UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES

"ACATLAN"

SISTEMA EVOLUTIVO PARA LA OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN.

P R E S E N T A

MAURICIO VÁZQUEZ ESTÉVEZ.

ASESOR: MTRO. LUIS ALEJANDRO TAVERA PÉREZ

ACATLÁN, ESTADO DE MÉXICO 2005.

SISTEMA EVOLUTIVO PARA LA OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN.

POR
MAURICIO VÁZQUEZ ESTÉVEZ.

2005

A Dios, señor todopoderoso, por permitirme vivir y disfrutar de las maravillas de este mundo.

A la razón que hizo posible mi existencia, a un amor inconmensurable, un amor incondicional y mi mayor orgullo.

A Mis Padres.

A todas aquellas personas que me han brindado la oportunidad de mostrarles mi amistad, cariño y amor.

A mis adorables y bien queridos hermanos, por su apoyo y tantas muestras de cariño recibidas, los amo. Eleazar Agustín, Daniel, Juan Carlos, María Eugenia, Jorge Alberto y Ana Lilia.

A todos mis sobrinos que comparten conmigo este momento. Bety, Kika, Jerry, Dianis, Sally, Dany, Sony, Vero, Viky, Lalo, Beto, Juanito y Lorenita.

A mis amigos que tanto aprecio y que sin ellos a lo largo de mi vida, no hubiera tenido tantas horas de felicidad, estudio, juerga y diversión.

AGRADECIMIENTOS.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por acogerme y darme la oportunidad de formarme Profesionalmente en la máxima casa de estudios de México y América Latina.

Pese a quien le pese.

¡¡ Goya Universidad !!

Un especial agradecimiento por su apoyo, exigencia, excelentes consejos y sobre todo por tu amistad que me ayudo a culminar este esfuerzo.

Act. Luis Alejandro Tavera Pérez.

Resumen

A través de la simulación del proceso de selección natural de las especies, se desarrolló una alternativa para evaluar portafolios de inversión, consiguiendo obtener una herramienta que permite buscar, dentro de los millones de combinaciones que se pueden formar a partir de los activos disponibles en un mercado de valores, una combinación con el menor riesgo posible, dado un rendimiento esperado.

Palabras clave: Simulación, portafolios, inversión, combinaciones, riesgo

Abstract

Through the simulation process of the natural selection of the species, an alternate solution was developed to evaluate investment portfolios in order to obtain a tool that searches – within the million combinations of assets available in a stock market – the combination with the smaller possible risk given an expected return.

Keywords: Simulation, portfolios, investment, combinations, risk

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, los mercados financieros en el mundo, buscan día a día encontrar los métodos, fórmulas, procesos estadísticos etc., que les permita reducir el riesgo en sus inversiones e incrementar sus utilidades. Lo anterior como principio rector de la inmensa mayoría inversionistas, sin considerar raza, credo, condición social y/o condición económica.

Hoy en día se realizan diversos estudios utilizando como herramienta básica a las matemáticas, tales como los Procesos Estocásticos, Movimientos Brownianos, Series de Tiempo, etc; todas ellas buscan modelar el comportamiento de los mercados, de los precios de las acciones y tratan de predecir el futuro inmediato.

Una de las nuevas herramientas que surge a finales del siglo pasado y continúa su desarrollo en el presente, son los Algoritmos Evolutivos, mismos que tratan de simular el comportamiento de la naturaleza en la evolución y preservación de las especies. Buscan aprovechar el conocimiento adquirido de este fenómeno para trasladarlo a problemas que enfrenta el hombre.

El presente trabajo, toma de referencia los principios esenciales de la evolución, es decir; la sobre vivencia de los organismos más aptos para adaptarse a los cambios y la tendencia de los mismos a mezclarse y reproducirse buscando con ello su evolución, para desarrollar un Algoritmo Evolutivo que permita contar con una herramienta que analice dentro de una espacio de búsqueda suficientemente grande, la mejor combinación de activos que formen un portafolio de inversión y las proporciones que deberá invertir en cada activo para obtener un rendimiento esperado al menor riesgo posible.

Esta tesis utiliza el método de Markowitz para evaluar la eficiencia de cada portafolio, y con el Algoritmo Evolutivo se busca de manera eficiente y eficaz, obtener los mejores portafolios.

Para explicar como se desarrolló este Algoritmo Evolutivo; En el Capítulo I, se describe la explicación de la teoría que dio origen a los mismos, así como la descripción de las características de los Algoritmos Evolutivos, y los Algoritmos Genéticos de Holland, su importancia alcances, ventajas y desventajas de los mismos. Asimismo, se ejemplifican las bondades de los Algoritmos Evolutivos, la eficiencia y eficacia para acercarse a los puntos cercanos y/o al punto óptimo.

En el capítulo 2 se explica la teoría de portafolios de mínima varianza con ausencia de activos libres de riesgo, el Método Markowitz para evaluar portafolios de inversión.

Posteriormente en el capítulo 3 se fusionan los conocimientos desarrollados en los capítulos 1 y 2 para dar paso a la formación del Algoritmo Evolutivo que permitirá al ser implementado en un programa de cómputo, evaluar de manera eficiente diversos portafolios. También se exponen los problemas a considerar en la implementación del Algoritmo planteado.

Por último en el Capítulo 4, se implementa el modelo y se realizar varias corridas del programa de cómputo, permitiendo así, observar el comportamiento del mismo, evaluar el modelo, analizar los resultados de las corridas con diversos parámetros a través de gráficas.

Por último se exponen las conclusiones que validan y demuestran la utilidad del modelo, la convergencia del mismo hacia portafolios cada vez de menor riesgo y con un rendimiento esperado.

CAPÍTULO

1

ALGORITMOS EVOLUTIVOS

INTRODUCCIÓN:

Durante los últimos treinta años ha habido un creciente interés en desarrollar modelos que simulen los principios de la evolución y herencia. Áreas como la Biología, Medicina, Matemáticas entre otras, buscan aprovechar el conocimiento adquirido de la reproducción celular, de la evolución de las especies y su genoma. Asimismo, desarrollar modelos con características similares a estos procesos de la naturaleza, que permitan desarrollar herramientas útiles que coadyuven a la resolución de problemas diversos.

En el presente capítulo conoceremos las ventajas que ofrecen los Algoritmos Genéticos (AG), para resolver diversos problemas que se logran conceptuar a través de la programación evolutiva, es decir; problemas capaces de adaptarse a las siguientes características:

- Mantener una población de soluciones potenciales.
- Tener un mecanismo de selección basado en la aptitud de una solución.
- Construir una nueva población a partir de la aplicación de un conjunto de operadores genéticos.

1.1 Algoritmos Genéticos

Los Algoritmos Genéticos (AG), son algoritmos cuyos métodos investigan y modelan algunos fenómenos naturales: la herencia genética y los postulados de Darwin sobre la supervivencia. Declarados como:

> *".. la metáfora que está debajo de los algoritmos genéticos es eso de evolución natural. En la evolución, el problema de cada una de las especies, esta buscando la adaptación beneficiosa en un ambiente complicado y cambiante. El conocimiento que cada especie ha ganado es incluido en la composición de los cromosomas de sus miembros"*

1.1.1 Concepto natural de los Algoritmos Genéticos.

La idea detrás de los algoritmos genéticos es hacer lo que la naturaleza hace. Ejemplo, en un bosque, en cualquier momento, existe una población de conejos. Algunos de ellos son más rápidos, unos más inteligente que otros. Algunos de estos conejos, más rápidos y más inteligentes probablemente serán comidos por los zorros, y por consiguiente más de ellos sobreviven para hacer que lo que hacen los conejos lo hagan mejor y de igual manera se hagan más conejos. Claro, algunos de los conejos más lentos, más torpes simplemente sobrevivirán porque ellos tendrán suerte. Esta población superviviente engendrará nuevos conejos. El resultado de la cría es una mezcla buena de material genético de conejo, algunos conejos lentos engendran con los conejos rápidos, algunos rápidos con otros rápidos, algunos conejos inteligentes con los conejos tontos, y así sucesivamente.

En la cima de eso, la naturaleza envía una "liebre salvaje" de vez en cuando deformando algo del material genético del conejo. Los conejos bebés resultantes (por término medio) son más rápidos y más inteligentes que éstos en la población original porque los padres más rápidos y más inteligentes sobrevivían a los zorros. No olvidar que los zorros están viviendo un proceso similar, pues por otra parte los conejos podrían ponerse demasiado rápidos e inteligentes y no podrían los zorros coger a cualquiera de ellos. Un algoritmo genético sigue un procedimiento paso a paso que estrechamente empareja la historia de los conejos.

1.1.2. Origen de la Genética.

"El principio fundamental de selección natural", como el principio evolutivo principal fue formulado por Charles Darwin y dio origen a la genética mucho tiempo antes del descubrimiento de los mecanismos genéticos. Ignorante del principio de herencia básico, Darwin supuso la fusión o mezcla de la herencia, suponiendo que esas cualidades paternales se mezclan junto con los fluidos en el organismo de la descendencia. Su teoría de la selección levantó objeciones serias, primero declaradas por F. Jenkins, pues cruzando rápidamente niveles fuera de cualquier distinción hereditaria, no hay ninguna selección en las poblaciones homogéneas (eso fue llamado "la pesadilla de Jenkins"). No fue sino hasta 1865, cuando G. Mendel descubrió el principio básico de transferencia de factores hereditarios del padre a descendencias que mostró la naturaleza discreta de estos factores, y que "la pesadilla de Jenkins"podría explicarse.

Las leyes de Mendel se dieron a conocer a la comunidad científica después de que ellas se habían redescubierto independientemente en 1900 por H. de Vries, K. Correns y Von de K. Tschemak.

Estas leyes consisten en lo siguiente:

Primera Ley de Mendel: A esta ley se le llama también Ley de la uniformidad de los híbridos de la primera generación, y dice que cuando se cruzan dos variedades individuos de raza pura ambos (homocigotos) para un determinado carácter, todos los híbridos de la primera generación son iguales.

Mendel llegó a esta conclusión trabajando con una variedad pura de plantas de guisantes que producían las semillas amarillas y con una variedad que producía las semillas verdes. Al hacer un cruzamiento entre estas plantas, obtenía siempre plantas con semillas amarillas.

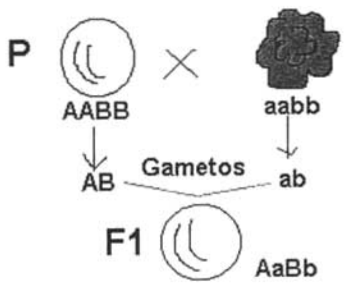


Figura 1.1 Primera Ley de Mendel.

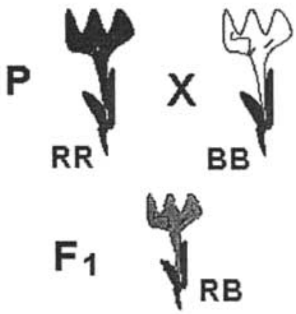


Figura 1.2 Variante de la Primera Ley de Mendel

El polen de la planta progenitora aporta a la descendencia un alelo para el color de la semilla, y el óvulo de la otra planta progenitora aporta el otro alelo para el color de la semilla ; de los dos alelos, solamente se manifiesta aquél que es dominante (A), mientras que el recesivo (a) permanece oculto, también para el caso en que un determinado gen dé lugar a una herencia intermedia y no dominante, como es el caso del color de las flores de "Don Diego de noche" (Mirabilis jalapa). Al cruzar las plantas de la variedad de flor blanca con plantas de la variedad de flor roja, se obtienen plantas de flores rosas. La interpretación es la misma que en el caso anterior, solamente varía la manera de expresarse los distintos alelos.

Segunda Ley de Mendel: De la separación o disyunción de los alelos. Mendel tomó plantas procedentes de las semillas de la primera generación del experimento anterior y las polinizó entre sí. Del cruce obtuvo semillas amarillas y verdes en la proporción 3:1. , así pues, aunque el alelo que determina la coloración verde de las semillas parecía haber desaparecido en la primera generación filial, vuelve a manifestarse en esta segunda generación.

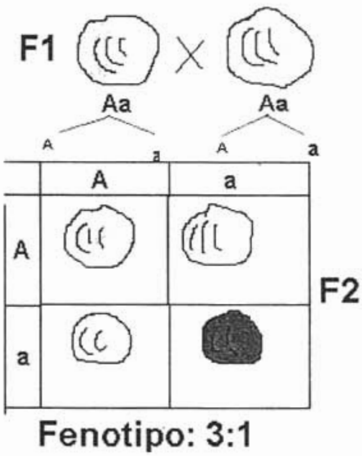


Figura 1.3 Segunda Ley de Mendel.

Los dos alelos distintos para el color de la semilla presentes en los individuos de la primera generación filial, no se han mezclado ni han desaparecido, simplemente ocurría que se manifestaba sólo uno de los dos.

Cuando el individuo de fenotipo amarillo y genotipo Aa, forme los gametos, se separan los alelos, de tal forma que en cada gameto sólo habrá uno de los alelos y así puede explicarse los resultados obtenidos.

En otros casos donde se presentan con la herencia intermedia, también se cumple el enunciado de la segunda ley. Si tomamos dos plantas de flores rosas de la primera generación filial (figura 1.1) del cruce que se observa en la figura 1.2 y las cruzamos entre sí, se obtienen plantas con flores blancas, rosas y rojas, en la proporción que se indica en el esquema de la figura 1.3, también en este caso se manifiestan los alelos para el color rojo y blanco, que permanecieron ocultos en la primera generación filial.

En el caso de los genes que manifiestan herencia dominante, no existe ninguna diferencia aparente entre los individuos heterocigóticos (Aa) y los homocigóticos (AA), pues ambos individuos presentarían un fenotipo amarillo.

La prueba del retrocruzamiento, o simplemente cruzamiento, sirve para diferenciar el individuo homo del heterocigótico. Consiste en cruzar el fenotipo dominante con la variedad homocigoto recesiva (aa). Si es homocigótico, toda la descendencia será igual, en este caso se cumple la primera Ley de Mendel. Si es heterocigótico, en la descendencia volverá a aparecer el carácter recesivo en una proporción del 50%.

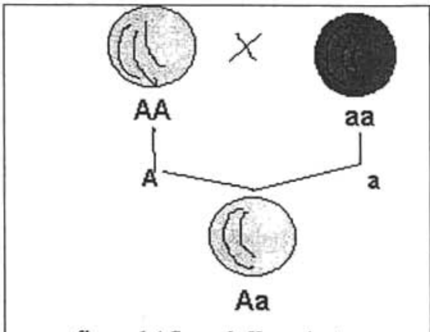


figura ***1.4 Cruza de Homocigoto y Heterocigoto recesivo.***

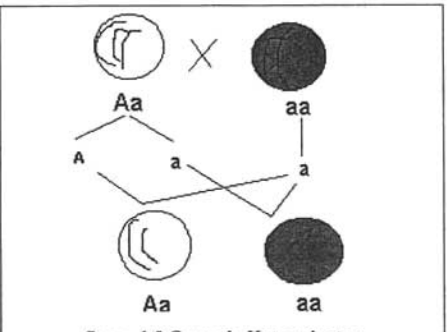


figura 1.5 Cruza de Heterocigoto y Homocigoto recesivo

Tercera Ley de Mendel: Se conoce esta ley como la de la herencia independiente de carácteres, y hace referencia al caso de que se contemplen dos carácteres distintos. Cada uno de ellos se trasmite siguiendo las leyes anteriores con independencia de la presencia del otro carácter. Al cruzar plantas de guisantes de semilla amarilla y lisa con plantas de semilla verde y rugosa (Homocigóticas ambas para los dos caracteres).

Las semillas obtenidas en este cruzamiento eran todas amarillas y lisas, cumpliéndose así la primera ley para cada uno de los caracteres considerados , y revelando también que los alelos dominantes para esos caracteres son los que determinan el color amarillo y la forma lisa. Las plantas obtenidas y que constituyen la F1 son dihíbridas (AaBb).

Estas plantas de la F1 se cruzan entre sí, teniendo en cuenta los gametos que formarán cada una de las plantas. En el cuadro de la figura 1.6 se ven las semillas que aparecen y en las proporciones que se indica.

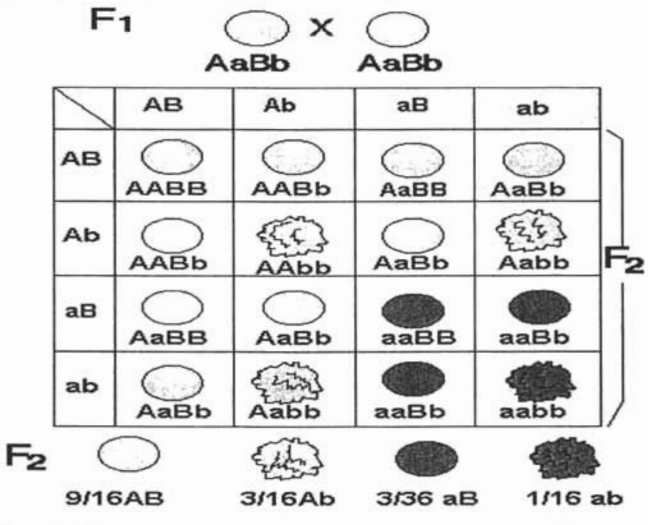


figura 1.6 Proporciones de reproducción de gametos Heterocigotos lisos y rugosos.

Se puede apreciar que los alelos de los distintos genes se transmiten con independencia unos de otros, ya que en la segunda generación filial F2 aparecen guisantes amarillos y rugosos y otros que son verdes y lisos, combinaciones que no se habían dado ni en la generación parental (P), ni en la filial primera (F1). Así mismo, los resultados obtenidos para cada uno de los caracteres considerados por separado, responden a la segunda ley.

La genética fue desarrollada totalmente por T. Morgan y sus colaboradoras que demostraron experimentalmente que los cromosomas son los portadores principales de información hereditaria y que genes que presentan los factores hereditarios están después rayados en los cromosomas, los factores experimentales acumulados demostraron que las leyes de Mendel podían ser válidas para todos los organismos reproducidos sexualmente.

Sin embargo, las leyes de Mendel, incluso después de que ellos habían sido los redescubridores, y Darwin con su teoría de selección natural permanecían independientes, como conceptos no ligados. Fue hasta los años veinte del siglo XX que se demostró que las leyes genéticas de Mendel y la Teoría de Darwin de la selección natural de ninguna manera chocan y que su feliz matrimonio conlleva a la teoría evolutiva moderna".

1.2 Enfoque particular de los Algoritmos Genéticos.

La genética es el estudio de la herencia, y los genetistas investigan como operan los genes y como son trasmitidos de padres e hijos, los genes se agrupan para formar estructuras de más alto nivel denominadas Cromosomas. Los Cromosomas determinan las características internas de un individuo, esto se designa GENOTIPO. La interacción del genotipo con el ambiente es lo que produce el FENOTIPO.

Adaptando estos conceptos básicos a la explicación del origen de los Algoritmos Genéticos, en los humanos, por ejemplo, normalmente poseen 46 cromosomas arreglados en pares, 23 cromosomas los aporta la madre y 23 el padre. El proceso por el cual el número de cromosomas reduce de 46 a 23 se conoce como MEIOSIS. En este proceso los cromosomas se agrupan e intercambian material genético en un proceso conocido como CRUZA. La cruza no produce nuevo material genético, pero si produce nuevas combinaciones a partir del material genético existente. Pueden decirse que los organismos vivos son perfectos al realizar la cruza, pero ocasionalmente se producen MUTACIONES, es decir material genético que no estaba presente en los padres es pasado a los hijos. La frecuencia con la cuál se dan las mutaciones es baja.

La rama de la Genética, que tiene más relación con los AG es la Genética de Poblaciones, los investigadores de esta rama, estudian relaciones evolutivas, el mezclado de material genético dentro y entre especies, y los métodos de adaptación ambiental.

Charles Darwin en su teoría sostiene que la naturaleza mata a los individuos insuficientemente adaptados. La cruza y mutación pueden producir variaciones que son heredadas de padres a hijos. Los individuos con las variaciones más favorables tienen mayor probabilidad de sobrevivir y tener descendencia, por lo que los individuos más aptos (o características de ellos) tienen mayor probabilidad de pasar de generación en generación.

Los Algoritmos Genéticos usan un vocabulario prestado de la Genética. En este trabajo se hablará sobre los individuos (estructura o genotipos), en una población; a menudo estos individuos también se llaman cadena de cromosomas o vectores. Esto podría ser desencaminando un poco; cada célula de cada organismo de una especie dada posee un cierto número de cromosomas en su núcleo; sin embargo, se utilizarán sólo organismos con genes de un cromosoma es decir, haploide, los cromosomas son de hecho unidades - los genes (también los rasgos, caracteres, o decodificadores) - se colocan en la sucesión lineal; cada gen controla la herencia de uno o varios caracteres. Se localizan genes de ciertos caracteres a ciertos lugares del cromosoma que se llama los sitios (las posiciones de la cadena). Cualquier carácter de individuos (como el color de pelo) puede manifestarse diferentemente; se dice que el gen está en varios estados, denominados los alelos (valores del rasgo)

Cada genotipo (de un solo cromosoma) representaría una solución potencial a un problema (el significado de un cromosoma particular, es decir, su fenotipo se define externamente por el usuario).

Una carrera de proceso de evolución en una población de cromosomas corresponde a una búsqueda a través de un espacio de solución potencial. Donde la búsqueda requiere equilibrar dos objetivos: Aprovechamiento de las mejores soluciones y la exploración del espacio de búsqueda. Un ejemplo de ello, es el método de conocido como Escalada en Ascenso[1], ya que es una estrategia que se aprovecha de las soluciones validas no-optimas para mejorarla lo más posible. aunque se debe destacar que descuida la exploración del espacio de soluciones. La búsqueda aleatoria es un ejemplo típico de una estrategia que explora el espacio de búsqueda pero ignora la explotación de las regiones prometedoras.

Los algoritmos genéticos son de la clase denominada de propósito general, un método de búsqueda que golpea un equilibrio notable entre la exploración y explotación del espacio de la búsqueda.

[1] También conocido como el método Hillclibing.

1.3 Qué son los Algoritmos Evolutivos.

Durante los últimos treinta años un creciente interés ha estado dirigido en los problemas que resuelven, sistemas basados en los principios de evolución y herencia: Tales sistemas mantienen una población de soluciones potenciales, ellos tienen algún proceso de selección basado en la aptitud de individuos, y algunos operadores "genéticos."

Para los fines de este trabajo, se define un Algoritmo Evolutivo como:

Procedimiento Algoritmo Evolutivo
Inicio
    $tiempo \leftarrow 0$
    Inicializa $Poblacion(tiempo)$
    Evalua $Poblacion(tiempo)$
Mientras (no condicion-terminar) hacer
Inicio
    $tiempo \leftarrow tiempo + 1$
    Construye $Poblacion(tiempo)$ **a partir de** $Poblacion(tiempo - 1)$
    Alteración $Poblacion(tiempo)$
    Evalua $Poblacion(tiempo)$
Fin Mientras
Fin Procedimiento

Fig. 1.7 Estructura de un Algoritmo Evolutivo.

La Programación Evolutiva (PE) es un algoritmo estocástico que mantiene una población de individuos designada por:

$$Poblacion(tiempo) = \left\{X_1^{tiempo}, X_2^{tiempo}, \ldots, X_n^{tiempo}\right\}$$

Cada uno de los individuos representa una posible solución para un problema en particular y cada individuo es representado con una estructura de datos dependiente del algoritmo que se esté utilizando. Cada una de estas posibles soluciones es evaluada para dar una medida de su aptitud (que tan aceptable es una solución respecto a las demás o en forma absoluta).

Después se crea una población nueva para el siguiente instante de tiempo a través de:

- **La selección de los individuos más aptos (fase de SELECCIÓN).**
- **Transformación de algunos individuos seleccionados (fase de ALTERACIÓN) a través de operadores genéticos.**

Existen operadores genéticos UNARIOS que operan sobre un solo individuo de la población, un ejemplo de este operador es la MUTACIÓN que introduce cambios pequeños en el individuo. Existen operadores genéticos que operan sobre varios individuos de la población generando nuevos a partir de las características de los seleccionados, un ejemplo de estos operadores es la CRUZA.

Existe una gran diversidad de técnicas que poseen los principios básicos de los Algoritmos Evolutivos, estos sistemas se dividen en:

Estrategias Evolutivas: que son algoritmos que imitan la evolución natural para problemas de optimización de parámetros.

Programación Evolutiva de Fogel: que es una técnica para realizar búsquedas en un espacio de máquinas de estado finito.

