

Universidad Nacional Autónoma de México

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

*UNA INTRODUCCIÓN A LAS ÁLGEBRAS DE
CONGLOMERADO DE TIPO A_n*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

MAT. ADRIANA DÁVILA SANTOS

DIRECTORES DE TESIS

DR. MICHAEL BAROT SCHLATTER

MÉXICO, D.F.

JUNIO 2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Esperando no olvidar a nadie de las muchas personas que deseo agradecer en ésta tesis.

Agradezco en especial a mi asesor; el Dr. Michael Barot Schlatter por la paciencia y el tiempo que dedicó a explicarme muchas cosas, no sólo de la tesis sino por toda la ayuda al acercarme a él.

Agradezco a mi familia; mi mamá, mi papá, mis hermanos: Marissa, Andrés y Gerardo, así como a mi sobrino Christopher, y a mis abuelitos, que son mi motor todos y cada uno de los días lejos de ellos. Gracias a tí también Josúe casi de mi familia y sobre todo gracias por todo el apoyo que me brindaste desde el primer día de mi llegada a la Ciudad de México.

Gracias a mis amigos; Itzel, Mimi, Mireille, Luis, Ilán y a todos y cada uno de mis compañeros en mi estancia en el cubículo externo del Instituto, por cada uno de los momentos que vivimos durante el tiempo de realización de mi trabajo para está tesis. En especial a Raúl por la ayuda que me brindo al llenarnos de dudas eternas e intentar resolverlas, muchas veces incluso por las noches al teléfono.

Gracias a mis sinodales los Doctores Diana Avella Alaminos, Christof Geiss Hahn, Octavio Mendoza Hernández y Francisco Marmolejo Rivas por los consejos para la mejora de este trabajo.

Gracias a mis compañeros de trabajo por el apoyo en la oficina para culminar ésta etapa de mi vida, sobre todo a Christian por cargarte de más trabajo, que hiciste y que me correspondía.

Índice general

1. El Grassmanniano	9
1.1. Coordenadas de Plücker	9
1.2. Relaciones de Plücker	11
2. Álgebras de Conglomerado	13
2.1. Positividad Total	13
2.2. La gráfica de Intercambio	15
2.3. Mutaciones de matrices	18
2.4. Coeficientes	23
2.5. Variables de conglomerados	28
2.6. El complejo de Conglomerado	31
3. Sistemas de raíces	33
3.1. Grupos de reflexión finitos	33
3.2. Raíces	35
3.3. Grupo de Weyl	37
3.4. Clasificación	38
3.5. Rango 2	42
4. Conglomerados	47
4.1. Coeficientes y variables de una triangulación	47
4.1.1. T -Trayectorias	48
4.2. El Carcaj de una triangulación	54
4.3. Una equivalencia de Categorías	57
4.4. Carcajes equivalentes al lineal	66
I Apéndice	71
4.5. Ideales Primos Especiales	73

Introducción

Durante el primer semestre del año 2006, los doctores Michael Barot Schlatter y Christof Geiss Hahn impartieron un curso titulado Álgebras de Conglomerado, el cual fue inspiración para la realización de esta Introducción a las Álgebras de Conglomerado de tipo \mathbb{A}_n .

En esta tesis se podrán encontrar, como bien su nombre dice, una breve introducción a las álgebras de conglomerado, las cuales se desarrollaron en el año de 2000 por Fomin y Zelevinsky como herramienta para estudiar bases canónicas y positividad total en grupos de Lie semisimples. Las álgebras de conglomerado son definidas como álgebras conmutativas con un conjunto de generadores distinguidos llamados *variables de conglomerado*, agrupados en subconjuntos llamados *conglomerados* de cardinalidad fija. Los generadores se relacionan con los demás elementos mediante un proceso llamado mutación.

En el primer capítulo se podrá encontrar un ejemplo muy particular de este tipo de álgebras de conglomerado: el anillo de coordenadas del Grassmanniano. En el segundo capítulo, aparece la positividad total y su relación con el Grassmanniano, para dar después pie a la definición de álgebras de conglomerado junto con el proceso de mutación.

En el tercer capítulo, se establece una introducción a los sistemas de raíces, para generar el diagrama de Coxeter de donde consideramos un caso particular; en sistemas de raíces irreducibles los diagramas de Coxeter se llaman *diagramas de Dynkin*, y se hace una clasificación de dichos diagramas. Para el cuarto capítulo, se presenta una serie de resultados acerca de cómo obtener las variables de conglomerado para el tipo Dynkin \mathbb{A}_n , a partir de las cuerdas de la triángulación, de donde se obtiene un resultado particular: el fenómeno de Laurent en el caso Dynkin \mathbb{A}_n . Además se presenta una equivalencia de categorías, entre la categoría de módulos sobre un carcaj y una categoría llamada *Categoría de diagonales* que se define en el mismo capítulo, para finalizar se establece una clasificación de los carcajes que son equivalentes bajo mutación al diagrama de Dynkin \mathbb{A}_n . Cabe mencionar que para facilitar la lectura en el cuarto capítulo, se necesita saber algunos resultados de teoría de Auslander Reiten, que se pueden consultar en [ARS].

Capítulo 1

El Grassmanniano

Definición 1.0.1. Denotamos por $\text{Gr}(2, n)$ al conjunto de subespacios de dimensión 2 en \mathbb{C}^n y lo llamamos el *Grassmanniano*.

Podemos representar cada elemento de $\text{Gr}(2, n)$ por dos vectores u, w linealmente independientes o equivalentemente por una matriz $M \in \mathbb{C}^{n \times 2}$, donde u es la primera columna de M y w es la segunda columna de M , es decir, $M_{*1} = u, M_{*2} = w$. Observemos que esta representación no es única.

Notemos que $M, W \in \mathbb{C}^{n \times 2}$ representan el mismo subespacio si y sólo si W se puede obtener de M por transformaciones elementales de columnas. Pero, ¿existen otras transformaciones que no cambian el subespacio?. Para respondernos a esta pregunta, definiremos la siguiente herramienta.

1.1. Coordenadas de Plücker

Definición 1.1.1. Para $M \in \mathbb{C}^{n \times 2}$, e $i \neq j$ la *coordenada de Plücker* se define como el determinante de una submatriz $\delta_{ij}(M) = M_{i1}M_{j2} - M_{j1}M_{i2}$.

Las coordenadas de Plücker no son realmente invariantes. Observemos el efecto de diferentes transformaciones:

- (1) Al multiplicar por un escalar λ a M se tiene que $\delta_{ij}(M') = \lambda^2 \delta_{ij}(M)$, donde $M' = \lambda M$.
- (2) Sea M' la matriz que resulta de intercambiar dos columnas de M , se tiene que $\delta_{ij}(M') = -\delta_{ij}(M)$.
- (3) Sea M' la matriz que obtenemos al multiplicar una columna de M por un escalar y sumarla a otra columna, para lo cual se tiene que $\delta_{ij}(M') = \delta_{ij}(M)$.

Todas las coordenadas cambian simultáneamente con el mismo factor en (1) y (2).

Se define

$$\mu_{2,n} = \{M \in \mathbb{C}^{n \times 2} \mid \delta_{ij}(M) \neq 0, \text{ para alguna } i < j\}.$$

Si sólo consideramos coordenadas de Plücker δ_{ij} para $i < j$, entonces hay $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ coordenadas. Estas se pueden ordenar, por ejemplo léxicográficamente. De esta manera, a cada matriz $M \in \mu_{2,n}$ se le asocia un

vector

$$(\delta_{12}(M), \delta_{13}(M), \dots, \delta_{1n}(M), \delta_{23}(M), \dots, \delta_{2n}(M), \delta_{34}(M), \dots, \delta_{n-1,n}(M)) \in \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Podemos definir $\Delta : \text{Gr}(2, n) \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ de la siguiente forma, $M \mapsto [\delta_{ij}(M)]_{i < j}$ donde $\delta_{ij}(M)$ corresponde al complejo asociado junto con su antipodal. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mu_{2,n} & \xrightarrow{(\delta_{ij})_{i < j}} & \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}} - \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Gr}(2, n) & \xrightarrow{\Delta = [(\delta_{ij})]_{i < j}} & \mathbb{P}\mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{array}$$

Del diagrama anterior, se tiene el siguiente resultado

Proposición 1.1.2. Δ es inyectiva.

Demostración. Sean $M, M' \in \mu_{2,n}$ tales que $\delta_{ij}(M') = \lambda \delta_{ij}(M)$ para todo $i < j$. Como $M \in \mu_{2,n}$ existe $i < j$ tal que $\delta_{ij}(M) \neq 0$. Supongamos que $i = 1, j = 2$. Entonces mediante transformaciones elementales de

columnas existen $N \sim M$ y $N' \sim M'$ con $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$, $N' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$. De donde se tiene

$$\delta_{ij}(N) = \frac{\delta_{ij}(M)}{\delta_{12}(M)} \text{ y } \delta_{ij}(N') = \frac{\delta_{ij}(M')}{\delta_{12}(M')}. \text{ Para } r > 2, \text{ se tiene } N'_{r2} = \delta_{1r}(N') = \frac{\delta_{1r}(M')}{\delta_{12}(M')} = \frac{\lambda \delta_{1r}(M)}{\lambda \delta_{12}(M)} = \delta_{1r}(N) = N_{r2}.$$

Similarmente se muestra que $N'_{r1} = N_{r1}$, entonces $N = N'$ y por tanto $M \sim M'$. ■

Observación 1.1.3. Ya demostramos que Δ es inyectiva, enseguida observaremos que pasa con la sobre-actividad de Δ .

Caso $n = 2$. $\text{Gr}(2, 2) = \{\mathbb{C}\}$, $\mathbb{P}(\mathbb{C}) = \{\mathbb{C}\}$, por tanto Δ es sobreyectivo.

Caso $n = 3$. Sea $\lambda = (\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}) \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$, supongamos que $\lambda_{12} \neq 0$, entonces la siguiente matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{12} \\ \frac{-\lambda_{23}}{\lambda_{12}} & \lambda_{13} \end{bmatrix} \text{ es tal que } \Delta(M) = \lambda, \text{ por tanto } \Delta \text{ es sobre, y entonces } \Delta \text{ es sobreyectivo.}$$

Caso $n = 4$. Sea $\lambda = (\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{23}, \lambda_{24}, \lambda_{34}) \in \mathbb{C}^6$. Supongamos que $\lambda_{12} \neq 0$. Si $M \in \text{Gr}(2, 2)$ no singular, entonces $M \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Así cada M con $\delta_{12}(M) \neq 0$ es equivalente a una de esta forma

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{12} \\ \frac{-\lambda_{23}}{\lambda_{12}} & \lambda_{13} \\ \frac{-\lambda_{24}}{\lambda_{12}} & \lambda_{14} \end{bmatrix} \text{ entonces}$$

$$\delta_{34}(M) = \frac{-\lambda_{23}}{\lambda_{12}} \lambda_{14} + \frac{\lambda_{24}}{\lambda_{12}} \lambda_{13} = \frac{\lambda_{13} \lambda_{24} - \lambda_{23} \lambda_{14}}{\lambda_{12}}$$

el último término en la última igualdad de lado derecho en general es diferente de λ_{34} , de donde, para que $\lambda \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^6)$ pueda estar en la imagen de Δ , es necesario que los elementos de λ cumplan lo siguiente; $\lambda_{13} \lambda_{24} - \lambda_{23} \lambda_{14} = \lambda_{12} \lambda_{34}$. Por tanto, Δ no es sobreyectiva.

1.2. Relaciones de Plücker

Mostramos que Δ es inyectiva, y no sobreyectiva. Enseguida caracterizaremos el subespacio correspondiente a la imagen de Δ en $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}})$, en donde Δ será biyectiva.

Definición 1.2.1. Sea $\lambda \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}})$, diremos que λ cumple con las *relaciones de Plücker* si para todo i, j, r, s índices tales que $i < j < r < s$, los elementos $\lambda_{ij}, \lambda_{ir}, \lambda_{js}, \lambda_{is}, \lambda_{rj}, \lambda_{rs}$ cumplen la siguiente relación: $\lambda_{ir}\lambda_{js} + \lambda_{is}\lambda_{rj} = \lambda_{ij}\lambda_{rs}$. Además, $\lambda_{ji} = -\lambda_{ij}$, si $j > i$.

Proposición 1.2.2. *Sea*

$$\xi = \{ \lambda \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}) \mid \text{para todo } i < j, r < s \{i, j\} \cap \{r, s\} = \emptyset \text{ con } \lambda_{ir}\lambda_{js} + \lambda_{is}\lambda_{rj} = \lambda_{ij}\lambda_{rs} \}$$

un subespacio del $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}})$. Entonces Δ induce una biyección entre $\text{Gr}(2, n)$ y ξ .

Demostración. Se verifica que si $\lambda = \Delta(M)$ para algún $M \in \text{Gr}(2, n)$, entonces satisface las relaciones de Plücker. Sean $M_{*1} = v$, $M_{*2} = w$, denotaremos por δ_{xy} a $\delta_{xy}(M)$, así

$$\delta_{ij}\delta_{rs} - \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{rj} = (v_iw_j - v_jw_i)(v_rw_s - v_sw_r) - (v_iw_r - v_rw_i)(v_jw_s - v_sw_j) - (v_iw_s - v_sw_i)(v_rw_j - v_jw_r) = 0.$$

Por otro lado si $\lambda \in \xi$, existe $i < j$ tal que $\lambda_{ij} \neq 0$. Definimos $M \in \mathbb{C}^{n \times 2}$ por $M_{i1} = 1$, $M_{i2} = 0 = M_{j1}$, $M_{j2} = \lambda_{ij}$. Para $r \neq i, j$ definimos $M_{r2} = \lambda_{ir}$, $M_{r1} = \frac{-\lambda_{jr}}{\lambda_{ij}}$ entonces $\delta_{ij}(M) = \lambda_{ij}$, $\delta_{ir}(M) = \lambda_{ir}$, $\delta_{jr} = \lambda_{jr}$.

En caso que r, s sean distintos a i, j se tiene que

$$\delta_{rs}(M) = M_{r1}M_{s2} - M_{r2}M_{s1} = \left(\frac{-\lambda_{jr}}{\lambda_{ij}} \right) \lambda_{is} - \lambda_{ir} \left(\frac{-\lambda_{js}}{\lambda_{ij}} \right) = \frac{1}{\lambda_{ij}} (\lambda_{ir}\lambda_{js} - \lambda_{is}\lambda_{jr}) = \lambda_{rs}.$$

Con ello se demostró que $\Delta(M) = \lambda$. ■

Observación 1.2.3. Sobre la forma de definir ξ (no importa mucho el orden de los pares de índices) para $i < j < r < s$ se cumple $\lambda_{ir}\lambda_{js} = \lambda_{ij}\lambda_{rs} + \lambda_{is}\lambda_{rj}$ lo cual tiene una representación gráfica, que se muestra enseguida, en dicha representación cada λ_{ij} recibe el nombre de *cuerda*.

Representación gráfica de las Coordenadas de Plücker. Cuerdas, diagonales y contorno.

En la representación gráfica de las coordenadas de Plücker, las cuerdas del lado izquierdo de la igualdad se llaman *diagonales*, mientras que a las del lado derecho se llaman *contorno*.

Ahora calcularemos cuántas coordenadas como mínimo me determinan todas las coordenadas, para lo cual basta con calcular la dimensión de $\text{Gr}(2, n)$ que es $2(n - 2)$, pues cada matriz $M \in \text{Gr}(2, n)$ diferente de la matriz cero es equivalente a la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Pero como ξ está definido en el proyectivo necesitamos una dimensión más, por lo tanto necesitamos calcular $2n - 3$ coordenadas para determinar a todas las coordenadas.

Capítulo 2

El anillo de coordenadas del Grassmanniano como álgebra de conglomero

En este capítulo, veremos que el grassmanniano tiene muchas propiedades, algunas de las cuales le dan estructura de álgebra a su anillo de coordenadas, el cual es llamada *álgebra de conglomero*.

2.1. Positividad Total

Recordemos que $\text{Gr}(2, n)$ denota al conjunto de subespacios de dimensión 2 en \mathbb{C}^n .

Definición 2.1.1. Una matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ es *totalmente positiva* si todos los menores son positivos. En nuestra situación, todas las coordenadas de Plücker son positivas.

Ahora observemos cuántas coordenadas $\delta_{ij}(M)$ con $i < j$ se deben verificar mínimamente para determinar que M es totalmente positiva.

Definición 2.1.2. Sea $R = \{\delta_{ij}\}_{i < j}$ un conjunto de coordenadas de Plücker con la propiedad de que son el mínimo de coordenadas necesarias para determinar que M es totalmente positiva. En tal caso diremos que R es una *prueba de positividad total*.

Observación 2.1.3. (i) Necesitamos al menos $2n - 3$ coordenadas para verificar la positividad total de M .

(ii) Para $i < j < r < s$; si el contorno y una diagonal son positivos, entonces la otra diagonal también es positiva.

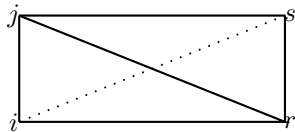
Definición 2.1.4. (i) Dos cuerdas $i \text{ --- } j$ y $r \text{ --- } s$ se *intersectan* si $i < r < j < s$ ó $r < i < s < j$.

(ii) Una *triangulación* es un conjunto maximal de cuerdas que no se intersectan. Observemos que una triangulación se puede ver como un polígono de n lados con un conjunto maximal de cuerdas en el

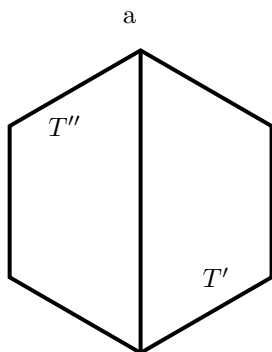
interior del polígono tales que no se intersectan, así las cuerdas interiores y el contorno del polígono pertenecen a la triangulación.

Proposición 2.1.5. *Cada triangulación define una prueba de positividad total y además es algebraicamente independiente con respecto a las coordenadas de Plücker.*

Demostración. Sean T una triangulación y $\lambda \in \xi$ tal que $\lambda_{ij} > 0$ para toda cuerda $i - j \in T$. Por inducción sobre el número de vértices k de un subpolígono S en T , probaremos que las cuerdas de S son positivas. Para $k = 4$ se tiene que $i < j < r < s$ si el contorno y una diagonal son positivos entonces la otra diagonal también, como se muestra en la siguiente figura



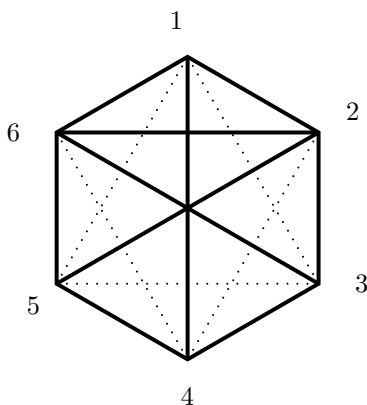
que en tal caso se tiene $\lambda_{jr} = \frac{\lambda_{ij}\lambda_{rs} + \lambda_{ir}\lambda_{js}}{\lambda_{is}} > 0$, de donde $\lambda_{is} = \frac{\lambda_{ij}\lambda_{rs} + \lambda_{ir}\lambda_{js}}{\lambda_{jr}} > 0$. Supongamos $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ es un subpolígono de T . Sea $i_a - i_b$ una diagonal en T que divide a S en dos subpolígonos S', S'' con triangulaciones T', T'' , como se puede ver en la siguiente figura. Por hipótesis de inducción las cuerdas de S' y S'' son positivas, y por las relaciones de Plücker las cuerdas que se cruzan también son positivas. Además, las triangulaciones tienen $2n - 3$ cuerdas.



Por otro lado, cada triángulo en la triangulación determina coordenadas algebraicamente independientes. ■

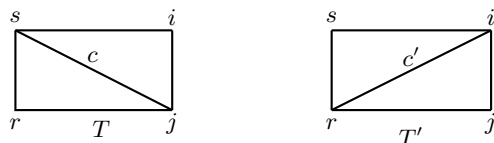
Conjetura 2.1.6. *Se conjetura que si T es una prueba de positividad con $2n - 3$ elementos, entonces de T se puede obtener una triangulación. Sin embargo se tiene que no toda prueba contiene una triangulación, pues en la siguiente prueba de positividad total que se muestra en la siguiente figura y que no tiene el número mínimo de funciones, sino que tiene una más, y a los elementos de la prueba se indican con líneas continuas, se completan diagonales con las relaciones de Plücker, las cuales se indican con líneas punteadas y se obtienen de la siguiente manera: al ver el cuadrilátero 1236 se concluye que $\delta_{13}(M) > 0$, por lo cual se pone la línea punteada que tiene como vértices 1 y 3. Al ver el cuadrilátero 1234 se concluye que $\delta_{24}(M) > 0$,*

por lo cual se pone la línea punteada que tiene como vértices 2 y 4, de manera similar se ve también que $\delta_{35}(M) > 0, \delta_{46}(M) > 0, \delta_{15}(M) > 0$, teniendo así todas las diagonales, pero no puede reducirse a una triangulación sin quitar cuerdas o que al reemplazarlas por las correspondientes cuerdas bajo las relaciones de Plücker obtengamos una triangulación.



2.2. La gráfica de Intercambio

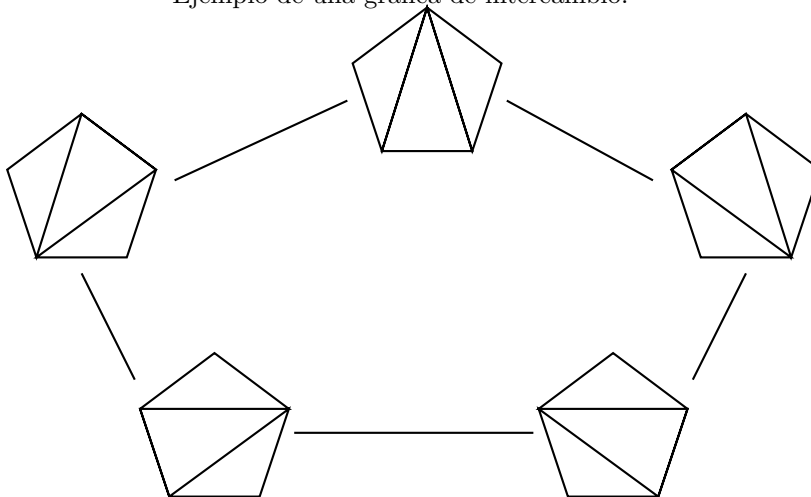
Definición 2.2.1. Sean T y T' triangulaciones tales que $T' = T - \{c\} \cup \{c'\}$. Donde c es la diagonal del cuadrado $ijrs$ en la triangulación T , y c' es la otra diagonal en el cuadrado $ijrs$, que no aparece en la triangulación y que al reemplazarla por c , se tiene la triangulación T' . Es decir, c y c' son como en la siguiente figura:



Decimos que T' se obtiene de T por un *volteo* y lo denotamos por $T \sim T'$.

Definición 2.2.2. La *gráfica de intercambio* tiene a las triangulaciones como vértices y a los volteos como aristas.

Ejemplo de una gráfica de intercambio:



Lema 2.2.3. *La gráfica de intercambio es conexa.*

Demostración. Para $i = 1, \dots, n$ definimos T_i como la triangulación donde todas las cuerdas interiores inciden en i . Observemos que $T_i \sim T_{i+1} \pmod{n}$ pues podemos voltear a la arista que tiene como vértices i e $i + 2$ de lo cual se obtiene la arista que tiene como vértices $i + 1$ e $i + 3$. De la misma manera se voltear la arista que tiene como vértices i e $i + 3$ y se obtiene otra arista que tiene como vértices $i + 1$ e $i + 4$. Al continuar con éste procedimiento, y al voltear la arista que tiene como vértices i y $i - 2$ se obtiene la nueva arista que tiene como vértices $i + 1$ y $i - 1$, teniendo así la triangulación T_{i+1} .

Probaremos por inducción sobre n , que cada triangulación T es equivalente a T_i para algún i . Sea δ_{ij} una cuerda interior en T que divide a P_n en dos subpolígonos S, S' contenidos en P_n , con triangulaciones T', T'' , donde P_n es el polígono de n lados. Por hipótesis de inducción, sea h alguna arista tal que $T' \sim T'_h \sim T'_i$ y $T'' \sim T''_h \sim T''_i$, pero T'_i y T''_i definen a T_i . Por lo tanto T es equivalente a T_i . ■

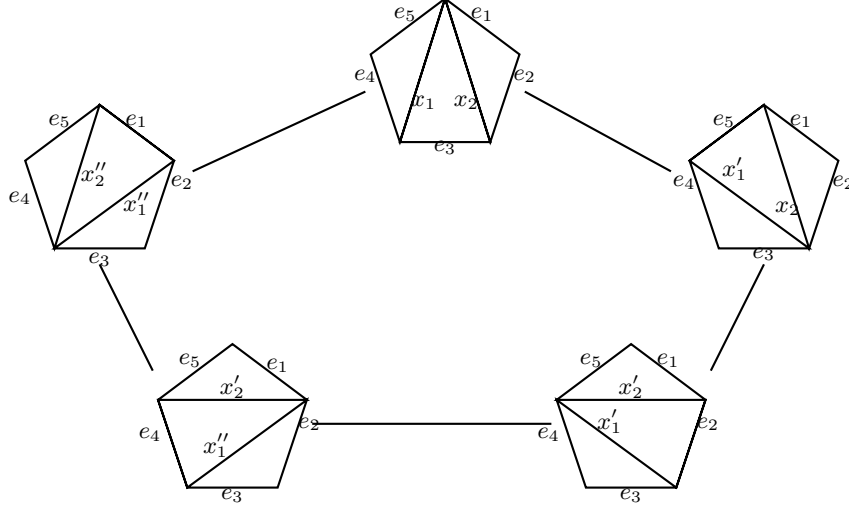
Se tiene que mediante las relaciones de Plücker, las cuerdas interiores se pueden expresar como el siguiente cociente:

$$\frac{\text{polinomio con coeficientes expresados en } e_i \text{ y variables } x_1, x_2}{\text{monomio en } x_1, x_2}$$

A este fenómeno se le conoce como *Fenómeno de Laurent*.

Ejemplo 2.2.1. Sea T una triangulación con cuerdas interiores x_1, x_2 y cuerdas exteriores e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 . Calculemos las cuerdas interiores y verifiquemos que se cumple el fenómeno de Laurent.

Cálculos de mutaciones en cuerdas interiores:



Al calcular las cuerdas interiores con las relaciones de Plücker se tiene que

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{e_3 e_5 + e_4 x_2}{x_1}, \\ x_2' &= \frac{e_1 e_3 e_5 + e_2 e_5 x_1 + e_1 e_2 x_2}{x_1 x_2}, \\ x_1'' &= \frac{e_2 x_1 + e_1 e_3}{x_2}, \\ x_2'' &= x_1. \end{aligned}$$

Aquí podemos tomar $R = \mathbb{C}[e_1, \dots, e_n]$ como el anillo que contiene los coeficientes. Luego, las cuerdas interiores están en $R[x_1, \dots, x_d]$ donde $d = n - 3$. Denotamos por X el conjunto de coordenadas de Plücker, expresados en $F = R(x_1, \dots, x_d)$ (el campo de fracciones), que corresponden a las cuerdas interiores.

Definición 2.2.4. Sea \mathcal{A} la R -subálgebra en F generada por X , es decir los generadores de \mathcal{A} son las cuerdas interiores expresadas en coordenadas de Plücker. A tal subálgebra \mathcal{A} se le llama *álgebra de conglomerado* asociada a $\text{Gr}(2, n)$.

Definición 2.2.5. Se define el *anillo de coordenadas homogéneo de $\text{Gr}(2, n)$* como el anillo de polinomios con coeficientes en \mathbb{C} y variables las coordenadas de Plücker δ_{ij} con $i < j$, módulo el ideal generado por las relaciones de Plücker. A tal anillo se denotará como $\mathbb{C}[\xi]$.

