00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

LA TOPOLOGÍA DEL FENÓMENO ESPINORIAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

FERNANDO RICARDO GONZÁLEZ DÍAZ

CODIRECTOR DE TESIS: Dr. EMILIO LLUIS PUEBLA
CODIRECTOR DE TESIS: Dr. GUILLERMO MORENO RODRÍGUEZ

MÉXICO D. F. FEBRERO 2005

Índice general

Dedicatoria

Dedicada a Dios y a α.

Agradecimientos

De manera especial quiero agradecer al Dr. Guillermo Moreno y al Dr. Emilio Lluis Puebla por su confianza y sobre todo por su paciencia que han tenido para enseñarme lo hermoso que es la Matemática. A mis padres, por su incondicional ayuda de toda la vida. A mis hermanos por su consejo invaluable que siempre me han dado. A mis sobrinos que se han vuelto una razón fundamental de inspiración para seguir adelante.

Por otro lado quiero agradecerles la ayuda y sus múltiples observaciones a mis amigos de siempre, Ricardo, Hugo y Noel. Comos son muchas las personas las que me han ayudado de una u otra manera quiero darles las gracias por su apoyo incondicional.

Deseo destacar que la tesis fue elaborada cuando percivia el apoyo del Consejo Nacional Para la Ciencia y la Tecnología (CONACyT) mediante el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación, Proyecto 27552-E, bajo la dirección del Dr. Emilio Lluis Puebla de Diciembre de 1998 a Diciembre del 2000.

INTRODUCCIÓN.

En esta tesis se tratan conceptos básicos de topología algebraica y diferencial, geometría diferencial, teoría de grupos de Lie y física. El concepto central de la tesis son las álgebras de Clifford. Estas son álgebras asociadas de manera natural a un espacio vectorial junto con una forma cuadrática. Estas álgebras, junto con sus representaciones, tienen un papel importante en aspectos fundamentales de la geometría diferencial.

Esta tesis tiene dos objetivos, el primero es calcular el grupo fundamental de $SO(n)$; y el segundo es analizar aspectos algebraicos y topológicos del grupo de Lorentz vía álgebras de Clifford.

Para lograr el primer objetivo, se comienza con la definición y construcción de las álgebras de Clifford. Dado que este concepto puede ser a primera vista muy difícil de visualizar, se plantea una serie de ejemplos de manera explícita para reforzarlo. Después de introducir y analizar la estructura de las álgebras, estas se relacionan con conceptos meramente topológicos a través de los grupos clásicos; obteniendo así una serie de resultados importantes tanto topológicos como algebraicos, los cuales nos ayudan a lograr el objetivo en el capítulo cuatro.

Para lograr el segundo objetivo, se comienza con la construcción de las transformaciones y el grupo de Lorentz. Dado que en los capítulos anteriores se estudian aspectos topológicos de los grupos clásicos, estos se relacionan a través de homomorfismos con el grupo de Lorentz, obteniendo así una aplicación explícita en la física.

Esta tesis surgió como resultado de los últimos cursos de topología que recibí de la licenciatura y de los primeros de la maestría. Para su lectura, se requieren conocimientos básicos de las áreas antes mencionadas, aunque la mayoría de los resultados y definiciones que se tratan están autocontenidos para facilitar su lectura.

En cuanto al diseño, la tesis esta formada por cinco capítulos y algunos de estos por secciones, que se denotan por doble numeración (3.1,3.2,...). A su vez, las definiciones, proposiciones, teoremas, lemas, etc. se designan con triple numeración (3.1.1,3.1.2,...,). Las demostraciones y ejemplos que se hacen, se escriben de la manera mas detallada posible para su comprensión.