Algoritmos Genéticos de Holland: que se basa en el mantenimiento de una población de posibles soluciones para un problema utilizando operadores genéticos de Cruza, Mutación e Inversión, produce una nueva población utilizando el principio de la selección de las soluciones más aptas.

Los Algoritmos Evolutivos difieren en:

- **La forma de representar los datos, algunos utilizan representaciones binarias, otros representaciones con estructuras de datos más complejas.**
- **Los operadores genéticos que aplican a los elementos de la población.**
- **Los métodos para crear la población inicial.**
- **Formas diferentes de manejar las restricciones impuestas al problema.**
- **Parámetros del algoritmo.**
- **Tamaño de Población.**
- **Probabilidad de aplicar los operadores genéticos.**
- **Los criterios de selección de los más aptos.**
- **Otros.**

Pero comparten principios generales: "Una población de individuos es transformada y los individuos compiten para sobrevivir". La selección de los operadores que son aplicados varia dependiendo del enfoque seleccionado para implementar el programa evolutivo. La presente tesis modelará un algoritmo discreto con una función de aptitud continua a lo que se denomina un problema de optimización combinatoria.

Por ejemplo, la secuencia de números de tamaño variable, el criterio depende totalmente del problema que se esté tratando de resolver. Un tipo muy importante de optimización combinatoria discreta es la optimización de permutaciones y/o combinaciones. Es decir, encontrar una secuencia de tamaño N de los números del 1 al N con repetición, o la combinación de 1 a N más acertada para un fin en particular.

En particular, la **PE** ha demostrado tener diversas tendencias y conceptos según el autor, sin embargo; la **PE** pueden ser divididos en tres: partes optimización de valores continuos, optimización de valores discretos y en una mezcla de ambos, valores continuos y discretos.

1.3.1 Implementación de los Algoritmos Evolutivos.

Existen diversos criterios que deben ser considerados al tratar de implementar un Algoritmo Evolutivo, sin embargo cada una de éstos, difieren en los siguientes aspectos:

1. **Codificación de los parámetros de un problema. Esta forma de codificación de acuerdo a Holland es binaria.**
2. **Función de Aptitud que le asigna un valor a cada elemento de la población. Ésta función es completamente dependiente del problema, pero debe indicar que tan buena es una solución respecto a otras.**
3. **Criterios para el tamaño de la población, esto depende completamente de la instancia del problema que se quiere resolver.**
4. **Algoritmo de selección de los más aptos. La idea es que los individuos más aptos tengan mayor probabilidad de ser seleccionados.**
5. **Criterio para el paro del Algoritmo. Esto se da cuando las características del individuo más apto han dominado toda la población.**
6. **Implementación de operadores genéticos. El operador CRUZA genera nuevos individuos a partir de los existentes en la población original, otro operador denominado MUTACIÓN, permite modificar de manera aleatoria las características del individuo seleccionado.**

1.3.2 Resolución de una función simple a través de Algoritmos Genético.

Consideremos la siguiente función $f(x) = x \bullet sen(10\pi \bullet x) + 1.0$, y que nuestro problema consiste en encontrar el valor para x en el rango de [-1 , 2] y qué aumenta al máximo la función f, es decir, para encontrar el x_0 tal que: $f(x_0) \geq f(x)$, para toda $x \in [-1,2]$

Con ciertos conocimientos de cálculo diferencial se puede analizar la función f. Los ceros de la primera derivada f' deben determinarse por:

$$f'(x) = sen(10\pi \bullet x) + 10\pi x \bullet \cos(10\pi \bullet x) = 0; \qquad \tan(10\pi \bullet x) = -10\pi x.$$

la ecuación anterior tiene un número infinito de soluciones,

$$x_i = \frac{2i-1}{20} + \varepsilon_i \text{ , para i = 1,2,....} \quad x_0 = 0$$

$$x_i = \frac{2i+1}{20} - \varepsilon_i \text{ , para i = -1,-2,....}$$

Donde los términos ε_i representan sucesiones decrecientes de números reales (para i = 1,2,..., e i = -1,-2....) además del cero. También note que la función f alcanza sus máximos locales para el x_i, si i es un entero impar, y sus mínimos locales para el x_i si i es un entero par.

Entonces el domino del problema $x \in [-1,2]$, la función alcanza su máximo para el $x_{19} = \frac{37}{20} + \varepsilon_{19} = 1.85 + \varepsilon_{19}$, donde $f(x_{19})$ es ligeramente más grande que: $f(1.85) \approx 1.85 \bullet sen(18\pi + \frac{\pi}{2}) + 1.0 = 2.85.$

Se asume, que se desea construir un algoritmo genético para resolver el problema anterior; es decir, aumentar al máximo la función f.

Para realizar la transformación de la función a un problema de Algoritmos Genéticos, se debe usar un vector binario como un cromosoma para representar valores reales de la variable x. La longitud del vector depende de la precisión requerida que, en este ejemplo, es seis lugares después del punto decimal.

El dominio de la variable x tiene longitud 3; el requisito de precisión implica que el rango [-1,2] debe ser dividido en por lo menos $3 \bullet 1000000$ de igual tamaño.

Esto significa que se requieren 22 bits como un vector binario (cromosoma):

$$2097152 = 2^{21} < 3000000 \leq 2^{22} = 4194304$$

El mapeo de una cadena binaria $\langle b_{21}b_{20}...b_0\rangle$ en un número real x del rango [1,2] es claro y se completa en dos pasos:

Convierta la cadena binaria $\langle b_{21}b_{20}...b_0\rangle$ de base 2 a base 10:

$$(\langle b_{21}b_{20}..b_0\rangle)_2 = \left(\sum_{i=0}^{21} b_i \bullet 2^i\right)_{10} = x'$$

Encuentre el correspondiente número real x:

$x = -1.0 + x' \cdot \frac{3}{2^{22}-1}$, donde -1.0 es el límite izquierdo del dominio y 3 es la longitud del dominio por ejemplo, un cromosoma (1000101110110101000111) representa el número 0.637197, dado que:

$x' = (1000101110110101000111)_2 = 2288967$

y $\quad x = -1.0 + 2288967 \cdot \frac{3}{4194303} = 0.637197$

claro, el cromosoma (0000000000000000000000) y (1111111111111111111111) representa los límites del dominio, -1.0 y 2.0, respectivamente.

El proceso de la inicialización es muy simple: se crea una población de cromosomas dónde cada cromosoma es un vector binario de 22 bits. Todos los 22 bits para cada cromosoma se inicializan al azar.

La función de evaluación *eval* para los vectores binarios v es equivalente a la función f: $eval(v) = f(x)$, donde el cromosoma v representan el valor real x.

Como se observó, la función de evaluación juega el papel de medio ambiente, evaluando a las soluciones potenciales por lo que se refiere a su aptitud; por ejemplo, tres cromosomas:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1000101110110101000111), \\ v_2 &= (0000001110000000010000), \\ v_3 &= (1110000000111111000101), \end{aligned}$$

Corresponden al $x_1 = 0.637197, x_2 = -0.958973$, y $x_3 = 1.627888$ respectivamente. Por consiguiente, la función de la evaluación los evaluaría como sigue:

$$\begin{aligned} eval(v_1) &= f(x_1) = 1.586345, \\ eval(v_2) &= f(x_2) = 0.078878, \\ eval(v_3) &= f(x_3) = 2.250650. \end{aligned}$$

Claramente, v_3 es el mejor de los tres cromosomas, ya que éste regresó en su evaluación el valor más alto.

Durante la fase de alteración de los algoritmos genéticos se pueden utilizar dos clásicos operadores genéticos: mutación y la cruza.

La **mutación** es un operador que ocurre con baja probabilidad y lo que hace es introducir una variedad genética o nueva información para hacer más flexible al programa. Este operador funciona de la siguiente manera: se toma el cromosoma del individuo que se va mutar, se elige de manera aleatoria el punto de mutación y se cambia el genotipo del gen por otro posible, en este caso por ser binario si es uno pasará a cero y viceversa.

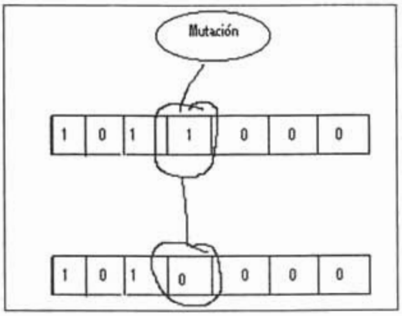


figura 1.8 Operador mutación aplicado sobre 2 genes.

Asumimos que el quinto gen del cromosoma (vector v_3) fue seleccionado para una mutación, entonces el quinto gen en el cromosoma (vector v_3) es 0, este será intercambiado por 1. Así el cromosoma podría ser después de la mutación.

$v_3'=(1110100000111111000101)$

Este cromosoma representa el valor $x_3'=1.721638$ y $f(x_3')=-0.082257$. Esto significa que en esta particular mutación resultó en un significante decrecimiento del valor de cromosoma v_3, entonces.

$v_3''=(1110000001111111000101)$

Corresponde al valor $x_3''=1.630818$ y $f(x_3'')=2.343555$. Obteniendo un incremento sobre el valor original de $f(x_3)=2.250650$.

La aplicación del operador genético de **cruza**, tiene más probabilidad de ocurrencia para una población. Esta función es igual que en la naturaleza, se toman dos partes y de estos surgen dos hijos, los cuales tendrán características de ambos pero serán individuos nuevos.

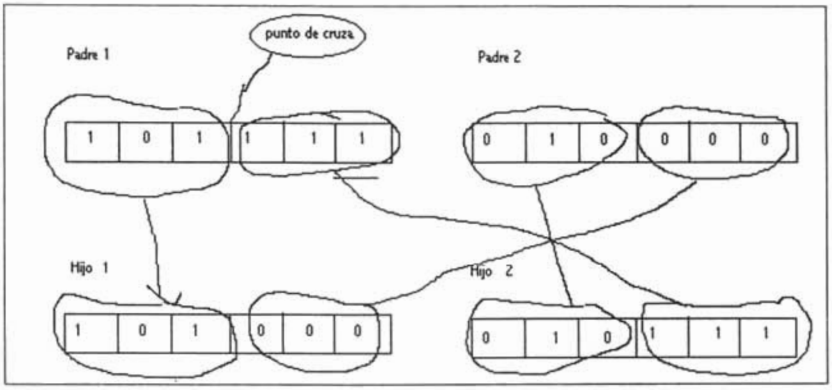


figura 1.9 Operador cruza sobre 2 genes.

Si se aplica el operador antes descrito sobre el cromosoma v_3 y v_2, se asume que el punto de cruza fue seleccionado de manera aleatoria después del 5° gen:

v_2 = (00000 | 01110000000010000), v_3 =(11100 | 00000111111000101).

Los dos vectores resultantes de aplicar el operador son

v'_2 = (00000 | 00000111111000101), v'_3 =(11100 | 01110000000010000).

La evaluación de estos vectores es:

$$f(v_2') = f(-0.998113) = 0.940865,$$
$$f(v_3') = f(1.666028) = 2.459245$$

La segunda evaluación es la mejor evaluación de ambos de sus padres.

$$f(v_2) = 0.078878,$$
$$f(v_3) = 2.250650.$$

Por último para poder implementar el algoritmo se debe parametrizar el problema, es decir; el tamaño de la población ***pop_size* = 50**, probabilidad de cruza p_c=0.25, y la probabilidad de mutación p_m=0.01.

Al implementar un programa de cómputo que realice los cálculos anteriores, se pueden realizar varias corridas del mismo. El mejor cromosoma después de 150 generaciones fue en un ejemplo cualquiera resulta ser:
$v_{max} = (1111001101000100000101)$ el cual corresponde a el valor $x_{max} = 1.850773$ como esperábamos, $x_{max} = 1.85 + \varepsilon$, y $f(x_{max})$ es ligeramente más grande que 2.85

1.4 Óptimos-Cercanos VS Óptimos

Hay una gran clase de problemas interesantes para los que ningún algoritmo bastante rápido se ha desarrollado. Muchos de estos problemas son problemas de optimización que frecuentemente se detectan en las aplicaciones. Dado un problema difícil de optimizar se debe encontrar un algoritmo eficaz cuya solución es aproximadamente óptima.

Para algún problema de optimización se pueden usar también los algoritmos probabilísticos, estos algoritmos no garantizan el valor óptimo, pero escogiendo aleatoria y suficientemente muchos "testimonios" la probabilidad de error puede hacerse tan pequeña como se desee.

Hay muchos problemas de optimización prácticos importantes para los que algoritmos de alta calidad se han desarrollado. Por ejemplo, aplicar simulaciones reiterativas para la solución de problemas consistentes en la colocación de componentes, el Problema del Agente de Viajero (PAV), problemas de transporte, y muchos otros de optimización combinatoria que puede resolverse en las computadoras actuales por la técnica Monte Carlo. En general, cualquier tarea abstracta a ser lograda puede pensarse, como un problema que se percibirse como una búsqueda a través de un espacio de soluciones potenciales. Desde que se busca "la mejor solución", se puede observar ésta tarea como un proceso de optimización. Para los espacios pequeños, bastan normalmente los métodos exhaustivos clásicos; para los espacios más grandes debe pensarse en emplear técnicas como la Inteligencia Artificial, la Simulación entre otras.

1.5 Desventajas de los Algoritmos Evolutivos.

Muchos son las desventajas que se pueden presentar al tratar de resolver diversos problemas, uno de ellos es, que no se adapten adecuadamente con la esencia de la teoría de los Algoritmos Evolutivos.

Mucha literatura resalta los grandes problemas a los que uno se puede enfrentar por tratar de enfocar a los AE, como una técnica exclusiva de optimización, sin embargo, se debe tener presente que no todos los problemas de optimización se pueden modelar como AE.

Muy comúnmente al tratar de resolver un problemas mediante esta técnica nos preguntamos: *¿Son los algoritmos genéticos adecuados para resolver este problema?*; y resulta que la pregunta correcta debe ser: *¿Es la representación del problema adecuada para los algoritmos genéticos?*[2].

[2] Davidor-1991

Lo interesante de este cambio de enfoque es que resalta una característica fundamental de los algoritmos genéticos:

> *"Los algoritmos genéticos procesan eficientemente esquemas cortos, de bajo orden y con desempeño superior al promedio"*

Realmente se han aplicado con éxito los AE a los problemas de optimización como la asignación de rutas, Agendas, control adaptable, modelado cognoscitivo, los problemas de transporte, el problema del Agente Viajero, los problemas del mando óptimo, la optimización de bases de datos, etc. Sin embargo, existen autores que advierten de percibir a los AE como herramientas de optimización o de confundirse con la búsqueda de un óptimo cercano con un óptimo.

> *"... debido a este enfoque histórico, se acentúa que en las aplicaciones de optimización de funciones, es fácil entrar en la trampa de percibir los AE como los algoritmos de optimización y entonces resultar sorprendidos y/o defraudados cuando ellos no encuentran un óptimo 'obvio' en un espacio de la búsqueda particular. Mi sugerencia por evitar esta trampa es pensar en AE como (favorablemente idealizó) la simulación de un proceso natural y como ellos incluyen las metas y propósitos de ese proceso natural. Yo no estoy seguro si cualquiera es apto para definir las tareas, metas y propósito de los sistemas evolutivos; sin embargo, yo pienso que es justo decir que los sistemas generalmente no son percibidos como funciones optimizables."*

Nunca se debe perder de vista que los Algoritmos Evolutivos, son una herramienta que permite explorar de manera eficiente un espacio de búsqueda relativamente grande para encontrar óptimos-cercanos, lo suficiente para satisfacer las necesidades de optimización, y en algunos casos encontrar el óptimo. La mayoría de las ocasiones se empleará AE, donde el espacio de búsqueda sea lo suficientemente grande, de tal manera, que la búsqueda exhaustiva no sea una solución viable.

1.5.1 LA EPÍSTASIS

En la representación de un problema que tiene la característica de presentar un alto grado de interacción entre bits que están separados, un algoritmo genético experimentará serias dificultades para lograr converger hacia un óptimo global.

La interacción entre genes es un aspecto central al estudiar la genética natural, puesto que un grupo de genes interactuantes determinan las características fenotípicas de un individuo. En la naturaleza la presencia o ausencia de ciertos genes pueden activar o desactivar el efecto de otros genes, es decir existe una INTERDEPENDENCIA entre ellos.

Se denomina epístasis a la integración que existe entre los genes[3]. De este modo si un cromosoma presenta un alto grado de epístasis esto indicaría que el efecto de muchos genes depende críticamente de la presencia o ausencia de otros genes.

Como resultado de esto, si la codificación de un problema representa una alta epístasis, la hipótesis de bloques de construcción no se cumple. El efecto de aplicar el operador genético de cruza es que los hijos presentarían características (desde un punto de vista fenotípico) completamente diferentes a las de los padres. El efecto de aplicar el operador genético de mutación tendría el efecto de hacer que el individuo mutado fuera muy diferente al padre. Y como resultado de esto la codificación del problema no sería la adecuada.

[3] Op Cit., Reeves-1995.

Por otro lado si se tiene una codificación de un problema con una epístasis casi nula, el grado de interacción entre los genes es casi cero y sería más eficiente utilizar otro algoritmo diferente a un Algoritmo Evolutivo.

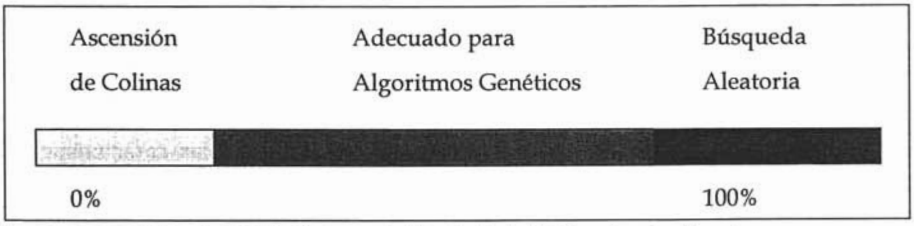


figura. 1.8 Escala de la Epístasis en relación al método de búsqueda más adecuado.

En la figura 1.8 se muestra el grado de interacción que existe para la representación de un problema dependiendo del grado de epístasis[4]. Si es bajo resulta ser más adecuado utilizar la técnica de ascensión de colinas, si el grado de interacción de la representación de un problema es alto, se recomienda utilizar búsqueda aleatoria.

1.5.2. LA IMPORTANCIA DE LA FUNCIÓN DE APTITUD

La función de aptitud es lo que permite discriminar entre soluciones de bajo desempeño y de alto desempeño. La función de aptitud puede ser una medida cuantitativa o cualitativa de la bondad de una posible solución. La función de aptitud es la base para determinar qué soluciones tienen mayor o menor probabilidad de sobrevivir. Por otro lado la función de aptitud permite

[4] Op Cit. Davidor, 1989.

discriminar entre soluciones que no violen restricciones y soluciones que violan restricciones. Lo cual es fundamental para poder operar en la misma población con soluciones válidas e inválidas.

Los algoritmos genéticos de acuerdo a la definición de Holland tratan de resolver un problema viéndolo como un problema de maximización. Si deseamos atacar un problema de minimización con un algoritmo genético lo único que requerimos es transformar la aptitud de cada individuo de acuerdo a la fórmula:

Sea A_i la aptitud del gen en un problema de maximización y *Máximo* representa la aptitud máxima de la población tenemos que:

$$A_i^{'} = Máximo - A_i$$

Donde $A_i^{'}$ es la evaluación de la aptitud del gen para un caso de minimización.

1.5.3. CONVERGENCIA EN LOS ALGORITMOS EVOLUTIVOS.

Existen diversos criterios que se deben considerar al implementar un Algoritmo Evolutivo:

> *1. Si tenemos en la población individuos con un desempeño extraordinario, estos dominarán rápidamente la población.*
>
> *2. Si tenemos que nuestra población consta sólo de individuos con un desempeño equivalente al promedio, la población no evolucionará y la búsqueda se convertirá en una búsqueda aleatoria entre soluciones mediocres*[5].

---

[5] Op Cit. Goldberg - 1989ª

Al efecto del punto 1, se le denomina convergencia prematura y ocurre cuando el algoritmo genético converge hacia un óptimo local.

Al efecto del punto 2, se le denomina **palmicia** y ocurre cuando la variabilidad entre los elementos de la población es pequeña ocasionando que el algoritmo genético no evolucione.

Para atacar la convergencia prematura se han hecho escalamientos de la función de aptitud. Con esto se evita que un individuo domine rápidamente la población y que individuos parecidos se separen un poco más. De las funciones de escalamiento que más se han usado esta el escalamiento lineal definido por [6]:

$$A_i^{'} = a * A_i + b$$

Donde $A_i^{'}$ representa la aptitud escalada del individuo i-ésimo, A_i representa la aptitud original del individuo i-ésimo y las constantes a y b tienen el efecto de hacer que:

1. Los individuos con una aptitud igual a la aptitud promedio conservan su aptitud.
2. Los individuos con una aptitud igual a la aptitud mínima conservan su aptitud.
3. Los individuos con la aptitud mayor son escalados para tener como aptitud el doble de la aptitud promedio.

Para atacar la palmicia se ha propuesto la inyección de diversidad genética, esto básicamente se realiza conservando una fracción de la población actual y generando nuevos individuos aleatoriamente. Normalmente la palmicia se da cuando el algoritmo genético está convergiendo hacia un óptimo, y deseamos que siga explorando nuevas alternativas.

---

[6] Op Cit. Michalewicz-1992.

1.5.4. ASPECTOS A CONSIDERAR EN LAS RESTRICCIONES.

Es necesario considerar en los problemas con diversas restricciones los siguientes puntos:

Penalización de Aptitud. Evaluar la aptitud de cada solución y penalizar las soluciones que violen alguna(s) restricción(es). En este sentido se puede definir que la aptitud modificada vendrá dada por la formula

$$A_i' = A_i - P_i$$

P_i representa la función de penalización aplicada al individuo i-ésimo. Es importante considerar que la aptitud modificada debe considerar la heurística:

> *"Es preferible una solución con aptitud original baja que no viole restricciones a una solución de alta aptitud que viole restricciones"*

• **Reparación de la solución.** En este enfoque se trata de modificar una solución que viola restricciones en una solución que no las viole. El problema de este enfoque es que el proceso de reparación puede ser muy complejo.

• **Utilización de una codificación especial.** Esto se refiere a crear una codificación tal que garantice que nunca se producirán soluciones que violen restricciones. Este enfoque es difícil de aplicar y posiblemente la codificación buscada no exista.

1.5.5 LA IMPORTANCIA DEL TAMAÑO DE LA POBLACIÓN

Una de las decisiones más importantes al aplicar un Algoritmo Evolutivo a la solución de un problema en particular es el tamaño de la población. Si se escoge un tamaño de población pequeño se tendrá una rápida convergencia hacia un óptimo local, por otro lado si el tamaño de la población es grande se consumirán muchos recursos computacionales y la convergencia será muy lenta. Este dilema se puede resumir en: EXPLORACIÓN vs EXPLOTACIÓN. Exploración se refiere a la capacidad de un algoritmo de ampliar su espacio de búsqueda. Explotación se refiere a capitalizar al máximo las soluciones con las que cuenta actualmente. A este dilema también se le designa como DIVERSIDAD EN LA POBLACIÓN vs. PRESIÓN SELECTIVA, obviamente entre mayor sea el tamaño de la población tendremos mayor diversidad pero si el tamaño de la población es pequeño tendremos una alta presión selectiva.

Si un usuario desea una rápida convergencia debería de pensar en un tamaño de población pequeño si por el contrario un usuario desea una mejor solución debería de decidirse por un tamaño de población grande.

1.5.6 CRITERIOS DE PARO

Una de las áreas que es fuertemente dependiente del problema al aplicar un Algoritmo Evolutivo es la definición de cuando terminar el algoritmo.

Realmente no hay una teoría muy sólida para definir cuando parar el Algoritmo Evolutivo, pero se han utilizado algunos esquemas como:

- *Se define que si no se logra mejorar la solución durante cinco generaciones sucesivas entonces es adecuado detener el proceso.*[7]

- *Se define que cuando se tiene más del 80% de convergencia en los bits de los individuos de una población convergencia se calcula por columna*[8].

- *Se propone que el criterio de paro depende de la aplicación y que cuando se observe una convergencia en la población se debe tomar una fracción de la población e inyectar diversidad genética*[9].

Dado que los problemas atacados con los algoritmos genéticos tienen la característica de tener un espacio de soluciones extremadamente grande y considerando que para algunos problemas no se conoce ni aproximadamente la solución óptima, la mejor opción es dejar correr el algoritmo genético lo más que se pueda, y en el mejor de los casos inyectar diversidad genética según se requiera.

