así como para la reproducción de sonidos; se utilizó una interface de audio Digi 002 Rack (Digidesign) conectada a una computadora laptop Powerbook G4 (Apple Mac). El proceso de digitalización se hizo a una profundidad de 24 bits y con una frecuencia de muestreo de 96000 Hz. Para una grabación simultánea de los micrófonos se utilizó el software ProTools 7.3 LE, el cual es una plataforma con un formato de multipistas, en este programa el audio de cada pista es almacenado en un archivo de formato wav.

En cuanto a la reproducción de sonidos, la señal de salida de la interface fue conectada a un preamplificador 808M (Makie) de 2x600 Watts, este a su vez estaba conectado al altavoz de marca JBL. Previo a las sesiones de grabación, se ajustó el ecualizador integrado al preamplificador con el propósito de que la intensidad de salida del altavoz, fuera lo más uniforme posible en todo el rango de frecuencias. Para esto se reprodujeron señales senoidales con frecuencias

correspondientes a las bandas de ecualización. Con un sonómetro TES-1357 colocado a 1m del altavoz se calibraba el ecualizador de manera que se obtuviera una lectura de $100 \text{ dB}_{\text{SPL}}$ en cada banda. Se midió con el sonómetro en la modalidad de tiempo de cálculo lento (Time Weigth Slow) y con una ponderación C. Este aparato fue calibrado previo a la expedición a Chichén Itzá.

5.3.2 SERIE DE PULSOS GAUSSIANOS

Mediante el altavoz se reprodujo una serie de pulsos gaussianos de diferentes frecuencias centrales y anchos de banda fraccionales. Esto con el propósito de abarcar casi todo el espectro audible, así como pulsos con características cercanas a las de un tono, hasta pulsos de amplio espectro similares a una Delta de Dirac. Para un mayor control del nivel de intensidad en la emisión de los pulsos, las frecuencias centrales de estos fueron escogidas de manera que corresponden a las 9 bandas del ecualizador antes mencionado: 62.5Hz, 125Hz, 250Hz, 500Hz, 1000Hz, 2000Hz, 4000Hz, 8000Hz y 16000Hz. Para cada frecuencia central se reprodujeron 5 pulsos que progresivamente aumentaban en su ancho de banda fraccional, los anchos considerados fueron 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 y 0.9. En total la serie consta de un total 45 (5x9) pulsos gaussianos.

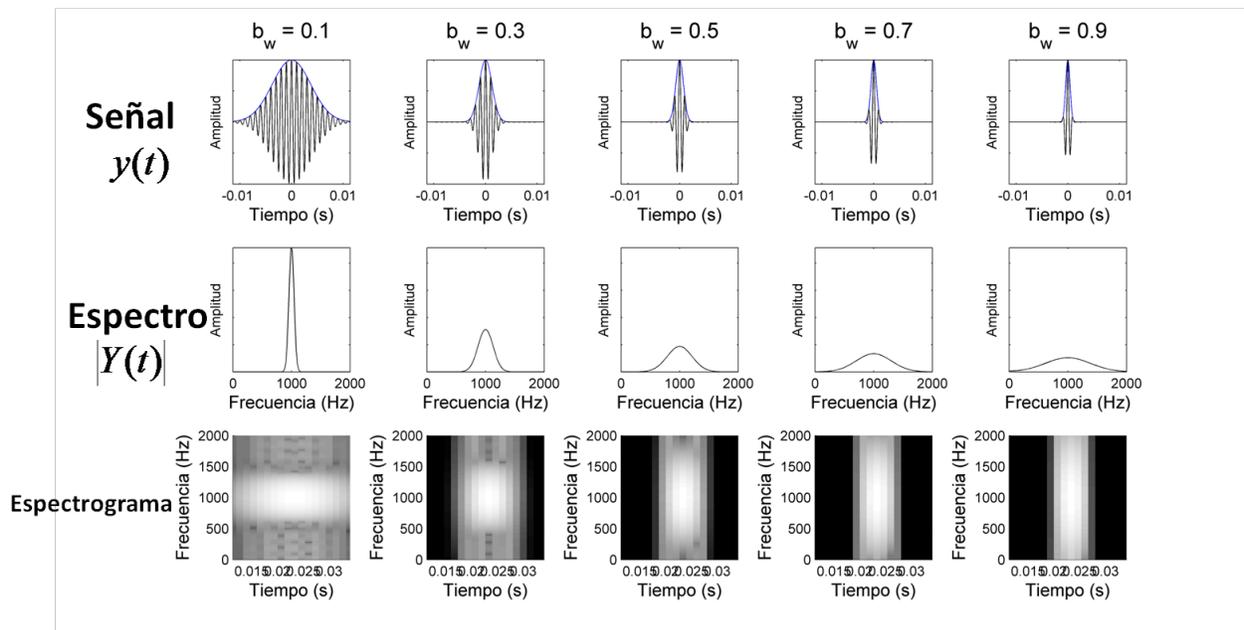


FIGURA 5.3 PROGRESIÓN DE PULSOS EN FUNCIÓN DEL ANCHO DE BANDA FRACCIONAL

Progresión para un pulso con $f_c = 1\text{kHz}$ desde $b_w = 0.1$ hasta $b_w = 0.9$

En la Figura 5.3 se muestra la sucesión de pulsos para una frecuencia central de 1000Hz, en este se observa como en la serie se hace una transición de un pulso de duración prolongada y una distribución de frecuencias angosta (similar a un tono); a otro un pulso de corta duración y con una distribución amplia en su espectro (similar a un pulso de Dirac). Adicionalmente se muestra en una tercera fila donde se enseña el espectrograma de los pulsos.

5.3.3 PROGRAMA DE CÓMPUTO

Ya capturadas las grabaciones se desarrollaron varios programas en MatLab (R2008a) con diferentes objetivos. El primero consistió en un programa de edición con el cual se recortó de forma automatizada la pista de grabación de cada micrófono para cada pulso reproducido. Los archivos editados fueron nombrados y archivados de manera ordenada por el programa en carpetas junto con el archivo wav del pulso reproducido.

El siguiente es un programa que detecta el tiempo en el que llega el pulso emitido en cada micrófono. Este consiste en la lectura de los archivos de audio de cada micrófono en cual se busca el máximos de amplitud en la señal y el número muestra correspondiente a este máximo. Con los datos obtenidos posteriormente se calculó la velocidad del sonido, así como el tiempo de latencia en al reproducción intrínseco del hardware utilizado.

El programa final consta de dos partes, la primera genera una simulación del eco barrido a partir del archivo de audio de un pulso, para esto se utilizó una programación basada en el modelo propuesto en el capítulo anterior. La segunda parte dibuja o grafica el espectrograma de la grabación por el Micrófono 1, y por otro lado el espectrograma de la simulación.

5.3.4 SIMULACIONES A PARTIR DEL MODELO DE N FUENTES PUNTUALES

En esta sección se muestra un resumen de la programación hecha en MatLab para simular el eco barrido, basándose en el modelo de N fuentes puntuales propuesto en la Sección 4.4.1. En dicho modelo, la reflexión de cada escalón esta sustituido por la acción de una fuente puntual, como resultado final se obtiene la Ec. 4.4-1. En base a esta ecuación se construye la simulación como se verá en seguida.

Primero se obtiene la dirección del archivo de audio que contiene el sonido empleado como fuente y se almacena en la variable `path`. Dada esta dirección, mediante la función `wavread` se

transcribe dicho archivo de formato WAV, en un vector denominado `Fuente` que tiene un formato propio de MatLab:

```
[Fuente, fs, nbits] = wavread (path);
```

De esta manera también se obtiene también la frecuencia de muestreo (f_s) y la profundidad de bits ($nbits$) propios del archivo de audio original.

Luego se definen vectores que contienen las medidas de los escalones (h y d), la velocidad del sonido (vs), la posición de la fuente (X_f) y también del receptor (X_r). Con estas medidas, el siguiente paso es calcular la distancia de todos los escalones a la fuente (S_n), así como de estos al receptor (R_n), también se calcula la distancia directa entre la fuente y el receptor (r_f):

```
n = 0:N
```

```
Sn = nthroot((n*d - Xf(1)).^2 + (n*h - Xf(2)).^2, 2)
```

```
Rn = nthroot((n*d - Xr(1)).^2 + (n*h - Xr(2)).^2, 2)
```

```
Rf = nthroot((Xr(1) - Xf(1)).^2 + (Xr(2) - Xf(2)).^2, 2)
```

Con la instrucción `n = 0:N`, se creó un vector `n` que contiene toda la numeración de los escalones, es decir, un vector cuyas entradas van de 0 a N en incrementos de una unidad. De esta manera las variables que se definen posteriormente, resultan en vectores donde cada entrada corresponde la medida respectiva a cada escalón.

En seguida se calcula los tiempos de retraso (T_n) con que llegan al receptor las reflexiones de los escalones, así como el retraso (T_{rf}) del sonido que llega directamente:

```
Tn = (Sn+Rn)/vs;          Tn_sample = round(fs*Tn);
```

```
Trf = rf/vs;             Trf_sample = round(fs*Trf);
```

Como se ve al mismo tiempo estos vectores fueron trasladados a su equivalente en número de muestras (`Tn_sample` y `Trf_sample`). También se calculan también las amplitudes de las reflexiones así como la del sonido directo:

```
An = 1./(Sn+Rn);      Arf = 1./rf;
```

Con todos los vectores ya calculados, se puede generar a continuación la simulación del eco barrido que estará contenido en el vector `Eco`. En un comienzo este vector debe tener todas las entradas iguales a cero y el suficiente tamaño para abarcar hasta la última reflexión retardada (cuyo retraso es `Tn_sample(N+1)`). Esto equivale a las instrucciones:

```
[p, q] = size(Fuente)
```

```
l = Tn_sample(N+1) + p + 1;
```

```
Eco = zeros (l,1);
```

Primero se suma el sonido cuya trayectoria es directa, esto se hace indicando que en el vector `Eco`, las entradas que van desde el valor `Trf_sample` hasta el valor `Trf_sample + p`, son iguales al vector `Fuente` multiplicado por su respectiva amplitud `Arf`:

```
ind = Trf_sample:(Trf_sample + p-1);
```

```
Eco(ind,1) = Fuente*Arf;
```

En seguida al vector `Eco` se le suman las $N+1$ reflexiones de los escalones⁵. Para la reflexión número j su retraso en número de muestras es igual a `Tn_sample(j)`, entonces al vector `Eco` se le debe sumar el vector `An(j)*Fuente` empezando desde la entrada `Tn_sample(j)` y terminado hasta la entrada `Tn_sample(j)+(p-1)`. El proceso en total se resume en las instrucciones:

```
for j = 1:N+1,
    ind = Tn_sample(j):(Tn_sample(j)+p-1);
    Eco(ind,1) = Eco(ind,1) + Fuente*An(j);
end;
```

Así se obtiene finalmente el vector `Eco` que representa el sonido simulado del eco barrido generado por el sonido `Fuente`. Para terminar, el último paso consiste en trasladar el vector `Eco` en un archivo de audio `.wav` mediante la función `wavwrite`.

Cabe agregar que el retardo de la señal también puede ser programado por medio de filtros, esto se hizo en un programa realizado por Héctor Cordourier y posterior al de esta tesis (Cordourier & Orduña 2009).

5.3.5 ASPECTOS TÉCNICOS DE LOS ESPECTROGRAMAS

Para obtener los espectrogramas se utilizó la función de `spectrogram` de MatLab. Primeramente se debe transferir el archivo de audio mediante la función `wavread` a un vector `y`, en seguida el espectrograma se obtiene por la instrucción:

⁵ En el capítulo anterior, para simplificar las fórmulas se añadió un “escalón 0” que corresponde a la intersección del plano de la escalinata con el suelo. Por esto se consideran esto mismo se consideran $N+1$ reflexiones.

```
spectrogram(y, Hamming(W), Wo, RangoF, fs)
```

Como se vio en la Sección 2.5.7, esta herramienta de análisis espectral y temporal tiene una variedad de parámetros que se deben determinar. A continuación se muestra un listado de los parámetros, sus valores y lo que implican estos valores:

- Frecuencia de muestreo (f_s): los archivos de audio tienen una $f_s = 96\text{kHz}$, por el Teorema de Nyquist, la frecuencia máxima que puede contener la señal sin defectos por aliasing es de $\frac{f_s}{2} = 48\text{kHz}$.
- Tamaño de ventana (W): se considero una ventana de 2048 muestras que es equivalente en tiempo a 21.33ms.
- Función de ventana: se utilizó una función de ventana convencional que es la de Hamming, esta ventana al ser aplicada una DFT reduce el efecto de leakage sin sacrificar mucho la resolución en frecuencia.
- Traslape (W_0): se consideró del 87.5%, es decir el traslape entre las ventanas es de $0.875W = 1792$ muestras equivalente a 18.6ms.
- Rango de frecuencias (RangoF): En la función `spectrogram` se puede insertar el conjunto de frecuencias específicas sobre las que se calcula la Transformada Discreta de Fourier (DFT). Aunque con esta se obtienen espectrogramas con mayor calidad de imagen, cabe aclarar que la incertidumbre en frecuencia inherente a estas gráficas no se modifica.
- Rango en niveles de intensidad: Dada la baja intensidad de las señales, para una mejor visualización se ajustó la paleta de colores a un intervalo que va de -50dB a -90dB.

Como se mencionó en la Sección 2.5.7, en los espectrogramas la precisión temporal es inversamente proporcional a la precisión en frecuencias. Se optó entonces por un espectrograma de alta resolución en frecuencias para que los barridos de frecuencias presentes sean más visibles. Aunque con el traslape se gana cierta resolución temporal, rigurosamente la resolución en tiempo (δt) corresponde justamente al tamaño de la ventana que es de 21.33 ms. Esto implica que la resolución en frecuencias es de 46.875 Hz ($\delta f = 1/\delta t$).

5.4 RESULTADOS

La Figura 5.4 es una muestra de las grabaciones que se obtuvieron en cada micrófono. A grandes rasgos se puede observar como el pulso emitido va siendo registrado con el tiempo en cada micrófono. También se aprecia un pequeño retardo entre la señal enviada (Fuente) y la reproducción efectiva de este (Mic. 0). Para el receptor, el Micrófono 1, a unos 80ms aprox. después del registro del pulso, se observa la respuesta sonora o el eco producido por la escalinata. En esta figura en efecto se trata de un eco barrido.

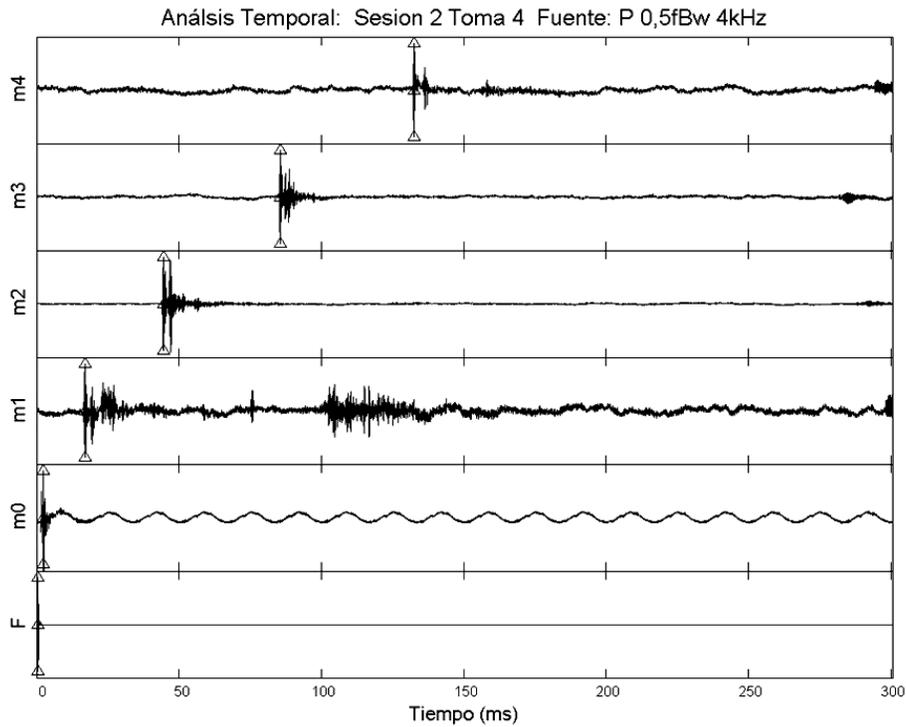


FIGURA 5.4 SEÑAL DE LAS GRABACIONES DE LOS MICRÓFONOS Y DEL PULSO REPRODUCIDO.