Proposición 2.2.6. *El álgebra de conglomerado \mathcal{A} es isomorfa al anillo de coordenadas homogéneo de $\text{Gr}(2, n)$.*

Demostración. La igualdad $\mathbb{C}[\xi] = \frac{\mathbb{C}[\delta_{ij} | i < j]}{\langle \text{relaciones de Plücker} \rangle}$ se tiene por definición. Como $e_1, \dots, e_n, x_1, \dots, x_d$ son algebraicamente independientes en $\mathbb{C}[\xi]$ tenemos un homomorfismo inyectivo $f : \mathbb{C}[e_1, \dots, e_n, x_1, \dots, x_d] \rightarrow \mathbb{C}[\xi]$. El dominio y contradominio son dominios enteros ya que el conjunto generado por las coordenadas de Plücker es un ideal primo (ver apéndice). Por lo tanto f induce un homomorfismo entre los campos de

fracciones $F : \mathbb{C}(e_1, \dots, e_n, x_1, \dots, x_d) \longrightarrow \mathbb{C}(\xi)$. Observemos que $\mathbb{C}(e_1, \dots, e_n, x_1, \dots, x_d) = R(x_1, \dots, x_d)$. Además sabemos que para cada $g \in X$ se tiene que $F(g) = \delta_{ij}$ para algún $i < j$. Como $f(R) \subset R$ se tiene que $F(\xi \cup R) \subset \mathbb{C}[\xi]$, así se deduce que $F(\mathcal{A}) \subset \mathbb{C}[\xi]$, y como $\delta_{ij} \in \text{Im} F$ para todo $i < j$, tenemos $F(\mathcal{A}) = \mathbb{C}[\xi]$. ■

2.3. Mutaciones de matrices

Definición 2.3.1. Sea $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ y $k \in \{1, \dots, n\}$. Definimos $\mu_k(B) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, la *mutación* de B en *dirección* de k por:

$$\mu_k(B)_{ij} = \begin{cases} -B_{ij} & \text{si } i = k \text{ ó } j = k, \\ B_{ij} + \text{sign}(B_{ik}) \text{máx}(0, B_{ik}B_{kj}) & \text{si } i \neq k \neq j. \end{cases}$$

Donde

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -1 & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Lema 2.3.2. Sean $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ y $k \in \{1, \dots, n\}$. La *mutación dos veces consecutivas en dirección k* a la matriz B es la matriz B , es decir, $\mu_k(\mu_k(B)) = B$.

Demostración. Sean $V = \mu_k(B)$ y $W = \mu_k(V)$. Si $i = k$ ó $j = k$ entonces $W_{ij} = -V_{ij} = B_{ij}$. Si $i \neq k \neq j$, $W_{ij} = V_{ij} + \text{sign}(V_{ik}) \text{máx}(0, V_{ik}V_{kj}) = B_{ij} + \text{sign}(B_{ik}) \text{máx}(0, B_{ik}B_{kj}) - \text{sign}(B_{ik}) \text{máx}(0, B_{ik}B_{kj}) = B_{ij}$. ■

Definición 2.3.3. Sean $B, V \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Decimos que V, B son *equivalentes bajo mutaciones* si B se puede obtener de V por una sucesión de mutaciones (posiblemente en diferentes direcciones). Las matrices equivalentes bajo mutaciones se denotan con $B \sim V$.

Denotaremos con $[B] = \{V \in \mathbb{Z}^{n \times n} \mid B \sim V\}$ a la *clase de mutación* de B , y diremos que B es de *clase de mutación finita* si $[B]$ es finito.

Ejemplo 2.3.1. Consideremos la siguiente matriz antisimétrica, y su mutación en dirección 2:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu_2(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

observemos que $\mu_2(B)$ es antisimétrica.

El siguiente Lema muestra que el ejemplo anterior no es ninguna coincidencia, si no que se cumple para cualquier matriz antisimétrica cuadrada.

Lema 2.3.4. Sea $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Si B es antisimétrica, entonces $\mu_k(B)$ es antisimétrica.

Demostración. Sea $V = \mu_k(B)$. Para $i = k$ ó $j = k$ tenemos que

$$V_{ij} = -B_{ij} = -(-B_{ji}) = -V_{ji}.$$

Si $i \neq k \neq j$, entonces

$$V_{ij} = B_{ij} + \text{sign}(B_{ik}) \text{máx}(0, B_{ik}B_{kj}) = -B_{ji} + \text{sign}(B_{ik}) \text{máx}(0, B_{ik}B_{kj}).$$

Luego, si $\text{sign}(B_{jk}) \neq \text{sign}(B_{ki})$, entonces $\text{sign}(B_{ik}) \text{máx}(0, B_{ik}B_{kj}) = 0$. De donde $V_{ij} = -V_{ji}$. Pero si $\text{sign}(B_{jk}) = \text{sign}(B_{ki})$ entonces tenemos que $\text{sign}(B_{ik}) = -\text{sign}(B_{ki}) = -\text{sign}(B_{jk})$. Por lo tanto

$$-B_{ji} + \text{sign}(B_{ik}) \text{máx}(0, B_{ik}B_{kj}) = -B_{ji} - \text{sign}(B_{jk}) \text{máx}(0, B_{jk}B_{ki}) = -V_{ji}.$$

De donde se deduce que $V_{ij} = -V_{ji}$ para toda $i, j \in \{1, \dots, n\}$. ■

Definición 2.3.5. Sea $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Decimos que B es *antisimetrizable* si existe $D \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ diagonal con $D_{ii} > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que DB es antisimétrica. A D se le llama *antisimetrizador* de B .

Ejemplo 2.3.2. Consideremos la siguiente matriz B_λ , y verifiquemos que para $\lambda = 12$, B_λ es antisimetrizable;

$$B_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \lambda \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

El antisimetrizador de B_λ es $D_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Lema 2.3.6. Sea $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Si B es antisimetrizable, entonces $\mu_k(B)$ es antisimetrizable (con el mismo antisimetrizador).

Demostración. Observemos que $(DB)^T = -DB$, es decir $D_{jj}B_{ji} = -D_{ii}B_{ij}$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Sea $V = \mu_k(B)$. Si $i = k$ ó $j = k$, entonces $D_{jj}V_{ji} = -D_{jj}B_{ji} = -(-D_{ii}B_{ij}) = -D_{ii}V_{ij}$. En caso contrario,

$$\begin{aligned} D_{jj}V_{ji} &= D_{jj}B_{ji} + \text{sign}(B_{jk}) \text{máx}(0, D_{jj}B_{jk}B_{ki}) \\ &= D_{ii}B_{ij} + \text{sign}(B_{jk}) \text{máx}(0, -D_{kk}B_{kj}B_{ki}) \\ &= D_{ii}B_{ij} + \text{sign}(B_{jk}) \text{máx}(0, D_{ii}B_{ik}B_{kj}) \\ &= -D_{ii}B_{ij} + \text{sign}(B_{jk})D_{ii} \text{máx}(0, B_{ik}B_{kj}). \end{aligned}$$

Si $\text{sign}(B_{ik}) \neq \text{sign}(B_{kj})$ entonces $\text{sign}(B_{jk})D_{ii} \text{máx}(0, B_{ik}B_{kj}) = 0$, por lo tanto, $D_{jj}V_{ji} = -D_{ii}V_{ij}$. Por otro lado, si, $\text{sign}(B_{jk}) = -\text{sign}(B_{ik})$ entonces

$$\begin{aligned} -D_{ii}B_{ij} + \text{sign}(B_{jk})D_{ii} \text{máx}(0, B_{ik}B_{kj}) &= -D_{ii}(B_{ij} + \text{sign}(B_{ik}) \text{máx}(0, B_{ik}B_{kj})) \\ &= -D_{ii}V_{ij}. \end{aligned}$$

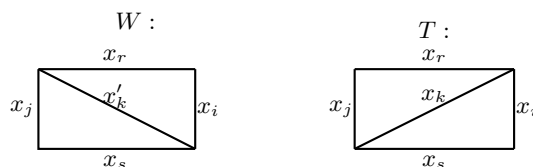
Por lo tanto $D_{jj}V_{ji} = -D_{ii}V_{ij}$. ■

Definición 2.3.7. Dada una triangulación $T = \{e_1, \dots, e_n, x_1, \dots, x_d\}$, definimos la *matriz de intercambio* $B(T) \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ de la siguiente manera: $B(T)_{ij} = a - b$, donde a y b son enteros que cumplen lo siguiente:

- a es el número de triángulos en T tales que x_i y x_j son aristas de dichos triángulos por lo cual inciden en un vértice x , y son tales que la rotación con ángulo mínimo alrededor de x de la arista x_i a la arista x_j va en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y
- b es el número de triángulos en T donde x_j y x_i son aristas de dichos triángulos, con vértice de incidencia y , tales que la rotación con ángulo mínimo alrededor de y de la arista x_j a la arista x_i va en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Proposición 2.3.8. Sean T, T' dos triangulaciones del polígono P_n . Si T' se obtiene de T al voltear x_k (cuerda interna de T), entonces $B(T') = \mu_k(B(T))$.

Demostración. Sean $T' = T \setminus \{x_k\} \cup \{x'_k\}$ y W el cuadrilátero que tiene a x'_k como diagonal, y por la definición de matriz de intercambio fijaremos nuestra atención en el cuadrilátero contenido en la triangulación T que contiene a x_k como diagonal.



posiblemente uno o varios de los lados del cuadrilátero son cuerdas exteriores, en este caso no tenemos índice correspondiente en las matrices de intercambio $B(T), B(W)$. Como $B(T)$ y $B(W)$ son antisimétricas, sólo necesitamos verificar la mitad de las entradas de las matrices. Es claro que $B(T)_{ak} \neq 0$ solo para $a \in \{i, j, r, s\} \cap \{\text{índices de cuerdas internas}\}$ y $B(W)_{ak} = -B(T)_{ak}$. Por otro lado, tenemos que $B(T)_{ri} = 0, B(T)_{rk} = 1, B(T)_{ki} = 1$, de donde $\mu_k(B(T))_{ri} = 1 = B(W)_{ri}$.

Similarmente, tenemos que $\mu_k(B(T))_{sj} = B(W)_{sj}$. Mientras que en las otras esquinas tenemos que

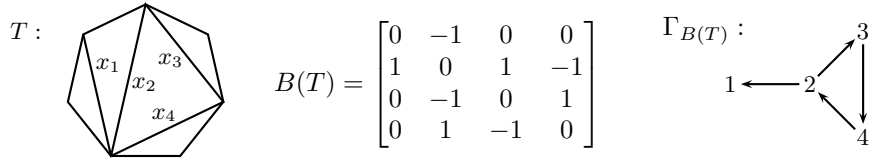
$$B(T)_{is} = 1, B(T)_{ik} = -1, B(T)_{ks} = -1.$$

Luego $\mu_k(B(T))_{is} = 0 = B(W)_{is}$. Similarmente $\mu_k(B(T))_{jr} = B(W)_{jr}$. Para los coeficientes $\{ij\}, \{rs\}$ se tiene que $B(T)_{ij} = 0 = B(W)_{ij}$ y $B(T)_{rs} = 0 = B(W)_{rs}$. Luego, para los coeficientes restantes existen los mismos triángulos, de donde $B(T)_{ab} = B(W)_{ab}$. Por lo tanto $\mu_k(B(T))_{ab} = B(T)_{ab} = B(W)_{ab}$. ■

Definición 2.3.9. Para $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ antisimetrizable, el diagrama Γ_B asociado a B tiene como vértices $1, \dots, n$, y existe una flecha $i \rightarrow j$ en B si $B_{ij} > 0$; además en tal caso, la flecha tiene etiqueta $|B_{ij} B_{ji}|$.

Nota. Las etiquetas con valor 1 se omiten.

Ejemplo 2.3.3. El siguiente ejemplo muestra una triangulación T , junto con su matriz y diagrama asociados.



Observación 2.3.10. Si conocemos un antisimetrizador D de B podemos recuperar a B a partir de Γ_B de la siguiente manera: Si existe $i \xrightarrow{e} j$ donde e es la etiqueta de la flecha, entonces $B_{ij} > 0$ y $B_{ji} < 0$. Por tanto: $B_{ij} = \sqrt{B_{ij}^2} = \sqrt{\frac{D_{ii}B_{ij}^2}{D_{ii}}} = \sqrt{\frac{D_{jj}}{D_{ii}}(-B_{ij}B_{ji})}$. De donde,

$$B_{ij} = \sqrt{\frac{D_{jj}}{D_{ii}}}e,$$

de manera similar podemos obtener,

$$B_{ji} = -\sqrt{\frac{D_{ii}}{D_{jj}}}e.$$

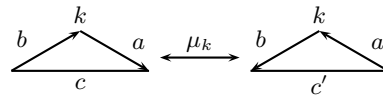
Definición 2.3.11. Dado un diagrama Γ y un vértice k , definimos un diagrama $\mu_k(\Gamma)$, que llamaremos *mutación de Γ en dirección k* como sigue. El diagrama $\mu_k(\Gamma)$ tiene los mismos vértices que Γ , y las flechas se obtienen de la siguiente manera:

1. Se cambia la orientación de todas las flechas que inciden en k y las etiquetas se preservan.
2. Para cada par de flechas $i \xrightarrow{a} k$, $k \xrightarrow{b} j$ se calcula la etiqueta c' para la flecha entre i y j y su orientación según la fórmula

$$\pm\sqrt{c} \pm \sqrt{c'} = \sqrt{ab},$$

donde c es la etiqueta de la flecha $i \xrightarrow{c} j$ la cual puede ser cero, es decir, que no exista la flecha y se toma el signo $+$ (respectivamente $-$) si el triángulo ikj está cíclicamente orientado, (respectivamente, si el triángulo ikj no está cíclicamente orientado).

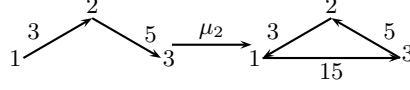
3. Las demás flechas no cambian.



Mutación de diagramas

Ejemplo 2.3.4. Consideremos al siguiente diagrama, y calculemos la mutación del diagrama en dirección del vértice 2.

Observación 2.3.12. No con cualquier diagrama se obtienen valores o etiquetas enteras al mutar.



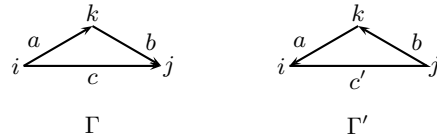
Proposición 2.3.13. *Sea $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ antisimetrizable y $k \in \{1, \dots, n\}$. Entonces el diagrama asociado a la mutación en dirección k de la matriz B es el mismo que la mutación en dirección k del diagrama asociado a B , es decir,*

$$\Gamma_{\mu_k(B)} = \mu_k(\Gamma_B).$$

Demostración. Sea $B' = \mu_k(B)$, $\Gamma = \Gamma_B$, $\Gamma' = \Gamma_{B'}$. Por demostrar $\Gamma' = \mu_k(\Gamma)$. Consideremos $i \xrightarrow{e} k$ en Γ , entonces $i \xleftarrow{e} k$ en $\mu_k(\Gamma)$. Por otro lado, de la flecha en Γ , se tiene que la etiqueta $e = |B_{ik}B_{ki}|$ con $B_{ik} > 0$, como $B' = \mu_k(B)$ se tiene que $|B_{ik}B_{ki}| = |B'_{ik}B'_{ki}|$, con $B'_{ki} > 0$ ya que $B_{ik} > 0$ entonces $B_{ki} < 0$, es decir, $i \xleftarrow{e} k$ en Γ' .

Similarmente Γ' y $\mu_k(\Gamma)$ coinciden en flechas que salen de k . Sean $j \neq k \neq i$; si $B_{ik}B_{kj} \leq 0$ se tiene que $B_{jk}B_{ki} \leq 0$ y $B'_{ij} = B_{ij}$, $B'_{ji} = B_{ji}$, por ello Γ, Γ' tienen las mismas flechas entre i y j y Γ ó Γ' tiene una flecha. Por otro lado el paso 2 de la definición de mutación de Γ en dirección k no aplica a i, j y en $\mu_k(\Gamma)$ tiene la misma flecha entre i y j que en Γ .

Supongamos ahora que $B_{ik} > 0$ y $B_{kj} > 0$ (y el caso $B_{ik} < 0$ y $B_{kj} < 0$ se obtiene al intercambiar i con j). Consideremos los diagramas Γ y Γ' :



donde $a = -B_{ik}B_{ki}$, $b = -B_{kj}B_{jk}$, $c = -B_{ij}B_{ji}$. Entonces en Γ' tenemos que

$$\begin{aligned} c' &= B'_{ji}B'_{ij} \\ &= -(B_{ij} + B_{ik}B_{kj})(B_{ji} - B_{jk}B_{ki}) \\ &= B_{ik}B_{ki}B_{jk}B_{kj} + B_{ij}B_{jk}B_{ki} - B_{ji}B_{ik}B_{kj} - B_{ij}B_{ji} \\ &= ab + \Delta + c, \end{aligned}$$

donde $\Delta = B_{ij}B_{jk}B_{ki} - B_{ji}B_{ik}B_{kj}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} D_{ii}B_{ij}B_{jk}B_{ki} &= -B_{ji}D_{jj}B_{jk}B_{ki} \\ &= B_{ji}B_{kj}D_{kk}B_{ki} \\ &= -B_{ji}B_{kj}B_{ik}D_{ii}. \end{aligned}$$

Como $D_{ii} > 0$, se tiene lo siguiente

$$B_{ij}B_{jk}B_{ki} = -B_{ji}B_{kj}B_{ik} = z.$$

De donde $\Delta = 2z = \pm 2\sqrt{abc}$. La última ecuación se obtiene de la siguiente igualdad

$$z^2 = (-B_{ij}B_{ji})(-B_{jk}B_{kj})(-B_{ik}B_{ki}) = abc.$$

Además $\Delta = +2\sqrt{abc}$ si y sólo si $B_{ji} > 0$; lo cual se tiene si y sólo si el diagrama de Γ es orientado de lo contrario $\Delta = -2\sqrt{abc}$ lo cual es cierto si y sólo si $B_{ji} < 0$ lo cual es cierto si, y solamente si, el diagrama de Γ no es orientado. De lo anterior se tiene que $c' = ab \pm 2\sqrt{abc} + c = (\sqrt{ab} \pm \sqrt{c})^2$, entonces $\pm\sqrt{c'} = \sqrt{ab} \pm \sqrt{c}$, por lo tanto c' es la etiqueta en $\mu_k(\Gamma)$.

Verifiquemos que ambas flechas en Γ' y en $\mu_k(\Gamma)$ tienen la misma orientación.

Si $B_{ij} > 0$ entonces $B'_{ij} > 0$; es decir el diagrama en Γ no es orientado, y en $\mu_k(\Gamma)$ tenemos $i \xrightarrow{c'} j$ y en Γ' también c' tiene la misma orientación pues $B'_{ij} > 0$.

Si $B_{ij} < 0$ entonces se cumple uno de los siguientes casos:

$$B'_{ij} > 0 \Leftrightarrow B_{ik}B_{kj} > -B_{ij}, \quad (2.1)$$

$$B'_{ij} < 0 \Leftrightarrow B_{ik}B_{kj} < -B_{ij}. \quad (2.2)$$

En (2.1) como $B_{ji} - B_{jk}B_{ki} = B'_{ji} < 0$ se tiene que $B_{ji} < B_{jk}B_{ki}$; y multiplicando esta última desigualdad por $B_{ik}B_{kj}$ tenemos que

$$B_{ji}B_{ik}B_{kj} < B_{jk}B_{ki}B_{ik}B_{kj} \quad (2.3)$$

al multiplicar la desigualdad (2.1) por B_{ji} obtenemos $-B_{ij}B_{ji} < B_{ji}B_{ik}B_{kj}$. De esta última desigualdad y de (2.3) tenemos que $-B_{ij}B_{ji} < B_{ji}B_{ik}B_{kj} < B_{jk}B_{ki}B_{ik}B_{kj}$. Luego $-B_{ij}B_{ji} < (-B_{ik}B_{ki})(-B_{jk}B_{kj})$, es decir $c < ab$, y en $\mu_k(\Gamma)$ la flecha entre i y j es $i \xrightarrow{c'} j$ igual que en Γ' . El caso (2.2) es similar. ■

2.4. Coeficientes

Definición 2.4.1. Un semicampo es un triple (P, \oplus, \cdot) , donde P es un conjunto con operaciones binarias \oplus y \cdot en P tales que:

1. (P, \cdot) es un grupo abeliano.
2. (P, \oplus) es un semigrupo conmutativo.
3. Se cumple la distributividad de \cdot sobre \oplus , es decir $(a \oplus b) \cdot c = (a \cdot c) \oplus (b \cdot c)$ para todo $a, b, c \in P$.

Ejemplo 2.4.1. $(\mathbb{Q}_{>0}, +, \cdot)$ con $+$ y \cdot usuales es un semicampo.

Ejemplo 2.4.2. (Semicampo Tropical) Sea J un conjunto finito, denotaremos por $P = \mathbb{Z}^J$, al conjunto de funciones que tienen como dominio a J y como codominio a \mathbb{Z} . Las operaciones \cdot y \oplus quedan definidas de la siguiente manera; sean $f, g \in P$, entonces $f, g : J \rightarrow \mathbb{Z}$ luego se definen $(f \cdot g)(j) = f(j) + g(j)$ y $(f \oplus g)(j) = \min(f(j), g(j))$.

Sean

$$u_j : J \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad u_j^n : J \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$j' \mapsto \delta_{jj'} \quad \quad \quad j' \mapsto n\delta_{jj'}$$

Si $J = \{j_1, \dots, j_t\}$, se tiene que $u_{j_1}^{n_1} \cdots u_{j_t}^{n_t} : J \rightarrow \mathbb{Z}, j' \mapsto n_{j'}$.

De donde

$$\left(\prod_j u_j^{m_j}\right) \cdot \left(\prod_j u_j^{n_j}\right) = \prod_j u_j^{m_j+n_j},$$

y

$$\left(\prod_j u_j^{m_j}\right) \oplus \left(\prod_j u_j^{n_j}\right) = \prod_j u_j^{\min(m_j, n_j)}.$$

A tal semicampo se le suele denotar $P = \text{Trop}(u_j \mid j \in J)$.

Ejemplo 2.4.3. Semicampo Universal

Denotamos por $\mathbb{Q}(u_1, \dots, u_t)$ al campo de fracciones de $\mathbb{Q}[u_1, \dots, u_t]$ y por $\mathbb{Q}_{sf}(u_1, \dots, u_t)$ al subconjunto de $\mathbb{Q}(u_1, \dots, u_t)$ de las fracciones que se pueden escribir con numerador y denominador sin substracciones. Es claro que $\mathbb{Q}_{sf}(u_1, \dots, u_t)$ es cerrado bajo suma, multiplicación y división, y además contiene al 1. Por lo tanto $\mathbb{Q}_{sf}(u_1, \dots, u_t)$ es un semicampo.

Definición 2.4.2. Sea P un semicampo. Una *Y-semilla etiquetada* (antisimetrizable) en P es un par (B, y) donde $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ es antisimetrizable con $y = (y_1, \dots, y_n) \in P^n$.

Definición 2.4.3. Sea P un semicampo. Una *Y-semilla* en P es una clase de equivalencia de Y-semillas etiquetadas. Decimos que $(B, y) \sim (B', y')$ si existe una permutación $\sigma \in s_n$ tal que $B' = B_\sigma$ y $y' = y_\sigma$, donde $(B_\sigma)_{ij} = B_{\sigma(i)\sigma(j)}$, $(y_\sigma)_i = y_{\sigma(i)}$.

Definición 2.4.4. Dada una Y-semilla etiquetada (B, y) y $k \in \{1, \dots, n\}$, definimos la *mutación de (B, y) en dirección k* , como la Y-semilla etiquetada $\mu_k(B, y) = (B', y')$ que satisface:

1. $B' = \mu_k(B)$.
2. $y' = (y'_1, \dots, y'_n) \in P^n$ con

$$y'_i = \begin{cases} \frac{1}{y_k} & \text{si } i = k, \\ \frac{y_k^{\max(0, B_{ki})}}{(y_k \oplus 1)^{B_{ki}}} y_i & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Diremos que dos semillas $(B, y), (B', y')$ son equivalentes bajo mutación si (B', y') se puede obtener de (B, y) para alguna mutación en alguna dirección k . Denotaremos a dos semillas equivalentes bajo mutación como $(B, y) \sim_{mut} (B', y')$.

Ejemplo 2.4.4. Sean $P = \text{Trop}(u_1, u_2, u_3)$ y la siguiente matriz con su diagrama asociado

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \triangle & 3 \\ & & \end{array} \\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Diagrama con su matriz asociada

tales que con las coordenadas

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 u_2^{-2}, \\ y_2 &= u_1^{-2} u_2 u_3, \\ y_3 &= u_1^{-1}, \end{aligned}$$

forman una Y-semilla etiquetada. Al tomar la mutación en dirección 2, se tienen las siguientes coordenadas

$$\begin{aligned} y'_1 &= u_1^{-1} u_2^{-1}, \\ y'_2 &= u_1^2 u_2^{-1} u_3^{-1}, \\ y'_3 &= u_1^{-1} u_2 u_3, \end{aligned}$$

y la matriz $B' = \mu_2(B)$ con su diagrama asociado.

$$\begin{array}{c} \quad \\ \quad 2 \quad \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad \quad 3 \end{array} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagrama con su matriz asociada B'

Proposición 2.4.5. *Si (B, y) es una Y-semilla etiquetada, entonces $\mu_k(\mu_k(B, y)) = (B, y)$.*

Demostración. Sean $(B', y') = \mu_k(B, y)$, $(B'', y'') = \mu_k(B', y')$. Por el Lema 2.3.2 $B'' = B$. Verifiquemos que $y = y''$. Para $i = k$ se tiene que $y_k'' = \frac{1}{y_k} = y_k$. Supongamos que $i \neq k$; luego

$$\begin{aligned} y_i'' &= \frac{y_k'^{\max(0, B'_{ki})}}{(y_k' \oplus 1)^{B'_{ki}}} y_i' \\ &= \frac{(y_k^{-1})^{\max(0, -B_{ki})}}{(y_k^{-1} \oplus 1)^{B_{ki}}} \cdot \frac{y_k^{\max(0, B_{ki})}}{(y_k \oplus 1)^{B_{ki}}} \cdot y_i. \end{aligned}$$

Sea

$$\Delta = \frac{(y_k^{-1})^{\max(0, B_{ki})}}{(y_k^{-1} \oplus 1)^{B_{ki}}} \cdot \frac{y_k^{\max(0, B_{ki})}}{(y_k \oplus 1)^{B_{ki}}}.$$

Por lo tanto

$$\Delta = \frac{(y_k)^{\max(0, -B_{ki}) - \max(0, -B_{ki})}}{\left(\frac{y_k \oplus 1}{y_k^{-1} \oplus 1}\right)^{B_{ki}}} \tag{2.4}$$

$$= \frac{(y_k)^{\max(0, B_{ki}) + \min(0, B_{ki})}}{y_k^{B_{ki}}} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{y_k^{B_{ki}}}{y_k^{B_{ki}}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

La igualdad de (2.4) se obtiene de $(y_k^{-1})^{\max(0, -B_{ki})} = y_k^{-\max(0, -B_{ki})}$, pues si $B_{ki} < 0$ entonces

$$(y_k^{-1})^{\max(0, -B_{ki})} = (y_k^{-1})^0 = y_k^0 = y_k^{-\max(0, -B_{ki})}.$$

Por otro lado si $B_{ki} < 0$, entonces

$$(y_k^{-1})^{\max(0, -B_{ki})} = (y_k^{-1})^{B_{ki}} = y_k^{-B_{ki}} = y_k^{-\max(0, -B_{ki})}.$$

La igualdad de (2.5) se obtiene de que $y_k(y_k^{-1} \oplus 1) = y_k y_k^{-1} \oplus y_k = 1 \oplus y_k = y_k \oplus 1$.

Por tanto $y'' = y$. ■

Observación 2.4.6. Si $P = \text{Trop}(u_j | j \in J)$ entonces $\mu_k(B, (1, \dots, 1)) = (\mu_k(B), (1, \dots, 1))$ pues en $\text{Trop}(u_j | j \in J)$ se tiene que $1 \oplus 1 = 1$. El álgebra que resulta así, se llamará *sin coeficientes*.

El resto de la definición de un álgebra de conglomerado dependerá de una elección: el anillo de coeficientes. Para ello definimos el anillo de grupo $\mathbb{Q}P$ con P semicampo.

Definición 2.4.7. Sea P un semicampo. Definimos el anillo de grupo $\mathbb{Q}P$ el cual como conjunto es el conjunto de todas las funciones que tienen como dominio P y como codominio \mathbb{Q} y si $f \in \mathbb{Q}P$ entonces $f(a) \neq 0$ para un número finito de elementos $a \in P$, al cual denotaremos por $\mathbb{Q}^{(P)}$, en el cual se suma por coordenadas y el producto es de la siguiente manera: dados $f, g \in \mathbb{Q}P$ definimos $(f \cdot g)(c) = \sum_{\substack{a, b \in P \\ a \cdot b = c}} f(a)g(b)$.