El capítulo uno trata sobre formas cuadráticas, álgebras de Clifford $Cl(V,q)$ y álgebras graduadas. En el capítulo dos, dado un espacio vectorial y una forma cuadrática particular, se calcula de manera explícita su álgebra de Clifford. El capítulo tres trata de aspectos algebraicos y topológicos de los grupos clásicos. En el capítulo cuatro se estudian resultados algebraicos de los grupos espinoriales y se calcula el grupo fundamental de $SO(n)$; y por último, en el capítulo cinco se estudian algunos aspectos algebraicos y topológicos del grupo de Lorentz.

1. ÁLGEBRAS DE CLIFFORD.

1.1. EL ÁLGEBRA DE CLIFFORD DE UNA FORMA CUADRÁTICA.

En este primer capítulo, el interes principal es familiarizar al lector con el concepto de álgebras de Clifford. Los conceptos que se requieren se encuentran distribuidos de la siguiente manera.

Formas bilineales, formas cuadráticas, $\mathbb{K}-$álgebras, álgebras de Clifford $Cl(V,q)$, propiedad universal de $Cl(V,q)$, automorfismo canónico de $Cl(V,q)$, álgebras graduadas, producto tensorial y antiautomorfismo transpuesto de $Cl(V,q)$.

De aquí en adelante V denotará un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ puede ser el campo de los números racionales $\mathbb{Q}$,reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$. De lo contrario se dirá de manera explícita el campo sobre el cual trabajaremos.

Definición 1 *Una función $f: V\times V\to\mathbb{K}$ es una **forma bilineal simétrica** si cumple las siguientes condiciones:*

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & f(u+v,w) & = & f(u,w)+f(v,w) \\ \text{(ii)} & f(ru,v) & = & rf(u,v)=f(u,rv) \\ \text{(iii)} & f(u,v) & = & f(v,u), \end{array}$$

para todo $u,v,w\in V$ y $r\in\mathbb{K}$.

Ejemplo 2 (1) *Consideremos a $V=\mathbb{R}^m$ (donde $\mathbb{R}^m$ es el producto carteciano de m copias de $\mathbb{R}$) y a $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Definamos*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}, \qquad \text{dada por,} \\ & f(u,v) & = & \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \end{array}$$

*donde $u=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ y $v=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$. Entonces f es bilineal simétrica. A f, así definida, se le llama **producto euclideano.***

(2) Si consideramos $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$ una matriz simétrica con coeficientes en $\mathbb{K}$ y definimos

$$h: \mathbb{K}^m\times\mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{dada por}$$

$$h(x,y) = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

donde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ y $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$. Entonces h es bilineal simétrica.

Definición 3 *Dada $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica.* ***La forma cuadrática asociada*** *a f es la función $q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $q(v) = f(v,v)$, $\forall\ v \in V$.*

Ejemplo 4 *Usando las formas bilineales simétricas anteriores tenemos:*

(1) $q : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $q(u) = f(u,u) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$.
(2) $q : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$q(u) = h(u,u) = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Definición 5 *Si en particular $\mathbb{K}$ es un anillo . Un $\mathbb{K}-$**módulo** (izquierdo) consta de un grupo abeliano A junto con una operación de multiplicación externa*

$$\begin{array}{rcll} \mu : \ \mathbb{K} \times A & \longrightarrow & \mathbb{A}, & \textit{dada por,} \\ \mu(r,u) & = & ru & \end{array}$$

tal que para todas las $u, v \in A$ y $r, s \in \mathbb{K}$ se satisfacen las condiciones siguientes

$$\begin{array}{lrcl} (i) & ru \in A & & \\ (ii) & r(u+v) & = & ru + rv \\ (iii) & (r+s)u & = & ru + su \\ (iv) & (rs)u & = & r(su) \end{array}$$

Definición 6 *Un* ***álgebra*** *sobre $\mathbb{K}$ es un conjunto A que simultáneamente es un anillo y un $\mathbb{K}-$**módulo**. Es decir, un álgebra $(A, +, \mu, \cdot)$ es un $\mathbb{K}-$**módulo** con otra operación binaria, llamada multiplicación, con una condición extra que hace compatibles las operaciones binarias y de multiplicación escalar, esta condición es la siguiente:*

$$\begin{array}{rcl} (ru + sv)w & = & r(uw) + s(vw) \\ & y & \\ u(rv + sw) & = & r(uv) + s(uw) \end{array}$$

para $r, s \in \mathbb{K}$, $u, v, w \in A$.