A manera de una multipista se observan simultáneamente las grabaciones de cada micrófono (Mic 0, 1, 2, 3 y 4) así como la señal del pulso emitido (Fuente) cuya $f_c=4000\text{Hz}$ y $bw=0.5$. Así mismo se señala con el símbolo Δ , el lugar donde se alcanza un máximo en la amplitud. En cada pista se hizo un zoom del eje vertical para la apreciación detallada de la señal.

5.4.1 ESTIMACIÓN DE LA VELOCIDAD DEL SONIDO Y TIEMPO DE EMISIÓN

Para cada pulso de la serie, mediante el programa de computo ya mencionado, se localizó en las grabaciones de todos los micrófonos el tiempo en se alcanza un máximo de amplitud. En la Figura 5.4 también se encuentra indicada esta medición. En la mayoría de los casos esta localización correspondió justamente a un máximo debido al arribo del pulso. No obstante para algunos casos la razón señal/ruido era muy baja provocando así mediciones erróneas. Por esto mismo se hizo un método para descartar estadísticamente las mediciones poco confiables.

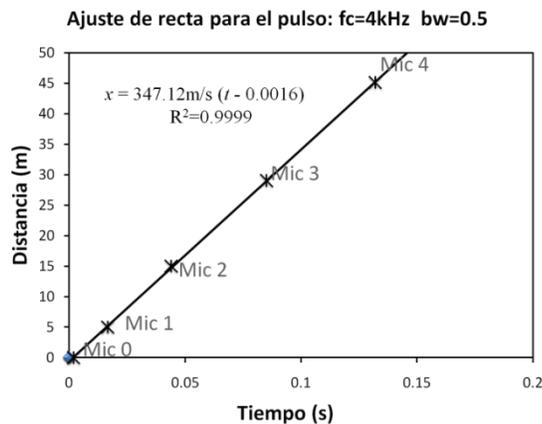


FIGURA 5.5 EJEMPLO DE UN AJUSTE DE RECTA POR MÍNIMOS CUADRADOS

Si se grafica el tiempo medido en cada micrófono contra la distancia recorrida por el pulso desde el altavoz hasta este micrófono; en el caso ideal los puntos graficados describen una línea recta cuya pendiente es la velocidad del sonido y cuya intersección con el eje temporal es el tiempo de retardo en la emisión del pulso. Para discriminar las mediciones poco confiables, para cada pulso se hizo un ajuste a una recta por el método de mínimos cuadrados como se muestra en la Figura 5.5. El coeficiente de correlación R^2 es una medición estadística que estima que tan ajustados o cercanos están los puntos a un comportamiento perfectamente lineal. El valor máximo de este coeficiente es la unidad. De los 45 ajustes de recta resultantes se consideraron solo aquellos cuya $R^2 > 0.999$, con esta discriminación quedaron solo 21 mediciones para la velocidad del sonido y el tiempo de retardo. Las mediciones resultantes se promediaron obteniéndose que

$$v_s = 342.1\text{Hz} \pm 6.2\text{Hz} (1.83\%) \quad \text{y} \quad T_r = 3.99\text{ms} \pm 3.14\text{ms} (78.71\%)$$

La incertidumbre se calculó de manera estadística con la desviación estándar. Cabe mencionar que la incertidumbre en el caso del tiempo de retardo es muy grande, pero no es muy relevante ya la medición en si es muy pequeña.

5.4.2 ESPECTROGRAMAS DE LAS GRABACIONES Y SIMULACIONES

En las siguientes páginas se muestran los espectrogramas de las grabaciones obtenidas así como las simulaciones obtenidas por computadora. Para cada pulso de la serie se muestra el espectrograma de la grabación obtenida por el Micrófono 1. A la derecha de este se encuentra la simulación para este micrófono y generado a partir del archivo de audio del pulso reproducido.

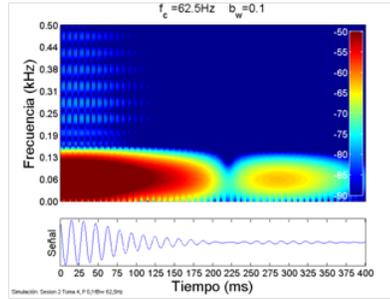
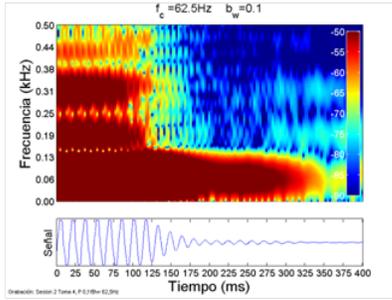
Las gráficas están ordenadas por frecuencia central y a su vez por ancho de banda fraccional. El intervalo del eje de frecuencias varia con la frecuencia central del pulso, exceptuando los de $f_c = 62.5\text{Hz}$ y 125 Hz , el eje de frecuencias va desde 0 Hz hasta $2f_c$. De esta manera la distribución en frecuencias del pulso en la mayoría de los casos está la mitad del eje.

Debajo que cada espectrograma se encuentra dibujada la señal que representa esta gráfica. Tanto en los espectrogramas como en la gráfica de la señal, el eje temporal abarca 400ms siendo desplazado el origen según el tiempo de retardo T_r ya medido.

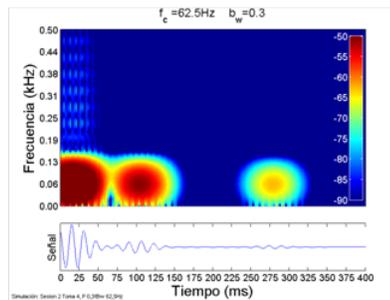
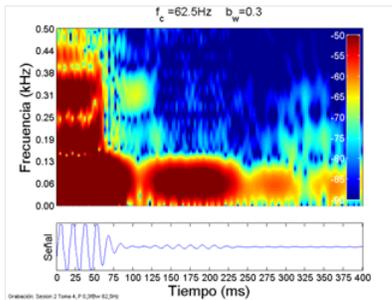
Frecuencia central de 62.5 Hz

Grabaciones

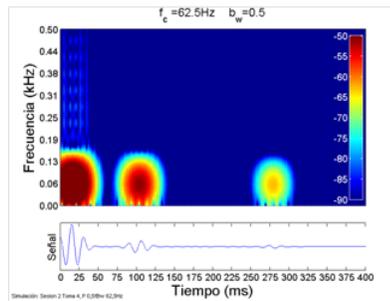
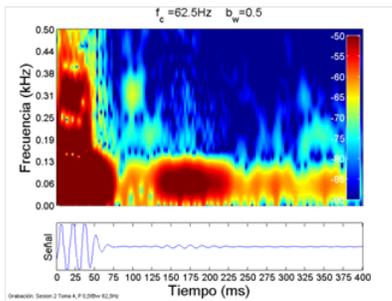
Simulaciones



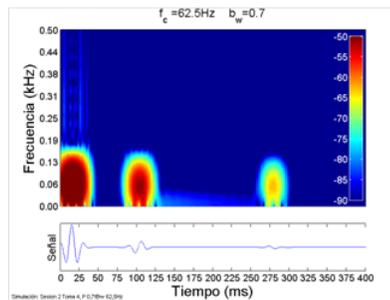
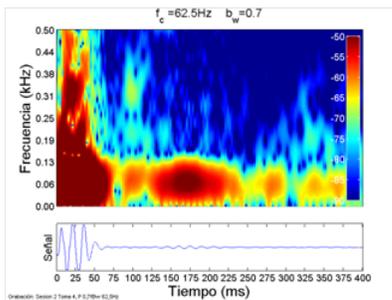
$b_w = 0.1$



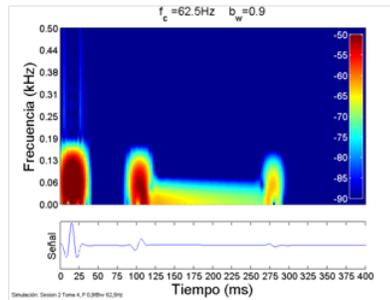
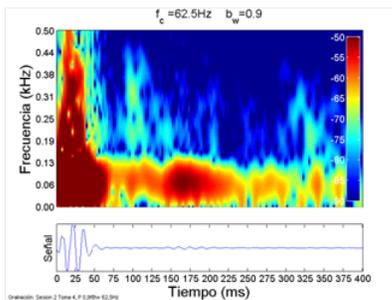
$b_w = 0.3$



$b_w = 0.5$



$b_w = 0.7$

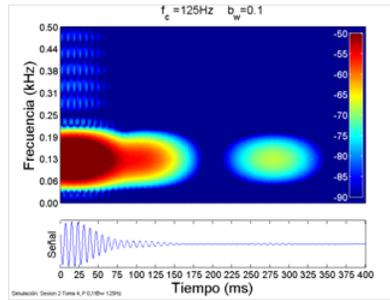
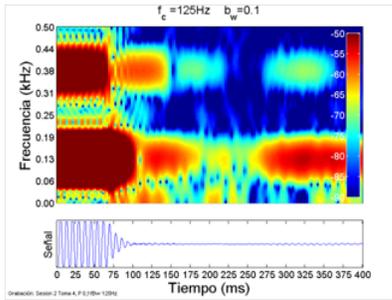


$b_w = 0.9$

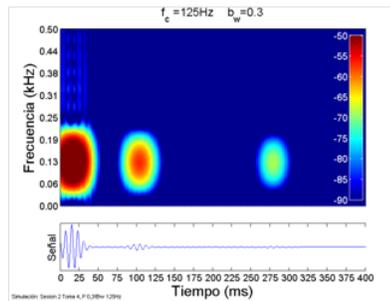
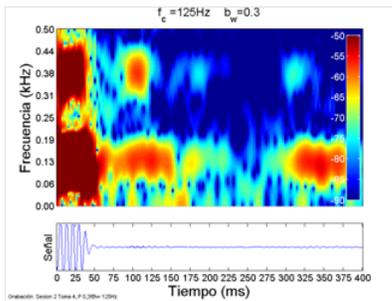
Frecuencia central de 125 Hz

Grabaciones

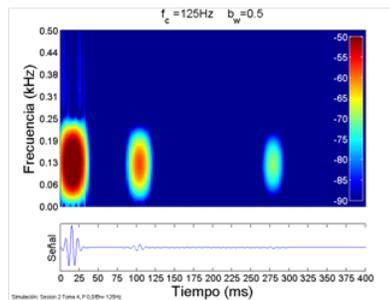
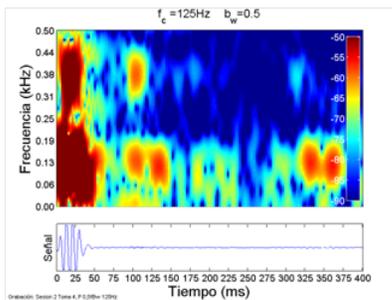
Simulaciones



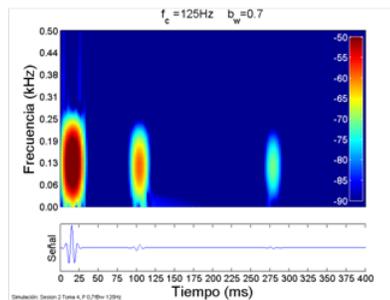
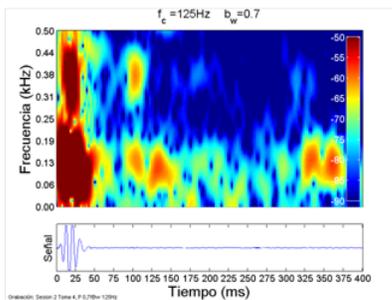
$b_w = 0.1$



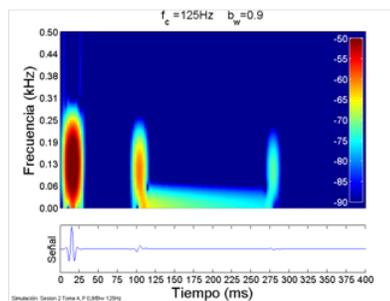
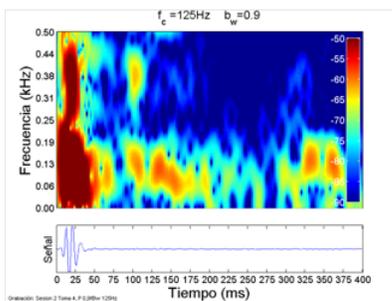
$b_w = 0.3$



$b_w = 0.5$



$b_w = 0.7$

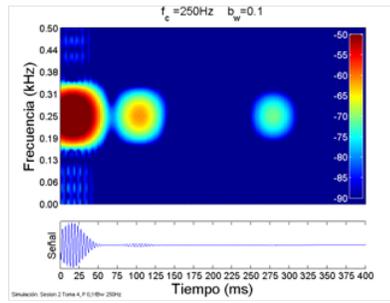
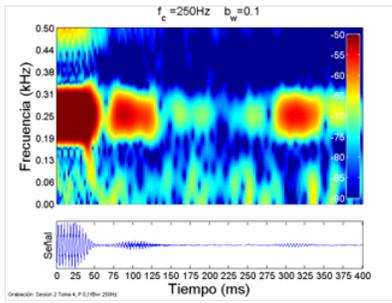


$b_w = 0.9$

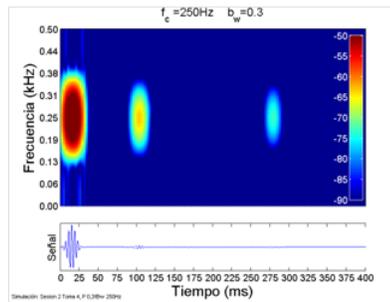
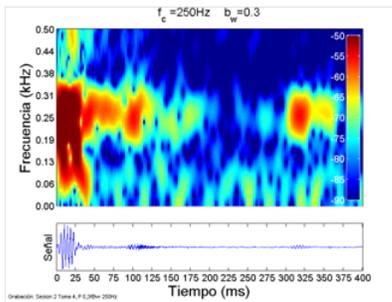
Frecuencia central de 250 Hz

Grabaciones

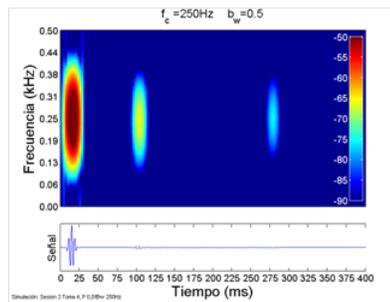
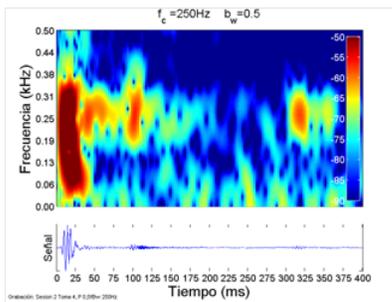
Simulaciones