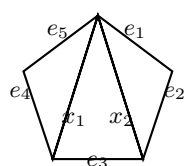
La siguiente definición sigue un marco histórico, ya que los siguientes no son polinomios pero conservan el nombre de polinomios.

Definición 2.4.8. El anillo de *polinomios de Laurent* en n -variables y coeficientes en \mathbb{Q} , es el conjunto de expresiones de la forma $p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_i \in \mathbb{Z}} p_{i_1, \dots, i_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ con $p_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{Q}$ y son cero casi en todos lados, excepto en un número finito de variables, con la suma y multiplicación definidos como la suma y multiplicación definidas usualmente en los polinomios de varias variables. El anillo lo denotamos por $\mathbb{Q}(x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm})$.

Observación 2.4.9. Si $P = \text{Trop}(u_j | j \in J)$ se tiene directamente de la definición de polinomios de Laurent y de $\mathbb{Q}P$ que: $\mathbb{Q}P \cong \mathbb{Q}(u_j^{\pm} | j \in J)$.

Definición 2.4.10. Para $y \in P^n$, definimos $p_i^+ = \frac{y_i}{y_i \oplus 1}$ y $p_i^- = \frac{1}{y_i \oplus 1}$.

Ejemplo 2.4.5. Enseguida daremos un ejemplo de mutaciones de Y -semillas etiquetadas, con $P = \text{Trop}(e_1, \dots, e_5)$ en el cual se muestra los diagramas, matrices asociadas y semillas bajo mutaciones.

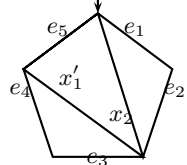


$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = e_3^{-1} e_4 e_5^{-1}$$

$$y_2 = e_1^{-1} e_2 e_3^{-1}$$

μ_2

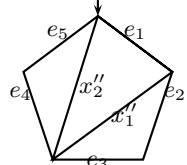


$$B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y'_1 = e_1^{-1} e_3^{-2} e_4 e_5^{-1}$$

$$y'_2 = e_1 e_2^{-1} e_3$$

μ_1

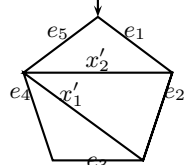


$$B'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y''_1 = e_1 e_3^2 e_4^{-1} e_5$$

$$y''_2 = e_5^{-1} e_2^{-1} e_3^{-1}$$

μ_2

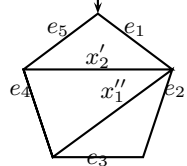


$$B''' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y'''_1 = e_1 e_2^{-1} e_3 e_4^{-1}$$

$$y'''_2 = e_5 e_2 e_3$$

μ_1

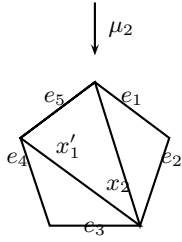


$$B^{iv} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1^{iv} = e_1^{-1} e_2 e_3^{-1} e_4$$

$$y_2^{iv} = e_1^{-1} e_2 e_3^{-1}$$

μ_2



$$B^v = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1^v = e_3^{-1} e_4 e_5^{-1}$$

$$y_2^v = e_3^{-1} e_4 e_5^{-1}.$$

Observación 2.4.11. El ejemplo anterior nos muestra que debemos trabajar con Y-semillas (no etiquetadas). Para ello usamos que las mutaciones de Y-semillas etiquetadas inducen mutaciones de Y-semillas.

Ejemplo 2.4.6. Sean $P = \text{Trop}(u_1, u_2, u_3)$ y $y_i = u_1^{-1} u_2^3 u_3^{-2}$. Entonces $p_i^+ = u_2^3$, $p_i^- = u_1 u_3^2$. En general, recuperamos a y_i de la siguiente manera: $y_i = \frac{p_i^+}{p_i^-}$.

De ahora en adelante, R es un subanillo de $\mathbb{Q}P$ que contiene a todos los elementos p_1^\pm, \dots, p_n^\pm asociados a y_1, \dots, y_n donde $(B, y) \sim_{mut} (B_0, y_0)$, y diremos que R es compatible con la semilla inicial (B_0, y_0) .

Típicamente, si $P = \text{Trop}(u_j \mid j \in J)$ entonces $R = \mathbb{Q}[u_j \mid j \in J]$ ó $R = \mathbb{Q}P \cong \mathbb{Q}(u_j^\pm \mid j \in J)$. En tal caso R se llama el *anillo de coeficientes* (compatible con la semilla (B_0, y_0)).

Observación 2.4.12. En $\text{Gr}(2, n)$ se toma $P = \text{Trop}(e_1, \dots, e_n)$ y $R = \mathbb{Q}[e_1, \dots, e_n]$.

Lema 2.4.13. Si P es un semicampo, entonces (P, \cdot) es libre de torsión.

Demostración. Sea $a \in P$ tal que $a^n = 1$, $n > 1$. Entonces $a = \frac{a^n \oplus a^{n-1} \oplus \dots \oplus a}{a^{n-1} \oplus \dots \oplus 1} = 1$. ■

Proposición 2.4.14. Si P es un semicampo, entonces $\mathbb{Q}P$ es un dominio entero.

Demostración. Sean $f, g \in \mathbb{Q}P$ tales que $f \neq 0 \neq g$, $I = \{a \in P \mid f(a) \neq 0\}$ y $J = \{b \in P \mid g(b) \neq 0\}$. Como I, J son finitos, entonces $I \cup J$ genera un subgrupo (con respecto a la multiplicación) G de P que es abeliano, finitamente generado y libre de torsión. Luego $G \cong \mathbb{Z}^m$ para algún m . Supongamos que el isomorfismo envía $v \in \mathbb{Z}^m$ a $\bar{v} \in G$. Entonces $(f \cdot g)(c) = \sum_{\substack{a \in I, b \in J \\ a \cdot b = c}} f(a)g(b)$ se traduce como $(f \cdot g)(\bar{w}) = \sum_{\substack{u, v \in \mathbb{Z}^n \\ u+v=w}} f(\bar{u})g(\bar{v})$, el cual es el producto de polinomios. Por tanto $(f \cdot g)(\overline{\deg(f) + \deg(g)}) \neq 0$, implica que $f \cdot g \neq 0$. ■

Corolario 2.4.15. R y $R[x_1, \dots, x_n]$ son dominios enteros.

2.5. Variables de conglomerados

Definición 2.5.1. Sean $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ antisimetrizable, P un semicampo, $y \in P^n$ y R un anillo de coeficientes compatible con (B, y) . Sea $\mathcal{F} = \mathbb{Q}P(u_1, \dots, u_n)$ el campo ambiente y (B_0, y_0, x_0) una semilla inicial, donde $x_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{F}^n$.

En general decimos que el triple (B, y, x) , donde $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ es antisimetrizable, $y \in P^n$ y $x \in \mathcal{F}^n$ es algebraicamente independiente sobre R , es una *semilla etiquetada*. Una *semilla* es una clase de equivalencia $(B, y, x) \sim (B_\sigma, y_\sigma, x_\sigma)$ para algún $\sigma \in s_n$, donde $(x_\sigma)_i = x_{\sigma(i)}$.

Definición 2.5.2. Para una semilla (B, y, x) y un índice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, definimos la *mutación* de (B, y, x) en *dirección* k como la semilla $\mu_k(B, y, x) = (B', y', x')$, donde $(B', y') = \mu_k(B, y)$ y $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ con

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \neq k, \\ \frac{y_k \prod_{i: B_{ik} > 0} x_i^{B_{ik}} + \prod_{i: B_{ik} < 0} x_i^{-B_{ik}}}{(y_k \oplus 1)x_k} & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Dos semillas $(B, y, x), (B', y', x')$ se dicen equivalentes bajo mutación si (B', y', x') se obtiene a partir de una mutación en dirección de alguna k sobre (B, y, x) . Las semillas equivalentes se denotarán como $(B, y, x) \sim_{mut} (B', y', x')$.

Observación 2.5.3. Si p_i^\pm es asociado a y_i , como en la Definición 2.4.10, entonces

$$x'_k = \frac{1}{x_k} \cdot \left(y_k^+ \prod_{i: B_{ik} > 0} x_i^{B_{ik}} + y_k^- \prod_{i: B_{ik} < 0} x_i^{-B_{ik}} \right).$$

Notemos que la mutación de semillas etiquetadas induce la mutación en semillas.

Definición 2.5.4. Dada una semilla inicial (B_0, y_0, x_0) y un anillo de coeficientes R compatible con (B_0, y_0) , se define el *álgebra de conglomerado* $\mathcal{A}_R(B_0, y_0, x_0)$ como la R -subálgebra de \mathcal{F} generado por \mathfrak{X} , donde \mathfrak{X} es el conjunto de *variables de conglomerado*: $\mathfrak{X} = \{x'_i \in \mathcal{F} \mid x'_i \in x' \text{ y } (B', y', x') \sim (B_0, y_0, x_0)\}$. Un *conglomerado* es un tuplo $x' \in \mathcal{F}^n$ tal que existe una semilla $(B', y', x') \sim_{mut} (B_0, y_0, x_0)$.

La siguiente definición es la análoga a la matriz de intercambio, pero con unos pequeños cambios.

Definición 2.5.5. Sea $T = \{e_1, \dots, e_n, x_1, \dots, x_d\}$ una triangulación, $d = n - 3$, definimos $z_i = x_i$ con $i \in \{1, \dots, d\}$ y $z_{d+i} = e_i$ con $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos la matriz $\tilde{B}(T) \in \mathbb{Z}^{d+n \times d}$ que tiene las siguientes entradas, $\tilde{B}(T)_{ij} = a - b$, donde a y b son definidos de la misma manera que en la matriz de intercambio que se puede ver en la Definición 2.3.7.

Definición 2.5.6. Dada $\tilde{B} \in \mathbb{Z}^{d+n \times d}$, se define la *mutación en dirección* k de \tilde{B} como sigue:

$$\mu_k(\tilde{B})_{ij} = \begin{cases} -\tilde{B}_{ij} & \text{si } i = k \text{ ó } j = k, \\ \tilde{B}_{ij} + \text{sign}(\tilde{B}_{ik}) \max(0, \tilde{B}_{ik} \tilde{B}_{kj}) & \text{si } i \neq k \neq j. \end{cases}$$

Además, para cada $i = \{1, \dots, d\}$ definimos $y_i = \prod_{j=1}^n e_j^{\tilde{B}_{d+j, i}}$.

Proposición 2.5.7. Sea T una triangulación, si T' se obtiene de T al voltear x_k , entonces $\mu_k(\tilde{B}(T)) = \tilde{B}(T')$.

Demostración. La prueba es igual a la realizada en la Proposición 2.3.8. ■

Proposición 2.5.8. Sea T una triangulación. Si T' se obtiene de T al voltear x_k , entonces $\mu_k(B(T), y(T)) = (B(T'), y(T'))$.

Demostración. Sea $\mu_k(B(T), y(T)) = (B', y')$. Por la Proposición 2.3.8, se tiene que $B' = \mu_k(B(T)) = B(T')$. Verifiquemos que $y' = y(T')$. Si $i = k$, entonces

$$\begin{aligned} y'_k &= \frac{1}{y_k} = \prod_{j=1}^n e_j^{-\tilde{B}(T)_{d+j,k}} \\ &= \prod_{j=1}^n e_j^{B(T')_{d+j,k}} \\ &= y(T')_k. \end{aligned}$$

Si $i \neq k$, definimos $\tilde{B} = \tilde{B}(T)$ y $\tilde{B}' = \tilde{B}(T')$. Tenemos que

$$\begin{aligned} y(T')_i &= \prod_{j=1}^n e_j^{\tilde{B}_{d+j,i} + \text{sign}(\tilde{B}_{d+j,i}) \max(0, \tilde{B}_{d+j,k} B_{ki})} \\ &= y(T)_i \prod_{j=1}^n e_j^{\text{sign}(\tilde{B}_{d+j,k}) \max(0, \tilde{B}_{d+j,k} B_{ki})}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$y'_i = \frac{y(T)_k^{\max(0, \tilde{B}_{ki})}}{(y(T)_k \oplus 1)^{\tilde{B}_{ki}}} y(T)_i$$

y como $y(T)_k = \prod_j e_j^{\tilde{B}_{d+j,k}}$ y $y(T)_k \oplus 1 = \prod_j e_j^{\min(0, \tilde{B}_{d+j,k})}$, por lo tanto

$$\frac{y(T)_k^{\max(0, \tilde{B}_{ki})}}{(y(T)_k \oplus 1)^{\tilde{B}_{ki}}} = \prod_j e_j^{\tilde{B}_{d+j,k} \max(0, \tilde{B}_{ki}) - \min(0, \tilde{B}_{d+j,k})}.$$

Luego, es suficiente ver que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ se tiene que $b \cdot \max(0, a) - a \cdot \min(0, b) = \text{sign}(b) \cdot$

$\max(0, ab)$. En efecto

$$b \cdot \max(0, a) - a \cdot \min(0, b) = \begin{cases} \max(0, ab) & \text{si } b \geq 0, \\ ab - ab = 0 & \text{si } b \leq 0, a > 0, \\ -ab & b \leq 0, a \leq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto $b \cdot \max(0, a) - a \cdot \min(0, b) = \text{sign}(b) \cdot \max(0, ab)$. ■

Definición 2.5.9. Para una triangulación $T = \{e_1, \dots, e_n, x_1, \dots, x_d\}$, definimos $x(T) = \{x_1, \dots, x_d\}$.

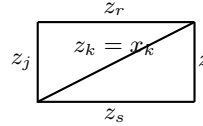
Proposición 2.5.10. Sea T una triangulación. Si T' es la triangulación que se obtiene al voltear x_k de T , entonces $\mu_k(B(T), y(T), x(T)) = (B(T'), y(T'), x(T'))$.

Demostración. Sea $\tilde{B} = \tilde{B}(T)$ y $\mu_k(B(T), y(T), x(T)) = (B', y', x')$. Por la Proposición 2.5.8, se tiene $\mu_k(B(T), y(T)) = (B', y')$; y por la definición de mutación $x(T')_i = x'_i$ para todo $i \neq k$. Verifiquemos que para

$i = k$ se tiene que $x(T')_k = x'_k$. Al sustituir $y(T)_k^+ = \prod_{j: \tilde{B}_{d+j,k} > 0} e_j^{\tilde{B}_{d+j,k}}$ y $y(T)_k^- = \prod_{j: \tilde{B}_{d+j,k} < 0} e_j^{-\tilde{B}_{d+j,k}}$ en la definición;

$$x'_k = \left(y(T)_k^+ \prod_{i: B_{ik} > 0} x(T)_i^{B_{ik}} + y(T)_k^- \prod_{i: B_{ik} < 0} x(T)_i^{-B_{ik}} \right) \frac{1}{x(T)_k}.$$

Obtenemos $x'_k = \left(\prod_{i: \tilde{B}_{ik} > 0} z_i^{-\tilde{B}_{ik}} + \prod_{i: \tilde{B}_{ik} < 0} z_i^{-\tilde{B}_{ik}} \right) \frac{1}{x(T)_k}$ donde los z_1, \dots, z_{n+d} están definidos como en la Definición 2.5.5. Lo cual verifica que se cumplen las relaciones de Plücker. Pues consideremos el siguiente diagrama que representa a la triangulación T' y observemos que por definición de coordenadas de Plücker se tiene lo deseado.



$$z(T')_k = \frac{z_i z_j + z_r z_s}{z_k}$$

■

2.6. El complejo de conglomerado

Fijemos una semilla inicial (B_0, y_0, x_0) , y un anillo de coordenadas R que es compatible con (B_0, y_0) y por lo tanto, a un álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_R(B_0, y_0, x_0)$.

Definición 2.6.1. Un complejo simplicial, en el conjunto \mathfrak{X} , es un subconjunto $F \subset \mathcal{P}(\mathfrak{X})$ tal que:

1. $F \neq \emptyset$.
2. Para todo $f \in F$, f es finito.
3. Si $f \in F$ y $f' \subset f$, entonces $f' \in F$.

Definición 2.6.2. El complejo de conglomerado de $\mathcal{A}_R(B_0, y_0, x_0)$ es el complejo simplicial

$$\sum = \{ \{x_1, \dots, x_t\} \mid \text{existe una semilla } (B', y', x') \text{ tal que } (B', y', x') \sim (B_0, y_0, x_0) \text{ con } x_i \in x' \}.$$

Definición 2.6.3. La gráfica de intercambio E de $\mathcal{A}_R(B_0, y_0, x_0)$ tiene como vértices a los conglomerados de $\mathcal{A}_R(B_0, y_0, x_0)$, y existe arista de x' a x'' si existen semillas (B', y', x') , (B'', y'', x'') tales que $\mu_k(B', y', x') = (B'', y'', x'')$ para alguna k .

Observaciones 2.6.4. 1. El complejo de conglomerado \sum es homogéneo de grado n , es decir, todos los símlices maximales tienen n elementos; además \sum es conexa.

2. La gráfica de intercambio E es n -regular, es decir, cada vértice tiene n vecinos y es conexa.

Algunas preguntas de estas definiciones son las siguientes:

Pregunta 1 ¿Es la gráfica de intercambio E la gráfica dual del complejo de conglomerado Σ ? Recordemos que la gráfica dual tiene como vértices a los símlices

maximales, y existe una arista en E de x a x' si $|x \cap x'| = n - 1$. La respuesta no es clara cuando x, x' son conglomerados que comparten $n - 1$ variables de conglomerado: no sabemos si existen semillas $(B, y, x), (B', y', x')$ tales que $\mu_k(B, y, x) = (B', y', x')$ para algún k .

Pregunta 2 ¿Es Σ un complejo de clanes?, recordemos que un complejo simplicial $\Sigma \subset \mathcal{P}(\mathfrak{X})$ es un complejo de clanes si $f = \{x_i, \dots, x_k\} \in \Sigma$ tal que $\{x_i, x_j\} \in \Sigma$ para todo i, j tal que $i \neq j$ entonces $f \in \Sigma$.

Pregunta 3 Sean $x_i \in \mathfrak{X}$ y E_{x_i} es la subgráfica inducida de E dada por todos los conglomerados x' con $x_i \in x'$. ¿Es E_{x_i} conexa?

Proposición 2.6.5. *Las tres preguntas anteriores, se resuelven para $\text{Gr}(2, n)$ de manera afirmativa.*

Demostración. Pregunta 1. Sean x, x' dos triangulaciones que comparten $d - 1$ cuerdas interiores. Entonces estas cuerdas se pueden completar exactamente de dos maneras a triangulaciones que tienen que ser x, x' y están relacionadas por un volteo.

Pregunta 2. Si $\{x_1, \dots, x_t\}$ satisface que $\{x_i, x_j\} \in \Sigma$ para todo $i, j \in \{1, \dots, t\}$ entonces $x_i x_j$ no se intersectan para todo $i, j \in \{1, \dots, t\}$ entonces podemos completar a una triangulación.

Pregunta 3. Si fijamos una cuerda interior δ_{ab} , cada triangulación T con $\delta_{ab} \in T$ se puede voltear mediante un mutación que nunca voltear a δ_{ab} por ello $T \sim T_{\delta_{ab}}$, y consecuentemente $E_{\delta_{ab}}$ es conexa. ■

Capítulo 3

Sistemas de raíces

En este capítulo se hace una breve recopilación de la obtención de los Diagramas de Dynkin a partir de sistemas de raíces. Cabe mencionar que esta colección de resultados se obtuvo de los libros siguientes [EW] y [Car].

3.1. Grupos de reflexión finitos

Definición 3.1.1. Sea V un espacio euclidiano (real, con forma bilineal la cual es simétrica y positiva definida). Para cada $\alpha \in V$ con $\alpha \neq 0$, definimos $s_\alpha : V \rightarrow V$ donde $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$. Además se define $H_\alpha = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) = 0\}$.

Observación 3.1.2. La función $s_\alpha : V \rightarrow V$ satisface las siguientes propiedades:

- (i) $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$.
- (ii) $s_\alpha(\lambda) = \lambda$, para todo $\lambda \in H_\alpha$.
- (iii) s_α es lineal.
- (iv) $s_\alpha^2 = id$. En efecto,

$$\begin{aligned} s_\alpha^2(\lambda) &= s_\alpha s_\alpha(\lambda) \\ &= s_\alpha\left(\lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha\right) \\ &= \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha - 2\frac{(\lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \\ &= \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha - 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha + 4\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\frac{(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \\ &= \lambda - 4\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha + 4\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

(v) $(s_\alpha(\lambda), s_\alpha(\mu)) = (\lambda, \mu)$. En efecto,

$$\begin{aligned} (s_\alpha(\lambda), s_\alpha(\mu)) &= \left(\lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \mu - \frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \right) \\ &= (\lambda, \mu) - 2\frac{(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}(\lambda, \alpha) - 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}(\alpha, \mu) + 4\frac{(\lambda, \alpha)(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)^2}(\alpha, \alpha) \\ &= (\lambda, \mu). \end{aligned}$$

De las tres primeras propiedades sigue que s_α es una reflexión en H_α . Bajo estas observaciones, $s_\alpha \in O(V)$, donde $O(V)$ denota el conjunto de funciones lineales, biyectivas que preservan la forma bilineal.

Definición 3.1.3. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V \setminus \{0\}$. Denotamos por $W \subset O(V)$ al subgrupo generado por $s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_n}$.

Nos interesa el caso cuando W es finito. Por lo tanto, de ahora en adelante W es un grupo de reflexión finito.

Proposición 3.1.4. Para todo $t \in O(V), \alpha \in V \setminus \{0\}$ se tiene que $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$. En particular, para todo $w \in W$, se tiene que $s_\alpha \in W$ si y sólo si $s_{w\alpha} \in W$.

Demostración. Se tiene $ts_\alpha t^{-1}(t\alpha) = ts_\alpha \alpha = -t\alpha$. Además, $\lambda \in H_{t\alpha}$ si, y sólo si $(\lambda, t\alpha) = 0$. Como $(\lambda, t\alpha) = (t^{-1}\lambda, \alpha)$ se concluye que $\lambda \in H_{t\alpha}$ si y sólo si $t^{-1}\lambda \in H_\alpha$. Por ello, $(ts_\alpha t^{-1})\lambda = t(t^{-1}\lambda) = \lambda$. Como $ts_\alpha t^{-1}$ es lineal, entonces $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$. ■

Definición 3.1.5. Cada $s_\alpha \in W$, define la línea $L_\alpha = H_\alpha^\perp = \{\lambda \in V \mid s_\alpha \lambda = -\lambda\} = \mathbb{R}\alpha$.

Por la Proposición 3.1.4, el grupo W permuta las líneas $\{L_\alpha \mid s_\alpha \in W\}$.

Definición 3.1.6. Definamos $\Phi = \{v \in V \mid (v, v) = 1 \text{ y } \exists s_\alpha \in W \text{ tal que } v \in L_\alpha\}$

Observación 3.1.7. W permuta a Φ ; es decir, si $\alpha \in \Phi$ y $w \in W$, entonces $w(\alpha) \in \Phi$. Además Φ satisface las siguientes condiciones.

(R1) $\Phi \neq \emptyset, 0 \notin \Phi$ y Φ es finito.

(R2) $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$, para todo $\alpha \in \Phi$.

(R3) $s_\alpha \Phi = \Phi$, para todo $\alpha \in \Phi$.

Proposición 3.1.8. Sea $\Phi \subset V$ un subconjunto que satisface (R1) – (R3) y W el grupo generado por las reflexiones s_α para $\alpha \in \Phi$. Entonces W es finito.

Demostración. Tenemos un homomorfismo $W \rightarrow S(\Phi), w \mapsto (w|_\Phi: \lambda \mapsto w\lambda)$. Basta verificar que este homomorfismo es inyectivo, porque entonces, $|W| \leq |S(\Phi)|$ que es finito por (R1).

Sea $\Phi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ y $V' = \{\lambda \mid (\lambda, \alpha_i) = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$. Sean $w \in W$ tal que $w|_\Phi = \text{Id}_\Phi$ y $\lambda \in V'$, así $(w\lambda, \alpha_i) = (\lambda, \alpha_i) = 0$, entonces cada $w \in W$ fija a V' elemento por elemento, y $V = V' + L_{\alpha_1} + \dots + L_{\alpha_n}$. Por ello, w fija a todo el espacio punto por punto, es decir $w = \text{Id}$, por tanto el homomorfismo es inyectivo, como Φ es finito, entonces $S(\Phi)$ es finito, como el homomorfismo es inyectivo se tiene que $|W| \leq |S(\Phi)|$, de donde $|W|$ es finito. ■

3.2. Raíces

Definición 3.2.1. Un subconjunto Φ de un espacio euclideo V es un *sistema de raíces* si satisface las propiedades (R1), (R2), (R3) de la Observación 3.1.7 y además satisface la siguiente propiedad:

$$(R4) \quad \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}.$$

Observación 3.2.2. No es cierto que cada Φ que proviene de un grupo de reflexión satisface la propiedad (R4). Esta propiedad tiene otro origen: álgebras de Lie. Por simplicidad escribiremos $\langle \alpha, \beta \rangle$ en lugar de $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$.

Definición 3.2.3. Un subconjunto Δ de un sistema de raíces Φ , se llama *sistema simple* si Δ es una \mathbb{R} -base del \mathbb{R} -subespacio de V generado por Φ , y además para cada $\lambda = \sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha \alpha \in \Phi$, se tiene que $\lambda_\alpha \leq 0$ para todo $\alpha \in \Delta$ o bien $\lambda_\alpha \geq 0$ para todo $\alpha \in \Delta$.

Proposición 3.2.4. *Cada sistema de raíces tiene un sistema simple.*

Demostración. (a) Sea ν_1, \dots, ν_n una base de V . Definimos un orden en V , por $\sum_{i=1}^n a_i \nu_i < \sum_{i=1}^n b_i \nu_i$ si y sólo si $a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k < b_k$ para algún $k = 1, \dots, n$. Este orden satisface:

- (i) Para todo $\lambda, \mu \in V$ se tiene que $\lambda < \mu, \lambda = \mu$ ó $\lambda > \mu$.
- (ii) Para todo $\lambda, \mu \in V$, si $\lambda < \mu$ entonces $\lambda + \nu < \mu + \nu$.
- (iii) Para todo $\lambda, \mu \in V$ con $\lambda < \mu$ se tiene: si $c \in \mathbb{R}_{>0}$ entonces $c\lambda < c\mu$, y si $c \in \mathbb{R}_{<0}$ entonces $c\lambda > c\mu$.

(b) Se define $\Phi^+ = \{\lambda \in \Phi \mid \lambda > 0\}$ y $\Phi^- = \{\lambda \in \Phi \mid \lambda < 0\}$; y se verifica que $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ y $\Phi^- = -\Phi^+$. Además, sea $\Delta \subset \Phi^+$ un subconjunto minimal tal que para todo $\lambda \in \Phi^+$ podemos expresar a λ como $\lambda = \sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha \alpha$ para algunos coeficientes $\lambda_\alpha \geq 0$. Observe que Δ existe, pues podemos tomar $\Delta = \Phi^+$.

(c) Para todo $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \neq \beta$, se tiene que $(\alpha, \beta) \leq 0$.

En efecto, supongamos que existen $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\alpha \neq \beta$ y $(\alpha, \beta) > 0$. Entonces $s_\alpha \beta = \beta - c\alpha$ con $c = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} > 0$. Si $s_\alpha \beta \in \Phi^+$ entonces

$$s_\alpha \beta = \beta - c\alpha = c_\beta \beta + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma \quad (3.1)$$

con $c_\gamma > 0$. Si $c_\beta < 1$ tenemos $(1 - c_\beta)\beta = c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma$ por tanto β es combinación lineal no negativa de $\Delta \setminus \beta$, lo cual contradice la minimalidad de Δ .

Si $c_\beta \geq 1$ obtenemos de (3.1) que $(c_\beta - 1)\beta + c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma = 0$ es una combinación lineal no negativa de elementos de Δ . Por el orden en V todos los coeficientes son cero, lo que contradice que $c_\gamma > 0$.