[7] Op Cit. Torres-1995.

[8] Op Cit. Ordóñez-1991.

[9] Ibdem. Goldberg - 1989[a]

CAPÍTULO

2

TEORÍA DE PORTAFOLIOS

INTRODUCCIÓN:

Desde jóvenes debemos empezar a involucrarnos con una buena administración de las finanzas personales, orientada por los objetivos y los deseos de cada uno de nosotros.

El empezar a ahorrar o a invertir, varía de acuerdo a las necesidades y los objetivos particulares; aunque siempre se deberán buscar opciones de inversión que permitan, por lo menos, mantener el poder adquisitivo y siempre obtener ganancias por ello.

Proteger el dinero y hacerlo crecer se logra con la selección de esquemas u opciones de inversión adecuados. Es decir, se deben formar portafolios de inversión a la medida, para ello es necesario conocer las diversas teorías que fundamentan la elaboración de portafolios con una ganancia máxima a un mínimo riesgo.

En este capítulo enunciaremos los conceptos básicos del mercado financiero, así como la metodología de valuación de portafolios de inversión desarrollado por Markowitz.

2.1 Portafolios de Inversión.

Los Portafolios de Inversión también llamados "Carteras de inversión", es una selección de documentos o valores que se cotizan en el mercado bursátil y en los que una persona o empresa, deciden "colocar" o invertir su dinero.

Los portafolios de inversión se integran con los diferentes instrumentos que el inversionista haya seleccionado. Para hacer su elección, debe tomar en cuenta aspectos básicos como el nivel de riesgo que está dispuesto a correr y los objetivos que busca alcanzar con su inversión. Por supuesto, antes de decidir cómo se integrará el portafolio, será necesario conocer muy bien los instrumentos disponibles en el mercado de valores para elegir las opciones más convenientes, de acuerdo a sus expectativas.

Entre los instrumentos disponibles en el mercado de valores se encuentran los siguientes:

Instrumentos de deuda (a corto, mediano y largo plazo): su rendimiento está predeterminado. Esto es, que se conoce con anticipación la ganancia que se obtendrá, contemplan un plazo definido, como en el caso de los CETES (Certificados de la Tesorería de la Federación), los BONDES (Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal) y el papel comercial entre otros.

Instrumentos de Renta Variable: de mediano y largo plazo generalmente, su rendimiento está en función del desempeño económico-financiero de la empresa que realizó la emisión del título, y de las fluctuaciones en las variables económicas que presente el mercado, ejemplo de éstos son las acciones.

Productos derivados: son utilizados como cobertura contra riesgos financieros, tales como la posible alza en tasas de interés, divisas, acciones, maíz, petróleo, es decir, precios de productos o activos, que en terminología del mercado de derivados se conocen como activos subyacentes.

Metales: son instrumentos generalmente de largo plazo, cuyo precio depende principalmente de la oferta y la demanda que se presente en el mercado (centenarios oro, onzas troy de plata).

Conociendo los instrumentos con los que se puede formar un portafolio de inversión, sólo faltará tomar en cuenta aspectos que hacen que la elección sea diferente de acuerdo a las necesidades y preferencias de cada persona, tales como:

- *Capacidad de ahorro. Saber cuánto se está dispuesto a dejar de gastar en cierto momento y sacrificarlo para destinarlo a la inversión.*
- *Determinar los objetivos perseguidos al comenzar a invertir.*
- *Tener un panorama claro con respecto al funcionamiento y características del instrumento en que se esté dispuesto a invertir (de deuda, renta fija o variable).*
- *Considerar que la inversión ofrezca una tasa de rendimiento mayor a la inflación pronosticada, con el propósito de preservar el poder adquisitivo y obtener ganancias por la inversión.*
- *Determinar el plazo en el que se puede mantener invertido el dinero, es decir, corto (menor a un año), mediano (entre uno y cinco años) o largo plazo (mayor de cinco años).*
- *Invertir una pequeña cantidad de efectivo en un instrumento que permita retirar cualquier día para tener liquidez inmediata en caso de imprevistos.*
- *Considerar el riesgo que se está dispuesto a asumir y no perder de vista que a mayor riesgo, mayor es el rendimiento que se ofrece.*

- *Diversificar el portafolio, esto es invertir en distintos instrumentos a fin de reducir significativamente el riesgo.*

2.2 Bolsa de Valores.

En la Bolsa de Valores cualquier persona con cierto volumen de capital puede invertir y con un golpe de suerte adquirir las acciones de una empresa cuyo valor, como burbuja de champaña, sube precipitadamente volviéndolo, de la noche a la mañana, en lo que se conoce como "una persona de dinero".

Experiencias como ésta tienen lugar con frecuencia, incluso con temas de sonadas películas de la cinematografía estadounidense. Sin embargo, también hay personas que han sufrido en carne propia las desventuras de una mala inversión.

La Bolsa de Valores es la empresa responsable de supervisar y establecer las reglas para la compra-venta de documentos o valores tales como acciones, CETES, BONDES, Papel Comercial entre otros, ofrecidos en el Mercado de Valores.

Estos documentos representan la participación individual de sus compradores en una empresa, ya sea como acreedor o dueño dependiendo del submercado (deuda o capitales). Las empresas pueden ser paraestatales (del gobierno) o privadas. Para adquirirlos los inversionistas acuden ante una Casa de Bolsa, quién funge como intermediario entre ellos y las empresas que desean obtener dinero (a esta operación se le conoce como fondeo).

El sector bursátil tiene la función de contribuir a que las empresas paraestatales o del gobierno como PEMEX, y privadas como Telmex, Bimbo, Vitro (en México) u otras, obtengan dinero para emplearlo en diversos proyectos de inversión.

Este dinero que buscan las empresas (emisoras) se reúne colocando diferentes documentos (instrumentos) en el mercado de valores. A las empresas que se fondean con base en la colocación de instrumentos se les conoce como emisoras. A las personas o empresas que andan buscando oportunidades de inversión se les llama inversionistas.

La ganancia de estos documentos está influida por varios factores, algunos de ellos son el buen manejo administrativo de la empresa, el comportamiento de las tasas de interés, tipo de cambio, inflación, eventos políticos. Factores que al ser favorables permiten pagar puntualmente los intereses y la inversión inicial (capital) o distribuir ganancias en forma de dividendos.

Constantemente al leer los periódicos en sus secciones de finanzas, o tal vez en un programa de noticias en radio o televisión, ha escuchado el término "bursatilidad", que es muy usado en el ámbito financiero.

La bursatilidad es la característica que posee un instrumento (título valor) que cotiza en el mercado de valores, en cuanto a ser negociable, es decir, qué tan fácil se pueden encontrar compradores o en su caso vendedores para el instrumento.

La forma mediante la cual analizamos la bursatilidad de un instrumento es a través de los análisis cuantitativos, destacando entre ellos los índices, los cuales podemos obtener mediante las siguientes variables:

Número de acciones del instrumento operadas en el mes, entre volumen total de acciones operadas en el mercado durante el mismo periodo.

Número de días que estuvo activa la emisora en el mes, entre el número de días que hubo sesión de remates.

Número de operaciones realizadas en el mes con la emisora, entre número total de operaciones en el mercado durante el mismo periodo.

Número de acciones distribuidas de la emisora entre el gran público inversionista.

Mismas relaciones que las mencionadas pero no contra el mercado como un todo, sino contra la acción más bursátil, expresando esta relación como un porcentaje, el caso óptimo es un 100%.

Número de acciones que se operan de una emisora por cada millón de acciones negociadas en el mercado como un todo.

La meta que se persigue al calcular o construir un índice como los antes referidos, es determinar el valor de un conjunto específico de variables, en un periodo delimitado de tiempo, para que dicho valor, entre otros elementos, coadyuve en la toma de decisiones.

Un índice de precios de acciones, representa el valor de éstas en un periodo acotado de tiempo. La fluctuación de dicho valor responde, como en todo mercado, a la libre oferta y demanda de las acciones cotizadas en mercado de valores.

Un índice accionario está conformado por series accionarias, seleccionadas por su representatividad en el giro o sector económico al que pertenecen los emisores de las acciones, por la bursatilidad de éstas y por el valor de capitalización (último precio de la acción por el número de acciones en circulación).

El grado de liquidez bursátil se obtiene a partir de las mediciones basadas en el índice de bursatilidad que es uno de los indicadores del mercado accionario. Este índice, que monitorea a todas las acciones, está conformado por las siguientes variables:

> *El número de transacciones realizadas con las acciones de una emisión.*
>
> *El volumen de acciones operadas.*
>
> *El importe negociado en dinero, que es el resultado del volumen y el precio de las operaciones realizadas por acción o emisión.*
>
> *El valor de capitalización, que es el promedio en un lapso de tiempo, (6 meses) del precio de mercado de las emisiones en circulación.*

Como ejemplo, el índice de bursatilidad publicado por la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), se divide en bursatilidad alta, bursatilidad media, bursatilidad baja y bursatilidad mínima.

En los datos correspondientes al mes de abril de 2000[1], observamos que:

Para la sección de bursatilidad alta, el primer lugar corresponde a TELMEX serie L, con un importe de $49'472,363,150; con 53,204 operaciones y un índice de bursatilidad de 9.545, siendo la acción con mayor bursatilidad en el mercado mexicano. En el lugar 34, se encuentra GISSA serie B, con un importe de $554'550,700; con 2,832 operaciones y un índice de bursatilidad de 7.136, ocupando el último lugar de ésta sección. En la sección de bursatilidad media, encontramos a ICA en la posición 35, con un importe de $539'841,780; con 6,926

[1] Indicadores Bursátiles de la Bolsa Mexicana de Valores

operaciones y un índice de bursatilidad de 7.280, siendo la acción con mayor movimiento. En el último lugar, se encuentra GFB serie L, con un importe de $73,013,490; 795 operaciones y un índice de bursatilidad de 5.787, ocupando el lugar 68.

Encabezando la sección de bursatilidad baja en el número 69, tenemos a LIVERPOOL serie 1, con un importe de $69'203,920; 224 operaciones y un índice de bursatilidad de 5.942. En la posición 119 tenemos a COFAR serie B, con un importe de $2'058,600; 67 operaciones y un índice de bursatilidad de 4.096.

Finalmente, en bursatilidad mínima tenemos a GAM serie B con un importe de $5'279,910; 55 operaciones y un índice de bursatilidad de 4.029, en el número 120. En el lugar 170, tenemos a ELECTRA serie B con un importe de $3,200; 1 operación y un índice de bursatilidad de 0.527, siendo la acción con la bursatilidad más baja en el mercado de valores nacional.

2.3 Modelo de Markowitz

Markowitz no fue el primer interesado en el mercado de inversiones, pero si es un nombre que es imprescindible mencionar al hablar de portafolios de Inversión. "Potafolio Selection", es el nombre del documento donde Harry Markowitz describió por primera ocasión su teoría de portafolios de inversión, un documento de 14 páginas publicado en el Journal of Finance 1952, que un tiempo después se convirtió en el libro *Portafolio Selection: Efficiente Diversification of Investments* en 1959.

En su modelo Markowitz plantea seleccionar portafolios eficientes u óptimos, es decir, portafolios que tienen el rendimiento más alto para un cierto nivel de riesgo. Un buen candidato sería el portafolio que consiste de proporciones de todos los activos del mercado porque se mueve igual que el promedio y asegura no tener ni mayor ni menor rendimiento que el promedio. Sin embargo en la realidad es imposible obtener y administrar una cartera tan grande, por lo que se debe buscar un portafolio con un número reducido de activos y que reproduzca los rendimientos de aquel que tiene todos los activos; esto quiere decir que el conjunto de activos que se elija debe de funcionar como una base vectorial de los rendimientos de todos los portafolios.

Dentro de las finanzas y la economía se considera al inversionista como aquel que maximiza su utilidad esperada sujeta a una restricción presupuestaria y que invierte toda su riqueza en activos con y sin riesgo, por lo que aquí se considera que no hay ahorro. El comportamiento del individuo se modela con funciones de utilidad, las cuales deben ser cóncavas para asegurar un máximo, así como para reflejar la aversión al riesgo de las personas.

El inversionista se encuentra presionado por dos fuerzas opuestas:

1.- Deseo de ganancias.

2.- La insatisfacción que le produce el riesgo.

La rentabilidad esperada es la ganancia que un inversionista espera obtener de una acción en un periodo de tiempo. La rentabilidad real puede ser mayor, menor o igual, la Varianza y Desviación Standard corresponde con la volatilidad de la rentabilidad de un título y se calcula de acuerdo con la desviación respecto a la rentabilidad media.

La Covarianza y Correlación suponen que las rentabilidades de los títulos individuales se relacionan entre sí. La covarianza es una medida estadística de la interacción de dos títulos. La interacción también se puede expresar en términos de correlación entre ellos.

La covarianza y la correlación son dos maneras de medir si dos variables (dos activos) se relacionan.

A un activo financiero le podemos calcular rentabilidades diarias, semanales, mensuales y podemos formar un histograma de frecuencias de estas rentabilidades lo que conducirá a que la rentabilidad tendrá una media y una desviación standard.

La media expresará el resultado medio a esperar y la desviación standard, si tomamos las frecuencias como probabilidades, dará la probabilidad de que el valor obtenido se encuentre en un intervalo a la derecha e izquierda de la media. Por esta razón la varianza, la desviación standard, mide el riesgo de un activo.

Rentabilidad y riesgo definen el activo, de tal forma que un inversionista racional, entre dos activos de igual rentabilidad elegirá el de menor desviación, y entre dos activos de igual desviación el de mayor rentabilidad media.

La Rentabilidad Esperada de la empresa Súper es:

$$\frac{-0.20+0.10+0.30+0.50}{4}=0.175=17.5\%$$

Para la empresa Slow:

$$\frac{0.05+0.20-0.12+0.09}{4}=0.055=5.5\%$$

Considerando la siguiente información:

Estado Economia	Rent. Emp, Súper	R. Esperada: 0.175 Desv. Rent. Esperado.	Desviación al Cuadrado
Depresión	-0.20%	(-0.20)+(-0.175)= -0.375	$(-0.375)^2 = 0.1406$
Recesión	0.10%	-0.075%	0.00562
Normalidad	0.30%	0.125	0.01562
Prosperidad	0.50%	0.325	0.10562/0.2675
	Rent. Emp, Slow	R. Esperado = 0.055	
Depresión	0.05%	-0.005	0.000025
Recesión	0.20%	0.145	0.021025
Normalidad	-0.12%	-0.175	0.030625
Prosperidad	0.09	0.035	0.001225/0.0529

Tabla 2. 1 Cuadro de valores de las empresas Slow y Súper.

La desviación cuadrada promedio es:

$$\text{Súper} = \frac{0.2675}{4} = 0.066875 \qquad \text{Slow} = \frac{0.0529}{4} = 0.013225$$

que se corresponde con la varianza.

La Desv. Std. $= \sqrt{0.066875} = 0.2586 = 25.86\%$ y $\sqrt{0.013225} = 0.1150 = 11.50\%$

Tenemos por lo tanto definidas las dos características de los activos, por la rentabilidad esperada y por la desviación standard.

Para Súper 0.175% y 0.2586

Para Slow 0.055% y 0.1150

Multiplicando la desviación de las dos sociedades tenemos:

(-0.375 x -0.005) =	0.001875
(-0.075 x 0.145) =	-0.010875
(0.125 x -0.175) =	-0.021875
(0.325 x 0.035) =	0.011375
Total =	-0.0195

De donde se deduce que:

$$\sigma_{AB} = \text{Cov(RA, RB)} = \frac{-0.0195}{4} = -0.004875$$

$$\rho_{AB} = \text{Corr(RA, RB)} = \frac{\text{cov}(R_A R_B)}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{-0.004875}{0.2586 X 0.1150} = -0.1629$$

El significado es el siguiente:

Si las dos rentabilidades de los activos se relacionan positivamente entre sí, tendrán una covarianza positiva, pero si la relación que existe entre ambas es negativa, la covarianza será negativa.

Al ser en este caso la covarianza negativa = -0.004875 implica que es probable que la rentabilidad de una acción sea mayor que su promedio cuando la rentabilidad de la otra acción es menor que su promedio y viceversa. La magnitud numérica es en principio difícil de interpretar, pero se soluciona el problema mediante la Correlación.

Si la correlación es positiva, se dice que las rentabilidades se relacionan positivamente, y si es negativa, se relacionan negativamente, si es cero no se relacionan. Fluctúan por lo tanto entre [-1, 1], en este ejemplo como la correlación es negativa se puede esperar que con el incremente del rendimiento con respecto a la media de una acción, la otra acción disminuirá.

Si consideramos X_A y X_B como los porcentajes de inversión en los activos A y B respectivamente y R_A y R_B son las respectivas rentabilidades esperadas de los títulos A y B. La rentabilidad esperada de la cartera es el promedio ponderado de las rentabilidades esperadas de los activos individuales de una cartera.

$$X_A R_A + X_B R_B \qquad \textbf{(2.1)}$$

Un inversionista con 100 pesetas invierte 60 en la empresa Súper y 40 en la Slow. La Rentabilidad esperada será: 0.6 x 17.5% + 0.4 x 5.5% = 12.7%

Varianza: $X_A^2\sigma_A^2 + 2X_A X_B \sigma_{AB} + X_B^2\sigma_B^2$ (para dos Títulos).

En la varianza de la cartera de dos títulos se tiene en consideración la varianza de cada título y la covarianza de los títulos (A con B, y B con A que son iguales) La varianza mide la variabilidad de la rentabilidad de un título y la covarianza mide la relación entre dos títulos.

Una covarianza positiva entre los títulos aumenta la varianza de la cartera, mientras que una covarianza negativa disminuye la varianza de la cartera.
Para el caso de las empresas consideradas anteriormente, y teniendo en cuenta que se invierte 60% en Súper y un 40% en Slow, resulta:

Varianza = 0.36x0.066875 + [2 x (0.6x0.4x (-0.004875))] + 0.16x0.013225 = 0.023851
Desviación Standard: $\sqrt{Varianza} = \sqrt{0.02385}$ = 0.1544 = 15.44%.

Una rentabilidad de -2.74% (12.7 - 15.44%) es una desviación standard menor que el promedio, y una rentabilidad del 28.14% (12.7 + 15.44) es una desviación

Standard por encima del promedio. Si la rentabilidad de una cartera esta distribuida normalmente, una rentabilidad de entre -2.74 y + 28.14% ocurre aproximadamente en un 68% de las veces.

El promedio ponderado de la desviación standard, para una cartera de dos títulos con las características expuestas anteriormente, es la siguiente:

0.6 x 0.2586 + 0.4 x 0.115 = 0.2012

Este resultado supone que la desviación standard de la cartera es menor que el promedio ponderado de las desviaciones standard de los títulos individuales. El motivo de esta diferencia es debido a la diversificación, ya que para las empresas Súper y Slow tienen cierta correlación negativa que es: = -0.1639, es decir, es muy probable que la rentabilidad de Súper sea ligeramente menor que su media si la rentabilidad de Slow es mayor que su media y al revés.

La varianza de la cartera será:

$$X^2_{Super}\sigma^2_{Super} + 2X_{Super}X_{Slow}\psi_{(Slow,Slow)}\sigma_{Slow}\sigma_{Super} + X^2_{Slow}\sigma^2_{Slow} \qquad (2.2)$$

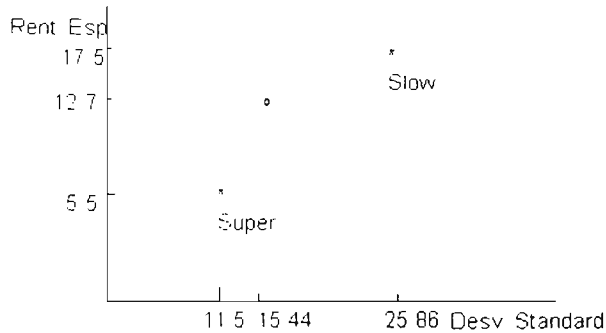
Varianza = 0.36 x 0.066875 + (2 x 0.6 x 0.4 x (-0.1639)) x 0.2586 x 0.115 + (0.16 x 0.013225)

Varianza = 0.023851

Si $\rho_{Slow,Super}$ = 1, (Valor máximo de la Correlación), la Varianza será:

0.36 x 0.066875 + 2 x 0.6 x 0.4 x 1 x 0.2586 x 0.115 + 0.16 x 0.013225. = 0.040466

Siendo la Desviación Standard $= \sqrt{0.040466} = 20.12$, el efecto de la correlación hace disminuir la varianza cuando dicha correlación es negativa, mientras que la aumenta cuando dicha correlación es positiva. La representación gráfica de la Rentabilidad y Desviación Standard de dos títulos es la siguiente:

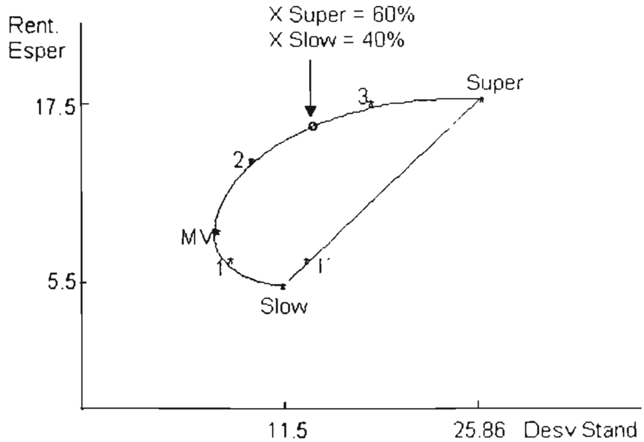


Gráfica 2.1 Representación gráfica de la Rentabilidad y Desviación Standard para dos títulos.

El círculo de la Gráfica 2.1 representa una cartera con un 60% invertido en Súper y un 40% en Slow. Ha de tenerse en cuenta, que es una posibilidad de la multitud de carteras que se pueden formar con los dos títulos.

Analizando el Gráfica 2. 2 podemos observar:

La cartera 1 esta compuesta por 90% de Slow y 10% de Súper.
La cartera 2 esta compuesta al 50% para cada valor.
La cartera 3 esta compuesta al 10% en Slow y 90% Súper.
La cartera MV es la cartera de varianza mínima.



Gráfica 2. 2 Conjunto de carteras que se pueden formar con la empresa Súper y Slow

EL efecto de la diversificación se produce siempre que la correlación entre dos títulos es menor que 1, y en este caso es de 0.1639. La línea recta representa los puntos que se habrían generado si el coeficiente de correlación fuera 1. La cartera I' es una cartera con el 90% de Slow y 10% de Súper con coeficiente de correlación 1, sin embargo por el efecto de la diversificación, la cartera 1 tiene la misma rentabilidad, pero menor desviación standard.
El punto MV representa la cartera de varianza mínima.

El inversionista se enfrenta a un conjunto de oportunidades y puede situarse en cualquier punto de la curva, mediante la selección de una combinación de los dos títulos. No puede situarse en puntos superiores porque no puede incrementar la rentabilidad de los títulos individuales, reducir la desviación standard de los títulos, ni reducir la correlación de los mismos. Tampoco puede situarse en ningún punto por debajo de la curva porque no puede reducir las rentabilidades, incrementar la desviación standard, ni incrementar la correlación. Dependiendo su aversión al riesgo se situara en un punto u otro de la curva.

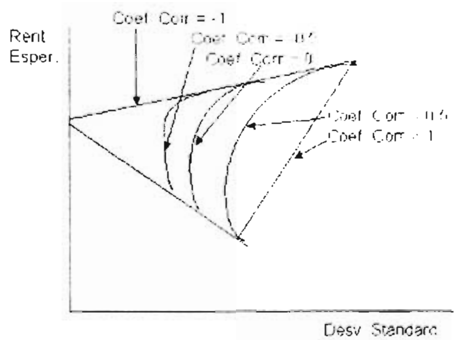
La curva gira hacia atrás entre el punto de Slow y MV, lo que supone que la desviación standard decrece, al aumentar la rentabilidad. Esta situación es debida al efecto de la diversificación, ya que los dos títulos tienen correlación negativa entre si.

Ningún inversionista desea tener una cartera con rentabilidad esperada menor que la varianza mínima de la cartera. Esto supone que ningún inversionista deseará la cartera I, ya que esta cartera tiene una rentabilidad esperada menor, para una desviación standard mayor que la cartera de varianza mínima. Por esta razón los inversionistas solo consideran la curva de MV a Súper como Conjunto Eficiente.