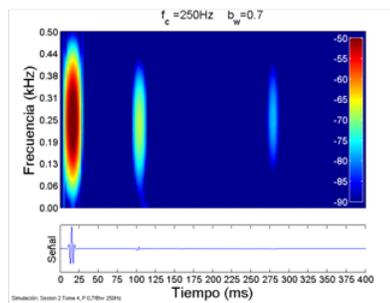
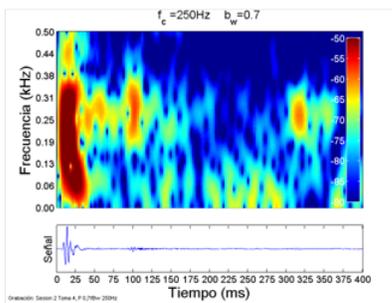
$b_w = 0.1$



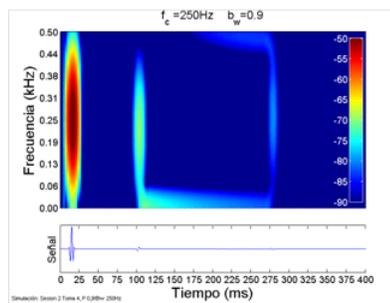
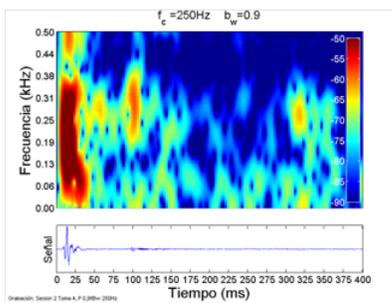
$b_w = 0.3$



$b_w = 0.5$



$b_w = 0.7$

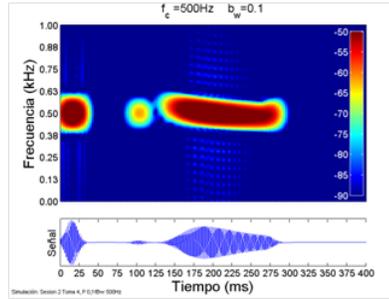
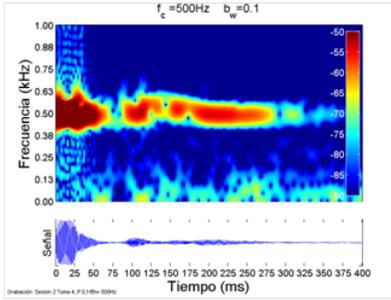


$b_w = 0.9$

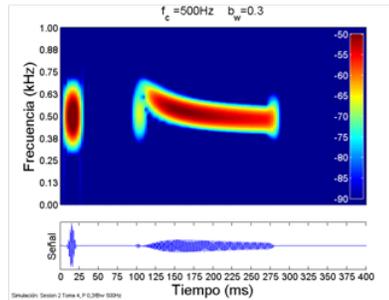
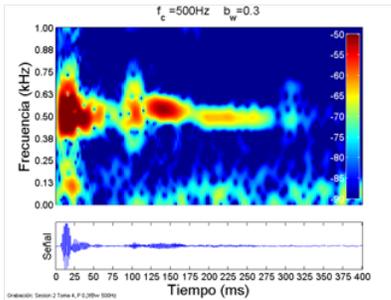
Frecuencia central de 500 Hz

Grabaciones

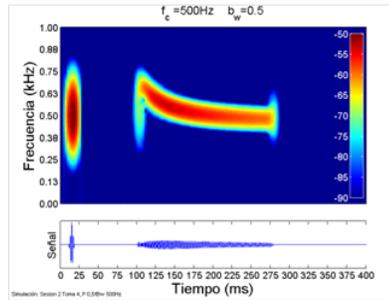
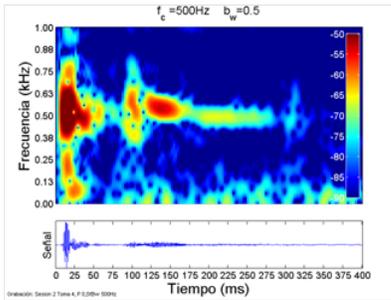
Simulaciones



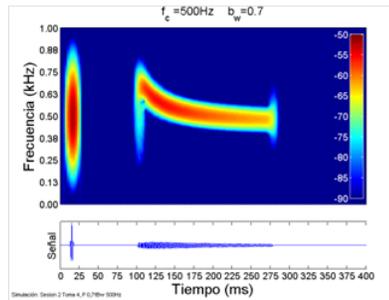
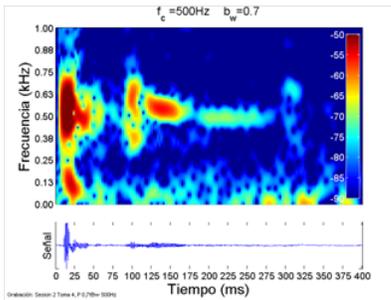
$b_w = 0.1$



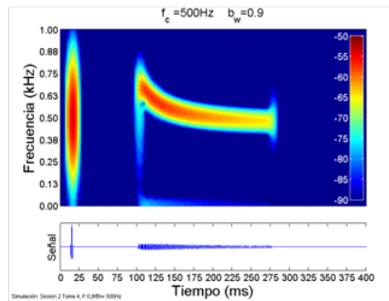
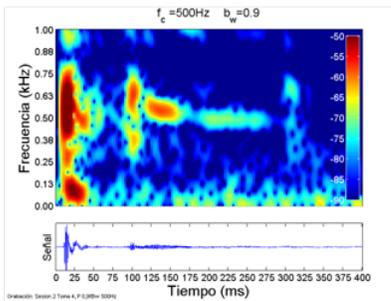
$b_w = 0.3$



$b_w = 0.5$



$b_w = 0.7$

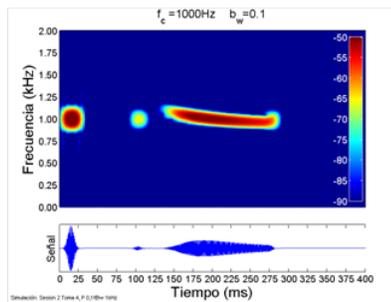
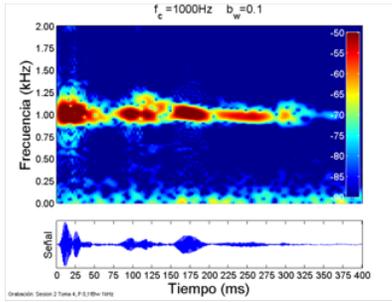


$b_w = 0.9$

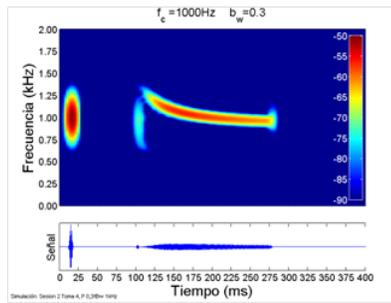
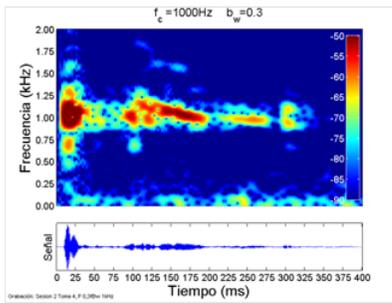
Frecuencia central de 1000 Hz

Grabaciones

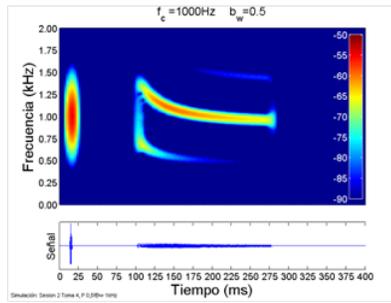
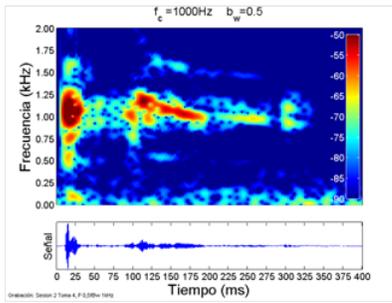
Simulaciones



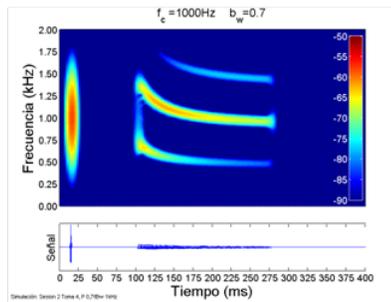
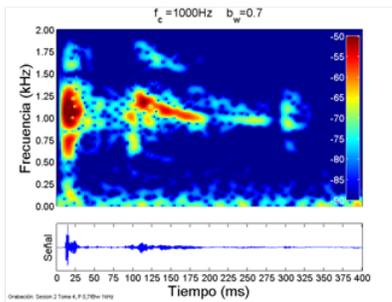
$b_w = 0.1$



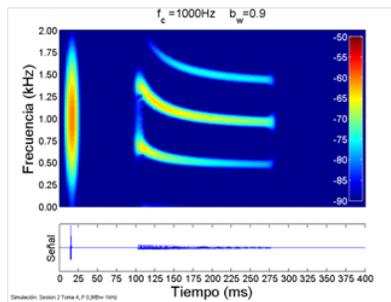
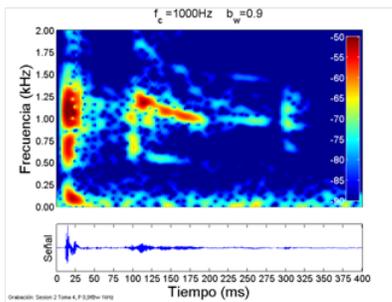
$b_w = 0.3$



$b_w = 0.5$



$b_w = 0.7$

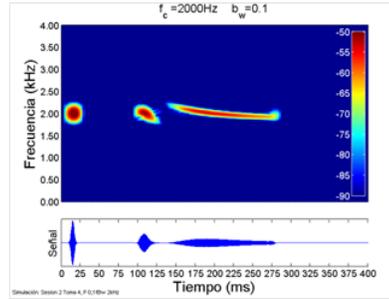
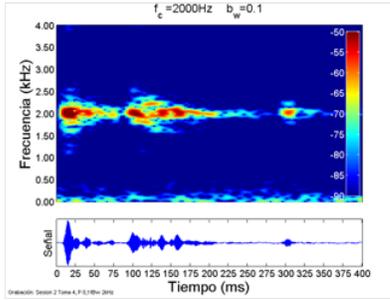


$b_w = 0.9$

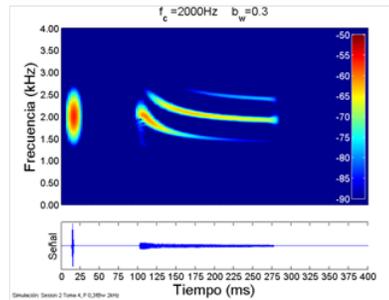
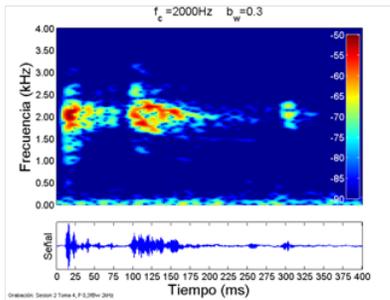
Frecuencia central de 2000 Hz

Grabaciones

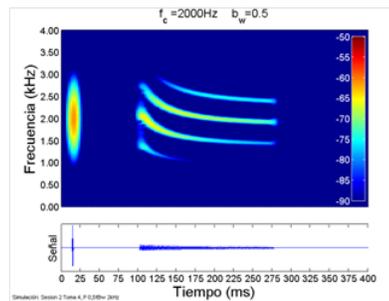
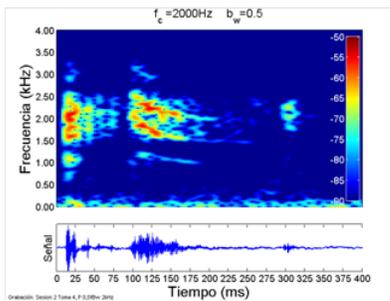
Simulaciones



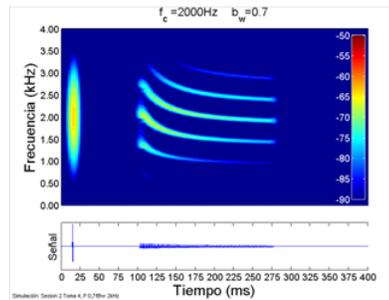
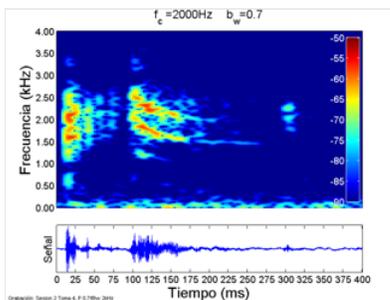
$b_w = 0.1$



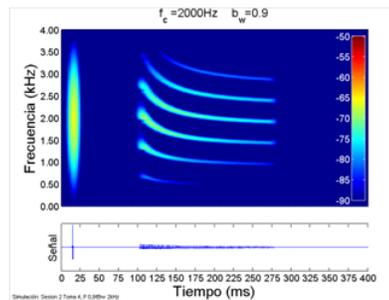
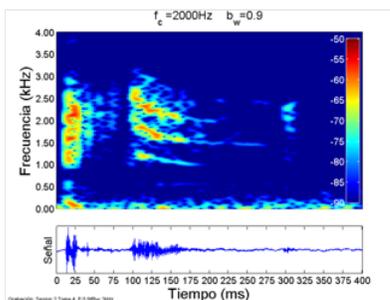
$b_w = 0.3$



$b_w = 0.5$



$b_w = 0.7$

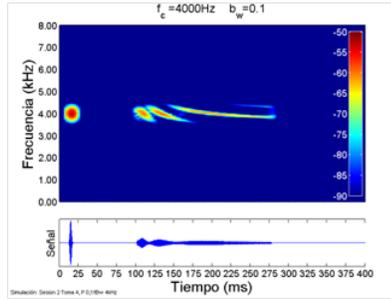
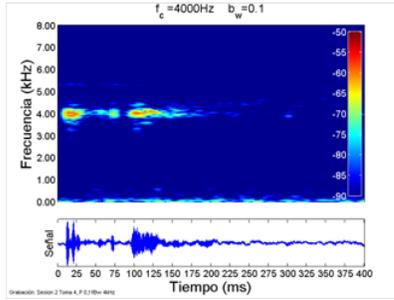


$b_w = 0.9$

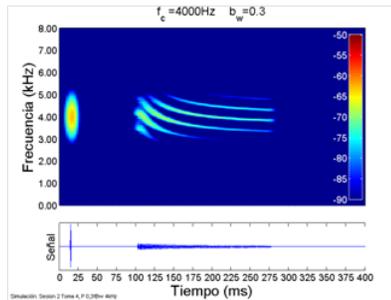
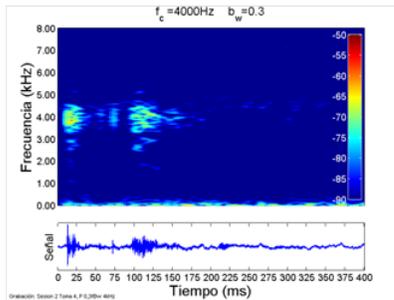
Frecuencia central de 4000 Hz