En particular se tiene que:

$$(\lambda u) v = \lambda (uv) = u (\lambda v)$$

y por lo tanto, λuv es un elemento bien definido de A. Si se imponen condiciones en la multiplicación del álgebra tales como asociatividad y existencia de un elemento neutro multiplicativo, se obtienen álgebras asociativas con identidad.

Ejemplo 7 (1) *El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos .*

(2) *El conjunto $\mathbb{H}$ de los números cuaternios .*

(3) *El conjunto $M_n(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas con coeficientes en $\mathbb{R}$.*

(4) *El conjunto de los polinomios $\mathbb{R}[x]$ con indeterminada x y coeficientes en $\mathbb{R}$.*

(5) *Definamos*

$$T^n(V) = V \underset{\mathbb{K}}{\otimes} V \underset{\mathbb{K}}{\otimes} \ldots \underset{\mathbb{K}}{\otimes} V$$

como el producto tensorial de V, n veces. A $T^n(V)$ se le llama el ***espacio tensorial de grado*** *n de V. Sea*

$$T(V) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} T^i(V) = \left(\mathbb{K}, V, T^2(V), T^3(V), \ldots\right).$$

Un elemento $\varphi \in T(V)$ es de la forma $\varphi = (u_0, u_1, u_2, \cdots)$ donde $u_n \in T^n(V)$ y $u_i = 0$ para casi todo i. Decimos que un elemento $\varphi \in T(V)$ es de ***grado puro*** *si, y sólo si, $\varphi \in T^n(V)$. Observemos que cada elemento de $T(V)$ es una suma finita de elementos de grado puro.*

Definamos en $T(V)$ las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{rrcl} + : & T(V) \times T(V) & \longrightarrow & T(V) \\ & +(\varphi, \psi) & = & \varphi + \psi = (u_0, u_1, \cdots) + (v_0, v_1, \cdots) \\ & & = & (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \cdots) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \mu : & \mathbb{K} \times T^n(V) & \longrightarrow & T^n(V) \\ & \mu(r, u_n) & = & r(w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n) \\ & & = & rw_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_n \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \otimes : & T^n(V) \times T^m(V) & \longrightarrow & T^{n+m}(V) \\ & \otimes(u_n, v_m) & = & (x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_m) \\ & & = & x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_m. \end{array}$$

Así, $(T(V), +, \mu, \otimes)$ es un álgebra. Observemos que los primeros cuatro ejemplos son $\mathbb{R}-$ álgebras y el quinto es una $\mathbb{K}-$ álgebra.

Definición 8 ***El centro o kernel*** *de una* $\mathbb{K}-$*álgebra asociativa* A *con identidad, lo definimos como*

$$Z(A) = \{a \in A \mid ak = ka, \forall\ k \in A\}$$

Proposición 9 *El centro* $Z(A)$ *de una* $\mathbb{K}-$*álgebra* A*, es subálgebra de* A*.*

Proof. Basta probar que es cerrada en las operaciones. Sean $x,\ y \in Z(A)$ y $r \in \mathbb{K}$.