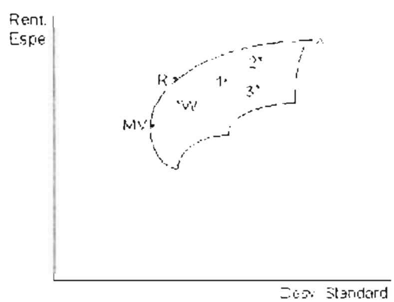
Según sea el coeficiente de correlación, la forma de la curva, estará dada según se expresa en el Gráfica 2.3

Cuanto menor es la correlación, mayor pronunciamiento de la curva, lo que implica que el efecto de la diversificación se incrementa conforme el coeficiente de correlación decrece.

Si se consideran 100 títulos que puede comprar el inversionista. El conjunto de oportunidades se encuentra situado dentro de la forma sombreada de la figura siguiente:



Gráfica 2.3 Efecto del factor de correlación con respecto a la diversificación de los activos dentro de la gráfica.



Gráfica 2. 4 Oportunidades en las que puede invertir.

El punto 1, por ejemplo, representa una cartera de 40 títulos, el 2 de 80, el 3 de 80 pero distribuidos de forma distinta. Las combinaciones pueden ser infinitas, si bien todas entran dentro de la zona restringida. Ningún título o combinación de títulos puede encontrarse fuera de esa zona, lo que supone que nadie puede elegir una cartera con rentabilidad esperada mayor que la que aparece en la zona ya que no se pueden alterar las rentabilidades de los títulos individuales, y nadie puede elegir una cartera con desviación Standard menor que la que aparece en la zona, ya que no existe.

El inversionista, al igual que con dos títulos, también se situara entre algún punto del extremo superior entre MV y X, que será la Cartera Eficiente. Cualquier punto por debajo de dicha cartera tendrá una rentabilidad esperada menor y la misma desviación standard, que la situada en el conjunto eficiente. Por ejemplo, R es una cartera eficiente y W estará exactamente debajo de ella. En W presenta el riesgo que desea el inversionista, pero elegirá R porque la rentabilidad esperada es superior para el riesgo deseado.

Para el caso en que las carteras cuentan con muchos títulos la Varianza y Desviación standard estarán dados de la siguiente manera. Sea N activos. Se construye una tabla que va de 1 a N en el eje horizontal y 1 a N en vertical. Esto supone una matriz de N x N = N^2.

Acc.	1	2	3	.....	N
1	$X_1^2Var_1$	$X_1X_2Cov(R_1,R_2)$	$X_1X_3Cov(R_1,R_3)$		$X_1X_nCov(R_1,R_n)$
2	$X_2X_1Cov(R_2,R_1)$	$X_2^2Var_2$	$X_2X_3Cov(R_2,R_3)$		$X_2X_nCov(R_2,R_n)$
3	$X_3X_1Cov(R_3,R_1)$	$X_3X_2Cov(R_3,R_2)$	$X_3^2Var_3$		$X_3X_nCov(R_3,R_n)$
⋮	.....	.....	.....		.....
N	$X_nX_1Cov(R_n,R_1)$	$X_nX_2Cov(R_n,R_2)$	$X_nX_3Cov(R_n,R_3)$		$X_n^2Var_n$

Tabla 2. 2 Matriz de Varianzas y Covarianzas para N acciones.

Sea la casilla con dimensión horizontal de 2 y la de dimensión vertical de 3. El término es $X_3X_2Cov(R_3,R_2)$, donde X_3 y X_2 son los porcentajes de la cartera invertidos en el tercer y segundo activo respectivamente. También resulta que $Cov(R_3,R_2) = Cov(R_2,R_3)$. Dado que la dimensión vertical es igual que la horizontal los términos de la diagonal son los porcentajes invertidos elevados al cuadrado por la varianza del título. Los términos que se encuentran fuera de la diagonal contienen las covarianzas.

Nº Acciones	Nº Términos	Nº Términos de Var.	Nº Términos de Covar.
1	1	1	0
2	4	2	2
3	9	3	6
10	100	10	90
100	10.000	100	9900
⋮	⋮	⋮	⋮
N	N^2	N	N^2 - N

Tabla 2. 3 **Nº de términos de Varianza y Covarianza según Nº de acciones**

Un hecho importante que se debe tener en cuenta, es la varianza de la Rentabilidad de una cartera con muchos títulos depende más de las covarianzas entre los títulos individuales que de las varianzas entre los mismos.

2.3.1 El problema del Individuo

A continuación se describe el problema del individuo y su solución óptima, aunque en la realidad se debe recurrir a un problema dual de la maximización del beneficio, el cual es la minimización del riesgo de un portafolio. Esto se debe a que la función de utilidad no es observable en la realidad.

Consideremos n valores de donde queremos seleccionar un portafolio óptimo, es decir, un portafolio que tiene el rendimiento más alto para un cierto nivel de riesgo. Consideremos primero el modelo de un periodo o estático.

$W_0 =$ Capital inicial

$Z_j =$ Rendimiento por dólar de valor j

$\omega_j =$ proporción asignado a j

$U(W) =$ (Von Neumann-Morgenstern) función de utilidad para capital terminal W. Esta función es cóncava.

Entonces $\omega_j W_0$ es la inversión en valor j, lo cual tiene un rendimiento por peso de Z_j. Entonces el rendimiento de la inversión en valor j es $\omega_j W_0 Z_j$.

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j W_o Z_j \qquad 2.3$$

Con utilidad

$$U\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j W_o Z_j\right). \qquad 2.4$$

El problema es maximizar la esperanza de la utilidad sobre todos los posibles valores de que sumen a uno, i. e.

$$\max_{w_1,\dots,w_n} E(U(\sum_{j=1}^{n} \omega_j W_o Z_j)) \qquad 2.5$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1 \qquad 2.6$$

Por método del multiplicador de Lagrange

$$E(U(\sum_{j=1}^{n} \omega_j W_o Z_j)) - \lambda(\sum_{j=1}^{n} \omega_j - 1) \qquad 2.7$$

Diferenciamos con respecto a ω_j en (5) e igualando a cero,

$$E(U'(\sum_{j=1}^{n} \omega_j W_o Z_j) Z_j W_0 = \lambda \qquad 2.8$$

$$E(U'(Z * W_0) Z_j) = \frac{\lambda}{W_0} \qquad 2.9$$

$$Z* = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{*} Z_j \qquad 2.10$$

Donde λ es el multiplicador de Lagrange y la ecuación 2.12 es el portafolio que optimiza a la función objetivo expresada en la ecuación 2.5, una solución única existe si la matriz de covarianza es no-singular

$$\begin{pmatrix} Cov(Z_1, Z_1) & Cov(Z_1, Z_2) & \dots & Cov(Z_1 . Z_n) \\ Cov(Z_2, Z_1) & Cov(Z_2, Z_2) & \dots & Cov(Z_2, Z_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Cov(Z_n, Z_1) & Cov(Z_n, Z_2) & \dots & Cov(Z_n, Z_n) \end{pmatrix} \qquad 2.1$$

Para satisfacer este requisito, los valores tienen que ser linealmente independientes y ninguno de los valores puede ser constante (i.e. sin riesgo). Esto se debe a que los rendimientos del activo libre de riesgo no covarían con los rendimientos de los activos riesgosos, por lo que su covarianza sería cero, y no se podría invertir la matriz, si se considera un valor sin riesgo, se considera como el valor *n+1*, y se aplica un cambio.

$$\max_{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n} E\left(U(\sum_{j=1}^{n}\omega_j W_o Z_j + (1-\sum_{j=1}^{n}\omega_j)RW_0)\right) \quad 2.12$$

Lo cual es lo mismo que:

$$\max_{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n} E\left(U([\sum_{j=1}^{n}\omega_j (Z_j - R) + R]W_0)\right) \quad 2.2$$

Como la ponderación sobre el valor sin riesgo es uno menos los demás, no hay restricciones sobre los pesos y las condiciones de primer orden serán:

$$E(U'(Z * W_0)(Z_j - R) = 0 \quad 2.3$$

Donde

$$Z^{*} = \sum_{j=1}^{n}\omega_j (Z_j - R) + R \quad 2.15$$

Es importante aclarar que en este trabajo de tesis el algoritmo que se desarrollará será aplicado solo para portafolios libres de riesgo.

2.3.2 Portafolios de mínima varianza en ausencia de activo libre de riesgo.

El problema de maximización de la utilidad esperada puede ser resuelto mediante un problema dual, representado por la minimización del riesgo de un portafolio sujeto a que toda la riqueza sea invertida. Esto se conoce como **PORTAFOLIOS DE MÍNIMA VARIANZA**. El problema es como sigue:

Supongamos que los rendimientos esperados de al menos dos activos son diferentes y que Ω es de rango completo, es decir, que sus vectores son linealmente independientes.

ω_a	Vector (de dimensión N×1) de proporciones que se invertirán en cada activo del Portafolio *a*.
$\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$	suma de las proporciones debe ser igual a 1
$\mu_a = \omega_a{}' \mu$	valor esperado del rendimiento del Portafolio *a*
$\sigma_a^2 = \omega_a{}' \Omega\, \omega_a$	varianza del Portafolio *a*
$\mathrm{cov}(a,b) = \omega_a{}' \Omega\, \omega_b$	covarianza entre dos portafolios *a* y *b* se define como

A continuación, se muestra la construcción de portafolios de varianza mínima, sin incluir activos libres de riesgo, es decir la solución del problema dual al problema del individuo.

Definición. El portafolio p es el portafolio que tiene la mínima varianza de todos los portafolios con valor esperado del rendimiento μ_p, si su vector de proporciones es la solución de la siguiente función de optimización:

$$\min_{\omega} \omega' \Omega \varpi \qquad 2.16$$

Sujeto a

$$\omega' \mu = \mu_p \qquad 2.17$$

$$\omega' i = 1 \qquad 2.18$$

La solución a este problema (la cual se puede verificar construyendo el lagrangiano, derivando con respecto de ω e igualando a cero) esta dado por las siguientes ecuaciones:

$$\varpi_p = g + h\mu_p \qquad 2.19$$

Donde **g** y **h** son los vectores N×1,

$$g = \frac{1}{D}\left[B\left(\Omega^{-1} i\right) - A\left(\Omega^{-1} \mu\right)\right] \qquad 2.20$$

$$h = \frac{1}{D}\left[C\left(\Omega^{-1} \mu\right) - A\left(\Omega^{-1} i\right)\right] \qquad 2.21$$

Donde,

$$A = i'\Omega^{-1}\mu$$

$$B = \mu'\Omega^{-1}\mu$$

$$C = i'\Omega^{-1}i$$

$$D = BC - A^2$$

2.3.3 De los portafolios de mínima varianza con activo libre de riesgo.

Cuando se invierte en un activo libre de riesgo para reducir el riesgo del portafolio, se efectúa un análisis distinto.

Consideremos un portafolio compuesto por los mismos N activos riesgosos y el activo libre de riesgo. La mejor representación de activos libres de riesgo en México, son los Certificados de la Tesorería (CETES), ya que están avalados por el gobierno. Otros ejemplos de activos libres de riesgo son BONDES, Petrobonos, Tesobonos, en Estados Unidos, los treasury bills, treasury bonds, treasury notes, etc.

Con el activo libre de riesgo incluido, las proporciones que se les dan a los activos riesgosos no están sujetas a que sumen uno, ya que es posible pedir prestado a la tasa libre de riesgo una cantidad mayor. El resultado que a continuación se da es producto del siguiente teorema.

Teorema Suponga que la matriz de covarianza Ω de $(Z_1,\ldots,Z_n)$ es no-singular (excluya que unos valores son combinaciones convexas de las otras). Para cualquier número μ

(a) existen número únicos δ_j^μ tales que $Z(\mu)=\sum_{j=1}^{n}\delta_j^\mu Z_j$.

(b) Si $\overline{Z}=(\overline{Z}_1,\ldots,\overline{Z}_n)'$, $e=(1,1,\ldots,1)'$ y $\delta^\mu=(\delta_1^\mu,\ldots,\delta_n^\mu)$ entonces

$$\delta^\mu=\frac{\mu-R}{(Z-\mathrm{Re})'\Omega^{-1}(Z-\mathrm{Re})}\Omega^{-1}(Z-\mathrm{Re}). \qquad 2.22$$

Dado un activo libre de riesgo con rendimiento R_f, el portafolio de mínima varianza con valor esperado del rendimiento μ_p será la solución al siguiente problema de optimización:

$$\min_{\omega} \omega' \Omega \varpi \qquad 2.23$$

Sujeto a:

$$\omega' \mu + (1 - \omega' \iota) R_f = \mu_p . \qquad 2.24$$

Como en el problema anterior, construimos el lagrangiano L, derivamos con respecto a ω, igualamos el resultado a cero, resolvemos para ω y obtenemos:

$$\omega_p = \frac{(\mu_p - R_f)}{(\mu - R_f \iota)' \Omega^{-1} (\mu - R_f \iota)} \Omega^{-1} (\mu - R_f \iota). \qquad 2.25$$

CAPÍTULO

3

MODELO EVOLUTIVO

PARA OBTENER PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN.

INTRODUCCIÓN:

En este capítulo desarrollaremos el Algoritmo Evolutivo (AE) que permitirá explorar de manera eficiente el espacio de portafolios de inversión que pueden existir a partir de una serie de activos.

Asumiendo una tasa de retribución esperada, se evaluarán los portafolios que sean propuestos por el algoritmo evolutivo y con el modelo de Markowitz se medirá la aptitud de los mismos; es decir, el riesgo de un portafolio, esperando con ello que la evolución del algoritmo aproxime de manera eficiente y eficaz a una cartera de inversión muy cercana a la óptima y en el mejor de los casos después de varias corridas se llegue al óptimo.

3.1 Planteamiento del Problema.

A partir de los Algoritmos Genéticos de Holland para el desarrollo de un Algoritmo Evolutivos (AE) al que se le agregaran variantes que permitirá ser utilizado como herramienta en la búsqueda de los portafolios de inversión, para ello retomaré la Hipótesis que da origen a este trabajo.

En un mercado de valores con N activos disponibles para invertir un capital K se hace necesario encontrar una combinación de solo "n" activos para conformar un portafolio donde se invierta un porcentaje del capital disponible en cada activo, obteniendo el mejor rendimiento al menor riesgo permitido, por lo que si buscamos la mejor combinación de $C\binom{N}{n}$ a través de la implementación de algoritmos evolutivos tendremos de entre un espacio de búsqueda la aproximación a los puntos cercanos al óptimo u óptimo con una rapidez considerable, lo que nos permitirá establecer el mejor portafolio para un rendimiento esperado y con mínimo riesgo.

3.2 Algoritmo Evolutivo para la suma de "n" números naturales.

El Algoritmo Evolutivo que utilizo en este trabajo, nace de una variación a los Algoritmos Genéticos de Holland, aunque existen grandes diferencias con el que él plantea.

Las similitudes consisten primordialmente en genes de un sólo cromosoma, y que la aplicación de los operadores genéticos (cruza y mutación) es similar aunque considera una variante adicional que asegura la obtención de genes válidos al aplicar estos operadores.

Las principales diferencias consisten en los genotipos del gen, es decir cada alelo del gen puede ser ocupado por varios genotipos y estos no pueden repetirse en la cadena del gen.

Para ejemplificar lo antes expuesto, y poder calibrar la eficiencia y eficacia del AE, que se utilizará en esta Tesis, desarrollé un primer algoritmo, en un programa de cómputo, donde la función de aptitud, consiste en la suma de los números que forman parte del vector o gen.

3.2.1 Planteamiento del problema.

Se cuenta con un espacio conformado por todas las combinaciones que se pueden realizar de "n" elementos tomados de N, para este caso en particular, son números enteros positivos de 1 a N, y que se pretende encontrar la mejor combinación de estos números cuya suma de los elementos que conforman cada combinación sea la menor de entre todas la combinaciones del espacio de soluciones.

El algoritmo explotará el espacio de búsqueda iniciando el proceso del AE con un número de vectores, que se forman al inicio y con los operadores genéticos los harán evolucionar hasta alcanzar el óptimo, con lo que se permitirá evaluar su eficiencia en un espacio de búsqueda grande.

La posición de los elementos del vector no afecta al fenotipo del cromosoma, es decir, las permutaciones no son soluciones adicionales del problema, solo el espacio que generan las combinaciones son soluciones. [1]

N	n	C_n^N
10	5	252
50	10	10,272,278,170
100	5	75,287,520
100	10	17,310,309,456,440
150	5	591,600,030
150	10	1,169,554,298,222,310
150	15	162,392,216,278,034,000,000 aprox.

Tabla 3.1: Crecimiento del espacio de soluciones posibles para n elementos tomados N.

No es necesario contar con un alto nivel en matemáticas para conocer que la menor suma de n números tomados de 1 a N, es la combinación que se forma con los n primeros números de la lista; es decir, si se requiere saber cual es la menor suma de 5 números tomados del 1 al 10 las posibles soluciones son C_5^{10} =252, el vector solución sin temor a equivocarnos es (1,2,3,4,5) = 15.

[1] Para el problema del Agente Viajero las permutaciones si representarían soluciones diferentes.

3.2.2 Desarrollo del AE para la suma de *"n"* números.

Para el desarrollo del AE es necesario considerar los siguientes aspectos.

La población inicial de estudio compuesta por vectores (genes con un cromosoma) y cada vector conformado por x números aleatorios $V_m(v_1, v_2, \ldots, v_m)$.

La cantidad total de genes que conforman la población inicial a evolucionar esta dada por :

NTGPI = Número total de genes en la población de estudio.
m = Número de genes que conforma cada vector o gen.
N = Rango de valores permitidos para cada alelo del gen.

La función de aptitud que evalúa la aptitud de los genes esta dada por el vector que tenga la menor suma.

$$V^* = \min(eva(V_i)) = \min \sum_{i=1}^{m} v_i \quad , \qquad (3.1)$$

La población inicial en el AE estará formado por NTGPI=500 vectores generados aleatoriamente, todos y cada uno de ellos deberá cumplir con las siguientes restricciones para poder ser considerados genes válidos aceptables dentro de la población.

Los valores de los alelos no pueden estar repetidos; es decir, $v_i, v_j \in V$, donde $v_i \neq v_j$, para $i, j = 1, \ldots, m$

El valor de cada uno de los alelos debe estar dentro del rango de números enteros; es decir, $v_i \in [1, N]$

3.2.3. Operadores Genéticos

El primero y de mayor utilización en el AE es el operador CRUZA, la manera que se implementa en el algoritmo es la siguiente.

Se toman dos genes de la población en evolución de forma aleatoria y se genera un número pseudo-aleatorio $p \in [0,1]$ que se compara con la probabilidad de cruza P_{cruza}, si $p \geq P_{cruza}$ se aplica el operador cruza en esos dos genes, si $p < P_{cruza}$, el operador no se aplica a los genes.

Cabe aclarar que para los fines de este trabajo, la función de distribución de probabilidad que se utiliza para la generación de números aleatorios es uniforme, aunque existe la posibilidad de estudiar el comportamiento del AE con diferentes distribuciones de probabilidad, por ejemplo una normal $N(\mu,\sigma^2)$.

Para el caso en que se aplique el operador a los genes seleccionados, se elige una posición de manera aleatoria que indica el punto en donde se desarrolla el operador, el cual se denomina k_{cruza} donde $k_{cruza} \in [1..m]$.

Ejemplificando lo anterior, al aplicar el operador cruza con $k_{cruza} = 4$ en dos vectores compuestos de 10 elementos cada uno, tenemos:

$$v_1 = (34,2,67,\|98\|,3,67,88,11,6,13),\ v_2 = (22,17,32,\|56\|,88,99,7,56,13,1)$$

Los vectores resultantes de aplicar el operador estarán dados de la siguiente manera.

$$v_1' = (22,17,32,56,3,67,88,11,6,13),\ v_2' = (34,2,67,98,88,99,7,56,13,1)$$

Sin embargo, se debe contemplar una situación adicional que no sucede en los Algoritmos Genéticos de Holland, pues al aplicar el operador existe la posibilidad de obtener vectores inválidos; es decir, que resulten vectores con números aleatorios iguales en diferentes alelos, esto violaría una de las condiciones iniciales del AE.

Para ello se debe verificar que al aplicar el operador, los genes resultantes no contengan en sus alelos genotipos idénticos, en este caso se modificará el operador CRUZA para evitar que suceda esto.

Inicialmente al aplicar el operador se dividirán los vectores en dos partes, según el punto de cruza k_{cruza}; es decir, para los vectores.

$$v_1 = (35,67,32,34,89,11,2,8,10,31),$$
$$v_2 = (22,51,11,43,68,35,7,13,15,1) \qquad (3.2)$$

Con un $k_{cruza} = 4$, al aplicar el operado normal de cruza, se obtiene como vectores resultantes:

$$v_1' = (35,67,32,34,68,35,7,13,15,1) \qquad v_2' = (22,51,11,43,89,11,2,8,10,31) \qquad (3.3)$$

Los vectores en (3.3) v_1', v_2' no son válidos pues presentan valores repetidos en sus alelos, se dividen los genes en dos partes según el punto de cruza (izquierda y derecha) y conforme se llena la segunda parte de los genes con sus contrapartes derechas, se debe verificar que el genotipo que formará parte del alelo no exista en algún otro alelo del gen que se esta formando.

$$v_1 = (\overbrace{35,67,32,34}^{v_1(izq)},\overbrace{89,11,2,8,10,31}^{v_1(der)}) \qquad (3.4)$$

$$\Updownarrow k_{cruza}$$

$$v_2 = (\overbrace{22,51,11,43}^{v_2(izq)},\overbrace{68,35,7,13,15,1}^{v_2(der)}) \qquad (3.5)$$

Al formar el vector $v_1^{'}$ en (3.6), vemos que en la posición $i = 6$ el valor del alelo esta dado por $v_2(der)_2 = 35$ y que ya existe ese valor en la posición 1 del vector v_1 por lo que se debe seleccionar un número aleatorio que cumpla con las condiciones de (3.7).

$$v_1^{'} = (\overbrace{\|35\|,67,32,34}^{v_1(izq)},\overbrace{68,\|X\|,7,13,15,1}^{v_2(der)}) \qquad (3.6)$$

$$\Updownarrow$$

$$X \notin \begin{Bmatrix} v_1^{'}(izq) = (35,67,32,34,) \\ v_2^{'}(der) = (68,7,13,15,1) \end{Bmatrix} \qquad (3.7)$$

Si el valor del alelo es X = 4, este cumple con las condiciones y el vector $v_1^{'}$ queda de la siguiente forma.

$$v_1^{'} = (\overbrace{35,67,32,34}^{v_1(izq)},\overbrace{68,4,7,13,15,1}^{v_2(der)})$$

Para el caso del vector $v_2^{'}$ se resuelve de manera similar.

$$v_2^{'} = (\overbrace{22,51,\|11\|,43}^{v_2(izq)},\overbrace{89,\|X\|,2,8,10,31}^{v_1(der)}) \qquad (3.8)$$

$$\Updownarrow$$

$$X \notin \begin{Bmatrix} v_2^{'}(izq) = (22,51,11,43) \\ v_1^{'}(der) = (89,2,8,10,31) \end{Bmatrix} \qquad (3.9)$$

Si el valor de X = 4 cumple con la ecuación (3.9), $v_2^{'}$ queda de la siguiente forma

$$v_2' = (\overbrace{22,51,11,43}^{v_2(izq)},\overbrace{89,4,2,8,10,31}^{v_1(der)}) \tag{3.10}$$

Siempre se debe tener presente la no intervención de factores que sesguen la evolución del algoritmo, de ahí que se busque conservar la aleatoriedad en la formación de los genes y la manera en que se aplican los operadores.

El otro de los operadores que utilizaremos en el AE, es un operador unitario denominado mutación, que al igual que en los algoritmos de Holland, solo opera sobre un gen o vector, y la probabilidad de aplicarse es muy baja, aunque se utiliza con la finalidad de meter un genotipo que modifique drásticamente la evolución de los genes.

Para su aplicación se genera un número pseudo-aleatorio $q \in [0,1]$ que se compara con Q_{muta} probabilidad de mutación, si $q \geq Q_{muta}$ se aplica el operador sobre el gen, si $q < Q_{muta}$, el operador no se aplica.

Para el caso en que se aplique el operador al gen seleccionado, se elige una posición de manera aleatoria que indica el punto en donde se desarrolla el operador, el cual se denomina $L_{muta} \in [1..m]$, si el vector $v_1 = (35,67,32,34,89,11,2,8,10,31)$ y el punto de mutación $L_{muta} = 5$ entonces el vector $v_1' = (35,67,32,34,X,11,2,8,10,31)$ donde X es un número aleatorio tal que $X \notin \{35,67,32,34,11,2,8,10,31\}$, si X = 99, el vector v_1' será igual a $v_1' = (35,67,32,34,99,11,2,8,10,31)$

El siguiente paso para la implementación del AE, fue la recopilación de todos los parámetros que utilizará el algoritmo para su implementación en un programa de computadora.