Grabaciones

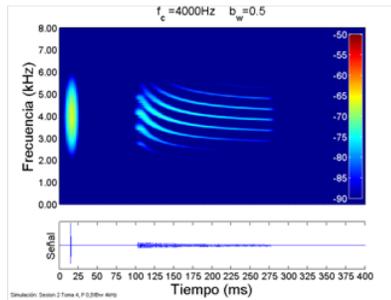
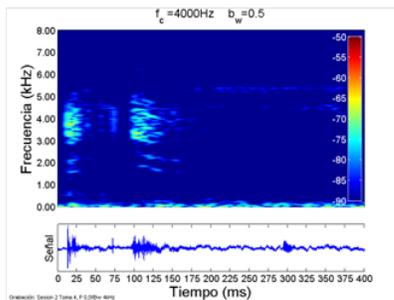
Simulaciones



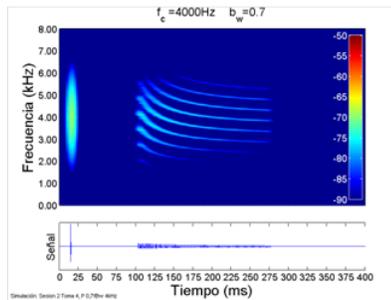
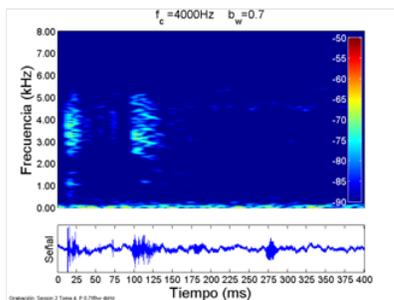
$b_w = 0.1$



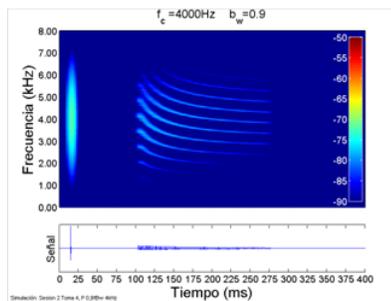
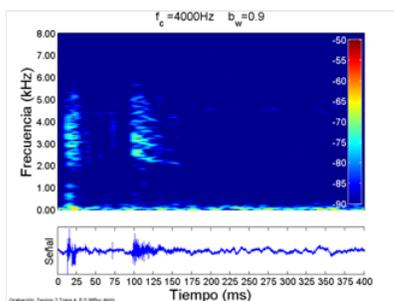
$b_w = 0.3$



$b_w = 0.5$



$b_w = 0.7$

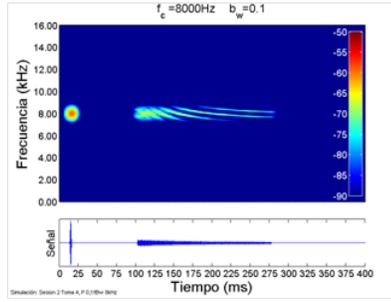
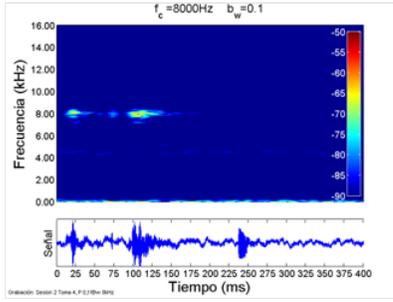


$b_w = 0.9$

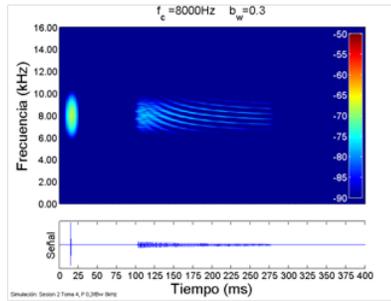
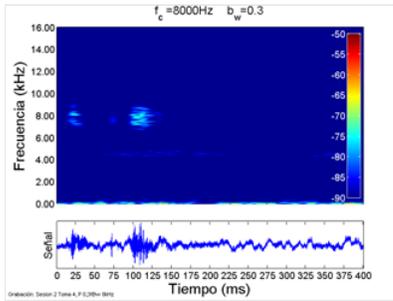
Frecuencia central de 8000 Hz

Grabaciones

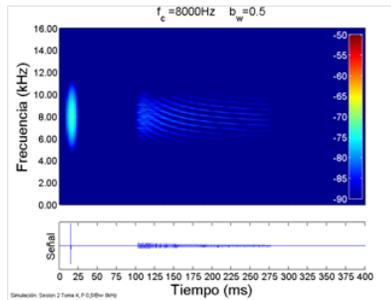
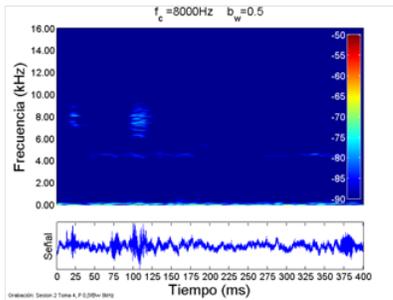
Simulaciones



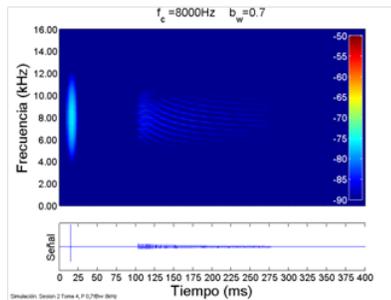
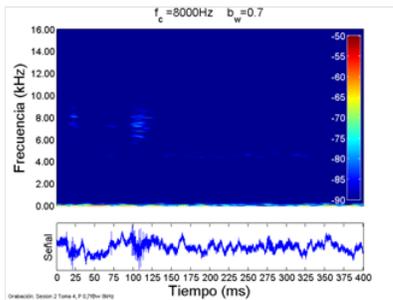
$b_w = 0.1$



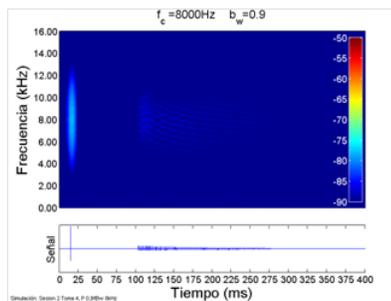
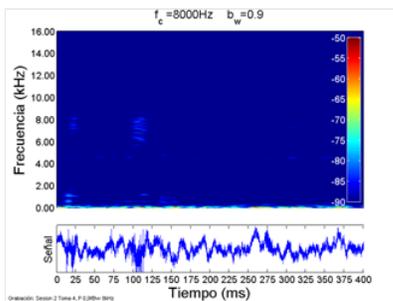
$b_w = 0.3$



$b_w = 0.5$



$b_w = 0.7$



$b_w = 0.9$

5.5 ANÁLISIS

A continuación se analizan los espectrogramas ya mostrados, pero antes se hará una comparación con las curvas para el barrido estudiados en el capítulo anterior. Adicionalmente al final se analizará la influencia del suelo en el efecto acústico.

5.5.1 CURVAS PARA EL BARRIDO DE FRECUENCIAS

En el capítulo anterior se analizaron las ecuaciones para el barrido de frecuencias según los modelos estudiados. Como resultado se encontró que, a excepción de un error teórico en la ecuación de Declercq *et al*, las ecuaciones de los modelo describen prácticamente las mismas curvas, si se están lo suficientemente alejados de la escalinata tanto el Receptor como la Fuente. Como se ve en la Figura 4.4, esta situación es cierta al menos para una Fuente/Receptor a 10m de la escalinata.

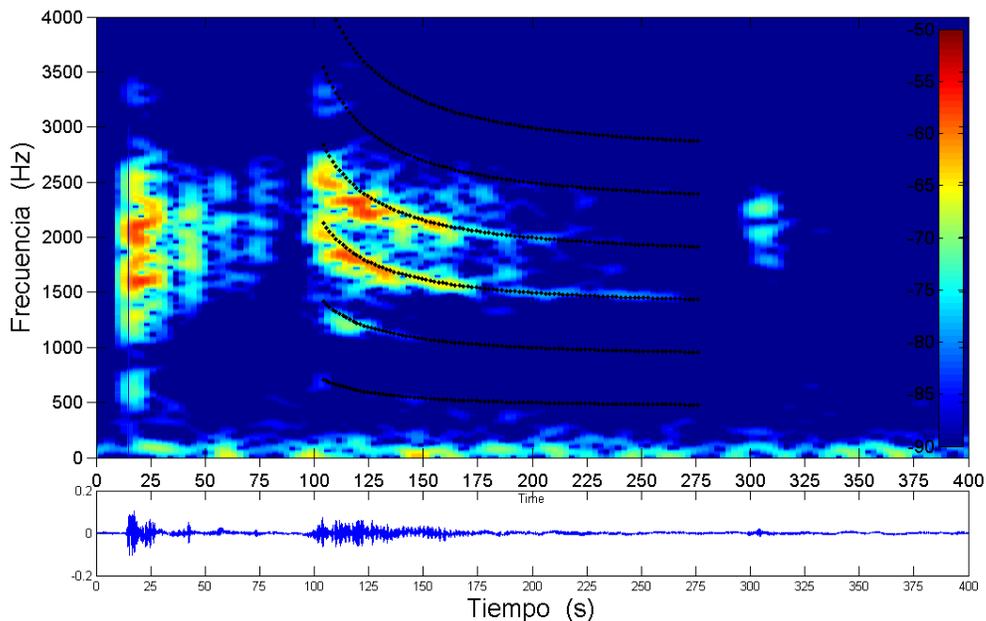


FIGURA 5.6 COMPARACIÓN DE LAS CURVAS DERIVADAS DEL MODELO DE BILSEN CON EL ESPECTROGRAMA DE UN ECO BARRIDO GRABADO

En la Figura 5.6 se hizo comprobación experimental las curvas derivadas del modelo de Bilsen. Para esto se escogió el espectrograma de un pulso ($f_c=2\text{kHz}$ y $bw = 0.9$) en cuyo eco se aprecian al

menos 2 armónicos del eco barrido. Sobre esta se graficó las curvas de la Ec. 4.3-15, dado que en este caso la Fuente y el Receptor están separados se le hizo una ligera modificación a la ecuación⁶. Como se puede ver, las curvas graficadas coinciden muy bien con los patrones del espectrograma correspondientes al barrido de frecuencias. Si se hace una medición más precisa de la velocidad del sonido, así como de las dimensiones de la escalinata; entonces las curvas tendrían un ajuste mucho más exacto. Junto con el análisis que se hizo de la Sección 4.3.4 y este resultado, se refuta directamente la declaración de Declercq *et al.* que la difracción de Bragg no puede describir el eco barrido generado en “El Castillo”.

5.5.2 OBSERVACIONES GENERALES DE LAS GRABACIONES

A grandes rasgos en los espectrogramas se muestran dos eventos principales, la primera es el pulso emitido al que será nombrado también como estímulo; y la segunda es el eco generado por la escalinata, la cual será referido como respuesta acústica.

En un análisis temporal, en todos los espectrogramas se muestra el registro del pulso emitido aproximadamente a los 15ms. En seguida se deben encontrar los patrones originados por la acción de la escalinata. Usando las medidas de la Tabla 5.1, se calcula que la respuesta acústica de la escalinata debe estar entre los tiempos

$$t_0 = (s_0 + r_0)/v_s = 102.7\text{ms} \quad \text{y} \quad t_N = (s_N + r_N)/v_s = 276.1\text{ms}$$

En todos los espectrogramas, alrededor del tiempo inicial t_0 siempre se observa el registro de un evento sonoro de intensidad alta. Después de este tiempo la respuesta de la escalinata varía, en algunos casos se observan patrones regularmente continuos que abarcan todo el intervalo desde t_0 hasta t_N . En la mayoría de los casos la respuesta acústica dura menos o pierde intensidad antes completarse el intervalo en t_N , esta situación se analizará más adelante.

Después del tiempo t_N es común encontrar un evento sonoro ubicado aproximadamente a los 300 ms. Este evento debe originarse por la reflexión sonora de una estructura más lejana que el

⁶ Dado que en la Ec. 4.3-15 se considera que la fuente y el receptor están en el mismo lugar, se tiene que hacer una sencilla modificación para el arreglo experimental de este capítulo. Siendo s_n la distancia de la Fuente al escalón n , y r_n la distancia entre el Receptor y este escalón; entonces el tiempo t_n es igual a

$$t_n = (s_n + r_n)/v_s$$

último escalón, muy probablemente se trate del templo ubicado en la plataforma superior de “El Castillo”.

En cuanto al comportamiento en frecuencias, de manera general se puede observar que tanto la intensidad del estímulo, como el de la respuesta acústica, disminuyen para las frecuencias altas. La página que muestra los resultados para una frecuencia central de 16000Hz fue omitida debido a la baja intensidad de la señal.

La disminución de intensidad puede explicarse, por un lado, por un error de diseño en la señal de los pulsos. Aunque la amplitud del espectro $|Y(f)|$ es una distribución normalizada (véase la sección 5.2), eso no implica que la distribución de $|Y(f)|^2$ también lo sea. La cantidad $|Y(f)|^2$ es la distribución de energía espectral, por lo tanto, la integral de $|Y(f)|^2$ en todo el eje de frecuencias es la energía contenida en toda la señal $y(t)$. Si se calcula dicha integral (Véase el Apéndice 7.6) se encuentra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \frac{0.3316}{b_w f_c}$$

O sea que la energía (implícita) que tienen empaquetados los pulsos diseñados por MatLab, es inversamente proporcional al ancho de banda $B_w = b_w f_c$. Por esto mismo para pulsos con una f_c alta, la intensidad es muy disminuida.

Por otro lado, de todas maneras se espera que la respuesta acústica de la escalinata para las frecuencias altas tenga una distribución espectral de baja intensidad. Este comportamiento fue encontrado en trabajos anteriores a la tesis, así como por D. Lubman.

En el espectrograma de las grabaciones se puede observar que el pulso reproducido difiere de la señal original del pulso (la cual se puede apreciar como tal en las simulaciones). A pesar de los defectos en la reproducción, dentro del intervalo de interés que va de $f_c - \frac{B_w}{2}$ hasta $f_c + \frac{B_w}{2}$, se puede considerar que el sonido emitido conserva aceptablemente el espectro de la señal original. Hay que considerar que el Micrófono 1 estaba colocado detrás del altavoz, por lo que el pulso registrado no corresponde necesariamente al sonido que en efecto fue enviado hacia la escalinata.

Cabe mencionar que en las grabaciones no se hizo ningún procesamiento de señal (como la aplicación de un filtro), por lo que en los espectrogramas se observan patrones correspondientes al ruido de fondo, en especial para los de baja frecuencia (f_c de 62.5Hz hasta 500Hz).

5.5.3 RESPUESTA ACÚSTICA AL PULSO

Empezando con un análisis por frecuencias centrales, es encontrado que existe un umbral en el que la respuesta acústica es “dispersada” o prolongada temporalmente. Para pulsos con $f_c < 500\text{Hz}$, la respuesta acústica consiste en ecos o reflexiones sencillas, que se ven en el espectrograma como patrones o manchas de forma compacta con similitudes con el pulso. El más visible e importante siempre se encuentra sobre t_0 alrededor de los 100 ms. La segunda más presente se encuentra después de t_N y se debe a una estructura diferente a la escalinata como ya fue mencionado. A partir de una $f_c \geq 500\text{Hz}$ la respuesta acústica consiste en sonido prolongado temporalmente. Este cambio de comportamiento es acorde con la teoría de difracción, pues la frecuencia más baja que puede ser difractada por la escalinata, corresponde a la asíntota del primer armónico del barrido de frecuencias. Esta frecuencia es la denominada f_{2a} y para las dimensiones de los escalones de “El Casitllo” su valor está alrededor de los 461Hz.