Por lo tanto $-s_\alpha \beta \in \Phi^+$ y con ello

$$-s_\alpha \beta = -\beta + c\alpha = c_\alpha \alpha + \sum_{\gamma \neq \alpha} c_\gamma \gamma \quad (3.2)$$

es una raíz positiva. De (3.2) tenemos que si $(c - c_\alpha) > 0$ entonces $(c - c_\alpha)\alpha = \beta + \sum_{\gamma \neq \alpha} c_\gamma \gamma$ es combinación lineal no negativa de elementos de $\Delta \setminus \{\alpha\}$, contradiciendo la minimalidad de Δ . Ahora,

si $(c - c_\alpha) \leq 0$, entonces por (3.2) se tiene $0 = \beta + (c_\alpha - c)\alpha + \sum_{\gamma \neq \alpha} c_\gamma \gamma$. Luego por el orden en V , todos los coeficientes son cero, lo que contradice a $c_\gamma > 0$.

(d) Δ es linealmente independiente. En efecto, si $\sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha \alpha = 0$ entonces $\sigma = \sum_{\alpha \in \Delta: \lambda_\alpha > 0} \lambda_\alpha \alpha = \sum_{\beta \in \Delta: \lambda_\beta < 0} (-\lambda_\beta) \beta$ satisface $\sigma \geq 0$. De donde

$$0 \leq (\sigma, \sigma) = \left(\sum_{\substack{\alpha \in \Delta, \\ \lambda_\alpha > 0}} \lambda_\alpha \alpha, \sum_{\substack{\beta \in \Delta, \\ \lambda_\beta < 0}} (-\lambda_\beta) \beta \right) = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Delta, \\ \lambda_\alpha > 0, \lambda_\beta < 0}} (\lambda_\alpha)(-\lambda_\beta)(\alpha, \beta) \leq 0,$$

por tanto $\sigma = 0$. ■

Observación 3.2.5. Demostramos en la prueba anterior que si $\Delta \subset \Phi$ simple, entonces para todo $\alpha, \beta \in \Delta$, tales que $\alpha \neq \beta$ se tiene que $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Para $\alpha, \beta \in \Phi$, podemos medir el ángulo θ formado por α, β de la siguiente manera:

$$(\alpha - \beta, \alpha - \beta) = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2(\alpha, \beta),$$

por otro lado,

$$(\alpha - \beta, \alpha - \beta) = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2\|\alpha\| \cdot \|\beta\| \cos \theta.$$

Por lo tanto, $(\alpha, \beta) = \|\alpha\| \cdot \|\beta\| \cos \theta$. Luego, $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos \theta$. De donde,

$$0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta < 4.$$

Si $\alpha \neq \pm\beta$ y $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$, entonces la siguiente tabla muestra los posibles valores de θ .

$\langle \beta, \alpha \rangle$	$\langle \alpha, \beta \rangle$	θ	$\ \beta\ ^2 / \ \alpha\ ^2$
0	0	$\pi/2$	indefinido
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Cuadro 3.1: Ángulos entre raíces

Lema 3.2.6. Sean $\alpha, \beta \in \Phi$, tales que $\alpha \neq \pm\beta$.

(i) Si $(\alpha, \beta) > 0$ entonces $\alpha - \beta \in \Phi$.

(ii) Si $(\alpha, \beta) < 0$ entonces $\alpha + \beta \in \Phi$.

Demostración. (i) Notemos que $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ si, y sólo si $\langle \beta, \alpha \rangle > 0$; y además si $\langle \beta, \alpha \rangle > 0$ entonces $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ ó $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$. Si $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ entonces $s_\beta \alpha = \alpha - \langle \alpha, \beta \rangle \beta = \alpha - \beta \in \Phi$. Por otro lado, si $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$ entonces $s_\alpha \beta = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha = \beta - \alpha \in \Phi$, de donde $-(\beta - \alpha) \in \Phi$.

(ii) Si $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ entonces $\langle \alpha, -\beta \rangle > 0$, y por (i), tenemos que $\alpha - (-\beta) \in \Phi$. ■

Definición 3.2.7. Para cada $\alpha, \beta \in \Phi$ tales que $\alpha \neq \beta$, introducimos el conjunto

$$I_{\alpha, \beta} = \{i \in \mathbb{Z} \mid \beta + i\alpha \in \Phi\}.$$

Lema 3.2.8. Para cada $\alpha, \beta \in \Phi$ se tiene que $I_{\alpha, \beta}$ es un intervalo.

Demostración. Sean $I = I_{\alpha, \beta}$, $p = \min I$, $s = \max I$. Supongamos que existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $p < i < s$ y $i \notin I$. Consideremos $q, r \in I$ tales que $q = \max\{a \in I \mid a < i\}$, $r = \min\{a \in I \mid a > i\}$ y $p \leq q < i < r \leq s$ y $q+1, r-1 \notin I$. Luego por el Lema 3.2.6 como $(\beta + q\alpha) + \alpha \notin \Phi$ se tiene $\langle \beta + q\alpha, \alpha \rangle \geq 0$. De manera análoga, como $(\beta + r\alpha) - \alpha \notin \Phi$ entonces $\langle \beta + r\alpha, \alpha \rangle \leq 0$; por lo tanto $0 \leq \langle \beta, \alpha \rangle + q\langle \alpha, \alpha \rangle < \langle \beta, \alpha \rangle + r\langle \alpha, \alpha \rangle \leq 0$, lo cual es una contradicción. Luego concluimos que $I = [p, s]$. ■

3.3. Grupo de Weyl, diagrama de Coxeter, y la matriz de Cartan

Definición 3.3.1. Sea $\Phi \subset V$ un sistema de raíces. Se define el *grupo de Weyl* W como el subgrupo de $O(V)$ generado por las reflexiones s_α con $\alpha \in \Phi$.

Definición 3.3.2. Sea $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ un subconjunto de Φ que es un sistema simple. Definimos el *diagrama de Coxeter* Γ como la gráfica con n vértices y con $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ aristas entre los vértices i y j ; además si $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle > 1$, se dibuja una flecha de i a j si $\|\alpha_i\| > \|\alpha_j\|$ (respectivamente de j a i si $\|\alpha_j\| > \|\alpha_i\|$).

$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$	$\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$	Γ
-1	-1	$i \text{ --- } j$
-1	-2	$i \rightleftarrows j$
-2	-1	$i \rightrightarrows j$
-1	-3	$i \rightleftarrows j$

Cuadro 3.2: Algunos diagramas de Coxeter

Definición 3.3.3. Sea $\Delta \subset \Phi$ un sistema de raíces con sistema simple $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Se define la *matriz de Cartan* C , como $C_{ij} = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)$.

Proposición 3.3.4. La matriz de Cartan C satisface las siguientes condiciones.

- (i) $C \in \mathbb{Z}^{n \times n}$.
- (ii) Para todo $i = 1, \dots, n$ se tiene que $C_{i,i} = 2$.

- (iii) $C_{i,j} \leq 0$ para todo $i \neq j$.
- (iv) $C_{i,j} = 0$ si y sólo si $C_{j,i} = 0$.
- (v) C es positiva definida.
- (vi) C es simetrizable.

Demostración. Los primeros cuatro incisos se siguen de la definición. Mostremos (vi), Sea $D \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ diagonal con $D_{i,i} = (\alpha_i, \alpha_i)$, observemos que $(DC)_{i,j} = D_{i,i}C_{i,j} = (\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_i, \alpha_j) = 2(\alpha_i, \alpha_j)$. Por otro lado $(DC)_{j,i} = D_{j,j}C_{j,i} = (\alpha_j, \alpha_j)(\alpha_j, \alpha_i) = 2(\alpha_j, \alpha_i)$. Por tanto C es simetrizable. Para mostrar (v), observemos que C es positiva definida si, y sólo si DC es positiva definida. Pero DC expresa la métrica ya que $(DC)_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j)$ para todo i, j y por definición, la métrica es positiva definida. ■

3.4. Clasificación

Definición 3.4.1. Un sistema de raíces Φ es *irreducible* si $\Phi = \Phi_1 \dot{\cup} \Phi_2$ tal que $(\alpha, \beta) = 0$ para todo $\alpha \in \Phi_1$ y todo $\beta \in \Phi_2$, implica que $\Phi_1 = \emptyset$ ó $\Phi_2 = \emptyset$.

Teorema 3.4.2. Si Φ es un sistema de raíces irreducible, entonces el diagrama de Coxeter Γ es uno y sólo uno de la siguiente lista:

$\mathbb{A}_n :$	1 — 2 — 3 \cdots $n-1$ — n	$(n \geq 1)$
$\mathbb{B}_n :$	1 — 2 — 3 \cdots $n-1$ \Rightarrow n	$(n \geq 2)$
$\mathbb{C}_n :$	1 — 2 — 3 \cdots $n-1$ \Leftarrow n	$(n \geq 3)$
$\mathbb{D}_n :$	$ \begin{array}{ccccccc} & & & & n-1 & & \\ & & & & & & \\ & & & & n-2 & & \\ & & & & & & \\ 1 & - & 2 & \cdots & n-2 & - & n \end{array} $	$(n \geq 4)$
$\mathbb{E}_n :$	$ \begin{array}{ccccccc} & & & & n-2 & & \\ & & & & & & \\ & & & & n-3 & & \\ & & & & & & \\ 1 & - & 2 & \cdots & n-3 & - & n-1 & - & n \end{array} $	$(n = 6, 7, 8)$
$\mathbb{F}_4 :$	1 — 2 \Rightarrow 3 — 4	
$\mathbb{G}_2 :$	1 \Leftarrow 2	

Cuadro 3.3: Diagramas asociados a sistemas irreducibles

En particular, cada diagrama de Coxeter de un sistema de raíces es unión ajena de los diagramas \mathbb{A}_n a \mathbb{G}_2 , es decir, es unión ajena de los diagramas que aparecen en la tabla anterior.

Demostración. (1) Cada subdiagrama $\emptyset \neq \Gamma' \subset \Gamma$ es el diagrama de Coxeter de un sistema de raíces Φ' .

En efecto, sean Δ un sistema simple de n elementos y $\Delta' \subset \Delta$ las raíces que corresponden a los vértices de Γ' . Luego $\Phi' = \langle \Delta' \rangle_{\mathbb{R}} \cap \Phi$, entonces Φ' satisface: (R1), (R2), (R4) y para todo $\alpha, \beta \in \Phi'$, se tiene que

$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \langle \Delta' \rangle \cap \Phi$ por tanto también se cumple (R3). Además Δ' es un sistema simple de Φ' , pues es un subconjunto de vectores linealmente independientes. De donde Γ' es el diagrama de Coxeter asociado a Φ' .

- (2) El número de pares de vértices que están conectados en Γ es menor que n . En efecto, sea $\varepsilon = \sum_{i=1}^n e_i$, donde $e_i = \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$, entonces

$$0 < (\varepsilon, \varepsilon) = n + 2 \sum_{i < j} (e_i, e_j). \quad (3.3)$$

Supongamos que existe una arista en Γ' , entonces existen i, j índices tales que $(e_i, e_j) \neq 0$, luego se tiene que $4(e_i, e_j)^2 = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \cdot \frac{2\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \in \{1, 2, 3\}$. Por tanto $2(e_i, e_j) \leq -1$, por ello y (3.3) hay a lo máximo $n - 1$ pares de vértices conectados en Γ .

- (3) Γ no contiene ningún ciclo. Sea $\Gamma' \subset \Gamma$, por (1) Γ' debe satisfacer (2), y entonces Γ' no es un ciclo.
 (4) A lo máximo 3 aristas terminan en cada vértice de Γ .

Sean $\alpha \in \Delta$ y $\beta_1, \dots, \beta_k \in \Delta$ con $\langle \alpha, \beta_i \rangle < 0$. Por (3), se tiene que $\langle \beta_i, \beta_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$, pues de lo contrario tendríamos un triángulo conectado, lo cual contradice a (3). Sea $\beta_0 \in \langle \alpha, \beta_1, \dots, \beta_k \rangle$ tal que $\beta_0 \neq 0$ y $\langle \beta_0, \beta_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$; además satisface

$$\langle \alpha, \beta_0 \rangle \neq 0, \quad (3.4)$$

consecuentemente $\alpha = \sum_{i=1}^k \frac{\langle \alpha, \beta_i \rangle}{\langle \beta_i, \beta_i \rangle} \beta_i$, por tanto

$$1 = \left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{\|\alpha\|^2} \langle \alpha, \beta_i \rangle^2 \cdot \frac{1}{\|\beta_i\|^2} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^k \langle \alpha, \beta_i \rangle \langle \beta_i, \alpha \rangle.$$

Por (3.4) se tiene que $4 > \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \beta_i \rangle \langle \beta_i, \alpha \rangle$, de donde el número de aristas en Γ que terminan en α es menor que 4.

- (5) Sea $\Delta' \subset \Delta$ subconjunto tal que el subdiagrama $\Gamma' \subset \Gamma$ que corresponde a Δ' , es decir, el diagrama correspondiente asociado a Δ' , es de tipo \mathbb{A}_k como se muestra enseguida:

$$\Gamma' : \quad \begin{array}{c} \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_{k-1} \quad \beta_k \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \quad \Delta' = \{\beta_1, \dots, \beta_k\}.$$

Luego $\tilde{\Delta} = (\Delta \setminus \Delta') \cup \{\beta_1 + \dots + \beta_k\}$ define un sistema de raíces $\tilde{\Phi} = \langle \tilde{\Delta} \rangle_{\mathbb{R}} \cap \Phi$ cuyo diagrama de Coxeter $\tilde{\Gamma}'$ se obtiene de Γ' al identificar los vértices β_i con $i \in \{1, \dots, k\}$ en uno solo.

En efecto, es claro que $\tilde{\Delta}$ es linealmente independiente pues Δ lo es y $\tilde{\Phi}$ satisface (R1) ya que por inducción sobre i se tiene que $\beta_1 + \dots + \beta_i = s_{\beta_i}(\beta_1 + \dots + \beta_{i-1})$ es raíz. Además $0 \notin \tilde{\Phi}$ pues $0 \notin \Phi$ y $\tilde{\Phi}$ es finito pues Φ es finito. $\tilde{\Phi}$ cumple también (R2), (R3) por definición de $\tilde{\Phi}$. Además $\tilde{\Phi}$ cumple (R4) pues $\tilde{\beta} = \beta_1 + \dots + \beta_k$ implica $\langle \tilde{\beta}, \alpha \rangle = \langle \beta_1, \alpha \rangle + \dots + \langle \beta_k, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

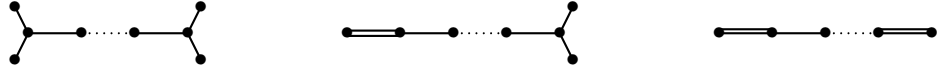
Por otro lado, de $\langle \beta_i, \beta_{i+1} \rangle = -1 = \langle \beta_{i+1}, \beta_i \rangle$ se tiene $(\beta_i, \beta_i) = (\beta_{i+1}, \beta_{i+1})$; de donde

$$(\tilde{\beta}, \tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^n (\beta_i, \beta_i) + 2 \sum_{i < j} (\beta_i, \beta_j) = (\beta_1, \beta_1) \left(n + \sum_{i < j} \langle \beta_i, \beta_j \rangle \right) = (\beta_1, \beta_1)(n - n + 1) = (\beta_1, \beta_1).$$

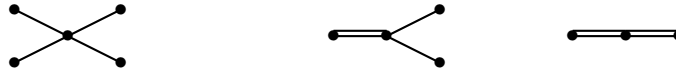
Tenemos que $\langle \tilde{\beta}, \tilde{\beta} \rangle = 2$, por lo tanto $\langle \alpha, \tilde{\beta} \rangle = 2 \frac{(\alpha, \tilde{\beta})}{(\tilde{\beta}, \tilde{\beta})} = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \beta_i \rangle \in \mathbb{Z}$.

Como $\tilde{\Delta}$ es un sistema simple en $\tilde{\Phi}$, se tiene que $\tilde{\Delta}$ es una base de $\tilde{\Phi}$. En efecto, sea $\lambda \in \tilde{\Phi}$, tal que $\lambda = \sum_{\alpha \in \tilde{\Delta} \setminus \tilde{\Delta}'} \lambda_\alpha \alpha + \tilde{\lambda} \tilde{\beta}$, si existe $\alpha \in \tilde{\Delta} \setminus \tilde{\Delta}'$ tal que $\lambda_\alpha > 0$ entonces $\tilde{\lambda} \geq 0$, y si existe $\alpha \in \tilde{\Delta} \setminus \tilde{\Delta}'$ tal que $\lambda_\alpha < 0$ entonces $\tilde{\lambda} \leq 0$.

(6) Γ no contiene como subdiagrama Γ' a ninguno de los siguientes diagramas:



En efecto, si Γ contiene uno de tales diagramas, entonces por (5) tendríamos que Γ' contendría a uno de los tres siguientes diagramas:



lo cual no es posible por (4).

Notemos que podemos suponer que Γ es conexo.

(7) Si Γ contiene una triple arista, entonces por (4) se tiene que $\Gamma \cong \mathbb{G}_2$.

(8) Si Γ contiene doble arista, entonces $\Gamma \cong \mathbb{B}_n, \mathbb{C}_n$ ó \mathbb{F}_4 .

En efecto, por (6) tenemos que Γ sólo puede contener una arista doble y es lineal, por tanto basta mostrar que Γ no contiene a las siguientes dos gráficas:



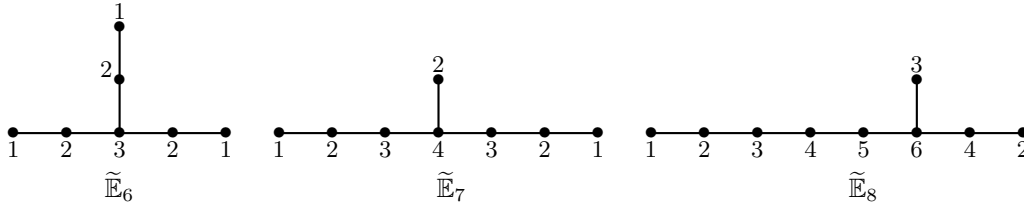
Notemos que la matriz de Cartan para (i) es $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Mientras que la matriz de Cartan para (ii) es $C' = C^T$. Calculando $C \cdot v$, donde $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, tenemos que $C \cdot v = 0$, de donde C no es definida positiva. Por lo que C' tampoco es positiva definida. Por lo tanto, los diagramas anteriores no están contenidos en Γ .

(9) Si Γ no contiene aristas múltiples, entonces Γ es $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, (n \geq 4)$ ó $\mathbb{E}_n, n = 6, 7, 8$.

En efecto, se tiene por (6) que Γ tiene a lo máximo un vértice de grado mayor que 2. Si no tiene ningún vértice de grado mayor que 2, entonces $\Gamma = \mathbb{A}_n$.

En caso contrario, si Γ tiene un vértice de grado 3, consideremos $q(x) = \frac{1}{2}x^T Cx = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i < j} x_i x_j$ que es positiva definida. Por ello Γ no contiene a ninguno de los siguientes diagramas;



Γ no puede contener ninguno de los diagramas anteriores, porque $q(u) = 0$ con v el vector indicado en cada diagrama. Luego como $\tilde{\mathbb{E}}_6 \not\subseteq \Gamma$, entonces al menos uno de los brazos de Γ es de longitud uno. Además, como $\tilde{\mathbb{E}}_7 \not\subseteq \Gamma$ tenemos que Γ no tiene dos brazos de longitud mayor o igual que tres. Luego, si Γ tiene dos brazos de longitud uno, entonces $\Gamma = \mathbb{D}_7$; en caso contrario $\Gamma = \mathbb{E}_n$ y como $\tilde{\mathbb{E}}_8 \not\subseteq \Gamma$, entonces $\Gamma = \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$. ■

Corolario 3.4.3. *El diagrama de Coxeter de Φ no depende del sistema simple $\Delta \subset \Phi$.*

Demostración. Cada sistema de raíces Φ tiene varios sistemas simples Δ , pero la definición del diagrama de Coxeter no depende del sistema simple, sino del orden, pues si Δ y Δ' son sistemas simples, existe un $s_\beta \in W$ tal que $\Delta' = \{s_\beta \alpha : \alpha \in \Delta\}$ y como $\langle s_\beta \alpha, s_\beta \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle$ se tiene lo deseado. ■

Teorema 3.4.4. *Cada diagrama en la lista del Teorema 3.4.2 puede realizarse como un diagrama de Coxeter de algún sistema de raíces.*

Demostración. La prueba de este Teorema se realiza caso por caso y no lo realizaremos en este trabajo. ■

Ejemplo 3.4.1. Sean \mathbb{A}_n y $\alpha_i = e_i - e_{i+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$, donde e_i es el i -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^{n+1} . Sabemos que $W = \langle s_{\alpha_i} \mid i = 1, \dots, n \rangle \cong S_{n+1}$ y que

$$\Phi = \{\beta \in V \mid \|\beta\| = 1, s_\beta \in W\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i - e_j) \mid i \neq j \right\};$$

por lo cual $\Delta = \{\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n\} \subset \Phi$ es sistema simple, donde $\widehat{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$. Luego para $i < j$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i - e_j) = \widehat{\alpha}_i + \widehat{\alpha}_{i+1} \cdots + \widehat{\alpha}_{j-1},$$

mientras que para $i > j$ tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i - e_j) = -\widehat{\alpha}_j - \widehat{\alpha}_{j+1} \cdots - \widehat{\alpha}_{i+1}.$$

Para calcular el diagrama de Coxeter,

$$s_{\widehat{\alpha}_{i+1}}(\widehat{\alpha}_i) = s_{\widehat{\alpha}_{i+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i - e_{i+1})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i - e_{i+2}).$$

Por otro lado,

$$s_{\widehat{\alpha}_{i+1}}(\widehat{\alpha}_i) = \widehat{\alpha}_i - \langle \widehat{\alpha}_i, \widehat{\alpha}_{i+1} \rangle \widehat{\alpha}_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i - e_{i+1} - \langle \widehat{\alpha}_i, \widehat{\alpha}_{i+1} \rangle e_{i+1} + \langle \widehat{\alpha}_i, \widehat{\alpha}_{i+1} \rangle e_{i+2}),$$

de donde $\langle \widehat{\alpha}_i, \widehat{\alpha}_{i+1} \rangle = -1$. De manera análoga $s_{\widehat{\alpha}_j}(\widehat{\alpha}_i) = \widehat{\alpha}_i$, entonces $\langle \widehat{\alpha}_i, \widehat{\alpha}_j \rangle = 0$, de donde $\langle \widehat{\alpha}_{i+1}, \widehat{\alpha}_i \rangle = -1$. Por lo tanto el diagrama de Coxeter es $\Gamma = \mathbb{A}_n$:

$$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \cdots n-1 \text{ --- } n.$$

Observación 3.4.5. Sistemas de raíces más generales que no necesariamente cumplen (R4) también se pueden clasificar; sólo hay unos pocos casos más: $\mathbb{H}_3, \mathbb{H}_4, \mathbb{I}_2(m), m = 5, 7, 8, 9 \cdots$, los casos $\mathbb{I}_2(6) = \mathbb{G}_2, \mathbb{I}_2(4) = \mathbb{B}_2$ que son los grupos de reflexión de un polígono.

3.5. Rango 2

Definición 3.5.1. El *rango* de un sistema de raíces Φ es la dimensión sobre \mathbb{R} de lo que genera Φ , es decir, $\dim\langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}}$.

En rango 2 la matriz de Cartan es de la forma:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -b \\ -c & 2 \end{bmatrix} \text{ con}$$

- (i) $b, c \geq 0$,
- (ii) $b = 0 \Leftrightarrow c = 0$,
- (iii) $bc < 3$.

bc	Γ	$\{b, c\}$
0	$\bullet \quad \bullet \quad \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_1$	$\{0, 0\}$
1	$\text{---} \quad \mathbb{A}_2$	$\{1, 1\}$
2	$\Rightarrow \Rightarrow \quad \mathbb{B}_2$	$\{1, 2\}$
3	$\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \quad \mathbb{G}_2$	$\{1, 3\}$

Cuadro 3.4: Diagramas de Coxeter a partir de matriz de Cartan en rango 2.

Proposición 3.5.2. Sea $\Phi \subset V$ un sistema de raíces, W el grupo de Weyl asociado a Φ y Δ un sistema simple. Entonces,

- (a) $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$,
- (b) $W\Delta = \Phi$.

Demostración. Sea $W' = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$. Para $\lambda \in \Phi^+$ con $\lambda = \sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha \alpha$ definimos $\text{ht}(\lambda) = \sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha \in \mathbb{N}$, la altura de λ .

Para $\mu \in \Phi^+$, sea $\lambda \in W'\mu \cap \Phi^+$ con $\text{ht}(\lambda)$ minimal. Luego $0 < (\lambda, \lambda) = \sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha (\lambda, \alpha)$, entonces existe $\alpha \in \Delta$ tal que $(\lambda, \alpha) > 0$ y $\lambda_\alpha > 0$. Si $\lambda \neq \alpha$, existe $\beta \in \Delta$ tal que $\beta \neq \alpha$ con $\lambda_\beta > 0$. Por lo tanto $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle \alpha = \lambda'$. Luego $\lambda'_\beta = \lambda_\beta > 0$, y $\lambda_\alpha > \lambda'_\alpha = \lambda_\alpha - \langle \lambda, \alpha \rangle$ de donde $s_\alpha(\alpha) = \lambda' \in W'\mu \cap \Phi^+$, pero $\text{ht}(\lambda') < \text{ht}(\lambda)$ lo que contradice la minimalidad de $\text{ht}(\lambda)$. Esto muestra que $\lambda = \alpha$ para algún $\alpha \in \Delta$.

Lo anterior muestra que $\Phi^+ \subset W'\Delta$ como $\Delta^+ = -\Delta^-$, entonces $\Phi \subset \Delta W'$. Luego $W'\Delta = \Phi$. Para ver que $W = W'$ notamos primero que $W' \subset W$. Luego, si $s_\beta \in W$ entonces $\beta \in \Phi$. Por lo anterior existen $w \in W'$ y $\alpha \in \Delta$ tal que $\beta = w\alpha$. Luego $s_\beta = s_{w\alpha} = ws_\alpha w^{-1} \in W$. Por ello W' contiene los generadores de W y consecuentemente $W = W'$. ■

Definición 3.5.3. Para todo $m \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\langle m \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es impar} \\ 2 & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases}$$

Observación 3.5.4. Sea $W = \langle s_1, s_2 \rangle$, con $s_i = s_{\alpha_i}, i = 1, 2$. Todos los elementos de W son de la forma:

$$\begin{aligned} w_1(m) &= \underbrace{s_1 s_2 \cdots \alpha_{\langle m \rangle}}_{m\text{-factores}} \\ w_2(m) &= \underbrace{s_1 s_2 \cdots \alpha_{\langle m+1 \rangle}}_{m\text{-factores}} \end{aligned}$$

Luego $\Phi = \{w_1(m)\alpha_i, w_2(m)\alpha_i \mid i = 1, 2, m \in \mathbb{Z}\}$.

Definición 3.5.5. Sea $W = \langle s_1, s_2 \rangle$, se define el orden de $s_1 s_2$ como $\text{orden}(s_1 s_2) = \text{orden}(s_2 s_1)$, y se denota con h .

Γ	orden
• •	2
—	3
\Rightarrow	4
\Leftrightarrow	6

Cuadro 3.5: Orden de Diagramas de Coxeter en rango 2.

Proposición 3.5.6. *En $W = \langle s_1, s_2 \rangle$, se tiene que*

$$\Phi^+ = \{w_1(m)\alpha_{(m+1)} \mid 0 \leq m < h\};$$

además $|\Phi^+| = h$, donde $h = \text{orden}(s_1 s_2)$.

Demostración. Sean $s_1 = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $s_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}$.

La prueba se hace por casos, es decir, verificamos para cada valor de $bc \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Si $bc = 0$, sabemos que $h = 2$ y además $\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Observemos que $w_1(0) = \alpha_1$, $w_1(1)\alpha_2 = \alpha_2$, por tanto

$$\Phi^+ = \{w_1(0)\alpha_1, w_1(1)\alpha_2\}.$$

Si $bc = 1$ sabemos que $h = 3$, y $\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}$. Se calcula de manera directa:

$$\begin{aligned} w_1(0)\alpha_1 &= \alpha_1, \\ s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 &= w_1(1)\alpha_2, \\ s_1 s_2(\alpha_1) = \alpha_2 &= w_1(2)\alpha_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Phi^+ = \{w_1(0)\alpha_1, w_1(1)\alpha_2, w_1(2)\alpha_1\}.$$

Si $bc = 2$, y sabemos que $h = 4$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_1\}$. Nuevamente se calcula de manera directa:

$$\begin{aligned} w_1(0)\alpha_1 &= \alpha_1, \\ s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 &= w_1(2)\alpha_1 = s_1 s_2(\alpha_1), \\ s_1(\alpha_2) = \alpha_2 + 2\alpha_1 &= w_1(1)\alpha_2 = s_2 s_1(\alpha_2), \\ \alpha_2 &= w_1(5)\alpha_2. \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado.