Parámetro	Descripción	Valor
NTGPE	Número total de genes por evolución	500
N	Rango de valores permitidos para los alelos del gen	1..100
m	Numero de alelos que forman cada gen o vector	20
P_{cruza}	Valor de comparación para aplicar el operador cruza entre dos genes	0.6
Q_{muta}	Valor de comparación para aplicar el operador mutación en un gen	0.001
T_{evo}	Número de evoluciones a generar en el AE	200

Tabla 3.2: Valores de los parámetros utilizados en el AE de la suma.

3.2.4 Programa de cómputo para AE de la menor suma de "n" números enteros.

El algoritmo de cómputo se desarrolla en base al procedimiento general del Algoritmo Evolutivo planteado en el Capítulo 1.

```
PROGRAMA PRINCIPAL   (desarrollado en  Visual Fox Pro.)

STORE 0 TO ASUMAVECTOR, AGENES, AEVOLUCION  && inicializa el vector con ceros
CLEAR

DO LLENAMAT                  && Genera los vectores validos a evolucionar
DO VER_AGENES                && Muestra el valor de los vectores en tiempo real
DO SEL_POBLA                 && Seleccion inicial de vectores según aptud
FOR WEVO = 1 TO NEVOLUCION
        DO CRUZAMAT          && Aplica el operador cruza a los vectores
        DO MUTAMAT           && Aplica el operador mutación a los vectores
        DO EVAL_VECTOR       && Evalua la aptitud de los vecotores
        DO SEL_POBLA         && Selecciona los mejores vectores para la siguiente
                             && población.
ENDFOR
DO VEREVOLUCION              && Muestra los resultados de cada una de las evoluciones
DO VER_AGENES                && Muestra el valor de los vectores en tiempo real


PROCEDIMIENTOS GENERALES

PROCEDURE LLENAMAT
* Generar  vectores válidos que integren la población inicial  a evolucionar.
* CHECKVECTOR verifica el valor contenido en el parámetro NXNUM no exista en el vector
* para realizar el llenado de los vectores de manera aleatoria se debe contar con una
* subrutina que genere los alelos de los vectores de manera aleatoria y otra subrutina
* que verifique que el gen no forme parte del vector en alguna otra posición.
* ALEATORIO(A,B):

PROCEDURE VER_AGENES
* Procedimiento que permite  mostrar (según  los criterios del usuario) en pantalla,
* impresión o archivo, los valores que posee  la matriz de  genes en tiempo de
* ejecución.
*  ¡¡¡¡ No se muestra el código  debido a la sencillez que representa !!!!
RETURN

PROCEDURE EVAL_VECTOR
* Encuentra el vector de menor suma en tiempo de ejecución, de entre toda la población
* registra el gen y su aptitud en la matriz  ASUMAVECTOR como histórico de cada
evolución.
RETURN

PROCEDURE MUTAMAT
*************************************************************************************
*Procedimiento para aplicar el operador de mutación sobre la matriz de AGENES *
*************************************************************************************
FOR I = 1 TO TGENES
        IF MUTA()
                PUNTOMUTA = OBT_PUNTO()
                APROBADO = .F.
                DO WHILE !APROBADO
                        NXNUM =ALEATORIO(1,TNDCOM)
                        IF !CHECKVECTOR(NXNUM,I)
                                AGENES[I,PUNTOMUTA]= NXNUM
                                APROBADO = .T.
                        ENDIF
                ENDDO
        ENDIF
ENDFOR
RETURN
```

```
PROCEDURE CRUZAMAT
******************************************************************************
*Procedimiento para aplicar el operador CRUZA a los de la matriz AGENES *
******************************************************************************
DO AGENESXTMP
STORE -1 TO AGENES
FOR I = 1 TO TGENES STEP 2
        VECX = ALEATORIO[1,TGENES]
        VECY = ALEATORIO[1,TGENES]
        IF CRUZA()
                PUNTOCRUZA = OBT_PUNTO()
                FOR J = 1 TO PUNTOCRUZA
                        AGENES[I,J]= ATMPGENES[VECY,J]
                        AGENES[I+1,J]= ATMPGENES[VECX,J]
                ENDFOR
                FOR J = (PUNTOCRUZA + 1) TO TNASEL
                        IF !CHECKVECTOR(ATMPGENES[VECX,J],I)
                                AGENES[I,J]= ATMPGENES[VECX,J]
                        ELSE
                                        APROBADO = .F.
                                        DO WHILE !APROBADO
                                                NXNUM =ALEATORIO(1,TNDCOM)
                                                IF !CHECKVECTOR(NXNUM,I)
                                                        AGENES[I,J]= NXNUM
                                                        APROBADO = .T.
                                                ENDIF
                                        ENDDO
                                ENDIF
                                IF !CHECKVECTOR(ATMPGENES[VECY,J],I+1)
                                        AGENES[I+1,J]= ATMPGENES[VECY,J]
                                ELSE
                                        APROBADO = .F.
                                        DO WHILE !APROBADO
                                                NXNUM =ALEATORIO(1,TNDCOM)
                                                IF !CHECKVECTOR(NXNUM,I+1)
                                                        AGENES[I+1,J]= NXNUM
                                                        APROBADO = .T.
                                                ENDIF
                                        ENDDO
                                ENDIF
                        ENDFOR
                ELSE
                        FOR J = 1 TO TNASEL
                                AGENES[I,J]= ATMPGENES[VECX,J]
                                AGENES[I+1,J]= ATMPGENES[VECY,J]
                        ENDFOR
                ENDIF
        ENDFOR
RETURN

FUNCTION ALEATORIO
*  Procedimiento para generar un número pseudo-aleatorio con distribución uniforme
*  para el rango [RANMIN,RANMAX].

FUNCTION CRUZA
*  Regresa un valor booleano, que define si se aplica o no, el operador CRUZA
*  de acuerdo con los parámetros de probabilidad establecidos.

FUNCTION MUTA
* Regresa un valor booleano, que defiene si se aplica o no, el operador MUTACIÓN
* de acuerdo con los parámetros de probabilidad establecidos.

FUNCTION OBT_PUNTO
*  Regresa la posición del vector en donde se aplicará el operado de CRUZA o MUTACIÓN

FUNCTION CHECKVECTOR
*  Regresa un valor booleano que valida si el valor enviado como parámetro
*  TXNUM no existe como valor en el vector I de la matriz AGENES

PROCEDURE REGEVOLUCION
* Procedimiento para almacenar el valor del mejor vector de cada evolución en un
arreglo.
```

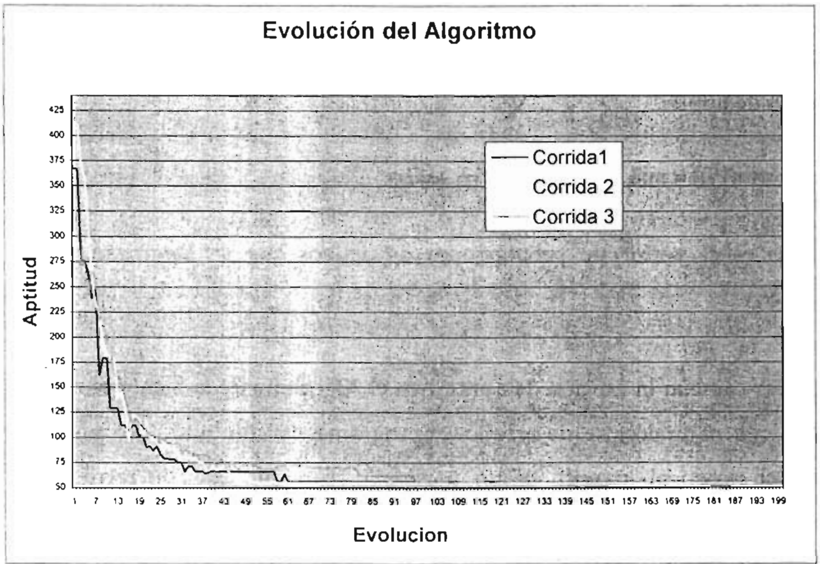
Se realizaron 3 corridas variando únicamente el valor de la semilla de los números pseudo-aleatorios. La siguiente lista de números, son algunos de los 500 vectores que generó el programa de cómputo en la primera corrida, como parte de la población inicial de los genes.

37.00	107.00	73.00	3.00	24.00	136.00	114.00	81.00	15.00	100.00
13.00	42.00	60.00	141.00	11.00	73.00	134.00	39.00	54.00	47.00
69.00	61.00	125.00	150.00	55.00	147.00	52.00	80.00	127.00	111.00
13.00	78.00	108.00	79.00	134.00	66.00	19.00	10.00	52.00	82.00
76.00	12.00	40.00	2.00	66.00	55.00	3.00	27.00	21.00	131.00
125.00	138.00	72.00	140.00	130.00	77.00	144.00	11.00	128.00	83.00
10.00	29.00	81.00	119.00	120.00	146.00	37.00	130.00	51.00	118.00
29.00	63.00	31.00	76.00	77.00	2.00	59.00	148.00	15.00	116.00
23.00	12.00	94.00	123.00	91.00	68.00	64.00	120.00	48.00	102.00
13.00	10.00	65.00	33.00	145.00	68.00	2.00	53.00	140.00	83.00
121.00	18.00	3.00	144.00	77.00	142.00	137.00	58.00	45.00	129.00
20.00	28.00	97.00	130.00	102.00	101.00	131.00	107.00	9.00	134.00
97.00	130.00	47.00	32.00	86.00	114.00	77.00	126.00	66.00	106.00
144.00	49.00	136.00	18.00	69.00	84.00	146.00	19.00	70.00	128.00
73.00	29.00	16.00	45.00	91.00	104.00	22.00	48.00	105.00	116.00
87.00	20.00	14.00	144.00	43.00	63.00	99.00	53.00	135.00	67.00
28.00	50.00	2.00	54.00	141.00	16.00	29.00	87.00	1.00	86.00
70.00	41.00	20.00	50.00	47.00	79.00	44.00	115.00	39.00	99.00
30.00	79.00	102.00	59.00	139.00	44.00	145.00	104.00	147.00	80.00
95.00	21.00	125.00	22.00	108.00	144.00	57.00	14.00	70.00	38.00
142.00	49.00	113.00	66.00	129.00	115.00	132.00	25.00	33.00	82.00
37.00	61.00	131.00	63.00	111.00	96.00	122.00	77.00	14.00	109.00
1.00	133.00	55.00	105.00	118.00	69.00	126.00	81.00	47.00	38.00
9.00	60.00	100.00	34.00	112.00	38.00	81.00	89.00	97.00	147.00
111.00	84.00	74.00	25.00	94.00	112.00	11.00	129.00	127.00	17.00
58.00	32.00	7.00	100.00	36.00	117.00	144.00	82.00	18.00	101.00
15.00	104.00	97.00	59.00	36.00	28.00	146.00	17.00	57.00	140.00
139.00	84.00	143.00	53.00	112.00	145.00	56.00	21.00	108.00	99.00
38.00	49.00	8.00	25.00	131.00	28.00	123.00	7.00	127.00	117.00
125.00	121.00	25.00	8.00	99.00	73.00	104.00	132.00	45.00	138.00
11.00	67.00	18.00	104.00	79.00	129.00	16.00	43.00	119.00	135.00
86.00	142.00	78.00	33.00	127.00	44.00	80.00	77.00	62.00	106.00
114.00	66.00	135.00	136.00	149.00	32.00	96.00	59.00	107.00	44.00
84.00	96.00	94.00	83.00	1.00	18.00	103.00	108.00	70.00	111.00
24.00	53.00	84.00	8.00	33.00	58.00	121.00	57.00	96.00	34.00
128.00	46.00	41.00	149.00	8.00	18.00	138.00	88.00	141.00	121.00
98.00	34.00	38.00	49.00	106.00	121.00	20.00	71.00	48.00	9.00
119.00	33.00	80.00	17.00	23.00	55.00	140.00	146.00	30.00	118.00
129.00	4.00	41.00	71.00	91.00	78.00	135.00	102.00	48.00	145.00
28.00	84.00	100.00	54.00	70.00	104.00	1.00	150.00	82.00	111.00
15.00	36.00	75.00	70.00	150.00	50.00	35.00	85.00	137.00	14.00
71.00	144.00	54.00	5.00	120.00	91.00	121.00	41.00	119.00	139.00
91.00	51.00	88.00	52.00	145.00	85.00	48.00	105.00	36.00	132.00
39.00	54.00	124.00	6.00	65.00	49.00	52.00	101.00	8.00	123.00
150.00	104.00	57.00	139.00	37.00	135.00	70.00	54.00	25.00	134.00
28.00	73.00	32.00	82.00	83.00	23.00	19.00	104.00	132.00	128.00
43.00	125.00	123.00	60.00	122.00	134.00	22.00	16.00	11.00	69.00

Eval	CORRIDA 1	CORRIDA 2	CORRIDA 3
1	24, 90, 28, 12, 30, 32, 9, 63, 60, 1,	2, 11, 40, 101, 19, 4, 76, 71, 38, 5,	20, 38, 41, 178, 44, 1, 5, 17, 12, 108,
2	41, 40, 25, 50, 2, 43, 20, 54, 5, 24,	2, 11, 40, 101, 19, 4, 76, 71, 38, 5,	3, 1, 14, 113, 65, 53, 44, 23, 61, 33,
3	2, 21, 11, 39, 90, 9, 52, 19, 5, 24,	76, 12, 13, 2, 66, 55, 3, 27, 21, 1,	3, 1, 14, 94, 55, 53, 44, 23, 61, 33,
4	2, 21, 11, 39, 90, 9, 52, 19, 5, 24,	79, 8, 13, 2, 66, 55, 3, 27, 21, 1,	3, 1, 14, 77, 44, 17, 58, 98, 25, 20,
5	43, 8, 12, 25, 30, 5, 54, 13, 31, 21,	7, 1, 40, 2, 66, 55, 3, 27, 21, 41,	3, 1, 14, 25, 59, 74, 24, 36, 6, 64,
6	2, 21, 11, 6, 39, 27, 68, 46, 5, 40,	2, 11, 17, 32, 1, 18, 56, 19, 71, 13,	70, 10, 14, 8, 17, 36, 19, 18, 51, 15,
7	2, 8, 12, 25, 30, 9, 52, 24, 56, 40,	48, 1, 17, 32, 61, 18, 3, 27, 21, 20,	26, 1, 14, 15, 76, 23, 20, 30, 9, 19,
8	2, 21, 11, 39, 19, 16, 5, 60, 3, 40,	2, 11, 17, 32, 1, 20, 3, 27, 21, 24,	7, 10, 58, 17, 59, 1, 5, 20, 12, 33,
9	2, 21, 11, 39, 19, 16, 52, 13, 31, 23,	13, 12, 40, 2, 1, 18, 17, 27, 21, 28,	3, 10, 14, 8, 17, 36, 19, 18, 51, 15,
10	2, 21, 11, 39, 19, 16, 5, 20, 43, 17,	13, 12, 40, 2, 1, 18, 17, 27, 21, 28,	3, 1, 14, 8, 17, 36, 19, 18, 51, 15,
11	2, 21, 11, 39, 19, 16, 5, 20, 43, 17,	25, 7, 1, 5, 13, 28, 3, 27, 12, 4,	3, 1, 14, 17, 40, 37, 5, 19, 12, 33,
12	2, 6, 21, 26, 53, 9, 4, 24, 3, 13,	25, 7, 1, 5, 13, 28, 3, 27, 12, 4,	3, 1, 14, 8, 17, 36, 19, 18, 51, 11,
13	2, 6, 21, 26, 53, 9, 4, 24, 3, 13,	25, 7, 1, 5, 13, 28, 3, 27, 12, 4,	3, 1, 14, 8, 17, 36, 19, 5, 25, 7,
14	2, 6, 21, 26, 53, 9, 4, 18, 3, 13,	2, 11, 17, 5, 1, 18, 3, 27, 21, 7,	3, 1, 14, 15, 17, 36, 19, 5, 20, 7,
15	6, 8, 11, 25, 19, 9, 4, 24, 3, 29,	2, 11, 17, 5, 1, 18, 3, 27, 21, 7,	3, 1, 14, 10, 24, 30, 5, 16, 17, 15,
16	2, 8, 12, 25, 30, 5, 4, 24, 3, 13,	2, 11, 17, 5, 1, 18, 3, 27, 15, 7,	3, 10, 14, 8, 17, 1, 5, 19, 12, 7,
17	2, 8, 12, 25, 19, 9, 4, 18, 3, 13,	2, 11, 17, 5, 1, 18, 3, 27, 21, 7,	3, 1, 14, 8, 17, 37, 5, 19, 12, 7,
18	2, 8, 12, 25, 19, 9, 4, 24, 3, 13,	2, 11, 17, 5, 1, 18, 3, 27, 21, 7,	3, 1, 14, 10, 17, 34, 5, 24, 6, 7,
19	2, 8, 12, 25, 20, 9, 4, 18, 3, 13,	16, 5, 17, 2, 1, 18, 3, 19, 8, 12,	3, 10, 14, 8, 33, 1, 5, 16, 12, 15,
20	2, 8, 12, 25, 19, 9, 4, 5, 3, 23,	2, 7, 1, 5, 16, 18, 3, 31, 8, 12,	3, 10, 14, 8, 17, 1, 5, 16, 12, 15,
21	2, 6, 12, 25, 19, 5, 4, 18, 3, 13,	2, 7, 1, 5, 15, 18, 3, 27, 8, 4,	3, 1, 14, 8, 17, 36, 19, 5, 6, 7,
22	2, 8, 12, 25, 20, 9, 4, 13, 3, 6,	2, 11, 17, 5, 1, 12, 4, 24, 8, 7,	3, 1, 14, 4, 17, 15, 19, 5, 6, 11,
23	2, 8, 12, 25, 20, 5, 4, 10, 3, 13,	2, 7, 1, 5, 4, 18, 3, 27, 8, 12,	3, 1, 14, 8, 17, 15, 19, 5, 6, 11,
24	2, 6, 12, 21, 20, 9, 4, 10, 4, 13,	2, 11, 1, 5, 4, 18, 3, 19, 21, 7,	3, 1, 14, 10, 17, 8, 19, 5, 6, 11,
25	2, 8, 12, 25, 19, 9, 4, 5, 3, 13,	2, 11, 1, 5, 4, 18, 3, 24, 8, 7,	3, 1, 14, 8, 17, 7, 19, 5, 6, 11,
26	2, 8, 12, 10, 20, 9, 4, 16, 3, 13,	2, 7, 1, 5, 4, 18, 3, 19, 8, 12,	3, 1, 14, 10, 17, 8, 19, 5, 6, 11,
27	2, 8, 12, 5, 20, 9, 4, 16, 4, 13,	2, 7, 1, 5, 4, 18, 3, 19, 8, 12,	3, 1, 14, 10, 17, 8, 19, 5, 6, 7,
28	2, 6, 12, 21, 19, 9, 4, 5, 3, 13,	2, 11, 1, 5, 4, 18, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 8, 17, 15, 5, 12, 6, 7,
29	2, 6, 12, 21, 19, 9, 4, 5, 3, 13,	2, 11, 1, 5, 4, 18, 3, 19, 5, 7,	3, 1, 14, 8, 17, 15, 5, 12, 6, 7,
30	2, 6, 12, 21, 19, 9, 4, 5, 3, 13,	2, 7, 1, 5, 4, 6, 3, 27, 8, 12,	3, 1, 14, 8, 17, 15, 4, 5, 6, 11,
31	2, 6, 12, 21, 20, 5, 4, 1, 3, 13,	2, 7, 1, 5, 4, 6, 3, 27, 8, 12,	3, 1, 14, 8, 17, 15, 4, 5, 6, 7,
32	2, 8, 1, 21, 20, 5, 4, 10, 3, 13,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 8, 17, 15, 4, 5, 6, 7,
33	2, 6, 1, 25, 20, 5, 4, 7, 3, 13,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 24, 8, 7,	3, 1, 14, 8, 17, 15, 4, 5, 6, 7,
34	2, 6, 1, 21, 19, 9, 4, 5, 3, 13,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 24, 8, 7,	3, 1, 14, 8, 17, 4, 5, 19, 6, 2,
35	2, 6, 1, 21, 19, 9, 4, 5, 3, 13,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 8, 17, 4, 5, 19, 6, 2,
36	2, 6, 1, 21, 20, 5, 4, 7, 3, 13,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 10, 17, 8, 4, 5, 6, 7,
37	2, 6, 1, 21, 19, 9, 4, 5, 3, 13,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 5, 7,	3, 1, 14, 8, 17, 15, 4, 5, 6, 2,
38	2, 8, 1, 21, 20, 5, 4, 10, 3, 7,	2, 7, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 9,	3, 1, 14, 8, 17, 4, 2, 5, 6, 7,
39	2, 6, 1, 25, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 8, 17, 4, 2, 5, 6, 7,
40	2, 6, 1, 21, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 8, 17, 4, 5, 12, 6, 2,
41	2, 6, 1, 12, 20, 5, 4, 10, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 8, 17, 2, 4, 5, 6, 7,
42	2, 6, 1, 21, 20, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 10, 17, 8, 4, 5, 6, 2,
43	2, 6, 1, 20, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 10, 17, 8, 4, 5, 6, 2,
44	2, 6, 1, 10, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 10, 17, 8, 4, 5, 6, 2,
45	2, 6, 1, 20, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
46	2, 6, 1, 16, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
47	2, 6, 1, 8, 19, 9, 4, 10, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
48	2, 6, 1, 16, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
49	2, 6, 1, 16, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
50	2, 6, 1, 16, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 14, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
51	2, 6, 1, 16, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
52	2, 6, 1, 16, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
53	2, 6, 1, 20, 12, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
54	2, 6, 1, 20, 12, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
55	2, 6, 1, 20, 12, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
56	2, 6, 1, 20, 12, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
57	2, 6, 1, 20, 12, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 19, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
58	2, 6, 1, 16, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 9, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
59	2, 6, 1, 16, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 9, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
60	2, 6, 1, 16, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 17, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
61	2, 6, 1, 16, 14, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 9, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
62	2, 6, 1, 16, 19, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 11, 1, 5, 4, 6, 3, 9, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
.	. . . .	. . . .	. . . .
.	. . . .	. . . .	. . . .
.	. . . .	. . . .	. . . .
198	2, 6, 1, 8, 10, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 10, 1, 5, 4, 6, 3, 9, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
199	2, 6, 1, 8, 10, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 10, 1, 5, 4, 6, 3, 9, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 8, 4, 5, 6, 7,
200	2, 6, 1, 8, 10, 9, 4, 5, 3, 7,	2, 10, 1, 5, 4, 6, 3, 9, 8, 7,	3, 1, 9, 10, 2, 9, 4, 5, 6, 7,

Tabla 3.3: Lista de los mejores vectores de cada evolución en 3 corridas del algoritmo.

Como se puede observar en la tabla 3.3, que las tres corridas convergen a la solución óptima del problema, y como se esperaba la manera de converger a la solución es muy distinta en cada una de las corridas sin embargo las tres alcanzan el valor óptimo antes de las 200 evoluciones.



Gráfica 3.1 Muestra la convergencia del AE para alcanzar el óptimo en cada una de las evoluciones.

3.3 Programa de cómputo evaluar un portafolio por el método de Markowitz.

Al comprobar que la eficiencia y eficacia del Algoritmo Evolutivo de la suma, es necesario desarrollar el programa de cómputo que se encargará de evaluar los portafolios de inversión a través del método Markowitz y que permitirá cambiar la función de aptitud.

$V^{*} = \min(eva(V_t)) = \min \sum_{t=1}^{m} v_i$ por , $\min_{\omega} \omega' \Omega \varpi$

Donde ϖ'es el vector de proporciones de activos que se invertirán en el portafolio A.

Para poder cambiar la función de aptitud en el Algoritmo de la menor suma de los números naturales, se desarrolló el programa de cómputo, que permite evaluar el riesgo al invertir en un portafolio, con una tasa de retribución esperada siguiendo el modelo de Markowitz expuesto en el capítulo 2.

Para ello es necesario obtener los datos históricos de los precios de las acciones de los activo, para conocer su comportamiento en el mercado de valores.

Utilizaremos una base de datos que nos permita almacenar dicha información para su posterior análisis estadístico necesario según el método, es decir; conocer la media, varianza y la covarianza de los activos.