Analizando en término del ancho de banda fraccional b_w , conforme aumenta esta cantidad también aumenta el rango de frecuencias donde se ubica la respuesta acústica. Por lo tanto el ancho de banda B_w del estímulo tiene relación directa con el ancho de banda de la respuesta. Esto es un resultado esperado, ya que el eco no puede tener una distribución en frecuencias más allá que la contenida en el pulso.

La combinación entre la frecuencia central f_c y el ancho de banda $B_w = b_w f_c$, es lo que determina a final de cuentas la respuesta acústica. A continuación se mencionan los casos más relevantes.

Para pulsos con ancho de banda corto en comparación con f_{2a} , es decir para $b_w f_c < f_{2a}$, como la respuesta acústica también tiene un ancho de banda angosta, no es posible obtener un barrido de frecuencias bien definido. El comportamiento del eco para estos casos está determinado principalmente por la frecuencia central. Si esta frecuencia está alrededor de un armónico de f_{2a} , como resultado el eco obtenido es prolongado de manera continua. Esto se debe a que el rango de frecuencias del pulso corresponde justamente a la parte del barrido que se asienta cerca de la asíntota ($m f_{2a}$). En cambio, si la frecuencia central está fuera de los múltiplos de f_{2a} , el eco obtenido sucede de manera interrumpida. En conjunto estos resultados pueden dar indicios de cómo sería la respuesta acústica, si se emplean sonidos prolongados y tonales como el de una flauta.

Para aquellos pulsos cuya frecuencia central está cerca de un armónico, mientras va creciendo el ancho de banda fraccional, puede observarse como el barrido de frecuencias va siendo más pronunciado. Cuando el ancho de banda es más grande que f_{2a} , entonces se empieza a observarse otro armónico del barrido.

Sin importar la ubicación de f_c con respecto a f_{2a} , se pueden determinar las condiciones generales que para obtener como respuesta acústica un eco barrido con al menos un armónico, esta condiciónese son que

$$B_w = b_w f_c > 2f_{2a} \quad y \quad f_c > f_{2a}$$

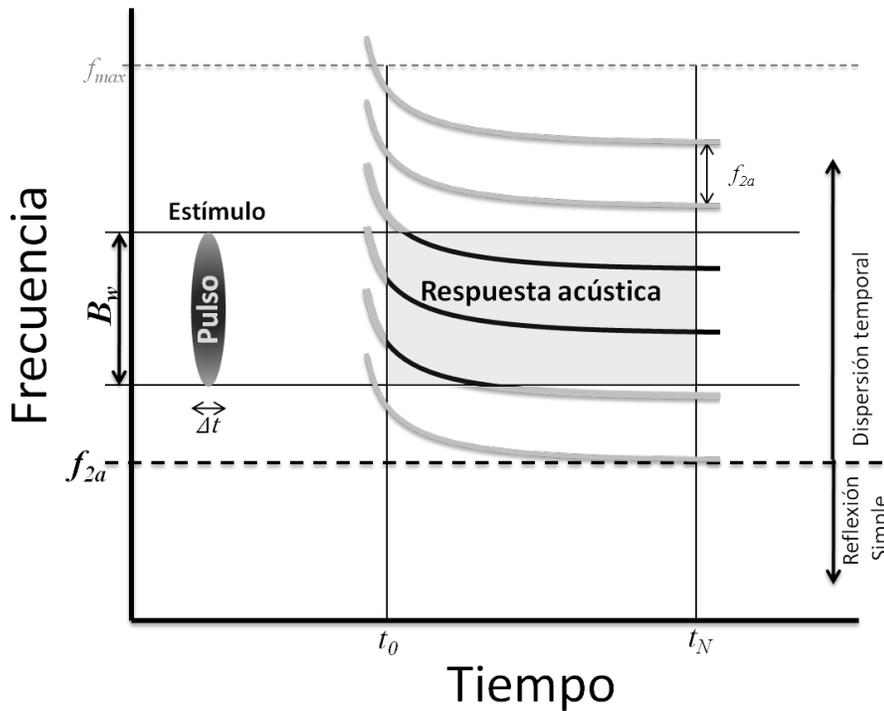


FIGURA 5.7 ESQUEMA DE GENERAL DE LA RELACIÓN ENTRE EL PULSO (ESTÍMULO) Y EL ECO (RESPUESTA ACÚSTICA) GENERADO POR UNA ESCALINATA.

En la Figura 5.7, se muestra un esquema de cómo es que se determina la respuesta acústica generada por una escalinata en general. Como se observa en esta figura, la respuesta acústica se ubica en la intersección de dos "bandas", una en el eje de frecuencias y otra en el eje temporal. La primera tiene un ancho B_w y sus delimitaciones son $f_c - \frac{B_w}{2}$ y $f_c + \frac{B_w}{2}$. La segunda tiene como límites a t_0 y t_N , y su duración depende de las dimensiones de la escalinata y la posición de la fuente, entre otras variables. Si la intersección de estas "bandas" está por arriba de f_{2a} , entonces

se da la dispersión temporal originada por la difracción, y la respuesta acústica se conforma por las partes del barrido de frecuencias que están dentro de la intersección. En el caso contrario no se da la dispersión temporal y entonces la respuesta acústica se conforma por reflexiones simples. Toda esta descripción, es aplicable sólo para pulsos o sonidos en general, cuya duración (Δt) es suficiente corto para que no exista un traslape con la respuesta acústica ($\Delta t < t_0$).

5.5.4 COMPARACIÓN DE LAS GRABACIONES CON LAS SIMULACIONES

Entre las grabaciones y las simulaciones se puede observar que hay muchas similitudes. La mayor semejanza es que todo el análisis de la respuesta acústica de la sección anterior puede ser también aplicable a las simulaciones. Esto confirma que el mecanismo principal que genera a la “Cola del Quetzal” está directamente relacionado con la difracción. Cabe recordar que un arreglo lineal de N fuentes puntuales explica a la difracción como la interferencia de muchas ondas esféricas, y conceptualmente este arreglo es el paso intermedio entre la interferencia simple y la difracción.

No se puede ocultar que también hay diferencias, la mayor discrepancia se da en el aspecto temporal. En muchas grabaciones el eco pierde toda su intensidad antes del tiempo t_N contrariamente a lo que sucede en las simulaciones. Esta pérdida de intensidad puede estar relacionada con muchos fenómenos físicos no considerados por el modelo. Una posibilidad sería la absorción del sonido por el aire. Otra posibilidad sería que la direccionalidad con que reflejan los últimos escalones no es favorable hacia la dirección donde se ubica el Micrófono 1. Este es uno de los aspectos que podrían explicarse mediante la Teoría de la Difracción de Rayleigh.

Hasta el momento la comparación de los sonidos experimentales con los simulados se ha hecho mediante una herramienta gráfica, la evaluación más importante sería una en términos auditivos (lo cual queda fuera de los objetivos de esta tesis). No obstante en los archivos de audio del disco anexo, se puede escuchar que son muy similares las grabaciones experimentales y las simulaciones.

Una de las ventajas del modelo propuesto es que puede ser perfectible. Esto se logra incluyendo cada vez más factores tanto físicos como geométricos. A continuación se muestra un breve ejemplo en donde se incorpora la influencia del suelo.

5.5.5 INFLUENCIA DEL SUELO EN EL ECO BARRIDO

La influencia del piso en el efecto acústico del eco barrido ya ha sido analizado e incluso simulado por Declercq *et al.* (Declercq *et al.* 2004a) y J. Cruz (Cruz Calleja 2008). Sin embargo en sus trabajos no se especifica de qué manera se afecta el eco barrido. Una de las ventajas del modelo propuesto en esta tesis⁷, es que de manera fácil también se pueden incluir las reflexiones provocadas por el suelo.

Hasta ahora solo se ha considerado una trayectoria que sale directamente de la Fuente en $\mathbf{F} = (x_F, y_F)$, se refleja en la escalinata y llega directamente a al Receptor en $\mathbf{R} = (x_R, y_R)$. De la misma forma que en el trabajo de Declercq *et al.*, geoméricamente un rayo que se refleja en el piso y llega a \mathbf{R} , es equivalente a un rayo que llega directamente al “Receptor espejo” ubicado en el punto $\mathbf{R}^* = (x_R, -y_R)$. De manera análoga se define a la “Fuente espejo” cuya posición es $\mathbf{F}^* = (x_F, -y_F)$. La función $p(\mathbf{F}, \mathbf{R})$ representa la simulación simple del eco barrido para posiciones dadas en la Fuente y el Receptor, la simulación considerando el piso (p_s) se obtiene sumando las 4 trayectorias posibles del sonido:

$$p_s(\mathbf{F}, \mathbf{R}) = p(\mathbf{F}, \mathbf{R}) + A \cdot p(\mathbf{F}, \mathbf{R}^*) + A \cdot p(\mathbf{F}^*, \mathbf{R}) + A^2 \cdot p(\mathbf{F}^*, \mathbf{R}^*) \quad \text{Ec. 5.5-1}$$

En este caso A puede ser un coeficiente relacionado con la absorción del sonido por el suelo donde $0 < A < 1$.

En la Figura 5.8 se muestra la simulación para un pulso en donde se consideró el piso. En comparación de la simulación sin la influencia del piso, las curvas del barrido pierden continuidad y se observan patrones con forma irregular. Esto se debe a la interferencia provocada por las reflexiones del piso que llegan un pequeño tiempo después. Debajo de la simulación se observa el espectrograma de la grabación de dicho pulso, aunque la correspondencia entre ambos no es exacta, se pueden observar ciertas similitudes. La principal es que se observan en ambos discontinuidades en las curvas del barrido e incluso hay algunos patrones (o manchas) que son

⁷ Cabe mencionar que el modelo de esta tesis, que está basado en un arreglo lineal de N fuentes puntuales; tiene similitudes con el modelo de J. Calleja en cuanto dice estar basado también en el fenómeno de Tono por Repetición (Repetiton Pitch). Cabe señalar que desde un punto de vista formal en la física, como se ha hecho en esta tesis, el mecanismo que propone tiene que ver más con la acción de fuentes puntuales, que con el fenómeno psicoacústico de Tono por Repetición, véase la Sección 4.3.3.

muy similares. En resumen con esto se demuestra que las reflexiones por el suelo afectan en la continuidad de los armónicos en el eco barrido.

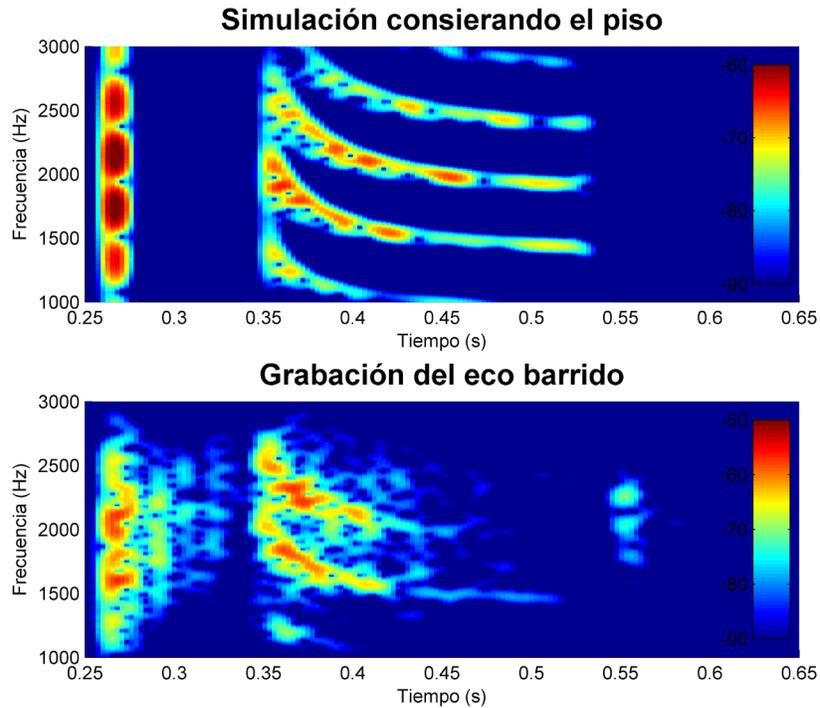


FIGURA 5.8 COMPARACIÓN DE UNA SIMULACIÓN CONSIDERANDO LA INFLUENCIA DEL PISO, CON LA GRABACIÓN DEL ECO BARRIDO.

Arriba se muestra considerando el suelo la simulación para un pulso de $f_c = 2\text{kHz}$ y $bw=0.7$, abajo se muestra la grabación obtenida para este pulso. Se utilizó una constante $A=0.5$, véase la Ec. 5.5-1.

5.6 CONCLUSIONES

Como resultados de este trabajo experimental, se encontró la relación entre la respuesta acústica de la escalinata con el pulso gaussiano que sirvió de estímulo. A grandes rasgos el eco producido se conforma por las partes del barrido que se encuentran dentro de la distribución espectral del pulso. Si la distribución espectral se encuentra abajo del umbral f_{2a} la respuesta consiste en ecos o reflexiones simples, por arriba del umbral el pulso es dispersado temporalmente debido a un fenómeno de difracción. Para que se genere un eco barrido se estima que tanto el ancho de banda B_w como la frecuencia central f_c deben cumplir que $B_w > 2f_{2a}$ y $f_c > f_{2a}$.

El trabajo experimental también sirvió para confirmar la teoría desarrollada del capítulo anterior. En primera se comprobó que las curvas para el barrido de frecuencias según el modelo de Bilsen describen efectivamente al eco barrido. Por otro lado si se utilizan las curvas derivadas de la Ecuación de Red también se esperaría un resultado similar. En cuanto al modelo propuesto de N fuentes puntales, se encontró que las simulaciones en base a este modelo pueden describir las características generales de la respuesta acústica de la escalinata. Este resultado muestra la capacidad de predecir el efecto acústico para diferentes fuentes, y por otro lado, es un argumento a favor de la difracción como el mecanismo físico que principalmente determina el efecto acústico. Otro resultado de la comparación entre las grabaciones y las simulaciones es que se encontraron características en el eco que no puede reproducir el modelo. No obstante simulando la influencia del suelo, se demostró que el modelo puede ser perfectible.

CONCLUSIONES GENERALES

Respecto al mecanismo que genera el efecto acústico de la “Cola de Quetzal”, se encontró que los 3 modelos describen curvas similares (Figura 4.4), bajo ciertas condiciones y con algunas correcciones. Estas curvas describen temporalmente las componentes frecuenciales producto de una interferencia constructiva. Experimentalmente se obtuvo que las curvas del modelo de Tono por Repetición se ajustan muy bien a los patrones en el espectrograma del eco barrido (Figura 5.6), y un resultado similar se esperaría para las curvas de los otros modelos. Se puede concluir que en un nivel básico el eco barrido se origina por un proceso sencillo de reflexiones consecutivas que interfieren constructivamente. Esto puede ser relacionado con un proceso de difracción regido por la Ecuación de Red, cuando tanto la fuente como el receptor están lo suficientemente alejados (Ec. 4.3-18). Cuando la fuente y el receptor están en el mismo lugar, entonces este proceso se comporta según la Ley de Bragg.

En esta tesis se propuso un modelo para simular el sonido producido por la escalinata basado en un arreglo lineal de N fuentes puntuales, a pesar de no considerar las condiciones de frontera y otros factores físicos, las simulaciones a partir de este modelo reproducen gran parte de las componentes frecuenciales que se observan en los espectrogramas obtenidos de las grabaciones experimentales. Con lo que se puede concluir que estos factores no tienen gran influencia sobre el efecto. Considerar que las reflexiones de los escalones actúan como fuentes puntuales, resulta efectivo para simular el efecto acústico.