En caso de que $bc = 3$, sabemos que $h = 6$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_1, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$. De manera análoga, se realizan los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
 w_1(0)\alpha_2 &= \alpha_1 \\
 s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 &= w_1(4)\alpha_1 \\
 s_1(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2 &= w_1(2)\alpha_1 \\
 2\alpha_1 + \alpha_2 &= s_2(2\alpha_1 + \alpha_2) \\
 \alpha_2 &= w_1(5)\alpha_2 \\
 s_1(\alpha_2) = 3\alpha_1 + \alpha_2 &= w_1(1)\alpha_2 \\
 s_2(3\alpha_1 + \alpha_2) = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 &= w_1(3)\alpha_2 \\
 3\alpha_1 + 2\alpha_2 &= s_1(3\alpha_1 + 2\alpha_2).
 \end{aligned}$$

Por tanto $\Phi^+ = \{w_1(0)\alpha_2, w_1(4)\alpha_1, w_1(2)\alpha_1, w_1(5)\alpha_2, w_1(1)\alpha_2, w_1(3)\alpha_2\}$. ■

Observación 3.5.7. Si $bc \geq 4$ entonces $(s_1 s_2) = \infty$, y $W = \{w_1(m), w_2(m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ es un grupo infinito; y como $\Phi = W\Delta$, donde $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ entonces $\Phi^+ = \{d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 \in \Phi \mid d_1, d_2 \geq 0\}$. Se puede mostrar que $\Phi^+ = \{w_1(m)\alpha_{\langle m+1 \rangle}, w_2(m)\alpha_{\langle m \rangle} \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Capítulo 4

VARIABLES DE CONGLOMERADO EN FUNCIÓN DE UNA TRIANGULACIÓN

En éste capítulo se darán resultados interesantes acerca de como obtener las variables de conglomerado a partir de una triangulación, lo cual se adquiere del artículo de Schiffler [Sch], de donde se puede obtener de manera directa el fenómeno de Laurent para el tipo \mathbb{A}_n , por otro lado se define un carcaj a partir de una triangulación dada, para después definir dos categorías; una a partir del carcaj y otra a partir de la triangulación que resultarán ser categorías equivalentes, la notación y resultados nos referimos a [CCS08]. Finalmente, se hace una clasificación de los diagramas que son equivalentes bajo mutación al diagrama de tipo \mathbb{A}_n , lo cual puede ser consultado en el artículo [BV07].

4.1. Coeficientes y variables de una triangulación

En ésta sección, trabajaremos con álgebras de conglomerado de tipo finito del tipo A_n , en donde las semillas del álgebra de conglomerado están en biyección con las triangulaciones del polígono. El conglomerado de la semilla corresponde a las diagonales, mientras que los coeficientes de la semilla corresponden a las aristas frontera de la triangulación. El fenómeno de Laurent, descrito por Fomin y Zelevinsky en [FZ02], establece que dada una semilla arbitraria Σ , podemos expresar cualquier variable de conglomerado del álgebra de conglomerado como un polinomio de Laurent en las variables de conglomerado y los coeficientes de la semilla Σ .

Sea n un entero positivo y sea P un polígono regular con $n + 3$ vértices. Sabemos que una *diagonal* en P es un segmento de línea que conecta a dos vértices no adyacentes de P , y dos diagonales se *cortan* si ellas se intersectan en el interior del polígono. Sabemos que una triangulación T tiene n diagonales y $n + 3$ aristas frontera. Denotamos las aristas frontera de P como T_{n+1}, \dots, T_{2n+3} .

Las variables de conglomerado x_M de esta álgebra están en biyección con las diagonales M del polígono P , y los generadores de su semicampo de coeficientes están en biyección con las aristas frontera T_{n+1}, \dots, T_{2n+3} de P . Para ser más precisos, el semicampo de coeficientes es el semicampo tropical $\text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{2n+3})$. Los conglomerados están en biyección con las triangulaciones de P .

Dada una triangulación $T = \{T_1, \dots, T_n, T_{n+1}, \dots, T_{2n+3}\}$ de P , sea $x_T = \{x_1, \dots, x_n\}$ el correspondiente conglomerado, donde $x_i = x_{T_i}$ para simplificar la notación. Escogemos la semilla inicial (x, p, B) que consiste

de un conglomerado x , un vector coeficiente $p = (p_1^+, p_1^-, \dots, p_n^+, p_n^-) \in (\text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{2n+3}))^{2n}$ y una $(2n+3) \times n$ matriz $B = b_{ij}$ definida como sigue: Tomando algún conglomerado inicial, la matriz inicial $B = b_{ij}$ está dada por las condiciones $b_{ii} = 0, b_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ y $b_{ij} = 1$ (respectivamente $b_{ij} = -1$) si y sólo si $i \neq j$ y las aristas T_i, T_j están en el mismo triángulo y el sentido de rotación de T_i a T_j va con las manecillas del reloj (respectivamente si van contra las manecillas del reloj). El correspondiente vector de coeficientes inicial está dado por

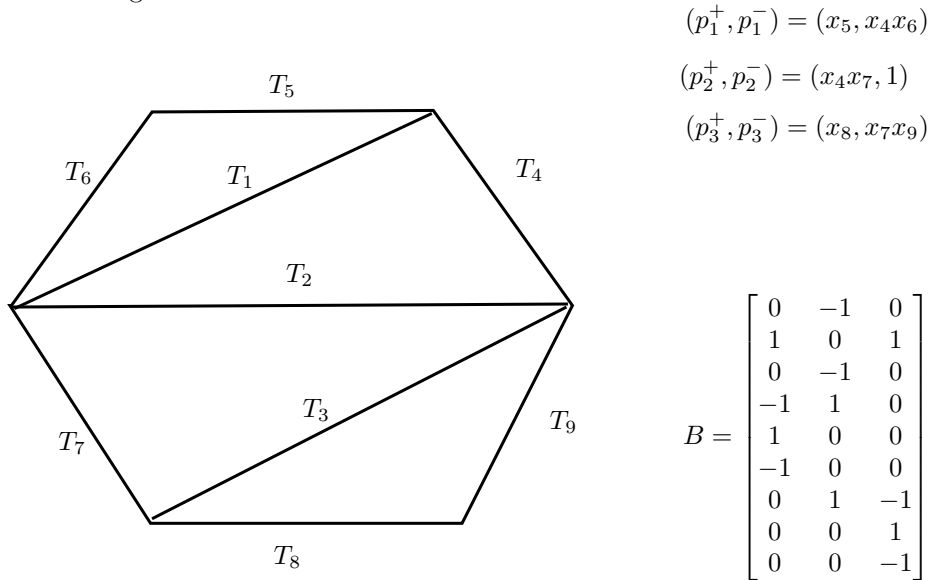
$$p_j^+ = \prod_{i \geq n+1 : b_{ij}=1} x_i$$

y

$$p_j^- = \prod_{i \geq n+1 : b_{ij}=-1} x_i.$$

Un ejemplo de rango 3 está dado a continuación.

Ejemplo 4.1.1. La triangulación serpiente (definida en [FZ03a]), junto con los coeficientes iniciales y su matriz inicial en rango 3.



4.1.1. T -Trayectorias

En ésta sección nos referimos al trabajo de Schiffler en [Sch] para demostrar que las variables de conglomerado se pueden obtener a partir de una triangulación dada. Sea $T = \{T_1, \dots, T_n, T_{n+1}, \dots, T_{2n+3}\}$ una triangulación del polígono P , donde T_1, \dots, T_n son las diagonales y T_{n+1}, \dots, T_{2n+3} son las aristas frontera. Sean a y b dos vértices no adyacentes sobre la frontera, denotaremos por $M_{a,b}$ a la diagonal que conecta a a y a b .

Definición 4.1.1. Una T -trayectoria α de a a b es una sucesión

$$\alpha = (a_0, \dots, a_{l(\alpha)} | i_1, \dots, i_{l(\alpha)})$$

tal que

(T1) $a = a_0, \dots, a_{l(\alpha)} = b$ son vértices de P .

(T2) $i_k \in \{1, \dots, 2n + 3\}$ tal que T_{i_k} conecta los vértices $a_{i_{k-1}}$ y a_{i_k} para cada $k \in \{1, \dots, l(\alpha)\}$.

(T3) $i_j \neq i_k$ si $j \neq k$.

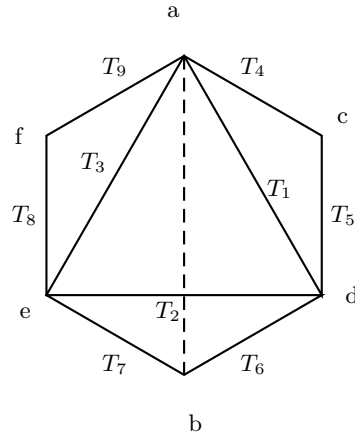
(T4) $l(\alpha)$ es impar.

(T5) T_{i_k} se cruza con $M_{a,b}$ si k es par.

(T6) Si $j < k$ y ambos T_{i_j} y T_{i_k} se cruzan con $M_{a,b}$, entonces el punto de cruce de T_{i_j} y $M_{a,b}$ está más cerca al vértice a que el punto de cruce de T_{i_k} con $M_{a,b}$.

Así, una T -trayectoria de a a b es una trayectoria con aristas de la triangulación T que no repite aristas cuyos puntos de cruce con $M_{a,b}$ son progresivos de a a b ; y clasificando las aristas en pares e impares en orden de su aparición, cada arista par se intersecta con $M_{a,b}$.

Ejemplo 4.1.2. Consideremos la siguiente triangulación; en tal triangulación exhibiremos las únicas dos T -trayectorias de a a b que son las siguientes, $\alpha_1 = (adeb|127)$ y $\alpha_2 = (aedb|326)$. En la figura, $M_{a,b}$ está representada por la línea punteada.



Para cualquier T -trayectoria $\alpha = (a_0, \dots, a_{l(\alpha)}|i_1, \dots, i_{l(\alpha)})$, asociamos un elemento $x(\alpha)$ en el álgebra de conglomerado dado por

$$x(\alpha) = \prod_{k \text{ impar}} x_{i_k} \prod_{k \text{ par}} x_{i_k}^{-1}. \quad (4.1)$$

En el ejemplo anterior se tiene que $x(\alpha_1) = \frac{x_1 x_7}{x_2}$ y $x(\alpha_2) = \frac{x_3 x_6}{x_2}$.

Definición 4.1.2. Se denota con $\mathcal{P}_T(a, b)$ al conjunto de las T -trayectorias de a a b .

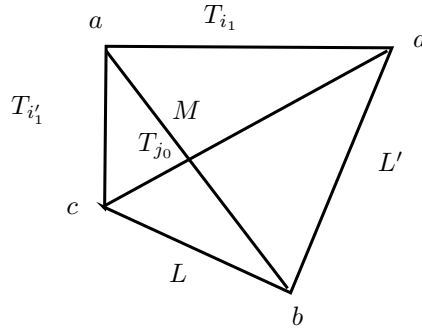
Lema 4.1.3. Sean $\alpha, \alpha' \in \mathcal{P}_T(a, b)$ con $\alpha \neq \alpha'$. Entonces $x(\alpha) \neq x(\alpha')$.

Demostración. Supongamos $x(\alpha) = x(\alpha')$. Entonces (T3) implica que el conjunto de aristas pares y aristas impares son las mismas en α que en α' . De (T5) y (T6) se sigue que el orden de las aristas impares es la misma, por tanto el orden de todas las aristas es el mismo, así $\alpha = \alpha'$. ■

Teorema 4.1.4. [*R. Schiffler*] Sean a, b dos vértices no adyacentes de P , sea $M = M_{a,b}$ la diagonal que los conecta, sea x_M la correspondiente variable de conglomerado. Entonces

$$x_M = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}(a,b)} x(\alpha). \quad (4.2)$$

Para la demostración del Teorema nos auxiliaremos de varios Lemas que anunciaremos a continuación. Sea T una triangulación del polígono P , sean a, b dos vértices de P y $M = M_{a,b}$ la diagonal que conecta a tales vértices. Supongamos que $M \notin T$. De todas las diagonales de T que cruzan a M existe una única T_{j_0} , tal que su punto de intersección con M está lo más cerca posible al vértice a . Entonces existe un único triángulo en T que tiene a T_{j_0} como un lado y al vértice a como uno de sus vértices. Denotamos por $T_{i_1}, T_{i'_1}$ las otras dos aristas del triángulo y sea c el punto común de $T_{i'_1}$ y T_{j_0} , y d el punto en común de T_{i_1} y T_{j_0} . Note que T_{i_1} y $T_{i'_1}$ pueden ser aristas frontera. Ahora consideramos el único cuadrilátero en el cual M y T_{j_0} son diagonales. Dos de sus lados son T_{i_1} y $T_{i'_1}$. Denotamos los otros lados por L y L' de tal forma que L es lado opuesto a T_{i_1} como muestra la siguiente figura. Usaremos todo lo anterior para la prueba en el resto de la sección.



- Lema 4.1.5.** (a) Si $T_j \in T$ cruza a L (respectivamente a L'), entonces T_j cruza a M .
 (b) Si $T_j \in T$ es adyacente a a , entonces T_j no cruza a L ni a L' .
 (c) Si $T_j \in T$ cruza a M y no cruza a L (respectivamente L'), entonces T_j es adyacente a c (respectivamente a d .)

Demostración. Demostraremos primero (b). Si T_j cruza a L ó a L' , entonces cruza a T_{j_0} , lo cual es imposible dado que T es una triangulación. Ahora demostraremos (c). Dado que T_j no cruza a L ni a T_{j_0} tiene que ser adyacente al vértice c . De manera similar para L' . Para demostrar (a), supongamos que T_j cruza a L entonces es adyacente al vértice d o cruza a L' pues no cruza a T_{j_0} ■

Definición 4.1.6. Denotaremos por $\mathcal{P}_T(a, b)_j$ al subconjunto de $\mathcal{P}_T(a, b)$ que contiene a todas las T -trayectorias α tales que empiezan en la arista T_j , es decir $i_1 = j$, y denotamos por $\mathcal{P}_T(a, b)_{-j}$ al subconjunto de $\mathcal{P}_T(a, b)$ que contiene a todas las T -trayectorias tales que no contienen la arista T_j . Similarmente, denotaremos por $\mathcal{P}_T(a, b)_{j,k}$ al subconjunto de $\mathcal{P}_T(a, b)_j$ que contiene a todas las T -trayectorias que comienzan con las aristas $T_j T_k$, es decir $i_1 = j$ y $i_2 = k$, finalmente denotaremos por $\mathcal{P}_T(a, b)_{j,-k}$ al subconjunto de $\mathcal{P}_T(a, b)_j$ que contiene a todas las T -trayectorias que comienzan en la arista T_j y que no contienen la arista T_k .

Lema 4.1.7. $\mathcal{P}_T(a, b) = \mathcal{P}_T(a, b)_{i_1} \dot{\cup} \mathcal{P}_T(a, b)_{i'_1}$.

Demostración. Sea $\alpha = (a_0, \dots, a_{l(\alpha)} | j_1, \dots, j_{l(\alpha)})$ un elemento arbitrario de $\mathcal{P}_T(a, b)$. Sabemos que $T_{j_1} \in T$ y que uno de los puntos finales es el vértice a . Más aún T_{j_2} cruza a M por la propiedad (T5) de las T -trayectorias. Denotaremos por P_a y P_b a las dos partes del polígono obtenido al cortarlo a lo largo de T_{j_0} , donde el vértice a está en la parte P_a mientras que el vértice b está en la parte P_b . La parte P_a también contiene la cuerda T_{j_1} mientras que la parte P_b contiene a todas las diagonales de T que cruzan a M y por tanto P_b contiene a T_{j_2} . Consecuentemente, las diagonales T_{j_1}, T_{j_2} y T_{j_0} comparten un punto final, el cual es c o d . Entonces existen dos posibilidades $T_{j_1} = T_{i_1}$ o $T_{j_1} = T_{i'_1}$. ■

Lema 4.1.8. (a) $\mathcal{P}_T(a, b)_{i_1} = \mathcal{P}_T(a, b)_{i_1, j_0} \dot{\cup} \mathcal{P}_T(a, b)_{i_1, -j_0}$.

(b) $\mathcal{P}_T(a, b)_{i'_1} = \mathcal{P}_T(a, b)_{i'_1, j_0} \dot{\cup} \mathcal{P}_T(a, b)_{i'_1, -j_0}$.

Demostración. Por construcción, T_{j_0} es la arista de la triangulación T tal que su punto de cruce con M es el punto más cercano del vértice a . Por tanto, el resultado se sigue de la condición (T6). ■

Sea $\gamma = (c_0, \dots, c_{l(\gamma)} | j_1, \dots, j_{l(\gamma)})$ una T -trayectoria de c a b . Supongamos primero que $j_1 = j_0$, entonces $c_1 = d$. En este caso, sea $f(\gamma)$ la trayectoria obtenida de γ al reemplazar la primera arista j_0 por i_1 y a $c_0 = c$ por a , es decir

$$f(\gamma) = (a, c_1, \dots, c_{l(\gamma)} | i_1, j_2, \dots, j_{l(\gamma)}).$$

Supongamos ahora que $j_k \neq j_0$ para todo k . En este caso, sea $g(\gamma)$ la composición de las trayectorias $(a, d, c | i_1, j_0)$ y γ , esto es

$$g(\gamma) = (a, d, c_0, \dots, c_{l(\gamma)} | i_1, j_0, j_1, \dots, j_{l(\gamma)}).$$

Tenemos que los elementos $f(\gamma), g(\gamma)$ son elementos de $\mathcal{P}_T(a, b)$. En efecto, las propiedades (T1), (T2) y (T4) son inmediatas, y (T5) se sigue del Lema 4.1.5 (a). Para mostrar (T3), necesitamos probar que $i_1 \neq j_k$ para todo k ; pero esto se sigue del Lema 4.1.5 (b) y del hecho de que T_{i_1} es adyacente a a . Finalmente (T6) se sigue, pues el punto de cruce de T_{j_0} y M está lo más cercano posible a a .

Lema 4.1.9. Las funciones f, g inducen biyecciones:

$$f : \mathcal{P}_T(c, b)_{j_0} \longrightarrow \mathcal{P}_T(a, b)_{i_1, -j_0} \quad y \quad g : \mathcal{P}_T(c, b)_{-j_0} \longrightarrow \mathcal{P}_T(a, b)_{i_1, j_0},$$

además

$$x(f(\gamma)) = \frac{x_{i_1}}{x_{j_0}} x(\gamma) \quad y \quad x(g(\gamma)) = \frac{x_{i_1}}{x_{j_0}} x(\gamma). \quad (4.3)$$

Demostración. Las fórmulas en (4.3) se siguen directamente de la definición de f y g . Esas fórmulas junto con el Lema 4.1.3 implican la inyectividad de f y g . Para mostrar la sobreyectividad de f , supongamos que $\mathcal{P}_T(a, b)_{i_1, -j_0}$ no es vacía y sea $\alpha \in \mathcal{P}_T(a, b)_{i_1, -j_0}$. Digamos

$$\alpha = (a, d, a_2, \dots, a_{l(\alpha)} | i_1, j_2, \dots, j_{l(\alpha)}).$$

Necesitamos probar que la trayectoria

$$\gamma = (c, d, a_2, \dots, a_{l(\alpha)} | j_0, j_2, \dots, j_{l(\alpha)})$$

es un elemento de $\mathcal{P}_T(c, b)_{j_0}$. Las condiciones (T1),(T2),(T4) se cumplen pues $\alpha \in \mathcal{P}_T(a, b)$. La condición (T3) se cumple pues la trayectoria α no contiene la arista T_{j_0} y la condición (T6) se cumple del Lema 4.1.5(a). Más aún, como $\mathcal{P}_T(a, b)_{i_1, -j_0}$ es no vacío, existe una diagonal en $T \setminus \{T_{j_0}\}$ la cual es adyacente a d y cruza a M . Por Lema 4.1.5(c), se sigue que cualquier diagonal en $T \setminus \{T_{j_0}\}$ que cruza a M también cruza L . Entonces γ satisface la condición (T5) pues $\alpha \in \mathcal{P}_T(a, b)$. Esto muestra que $\gamma \in \mathcal{P}_T(c, b)$, y como γ comienza con la arista j_0 , tenemos que $\gamma \in \mathcal{P}_T(c, b)_{j_0}$. Por tanto f es sobreyectiva. Mostremos que g es sobreyectiva. Sea $\alpha \in \mathcal{P}_T(a, b)_{i_1, j_0}$, digamos

$$\alpha = (a, d, c, a_3, \dots, a_{l(\alpha)} | i_1, j_0, j_3, \dots, j_{l(\alpha)}).$$

Debemos mostrar que

$$\gamma = (c, a_3, \dots, a_{l(\alpha)} | j_3, \dots, j_{l(\alpha)}) \in \mathcal{P}_T(c, b)_{j_0}.$$

Las condiciones (T1)-(T4) se cumplen para γ pues $\alpha \in \mathcal{P}_T(a, b)$ y la condición (T6) se cumple por el Lema 4.1.5 (a). Mostremos que se cumple (T5), por lo cual debemos probar que cualquier arista par de γ cruza a L . Como $\alpha \in \mathcal{P}_T(a, b)$ sabemos que cada arista par de γ cruza a M . Por el Lema 4.1.5(c), si existe una arista par de γ que no cruza a L entonces ésta arista es adyacente a c . Como γ comienza en c su primer arista par es T_{j_4} que no puede ser adyacente a c ; entonces T_{j_4} cruza a M y a L , de la misma manera sus aristas pares $T_{j_{2m}}$ no son adyacentes a c , por tanto $T_{j_{2m}}$ cruza a M y a L . Entonces α satisface (T6) así que cada arista par de γ cruza a M y a L . Lo cual muestra (T5). Por tanto $\gamma \in \mathcal{P}_T(c, b)_{j_0}$ y g es sobreyectiva. ■

Lema 4.1.10. (a) $\sum_{\gamma \in \mathcal{P}_T(c, b)} x(\gamma) \frac{x_{i_1}}{x_{j_0}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_T(a, b)_{i_1}} x(\alpha)$.

(b) $\sum_{\gamma \in \mathcal{P}_T(d, b)} x(\gamma) \frac{x_{i'_1}}{x_{j_0}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_T(a, b)_{i'_1}} x(\alpha)$.

Demostración. La primera parte se sigue del Lema 4.1.8(a), Lema 4.1.9 y del hecho de que $\mathcal{P}_T(c, b) = \mathcal{P}_T(c, b)_{j_0} \dot{\cup} \mathcal{P}_T(c, b)_{-j_0}$. La segunda parte del Lema se sigue por simetría. ■

Prueba del Teorema 4.1.4

Para cualquier $T_i \in T$, sea $e(T_i, M) \in \{0, 1\}$ el número de veces que se crucen las diagonales M y T_i . Entonces el número total de cruces de M con T es $e(T, M) = \sum_{T_i \in T} e(T_i, M)$.

Probaremos el Teorema por inducción sobre $e(T, M)$. Si $e(T, M) = 0$, entonces $M = T_i$ para algún $i \in 1, \dots, n$. En este caso, ningún elemento de T se cruza con M y por la condición (T5), el conjunto $\mathcal{P}_T(a, b)$ contiene exactamente un elemento $(a, b|i)$. Así que se tiene

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{P}_T(a, b)} x(\alpha) = x_i = x_M.$$

Supongamos ahora que $e(T, M) \geq 1$. Como antes, consideramos el único cuadrilátero en T en el cual M y T_{j_0} son sus diagonales. Entonces, en el álgebra de conglomerado asociada a la triangulación T , tenemos la siguiente relación de intercambio

$$x_M x_{j_0} = x_{i_1} x_L + x_{i'_1} x_{L'}. \quad (4.4)$$

Más aún, cualquier diagonal en T que cruza a L (o L') por el Lema 4.1.5(a) también cruza a M y además T_{j_0} cruza a M pero no cruza ni a L ni a L' . Entonces $e(T, L) < e(T, M)$ y $e(T, L') < e(T, M)$, y por hipótesis

de inducción

$$x_L = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_T(c,b)} x(\gamma) \quad \text{y} \quad x'_L = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_T(d,b)} x(\gamma).$$

Así, podemos escribir la ecuación (4.4) como

$$x_M = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_T(c,b)} x(\gamma) \frac{x_{i_1}}{x_{j_0}} + \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_T(d,b)} x(\gamma) \frac{x'_{i'_1}}{x_{j_0}}.$$

Por el Lema 4.1.10 se tiene que

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{P}_T(c,b)} x(\gamma) \frac{x_{i_1}}{x_{j_0}} + \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_T(d,b)} x(\gamma) \frac{x'_{i'_1}}{x_{j_0}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_T} (a,b)_{i'_1} x(\alpha) + \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_T} (a,b)_{i_1} x(\alpha).$$

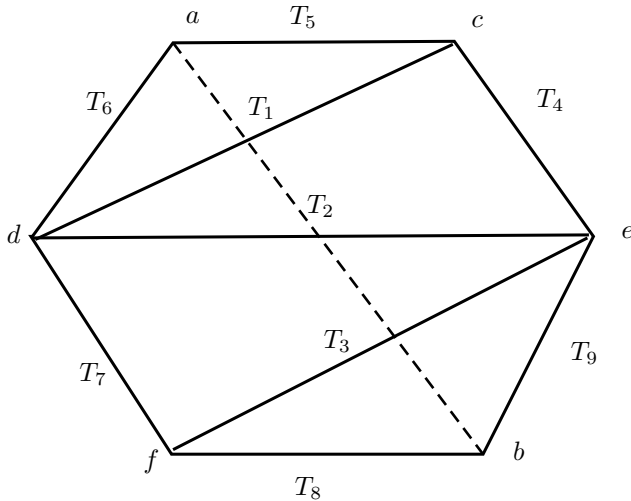
Por el Lema 4.1.7 tenemos

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{P}_T} (a,b)_{i'_1} x(\alpha) + \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_T} (a,b)_{i_1} x(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_T(a,b)} x(\alpha).$$

Por tanto

$$X_M = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_T(a,b)} x(\alpha).$$

Ejemplo 4.1.3. Consideremos la triangulación T indicada en la siguiente figura. Fijemos los vértices a, b del polígono P . Sea M la diagonal que los conecta, que en la figura aparece como una diagonal punteada y notemos que $\mathcal{P}_T(a,b) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$, donde



$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (a, c, d, e, f, b|5, 1, 2, 3, 8), \\
\alpha_2 &= (a, d, c, e, d, f, e, b|6, 1, 4, 2, 7, 3, 9), \\
\alpha_3 &= (a, d, c, e, f, b|6, 1, 4, 3, 8), \\
\alpha_4 &= (a, d, e, b|6, 2, 9), \\
\alpha_5 &= (a, c, d, f, e, b|5, 1, 7, 3, 9).
\end{aligned}$$

Por el Teorema 4.1.4 tenemos que

$$x_M = \frac{x_5 x_2 x_8}{x_1 x_3} + \frac{x_6 x_4 x_7 x_9}{x_1 x_2 x_3} + \frac{x_6 x_4 x_8}{x_1 x_3} + \frac{x_6 x_9}{x_2} + \frac{x_5 x_7 x_9}{x_1 x_3}.$$

4.2. El Carcaj de una triangulación

En esta sección se mostrará la construcción de un carcaj a partir de una triangulación.

Carcajes de tipo conglomerado

Sea X_n un diagrama de Dynkin simplemente enlazado, es decir de tipo $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_n$ de rango n y de tipo finito. Cada conglomerado C de un álgebra de conglomerado de rango n está asociado a su matriz cuadrada B_C antisimetrizable cuyas filas y columnas están indexadas por las variables de conglomerado del conglomerado C . En el caso simplemente enlazado, las entradas de la matriz B_C están en el conjunto $\{-1, 0, 1\}$ por lo cual es fácil y conveniente describir tales matrices usando gráficas orientadas, descritas en la definición 2.3.9. Dicha gráfica orientada es llamada *el carcaj asociado al conglomerado*, C y es denotado por Q_C . Es bien conocido que todos los triángulos en estos carcajes están orientados de una forma cíclica. El procedimiento de mutación de conglomerados contiene en particular una regla de mutación para las matrices, la cual puede ser trasladada a una regla de mutación para carcajes asociados. En el caso simplemente enlazado, se da de la siguiente manera: sea C un conglomerado en un álgebra de conglomerado de tipo simplemente enlazado. La mutación $\mu_i(Q_C)$ del carcaj Q_C en el vértice i es descrita enseguida. Primero, todas las flechas incidentes a i en Q_C cambian de dirección en el carcaj mutado. Luego, para cada par de flechas

$$j \longrightarrow i \quad \text{y} \quad i \longrightarrow k$$

en Q_C , la flecha que sale del vértice j y llega al vértice k está en el carcaj mutado si y sólo si la flecha que sale de k y llega al vértice j no está en Q_C . Las demás flechas de Q_C no cambian en el carcaj mutado. Por definición, una *trayectoria más corta* en el carcaj Q_C , es una trayectoria orientada sin flechas repetidas contenida en una subgráfica de Q_C la cual es ciclo.