Calendario

Fecha	Sina	Slb	Sohu	Stm	Sunw	Syk	Symc	Tef	Tgt	Ti	Tm	Toc
01/06/03	8.330000	42.030000	7.680000	22.310000	3.750000	68.150000	44.910000	28.100000	30.130000	78.290000	54.870000	47.570000
01/07/03	8.420000	40.350000	7.720000	21.820000	3.800000	68.400000	44.610000	28.490000	29.830000	74.780000	54.140000	47.590000
01/08/03	8.430000	40.740000	7.430000	20.720000	3.560000	67.420000	43.360000	28.800000	30.000000	76.200000	52.700000	47.330000
01/09/03	8.630000	41.480000	7.600000	21.480000	3.760000	68.650000	45.070000	29.580000	31.300000	76.040000	53.320000	48.080000
01/10/03	8.880000	41.410000	7.740000	21.840000	3.770000	68.000000	46.120000	30.150000	31.080000	75.970000	52.820000	47.770000
01/13/03	9.350000	40.880000	7.950000	21.580000	3.760000	68.200000	46.660000	30.580000	30.600000	78.160000	52.910000	47.660000
01/14/03	8.810000	40.520000	7.950000	22.140000	3.900000	67.520000	47.340000	31.130000	30.580000	77.720000	52.580000	47.870000
01/15/03	8.760000	40.940000	7.670000	21.340000	3.870000	67.200000	46.050000	30.400000	29.770000	76.930000	52.370000	47.070000
01/16/03	9.370000	41.510000	7.900000	20.790000	3.700000	67.350000	47.650000	31.070000	30.070000	78.590000	52.420000	47.990000
01/17/03	9.370000	40.360000	8.720000	19.260000	3.750000	67.150000	45.050000	30.790000	29.550000	76.990000	51.820000	47.830000
01/21/03	10.250000	38.410000	10.000000	18.900000	3.550000	66.410000	45.840000	30.810000	28.520000	74.930000	50.860000	47.620000
01/22/03	9.950000	37.730000	9.660000	18.660000	3.480000	66.160000	45.550000	30.610000	27.950000	74.700000	50.420000	47.480000
01/23/03	10.270000	38.120000	9.980000	19.720000	3.620000	66.000000	45.990000	30.990000	28.640000	72.570000	51.230000	48.320000
01/24/03	10.380000	37.040000	9.750000	19.030000	3.450000	64.670000	43.910000	30.630000	27.590000	71.540000	50.360000	47.490000
01/27/03	8.900000	35.760000	8.740000	18.470000	3.260000	63.300000	44.200000	29.090000	27.150000	72.590000	49.760000	46.500000
01/28/03	7.440000	36.320000	8.650000	18.610000	3.330000	61.510000	46.100000	29.170000	26.890000	72.480000	50.010000	47.760000
01/29/03	7.930000	37.330000	9.000000	18.740000	3.340000	62.950000	46.780000	28.870000	27.040000	73.350000	49.090000	48.710000
01/30/03	7.110000	36.790000	8.420000	18.060000	3.150000	61.070000	46.380000	28.460000	27.440000	73.770000	47.450000	48.270000
01/31/03	7.850000	37.370000	8.670000	18.290000	3.090000	60.240000	46.680000	28.260000	28.100000	74.480000	47.550000	48.170000
02/03/03	7.760000	37.360000	8.710000	17.880000	3.190000	61.560000	47.310000	28.470000	28.410000	74.160000	48.640000	47.540000
02/04/03	7.800000	37.980000	8.740000	17.630000	3.110000	61.560000	46.910000	28.130000	27.670000	72.470000	49.240000	46.530000
02/05/03	7.630000	37.780000	8.450000	17.680000	3.070000	62.250000	46.880000	27.970000	27.760000	73.260000	49.440000	46.250000
02/06/03	7.900000	37.890000	8.630000	17.360000	3.240000	61.990000	46.530000	27.560000	27.090000	71.540000	49.120000	46.440000
02/07/03	7.750000	37.190000	8.510000	17.340000	3.070000	61.920000	46.090000	26.990000	26.700000	72.540000	49.240000	45.[illegible]0000
02/10/03	7.490000	38.720000	8.450000	16.900000	3.200000	61.900000	44.410000	27.190000	26.670000	71.940000	48.890000	45.770000
02/11/03	7.160000	38.660000	8.390000	17.190000	3.200000	62.250000	45.210000	27.650000	26.860000	73.700000	48.600000	45.690000
02/12/03	6.310000	38.040000	7.320000	16.780000	3.140000	61.910000	45.240000	27.290000	27.160000	73.230000	48.610000	45.150000
02/13/03	5.800000	37.640000	6.830000	17.080000	3.120000	61.680000	44.720000	27.580000	26.900000	73.190000	48.440000	44.680000

Tabla 3.4 : Estructura de la tabla que almacena los precios de los activos.

Para conocer estos datos, es necesario transformar los precios de las acciones en los rendimientos esperados por periodo, es decir, las ganancias o pérdidas de los activos en un periodo de tiempo.

Rendim

Fecha	Roh	Rtn	Rycey	Sap	Sbc	Sc	Sina	Slb	Sohu	Stm	Sunw	Syk	Symc	Tef	Tgt
02/07/03	0.007319	0.006814	-0.043277	-0.011419	-0.027754	-0.002043	-0.034713	0.039514	-0.007101	-0.026036	0.040625	-0.000323	-0.037829	0.007356	-0.001125
02/10/03	-0.024191	-0.008938	0.013720	0.006545	-0.033464	-0.008834	-0.046089	-0.001552	-0.007151	0.016870	0.000000	0.005622	0.017695	0.016637	0.007074
02/11/03	-0.013467	-0.023575	-0.021807	0.002611	-0.027691	-0.025982	-0.134707	-0.016299	-0.146175	-0.024434	-0.019108	-0.005492	0.000663	-0.013192	0.011046
02/12/03	0.000000	-0.011748	-0.054187	0.006914	-0.027536	0.003312	-0.087931	-0.010627	-0.071742	0.017564	-0.006410	-0.003729	-0.011628	0.010515	-0.009665
02/13/03	-0.005556	0.018175	0.000000	-0.027075	0.038394	0.007175	0.155750	0.023352	0.097754	0.033390	0.054545	0.008679	0.001786	0.033975	0.024656
02/14/03	0.023729	-0.009171	0.043956	0.029716	0.014354	0.014147	0.072874	0.023810	0.108363	0.056594	0.048991	0.032348	0.033858	0.016873	0.013944
02/18/03	-0.027159	0.009780	0.007788	-0.022007	-0.028635	-0.001771	-0.045610	0.005291	-0.015550	-0.041134	-0.026627	0.000777	-0.010240	-0.012905	-0.005392
02/19/03	-0.003494	-0.030598	-0.045603	0.013889	-0.081277	-0.005343	-0.002833	0.016357	0.000000	0.013619	0.005882	0.007251	0.019440	-0.020285	-0.041168
02/20/03	0.024207	-0.007252	0.014446	-0.008315	-0.027336	0.024044	0.004231	0.034458	0.014151	-0.001091	0.002933	0.001233	0.020916	0.019197	0.060148
02/21/03	-0.021240	-0.021103	-0.038333	-0.004837	0.000993	-0.013506	0.012535	0.008306	0.043968	-0.011031	0.002924	-0.017560	-0.000209	-0.018848	-0.008872
02/24/03	-0.023886	0.008443	-0.084991	-0.016540	0.027992	-0.010682	-0.009845	-0.036909	0.027412	-0.016826	0.008696	0.013915	0.002504	-0.024781	0.009838
02/25/03	0.005672	-0.004425	-0.063462	-0.037089	-0.033416	-0.017205	0.033430	0.018120	0.002188	-0.022362	-0.036036	-0.014429	-0.010118	-0.027331	-0.013894
02/26/03	0.002828	-0.000738	0.074733	-0.046072	0.019560	0.000302	-0.022288	-0.016953	-0.038636	0.028953	0.011869	0.021636	-0.001689	0.017654	-0.007899
02/27/03	0.002468	-0.013842	0.024306	0.007700	-0.012878	0.019527	-0.005979	0.018094	0.002268	0.031284	0.020349	0.000460	-0.170250	0.026843	0.026224
02/28/03	-0.007818	0.010733	0.031933	-0.019127	-0.002483	0.017727	-0.068690	-0.006312	-0.058824	-0.015890	-0.008798	-0.001229	0.035280	-0.005760	-0.039622
03/03/03	-0.029885	0.006252	-0.049383	-0.057024	-0.014099	-0.003207	-0.043333	-0.021071	-0.076227	-0.020694	-0.017910	-0.000390	-0.009141	-0.014239	-0.040076
03/04/03	0.000731	-0.023720	-0.008897	-0.005735	0.018290	0.001746	0.027553	-0.008248	0.026415	0.017582	-0.006006	0.021116	-0.002895	0.015457	-0.006086
03/05/03	-0.016333	-0.058589	-0.033088	0.016410	-0.020686	-0.004385	-0.019152	0.019363	-0.027132	0.001098	-0.024615	0.005997	0.034250	-0.025055	-0.010765
03/06/03	0.017870	-0.008441	0.000000	-0.005673	0.003519	-0.017549	-0.008319	-0.020610	-0.032000	-0.019016	-0.022013	0.001646	0.014240	-0.016479	0.025843
03/07/03	-0.009945	-0.015096	1.000000	-0.056676	-0.059105	-0.018171	-0.067496	-0.027763	-0.065341	-0.025818	0.009346	-0.021560	0.006616	-0.034483	-0.003005
03/10/03	-0.014195	-0.011556	-0.009881	0.018717	-0.000533	0.003922	0.020870	-0.027198	-0.004280	-0.021688	0.000000	-0.007394	-0.036170	0.025670	-0.015256
03/11/03	-0.010169	0.022984	-0.047619	0.002134	0.005826	-0.038534	0.122137	-0.013380	0.139877	0.024027	-0.042208	-0.001697	0.008439	-0.029138	0.020545
03/12/03	0.042630	0.029354	0.035928	0.056395	0.051256	0.040000	0.078762	0.011898	0.057803	0.051031	0.069486	0.025414	0.041133	0.043834	0.051382
03/13/03	-0.001095	0.008537	0.000000	0.026948	0.016312	0.004789	-0.039474	-0.006922	-0.039663	0.036107	-0.021605	0.011152	0.011114	0.012835	-0.036357
03/14/03	0.048520	0.056735	0.102151	0.031324	0.041232	0.029907	0.063014	0.009755	0.074527	0.062316	0.082153	0.043113	0.042562	0.049163	0.072232
03/17/03	0.029392	0.017266	0.054237	-0.006689	-0.012476	0.008636	-0.004127	0.036086	-0.003348	-0.004931	0.005634	-0.014727	-0.015561	0.006581	-0.005137
03/18/03	-0.004361	0.006433	0.008403	-0.049123	0.016053	0.012226	0.031957	-0.005365	-0.004484	0.012658	0.005602	-0.000867	-0.064167	0.010285	0.011844
03/19/2003	-0.005735	-0.009744	0.000000	0.037162	-0.002366	-0.008603	0.040868	0.016336	0.061053	0.008209	0.021918	-0.001592	0.012940	-0.010742	0.011044
03/20/03	0.055148	-0.010208	0.016529	0.000000	-0.006190	0.014415	0.008861	-0.026309	0.005236	0.050436	0.018817	0.014408	-0.035009	0.025658	0.026076

Tabla 3.5 : Estructura de la tabla que almacena los rendimientos de cada uno de los activos.

Para los fines que persigue este trabajo, serán suficientes los rendimientos diarios de los activos al momento del cierre del mercado de valores. Cabe mencionar que esta unidad de tiempo, es un importante parámetro a considerar en la implementación del algoritmo, ya que permitirá analizar los rendimientos de los activos en un determinado periodo de tiempo, es decir, poder analizar los rendimientos semanales, mensuales, diarios, por hora, etc.

En este caso el rendimiento estará dado por:
(Precio de cierre actual - Precio de cierre Anterior) / Precio de cierre Actual

Para agilizar el cálculo de los rendimientos los precios de los activos, se guardaron en una base de datos, donde los campos o columnas corresponden a cada uno de los activos y los registros o renglones, son los precios de los activos en una fecha determinada.

Posterior a la obtención de los rendimientos es necesario calcular la matriz de varianzas y covarianzas que se utilizarán en el análisis del portafolio.

A continuación se muestra el desarrollo del programa que calcula el riesgo de un portafolio de inversión asociado a un vector con los números de los activos que participarán.

```
PROCEDURE CAMP
LPARAMETERS TVEC_ANALISIS
* TVEC_ANALISIS VECTOR QUE ALMACENA LA POSICIÓN DE LOS ACTIVOS EN LA TABLA
* DE RENDIMIENTOS QUE PARTICIPARÁN EN EL ANÁLISIS
* TOUT  ESPECIFICA SI EL CÁLCULO DEL RIESGO SE REGISTRA COMO SALIDA
*
** DESARROLLO DEL PROGRAMA CAPM
*
* OMEGA         MATRIZ DE VARIANZAS Y COVARIANZAS
* OMEGAINV      MATRIZ INVERSA DE VARIANZAS Y COVARIANZAS
* MAT_A         MATRIZ TEMPORAL NECESARIA PARA EL CÁLCULO DE OMEGAINV
* MU            VECTOR DE MEDIAS
* MUT           VECTOR DE MEDIAS TRANSPUESTO
* IVECTOR       VECTOR IDENTIDAD (VECTOR DE UNOS)
* ITVECTOR      VECTOR IDENTIDAD TRANSPUESTO (VECTOR DE UNOS)

RANGOMAT = ALEN(TVEC_ANALISIS,1)
DIMENSION OMEGA[RANGOMAT,RANGOMAT],IVECTOR[RANGOMAT,1],ITVECTOR[1,RANGOMAT]
DIMENSION
MAT_A[RANGOMAT,RANGOMAT],OMEGAINV[RANGOMAT,RANGOMAT],MU[RANGOMAT,1],MUT[1,RANGOMAT]
```

```
 XOUT   = TOUT
STORE 0 TO OMEGA,OMEGAINV
SELECT RENDIM

* CALCULA EL TOTAL DE DATOS EN LA TABLA DE RENDIMIENTO
COUNT ALL TO TOTREG

*CALCULA VARIANZAS Y COVARIANZAS DE LOS ACTIVOS Y CREA OMEGA
FOR RENGLON = 1 TO RANGOMAT
        IVECTOR[RENGLON,1]= 1
        ITVECTOR[1,RENGLON]= 1
        ACTIVOREN = FIELD(TVEC_ANALISIS[RENGLON],"RENDIM")
        AVERAGE &ACTIVOREN TO MU[RENGLON,1]
        MUT[1,RENGLON] = MU[RENGLON,1]
        FOR COLUMNA = RENGLON TO RANGOMAT
                IF RENGLON = COLUMNA
                        * CALCULA VARIANZA
                        SUMAX = FIELD(TVEC_ANALISIS[RENGLON],"RENDIM")
                        SUMAX2 = FIELD(TVEC_ANALISIS[RENGLON],"RENDIM") +"^2"
                        SUM &SUMAX,&SUMAX2 TO TOTSUMX,TOTSUMX2
                        OMEGA[RENGLON,COLUMNA] = ((TOTREG*TOTSUMX2)-
(TOTSUMX^2))/(TOTREG*(TOTREG-1))
                ELSE
                        * CALCULA COVARIANZA
                        ACTIVOREN = FIELD(TVEC_ANALISIS[RENGLON],"RENDIM")
                        ACTIVOCOL = FIELD(TVEC_ANALISIS[COLUMNA],"RENDIM")
                        AVERAGE &ACTIVOREN,&ACTIVOCOL TO AVGREN,AVGCOL
                        SUM ((&ACTIVOREN-AVGREN)*(&ACTIVOCOL-AVGCOL)) TO SUMADIF
                        OMEGA[RENGLON,COLUMNA] = (SUMADIF/TOTREG)
                        OMEGA[COLUMNA,RENGLON] = (SUMADIF/TOTREG)
                ENDIF
        ENDFOR
ENDFOR
RELEASE SUMAX,SUMAX2,ACTIVOREN,SUMADIF,ACTIVOCOL,AVGREN,AVGCOL,TOTSUMX,TOTSUMX2

*************CALULA OMEGAINV****************************

*** GENERA LA MATRIZ IDENTIDAD
        FOR CONTI = 1 TO RANGOMAT
                OMEGAINV[CONTI,CONTI]= 1
        ENDFOR

*** ASIGANA LOS VALORES DE OMEGA A LA MATRIZ A
FOR CONTI = 1 TO RANGOMAT
        FOR CONTJ = 1 TO RANGOMAT
                MAT_A[CONTI,CONTJ] = OMEGA[CONTI,CONTJ]
        ENDFOR
ENDFOR

***  PROCEDIMIENTO PARA LA GENERACIÓN DE LA MATRIZ OMEGAINV
FOR CONTI = 1 TO RANGOMAT

***  DIVIDE EL RENGLÓN ENTRE EL ESCALAR DE LA DIAGONAL
FACTOR = MAT_A[CONTI,CONTI]
        IF FACTOR = 0
                WAIT "NO SE PUEDE PROCESAR LA MATRIZ / DIVISIÓN ENTRE CERO" WINDOW
                RETURN
        ENDIF
        FOR CONTJ = 1 TO RANGOMAT
                MAT_A[CONTI,CONTJ] = MAT_A[CONTI,CONTJ] / FACTOR
                OMEGAINV[CONTI,CONTJ] = OMEGAINV[CONTI,CONTJ] / FACTOR
        ENDFOR
        *** PIVOTEA SOBRE EL RENGLON CORRESPONDIENTE
        FOR CONTK = 1 TO RANGOMAT
                IF CONTK <> CONTI
                        ACERO = MAT_A[CONTK,CONTI]
                        FOR CONTJ = 1 TO RANGOMAT
                        MAT_A[CONTK,CONTJ] = MAT_A[CONTK,CONTJ]-(ACERO *
MAT_A[CONTI,CONTJ])
                        OMEGAINV[CONTK,CONTJ] = OMEGAINV[CONTK,CONTJ]-(ACERO *
                OMEGAINV[CONTI,CONTJ])
                        ENDFOR
                ENDIF
        ENDFOR
ENDFOR

*** CÁLCULO DE "OMEGAINVMU OMEGAINV * MU"
MPREN = ALEN(OMEGAINV,1) && RENGLONES DE OMEGAINV
MPCOL = ALEN(MU,2)      && COLUMNAS DE MU
DIMENSION OMEGAINVMU[MPREN,MPCOL]
```

```
STORE 0 TO OMEGAINVMU
DO MULTIMAT WITH OMEGAINV,MU,OMEGAINVMU

*** CÁLCULO DE "OMEGAIVECTOR OMEGAINV * IVECTOR"
MPREN = ALEN(OMEGAINV,1) && RENGLONES DE ITVECTOR
MPCOL = ALEN(IVECTOR,2)        && COLUMNAS DE OMEGA INVERSA
DIMENSION OMEGAIVECTOR[MPREN,MPCOL],GVECTOR[MPREN,MPCOL],HVECTOR[MPREN,MPCOL]
STORE 0 TO OMEGAIVECTOR
DO MULTIMAT WITH OMEGAINV,IVECTOR,OMEGAIVECTOR

*** CÁLCULO DE "A"
MPREN = ALEN(OMEGAINVMU,1) && RENGLONES DE LA MATRIZ DE PASO1
MPCOL = ALEN(ITVECTOR,2)       && COLUMNAS DE MU O VECTOR DE MEDIAS
DIMENSION MATPASO[MPREN,MPCOL]
STORE 0 TO MATPASO
DO MULTIMAT WITH ITVECTOR,OMEGAINVMU,MATPASO
WA = MATPASO[1,1]

*** CÁLCULO DE "B"

MPREN = ALEN(MUT,1)
MPCOL = ALEN(OMEGAINVMU,2)
DIMENSION MATPASO[MPREN,MPCOL]
STORE 0 TO MATPASO
DO MULTIMAT WITH MUT,OMEGAINVMU,MATPASO
WB = MATPASO[1,1]

*** CÁLCULO DE "C"
MPREN = ALEN(ITVECTOR,1)
MPCOL = ALEN(OMEGAIVECTOR,2)
DIMENSION MATPASO[MPREN,MPCOL]
STORE 0 TO MATPASO
DO MULTIMAT WITH ITVECTOR,OMEGAIVECTOR,MATPASO
WC = MATPASO[1,1]
*** CALCULO DE "D"
WD = (WB*WC)-(WA**2)

*** CÁLCULO DE "OMEGAP"
MPREN = ALEN(OMEGAIVECTOR,1)
DIMENSION OMEGAP[MPREN,1],OMEGAPT[1,MPREN]
STORE 0 TO OMEGAP,OMEGAPT
FOR CONTI = 1 TO MPREN
        OMEGAP[CONTI,1] = (((OMEGAIVECTOR[CONTI,1] * WB) - (OMEGAINVMU[CONTI,1] * WA))/WD
)+ (((OMEGAINVMU[CONTI,1] * WC) - (OMEGAIVECTOR[CONTI,1] * WA))/WD)* PARAMS.MUP
        OMEGAPT[1,CONTI] = OMEGAP[CONTI,1]
ENDFOR

MPREN = ALEN(OMEGAPT,1)
MPCOL = ALEN(OMEGA,2)
DIMENSION MATPASO[MPREN,MPCOL]
STORE 0 TO MATPASO
DO MULTIMAT WITH OMEGAPT,OMEGA,MATPASO
MPREN = ALEN(MATPASO,1)
MPCOL = ALEN(OMEGAP,2)
DIMENSION MATPASO2[MPREN,MPCOL]
STORE 0 TO MATPASO2
DO MULTIMAT WITH MATPASO,OMEGAP,MATPASO2

RISK = SQRT(MATPASO2[1,1])

*** REGRESA EL RIESGO CALCULADO DEL PORTAFOLIO DE INVERSIÓN.
RETURN RISK
```

Modificando la función de aptitud en el AE de la suma de números enteros por el modelo de Markowitz podremos realizar la evaluación y búsqueda de los posibles portafolios de inversión, pues cada vector formado en el AE representara un portafolio de inversión y al evaluarlo a través del modelo de Análisis de Portafolios se obtendrá un riesgo asociado del portafolio que se utilizará para discriminar la aptitud de cada uno de ellos.

3.4 Consideraciones para la implementación del algoritmo.

Para poder implementar, este algoritmo en cualquier otro lenguaje se debe tomar en cuenta:

- Las herramientas con las que cuenta para la definición y manipulación de arreglos (matrices).
- Organización de datos, velocidad de acceso a la base de datos y archivos de texto.
- Capacidad para realizar funciones estadísticas y cálculo optimizado de estadísticos con el manejo de tablas.

Este algoritmo de hecho puede ser considerado su desarrollo en cualquier lenguaje o interprete de programación, por sus operaciones y manejo con datos externos, es necesario que se considere al elegir el lenguaje las ventajas y desventajas que ofrece al programador antes de iniciar el desarrollo del mismo.

Otro factor importante a considerar en el desarrollo del algoritmo es la velocidad de acceso al disco y memoria en la computadora, así como; la capacidad para realizar operaciones aritméticas del procesador, pues la cantidad de sumas, restas, multiplicaciones, etc., se incrementa con respecto al número de activos que participarán en el portafolio.

La cantidad de tiempo procesador/horas depende de la velocidad del mismo, se puede plantear la implementación sobre una mini o súper computadora lo que permitiría disminuir el tiempo de proceso, sin embargo aumentaría considerablemente el costo de la implementación.

Una opción puede ser la implementación de este algoritmo a través de Supercómputo, es decir, sobre la supercomputadora de la UNAM Origin 2000, realizando la transformación del programa a lenguaje "C", y posiblemente modificando el algoritmo en la manera de almacenar los datos, utilizando una programación en paralelo permitiendo así aprovechar los 32 procesadores con los que cuenta esta Supercomputadora.

CAPÍTULO

4

IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO.

INTRODUCCIÓN:

Se implementó el algoritmo desarrollado en el capítulo anterior, con diferentes tasas de rendimiento esperado, lo que permite ver su comportamiento respecto al riesgo de los portafolios analizados.

Las gráficas de cada una de las simulaciones permitirán observar la convergencia del algoritmo por alcanzar un portafolio de bajo riesgo, de acuerdo con el método de Markowitz.

Por último se enlistan los activos de manera recurrente aparecen en los portafolios óptimos-cercanos, aún cuando el riesgo aceptado en el modelo tenga variación, lo que permite especular la existencia de esos activos en el portafolio óptimo.