$$\begin{array}{rcl}
(1)\ xk & = & kx\ ,\forall\ k \in A. \\
& \Longrightarrow & r\,(xk) = r\,(kx) \\
& \Longleftrightarrow & (rx)k = (rk)x \\
& \Longleftrightarrow & (rx)k = k(rx) \\
& \Longleftrightarrow & rx \in Z\,(A) \\
(2)\ xk & = & kx \quad \text{y} \quad yk = ky\ ,\forall\ k \in A. \\
& \Longrightarrow & xk + yk = kx + ky \\
& \Longleftrightarrow & (x+y)k = k(x+y) \\
& \Longleftrightarrow & x + y \in Z(A) \\
(3)\ xk & = & kx \ \text{ y } yk = ky, \forall\ k \in A. \\
& \Longrightarrow & (xy)k = x(yk) = x(ky) = k(xy) \\
& \Longleftrightarrow & xy \in Z(A).
\end{array}$$

por lo tanto, $Z(A)$ es una $\mathbb{K}-$álgebra. ■

Definición 10 *Sean* A *y* B $\mathbb{K}-$*álgebras asociativas con identidad. La función* $f : A \longrightarrow B$ *se dice que es* ***homomorfismo de*** $\mathbb{K}-$ ***álgebras,*** *si es homomorfismo de* $\mathbb{K}-$*módulos y de anillos.*

Consideremos $T\,(V)$ el álgebra tensorial de V y supongamos que $q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ es una forma cuadrática sobre V. Definamos $I_q\,(V)$, el ideal de $T\,(V)$ generado por los elementos de la forma $v \otimes v - q\,(v) \cdot 1$, con $v \in V$.

Definición 11 *El* ***álgebra de Clifford*** *asociada a* V *y a la forma cuadrática* $q : V \longrightarrow \mathbb{K}$*, es una* $\mathbb{K}-$ *álgebra asociativa con identidad, definida como el cociente*

$$Cl\,(V,q) = T\,(V)\ /\ I_q\,(V),$$

junto con una ***función lineal***

$$\begin{array}{rcll}
\iota : \quad V & \longrightarrow & Cl\,(V,q) & \textit{tal que} \\
(\iota\,(v))^2 & = & q\,(v) \cdot 1. &
\end{array}$$

Observemos que la función lineal $\iota : V \longrightarrow Cl(V,q)$ es una composición dada de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc} \iota : & V & \overset{\subset}{\longrightarrow} & T(V) & \longrightarrow & T(V) \diagup I_q(V) & \text{tal que} \\ & u & \longmapsto & (0,u,0,0,\cdots) & \longmapsto & (0,u,0.\cdots) + I_q(V). & \end{array}$$

Proposición 12 *Consideremos la* ***función proyección***

$$\begin{array}{cccc} \pi_q : & T(V) & \longrightarrow & Cl(V,q) \quad \text{tal que} \\ \pi_q(u_0,u_1,\cdots) & & = & (u_0,u_1,\cdots) + I_q(V). \end{array}$$

Si restringimos $\pi_q|_V : V \longrightarrow Cl(V,q)$ entonces $\pi_q|_V$ es inyectiva y coincide con la imagen de ι.

Proof. Basta demostrar que cualquier elemento $\varphi \in I_q(V) \cap V$ es cero. Así cualquier elemento $\varphi \in I_q(V) \cap V$ puede ser escrito como:

$$\varphi = \sum a_i \otimes (v_i \otimes v_i - q(v_i) - 1) \otimes b_i$$

donde podemos asumir que las a_i y las b_i son de grado puro. Como $\varphi \in I_q(V) \cap V$ en particular $\varphi \in V$ lo cual implica que $\sum a_i' \otimes (v_i' \otimes v_i') \otimes b_i = 0$ donde esta suma es considerada sobre los índices tomados como el *grad* a_i + *grad* b_i maximal. Esta ecuación implica que $\sum a_i' \, q(v_i') \, b_i = 0$. Procediendo de manera inductiva se tiene que $\varphi = 0$. ■

El álgebra de Clifford $Cl(V,q)$ es generada por el espacio vectorial $V \subset Cl(V,q)$ y el 1 sujeto a la relación

$$v^2 = -\, q(v) \cdot 1, \text{ para } v \in V.$$

Si la caracteristica del campo $\mathbb{K}$ no es 2, entonces para todos $v, w \in V$,

$$v \cdot w + w \cdot v = -2q(v,w),$$

donde $2q(v,w) = q(u+w) - q(u) - q(w)$ es la polarización de q. La relación $v^2 = -\, q(v) \cdot 1$ puede ser usada para dar la siguiente caracterización universal del álgebra de Clifford.