Definición 4.2.1. Sea Q_C el carcaj asociado al conglomerado C . Para cada flecha

$$i \longrightarrow j$$

en Q_C , una relación $Rel_{i,j}$ queda definida como sigue. Consideremos el conjunto de trayectorias más cortas de j a i :

- Si hay exactamente dos trayectorias distintas c y c' entonces $c \sim c'$.
- Si existe una sola trayectoria c , entonces $c = 0$.
- Si no existe tal trayectoria, entonces no hay relación.

Para cada conglomerado C , definimos la categoría abeliana $\text{Mod } Q_C$ de representaciones del carcaj Q_C módulo las relaciones $\text{Rel}_{i,j}$ para todas las flechas de Q_C .

Observación 4.2.2. Existe una correspondencia natural entre los vértices del carcaj y los simples de $\text{Mod } Q_C$. Así, la clase de isomorfía del módulo simple asociado al vértice i será denotado por α_i .

Denotaremos por $\text{Ind}(Q_C)$ al conjunto de clases de isomorfía de inescindibles de $\text{Mod } Q_C$.

Proposición 4.2.3. Sea $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ un conglomerado en un álgebra de conglomerado de tipo Dynkin y simplemente enlazado. Sea V el conjunto de todas las variables de conglomerados para esta álgebra de conglomerado. Existe una biyección $\text{Ind}(Q_C) \rightarrow V \subset C, \alpha \mapsto w_\alpha$ tal que $w_\alpha = \frac{P(u_1, \dots, u_n)}{\prod_i u_i^{n_i}}$, donde P es un polinomio que sólo tiene coeficientes positivos, no divisible por u_i para toda i y $n_i = n_i(\alpha)$ es la multiplicidad del módulo simple α_i en el módulo α .

Demostración en el caso \mathbb{A}_n . Sea α una raíz positiva con vértices a, b . Por el Teorema 4.1.4 se tiene que

$$x(\alpha) = \sum_{\alpha_i \in \mathcal{P}(a,b)} x(\alpha_i).$$

Por otro lado, para todo $\alpha_i \in \mathcal{P}(a, b)$ se tiene que

$$x(\alpha_i) = \prod_{k \text{ impar}} x_{i_k} \prod_{k \text{ par}} x_{i_k}^{-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= \sum_{\alpha_i \in \mathcal{P}(a,b)} x(\alpha_i) = \sum_{\alpha_i \in \mathcal{P}(a,b)} \prod_{k \text{ impar}} x_{i_k} \prod_{k \text{ par}} x_{i_k}^{-1} \\ &= \frac{\sum_{\alpha_i \in \mathcal{P}(a,b)} \prod_{k \text{ impar}} x_{i_k}}{\prod_{k \text{ par}} x_{i_k}} \end{aligned}$$

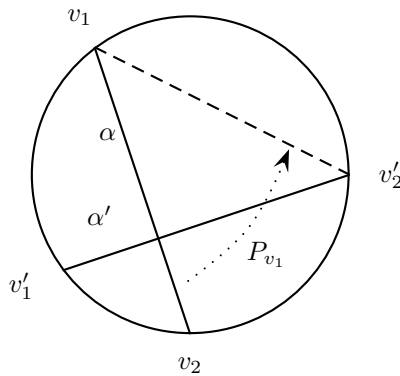
de esta última ecuación se tiene que, el numerador sólo tiene coeficientes positivos y además cada x_i en el denominador no divide al numerador, pues si esto es cierto entonces todas las T - trayectorias que cruzan a α , contienen una vez a α_i al cruzar en una posición par, lo cual no es cierto en general.

Triangulaciones y diagonales

Sea n un entero no negativo y T una triangulación de un polígono regular con $n + 3$ vértices. Las diagonales del polígono serán llamadas *raíces*, llamaremos *negativas* a las raíces que pertenecen a T y *positivas* a las otras. Sea Φ_+ el conjunto de raíces positivas con respecto a T y sea I el conjunto de raíces negativas. Por convención, la raíz negativa correspondiente a $i \in I$ se denotará como $-\alpha_i$. Si dos raíces negativas $-\alpha_i, -\alpha_j$ pertenecen a un mismo triángulo en T , definimos una relación parcial $<$ como sigue: sea x el vértice en

común, entonces $-\alpha_i < -\alpha_j$ si la rotación con ángulo mínimo alrededor de x que envía la línea de $-\alpha_i$ a la línea de $-\alpha_j$ está en dirección positiva (en contrasentido de las manecillas del reloj).

Definimos el *soporte* $\text{Supp } \alpha \subseteq I$, de una raíz positiva α , como el conjunto de raíces negativas que cruzan a α . Una raíz positiva α está relacionada con otra raíz positiva α' por un *movimiento elemental de pivoteo* si las *diagonales asociadas* que son aquellas que tienen un vértice de α y un vértice de α' y uno de dichos vértices es un vértice del borde (llamado *pivote*), los otros vértices de α y α' son vértices de una arista exterior del polígono y la rotación alrededor del pivote es positiva de α a α' . Denotaremos por P_v al movimiento elemental de pivoteo con pivote v . Una *trayectoria de pivoteo* de una raíz positiva α a una raíz positiva α' es una sucesión de movimientos elementales de pivoteo empezando en α y terminando en α' . En la siguiente figura se muestra un movimiento elemental de pivoteo, donde la diagonal asociada está representada por la diagonal a rayas y el pivoteo está representado por una curva punteada.



Gráficas y árboles

Dada una triangulación T , podemos definir un árbol planar t_T como sigue. Sus vértices son los triángulos de T y las aristas están dadas de la siguiente forma: existe una arista del vértice a al vértice b en t_T si los correspondientes triángulos a y b en T son adyacentes. Así, los vértices tienen grado 1, 2 ó 3. A los vértices de grado 1 los llamaremos *hojas*. Además t_T es un árbol porque es conexo ya que las triangulaciones son conexas, y no hay ciclos porque si hubiera un ciclo en el árbol entonces provendría de dos triángulos adyacentes, que tienen otro triángulo adyacente en común, lo cual no puede suceder pues la triangulación es planar y por tanto no existe un triángulo que es adyacente a otros dos triángulos adyacentes. Se puede observar que por cada triángulo que tiene dos aristas que son contorno de la triangulación producen una hoja en t_T . También podemos definir una gráfica Q_T de la siguiente manera: los vértices de Q_T son las aristas interiores de T y existe una flecha en Q_T del vértice a al vértice b , si las interiores de a y b en T pertenecen al mismo triángulo. De hecho, es posible definir la gráfica Q_T empezando del árbol t_T ; los vértices de Q_T son las aristas de t_T , y existe una arista entre dos vértices de Q_T si las correspondientes aristas de t_T tienen un vértice en común. La equivalencia con esta última definición es obvia.

Una *rama* es una arista e de t_T tal que al menos tiene un vértice con grado 1.

Carcajes

Sea T una triangulación. Definido el carcaj Q_T en la sección anterior, lo consideramos sin orientación y recordemos que hay una biyección entre los vértices de Q_T e I , donde I es el conjunto que contiene a las

raíces negativas. Ponemos un punto que será un vértice en medio de cada raíz negativa en T y una arista entre dos vértices si las raíces correspondientes a tales vértices pertenecen a un mismo triángulo de T . Sabemos que dos raíces negativas $-\alpha_i, -\alpha_j$ son comparables con la relación $<$ definida en la sección de Triangulaciones y diagonales. La orientación de la arista de los vértices i, j respectivamente a $-\alpha_i, -\alpha_j$ es

$$i \longrightarrow j$$

si $-\alpha_i < -\alpha_j$. De esta descripción se sigue que todo triángulo en Q_T está orientado. En seguida se muestran dos ejemplos, uno de árboles y otro de gráficas definidos a partir de una triangulación.



Árbol t_T (en líneas punteadas) y Gráfica $Q_{T'}$ (en líneas a rayas) definidas por una triangulación

T y T' respectivamente.

Es fácil ver que de la triangulación serpiente se obtiene el carcaj de tipo \mathbb{A}_n .

4.3. Una equivalencia de Categorías

En esta sección se mostrará una equivalencia entre una categoría que está formada por las raíces positivas llamada *Categoría de Diagonales* y la categoría de módulos sobre Q_T .

Categorías de diagonales

Podemos definir una categoría aditiva \mathbb{C} -lineal combinatoria como sigue. Los objetos son las combinaciones lineales positivas de raíces positivas. Por aditividad es suficiente definir los morfismos entre raíces positivas. El espacio de morfismos de una raíz positiva α a una raíz positiva α' es un cociente del espacio vectorial sobre \mathbb{C} generado por las trayectorias de pivoteo de α a α' . El subespacio que define el cociente está generado por las llamadas *relaciones de malla*, dadas de la siguiente forma: para cualquier par de raíces positivas α y α' tal que α está relacionada con α' por dos movimientos elementales de pivoteo consecutivos con distintos pivotes, definimos la relación malla como $P_{v'_2}P_{v_1} = P_{v'_1}P_{v_2}$ donde v_1, v_2 (respectivamente v'_1, v'_2) son los vértices de α (respectivamente α') tales que $P_{v'_1}P_{v_2} = \alpha'$. Es decir, cualesquiera dos movimientos elementales de pivoteo consecutivos usando diferentes pivotes pueden en algún sentido ser “intercambiados”.

En esta relación, las raíces negativas o aristas exteriores son permitidas bajo las siguientes convenciones:

- Si una de las aristas intermedias $P_{v_2}\alpha$ ó $P_{v_1}\alpha$ es una arista exterior, el correspondiente término en la relación de malla es reemplazado por cero.
- Si una de las aristas intermedias $P_{v_2}\alpha$ ó $P_{v_1}\alpha$ es una raíz negativa, el correspondiente término en la relación de malla es reemplazado por cero.

Más generalmente, una relación de malla es una igualdad entre dos trayectorias de pivoteo las cuales difieren sólo en dos movimientos elementales de pivoteo consecutivos por tal cambio.

Así, podemos definir el conjunto de morfismos de una raíz positiva α a una raíz positiva α' como el cociente del espacio vectorial sobre \mathbb{C} generado por las trayectorias de pivoteo de α a α' por el subespacio generado por las relaciones de malla.

Por tanto, la imagen de una trayectoria de pivoteo en el espacio de morfismos es el morfismo cero ó bien sólo depende de la clase de trayectoria de pivoteo módulo la relación de equivalencia sobre el conjunto de trayectorias de pivoteo generado por las relaciones malla con términos no cero.

Podemos definir una categoría \mathbb{C} -lineal abeliana $\text{Mod } Q_T$ como sigue. Es la categoría de módulos sobre el carcaj Q_T con las siguientes relaciones llamadas *relaciones de triángulos*: en cualquier triángulo, la composición de dos flechas sucesivas es cero. Las relaciones de triángulo las denotaremos con $\langle I_T \rangle$.

Definamos el álgebra de caminos $A_T = kQ_T / \langle I_T \rangle$. De aquí en adelante los $kQ_T / \langle I_T \rangle$ -módulos serán denotados simplemente como Q_T -módulos asumiendo que se trabaja sobre el álgebra A_T .

Denotaremos por $Q_{\text{Supp } \alpha}$ al subcarcaj pleno de Q_T inducido por los vértices asociados a $\text{Supp } \alpha$.

Lema 4.3.1. *Si α es raíz positiva entonces $Q_{\text{Supp } \alpha}$ es conexo como subconjunto del carcaj Q_T .*

Demostración. Sean $-\alpha_i, -\alpha_j$ dos diagonales distintas en el soporte de α . Mostraremos que existe una trayectoria sin orientación de i a j en $Q_T \cap Q_{\text{Supp } \alpha}$. Las diagonales $-\alpha_i, -\alpha_j$ cortan al polígono en 3 partes. Denotamos por $R_{i,j}$ la parte que contiene a $-\alpha_i, -\alpha_j$. La prueba es por inducción sobre m que es el número de raíces negativas en $R_{i,j}$. Si $m = 1$, entonces $-\alpha_i = -\alpha_j$ y no hay nada que probar. Supongamos que $m > 1$, y sea Δ el único triángulo en T que contiene a $-\alpha_i$ y que está en $R_{i,j}$. Como α intersecta a $-\alpha_i$ y $-\alpha_j$, entonces tiene que intersectar exactamente uno de los dos lados diferentes de $-\alpha_i$ en Δ , el cual no puede ser una arista del polígono (o cuerda exterior de T), por tanto es una raíz negativa que llamaremos $-\alpha_k$. Así, existe una arista entre $-\alpha_i$ y $-\alpha_j$ en Q_T y $i, k \in \text{Supp } \alpha$. Y podemos asumir por inducción que existe una trayectoria sin orientar en $Q_{\text{Supp } \alpha}$ de k a j . ■

El Funtor $\Theta : C_T \longrightarrow \text{Mod } Q_T$

Definiremos un funtor \mathbb{C} -lineal aditivo de C_T a $\text{Mod } Q_T$. Sobre objetos, es suficiente por aditividad definir Θ sobre raíces positivas. La imagen de la raíz positiva es el módulo $(M^\alpha, f^\alpha) = (M_i^\alpha, f_{ij}^\alpha)$ definido por

$$M_i^\alpha = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } i \in \text{Supp } \alpha, \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases} \quad \text{y} \quad f_{ij}^\alpha = \begin{cases} \text{Id}_{\mathbb{C}} & \text{si } M_i^\alpha = \mathbb{C} = M_j^\alpha, \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases}$$

Es claro que (M^α, f^α) es un objeto en $\text{Mod } Q_T$ porque una raíz positiva α sólo puede cruzar dos lados de un triángulo en T , lo cual implica que en cada triángulo en Q_T existe a lo más una flecha de i a j tal que $f_{ij}^\alpha \neq 0$ y por tanto se cumplen las relaciones de triángulos. Ahora definamos el funtor Θ sobre morfismos de una raíz

positiva a una raíz positiva. Nuestra estrategia es definir primero el funtor sobre movimientos elementales de pivoteo, y después verificamos que las relaciones de malla se cumplen. Para cualquier movimiento elemental de pivoteo $E_P : \alpha \longrightarrow \alpha'$, definimos el funtor $\Theta(E_P)$ de (M^α, f^α) a $(M^{\alpha'}, f^{\alpha'})$ como $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ siempre que sea posible y cero en otro caso. Verificamos que esto efectivamente define un morfismo en $\text{Mod } Q_T$. Para una flecha que sale de j y llega a i en Q_T , verificamos la conmutatividad del siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} M_j^\alpha & \xrightarrow{f_{ij}^\alpha} & M_i^\alpha \\ \Theta(E_P)_j \downarrow & & \downarrow \Theta(E_P)_i \\ M_j^{\alpha'} & \xrightarrow{f_{ij}^{\alpha'}} & M_i^{\alpha'} \end{array}$$

La conmutatividad del diagrama resulta obvia cuando $M_j^\alpha = 0$ ó $M_i^{\alpha'} = 0$ ó también si $M_i^\alpha = 0$ y $M_j^{\alpha'} = 0$. Ahora, supongamos que $M_j^\alpha \neq 0$ y $M_i^{\alpha'} \neq 0$. Si $M_i^\alpha \neq 0$ y $M_j^{\alpha'} \neq 0$ entonces las cuatro funciones son $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ y el diagrama conmuta. El caso que falta es cuando M_i^α ó $M_j^{\alpha'}$ son distintos de cero. Pero mostraremos que esto no puede suceder. Supongamos que $M_j^{\alpha'} = 0$ y $M_i^\alpha \neq 0$, es decir, $i, j \in \text{Supp } \alpha$, mientras que $i \in \text{Supp } \alpha'$ y $j \notin \text{Supp } \alpha'$. Como existe un movimiento elemental de pivoteo de α a α' tenemos que $-\alpha_j$ cruza a α y $-\alpha_j$ y α' tienen un punto en común sobre la frontera del polígono y que $-\alpha_i$ intersecta a α y a α' lo cual implica que $-\alpha_j < -\alpha_i$, que contradice la orientación de la flecha que sale de j y llega a i en Q_T . El otro caso puede ser excluido de manera análoga.

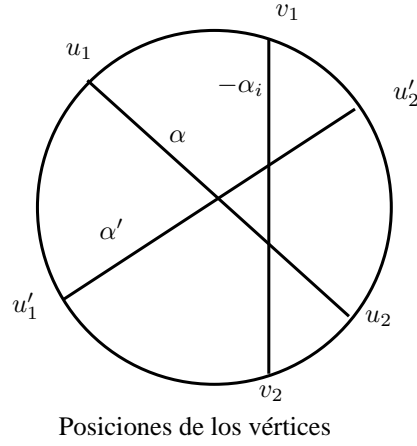
Para verificar que el funtor Θ está bien definido nos falta verificar las relaciones de malla. Sean $\alpha \xrightarrow{P_1} \beta$, $\beta \xrightarrow{P_2} \gamma$, $\alpha \xrightarrow{P_3} \beta'$, $\beta' \xrightarrow{P_4} \gamma$ movimientos elementales de pivoteo con α, β, γ raíces positivas y $\beta \neq \beta'$. Observemos que podemos excluir el caso en que β y β' son negativas o aristas exteriores porque entonces α o γ también serían negativas pues T es una triangulación, y entonces, β y β' son dos cuerdas en la triangulación por tanto también debe de estar su diagonal en T , que en este caso es α o γ . Supongamos primero que β' es positiva. Verifiquemos la conmutatividad del siguiente diagrama para todo i .

$$\begin{array}{ccc} M_i^\alpha & \xrightarrow{\Theta(P_1)_i} & M_i^\beta \\ \Theta(P_3)_i \downarrow & & \downarrow \Theta(P_2)_i \\ M_i^{\beta'} & \xrightarrow{\Theta(P_4)_i} & M_i^\gamma \end{array}$$

El único caso no trivial es cuando $-\alpha_i \in \text{Supp } \alpha \cap \text{Supp } \gamma$. En tal caso, se tiene que $-\alpha_i \in \text{Supp } \beta \cap \text{Supp } \beta'$ pues cada diagonal que intersecta a α y a γ debe de cruzar también a β y a β' . En tal caso $\Theta(P_i) = \text{Id}_{\mathbb{C}}$ para todo $i = \{1, \dots, 4\}$ y el diagrama conmuta. Supongamos que β' es una raíz negativa o una arista exterior. Mostremos que la composición $\theta(P_2)_i \Theta(P_1)_i$ es cero para toda i . Pero en este caso ninguna raíz negativa puede intersectar a α y a γ , así el $\text{Supp } \alpha \cap \text{Supp } \gamma$ es vacío, por tanto la composición es cero.

Lema 4.3.2. *El espacio vectorial $\text{Hom}_{C_T}(\alpha, \alpha')$ es no cero si y sólo si existe $-\alpha_i \in \text{Supp } \alpha \cap \text{Supp } \alpha'$ tal que las posiciones de α, α' y $-\alpha_i$ están como en la figura siguiente, es decir, sean v_1, v_2 vértices de $-\alpha_i$ y u_1, u_2 (respectivamente u'_1, u'_2) vértices de α (α' respectivamente), entonces el orden de los vértices del*

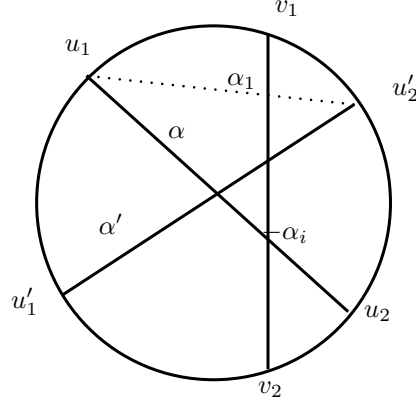
polígono en dirección positiva empieza en v_1 y $v_1 < u_1 \leq u'_1 < v_2 < u_2 \leq u'_2$. En este caso $\text{Hom}_{C_T}(\alpha, \alpha')$ es de dimensión 1.



Demostración. Supongamos que $\text{Hom}_{C_T}(\alpha, \alpha')$ es no cero. Sea $P \in \text{Hom}_{C_T}(\alpha, \alpha')$ tal que $P \neq 0$, donde la sucesión es la siguiente:

$$\alpha = \alpha_0 \xrightarrow{P_1} \alpha_1 \xrightarrow{P_2} \dots \xrightarrow{P_m} \alpha_m = \alpha'$$

donde las α_i son raíces positivas y los P_i son movimientos elementales de pivoteo. Por las relaciones de malla podemos suponer que los primeros k movimientos P_1, \dots, P_k tienen pivote a uno de los vértices de α , y los últimos $m - k$ movimientos tienen como pivote el vértice que es la intersección de α' y α_k . Denotemos por V_1 (respectivamente V_2) el conjunto de vértices de $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (respectivamente $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m$) excepto el pivote de P_1 (respectivamente el pivote de P_{k+1}). Como $P \neq 0$ entonces α y α' se intersectan pues si no se intersectan, consideremos al cuadrilátero formado por α y α' y a sus lados opuestos α_1 y α_2 , entonces $P : \alpha \longrightarrow \alpha_i \longrightarrow \alpha'$, por lo que $P = 0$. Como $P \neq 0$ todas las diagonales con un vértice en V_1 y otro en V_2 son positivas. Entonces los vértices de α y α' forman un cuadrilátero en el polígono sin diagonales de la triangulación T . Como T es una triangulación tenemos que existe $-\alpha_i \in T$ cruzando el cuadrilátero en la otra dirección (cruzando las diagonales α y α') y así conseguimos la situación del diagrama deseado. Por otro lado, si tenemos la situación del diagrama, es claro que existe un morfismo no cero $P : \alpha \longrightarrow \alpha_i \longrightarrow \alpha'$ donde α_1 es una arista del cuadrilátero formado por los vértices de α y α' y que cruza a $-\alpha_i$, como se ve en la siguiente figura. La dimensión de $\text{Hom}_{C_T}(\alpha, \alpha')$ es a lo más uno, pues cualesquiera dos trayectorias de pivoteo de α a α' están en la misma clase.



$$P : \alpha \longrightarrow \alpha_1 \longrightarrow \alpha' .$$

■

Lema 4.3.3. Sean α y α' raíces positivas, entonces $\text{Supp } \alpha \cap \text{Supp } \alpha'$ es conexo.

Demostración. Sean $S = \text{Supp } \alpha$ y $S' = \text{Supp } \alpha'$ y supongamos que $S \cap S'$ no es conexo. Sean $i, k \in S \cap S'$ dos vértices que están en diferentes componentes conexas de $S \cap S'$. Como S y S' son conexos podemos elegir dos trayectorias minimales $p : i = i_1, i_2, \dots, i_p = k$ en S y $p' : i = j_1, \dots, j_q = k$ en S' . Sea m el entero más pequeño tal que $i_{m+1} \neq j_{m+1}$. En la triangulación T cada una de las diagonales $-\alpha_{i_{m-1}}, -\alpha_{i_{m+1}}, -\alpha_{j_{m+1}}$ tiene un vértice en común con $-\alpha_{i_m}$. Como una raíz positiva puede cruzar sólo dos lados de un triángulo, podemos formar un triángulo Δ con $-\alpha_{i_m}, -\alpha_{i_{m+1}}, -\alpha_{j_{m+1}}$ en T . Más aún, $i_{m+1} \in S \setminus S'$ y $j_{m+1} \in S' \setminus S$. Quitemos el triángulo Δ de T , lo cual divide al polígono en tres partes: $R_{i_m}, R_{i_{m+1}}, R_{j_{m+1}}$ tal que R_l contiene a $-\alpha_l$ con $l \in i_m, i_{m+1}, j_{m+1}$. Pero esto contradice el hecho de que $-\alpha_{j_q} = -\alpha_k = -\alpha_{i_p}$ por lo cual $S \cap S'$ es conexo. ■

Lema 4.3.4. El espacio vectorial $\text{Hom}_{\text{Mod } Q_T}((M^\alpha, f^\alpha), (M^{\alpha'}, f^{\alpha'}))$ es no cero si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen. Sean $S = \text{Supp } \alpha$ y $S' = \text{Supp } \alpha'$.

- (i) $S \cap S'$ es no vacío.
- (ii) No existen flechas de $S \setminus S'$ a $S \cap S'$ en Q_T .
- (iii) No existen flechas de $S \cap S'$ a $S' \setminus S$ en Q_T .

En este caso, $\text{Hom}_{\text{Mod } Q_T}((M^\alpha, f^\alpha), (M^{\alpha'}, f^{\alpha'}))$ es de dimensión uno.

Demostración. Sea P distinto de cero en $\text{Hom}_{\text{Mod } Q_T}((M^\alpha, f^\alpha), (M^{\alpha'}, f^{\alpha'}))$, por tanto (i) se cumple. Mostremos las condiciones (ii) y (iii).

Supongamos que la condición (ii) no es cierta, entonces existe una flecha en Q_T que sale de i y llega a j con $i \in S \setminus S'$ y $j \in S \cap S'$ y tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} M_i^\alpha & \xrightarrow{id_C} & M_j^\alpha \\ P_i \downarrow & & \downarrow P_j \\ 0 & \longrightarrow & M_j^{\alpha'} \end{array}$$

Entonces $P_i = 0 = P_j$. Sea k cualquier vértice en $S \cap S'$. Mostremos que $P_k = 0$. Por el Lema 4.3.3 existe una trayectoria no orientada

$$k = k_0 \text{ --- } k_1 \text{ --- } \dots \text{ --- } k_m = i$$

en Q_T tal que cada $k_0, k_1, \dots, k_m \in S \cap S'$. Ahora seguimos por inducción sobre m . Si $m = 0$ claramente $P_0 = 0$, supongamos que $m > 0$. Por inducción $P_{k_r} = 0$ y como uno de los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} M_k^\alpha & \xrightarrow{Id_C} & M_{k_1}^\alpha \\ P_k \downarrow & & \downarrow 0 \\ M_k^{\alpha'} & \xrightarrow{Id_C} & M_{k_1}^{\alpha'} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M_k^\alpha & \xleftarrow{Id_C} & M_{k_1}^\alpha \\ P_k \downarrow & & \downarrow 0 \\ M_k^{\alpha'} & \xleftarrow{Id_C} & M_{k_1}^{\alpha'} \end{array}$$

tenemos que $P_k = 0$ para ambas orientaciones de la arista $k \text{ --- } k_1$ en Q_T . Consecuentemente $P_k = 0$ para todo $k \in \text{Supp } \alpha \cup \text{Supp } \alpha'$ y $P = 0$, una contradicción. La condición (iii) es similar.

Ahora supongamos que α, α' son raíces positivas tales que (i), (ii), (iii) se cumplen.

Definamos $P \in \text{Hom}_{\text{Mod } Q_T}((M^\alpha, f^\alpha), (M^{\alpha'}, f^{\alpha'}))$ como $P = id_C$ siempre que $i \in S \cap S'$ y $P_i = 0$ en los demás casos. Por (i) tenemos que $P \neq 0$, para verificar que P es un morfismo de módulos sobre el carcaj Q_T debemos verificar la conmutatividad del siguiente diagrama para toda flecha en Q_T que sale de i y llega a j

$$\begin{array}{ccc} M_i^\alpha & \xrightarrow{f_{ij}^\alpha} & M_j^\alpha \\ P_i \downarrow & & \downarrow P_j \\ M_i^{\alpha'} & \xrightarrow{f_{ij}^{\alpha'}} & M_j^{\alpha'} \end{array}$$

Pero el diagrama conmuta por (ii) y (iii). Finalmente, la dimensión de $\text{Hom}_{\text{Mod } Q_T}((M^\alpha, f^\alpha), (M^{\alpha'}, f^{\alpha'}))$ es a lo más uno, pues todos los espacios vectoriales $M_i^\alpha, M_i^{\alpha'}$ son de dimensión uno o cero. ■

Lema 4.3.5. *Las condiciones en el Lema 4.3.2 y en el Lema 4.3.4 son equivalentes.*

Demostración. Retomando la notación $S = \text{Supp } \alpha$ y $S' = \text{Supp } \alpha'$, supongamos que α y α' son como en el Lema 4.3.2. Entonces $-\alpha_i \in S \cap S'$ lo cual implica (i). Supongamos que existe una flecha h que sale de j y llega a k en Q_T tal que $j \in S \subset S'$ y $k \in S \cap S'$. Entonces $-\alpha_k$ intersecta a α y a α' mientras que $-\alpha_j$ intersecta sólo a α . Como existe la flecha h entonces $-\alpha_j$ y $-\alpha_k$ son dos lados de un triángulo en T y son tales que $-\alpha_k < -\alpha_j$. Lo cual es imposible, por la forma en que $-\alpha_i$ intersecta a α y α' . La condición (iii) se prueba similarmente.