4.1 Activos seleccionados para el análisis.

Los activos que se utilizaron para el análisis de esta Tesis fueron tomados directamente del portal disponible en Internet www.yahoo.com en el apartado Finance, Cuotes, http://finance.yahoo.com/indices?u para obtener los históricos de las cotizaciones de los activos seleccionados.

Todos los datos históricos acerca de los precios de cada uno de activos participantes se filtraron y se escogieron aquellos que contaban con la mayor cantidad de cotizaciones en un periodo de tiempo que comprende del 27 de julio del 2001 y 29 de julio del 2003.

ABT	BNI	DD	HBC	LR	PD	SBC	TSM	WYE
ACL	BP	DELL	HCA	LUV	PFE	SC	TXN	XOM
ADBE	BSX	DIS	HD	MAS	PPG	SINA	UMC	YHOO
ADI	C	DOW	HDI	MDT	PTR	SLB	UNH	
AIG	CA	DT	HMC	MMM	PX	SOHU	UNP	
AKZOY	CAJ	E	HON	MRK	QCOM	STM	UNTD	
AMAT	CCU	ELNK	HPQ	MSFT	ORCL	SUNW	UPS	
AMGN	CD	EMC	IACI	MXIM	OVER	SYK	UTX	
AOL	CHL	ERTS	IBM	NIPNY	PCAR	SYMC	V	
ASD	CNET	F	INTC	NOC	PD	TEF	VOD	
ASKJ	CNI	FDX	INTU	NOK	PFE	TGT	VOLVY	
ATH	COL	FNM	JCI	NSANY	PPG	TI	VRTS	
AXP	COP	FO	JNJ	NSC	PTR	TM	VZ	
AZN	COST	FOX	JPM	NTES	PX	TOC	WAG	
BA	CRHCY	GCI	KSS	NTT	QCOM	TOT	WB	
BAC	CSCO	GD	L	NVS	RD	UBS	WFC	
BAX	CVX	GDT	LLL	NWS	ROH	TP	WLP	
BAY	CX	GM	LLY	ORCL	RTN	TRB	WMI	
BEAS	DCM	GPS	LMT	OVER	RYCEY	TRLY	WMT	
BF	DCX	GSK	LOW	PCAR	SAP	TSCDY	WY	

Tabla 4.1 : Clave de los activos que eligieron para el análisis de posibles portafolios de inversión.[1]

[1] Ver los nombre de los activos en el anexo IV.

Debido a que la información ofrecida en el portal no presenta consistencia en el tipo de datos, se realizaron programas de cómputo que permitieran depurar la información y la transformación de los formatos de fecha, así como, datos expresados en formato de caracteres a número, para obtener los rendimientos de los activos por día.

4.2 Resultado de las corridas.

Para conocer el comportamiento del algoritmo en la evaluación de portafolios de inversión se realizaron varios experimentos dividiéndose en grupos.

Análisis	No. de Corridas	No. Activos Disponibles	No. Activos Seleccionados	Rendimiento esperado mp	Evoluciones	Riesgo Obtenido	Mejor Corrida
Grupo 1	3	150	10	0.009	350	0.0081969421	2
Grupo 2	4	150	15	0.007	500	0.0073138389	1
Grupo 3	3	150	15	0.006	500	0.0072376648	3

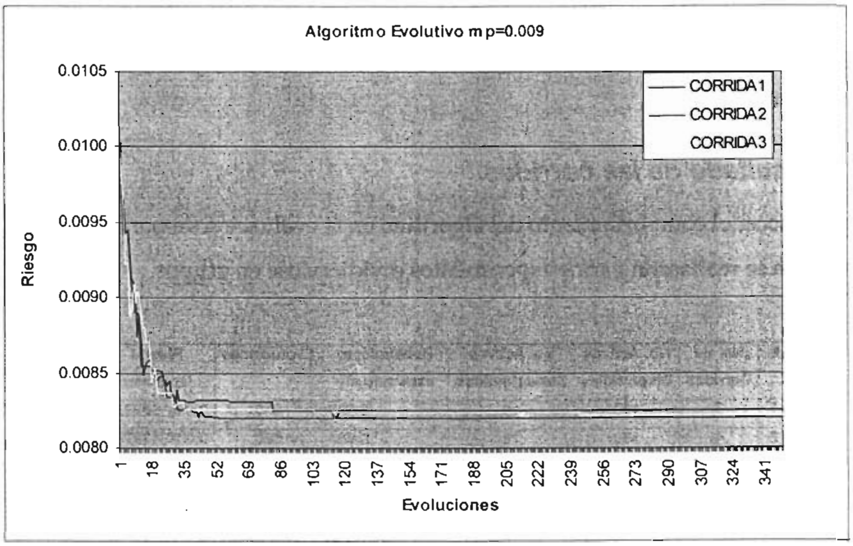
Tabla 4.2 : Comparativo de resultados obtenidos en los grupos de corridas del algoritmo evolutico

En cada grupo se realizaron varias corridas conservando el rendimiento esperado, el número de genes o individuos generados por corrida fue de 500, y los resultados obtenidos por cada grupo fueron los siguientes:

Grupo 1.

Según muestra la gráfica 4.1, El algoritmo selecciona el mejor portafolio o vector de cada evolución; es decir, aquel vector que resultó tener el menor riesgo al ser evaluado con un rendimiento esperado mp = 0.009. También se observa que la segunda corrida converge a un portafolio de menor riesgo que las otras dos corridas, y que se estabilizan las tres corridas después de las 250 evoluciones, no consiguiendo evolucionar más.

Los mejores portafolios óptimos-cercanos obtenidos se describen en las tablas 4.3, 4.4 y 4.5 respectivamente.



Gráfica 4.1: Evolución del algoritmo con portafolios de 10 activos tomados de 150.

RIESGO **0.0082465199**

POSICIÓN DEL ACTIVO EN LA TABLA	PORCENTAJE A INVERTIR EN EL PORTAFOLIO	CLAVE DEL ACTIVO
14	0.12795054	BAC
50	0.17564075	FO
71	-0.14180581	JPM
86	0.08984949	NOC
92	0.17014318	NVS
100	0.17297871	PTR
104	-0.12879482	ROH
126	0.00975496	TSCDY
131	0.10807356	UNH
134	0.41620944	UPS

Tabla 4.3: Portafolio de inversión con 10 activos de la Corrida 1 Grupo1

Corrida 2

RIESGO **0.0081969421**

POSICIÓN DEL ACTIVO EN LA TABLA	PORCENTAJE A INVERTIR EN EL PORTAFOLIO	CLAVE DEL ACTIVO
22	-0.14111315	C
33	0.07360925	CRHCY
50	0.14789301	FO
86	0.08309748	NOC
92	0.15592989	NVS
100	0.18200055	PTR
115	0.12781241	SYK
126	0.01439587	TSCDY
130	-0.05952132	UMC
134	0.41589602	UPS

Tabla 4.5: Portafolio de inversión con 10 activos de la Corrida 2 Grupo1

Corrida 3

RIESGO **0.0082187692**

POSICIÓN DEL ACTIVO EN LA TABLA	PORCENTAJE A INVERTIR EN EL PORTAFOLIO	CLAVE DEL ACTIVO
14	0.13093769	BAC
33	0.06265855	CRHCY
50	0.16134399	FO
71	-0.13360649	JPM
86	0.08736173	NOC
92	0.18621229	NVS
100	0.16585649	PTR
113	-0.07450747	STM
126	0.01120885	TSCDY
134	0.40253438	UPS

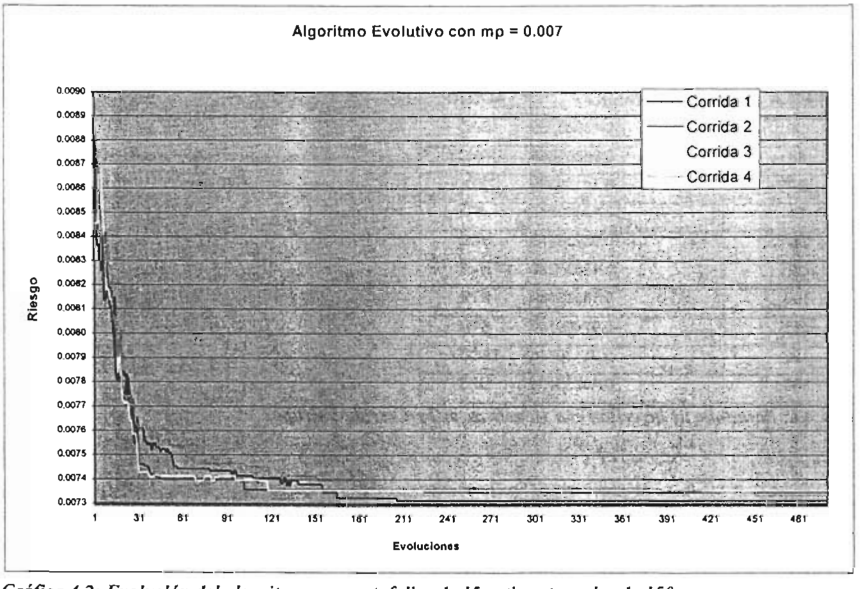
Tabla 4.6: Portafolio de inversión con 10 activos de la Corrida 3 Grupo1

Grupo 2

Los resultados obtenidos del algoritmo en el grupo 2 con mp=0.007

En este grupo la cantidad de evoluciones fue mayor que la del grupo 1, y el gráfico 4.2 muestra la aleatoriedad de cada corrida y su inminente convergencia hacia los portafolios con menor riesgo.

Con una convergencia similar a la de una función exponencial se aprecia la eficiencia del algoritmo evolutivo para descartar los millones de portafolios factibles pero con un riesgo mayor



Gráfica 4.2: Evolución del algoritmo con portafolios de 15 activos tomados de 150.

Para este grupo se observa que la corrida 1 alcanza su mejor vector o gen en la evolución 211 y que a pesar de continuar con el programa hasta llegar a las 500 evoluciones las otras 3 corridas no logran alcanzar reducir su riesgo como la primera.

Cabe destacar que la cantidad de portafolios factibles en este grupo se incremento pues la selección de activos en el portafolio paso de 10 a 15 activos, incrementándose de 1.16955 x 10^{15} a 1.62392x 10^{20} portafolios factibles.

Corrida 1 RIESGO **0.0073138389**

POSICIÓN DEL ACTIVO EN LA TABLA	PORCENTAJE A INVERTIR EN EL PORTAFOLIO	CLAVE DEL ACTIVO
50	0.1508879218	FO
134	0.3997232698	UPS
100	0.1211438358	PTR
113	-0.0592233936	STM
22	-0.1024481865	C
54	0.0681731677	GDT
33	0.0598094978	CRHCY
37	-0.0679387056	DCX
24	0.0813880160	CAJ
26	-0.0582217180	CD
131	0.0949319712	UNH
104	-0.1114569915	ROH
58	0.1699596078	HBC
70	0.1162624014	JNJ
92	0.1370093058	NVS

Tabla 4.7: Portafolio de inversión con 15 activos de la Corrida 1 Grupo2

Corrida 2 RIESGO **0.0073138389**

POSICIÓN DEL ACTIVO EN LA TABLA	PORCENTAJE A INVERTIR EN EL PORTAFOLIO	CLAVE DEL ACTIVO
100	0.127704086	PTR
70	0.134301145	JNJ
104	-0.116851229	ROH
33	0.054507046	CRHCY
134	0.40368692	UPS
126	0.006384954	TSCDY
50	0.147862553	FO
54	0.070851273	GDT
58	0.142963788	HBC
22	-0.117567536	C
92	0.124285755	NVS
120	0.083552707	TM
37	-0.093247286	DCX
26	-0.066613418	CD
131	0.098179244	UNH

Tabla 4.8: Portafolio de inversión con 15 activos de la Corrida 2 Grupo2

Corrida 3 RIESGO **0.007354622**

POSICIÓN DEL ACTIVO EN LA TABLA	PORCENTAJE A INVERTIR EN EL PORTAFOLIO	CLAVE DEL ACTIVO
115	0.1108052545	SYK
134	0.3911223607	UPS
92	0.1325488036	NVS
104	-0.1118379863	ROH
33	0.0662045225	CRHCY
50	0.1345395316	FO
14	0.1146733435	BAC
100	0.1373165363	PTR
22	-0.1120965463	C
49	0.0819856734	FNM
58	0.1502295592	HBC
128	-0.0402247986	TXN
71	-0.0747381270	JPM
86	0.0747343755	NOC
26	-0.0552625025	CD

Tabla 4.9: Portafolio de inversión con 15 activos de la Corrida 3 Grupo2

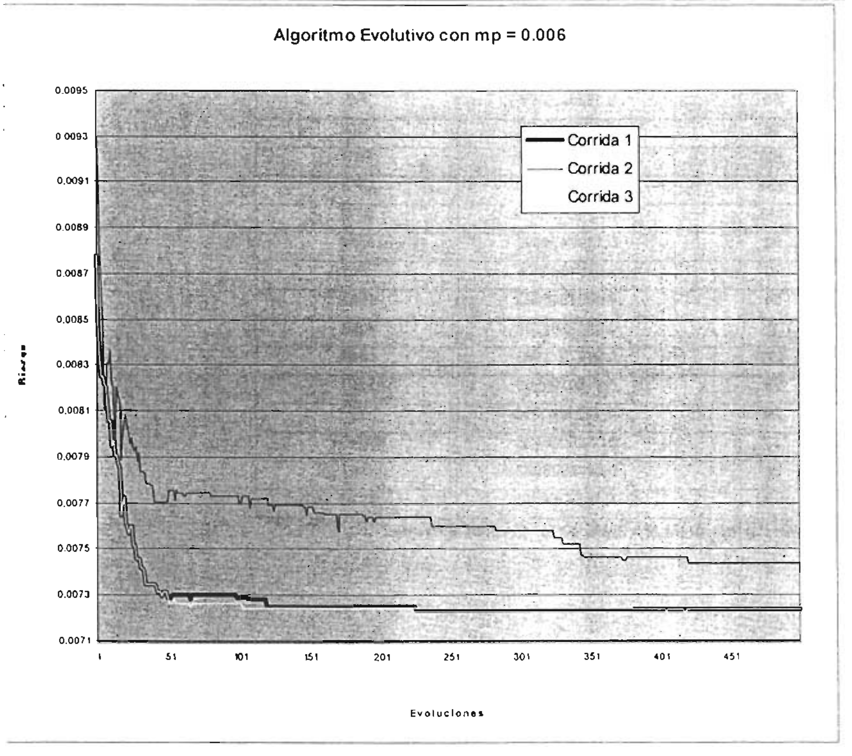
Corrida 4 RIESGO **0.0073333483**

POSICIÓN DEL ACTIVO EN LA TABLA	PORCENTAJE A INVERTIR EN EL PORTAFOLIO	CLAVE DEL ACTIVO
50	0.1525262220	FO
26	-0.0730016556	CD
100	0.1325404989	PTR
134	0.3905597425	UPS
113	-0.0785126513	STM
92	0.1307439390	NVS
70	0.0951641951	JNJ
54	0.0692043022	GDT
9	0.0741982224	ASD
131	0.0957073033	UNH
58	0.1489708365	HBC
22	-0.1197641298	C
33	0.0525066438	CRHCY
24	0.0845823062	CAJ
104	-0.1554257753	ROH

Tabla 4.10: Portafolio de inversión de la Corrida 4 Grupo2

Grupo 3

Para este grupo se efectuaron 3 corridas y como se puede apreciar en la gráfica 4.3 las variaciones de algoritmo dependen en gran medida de la semilla empleada en la generación de números aleatorios pues en esta gráfica se aprecia considerablemente que la corrida 2 se queda a una gran distancia de las otras dos corridas y no consigue evolucionar más.



Gráfica 4.3: Evolución del algoritmo con portafolios de 15 activos tomados de 150.

El comportamiento de las corridas 1 y 3 se muestra similar en la mayor cantidad de evoluciones, con pequeños periodos distintos, al final la corrida 3 encuentra una combinación que reduce el riesgo y la hace mejor que la corrida 1 .

RIESGO 0.007239394			RIESGO 0.0072376648	
Corrida 1			Corrida 3	
PORCENTAJE A INVERTIR EN EL PORTAFOLIO	CLAVE DEL ACTIVO		PORCENTAJE A INVERTIR EN EL PORTAFOLIO	CLAVE DEL ACTIVO
-0.14374783110	ROH		-0.13571680890	ROH
[illegible]	[illegible]		0.10622652410	JNJ
0.10566665470	FNM		[illegible]	UPS
0.07126755080	CRHCY		0.07156515540	CRHCY
0.14040000210	NVS		0.12293967040	NVS
[illegible]	[illegible]		[illegible]	STM
[illegible]	[illegible]		[illegible]	PTR
[illegible]			[illegible]	[illegible]
0.18994263690	UNP		0.20171177050	UNP
0.05882102990	GDT		0.06498427710	GDT
0.05626606610	BSX		[illegible]	MMM
0.08634212850	TM		0.04327762260	LLL
0.12899933490	MMM		0.06843315310	CAJ

Tabla 4.11: Portafolios de inversión de las Corridas 1,3 Grupo3

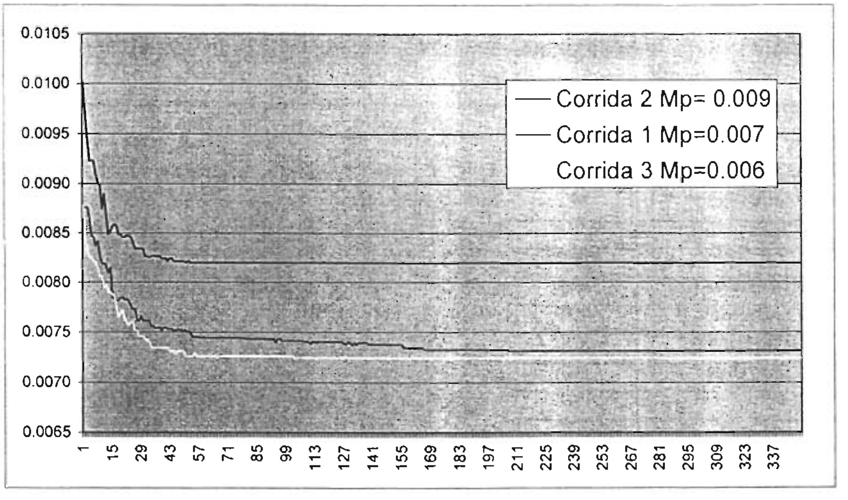
RIESGO 0.007239394	
Corrida 2	
PORCENTAJE A INVERTIR EN EL PORTAFOLIO	CLAVE DEL ACTIVO
[illegible]	[illegible]
0.36285676330	UPS
[illegible]	
0.06813676710	CRHCY
0.14065965860	NVS
0.15071616180	MMM
-0.14526830840	ROH
0.18232376380	UNP
-0.08528755070	STM
0.10930491480	SYK
0.07386996040	CAJ
0.01161214320	TSCDY
0.08262863500	FNM

Tabla 4.12: Portafolios de inversión de la Corrida 2 Grupo3

Los portafolios que se obtienen se muestran en las tablas 4.11, 4.12, y como es de esperarse según lo visto en la gráfica 4.3 el portafolio 1 y 3 son similares por su pequeña diferencia en el riesgo, prueba de ello es que compartan 11 activos en ambos portafolios.

El portafolio conformado en la corrida 2, también comparten 11 activos, sin embargo, de los otros 4 activos que no comparte, solo el activo FNM aparece como parte del portafolio en la corrida 3, por lo que se deduce que esa diferencia entre este portafolio y los otros dos es producto de los activos SYK, CAJ y TSCDY

Es importante resaltar, que a pesar de que comparten los portafolios varios activos, en ninguno se presenta el mismo porcentaje a invertir.



Gráfica 4.4: Comparativo de las mejores corridas de los 3 grupos, cada uno de ellos con diferente valor esperado.

Por último en la gráfica 4.4 se muestra el comparativo entre las mejores corridas de los 3 grupos, con lo que se puede apreciar la congruencia de algoritmo Evolutivo con la realidad, ya que a mayor rendimiento esperado del portafolio, mayor será el riesgo que se obtenga.

CONCLUSIONES

Es verdaderamente impresionante poder simular un proceso de selección, a través de dos operadores genéticos, que permitan la evolución de individuos con el único fin de obtener individuos con características muy superiores a las de los demás.

Al inicio de este trabajo se planteó la posibilidad de desarrollar un algoritmo que permitiera buscar en un espació convexo y exageradamente grande, las mejores soluciones con la posibilidad de seleccionar la mejor.

En este momento es posible decir que el algoritmo presentado para demostrar lo cierto de nuestra aseveración funciona, que primeramente se calibró la eficiencia y eficacia del mismo, utilizando una función de aptitud simple, como la suma de "n" números naturales de "N", obteniendo la combinación óptima en todos los intentos a pesar de variar los parámetros del algoritmo como, el tamaño del vector o el total de números posibles de seleccionar.

La eficiencia del algoritmo queda demostrada al conseguir la solución óptima en un tiempo menor de 2 minutos, corriendo la aplicación sobre una computadora personal con procesador Pentium IV a 1.8 Ghz

Afortunadamente, el conocimiento matemático y el sentido común permiten encontrar sin gran esfuerzo la solución para la menor suma de n números naturales, tomados N, lo que permite demostrar la eficacia del algoritmo.

Si consideramos una búsqueda exhaustiva por un método de comparación simple de de la función de aptitud, al hacer la revisión y comparación de las combinaciones de

15 en 150, resulta sorprendente saber que si la computadora utilizada para realizar este trabajo pudiera evaluar 1 millón de combinaciones por segundo tardaría 5.1494234×10^6 años en terminar y asegurar la combinación optima.

Al implementar el método de Markowitz como función de aptitud en el sistema se obtuvo una herramienta capaz de buscar dentro de un espacio de soluciones las mejores combinaciones, aproximándose a los óptimos-cercanos.

Nunca se ha pretendido juzgar la eficacia del método del Markowitz, pues como cualquier método, no es la panacea de solución a los portafolios de inversión, pero ha sido durante mucho tiempo, el modelo que ha servido de base para desarrollar nuevo y mejores métodos día con día, y fue el motivo para que se seleccionara como función de aptitud para la evaluación de los genes en el Sistema Evolutivo del Portafolios de Inversión.

Diversos son los parámetros que se deben considerar con relación al modelo de Markowitz en nuestro Sistema Evolutivo, uno de ellos es la unidad de tiempo que se utilizará para obtener los datos históricos de los activos, saber si sus cotizaciones se deben tomar en forma diaria, semanal o mensual así como, el método para obtener los rendimientos esperados de los activos.

La vigencia del portafolio seleccionado por nuestro sistema, es un elemento importante a considerar, pues básicamente estará diseñado para 1 unidad de tiempo posterior a la que se haya considerado en los datos históricos. No debemos perder de vista, que el portafolio que se esta obteniendo del sistema evolutivo, es un portafolio probabilístico, y que nada nos garantiza que el comportamiento de un Mercado de Valores por diversos factores económicos, políticos y sociales que cambien radicalmente las expectativas de riesgo.

Otra ventaja que ofrece este Sistema Evolutivo, es que esta diseñado de tal forma, que el usuario puede estudiar el comportamiento del sistema, variando los parámetros involucrados en el Método de Markowitz o en el Algoritmo Evolutivo, permitiendo que con el tiempo se pueda obtener mayor experiencia sobre el comportamiento de los mercados, sin la necesidad de poner en riesgo el dinero de los inversionistas. Seguir haciendo simulaciones paralelas con la vida diaria y verificando el comportamiento de Sistema, agregar nuevas condiciones o variantes que se vayan requiriendo hasta lograr una similitud con la vida real según nuestras necesidades.

Es importantes mencionar que en el sistema desarrollado para la evaluación y búsqueda de mejores portafolios de inversión, la función de aptitud involucra la inversión y multiplicación de matrices, obtención de medias, desviaciones estándar, varianzas y covarianzas; aumentando considerablemente la cantidad de operaciones aritméticas necesarias para la evaluación de cada portafolio, haciendo inasequible el poder demostrar por el método exhaustivo la solución óptima del portafolio y en consecuencia tener el marco de referencia necesario para comparar los óptimos-cercanos arrojados por el algoritmos evolutivo.

La cantidad de tiempo requerido por el algoritmo para realizar una corrida de 500 evoluciones para encontrar el mejor portafolio conformado de 15 activos tomados de 150 con una población de 300 genes por evolución fue de 60 horas por corrida, tiempo considerablemente bajo si lo comparamos contra el tiempo requerido para evaluar todas la posibilidades hasta encontrar el óptimo.