Sea $f : V \longrightarrow A$ una función lineal del espacio vectorial V en una $\mathbb{K}$ − álgebra asociativa A con 1, tal que para todo $v \in V$, la igualdad $(f(v))^2 = -\, q(v) \cdot 1$ se cumple. Entonces existe un único homomorfismo

$$\tilde{f} : Cl(V,q) \longrightarrow A,$$

que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Cl(V,q) \arrow[rr, "\tilde{f}"] & & A \end{tikzcd}$$

es decir $\widetilde{f}\,\iota = f$.

Mas aún $Cl\,(V,q)$ es la única $\mathbb{K}-$ álgebra con esta propiedad. En este caso decimos que $\widetilde{f}$ es la extención de f. Al homomorfismo $\widetilde{f}$ se le llama **homomorfismo de Clifford.**

Proof. Para la primer parte, consideremos a $Cl\,(V,q)$como el algebra tensorial módulo el ideal $T\,(V)\ /\ I_q\,(V)$. Sea ι la composicion de la funcion inyectiva $j\,:\,V\longrightarrow T^1\,(V)$, donde $T^1\,(V)\subset T\,(V)$, con la funcion proyeccion $\pi\,:\,T\,(V)\longrightarrow Cl\,(V,q)$. Es decir, $i=\pi\circ j:V\longrightarrow Cl\,(V,q)$.Si $f:V\longrightarrow A$ es lineal con$(f\,(x))^2=\iota\,(x,x)\,,1$, entonces $\widetilde{f}$ se factoriza como $V\longrightarrow T\,(V)\longrightarrow A$ y como $V\xrightarrow{\iota}Cl\,(V,q)\xrightarrow{\widetilde{f}}A$. Mas aun, $\widetilde{f}$ es unica pues $im\,(\iota)$ genera $Cl\,(V,q)$.

Finalmente la unicidad de $Cl\,(V,q)$ se sigue de la existencia de los dos morfismos de algebras $f:Cl\,(V,q)\longrightarrow Cl\,(V,q_1)$ y $g:Cl\,(V,q_1)\longrightarrow Cl\,(V,q)$ con $\iota_1=f\iota$ y $\iota=g\iota_1$ lo cual implica que $\iota=gf\iota$ y $\iota_1=fg\iota_1$ por unicidad se tiene que $fg=gf=I$. ■

Consideremos parejas de la forma (V,q) donde V es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ y q una forma cuadrática sobre V. Definamos un homomorfismo $f:(V,q)\longrightarrow(V_1,q_1)$ de la pareja (V,q) en (V_1,q_1), donde

$$f:V\longrightarrow V_1$$

es una función entre los espacios vectoriales V y V_1 tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V_1 \\ & {\scriptstyle q}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q_1} & \\ & \mathbb{K} & \end{array}$$

es decir, $q_1f=q$.

Dados $f:(V,q)\longrightarrow(V_1,q_1)$ y $g:(V_1,q_1)\longrightarrow(V_2,q_2)$ definimos la composición entre estas como $gf:(V,q)\longrightarrow(V_2,q_2)$. Así, con las parejas (V,q), los homomorfismos entre éstas y la regla de composición, obtenemos una categoria que denotaremos como **Q**.[1]

La caracterización que se hizo del álgebra de Clifford en la proposición anterior es muy útil. Esto muestra, por ejemplo, que son funtoriales en el siguiente sentido.