Ahora, supongamos que α y α' satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii) del Lema 4.3.4. Por (i) existe $-\alpha_i \in S \cap S'$. Sean v_1, v_2 los vértices de $-\alpha_i$. Consideremos las dos partes del polígono R_l, R_r delimitadas por $-\alpha_i$. Cada una de las partes contiene exactamente un vértice de α y uno de α' . Consideremos las raíces positivas α, α' como trayectorias de R_r a R_l . La sucesión de raíces negativas dadas por las sucesivas intersecciones de la trayectoria α (respectivamente α') con elementos de T , da un orden al conjunto $\text{Supp } \alpha$ (respectivamente al conjunto $\text{Supp } \alpha'$). Sean $S_l = \{-\alpha_i = -\alpha_{i_1}, \dots, -\alpha_{i_p}\}$ (respectivamente $S'_l = \{-\alpha_i = -\alpha_{j_1}, \dots, -\alpha_{j_q}\}$) el conjunto de raíces negativas en R_l que intersectan a α (respectivamente a α') en ese orden. Sea m el entero más grande tal que $-\alpha_{i_m} = -\alpha_{j_m}$. Consideremos los siguientes cuatro casos:

- 1 Si $m = p = q$ entonces sobre la frontera de R_l , yendo de los puntos finales de $-\alpha_i$ en dirección positiva, obtendremos las posiciones relativas de α y α' como en el Lema 4.3.2.
- 2 Si $m = p < q$ entonces $-\alpha_{j_{m+1}}$ y $-\alpha_{j_m}$ están en el mismo triángulo en T , la correspondiente arista en Q_T está orientada $j_{m+1} \longrightarrow j_m$ por (ii). Esto implica que yendo de los vértices de $-\alpha_i$ en dirección positiva sobre la frontera de R_l , obtenemos las posiciones relativas de α y luego a α' como en el Lema 4.3.2.
- 3 Si $m = q < p$ entonces $-\alpha_{i_{m+1}}$ y $-\alpha_{i_m}$ están en el mismo triángulo en T , la correspondiente arista en Q_T está orientada $i_m \longrightarrow i_{m+1}$ por (ii). Esto implica que yendo de los vértices de $-\alpha_i$ en dirección positiva sobre la frontera de R_l obtenemos la posición relativa de α y luego la de α' como en el Lema 4.3.2.
- 4 Si $m < p$ y $m < q$, entonces $-\alpha_{i_m}, -\alpha_{i_{m+1}}$ y $-\alpha_{j_{m+1}}$ son tres diferentes diagonales que están en un mismo triángulo en T . Las correspondientes aristas en Q_T están orientadas $i_m \longrightarrow i_{m+1}$ por (ii) y $j_{m+1} \longrightarrow j_m$ por (iii). Esto implica que yendo de los vértices de $-\alpha_i$ en dirección positiva sobre la frontera de R_l encontramos primero a la posición relativa de α y luego a la de α' como en el Lema 4.3.2.

Por simetría, obtenemos los mismos resultados para R_r . Lo cual implica que las posiciones de α, α' y $-\alpha_i$ son exactamente las descritas en el Lema 4.3.2. ■

Proposición 4.3.6. *El funtor $\Theta : C_T \longrightarrow \text{Mod}_{Q_T}$ es fiel y pleno.*

Demostración. Usando los Lemas 4.3.2, 4.3.4 y 4.3.5, sólo falta mostrar que la imagen de un morfismo no cero es no cero. Es suficiente mostrar esto para morfismos no cero entre raíces positivas. Sea $P \in \text{Hom}(\alpha, \alpha')$ un tal morfismo. Entonces P es una sucesión de movimientos elementales de pivoteo $\alpha = \alpha_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \alpha_m = \alpha'$. Esta sucesión con todos los morfismos no cero implica que existe una raíz negativa $-\alpha_i$ cruzando todos los $\alpha_k, k = 1, \dots, m$. Por Lema 4.3.2 y por definición, $\Theta(P)_i = \text{Id}_{\mathbb{C}}$ que no es cero. ■

Observación 4.3.7. Si $-\alpha_i$ es una hoja en Q_T y α una raíz positiva, entonces $-\alpha_i \in \text{Supp } \alpha$ si y sólo si uno de los vértices finales de α es el vértice x del polígono tal que es aislado por $-\alpha_i$. Entonces, existe una raíz positiva $\alpha^{P_{r_i}}$ tal que el conjunto de todas las raíces positivas con $-\alpha_i$ en su soporte es igual al conjunto

$$\{\alpha^{P_{r_i}}, P_x(\alpha^{P_{r_i}}), P_x^2(\alpha^{P_{r_i}}), \dots, P_x^{n-1}(\alpha^{P_{r_i}})\},$$

donde P_x es el movimiento elemental de pivoteo con pivote x .

Teorema 4.3.8. *El funtor $\Theta : C_T \longrightarrow \text{Mod}_{Q_T}$ es una equivalencia de categorías.*

Mostremos que el funtor Θ es esencialmente sobreyectivo, es decir, cada módulo inescindible en Mod_{Q_T} es la imagen de una raíz positiva bajo Θ . De hecho, caracterizamos los módulos inescindibles de Mod_{Q_T} con la teoría de Auslander-Reiten y esto nos permitirá concluir que hay $\frac{n(n+1)}{2}$ Q_T -módulos inescindibles. Lo anterior, es posible porque la categoría de módulos sobre el carcaj es de tipo Krull-Schmidt, por lo cual es suficiente trabajar con los módulos inescindibles y los morfismos irreducibles entre ellos. Como es bien conocido, cada categoría Krull Schmidt esta asociada a un carcaj de Auslander Reiten, por lo tanto utilizaremos la teoría de Auslander para demostrar que el funtor es Denso.

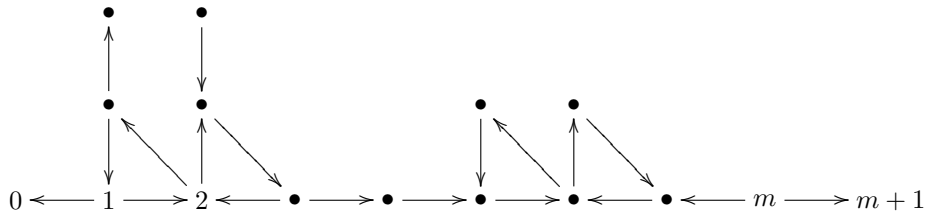
En adelante, nos referimos a [Gab80] y a [ARS95] para definiciones, notaciones y resultados en teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita. Además usamos las siguientes notaciones para la prueba en Mod_{Q_T} : P_i (respectivamente I_i) es el i -ésimo módulo proyectivo (respectivamente el i -ésimo módulo inyectivo) con la convención de que $P_0 = I_0 = 0$. Por tanto $(P_i)_l = \mathbb{C}$ si existe una trayectoria en Q_T módulo las relaciones de triángulo de i a l y $(P_i)_l = 0$ si no existe tal trayectoria. Similarmente, $(I_i)_l = \mathbb{C}$ si existe una trayectoria orientada en Q_T módulo las relaciones triángulo de l a i y $(I_i)_l = 0$ si no existe dicha trayectoria. Las transformaciones de P_i y de I_i son $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ siempre que sea posible y serán cero cuando no sea posible. Sea T una triangulación, denotaremos por $Q = Q_T$ siempre que no haya confusión, y denotaremos por Q_0 al conjunto de vértices de Q . Dado un conjunto de vértices S de Q_0 , un subcarcaj pleno de Q con vértices S será el conjunto S junto con el conjunto de todas las aristas (con relaciones) de Q que tienen vértices en S . Decimos que un Q_T -módulo M es de *tipo A* si el subcarcaj pleno de Q_T sobre el soporte de M es de tipo \mathbb{A}_k para algún $k \in \mathbb{N}$.

Lema 4.3.9. *Sea M un Q -módulo inescindible de tipo A y sea N cualquier Q -módulo inescindible. Si $\text{Hom}_Q(N, M)$ ó $\text{Hom}_Q(M, N)$ contiene un morfismo irreducible, entonces N es de tipo A.*

Demostración. La prueba está basada en la construcción de morfismos irreducibles via el funtor de Nakayama [Gab80][4.4]. El funtor dual nos da una (anti)-equivalencia entre $\text{Mod } Q^{opp} = \text{Mod } Q_{T^*}$, donde T^* es la triangulación espejo, es decir, es la triangulación asociada al carcaj opuesto Q^{opp} . Usando este (contravariante)-functor, se puede reducir la prueba al caso donde $\text{Hom}_Q(N, M)$ contiene un morfismo irreducible.

Supongamos que el soporte de M está dado por el conjunto $Q'_0 := \{1, \dots, m\}$. Sea Q' el subcarcaj pleno de Q dado por el soporte de M . Por hipótesis, Q' es de tipo A_m con vértices extremos 1 y m , y podemos suponer sin pérdida de generalidad, que existe una arista de i a $i \pm 1$. Observemos que como M es inescindible de tipo A, entonces M es de multiplicidad libre, es decir, no hay sumandos directos inescindibles de M que sean isomorfos dos a dos.

Para continuar, necesitamos saber cómo está contenido el carcaj Q' en el carcaj Q . El siguiente argumento se puede seguir en el diagrama que se presenta a continuación:



Supongamos que el módulo M no es simple. Notemos que existe a lo más un vértice que será denotado por 0 (respectivamente $m + 1$), y tales que no existen otras aristas entre Q'_0 y 0 (respectivamente $m + 1$). Note

que para toda $k \in Q'_0$, existen a lo más dos vértices $i(k)^\pm$ tales que $i(k)^\pm \notin Q'_0$ y existe una arista de $i(k)^\pm$ a k en Q_0 . Podemos definir $i(k)^+$, (respectivamente $i(k)^-$), como los vértices tales que existe una arista de $k+1$ a $i(k)^+$, (respectivamente que exista arista de $k-1$ a $i(k)^-$). Por convención, si los vértices $i(k)^\pm, 0$ y $m+1$ no existen, definimos los correspondientes símbolos como el conjunto vacío.

Sea S_0 , respectivamente S_{m+1} , el soporte del módulo inyectivo asociado a 0 , respectivamente a $m+1$, en el subcarcaj pleno de Q con el conjunto de vértices $Q \setminus \{1\}$, respectivamente $Q \setminus \{m\}$. De la estructura de árbol de Q , en la Subsección 4.2, se tiene que $Q'' := S_0 \cup Q'_0 \cup S_{m+1}$ es el conjunto de vértices de un subcarcaj pleno Q'' de Q de tipo A .

Para cada fuente k ó para $k = 0, m$, sea S_k^\pm el soporte del módulo inyectivo asociado a $i(k)^\pm$ en el subcarcaj pleno de Q con el conjunto de vértices $Q_0 \setminus Q'_0$.

Observemos que si M es proyectivo y $\text{Hom}_Q(M, N)$ contiene un morfismo irreducible, entonces el módulo M es sumando directo del radical de N , así N es de tipo A . Supongamos que M no es proyectivo. Entonces, podemos calcular el trasladado del Auslander-Reiten $A(M)$ vía el funtor Nakayama. Tenemos una presentación proyectiva minimal de M : $P^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ haciendo $P^0 := \bigoplus_{i \in R} P_i$, donde i corre sobre un conjunto R de fuentes de Q' y $P^1 := \bigoplus_{j \in R'} P_j$, donde j corre sobre un conjunto R' dado por la unión de $\{0, m+1\}$ con los pozos de $Q'_0 \setminus \{1, m\}$.

Por [Observación 3.1][Gab80] con la ayuda del funtor de Nakayama, obtenemos una presentación inyectiva minimal del trasladado de Auslander-Reiten de M : $0 \longrightarrow A(M) \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^0$, con $I^0 := \bigoplus_{i \in R} I_i$ y $I^1 := \bigoplus_{j \in R'} I_j$. Para $k \in R'$, sea k^+ , respectivamente k^- , la fuente sucesora de Q' , es decir, el vértice k^+ que es fuente y además existe flecha de k a k^+ (o flecha de k^+ a k) respectivamente la antecesora, es decir, el vértice k^- que es fuente y además existe flecha de k^- a k (o flecha de k a k^-), con la convención de que $k^+ = m$, respectivamente $k^- = 1$, si no existe dicha fuente. Entonces, para cada pozo $k \in Q'_0$, el soporte de I_k está dado por $S_{k^-}^- \cup S_{k^+}^+ \cup (\text{Supp}(I_k) \cap Q'_0)$. El soporte de I_0 , respectivamente de I_{m+1} , es $S_l^+ \cup (\text{Supp}(I_0) \cap Q''_0)$, respectivamente $S_g^- \cup (\text{Supp}(I_{m+1}) \cap Q''_0)$, donde l , respectivamente g , es el más pequeño, respectivamente la más grande fuente de Q'_0 . El soporte de $I_k, k \in R$ contiene S_k^\pm . Esto implica que el soporte de $A(M)$ es un subconjunto de Q''_0 .

Sea X el término medio de la sucesión de Auslander-Reiten $0 \longrightarrow A(M) \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Tenemos que $\text{Supp } X \subset \text{Supp}(A(M)) \cup \text{Supp } M \subset Q''_0$. Por tanto, X es de tipo A . El Teorema de Auslander-Reiten dice que el módulo N es un sumando directo de X . Así, N es de tipo A .

El caso donde M es simple es similar. ■

Demostración del Teorema 4.3.8. Sea M el Q -módulo inescindible de tipo A . Por el Lema anterior, la componente de M en el carcaj de Auslander-Reiten contiene módulos sólo de tipo A , por tanto sólo hay un número finito de dichos Q -módulos inescindibles. Por tanto, por [Proposición 6.3][Gab80], cada módulo inescindible es de tipo A , y en particular de multiplicidad libre. Así, existe una correspondencia uno a uno entre Q -módulos inescindibles y subcarcajes plenos de Q de tipo A . Sea i un vértice de Q tal que es de grado uno y j cualquier vértice de Q . Por la subsección 4.2, existe un único subcarcaj pleno de tipo A de Q cuyos vértices extremos son i y j . Esto implica, por inducción, que el número de tales subcarcajes es $\frac{n(n+1)}{2}$. Por tanto, hay $\frac{n(n+1)}{2}$ módulos inescindibles, como se quería mostrar.

Corolario 4.3.10. *La categoría C_T es abeliana.*

Sean $i \in Q_T$, y $M \in \text{Ind}(Q_T)$ denotaremos con $n_i(M)$ a la multiplicidad de un módulo simple S_i en M .

Corolario 4.3.11. *Existe una biyección ϕ entre $\text{Ind}(Q_T)$ y las diagonales del polígono P que no están en la triangulación T . Más aún para $M \in \text{Ind}(Q_T)$ y cualquier vértice $i \in Q_T$, la multiplicidad del módulo simple S_i en el módulo M es 1 si $\phi(M)$ cruza la i -ésima diagonal de T , y cero si no lo cruza. En particular, dados $M, M' \in \text{Ind}(Q_T)$, tenemos que $M = M'$ si y sólo si $n_i(M) = n_i(M')$ para todo i .*

4.4. Carcajes equivalentes al lineal

Ya tenemos definida la mutación de carcajes, en esta sección daremos una caracterización de los carcajes equivalentes al lineal mediante mutaciones. Para ello consideraremos el siguiente resultado.

Lema 4.4.1. *Todas las orientaciones de \mathbb{A}_n son equivalentes bajo mutación.*

Demostración. La demostración se obtiene por casos, demostrando que cualquier orientación es equivalente a la lineal

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n-1 \xrightarrow{\alpha_n} n .$$

Supongamos que se tiene una orientación distinta a la lineal, y sea i el vértice maximal tal que α_i tiene la orientación

$$i \xrightarrow{\alpha_i} i+1 \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \dots \longrightarrow n .$$

Basta con distinguir los siguientes casos:

(a)

$$i-1 \xrightarrow{\alpha_{i-1}} i .$$

(b)

$$i-1 \xleftarrow{\alpha_{i-1}} i .$$

El caso (b) se resuelve al mutar en dirección i , mientras que el caso (a) se resuelve al mutar $n-i-1$ veces, primero en dirección $i+1$, después $i+2$ y continuando hasta mutar en dirección n , se obtiene la orientación lineal. ■

Definición 4.4.2. Sea Q_n la clase de los carcajes con n vértices el cual satisface:

- (C1) Todos los ciclos están orientados y son de longitud 3.
- (C2) Cada vértice tiene a lo más cuatro vecinos.
- (C3) Si un vértice tiene cuatro vecinos, entonces el vértice pertenece exactamente a dos 3-ciclos: uno formado con dos de sus aristas adyacentes, y el otro con otras dos.
- (C4) Si un vértice tiene exactamente tres vecinos, entonces dos aristas adyacentes pertenecen a un 3-ciclo y la tercera arista no pertenece a ningún 3-ciclo.

Observemos que un 3-ciclo, en la primera condición, significa un ciclo en la gráfica sin orientar, y no pasa por la misma arista dos veces.

Lema 4.4.3. Q_n es cerrado bajo mutación.

Demostración. Sea $Q \in Q_n$. Veremos qué pasa localmente cuando mutamos en el vértice i . Denotamos con Q^* al carcaj obtenido al mutar en dicho vértice, y a las flechas α de Q con α^* a la flecha correspondiente en Q^* . Consideremos la flecha

$$\alpha : j \longrightarrow i .$$

Notemos que tenemos tres casos:

- (i) Supongamos que α no pertenece a ningún 3-ciclo ni en Q ni en Q^* , entonces i no tiene más de tres vecinos y basta con verificar ese vértice porque la mutación en i sobre el vértice j deja las flechas iguales. Ahora, si i tiene dos vértices vecinos y no pertenece a un ciclo, entonces Q^* es de tipo Q_n . Notemos que i no puede pertenecer a un ciclo, porque entonces al mutar Q en i , se tiene que α^* pertenece a un 3-ciclo. Ahora, si i tiene tres vértices vecinos, entonces α^* pertenece a un 3-ciclo en Q^* , lo cual no puede ser cierto por hipótesis, por tanto i sólo puede tener dos vértices vecinos que no forman parte de un tres ciclo.
- (ii) Supongamos que α pertenece a un 3-ciclo en Q pero α^* no pertenece a un 3-ciclo en Q^* . Notemos que i ya tiene dos vértices vecinos, falta observar qué pasa si tiene tres o cuatro vecinos, i no puede tener tres vecinos pues la flecha que no pertenece a un 3-ciclo, genera un 3-ciclo en Q^* que contienen a α^* . Supongamos que i tiene cuatro vecinos, lo cual tampoco puede suceder ya que i pertenece a dos 3-ciclos en Q , pero al mutar en i obtenemos 3-ciclos en Q^* que contienen a α^* , lo cual contradice la hipótesis. Por tanto Q^* es de tipo Q_n .
- (iii) Supongamos que α no pertenece a un 3-ciclo en Q pero α^* si pertenece a un 3-ciclo en Q^* . Como α no pertenece a un 3-ciclo, entonces i sólo puede tener a lo más dos vértices vecinos. Sean h, k los vecinos de i . Si i es una fuente, entonces i^* es un pozo, así el nuevo Q^* es de tipo Q_n . Supongamos que dos de las flechas terminan en i y la otra flecha sale de i , por tanto el carcaj Q^* tiene al menos un 3-ciclo que contiene a α^* . Por tanto Q^* es de tipo Q_n . Por otro lado, supongamos que las otras dos flechas que no son α salen de i , así al mutar en i tenemos que Q^* tiene al menos un 3-ciclo que contiene a α^* .

Con todo lo anterior, se tiene que Q^* es de tipo Q_n .

El caso donde

$$\alpha : i \longrightarrow j ,$$

es análogo.

■

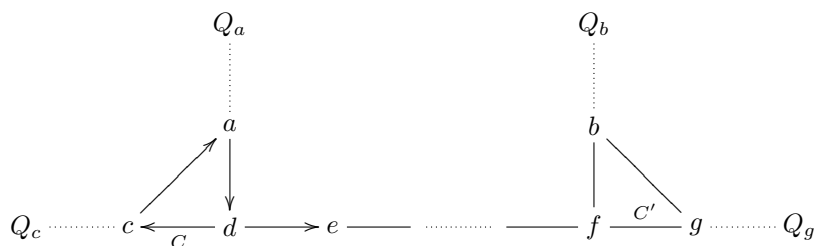
Lema 4.4.4. Si Q_1, Q_2 son carcajes en Q_n , y tienen el mismo número de 3-ciclos, entonces Q_2 puede ser obtenido de Q_1 por mutaciones iteradas donde todos los carcajes intermedios resultantes de las iteraciones tienen también el mismo número de 3-ciclos.

Demostración. Es necesario probar que todos los carcajes en Q_n pueden ser mutados sin cambiar el número de 3-ciclos. En este proceso permitimos mutar en fuentes, pozos, y vértices de grado tres y cuatro, como las mutaciones que no cambian el número de 3-ciclos para carcajes en Q_n .

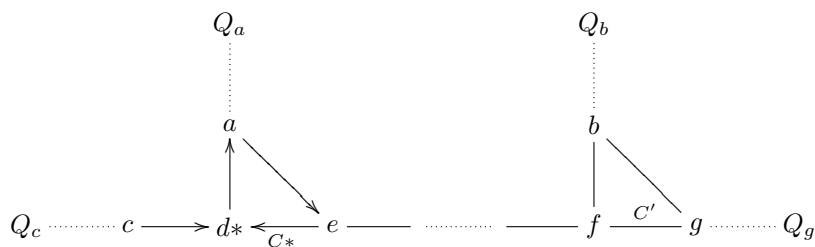
Definimos una función distancia sobre el conjunto de 3-ciclos en carcajes en Q_n . Para cada par C, C' de diferentes 3-ciclos en Q , definimos la $d_Q(C, C')$ como la longitud de la única trayectoria entre C y C' , (quizás sin orientar), es decir, el número de aristas en esta trayectoria; es fácil ver que la trayectoria es única, ya que si hubiesen dos trayectorias entre C y C' tendríamos ciclos de longitud mayor a 3.

Sea Q un carcaj en Q_n , y supongamos que el carcaj sin orientar de Q no es \mathbb{A}_n . Definimos un orden total en un subconjunto S_Q del conjunto de los 3-ciclos de Q . Este subconjunto no está definido de manera única. Q debe contener un 3-ciclo el cual sólo está conectado a otro 3-ciclo a través (a lo más) de uno de sus vértices. Escogemos uno de esos ciclos y le llamamos C_1 . Si hay más 3-ciclos, sea C_2 uno de los 3-ciclos el cual minimiza la $d_Q(C_1, C_2)$. Si hay más 3-ciclos, sea $C_3 \neq C_1$ uno de los 3-ciclos tal que minimiza $d_Q(C_2, C_3)$. Si C_i está definido para algún $i \geq 3$, y existe uno o más 3-ciclos C tales que $d_Q(C_i, C) < d_Q(C_j, C)$ para $j < i$, sea C_{i+1} uno de los cuales minimiza $d_Q(C_i, -)$ entre los 3-ciclos con esta propiedad. Continuando con esta forma hasta que C_s esté definido, pero C_{s+1} no pueda ser definido. Sea $S_Q = \{C_1, \dots, C_s\}$ nuestro conjunto totalmente ordenado de 3-ciclos.

Después, veremos que tenemos un procedimiento para mover 3-ciclos en el carcaj y estar más cerca entre ellos. Sea C y C' un par de 3-ciclos vecinos en Q tales que $d_Q(C, C') \geq 1$. Queremos mover a C y C' para que estén lo más cerca posible con mutación. Salvo orientación en la arista de d a e , esto se ve como en el siguiente diagrama. La otra orientación da una situación similar.



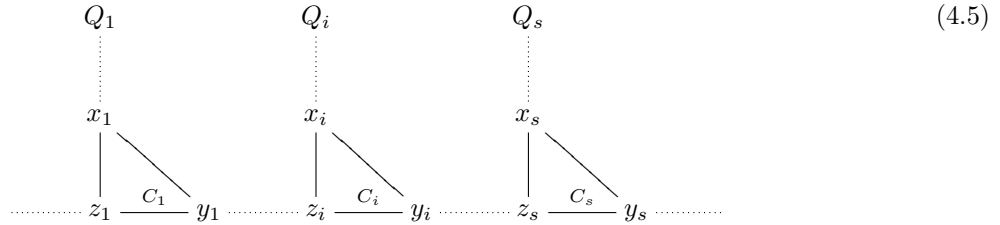
En el diagrama anterior los Q_i son subcarcajes. Mutando en d tenemos el siguiente carcaj Q^* :



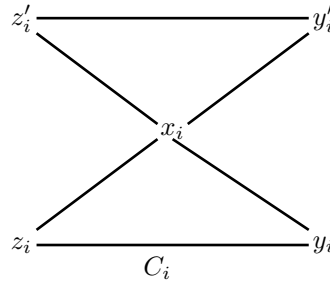
La única diferencia entre Q y Q^* es que $d_{Q^*}(C^*, C') = d_Q(C, C') - 1$, y después de la mutación existe una trayectoria de longitud 1 entre C^* y Q_c . Esta es la mutación que se usa para acercar dos ciclos.

Supongamos que hay un un 3-ciclo C en Q tal que no está en S_Q . Usaremos el procedimiento de acercar 3-ciclos para producir un nuevo carcaj Q^* con una sucesión S_{Q^*} de 3-ciclos tales que el tamaño de S_{Q^*} sea igual al tamaño de $S_Q + 1$.

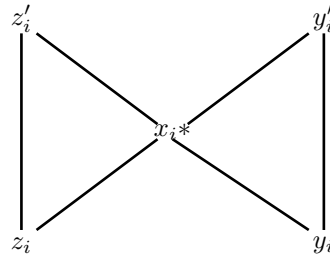
El carcaj Q , con esta sucesión S_Q se ve así:



donde los Q_i son subcarcajes, y C está en Q_i para algún $i = 2, 3, \dots, s-1$, lo cual se sigue de la definición de C y de s . Tenemos que C puede moverse hacia x_i , usando el procedimiento descrito anteriormente. Podemos realizar este procedimiento hasta que C y C_i compartan el vértice x_i , y x_i tenga cuatro vecinos. Entonces mutamos en el vértice x_i del siguiente diagrama (lo cual vemos de manera local)



y obtenemos:



Llamamos al carcaj resultante Q^* . Después de etiquetar tenemos una sucesión C_1^*, \dots, C_{s+1}^* de 3-ciclos en el carcaj Q^* , donde $C_j^* = C_j$ para $j < i$ y $C_j^* = C_{j-1}$ para $j > i + 1$. Este es el candidato de S_{Q^*} .

Extendiendo nuestro conjunto totalmente ordenado las veces necesarias, tendremos un carcaj donde todos los 3-ciclos están en una sucesión C_1, \dots, C_s como en el diagrama (4.5) para algún s y los subcarcajes Q_1, \dots, Q_s son trayectorias (no dirigidas).