Sin embargo, resulta contradictorio pues 60 horas en un ambiente financiero, resulta ser toda una eternidad para la toma decisiones, por lo que se debe buscar la manera de agilizar el algoritmo mediante diferentes técnicas de programación y equipos más poderosos.

Una de las opciones factibles que puedan mejorar considerablemente el tiempo de proceso es evitar repetir los procedimientos para el cálculo de la matriz de varianzas y covarianzas en cada evaluación de aptitud de un vector, si se realiza la evaluación de manera inicial de una sola matriz de covarianzas de todos los activos que se encuentren en memoria, se podrán evitar los tiempos de acceso a disco, para la obtención de las medias, varianzas, covarianzas de los activos que se comparen en ese momento.

Es por ello que acogiéndome a los conocimientos matemáticos obtenidos en mi formación profesional me permito afirmar que la eficacia del modelo es considerablemente alta, aunque difícil de comprobar puedo asegurar que se está proponiendo una herramienta nueva y diferente, en la búsqueda de soluciones óptimas en espacios convexos y de gran tamaño.

Es una herramienta que se muestra como punta de iceberg, que seguirá revolucionando los métodos de optimización en los años siguientes.

ANEXO I

Subrutinas Adicionales de Programación.

Multiplicación de matrices

La siguiente rutina se utilizó para la multiplicación de matrices en el procedimiento para evaluar la aptitud de los portafolios de inversión.

```
PARAMETERS TMATA,TMATB,TMATC
IF PCOUNT()!= 3
        WAIT WINDOW "PARÁMETROS DE LAS MATRICES NO ESTAN COMPLETOS"
        RETURN
ENDIF
AREN = ALEN(TMATA,1)
ACOL = ALEN(TMATA,2)
BREN = ALEN(TMATB,1)
BCOL = ALEN(TMATB,2)
CREN = ALEN(TMATC,1)
CCOL = ALEN(TMATC,2)

IF ACOL != BREN
        WAIT WINDOW "LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES NO SE PUEDE REALIZAR, RANGOS INCOMPATIBLES"
        RETURN
ENDIF

IF (CREN != AREN) OR (CCOL != BCOL)
        DIMENSION TMATC[AREN,BCOL]
ENDIF

STORE 0 TO TMATC
* MULTIPLIACION DE MATRICES A[M X N] * B[N * P] = C[M * P]
FOR CNTI = 1 TO AREN
        FOR CNTK = 1 TO BCOL
                FOR CNTJ = 1 TO BREN
                                TMATC[CNTI,CNTK]   =   TMATC[CNTI,CNTK]   +   (TMATA[CNTI,CNTJ]   *
TMATB[CNTJ,CNTK])
                ENDFOR
        ENDFOR
ENDFOR
```

Inversa de una matriz

Rutina para obtener la inversa de una matriz y que fue necesaria en la evaluación de los portafolios por el método de Markowitz.

La rutina, obtiene la inversa de la matriz omega definida previamente y al aplicar el procedimiento sobre la matriz identidad de omgeainv se obtiene su inversa.

```
**** GENERA LA MATRIZ IDENTIDAD CON EL MISMO RANGO QUE LA MATRIZ OMEGA
       FOR CONTI = 1 TO RANGOMAT
              OMEGAINV[CONTI,CONTI]= 1
       ENDFOR
*** ASIGANA LOS VALORES DE OMEGA A LA MATRIZ A, NECESARIA PARA EL CÁLCULO
*** LA MATRIZ INVERSA
FOR CONTI = 1 TO RANGOMAT
       FOR CONTJ = 1 TO RANGOMAT
              MAT_A[CONTI,CONTJ] = OMEGA[CONTI,CONTJ]
       ENDFOR
ENDFOR

***  INICIA EL PROCEDIMIENTO PARA LA GENERACIÓN DE LA MATRIZ OMEGAINV
FOR CONTI = 1 TO RANGOMAT
       ***  DIVIDE EL RENGLÓN ENTRE ESCALAR DEL TERMINO DE LA DIAGONAL
       FACTOR = MAT_A[CONTI,CONTI]
       IF FACTOR = 0
              WAIT "NO SE PUEDE PROCESAR LA MATRIZ / DIVISION ENTRE CERO" WINDOW
              RETURN
       ENDIF
       FOR CONTJ = 1 TO RANGOMAT
              MAT_A[CONTI,CONTJ] = MAT_A[CONTI,CONTJ] / FACTOR
              OMEGAINV[CONTI,CONTJ] = OMEGAINV[CONTI,CONTJ] / FACTOR
       ENDFOR
       *** PIVOTEA SOBRE EL RENGLÓN CORRESPONDIENTE
       FOR CONTK = 1 TO RANGOMAT
              IF CONTK <> CONTI
                     ACERO = MAT_A[CONTK,CONTI]
                     FOR CONTJ = 1 TO RANGOMAT
                            MAT_A[CONTK,CONTJ]     =     MAT_A[CONTK,CONTJ]-(ACERO     *     ;
                            MAT_A[CONTI,CONTJ])
                            OMEGAINV[CONTK,CONTJ]     =     OMEGAINV[CONTK,CONTJ]-(ACERO     *     ;
                            OMEGAINV[CONTI,CONTJ])
                     ENDFOR
              ENDIF
       ENDFOR
ENDFOR
```

ANEXO II

Elementos Básicos de Estadística.

Media

Las medidas numéricas usadas par resumir las características de una población son definidas como *valores esperados* de y o una función de y. Por definición, el valor esperado de y, E(y), esta dado por

$$E(y)=\sum_{y} yp(y)$$

donde la suma incluye todos los valores de y para los cuales $p(y)>0$. Se puede ver que E(y) es igual al valor promedio, o valor medio, de todas las mediciones de nuestra población conceptual. En general, una media poblacional será denotada por μ, por lo que $\mu = E(y)$; donde y, es el valor de una medición individual seleccionada de la población al azar.

La media aritmética (promedio) se define como la suma de las observaciones y y se divide entre el total de observaciones.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} y}{n}$$

Varianza

La variabilidad de las mediciones en una población puede ser medida por la varianza, la cual se define como el valor esperado o valor promedio del cuadrado de la desviación entre una medición y seleccionada de manera aleatoria y su valor medio μ.

Entonces la varianza de y esta dada por:

$$V(y) = E(y-\mu)^2 = \sum_i (y-\mu)^2 p(y)$$

La varianza V(y) es comúnmente denotada por σ^2

Para calcular la varianza de toda una población se empleará la siguiente fórmula

$$V(y) = \frac{n\sum x^2 - (\sum x)^2}{n^2}$$

y para el cálculo de la varianza muestral, se empleará el siguiente estimador.

$$Var(y) = \frac{n\sum y^2 - (\sum y)^2}{n(n-1)}$$

Covarianza

Esta herramienta de análisis y su fórmula devuelven el promedio del producto de desviaciones de puntos de datos de las medias respectivas. La covarianza es una medida de la relación entre dos rangos de datos.

$$Cov(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$

Puede utilizar la herramienta Covarianza para determinar si dos rangos de datos varían conjuntamente, es decir, si los valores altos de un conjunto están asociados con los valores altos del otro (correlación positiva), si los valores bajos de un conjunto están asociados con los valores bajos del otro (correlación negativa) o si los valores de ambos conjuntos no están relacionados (correlación con tendencia a cero).

ANEXO III

Generación de números aleatorios

Una vez obtenida toda la información, es decir, los datos de entrada del sistema real, es necesario convertirlos en datos de entrada del modelo de simulación. Es posible distinguir dos tipos de información:

1. Información determinística. Esta información entra directamente al modelo con su valor correspondiente en el sistema real.

2. Información probabilística. Es necesario crear modelos de simulación que imiten el comportamiento de esas variables.

De esta forma, al crear un modelo de simulación debemos ser capaces de crear ese comportamiento y modelarlo. Los números aleatorios uniformes (0-1) son la base en los modelos de simulación donde hay variables estocásticas, ya que dichos números son la herramienta para generar eventos de tipo probabilístico.

MÉTODOS DE GENERACIÓN DE NÚMEROS PSEUDOALEATORIOS U(0,1)

Existen un gran número de métodos para generar los números aleatorios uniformes entre 0 y 1. Algunas formas de obtener estos números son:

- Utilizando tablas de números aleatorios.
- Utilizando calculadoras (algunas incluyen una función para generarlos).
- Los lenguajes de programación y las hojas electrónicas incluyen una función para generarlos.
- Utilizando Generadores congruenciales.

El método a utilizar, en sí mismo, no tiene importancia: la importancia radica en los números que genera, ya que estos números deben cumplir ciertas características para que sean validos y útiles, dichas características son:

1. Uniformemente distribuidos.
2. Estadísticamente independientes.
3. Su media debe ser estadísticamente igual a 1/2.
4. Su varianza debe ser estadísticamente igual a 1/12.
5. Su periodo o ciclo de vida debe ser largo.
6. Deben ser generados a través de un método rápido.
7. Generados a través de un método que no requiera mucha capacidad de almacenamiento de la computadora.

METODOS PARA GENERAR NUMEROS ALEATORIOS NO UNIFORMES

En los modelos estocásticos existirán una o más variable aleatorias interactuando. Estas variables siguen distribuciones de probabilidad teóricas o empíricas, diferentes a la distribución uniforme (0-1). Para generar números que sigan el comportamiento de éstas variables, se pueden utilizar algunos métodos como los siguientes:

1. Método de la transformada inversa.
2. Método de rechazo.
3. Método de composición.
4. Procedimientos especiales.

MÉTODO DE LA TRANSFORMADA INVERSA.

El método de la transformada inversa utiliza la distribución acumulada F(x) de la distribución que se va a simular. Puesto que F(x) esta definida en el intervalo (0-1), se puede generar un número aleatorio uniforme R y tratar de determinar el valor de la variable aleatoria para cual su distribución acumulada es igual a R, es decir, el valor simulado de la variable aleatoria que sigue un distribución de probabilidad f(x), se determina al resolver la siguiente ecuación.

F(x) = R ó x = F^-1 (R)

La dificultad principal de este método descansa en el hecho de que en algunas ocasiones es difícil encontrar la transformada inversa. Sin embargo si esta función inversa ya ha sido establecida, generando números aleatorios uniformes se podrán obtener valores de la variable aleatoria que sigan la distribución de probabilidad deseada.

ANEXO IV

Listado de los activos empleados.

A continuación se enlistan las claves de los activos y los nombres de las compañías que se utilizaron en este trabajo.

ABT	ABBOTT LABS
ACL	ALCON INC
ADBE	ADOBE SYS
ADI	ANALOG DEVICES
AIG	American International Group, Inc (AIG
AKZOY	Akzo Nobel NV
AMAT	Applied Materials Inc
AMGN	Amgen Inc
AOL	TWX Time Warner Inc
ASD	American Standard Companies Inc
ASKJ	Ask Jeeves Inc
ATH	Cambio por Wellpoint Health Networks Inc (WLP)
AXP	American Express Co
AZN	AstraZeneca PLC
BA	The Boeing Co
BAC	Bank of America Corp
BAX	Baxter International Inc
BAY	Bayer AG
BEAS	BEA Systems Inc
BF	BASF AG
BNI	Burlington Northern Santa Fe Corp
BP	BP PLC
BSX	Boston Scientific Corp
C	Citigroup Inc
CA	Computer Associates International Inc
CAJ	Canon Inc
CCU	Clear Channel Communications Inc
CD	Cendant Corp
CHL	China Mobile (Hong Kong) Ltd
CNET	CNET Networks Inc

CNI	Canadian National Railway Co
COL	Rockwell Collins
COP	ConocoPhillips
COST	Costco Wholesale Corp
CRHCY	CRH PLC
CSCO	Cisco Systems Inc
CVX	ChevronTexaco Corp
CX	Cemex SA de CV (MEX)
DCM	NTT DoCoMo Inc
DCX	DaimlerChrysler AG
DD	E.I. Du Pont De Nemours & Co
DELL	Dell Inc
DIS	The Walt Disney Co
DOW	Dow Chemical Co
DT	Deutsche Telekom AG
E	ENI SpA
ELNK	Earthlink Inc
EMC	EMC Corp
ERTS	Electronic Arts Inc
F	Ford Motor Co
FDX	Fedex Corp
FNM	Fannie Mae
FO	Fortune Brands Inc
FOX	Fox Entertainment Group Inc
GCI	Gannett Co Inc
GD	General Dynamics Corp
GDT	Guidant Corp
GM	General Motors Corp
GPS	Gap Inc
gsk	GlaxoSmithKline PLC
HBC	HSBC Holdings PLC
HCA	HCA Inc
HD	Home Depot Inc
HDI	Harley-Davidson Inc
HMC	Honda Motor Co Ltd
HON	Honeywell International Inc
HPQ	Hewlett-Packard Co
IACI	IAC/InterActiveCorp
IBM	International Business Machines Corp
INTC	Intel Corp
INTU	Intuit Inc
JCI	Johnson Controls Inc

JNJ	Johnson & Johnson Inc
JPM	JPMorgan Chase and Co
KSS	Kohl's Corp
L	Liberty Media Corp
LLL	L-3 Communications Holdings, Inc
LLY	Eli Lilly and Co
LMT	Lockheed Martin Corp
LOW	Lowes Cos Inc
LR	Lafarge SA
LUV	Southwest Airlines Inc
MAS	Masco Corp
MDT	Medtronic Inc
MMM	3M Co
MRK	Merck & Co Inc
MSFT	Microsoft Corp
MXIM	Maxim Integrated Products Inc
NIPNY	NEC Corp
NOC	Northrop Grumman Corp
NOK	Nokia Oyj
NSANY	Nissan Motor Co Ltd
NSC	Norfolk Southern Corp
NTES	Netease.com Inc
NTT	Nippon Telegraph and Telephone Corp
NVS	Novartis AG
NWS	News Corporation, Inc
ORCL	Oracle Corp
PCAR	Paccar Inc
PD	Phelps Dodge Corp
PFE	Pfizer Inc
PPG	PPG Industries Inc
PTR	PetroChina Co Ltd
PX	PetroChina Co Ltd
QCOM	Qualcomm Inc
ORCL	Oracle Corp
PCAR	Paccar Inc
PD	Phelps Dodge Corp
PFE	Pfizer Inc
PPG	PPG Industries Inc
PTR	PetroChina Co Ltd
PX	Praxair Inc

QCOM	Qualcomm Inc
RD	Royal Dutch Petroleum Company
ROH	Rohm & Haas Co
RTN	Raytheon Co
RYCEY	Rolls-Royce Group PLC
SAP	SAP AG
SBC	SBC Communications Inc
SC	The Shell Transport & Trading Company Plc
SINA	Sina Corporation
SLB	Schlumberger Ltd
SOHU	Sohu.com Inc
STM	STMicroelectronics NV
SUNW	Sun Microsystems Inc
SYK	Stryker Corp
SYMC	Symantec Corp
TEF	TELEFONICA ADR
TGT	Target Corp
TI	Telecom Italia SpA
TM	Toyota Motor Corp
TOC	The Thomson Corp
TOT	Total SA
UBS	UBS AG
TP	TPG N.V.
TRB	Tribune Co
TRLY	Change Terra Networks SA (TRRA)
TSCDY	Tesco PLC
TSM	Taiwan Semiconductor Manufacturing Co Ltd
TXN	Texas Instruments Inc
UMC	United Micro Electronics Corp
UNH	UnitedHealth Group Inc
UNP	Union Pacific Corp
UNTD	United Online Inc
UPS	United Parcel Service Inc
UTX	United Technologies Corp
V	Vivendi Universal
VOD	Vodafone Group PLC
VOLVY	Volvo AB
VRTS	Veritas Software Corp
VZ	Verizon Communications
WAG	Walgreen Co
WB	Wachovia Corp

WFC	Wells Fargo & Co
WLP	Wellpoint Health Networks Inc
WMI	Waste Management Inc
WMT	Wal-Mart Stores Inc
WY	Weyerhaeuser Co
WYE	Wyeth
XOM	Exxon Mobil Corp
YHOO	Yahoo! Inc

Glosario

A.

Accionistas: Propietarios permanentes o temporales de acciones de una sociedad anónima Esta situación los acredita como socios de la empresa y los hace acreedores a derechos patrimoniales y corporativos.

Acciones: Partes iguales en que se divide el capital social de una empresa. Parte o fracción del capital social de una sociedad o empresa constituida como tal.

Activo: Cualquier bien tangible ó intangible de valor que posee una empresa

Administración: Se entenderá por administración el servicio de pago de los ejercicios de derechos, en especie o en efectivo, que devenguen sobre los valores que se tienen en depósito.

Alelo: Diversas formas que puede adoptar el gen. Cualquier carácter de individuos (como el color de pelo) puede manifestarse diferentemente; se dice que el gen está en varios estados, denominados los alelos (valores del rasgo)

Algoritmo: En matemáticas, método de resolución de cálculos complicados mediante el uso repetido de otro método de cálculo más sencillo.

B.

Bondes: Bonos de desarrollo del Gobierno Federal. Títulos de deuda emitidos por el Gobierno Federal con el propósito de financiar proyectos de maduración prolongada.

Bonos: Títulos de deuda emitidos por una empresa o por el Estado. En ellos se especifica el monto a reembolsar en un determinado plazo, las amortizaciones totales o parciales, los intereses periódicos y otras obligaciones del emisor.

Bursátil: Relativo a la actividad en Bolsa.

Bursatilidad: Facilidad de comprar o vender la acción de una emisora en particular.

C.

CETES: Certificados de la Tesoreria, son valores gubernamentales emitidos por la Secretaria de Hacienda y Crédito Público a través de banco de México, y esta libre de riesgo.

Cromosomas: Vector constituido por varios alelos, que pueden adoptar diversas características según su composición.

D.

Dow Jones: Índice de la Bolsa de Nueva York.

E.

Epistasis: Es la integración que existe entre los genes. De este modo si un cromosoma presenta un alto grado de epistasis esto indicaría que el efecto de muchos genes depende críticamente de la presencia o ausencia de otros genes.

F.

Fenotipos: Se le denomina a las características que resultan de la cruza de genes y las propiedades a las que dan lugar. Representan colas, pieles, músculos, conchas; la capacidad de correr con rapidez, de camuflarse, de atraer a la hembra, de construir un buen nido.

G.

Gen: Unidad conformada por uno o varios cromosomas, que forman una solución factible para el algoritmo evolutivo, en el caso de genes haploides los genes son de un cromosoma y en estas circunstancias se consideran lo mismo, es decir un vector solución.

Genética: Estudio científico de cómo se transmiten los caracteres físicos, bioquímicos y de comportamiento de padres a hijos.

Genotipo: Conjunto de valores que pueden conformar el gen.

H.

Haploide: Gen de un solo cromosomas.

Heterocigoto: También heterocigótico o híbrido, según la genética mendeliana, individuo que posee dos variantes o alelos distintos para un mismo gen.

Homocigoto: También homocigótico o raza pura, según la genética mendeliana, individuo procedente de un cigoto que se originó a partir de dos gametos con el mismo alelo para un gen determinado.

I.

Índice: Medida estadística diseñada para mostrar los cambios de una o más variables relacionadas a través del tiempo. Razón matemática producto de una fórmula, que refleja la tendencia de una muestra determinada.

Índice de Precios y Cotizaciones (IPC): Indicador de la evolución del mercado accionario en su conjunto. Se calcula en función de las variaciones de precios de una selección de acciones, llamada muestra, balanceada, ponderada y representativa de todas las acciones cotizadas en la BMV.

M.

Mendel.- Gregor Mendel Conocido como padre de la genética moderna, desarrolló los principios de la herencia estudiando siete pares de caracteres heredados en el guisante (chícharo). Aunque la importancia de su obra no se reconoció en vida del investigador, se ha convertido en fundamento de la genética actual

Mercado de Valores: Espacio en el que se reúnen oferentes y demandantes de valores.

P.

Palmicia: Se produce cuando la variabilidad entre los elementos de la población es pequeña ocasionando que el algoritmo genético no evolucione, pues la población se conforma sólo de individuos con un desempeño equivalente al promedio, la población no evolucionará ocurre cuando

Plazo: Periodo de tiempo que transcurre antes del vencimiento de un título de deuda. Por lo general, las emisiones suelen ser a 28, 91. 182 y 364 dias, aunque se han realizado emisiones a plazos mayores

Precio: Valor monetario que se asigna a un activo.

Precio Ajustado: Precio resultante de aplicar al precio de cierre de una acción, el valor que implique el ejercicio de un derecho corporativo o patrimonial decretado por la emisora en cuestión. El precio ajustado es calculado por la Bolsa.

Precio de Apertura: Precio que se toma de referencia para cada acción al inicio de una sesión bursátil. Puede tratarse del precio de cierre de la sesión anterior, del precio ajustado (en caso de haber decretado la empresa emisora algún derecho corporativo o patrimonial) o del precio base para la negociación por subasta al inicio de una sesión de remate.

Precio de Cierre: Ultimo Precio Promedio Ponderado calculado durante la jornada bursátil para cada acción listada en la BMV. En su defecto, el último hecho de compraventa registrado en la sesión correspondiente. A falta de ambos, el último precio de cierre conocido.

R.

Rendimientos: Beneficio que produce una inversión. El rendimiento anualizado y expresado de manera porcentual respecto a la inversión se denomina tasa de rendimiento. Los rendimientos no sólo se obtienen a través de ganancias de capital (diferencia entre el precio de compra y el precio de venta), sino también por los intereses que ofrezca el instrumento, principalmente en títulos de deuda y por dividendos que decrete la empresa emisora.

S.

Simulación: Es una forma de reproducir las condiciones de una situación dada, por medio de un modelo, para estudio, prueba, entrenamiento, etc.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

[Baker-1985] Baker J. E., "Adaptive Selection Methods for Genetic Algorithms", 1985, Procceding of the First ICGA, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 101-111 1985.

[Burden-1991] Burden, Richard L.; Faires, J. Douglas; " Análisis Numérico", Ed. Grupo Editorial Iberoamérica, , 1991.

[Canavos-1991] Canavos, George C.; "Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos", Ed. Mc. Graw-Hill, México, 1991.

[Darwin-1859] Darwin, Charles, "On the origin of species by means of natural selection or the preservation of favored races in the struggle for life", Murray London 1859.

[Davidor-1989] Davidor, Yuval, "Genetic Algorithms and Robotics A Heuristic Strategy for Optimization", World Scientific Publishing Co., 1991.

[Fischer-1958] Fischer. R.A., "The Genetical Theory of Natural Selection", Dover Publications Inc. New York, 1958.

[Fogel-1966] Fogel, L.J., Owens, A.J. and Walsh, M.J., "Artificial Intelligence Through Simulated Evolution", Jhon Woley, Chichester, U.K., 1966.

[Glover-1977] Glover, F., "Heuristics for Integer Programming Using Surrogate Constraints", Decision Sciences, Vol. 8, No. 1, pp. 156-166, 1977.

[Hammon-1989] Hammond, Robert H., Rogers William B. "Introducción al Fortrand 77 y a la PC", 1989.

[Holland-1992] Holland, J.H., "Adaptation in Natural and Artifical Systems", MIT Press, Cambridge, Ma. 1992.

[Koza-1991] Koza, J.R., "Genetic Programming", MIT Press, Cambridge, MA 1991.

[Luthe-1984] Luthe, Rodolfo; Olivera, Antonio; "Métodos Numéricos", Ed. Limusa, México, Cuarta reimpresión, 1984

[Moscato-1994] Moscato, P., and Norman, M.G., "An Analysis of the Performance of Traveling Salesman Problem Heuristics on Infinite-Size Fractal Instances in the Euclidean Plane", Technical Report CeTAD - Universidad Nacinal de La Plata, Octubre-1994.

[Michalewicz-1992] Michalewicz, Zbigniew, "Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Program", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1992.

[Reeves-1995] Reeves C., Wright C., "Epistasis in Genetig Algorithms: An Experimental Design Perspective", Proccedings of the Sixth ICGA, Morgan Kaufmann Publishers, pp. 217-224, 1995.

[Grossman-1987] Grossman I., Stanley, "Algebra Lineal", Segunda Edici6n, Grupo Editorial Iberoamericana., 1987.

[Tenenbaum-1983] Tenenbaum Aaron M., Augenstein Moshe J., "Estructura de Datos en Pascal", Prentice-Hall Hisponoamericana, México, 1983.

[Scheaffer-1987] Scheaffer Richard L., William Mendehall. "Elementos de Muestreo", Grupo Editorial Iberoamericana., 1987.