Dados los homomorfismos $f:(V,q)\longrightarrow(V_1,q_1)$ y $g:(V_1,q_1)\longrightarrow(V_2,q_2)$ de **Q**, existen homomorfismos

$$\widetilde{f}:Cl\,(V,q)\longrightarrow Cl(V_1,q_1)\text{ y }\widetilde{g}:Cl(V_1,q_1)\longrightarrow(V_2,q_2).$$

tales que se cumple la composición $\widetilde{gf}=\widetilde{g}\,\widetilde{f}$ por la unicidad de la proposición anterior.

Consideremos el álgebra de Clifford $Cl(V,q)$ junto con su función $\iota:V\longrightarrow Cl(V,q)$. Si definimos la función

$$\begin{array}{rccl} h: & V & \longrightarrow & Cl(V,q)\quad\text{dada por} \\ & h(v) & = & -(\iota(v)), \end{array}$$

[1]Para ver las definiciones y conceptos básicos de teoria de categorias consultar [Mn].

entonces h cumple la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned}
(h(x))^2 &= (h(x))(h(x)) \\
&= [-(\iota(x))]\,[-(\iota(x))] \\
&= (\iota(x))\,(\iota(x)) \\
&= (\iota(x))^2 \\
&= q(x)\cdot 1.
\end{aligned}$$

Usando la propiedad universal de $Cl(V,q)$ existe un único homomorfismo

$$\widetilde{h} = \alpha : Cl(V,q) \longrightarrow Cl(V,q)$$

que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[dr, "h"] & \\
Cl\,(V,q) \arrow[rr, "\alpha"] & & Cl\,(V,q)
\end{tikzcd}$$

es decir, $h = \alpha\iota$.

Así, se tiene que si $v \in \iota(V)$ entonces $\alpha(v) = -v$ y $\alpha\,(\alpha(v)) = \alpha(-v) = v$. Es decir, $\alpha^2 = I$ y decimos que α **es involutivo**. Al homomorfismo α se le llama **automorfismo canónico** de $Cl(V,q)$.

Para investigar el automorfismo canónico $\alpha : Cl(V,q) \longrightarrow Cl(V,q)$ usaremos el siguiente lema del álgebra lineal.

Lema 13 *Si un operador lineal $f : W \longrightarrow W$ que actúa sobre un espacio vectorial real o complejo W es involutivo ($f^2 = I$) entoces sus eigenvalores son ± 1 y es diagonalizable, es decir, $W = W_+ \oplus W_-$, con W_+ y W_- espacios invariantes correspondientes a los eigenvalores $+1$ y -1 respectivamente.* [2]

Usando el lema anterior para $\alpha : Cl(V,q) \to Cl(V,q)$, se cumple que el álgebra de Clifford se puede ver como:

$$Cl(V,q) = Cl^0(V,q) \oplus Cl^1(V,q),$$

donde

$$Cl^i(V,q) = \left\{ u \in Cl(V,q), \text{ tales que, } \alpha(u) = (-1)^i\, u \right\}$$

para i cero o uno, los valores $(-1)^i$ son los eigenvalores de α.

Proposición 14 *Se cumplen las siguientes condiciones:*

[2] Ver la demostración en [MP] M.Postnikov, página 250.

(i) Si $u, v \in Cl^0(V,q) \Rightarrow uv \in Cl^0(V,q)$.
(ii) Si $u, v \in Cl^1(V,q) \Rightarrow uv \in Cl^0(V,q)$.
(iii) Si $u \in Cl^0(V,q)$ y $v \in Cl^1(V,q) \Rightarrow uv$ y $vu \in Cl^1(V,q)$.

Proof. (i) $\alpha(uv) = \alpha(u)\alpha(v) = uv$.
(ii) $\alpha(uv) = \alpha(u)\alpha(v) = (-u)(-v) = uv$.
(iii) $\alpha(uv) = \alpha(u)\alpha(v) = u(-v) = -uv$. Analogo para $\alpha(vu)$. ∎

Con la proposición anterior podemos concluir que

$$Cl^i(Q) \cdot Cl^j(Q) \subset Cl^{(i+j) mod 2}(V,q)$$

para cualesquier i, j iguales a 0 ó 1. Este resultado recibe un nombre especial.