Experimentalmente se encontró que el efecto acústico depende directamente de la distribución espectral del sonido emitido. A grandes rasgos el eco producido se conforma por las partes del barrido que se encuentran dentro de la distribución espectral del pulso. Por encima del umbral f_{2a} la respuesta acústica es dispersada temporalmente, y dependiendo del ancho de banda espectral del pulso, la respuesta puede derivar en un barrido de frecuencias con uno o más armónicos. Por debajo del umbral la respuesta se conforma por un eco simple.

En esta tesis se hizo un análisis acústico del efecto de la “Cola de Quetzal”, con este estudio no solo se logró una mejor comprensión física del fenómeno, sino que se aportan herramientas tanto teóricas como experimentales que pueden ser aplicados a estudios Arqueoacústicos. En este sentido el modelo propuesto y la Figura 5.7 representan los resultados más importantes de esta tesis. Como se muestra en dicha figura, la respuesta acústica generada por una escalinata en general puede abstraerse como la intersección de dos “bandas” con las curvas para el barrido. La

“banda en frecuencias” esta directamente determinada por las cualidades del pulso, que en un caso realista correspondería a las cualidades sonoras del instrumento. La “banda temporal” y las curvas para el barrido están determinadas por la posición de la fuente y el receptor, así como por las dimensiones de la escalinata. A grandes rasgos se dan los principios básicos de cómo se relacionan la fuente sonora, la estructura arquitectónica y la ubicación del escucha en el efecto acústico. Además esta relación puede ser simulada y estudiada utilizando por el modelo propuesto. En general estas herramientas pueden ser de gran utilidad en estudios donde se busque comprobar el uso acústico o sonoro de una escalinata.

Como fue ya mencionado en sitios arqueológicos de las culturas Mesoamericanas la presencia de un eco barrido es una situación muy común. Para demostrar un uso consiente de este efecto es necesario encontrar datos que demuestren el control de las cualidades sonoras del efecto mediante la adecuación, modificación, o uso repetido de alguna característica física (en la fuente o en la escalinata) que pueda ser controlable. Un ejemplo puede ser la modificación en las dimensiones de los escalones, en esta tesis se encontró que bajo ciertas condiciones la frecuencia inicial del eco barrido depende del tamaño de la huella de los escalones (véase la Ec. 4.3-23), este hecho puede ayudar a explicar el uso de huellas angostas en la mayoría de los templos Mesoamericanos (mientras más angosta es d , la frecuencia inicial de la fundamental en el eco barrido se encuentra en el rango de mayor sensibilidad del oído humano, véase la Tabla 4.3). Cabe recalcar que es indispensable hacer un trabajo arqueológico en paralelo con el acústico cada vez que se quiera probar el uso acústico o sonoro de una escalinata.

En relación a la intencionalidad de la Cola de Quetzal todavía son muchas las interrogantes por responder, en cuanto al aspecto arqueológico se necesita investigar sobre la importancia del quetzal para los mayas y su connotación cultural, así como de la concepción del eco que se tenía en esta civilización. También se necesita un estudio que genere un mapa temporal y geográfico de los sitios arqueológicos en que aparece este efecto, con esto se podría correlacionar la presencia del eco barrido en los templos mayas con algún dato arqueológico relevante. Los resultados de esta tesis pueden ser de gran ayuda para la realización de este tipo de estudios ya que pueden ser utilizados como herramientas para estudiar y simular la influencia de la estructura arquitectónica y de la fuente sonora sobre este efecto acústico.

APÉNDICES

7.1

Considerando en la Ec. 4.2-1 las cantidades empleadas por Bilsen ($x'_F = -10\text{m}$, $y'_F = 1.8\text{m}$, $g + h = d = 0,263\text{m}$) (Bilsen 2006b), la fórmula resultante para calcular la distancia s a cada escalón n es:

$$s(n) = \sqrt{(-10 - n \cdot 0.263)^2 + (1.8 - n \cdot 0.263)^2}$$

En la ecuación presentada por Bilsen (véase la Ec. 3.3-1), el primer escalón corresponde al índice $n = -7$, esto se debe a que el escalón $n = 0$ se le asignó al ubicado a la altura del observador (véase la Figura 3.7). En dicha fórmula (que se denotará como $s_B(n)$), si se recorre el índice n unos 7 escalones abajo ($n \rightarrow n - 7$), se obtiene que:

$$s_B(n) = \sqrt{(-9.959 - n \cdot 0.263)^2 + (1.841 - n \cdot 0.263)^2}$$

Observando $s(n)$ y $s_B(n)$, se aprecia que ambas no son idénticas pero son muy cercanas entre sí. En la siguiente tabla se muestra la diferencia entre $s(n)$ y $s_B(n)$ para el primer escalón ($n = 0$), como para el último escalón ($n = 91$). Se observa que la máxima diferencia se da para $n = 0$, e implica un error porcentual del -0.32% con respecto a $s(0)$. En la misma tabla se muestra el cálculo de las frecuencias del barrido (véase la Ec. 4.3-15) considerando $s(n)$ y por otro lado $s_B(n)$. La máxima diferencia en las estimaciones de la frecuencia también se da para $n = 0$, e implica un error del 0.65% con respecto a la frecuencia calculada con $s(0)$. En resumen, el error en las fórmulas de Bilsen es mínimo y podría ser despreciable.

Escalón n	Distancia corregida $s(n)$		Distancia según Bilsen $s_B(n)$		Diferencia $s_B(n) - s(n)$		error _% *
0	10.161	m	10.128	m	-0.0330	m	-0.32%
91	40.513	m	40.456	m	-0.0567	m	-0.14%
Escalón n	Frecuencia corregida con $s(n)$		Frec. según Bilsen con $s_B(n)$		Diferencia		error _% *
0	791.25	Hz	796.38	Hz	5.12	Hz	0.65%
90	471.29	Hz	471.32	Hz	0.03	Hz	0.01%

7.2

Para calcular el $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n)$, se comienza utilizando la igualdad $x + y = \frac{(x+y)(x-y)}{x-y} = \frac{x^2 - y^2}{x-y}$, y después se multiplica y divide por $1/n$ simultáneamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(s_{n+1})^2 - (s_n)^2}{s_{n+1} + s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(s_{n+1})^2/n - (s_n)^2/n}{s_{n+1}/n + s_n/n}$$

Dado que $s_n = \sqrt{y_F^2 + (na - x_F)^2}$ y $s_{n+1} = \sqrt{y_F^2 + ([n+1]a - x_F)^2}$ (véase la Ec. 4.2-9), el límite de cada uno de los términos divididos por n es igual a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(s_{n+1})^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_F^2 + (n^2 + 2n - 1)a^2 - 2nax_F + x_F^2}{n} = (n+2)a^2 - 2ax_F$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(s_n)^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_F^2 + n^2a^2 - 2nax_F + x_F^2}{n} = na^2 - 2ax_F$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{y_F^2 + (n^2 + 2n - 1)a^2 - 2nax_F + x_F^2}{n^2}} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{y_F^2 + n^2a^2 - 2nax_F + x_F^2}{n^2}} = a$$

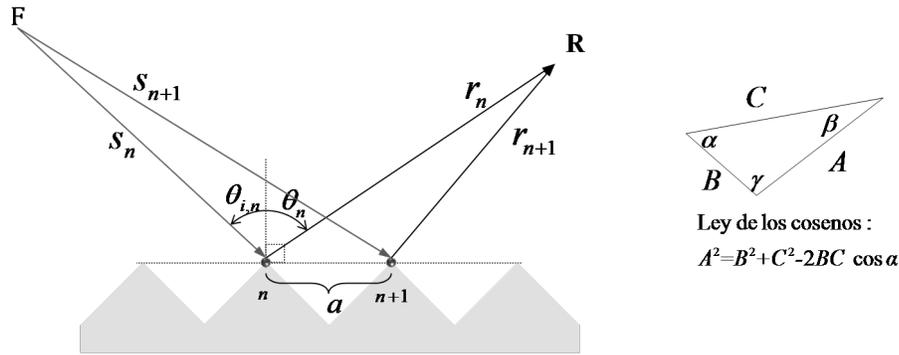
Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(s_{n+1})^2/n - (s_n)^2/n}{s_{n+1}/n + s_n/n} = \frac{(n+2)a^2 - 2ax_F - (na^2 - 2ax_F)}{a + a} = \frac{2a^2}{2a}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - s_n = a$$

7.3



REPRODUCCIÓN DE LA FIGURA 4.5 Y LEY DE LOS COSENOS

En la Figura 4.5, si se aplica la *Ley de los cosenos* al triángulo cuyos lados son r_{n+1} , r_n , y a , en el ángulo $\frac{\pi}{2} - \vartheta_n$ (véase el vértice $\angle r_n, a$), se obtiene que

$$r_{n+1}^2 = r_n^2 + a^2 - 2r_n a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_n\right) = r_n^2 + a^2 - 2r_n a \sin \vartheta_n$$

Dividiendo por r_n^2 y sacando la raíz cuadrada, la igualdad anterior se convierte en

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{r_n}\right)^2 - 2\frac{a}{r_n} \sin \vartheta_n} \tag{Ec. 7.3-1}$$

La raíz cuadrada de la igualdad anterior se puede aproximar por medio de la Serie de McLaurin para $\sqrt{1+x}$, la cual es

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

Para este caso la variable $x = \left(\frac{a}{r_n}\right)^2 - 2\frac{a}{r_n} \sin \vartheta_n$. Definiendo a la variable $u = a/r_n$, y desarrollando los primeros términos de la serie se obtiene que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots &= 1 + \frac{1}{2}(u^2 - 2u \sin \vartheta_n) - \frac{1}{8}(u^4 - 4u^3 \sin \vartheta_n + 4u^2 \sin^2 \vartheta_n) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}u^2 - u \sin \vartheta_n - \frac{1}{8}u^4 + \frac{1}{2}u^3 \sin \vartheta_n - \frac{1}{2}u^2 \sin^2 \vartheta_n + \dots \\ &= 1 - u \sin \vartheta_n + \frac{1}{2}u^2(1 - \sin^2 \vartheta_n) + \frac{1}{2}u^3 \sin \vartheta_n - \frac{1}{8}u^4 + \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. 7.3-1, se llega a que

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = 1 - \left(\frac{a}{r_n}\right) \sin \vartheta_n - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r_n}\right)^2 \cos^2 \vartheta_n + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r_n}\right)^3 \sin \vartheta_n - \frac{1}{8}\left(\frac{a}{r_n}\right)^4 + \dots$$

Multiplicando por $-r_n$ y despejando, se obtiene finalmente la diferencia $r_n - r_{n+1}$ en términos de una serie infinita:

$$r_n - r_{n+1} = a \sin \vartheta_n - \frac{a^2}{2r_n} \cos^2 \vartheta_n - \frac{a^3}{2r_n^2} \sin \vartheta_n + \frac{a^4}{8r_n^3} + \dots$$

Observando de nuevo la Figura 4.5, si se aplica ahora la *Ley de los cosenos* al triángulo con los lados s_{n+1} , s_n , y a , sobre el ángulo $\frac{\pi}{2} + \theta_n$ (véase el vértice $\angle s_n, a$), se obtiene que

$$s_{n+1}^2 = s_n^2 + a^2 + 2s_n a \sin \theta_n$$

Para obtener la diferencia $s_n - s_{n+1}$ en términos de una serie infinita, se debe utilizar un procedimiento similar al mostrado anteriormente, sólo que en este caso $x = u^2 + 2u \sin \theta_n$. Como resultado se obtiene que

$$s_n - s_{n+1} = -p \sin \theta_n - \frac{p^2}{2s_n} \cos^2 \theta_n + \frac{p^3}{2s_n^2} \sin \theta_n + \frac{p^4}{8s_n^3} \dots$$

7.4

Para obtener la frecuencia final e inicial en términos de las medidas a , L , ϕ , x'_F y y'_F , primeramente se va a formular la frecuencia f_m en términos de dichas medidas y de manera general para cada escalón n , es decir $f_m(n)$. Al final la frecuencia inicial corresponde a $f_m(n = 0)$ y la final a $f_m(n = N)$.

En la Ec. 4.3-2, si se consideran sólo los ángulos de incidencia θ_n (véase la página 72) que son correspondientes a las esquinas de los escalones (es decir los puntos ne'), se llega a que

$$f_m(n) = \frac{mv}{2a \sin \theta_n}$$

Sustituyendo $\sin \theta_n$ por la Ec. 4.2-5, se obtiene entonces que

$$f_m(n) = \frac{mv}{2a} \cdot \frac{s_n}{na - x_F} \quad \text{Ec. 7.4-1}$$

En la figura Figura 4.2, en el triángulo cuyos lados miden s_n , s_0 y na , si se aplica la *Ley de los cosenos* en el ángulo $\frac{\pi}{2} + \theta_0$ (del vértice $\angle s_0, na$), se obtiene que

$$s_n^2 = n^2 a^2 + s_0^2 + 2nas_0 \cos \theta_0$$

Observando la Figura 4.2 se puede deducir que $y_F = s_0 \cos \theta_0$, y por lo tanto

$$s_n = \sqrt{n^2 a^2 + s_0^2 + 2y_F na}$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. 7.4-1 se llega a que

$$f_m(n) = \frac{mv \sqrt{s_0^2 + n^2 a^2 + 2y_F na}}{2a (na - x_F)} \quad \text{Ec. 7.4-2}$$

El siguiente paso es expresar x_F , y_F y s_0 , en función del ángulo de inclinación de la escalinata (ϕ), y de las coordenadas x'_F y y'_F del sistema no rotado (paralelo al suelo). De la Ec. 4.2-3 se obtiene que

$$\begin{aligned} x_F &= x'_F \cos \phi + y'_F \sin \phi \\ y_F &= -x'_F \sin \phi + y'_F \cos \phi \end{aligned}$$

Insertando estas igualdades y la Ec. 4.2-2 en la Ec. 7.4-2, se obtiene $f_m(n)$ que es de la forma:

$$f_m(n) = \frac{mv \sqrt{(x'_F)^2 + (y'_F)^2 + n^2 a^2 + 2na(-x'_F \sin \phi + y'_F \cos \phi)}}{2a (na - x'_F \cos \phi - y'_F \sin \phi)} \quad \text{Ec. 7.4-3}$$

En el caso de la frecuencia inicial, que corresponde al escalón $n = 0$, se obtiene que

$$f_m(0) = -\frac{mv}{2a} \cdot \frac{1}{\frac{x'_F}{\sqrt{(x'_F)^2 + (y'_F)^2}} \cos \phi + \frac{y'_F}{\sqrt{(x'_F)^2 + (y'_F)^2}} \sin \phi}$$

En cuanto a la frecuencia final, el cual corresponde a $n = N$, dado que $L = Na$ se obtiene que

$$f_m(N) = \frac{mv}{2a} \frac{\sqrt{L + (x'_F)^2 + (y'_F)^2 + 2L(-x'_F \sin \phi + y'_F \cos \phi)}}{L - x'_F \cos \phi - y'_F \sin \phi}$$

La Transformada de Fourier del pulso $y(t) = e^{-t^2/2\sigma_t^2} \cos(2\pi f_c t)$, se puede obtener de la Sección 2.4.4, en donde se calculó la transformada de un pulso de la forma $\psi(t) = \sqrt{\alpha/\pi} e^{-\alpha t^2} e^{-i(\omega_c t)}$ con $\alpha \geq 0$. En la fórmula de $y(t)$, si se cambia a $\cos(2\pi f_c t)$ por su representación compleja ($e^{-i(2\pi f_c t)}$) y además se sustituye por las constantes $\alpha = \frac{1}{2\sigma_t^2}$ y $\omega_c = 2\pi f_c$; se llega a que

$$y(t) = e^{-\alpha t^2} e^{-i(\omega_c t)} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \psi(t)$$

Utilizando la Ec. 2.4-10 de la Sección 2.4.4, se puede calcular entonces la Transformada de Fourier Angular de $y(t)$, o sea $Y(\omega)$:

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathcal{F}\{\psi(t)\} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4\alpha}} = \sqrt{2\pi\sigma_t^2} \cdot e^{-\frac{\sigma_t^2(\omega-\omega_0)^2}{2}}$$

Recordando que $\omega = 2\pi f$, entonces la transformada $Y(\omega)$ en función de la frecuencia f es

$$Y(f) = \sqrt{2\pi\sigma_t^2} \cdot e^{-2\pi^2\sigma_t^2(f-f_0)^2}$$

De acuerdo con la Ec. 5.2-3: $\sigma_t^2 = 1/(4\pi^2\sigma_f^2)$, entonces la Transformada de Fourier del pulso $y(t)$ es:

$$Y(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_f^2}} e^{-(f-f_c)^2/2\sigma_f^2}$$

La *amplitud del espectro* está definida como $|Y(f)| = \sqrt{Y(f)Y^*(f)}$ (véase las Ec. 2.4-7 y Ec. 10.1-5). Como $e^{-(f-f_c)^2/2\sigma_f^2}$ es una cantidad real positiva para cualquier f complejo, entonces $Y(f) = Y^*(f)$ y por lo tanto $|Y(f)| = Y(f)$.