Si y_s en el diagrama (4.5) tiene grado 3, movemos C_s a la derecha mutando en y_s y continuando de la misma forma, cuando lleguemos a un diagrama como el de (4.5) donde y_s tenga sólo dos vecinos (x_s y z_s), reducimos Q_s mutando en x_s y continuando hasta que el nuevo x_s tenga sólo a y_s y z_s como vecinos. Orientando convenientemente a Q_s como en el Lema 4.4.1, podemos hacer esto de tal forma que y_s tenga solamente dos vecinos, y C_s este conectado al resto del carcaj sólo a través de z_s . Sucesivamente al generar C_{s-1}, \dots, C_1 tendremos un carcaj que consiste de una sucesión de 3-ciclos con $d_Q(C_i, C_{i+1}) = 0$ para vecinos C_i y C_{i+1} y posiblemente con algunas trayectorias no dirigidas como se ve en el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & x_1 & & x_{s-1} & & x_s & & (4.6) \\
 & & & | & \searrow & | & \searrow & \nearrow & | & \\
 \bullet & \text{---} & \bullet & \dots & \bullet & \text{---} & z_1 & \xrightarrow{C_1} & y_1 & \dots & z_{s-1} & \xrightarrow{C_{s-1}} & z_s & \xrightarrow{C_s} & y_s
 \end{array}$$

La orientación de C_s no importa mucho, pues podemos voltearlo en el diagrama. Si i es el número más grande y menor que s tal que C_i no está orientado en dirección de las manecillas del reloj, mutamos en $y_i = z_{i+1}$ y conseguimos un diagrama similar donde el nuevo C_{i+1} está orientado en la dirección opuesta a las manecillas del reloj, y el nuevo C_i está orientado en el sentido de las manecillas del reloj. Haciendo esto las veces que sea necesario, tenemos el carcaj que queríamos. ■

Proposición 4.4.5. *Un carcaj Q es equivalente bajo mutación a \mathbb{A}_n si y sólo si $Q \in Q_n$.*

Demostración. Sabemos que todas las orientaciones de \mathbb{A}_n están en Q_n .

Se sigue del Lema 4.4.4 que todos los miembros de Q_n pueden alcanzarse por mutaciones iteradas a un carcaj \mathbb{A}_n , pues al mutar el carcaj en el diagrama (4.6) en todos los x_i obtenemos un carcaj con gráfica sin orientar \mathbb{A}_n , y podemos ir en reversa del proceso de la prueba anterior para llegar a cualquier $Q \in Q_n$. ■

Parte I
Apéndice

En éste apéndice nos referimos a la notación y resultados del libro [Ful] de donde obtuvimos el resultado principal.

0.1. El ideal generado por las coordenadas de Plücker es un ideal primo

En esta parte construiremos y estudiaremos unas representaciones polinomiales irreducibles del grupo general lineal $GL_m(E)$, donde E es un espacio vectorial definido sobre el campo de los complejos. Estas representaciones pueden ser formadas por una construcción que en álgebra lineal generaliza una construcción bien conocida de productos simétricos y exteriores; y además esto tiene sentido para un módulo sobre un anillo conmutativo. Estas representaciones son parametrizadas por diagramas de Young λ con al menos m renglones, y tenemos bases correspondientes a tablas de Young sobre λ con entradas en $1, \dots, m$.

Sea R un anillo conmutativo y E un R -módulo. Consideremos además cualquier partición λ , construiremos un R -módulo denotado por E^λ . El producto cartesiano de $n = |\lambda|$ copias de E será escrito como $E^{\times\lambda}$ pero etiquetado por los n cuadros de un diagrama de Young de λ . Así un elemento $v \in E^{\times\lambda}$ está dado especificando un elemento de E por cada cuadro en el diagrama de λ .

Para la construcción necesitamos la siguiente

Definición 0.1.1. Dadas una numeración T de un diagrama de Young asociado a una partición λ , dos columnas del diagrama y la elección de un conjunto de un mismo número de cuadros en cada una de las columnas elegidas, se define el *intercambio* en la numeración T como la numeración S obtenida de T intercambiando las entradas en los dos conjuntos de cuadros elegidos manteniendo el orden vertical en cada una, y las entradas del diagrama que no se consideraron en la elección de cuadros se quedan igual.

Ejemplo 0.1.1. Consideremos la siguiente partición $\lambda = (4, 3, 3, 2)$ y elijamos a la segunda y tercera columna, con un subconjunto de dos cuadros en cada una; el segundo y cuarto cuadro para la segunda columna y los dos primeros para la tercera columna y haciendo el intercambio de esas dos columnas, lo que nos resulta es lo siguiente;



Consideremos funciones $\rho : E^{\times\lambda} \rightarrow F$ con F un R -módulo tales que satisfacen las siguientes propiedades:

- (1) ρ es multilineal, es decir, si fijamos una entrada, entonces ρ es R -lineal en esa entrada.
- (2) ρ es alternante en las entradas de cualquier columna de λ . Esto es, ρ se hace cero siempre que dos entradas iguales están en la misma columna, junto con (1), tenemos que $\rho(v) = -\rho(v')$ si v' es obtenida de v intercambiando dos entradas en una columna.
- (3) Para cualquiera $v \in E^{\times\lambda}$, se tiene que $\rho(v) = \sum \rho(w)$ donde la suma es sobre todos los w obtenidos de v intercambiando entre dos columnas, con un subconjunto dado de cuadros fijo en la columna derecha escogida.

0.1. IDEALES PRIMOS ESPECIALES

Note que si el número de cuadros elegidos es k y la longitud de la columna izquierda elegida es c , entonces hay $\binom{c}{k}$ tales w para un v dado. Como tenemos (1) y (2), basta con que calculemos los cambios en los primeros cuadros de la columna derecha. Por ejemplo $\lambda = (2, 2, 2)$ y escogiendo el primer cuadro de la segunda columna tenemos que

$$\rho \begin{array}{|c|c|} \hline x & u \\ \hline y & v \\ \hline z & w \\ \hline \end{array} = \rho \begin{array}{|c|c|} \hline x & z \\ \hline y & v \\ \hline u & w \\ \hline \end{array} + \rho \begin{array}{|c|c|} \hline u & x \\ \hline y & v \\ \hline z & w \\ \hline \end{array} + \rho \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline u & v \\ \hline z & w \\ \hline \end{array}$$

para todo $x, y, z, u, v, w \in E$.

Definimos el *Módulo de Schur* E^λ como el módulo universal para tales funciones ρ . Es decir, E^λ es un R -módulo y si tenemos una función $E^{\times\lambda} \rightarrow E^\lambda$, que denotamos $v \mapsto v^\lambda$, que satisface (1)-(3), entonces para cada homomorfismo $\rho : E^{\times\lambda} \rightarrow F$, existe un único homomorfismo $\bar{\rho} : E^\lambda \rightarrow F$ de R -módulos tal que $\rho(v) = \bar{\rho}(v^\lambda)$, para todo $v \in E^{\times\lambda}$.

Consideremos los casos extremos, es decir, cuando $\lambda = (n)$. Entonces la propiedad (2) es vacía, y (3) dice que todas las entradas conmutan, por tanto vemos que $E^{(n)}$ es la potencia simétrica $\text{Sym}^n(E)$, la cual es construida como el cociente de $E^{\otimes n}$ por el submódulo generado por todos los $v_1 \otimes \dots \otimes v_n - v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}$, para toda $v_i \in E$ y $\sigma \in S_n$. Similarmente, si $\lambda = (1^n)$, entonces la propiedad (3) es vacía y (2) dice que las entradas son alternantes; así $E^{(1^n)}$ es la potencia exterior $\wedge^n(E)$ la cual es construida como el cociente de $E^{\otimes n}$ por el submódulo generado por todos los $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$, donde cualesquiera dos v_i son iguales. El hecho de que E^λ es único, salvo isomorfismo canónico, se sigue de la descripción como solución al problema universal. Para construirlo, notemos que el módulo universal con la propiedad (1) es el producto tensorial de n copias de E , este producto lo denotaremos por $E^{\otimes\lambda}$ para enfatizar que los factores están indexados por los cuadros del diagrama de Young de λ . El módulo universal con las propiedades (1) y (2) es el cociente $E^{\otimes\lambda}$ por el submódulo generado por los tensores de elementos de E que tienen dos entradas iguales en la misma columna. Si nuestro número λ decrece las columnas de izquierda a derecha, esto identifica al último módulo con el módulo $\wedge^{\mu_1} E \otimes_R \dots \otimes_R \wedge^{\mu_i} E$, donde μ_i es la longitud de la i -ésima columna del diagrama de λ , es decir $\mu = \bar{\lambda}$.

La función de $E^{\times\lambda}$ a $\wedge^{\mu_i} E$ es la siguiente: dado un vector en $E^{\times\lambda}$, la función toma el producto exterior de las entradas en cada columna de arriba hacia abajo, y luego toma el producto tensorial de esas clases. Por ejemplo, dado el siguiente diagrama

x	u
y	v
z	w

bajo la función descrita antes tiene imagen $(x \wedge y \wedge z) \otimes (u \wedge v \wedge w) \in \wedge^3 E \otimes \wedge^3 E$. Escribimos esta transformación de $E^{\times\lambda}$ a $\otimes \wedge^{\mu_i} E$ como $v \mapsto \wedge v$. Entonces

$$E^\lambda = \wedge^{\mu_1} E \otimes_R \dots \otimes_R \wedge^{\mu_i} E / Q^\lambda(E), \tag{1}$$

donde $Q^\lambda(E)$ es el submódulo generado por todos los elementos de la forma $\wedge v - \sum \wedge w$, donde la suma sobre todos los w obtenidos de v por intercambio con el procedimiento descrito en (3), para una elección de cuadros y columnas.

Definición 0.1.2. Sea e_1, \dots, e_m un conjunto ordenado de elementos en E . Entonces, para cualquier numeración T de λ con elementos en $\{1, \dots, m\}$, tenemos un elemento en $E^{\times \lambda}$ reemplazando cualquier i en un cuadro de T por el elemento e_i . La imagen de este elemento en E^λ lo denotamos por e_T .

Lema 0.1.3. Si E es libre en e_1, \dots, e_m , entonces $E^\lambda = F/Q$, donde F es libre en los elementos e_T para todas las numeraciones T de λ con entradas en $1 \dots, m$ y Q es generado por los elementos:

- (1a) e_T si T tiene dos entradas iguales en cualquier columna;
- (2a) $e_T + e_{T'}$ donde T' es obtenida de T intercambiando dos entradas en una columna;
- (3a) $e_T - \sum e_S$, donde la suma sobre todos los S obtenidos de T por un intercambio como en 0.1.

Demostración. Se sigue de la multilinealidad de las funciones, que los elementos e_T generan a E^λ ; así tenemos la función sobreyectiva $f : F \rightarrow E^\lambda$. Las propiedades (2) y (3) implican que los generadores de Q bajo la función f se van a cero, así la función inducida $\bar{f} : F/Q \rightarrow E^\lambda$ es un isomorfismo. En efecto, la función ya es sobreyectiva, demostremos que es inyectiva, para ello notemos que los vectores e_T cuando T varía sobre todas las numeraciones de λ forman una base para el producto tensorial $E^{\otimes \lambda}$. El módulo obtenido usando las relaciones (1a) y (2a) es exactamente el producto tensorial $\wedge^{\mu_1} E \otimes \dots \otimes \wedge^{\mu_k} E$ (y e_T con todas las columnas estrictamente crecientes forman una base para este módulo). Las relaciones en (3a) generan las relaciones del módulo $Q^\lambda(E)$, pues los e_i generan a E y de la R multilinealidad. Por tanto el Lema se sigue de la ecuación (1). ■

Quizás la más simple y temprana aparición de las relaciones (1)- (3) está en la siguiente identidad en álgebra lineal.

Lema 0.1.4 (Lema de Sylvester). Sean $M, N \in \mathbf{Mat}_{p \times p}(\mathbb{R})$ y $1 \leq k \leq p$, entonces $\det(M) \det(N) = \sum \det(M') \det(N')$ donde la suma corre sobre todos los pares (M', N') de matrices obtenidas de M y N intercambiando un conjunto fijo de k columnas de N con cualesquiera k columnas de M preservando el orden de las columnas.

Demostración. Por la propiedad alternante de los determinantes, no hay pérdida de generalidad si suponemos que el conjunto de columnas fijas de N consta de las primeras k columnas. Para vectores $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^p$, denotamos con $|v_1 \dots v_p|$ al determinante de la matriz cuyas columnas son los vectores v_1, \dots, v_p . La identidad a probar es la siguiente

$$|v_1 \dots v_p| |w_1 \dots w_p| = \sum_{i_1 < \dots < i_k} |v_1 \dots w_1, \dots, w_k \dots v_p| |v_{i_1} \dots v_{i_k} w_{k+1} \dots w_p| \quad (2)$$

donde, en la suma, los vectores w_1, \dots, w_k son intercambiados con los vectores v_{i_1}, \dots, v_{i_k} . Es suficiente mostrar que la diferencia de los lados de la ecuación (2) es una función alternante de los $p+1$ vectores v_1, \dots, v_p, w_1 debido a que toda función debe hacerse cero ($\wedge^{p+1}(\mathbb{R}^p) = 0$). Para esto es suficiente mostrar que los dos lados son iguales cuando dos vectores sucesivos v_i, v_{i+1} son iguales. Lo cual es inmediato de la

propiedad de los determinantes, ya que en la parte izquierda de la ecuación (2) se hace cero, y del lado derecho se hace cero pues tenemos $\binom{p}{k}$ sumandos en los cuales se anulan s sumandos donde aparecen v_i y v_{i+1} en un mismo determinante en cada sumando y los otros $\binom{p}{k} - s$ son un número par de sumandos que se eliminan dos a dos de tal forma que la ecuación (2) se anula; y cuando $v_p = w_1$ es suficiente probar que la diferencia de los dos lados en (2) es una función alternante de v_1, \dots, v_p, w_2 . Otra vez el caso $v_i = v_{i+1}$ es inmediato, y el caso cuando $v_p = w_2$ se obtiene de igual manera por la propiedad de los determinantes. ■

Sean Z_{ij} indeterminadas con $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ y $R[Z] = R[Z_{11}, \dots, Z_{nm}]$ el anillo de polinomios en esas variables. Para cada p -tupla i_1, \dots, i_p de enteros en $\{1, \dots, m\}$ con $p \leq n$, sea

$$D_{i_1, \dots, i_p} = \det \begin{bmatrix} Z_{1i_1} & \cdots & Z_{1i_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{pi_1} & \cdots & Z_{pi_p} \end{bmatrix}$$

la cual es una función alternante en i_1, \dots, i_p . Para todo diagrama de Young λ , con al menos n renglones y una numeración arbitraria T de λ con entradas en $\{1, \dots, m\}$, denotamos por D_T al producto de los determinantes correspondientes a las columnas de T , es decir, $D_T = \prod_{i=1}^l D_{T(1,j)T(2,j)\dots T(\mu_j,j)}$ donde μ_j es la longitud de la j -ésima columna de λ y $T_{(i,j)}$ es la entrada de T en el i -ésimo renglón y j -ésima columna.

Lema 0.1.5. *Si E es libre con base e_1, \dots, e_m , entonces existe un homomorfismo canónico de E^λ a $R[Z]$ que envía e_T a D_T para toda T .*

Demostración. Usando el Lema 0.1.3, es suficiente probar que los elementos D_T satisfacen las propiedades correspondientes a (1a)-(3a) del Lema. Las primeras dos propiedades se siguen de la propiedad alternante de los determinantes. La propiedad (3a) se sigue del Lema de Sylvester aplicado a las matrices apropiadas. Para esto, supongamos que las dos columnas de T en las cuales el intercambio tiene lugar son las dos primeras y que se realiza en las entradas i_1, \dots, i_p de la primera y j_1, \dots, j_q de la segunda. Sean $N = \begin{bmatrix} Z_{1j_1} & \cdots & Z_{1j_p} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ Z_{pj_1} & \cdots & Z_{pj_q} & I_{p-q} \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} Z_{1i_1} & \cdots & Z_{1i_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{pi_1} & \cdots & Z_{pi_p} \end{bmatrix}$ donde la matriz N tiene la matriz identidad de tamaño $p - q$ en la parte inferior derecha, y un bloque de ceros sobre esa matriz de tamaño $q \times (p - q)$. El Lema de Sylvester, aplicado a esas dos matrices y el subconjunto de columnas especificado por el subconjunto de la columna derecha de T como intercambio, nos da el resultado deseado. ■

Teorema 0.1.6. *Si E es libre con generadores e_1, \dots, e_m , entonces E^λ es libre con generadores e_T , cuando T varía sobre todas las tablas sobre λ con entradas en $\{1, \dots, m\}$.*

Demostración. Para la prueba de que e_T genera a E^λ , necesitamos definir un nuevo orden en las numeraciones; sean T, T' numeraciones de λ . Decimos que $T \prec T'$ si en la primera columna (de derecha a izquierda) diferente en las dos numeraciones, en el primer cuadro donde las numeraciones son distintas (de abajo a arriba) la entrada en T' es mayor que la de T . Usaremos el Lema 0.1.3 donde nos dice que $E^\lambda = F/Q$, debemos mostrar que dada cualquier numeración T , que no es una tabla, podemos escribir a e_T como combinación lineal de elementos e_S , con $T \prec S$ y elementos en Q . Podemos asumir que las entradas en las columnas de T son estrictamente crecientes, usando las relaciones (1a) y (2a), note que al hacer que las columnas sean estrictamente crecientes en T , podemos reemplazarlo por un T' más grande que T en el orden descrito. Si

las columnas de T son estrictamente crecientes pero no es una tabla, supongamos que la k -ésima entrada de la columna j es estrictamente más grande que la k -ésima entrada de la $j + 1$ columna. Entonces, tenemos que $e_T = \sum e_S$, donde la suma es sobre todas las S obtenidas de T intercambiando las primeras k entradas de la $j + 1$ columna de T con k entradas en la j columna, y como cada S es mayor que T en este orden, por tanto e_T genera a E^λ . Para probar que e_T son linealmente independientes, usaremos el Lema 0.1.5, para así probar que los D_T son linealmente independientes cuando T varía sobre las tablas. Para esto, ordenemos las variables Z_{ij} en el siguiente orden: $Z_{ij} < Z_{i'j'}$ si $i < i'$ ó $i = i'$ y $j < j'$. Ordenamos también los monomios en esas variables lexicográficamente: $M_1 < M_2$ si el más pequeño Z_{ij} que ocurre en una potencia diferente ocurre en la potencia más pequeña en M_1 que en M_2 . Note que si $M_1 < M_2$ y $N_1 \leq N_2$, entonces $M_1 N_1 < M_2 N_2$. De esta definición, se sigue que el monomio más pequeño que aparece en un determinante D_{i_1, \dots, i_p} con $i_1 < \dots < i_p$, es el término diagonal $Z_{1i_1} \cdots Z_{pi_p}$. Por tanto el monomio más pequeño que aparece en D_T , si T tiene columnas crecientes, es $\prod (Z_{i,j})^{m_T(i,j)}$ donde $m_T(i,j)$ es el número de veces que j aparece en la i -ésimo renglón de T . Este monomio ocurre con coeficiente 1. Ordenamos las tablas $T < T'$ si el primer renglón donde ellos difieren, y la primera entrada donde ellos son distintos en ese renglón, es más pequeño en T que en T' . Equivalentemente, el más pequeño i para el cual existe un j con $m_T(i,j) \neq m_{T'}(i,j)$, y el más pequeño j tal que $m_T(i,j) < m_{T'}(i,j)$. Se sigue que si $T < T'$, entonces el monomio más pequeño que ocurre en D_T es más pequeño que cualquier monomio en $D_{T'}$. De esto, tenemos la independencia lineal, pues si $\sum r_T D_T = 0$, tomando T mínimo tal que $r_T \neq 0$, y entonces el coeficiente de $\prod (Z_{i,j})^{m_T(i,j)}$ en $\sum r_T D_T$ es r_T . ■

Corolario 0.1.7. *La función de E^λ a $R[Z]$ es inyectiva y su imagen D^λ es libre en los polinomios D_T cuando T varía sobre las tablas en λ con $\{1, \dots, m\}$.*

El ideal de las relaciones cuadráticas

El principal resultado puede ser escrito en términos de álgebras simétricas. Recordemos que para un espacio vectorial complejo V , el álgebra simétrica $\text{Sym}(V)$ es la suma directa de las potencias simétricas de V :

$$\text{Sym}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Sym}^n V,$$

con $\text{Sym}^0 V = \mathbb{C}$. El homomorfismo natural $\text{Sym}^n V \otimes \text{Sym}^m V \longrightarrow \text{Sym}^{n+m} V$, que actúa de la siguiente manera $(v_1 \cdot \dots \cdot v_n) \otimes (w_1 \cdot \dots \cdot w_m) \mapsto v_1 \cdot \dots \cdot v_n \cdot w_1 \cdot \dots \cdot w_m$ hace a $\text{Sym}(V)$ una \mathbb{C} -álgebra conmutativa graduada. Si $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ es una suma directa de r espacios vectoriales, existe un isomorfismo canónico de álgebras $\text{Sym}(V) = \text{Sym}(V_1) \oplus \dots \oplus \text{Sym}(V_r)$, pues se sigue de la propiedad universal de las potencias simétricas. En particular, tomando una base X_1, \dots, X_r para V nos da una identificación de $\text{Sym}(V)$ con el anillo de polinomios $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$. Sea m un entero fijo tal que $m \geq d_1 > \dots > d_s > 0$ y sea E un espacio vectorial de dimensión m . Definimos un álgebra $S(E; d_1, \dots, d_s)$ como el álgebra simétrica $\wedge^{d_1} E \oplus \dots \oplus \wedge^{d_s} E$, módulo el ideal generado por las relaciones cuadráticas

$$S(E; d_1, \dots, d_s) = \bigoplus \text{Sym}^{a_1}(\wedge^{d_1} E) \otimes \dots \otimes \text{Sym}^{a_s}(\wedge^{d_s} E) / Q, \quad (3)$$

donde la suma corre sobre todas las s -tuplas (a_1, \dots, a_s) de enteros no negativos, donde $Q = Q(E; d_1, \dots, d_s)$ es el ideal generado por las relaciones cuadráticas, las cuales son obtenidas como sigue: para cualquier par

0.1. IDEALES PRIMOS ESPECIALES

$p \geq q$ en $\{d_1, \dots, d_s\}$, y cualquiera v_1, \dots, v_p y w_1, \dots, w_q en E , un generador de Q es $(v_1 \wedge \dots \wedge v_p)(w_1 \wedge \dots \wedge w_q) - \sum_{i_1 < \dots < i_k} (v_1 \dots w_1 \dots w_k \dots v_p)(v_{i_1} \dots v_{i_k} w_{k+1} \dots w_q)$ donde en la suma, los vectores w_1, \dots, w_k son intercambiados con los vectores v_{i_1}, \dots, v_{i_k} . Note que si $p > q$, este generador está en $\wedge^p E \otimes \wedge^q E$, y si $p = q$ está en $\text{Sym}^2(\wedge^p E)$.

Tomando una base para e_1, \dots, e_m para E , es decir identificando E con \mathbb{C}^m , esta álgebra $S(E; d_1, \dots, d_s)$ puede ser identificada con el cociente de un anillo polinomial con variables X_{i_1, \dots, i_p} , para subconjuntos de p elementos i_1, \dots, i_p de $\{1, \dots, m\}$, con $p \in \{d_1, \dots, d_s\}$; X_{i_1, \dots, i_p} corresponde a $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \in \wedge^p E$. Así, el ideal es generado por todas las relaciones cuadráticas

$$X_{i_1, \dots, i_p} X_{j_1, \dots, j_q} - \sum X_{i'_1, \dots, i'_p} X_{j'_1, \dots, j'_q}, \quad (4)$$

donde la suma corre sobre todos los intercambios de j_1, \dots, j_k con k de los índices i_1, \dots, i_p , con $p \geq q \geq k \geq 1, p, q \in \{d_1, \dots, d_s\}$. Denotamos este anillo por $S(m; d_1, \dots, d_s)$:

$$S(m; d_1, \dots, d_s) = \mathbb{C}[X_{i_1, \dots, i_p}, p \in \{d_1, \dots, d_s\}] / Q, \quad (5)$$

donde Q está generado por las relaciones dadas en (4).

Sea λ una partición cuyas columnas tienen longitud en el conjunto $\{d_1, \dots, d_s\}$, esto es, el conjugado $\tilde{\lambda}$ tiene forma $(d_1^{a_1} \dots d_s^{a_s})$ para enteros no negativos a_1, \dots, a_s , es decir $\lambda = (d_1^{a_1} \dots d_s^{a_s})$ donde a_j indica el número de veces que aparece d_j en la partición de λ . Hemos visto que la representación E^λ es el cociente de $\text{Sym}^{a_1}(\wedge^{d_1} E) \otimes \dots \otimes \text{Sym}^{a_s}(\wedge^{d_s} E)$ por el subespacio generado por las relaciones cuadráticas. En particular, se sigue que el álgebra $S(m; d_1, \dots, d_s)$ es la suma directa de copias de E^λ . Si $n \geq d_1$, el Corolario 0.1.7 nos da un isomorfismo canónico de $S(m; d_1, \dots, d_s)$ al subálgebra de $\mathbb{C}[Z]$ generada por todos los D_T , donde T varía sobre todas las tablas sobre diagramas de Young cuyas columnas tienen longitudes $\{d_1, \dots, d_s\}$ y cuyas entradas están en $\{1, \dots, m\}$, este isomorfismo lleva a X_{i_1, \dots, i_p} en D_{i_1, \dots, i_p} . Más aún, hemos visto que cada E^λ es isomorfo a D^λ bajo el isomorfismo, entonces basta probar que la suma de D^λ en $\mathbb{C}[Z]$ es directa, lo cual se sigue del hecho de que D^λ son representaciones irreducibles no isomorfas. En particular, el anillo $S(m; d_1, \dots, d_s)$ es un dominio entero, pues es isomorfo al subanillo del anillo de polinomios $\mathbb{C}[Z]$.

De lo anterior se puede deducir la siguiente:

Proposición 0.1.8. *El ideal en $\text{Sym}^{a_1}(\wedge^{d_1} E) \otimes \dots \otimes \text{Sym}^{a_s}(\wedge^{d_s} E)$ generado por las relaciones cuadráticas es un ideal primo.*

El resultado también es cierto cuando \mathbb{C} es reemplazado por cualquier dominio entero R , y E es un R -módulo libre con m generadores. El anillo $S(m; d_1, \dots, d_s)$ definido como el cociente de un anillo polinomial $R[X_{i_1, \dots, i_p}]$ por el ideal generado por los polinomios D_T , y el D_T para T una tablas de una forma con columnas de longitudes d_1, \dots, d_s y entradas en $\{1, \dots, m\}$, forman una base. Además, la prueba es la misma una vez que conocemos la independencia lineal de los D_T .

Corolario 0.1.9. *El ideal generado por las relaciones de Plücker, es un ideal primo.*

Demostración. Como el ideal generado por las relaciones de Plücker es un ideal generado por relaciones cuadráticas y además vimos al principio de esta subsección que tenemos una identificación de las álgebras simétricas sobre \mathbb{C} con el anillo de polinomios con variables los elementos de una base del espacio, en nuestro caso este anillo de polinomios es $\mathbb{C}[e_1, \dots, e_d, x_1, \dots, x_n]$. Por tanto, la Proposición 0.1.8 nos dice que el ideal generado por las relaciones de Plücker son un ideal primo. ■

Bibliografía

- [Gab80] P. Gabriel. Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. In Representation theory I (Workshop, Carleton University, Ottawa, Ont., 1979), volumen 831, Lecture Notes in Math, 1-71. Springer, Berlin, 1980.
- [ARS95] M. Auslander, I. Reiten and S.O. Smalø. Representation theory of Artin algebras , volumen 36 de Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge,1995.
- [FZ03] S. Fomin and A. Zelevinsky. Y-systems and generalized associahedra. Annals of Math, 158(3),2003.
- [FZ03a] S. Fomin y A. Zelevinsky. Cluster algebras II, finite type classification. Inventiones Mathematicae, 154:63-121, 2003.
- [CCS08] P. Caldero, F. Chapoton, R. Schiffler. Quivers with relations arising from clusters (\mathbb{A}_n case). Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), 1347-1364.
- [Sch] R. Schiffler. A cluster expansion formula (\mathbb{A}_n case). The electronic Journal of Combinatorics 15 (2008).
- [FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras I. Foundations. J. Amer. Math. Soc., 15(2):497-529, 2002.
- [BV07] Aslak Bakke Buan and Dagfinn F. Vatne. Derived equivalence classification for cluster-tilted algebras of type \mathbb{A}_n . Journal of Algebra, Volumen 319 (2008), 2723-2738
- [Ful] William Fulton, Young Tableaux. London Mathematical Society. Student text 35. 1999.
- [Rep] Ibrahim Assem, Daniel Simson, Andrzej Skowronsky. Elements of the Representation Theory of Associative algebras. London Mathematical Society. Student Text 65. 2006.
- [Car] Roger Carter. Lie Algebras of Finite and Affine Type. Cambridge studies in advanced mathematics 96.2005.
- [EW] Karin Erdmann and Mark J. Wildon. Introduction to Lie Algebras. Springer Undergraduate Mathematics Series. 2006.