Un álgebra A se dice que es álgebra Z_2-**Graduada** si $A = A^0 \oplus A^1$ con

$$A^i A^j \subset A^{(i+j) \ mod \ 2}$$

para cualesquier i, j iguales a 0 ó 1.

Un morfismo de álgebras Z_2-**Graduadas** es un homomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ tal que $\varphi(A^i) \subset B^i$ para cualquier i igual a 0 ó 1.

Observemos que $Cl^0(V,q)$ es una subálgebra de $Cl(V,q)$ pues el producto es cerrado. A $Cl^0(V,q)$ y $Cl^1(V,q)$ se les llaman **parte par e impar** del álgebra de Clifford $Cl(V,q)$ respectivamente. Esta es una observación de Atiyah, Bott y Shapiro. [3]

.Existe una filtración natural $\widetilde{f}^{\,0}(T(V)) \subset \widetilde{f}^{\,1}(T(V)) \subset \cdots \subset T(V)$ del álgebra tensorial $T(V)$ donde

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}^0(T(V)) &= \mathbb{K}. \\
\widetilde{f}^1(T(V)) &= \mathbb{K} \oplus V. \\
\widetilde{f}^2(T(V)) &= \mathbb{K} \oplus V \oplus T^2(V). \\
&\vdots \\
\widetilde{f}^r(T(V)) &= \mathbb{K} \oplus V \cdots \oplus T^r(V) = \bigoplus_{i \leq r} T^i(V).
\end{aligned}$$

Esta filtración tiene la propiedad que

$$\widetilde{f}^r(T(V)) \otimes \widetilde{f}^q(T(V)) \subseteq \widetilde{f}^{r+q}(T(V)),$$

pues cada $T^i(V) \otimes T^j(V) = T^{i+j}(V)$ con $i \leq r$ y $j \leq q$.

Definamos

$$f^r(T(V)) = \pi_q\left(\widetilde{f}^r T(V)\right)$$

donde $\pi_q : T(V) \longrightarrow Cl(V,q)$ es la proyección natural; y un elemento $\varphi \in \pi_q\left(\widetilde{f}^r T(V)\right)$ es de la forma

$$\varphi = (u_0, u_1 \cdots u_r) + I_q(V)$$

[3] M.F. Atiyah, R.Bott and A.Shapiro, Clifford modules,topology,vol.3,suppl,1,pp.3-38. Pergamon press,1964.

con $u_i \in T^i(V)$.

La filtración anterior induce una filtración $f^0(T(V)) \subset f^1(T(V)) \subset \cdots \subset Cl(V,q)$ en el álgebra de Clifford $Cl(V,q)$, la cual también tiene la propiedad de que $f^r(T(V)) \cdot f^q(T(V)) \subseteq f^{r+q}(T(V))\ \forall\ r$ y q. Este hecho hace a $Cl(V,q)$ dentro de un **álgebra filtrada.**

La función multiplicación en $f^r(T(V)) \cdot f^q(T(V))$ induce la multiplicación siguiente

$$\cdot : \Re^r \times \Re^q \longrightarrow \Re^{r+q} \quad \forall\ r \text{ y } q.$$

donde $\Re^r = f^r(T(V)) \diagup f^{r-1}(T(V))$.