Para resolver la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi\sigma_f^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(f-f_c)^2}{\sigma_f^2}} df$$

se comienza con un cambio de variable ($x = f - f_c$) y una sustitución por la constante $\alpha = 1/\sigma_f^2$. Con esto se llega a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(f-f_c)^2}{\sigma_f^2}} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

La integral a resolver es la conocida integral gaussiana y su propiedad es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha} \quad (\text{Riley et al. 2006})$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi\sigma_f^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(f-f_c)^2}{\sigma_f^2}} df = \frac{1}{2\pi\sigma_f^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi}\sigma_f}{2\pi\sigma_f^2} = \frac{1}{2\sigma_f\sqrt{\pi}}$$

De acuerdo con la Ec. 5.2-3, $\sigma_f = b_w f_c / \sqrt{-8 \ln r}$ donde $r = 10^{-\frac{6}{20}}$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2\sigma_f\sqrt{\pi}} = \frac{1}{b_w f_c} \sqrt{\frac{-\ln r}{2\pi}}$$

Evaluando la raíz cuadrada se obtiene finalmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \frac{0.3316}{b_w f_c}$$

ANEXOS

8.1 NÚMEROS COMPLEJOS

Un *número complejo* z no es más que un par ordenado de números reales x y y de forma que

$$z = x + iy \quad \text{Ec. 8.1-1}$$

Donde i es la *unidad imaginaria* y es igual a $\sqrt{-1}$. El número z se compone de dos partes: la *parte real* $Re(z)$ está representado por x y la *parte imaginaria* $Im(z)$ está representado por y .

El *conjugado* de un número complejo se obtiene simplemente cambiando de signo la parte imaginaria, esto es $z^* = x - iy$ donde z^* denota el conjugado de z . Utilizando esta operación se pueden obtener la parte real e imaginaria de un número complejo de la siguiente forma

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) \quad \text{Ec. 8.1-2}$$

Dado que los números imaginarios pueden ser representados sobre un plano estos pueden ser expresados en forma de coordenadas polares (r, θ) donde r es la distancia al origen y θ el ángulo con respecto al eje real. Entonces

$$z = r(\cos \theta + i \sen \theta) \quad \text{Ec. 8.1-3}$$

Utilizando la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sen \theta$ se llega a una representación polar bastante útil

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{Ec. 8.1-4}$$

En esta representación r es llamado el *módulo* o *magnitud* de z ($r = |z|$) y θ el *ángulo de fase* o *argumento* de z . Estas coordenadas pueden obtenerse mediante las igualdades

$$r^2 = |z|^2 = z z^* \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{Ec. 8.1-5}$$

(Arfken 1985)

8.2 ONDAS PLANAS INHOMOGENEAS

Las ondas planas inhomogéneas son aquellas en que la perturbación no es uniforme en los planos que conforman la onda. La representación matemática de estas ondas se puede obtener utilizando un vector de onda complejo, esto es

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n} = k(\mathbf{n}_R + i\mathbf{n}_I) \quad \text{Ec. 8.2-1}$$

Donde \mathbf{n}_R y \mathbf{n}_I son los componentes del vector unitario \mathbf{n} . La componente \mathbf{n}_R apunta en la dirección de propagación de la onda y \mathbf{n}_I es perpendicular a \mathbf{n}_R por lo que yace sobre los planos de la onda plana. Estas características son equivalentes a las igualdades

$$n^2 = n_R^2 - n_I^2 = 1 \quad \text{Ec. 8.2-2}$$

$$\mathbf{n}_R \cdot \mathbf{n}_I = 0 \quad \text{Ec. 8.2-3}$$

(Jackson 1998)

Para el caso de un vector unitario $\mathbf{n} = (\hat{x} + i\hat{y})$, entonces el producto $k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = kx +iky$ y por tanto la onda plana inhomogénea resultante es

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(kx+iky\mp\omega t)} = Ae^{-ky}e^{i(kx\mp\omega t)} \quad \text{Ec. 8.2-4}$$

La onda inhomogénea obtenida tiene una dirección de propagación que va en la dirección del eje x pero su amplitud disminuye de forma exponencial conforme la coordenada y aumenta. Si el eje x representa la interface entre dos medios de diferentes densidades en el caso acústico o índices de refracción en el caso óptico, la expresión de arriba representaría una *onda evanescente*. Este tipo de onda es un fenómeno típico de la reflexión total interna que ocurre para determinados ángulos de incidencia cuando una onda se propaga a través de dos medios con diferentes características (Hecht 2000).

8.3 CONDICIONES DE FRONTERA

Las *condiciones de frontera* en física, son expresiones matemáticas que describen el comportamiento de una onda en general cuando incide sobre la superficie de un medio con diferentes propiedades.

La *condición de frontera Dirichlet* para el caso acústico corresponde a la condición de *sonido suave* (sound-soft), esto es que la onda de presión total $p(\mathbf{r})$ se anula sobre la superficie σ :

$$p(\mathbf{r}) = 0 \text{ para toda } \mathbf{r} \text{ sobre } \sigma \quad \text{Ec. 8.3-1}$$

La onda total $p(\mathbf{r})$ se define como la suma de la onda incidente y la onda dispersada o difractada por la superficie.

La *condición de frontera de Neuman* para el caso acústico corresponde a la condición de *sonido duro* (sound-hard) y equivale a que la componente normal a la superficie del gradiente de la onda acústica se desvanece en la frontera σ :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u(\mathbf{r}) = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ para toda } \mathbf{r} \text{ sobre } \sigma \quad \text{Ec. 8.3-2}$$

Donde $u(\mathbf{r})$ representa la velocidad de partícula y $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal a la superficie σ .

(Colton & Kress 1998)

8.4 SERIE DE FOURIER DE UNA ONDA TRIANGULAR

A continuación se desarrollará la Serie de Fourier para una *onda triangular* con periodo $T = 2\pi$. El perfil de esta onda está descrito (en su primer periodo) por la función

$$f(t) = |t| \quad -\pi < t < \pi \quad \text{Ec. 8.4-1}$$

Calculando la Serie de Fourier se encuentra que las constantes $B_n = 0$ para toda n , ya que el producto de la función $f(t)$ con cualquier función seno es una función impar y en consecuencia, la integral del producto sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ es nulo. Por otro lado

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad \text{Ec. 8.4-2}$$

Y también

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \, dt = \pi \quad \text{Ec. 8.4-3}$$

De esta manera

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \dots \right) \quad \text{Ec. 8.4-4}$$

(Kreider *et al.* 1971)

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

Arens, T. (1999). *The scattering of plane elastic waves by a one-dimensional periodic surface*. Mathematical Methods in the Applied Sciences. **22**(1): p. 55-72.

Arfken, G. (1985). *Mathematical Methods For Physicists*. 3 ed: Academic Press.

Arochi, L. E. (2005). *La Pirámide de Kukulcan: su simbolismo solar*. México, México: Panorama. 267.

Bagieu, M. , D. Maystre (1998). *Waterman and Rayleigh methods for diffraction grating problems: extension of the convergence domain*. J. Opt. Soc. Am. A. **15**(6): p. 1566-1576.

Ball, P. (2004). *Mystery of 'chirping' pyramid decoded*. Nature News, 10.1038/news041213-5: 10.1038/news041213-5

Beristain, S., C. Coss, G. Aquino, J. Negrete , P. Lizana (2002). *Tonal response on the stairway of the main pyramid at La Ciudadela, Teotihuacan archaeological site*. The Journal of the Acoustical Society of America. **112**(5): p. 2285.

Bilsen, F. A. (2004). *Homepage of Frans A. Bilsen*. Disponible en: <http://www.xs4all.nl/~fabilsen/> (Consulta: Julio 2009)

Bilsen, F. A. (2006a). *Huygens on pitch perception; staircase reflections reconsidered*. Nederlands Akoestisch Genootschap Journaal. **178**.

Bilsen, F. A. (2006b). *Repetition Pitch glide from the step pyramid at Chichen Itza*. The Journal of the Acoustical Society of America. **120**(2): p. 594-596.

Blackstock, D. T. (2000). *Fundamentals of physical acoustics*. New York, Estados Unidos: John Wiley & Sons.

Burger, R. L. (1992). *Chavin and the Origins of Andean Civilization*. Londres: Thames & Hudson.

Carrera, J. , S. Beristain (2002). *Theoretical interpretation of a case study: Acoustic resonance in an archaeological site*. The Journal of the Acoustical Society of America. **112**(5): p. 2285.

Cerutti-Maori, R. Petit , M. Cadilhac (1969). *Etude numérique du champ diffracté par un réseau*. Comptes Rendus de l'Académie des sciences (Paris). **268**: p. 1060-1063.

Claeys, J. M., O. Leroy, A. Jungman , L. Adler (1983). *Diffraction of ultrasonic waves from periodically rough liquid--solid surface*. Journal of Applied Physics. **54**(10): p. 5657-5662.

Colton, D. , R. Kress (1998). *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. 2 ed. Applied Mathematical Sciences: Springer. 334.

Cordourier, H. , F. Orduña (2009). *Programa de simulación acústica del "efecto quetzal" de las escalinatas de La pirámide de Kukulcán en Chichén Itzá, Yucatán*, en SOMI XXIV Congreso de Instrumentación: Mérida, Yucatán.

Cruz Calleja, J. A. (2007). *Fenómenos acústicos en Chichen Itzá*. Disponible en: http://acusticaweb.com/images/PDF/articulos/acustica_en_chichen.pdf (Consulta: Agosto 2009)

Cruz Calleja, J. A. (2008). *Modelo matemático del eco generado en la escalinata de la pirámide de Kukulcan basado en la dispersión- difracción del sonido en superficies periódicas*, en VI Congreso Iberoamericano de Acústica - FIA 2008. Sociedad Española de Acústica: Buenos Aires.

Cullity, B. D. (1978). *Elements of X-Ray Diffraction*. Estados Unidos: Adison Wesley.

Declercq, N. F. (2005). *The interaction of complex harmonic elastic waves with periodically corrugated surfaces and with anisotropic viscoelastic and/or piezoelectric layered media*, en *Department of Mechanical construction and production*. Ghent University: Ghent. p. 700.

Declercq, N. F. , C. S. A. Dekeyser (2007). *Acoustic diffraction effects at the Hellenistic amphitheater of Epidaurus: Seat rows responsible for the marvelous acoustics*. The Journal of the Acoustical Society of America. **121**(4): p. 2011-2022.

Declercq, N. F., J. Degrieck, R. Briers , O. Leroy (2002). *A theoretical elucidation for the experimentally observed backward displacement of waves reflected from an interface having superimposed periodicity*. The Journal of the Acoustical Society of America. **112**(5): p. 2414-2414.

Declercq, N. F., J. Degrieck, R. Briers , O. Leroy (2003a). *Theoretical verification of the backward displacement of waves reflected from an interface having superimposed periodicity*. Applied Physics Letters. **82**(15): p. 2533-2534.

Declercq, N. F., J. Degrieck, R. Briers , O. Leroy (2003b). *A full simulation of the Quetzal echo at the Mayan pyramid of Kukulcan at Chichen Itza in Mexico*. The Journal of the Acoustical Society of America. **113**(4): p. 2189.

Declercq, N. F., J. Degrieck, R. Briers , O. Leroy (2004a). *A theoretical study of special acoustic effects caused by the staircase of the El Castillo pyramid at the Maya ruins of Chichen-Itza in Mexico*. The Journal of the Acoustical Society of America. **116**(6): p. 3328-3335.

Declercq, N. F., J. Degrieck, R. Briers , O. Leroy (2004b). *Theory of the backward beam displacement on periodically corrugated surfaces and its relation to leaky Scholte-Stoneley waves*. Journal of Applied Physics. **96**(11): p. 6869-6877.

Downes, K. (1988). *Architecture of Wren*. 2 ed: Redhedge. 139.

Elizondo-Garza, F. J. (2002). *Quetzal or not Quetzal, that is the question... . On the stairs of the Castillo monument in Chichen Itza*. The Journal of the Acoustical Society of America. **112**(5): p. 2285.

Franks, A. (1996). *The First Hundred Years, in X-Rays: The First Hundred Years*, A. Michette , S. Pfauntsch, Editors. John Wiley & Sons: Inglaterra. p. 7,8.

García, N. , N. Cabrera (1978). *New method for solving the scattering of waves from a periodic hard surface: Solutions and numerical comparisons with the various formalisms*. Physical Review B. **18**(2): p. 576.

Garza, C., A. Medina, P. Padilla, A. Ramos , F. Zalaquett (2008). *Arqueoacústica maya: la necesidad del estudio sistemático de efectos acústicos en sitios arqueológicos*. Estudios de Cultura Maya. **32**: p. 63-87.

Gendrop, P. (1997). *Diccionario de Arquitectura Mesoamericana*: Trillas. 238.

Hecht, E. (2000). *Óptica*. Madrid, España: Adison Wesley Iberoamericana.

Houston, S. , K. Taube (2000). *An Archaeology of the Senses: Perception and Cultural Expression in Ancient Mesoamerica*. Cambridge Archaeological Journal. **10**(02): p. 261-294.

Huygens, C. (1905). *En envoyant le probleme d'Alhazen en France*, in *Oeuvres Complètes*. La Haye M. Nijhoff. p. 570-571.

Jackson, J. (1998). *Classical Electrodynamics*: Wiley.

Jeffrey, A. , H. H. Dai (2008). *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*. 4 ed: Academic Press. 592.

Kerr, J. (2004). *Vessel photograph K5435*. Disponible en: http://research.mayavase.com/kerrmaya_hires.php?vase=5435
http://research.mayavase.com/kerrmaya_list.php?_allSearch=5435&hold_search=5435+and+&x=0&y=0&vase_number=5435&date_added=&ms_number=&site= (Consulta: 2009)

Kinsler, L. E., A. R. Frey, A. B. Coppens , J. V. Sanders (2000). *Fundamentals of Acoustics*. 4 ed: John Wiley & Sons. 560.

Kinsler, L. E., A. R. Frey, A. B. Coppens , J. V. Sanders (2008). *Fundamentos de acústica*. 1. ed. México: Limusa. 592.

Kirk, W. V. (2002). *The accidental (acoustical) tourist*. The Journal of the Acoustical Society of America. **112**(5): p. 2284.

Kitell, C. (2005). *Introduction to Solid State Physics*. 8 ed: John Wiley & Sons.

Kreider, D. L., R. G. Kuller, D. R. Ostberg , F. W. Perkins (1971). *Introducción al Análisis Lineal*. Vol. 2. México, México: Fondo Educativo Interamericano. 784.

Kuttruff, H. (2006). *Acoustics: An Introduction*, ed. T. Francis. NewYork.

LaCasce, J. E. O. , P. Tamarkin (1956). *Underwater Sound Reflection from a Corrugated Surface*. Journal of Applied Physics. **27**(2): p. 138-148.

Lippmann, B. A. (1953). *Note on the Theory of Gratings*. J. Opt. Soc. Am. **43**(5): p. 408-408.

Loewen, E. G. , E. Popov (1997). *Diffraction Gratings And Applications*. 1 ed. Optical Science and Engineering: CRC. 630.

Lubman, D. (1998a). *Archaeological acoustic study of chirped echo from the Mayan pyramid at Chichén Itzá*. The Journal of the Acoustical Society of America. **104**(3): p. 1763-1763.

Lubman, D. (1998b). *Archaeological acoustic study of chirped echo from the Mayan pyramid at Chichen Itza, in the Yucatan Region of Mexico ... Is this the world's oldest known sound recording?* Disponible en: <http://www.acoustics.org/press/136th/lubman.htm> (Consulta: April 2009)

Lubman, D. (1998c). *The Mayan Pyramid*. Disponible en: <http://www.ocasa.org/MayanPyramid.htm>
<http://www.ocasa.org/MayanPyramid2.htm> (Consulta: April 2009)

Lubman, D. (2002). *Acoustical features of two Mayan monuments at Chichen Itza: Accident or design?* The Journal of the Acoustical Society of America. **112**(5): p. 2285.

- Lubman, D. (2006a). *Soundtrack for the Great Ball Court at Chichen Itza*. Disponible en: <http://www.acoustics.org/press/152nd/lubman.html> (Consulta: April 2009)
- Lubman, D. (2006b). *Acoustics of the Great Ball Court at Chichen Itza, Mexico*. The Journal of the Acoustical Society of America. **120**(5): p. 3279.
- Lubman, D. (2008). *Convolution-scattering model for staircase echoes at the temple of Kukulcan*. The Journal of the Acoustical Society of America. **123**(5): p. 3604.
- Lyons, R. G. (2001). *Understanding Digital Signal Processing*: Prentice Hall PTR.
- Marquina, I. (1964). *Arquitectura Prehispánica*. 2 ed. México: INAH.
- Meecham, W. C. (1956). *Variational Method for the Calculation of the Distribution of Energy Reflected from a Periodic Surface. I*. Journal of Applied Physics. **27**(4): p. 361-367.
- Millar, R. F. (1971). *On the Rayleigh assumption in scattering by a periodic surface. II*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. **69**(01): p. 217-225.
- Millar, R. F. (1973). *The Rayleigh hypothesis and a related least-squares solution to scattering problems for periodic surfaces and other scatterers*. Radio Science. **8**(8,9): p. 785-796.
- Museum, S. L. A. (2009). *Ballgame Vessel*. Disponible en: <http://www.slam.org/index.aspx?id=158&obj=51> (Consulta: 2009)
- Neviere, M., E. Popov (2002). *Light Propagation in Periodic Media: Differential Theory and Design (Optical Engineering)*: CRC.
- Neviere, M., M. Cadilhac, R. Petit (1973). *Applications of conformal mappings to the diffraction of electromagnetic waves by a grating*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. **21**(1): p. 37- 46.
- Oppenheim, A., A. Willsky, W. Hamid (1996). *Signals and Systems*: Pearson Education.
- Oppenheim, A., R. Schafer, J. Buck (1999). *Discrete-Time Signal Processing*. 2 ed: Prentice Hall.
- Ouellette, J. (1999). *The call of the past*. Ivory Tower Disponible en: <http://www.salon.com/books/it/1999/09/15/quetzal/index.html>
<http://www.salon.com/books/it/1999/09/15/quetzal/print.html> (Consulta: Agosto 2009)
- Petit, R. (1975). *Electromagnetic grating theories: Limitations and successes*. Nouvelle Revue d'Optique. **6**(3): p. 129-135.
- Petit, R., M. Cadilhac (1966). *Sur la diffraction d'une onde plane par un réseau infiniment conducteur*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences B. **262**: p. 468-471.
- Proakis, J., D. Manolakis (1996). *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*. 3 ed: Prentice Hall. 1016.
- Ramos Amézquita, A., P. Padilla Longoria, L. Alegre González, B. G. Caro Cocotle (2009). *Chichen Itzá: la megalópolis sonora maya-tolteca*, en *Foro Mundial de Ecología Acústica*. Fonoteca Nacional, CONACULTA: México.

Rayleigh, L. (1907). *On the Dynamical Theory of Gratings*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. **79**(532): p. 399-416.

Resnick, R., D. Halliday , K. S. Krane (2000a). *Física Vol. 1*. Vol. 1. México: Compañía Editorial Continental.

Resnick, R., D. Halliday , K. S. Krane (2000b). *Física Vol. 2*. Vol. 2. México: Compañía Editorial Continental.

Riley, K. F., M. P. Hobson , S. J. Bence (2006). *Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide*: Cambridge University Press.

Rocconi, E. (2006). *Theatres and Theatre Design in the Graeco-Roman World: Theoretical and Empirical Approaches?*, in *Archaeoacoustics*, C. Scarre , G. Lawson, Editors. McDonald Institute for Archaeological Research: Cambridge, UK. p. 71-76.

Ruz, M. H. (1995). *Caracoles, dioses, santos y tambores. Expresiones musicales de los pueblos mayas*. Dimensión Antropológica (INAH). **4**: p. 37-86.

Scarre, C. (2006). *Sound,Place and Space: Towards an Archaeology of Acoustics*, in *Archaeoacoustics*, C. Scarre , G. Lawson, Editors. McDonald Institute for Archaeological Research: Cambridge, UK. p. 1-10.

Scarre, C. , G. Lawson, eds. (2006). *Archaeoacoustics*. McDonald Institute Monographs. McDonald Institute for Archaeological Research: Cambridge, UK. 118.

Smith, J. O. I. (2007). *Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT): with Audio Applications*. 2 ed: W3K Publishing. 322.

Smith, J. O. I. (2009). *Spectral Audio Signal Processing, October 2008 Draft*. Center for Computer Research in Music and Acoustics , Stanford University.

Spivak, M. (1998). *Calculus:Cálculo Infinitesimal*. 2 ed. México, Mexico: Reverté.

Steiglitz, K. (1996). *A digital signal processing primer, with applications to digital audio and computer music*. 1 ed: Addison Wesley. 314.

Stein, J. Y. (2000). *Digital Signal Processing: A Computer Science Perspective*. 1 ed. Nueva York, EUA: John Wiley & Sons. 880.

Tsingos, N., S. Lefebvre, C. Dachsbacher , M. Dellepiane (2007). *Extending geometrical acoustics to highly detailed architectural environments*, en *19th Internarional Congress On Acoustics A*. Calvo-Manzano , S. S. Antonio Pérez-López, Editors. Sociedad Española de Acústica: Madrid.

Uretsky, J. L. (1965). *The scattering of plane waves from periodic surfaces*. Annals of Physics. **33**(3): p. 400-427.

van den Berg, P. M. , J. T. Fokkema (1979). *The Rayleigh hypothesis in the theory of reflection by a grating*. J. Opt. Soc. Am. **69**(1): p. 27-31.

Vaseghi, S. V. (2000). *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction* 2ed. Nueva York, EUA: John Wiley & Sons. 480.

Velázquez, R. (2002a). *Silbatos de Yaxchilán (Ranas de Barro)*. Disponible en: <http://www.geocities.com/rvelaz.geo/frogs/3ranas.html> (Consulta: Abril 2009)

Velázquez, R. (2002b). *Yaxchilan's whistles*. The Journal of the Acoustical Society of America. **112**(5): p. 2367.

Waterman, P. C. (1975). *Scattering by periodic surfaces*. The Journal of the Acoustical Society of America. **57**(4): p. 791-802.

Weiss, P. (1999). *Singing Stairs*. Science News. **155**(3): p. 44.

Whitman, G. , F. Schwering (1977). *Scattering by periodic metal surfaces with sinusoidal height profiles--A theoretical approach*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation. **25**(6): p. 869- 876.

Wirgin, A. (1980). *Reflection from a corrugated surface*. The Journal of the Acoustical Society of America. **68**(2): p. 692-699.

Wolken, J. G. (1973). *Theoretical studies of atom-solid elastic scattering: He + LiF*. The Journal of Chemical Physics. **58**(7): p. 3047-3064.

Zalaquett Rock, F. A. (2006). *Estudio de las representaciones escenicas en los mayas del periodo clasico: el grupo Norte de Palenque y su significado social*, en Facultad de Filosofia y Letras. Universidad Nacional Autónoma de Mexico: México. p. 280.

ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

10.1 FIGURAS

FIGURA 1.1 EJEMPLOS DE VÍRGULAS O VOLUTAS DE LAS CULTURAS MESOAMERICANAS.....	6
FIGURA 1.2 REPRESENTACIÓN DEL JUEGO DE PELOTA.	6
FIGURA 1.3 EL CASTILLO DE CHICHEN ITZÁ ACTUALMENTE.....	7
FIGURA 1.4 DOS DIBUJOS DE EL CASTILLO POR FREDERICK CATHERWOOD (1841)	8
FIGURA 1.5 ESPECTROGRAMA DE LA “COLA DE QUETZAL”	9
FIGURA 2.1 FRENTE DE ONDAS DE UNA ONDA PLANA Y UNA ESFÉRICA.....	19
FIGURA 2.2 ARREGLO DE N FUENTES PUNTUALES	27
FIGURA 2.3 FACTOR DIRECCIONAL DE AMPLITUD DE UN ARREGLO LINEAL DE FUENTES PUNTUALES ($N = 5, ka = 8$).	29
FIGURA 2.4 DIFRACCIÓN DE BRAGG.....	30
FIGURA 2.5 DIFRACCIÓN POR UNA RED DE REFLEXIÓN	31
FIGURA 2.6 REPRESENTACIÓN DE LOS VECTORES DE ONDA km	35
FIGURA 2.7 COEFICIENTE $hmaxD$ EN FUNCIÓN DEL NÚMERO DE COMPONENTES K DE LA SERIE DE FOURIER PARA UN PERFIL TRIANGULAR (VAN DEN BERG & FOKKEMA 1979).....	38
FIGURA 2.8 PAQUETE DE ONDAS GAUSSIANO Y SU TRANSFORMADA DE FOURIER	41
FIGURA 2.9 DIGITALIZACIÓN Y REPRODUCCIÓN DE AUDIO DIGITAL	43
FIGURA 2.10 CONVERTOR ANALÓGICO/DIGITAL.....	44
FIGURA 2.11 ESPECTROGRAMA.....	49
FIGURA 3.1 COMPARACIÓN DE ESPECTROGRAMAS DEL ECO BARRIDO DE “EL CASTILLO” Y EL CANTO DE UN ESPÉCIMEN DE QUETZAL.	52
FIGURA 3.2 REPRESENTACIÓN DE LA ESCALINATA DE LA PIRÁMIDE CON UNA FUENTE SONORA DE FRENTE. (DECLERCQ <i>ET AL.</i> 2004A)	55
FIGURA 3.3 DESCRIPCIÓN DEL ECO BARRIDO EN FUNCIÓN DEL TIEMPO Y EL ORDEN DE DIFRACCIÓN M DEBIDO A LA “DIFRACCIÓN DE BRAGG”. (DECLERCQ <i>ET AL.</i> 2004A)	58
FIGURA 3.4 ESPECTROGRAMAS DE GRABACIONES DE CAMPO Y SIMULACIONES POR COMPUTADORA DEL ECO BARRIDO (DECLERCQ <i>ET AL.</i> 2004A).	59
FIGURA 3.5 DOS CASOS DE REPETICIÓN DE SEÑALES CON UN TIEMPO DE RETARDO T.	62
FIGURA 3.6 CHRISTIAN HUYGENS EN EL CASTILLO DE CHANTILLY (BILSEN 2006A).....	63
FIGURA 3.7 ESQUEMA DE LA ESCALINATA DE “EL CASTILLO” CON UNA FUENTE SONORA DE FRENTE (BILSEN 2006B).....	64
FIGURA 3.8 COMPARACIÓN DE UN ESPECTROGRAMA DEL ECO BARRIDO CON LAS PREDICCIONES DE HECHAS POR BILSEN (BILSEN 2006B).....	66
FIGURA 4.1 ESQUEMA DE UNA ESCALINATA Y UNA FUENTE SONORA DE FRENTE.....	70
FIGURA 4.2 ESQUEMA DE UNA ESCALINATA VISTA DE MANERA HORIZONTAL Y UNA FUENTE SONORA.	73

FIGURA 4.3 FUNCIÓN PERIÓDICA TRIANGULAR.....	74
FIGURA 4.4 COMPARACIÓN DE LAS ECUACIONES PARA EL BARRIDO DE FRECUENCIAS <i>fmt</i>	85
FIGURA 4.5 DIFERENCIA DE CAMINO PARA ESCALONES ADYACENTES.....	86
FIGURA 4.6 ARREGLO LINEAL DE N FUENTES	95
FIGURA 4.7 COMPARACIÓN DEL FACTOR DIRECCIONAL DE UN ARREGLO LINEAL DE 9 FUENTES PUNTUALES ARMÓNICAS CON LA LEY DE BRAGG.....	100
FIGURA 5.1 SEÑAL Y ESPECTRO DE UN PULSO GAUSSIANO	104
FIGURA 5.2 ARREGLO EXPERIMENTAL DE MICRÓFONOS Y UNA FUENTE SONORA	107
FIGURA 5.3 PROGRESIÓN DE PULSOS EN FUNCIÓN DEL ANCHO DE BANDA FRACCIONAL.....	108
FIGURA 5.4 SEÑAL DE LAS GRABACIONES DE LOS MICRÓFONOS Y DEL PULSO REPRODUCIDO.....	113
FIGURA 5.5 EJEMPLO DE UN AJUSTE DE RECTA POR MÍNIMOS CUADRADOS.....	114
FIGURA 5.6 COMPARACIÓN DE LAS CURVAS DERIVADAS DEL MODELO DE BILSEN CON EL ESPECTROGRAMA DE UN ECO BARRIDO GRABADO	124
FIGURA 5.7 ESQUEMA DE GENERAL DE LA RELACIÓN ENTRE EL PULSO (ESTÍMULO) Y EL ECO (RESPUESTA ACÚSTICA) GENERADO POR UNA ESCALINATA.	128
FIGURA 5.8 COMPARACIÓN DE UNA SIMULACIÓN CONSIDERANDO LA INFLUENCIA DEL PISO, CON LA GRABACIÓN DEL ECO BARRIDO.	131

10.2 TABLAS

TABLA 3.1 DIMENSIONES DE LA ESCALINATA DE “EL CASTILLO”, POSICIÓN DE LA FUENTE SONORA Y PROPIEDADES DE LOS MATERIALES CONSIDERADAS EN (DECLERCQ <i>ET AL.</i> 2004A)	55
TABLA 4.1 NOTACIÓN PARA LAS DIMENSIONES CARACTERÍSTICAS DE LA ESCALINATA.....	70
TABLA 4.2 DIMENSIONES Y MEDIDAS CONSIDERADAS	75
TABLA 4.3 TIEMPOS Y FRECUENCIAS INICIALES Y FINALES DE LAS ECUACIONES PARA EL BARRIDO DE FRECUENCIAS.....	84
TABLA 5.1 MEDIDAS CARACTERÍSTICAS DEL ARREGLO	107