Definición 15 *El álgebra graduada asociada a $Cl(V,q)$ se define como*

$$\Re^* = \bigoplus_{r \geq 0} \Re^r .$$

Una relación importante entre el álgebra graduada $\Re^*$ y el álgebra exterior $\Lambda^* V$ de V se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 16 *Para cualquier forma cuadrática $q : V \longrightarrow \mathbb{K}$, el álgebra graduada asociada $\Re^*$ a $Cl(V,q)$ es isomorfa al álgebra exterior $\Lambda^* V$ de V.*

Proof. La composición de funciones

$$T^r(V) \xrightarrow{\pi_r} f^r(T(V)) \longrightarrow f^r(T(V)) \diagup f^{r-1}(T(V)) \text{ dada por}$$

$$a_{i1} \otimes a_{i2} \otimes \cdots \otimes a_{ir} \longmapsto [a_{i1} \cdots a_{ir}]$$

induce una función

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^* V & \longrightarrow & \Re^r \quad \text{tal que} \\ (u_1 \Lambda u_2 \Lambda \cdots \Lambda u_r) & \longmapsto & [u_1 \cdots u_r] \end{array}$$

que claramente es sobreyectiva, así obtenemos un homomorfismo $\Lambda^* V \longrightarrow \Re^*$ de álgebras graduadas. Para ver que esta función es inyectiva, procedemos como sigue. El kernel de

$$T^r(V) \longrightarrow f^r(T(V)) \diagup f^{r-1}(T(V))$$

consiste de arreglos $r-$ homogeneos de elementos $\varphi \in I_q(V)$ de grado $\leq r$. Cualquier φ del kernel puede ser escrito como

$$\varphi = \sum a_i \otimes (v_i \otimes v_i + q(v_i)) \otimes b_i$$

donde $v_i \in V$, y podemos asumir que a_i y b_i son de grado puro con

$$\text{grad } a_i + \text{grad } b_i \leq r - 2.$$

La parte $r-$ homogenea de φ es entonces de la forma

$$\varphi_r = \sum a_i \otimes v_i \otimes v_i \otimes b_i$$

donde grad a_i + grad $b_i = r - 2$, para cada i. Como $u_i \Lambda u_i = 0$ para todo i, vemos que la imagen de φ en el álgebra exterior es 0. Por lo anterior la función $\Lambda^* V \longrightarrow \Re^*$ es inyectiva. ■

La proposición anterior dice que la multiplicación en el álgebra de Clifford es una extención de la multiplicación en el álgebra exterior determinada por la forma cuadrática q.

Proposición 17 *Existe un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$\beta : \Lambda^* V \longrightarrow Cl\,(V, q)$$

compatible con las filtraciones.

Proof. Definamos la función de r – *copias* del producto directo de V

$$\begin{array}{llll} f: & V \times V \times \cdots \times V & \longrightarrow & Cl\,(V,q) \qquad \text{tal que} \\ & (v_1, \cdots v_r) & \longmapsto & \frac{1}{r!} \sum \operatorname{sign}(\sigma)\, v_{\sigma(1)}, \cdots v_{\sigma(r)} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} f: & V \times V \times \cdots \times V & \longrightarrow & Cl\,(V,q) \qquad \text{dada por} \\ & (v_1, \cdots v_r) & \longmapsto & \frac{1}{r!} \sum sign\,(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(r)} \end{array}$$

donde la suma es tomada sobre el grupo simétrico de $r-$elementos. (Si la característica de $\mathbb{K}$ no es cero, uno debe quitar el el factor $\frac{1}{r!}$). Esta función f determina una función lineal $\widetilde{f} : \Lambda^r V \longrightarrow Cl\,(V,q)$ cuya imagen esta en $f^r\,(T\,(V))$. La composición de $\widetilde{f}$ con la proyección

$$f^r\,(T\,(V)) \longrightarrow f^r\,(T\,(V)) \diagup f^{r-1}\,(T\,(V))$$

es la función

$$\pi_q : T\,(V) \longrightarrow Cl\,(V,q)\,.$$

y como $\pi_q \mid_V : V \longrightarrow Cl\,(V,q)$es inyectiva, tenemos que $\widetilde{f}$ es inyectiva, y la suma directa de las funciones $\beta : \Lambda^* V \longrightarrow Cl\,(V,q)$ es un isomorfismo. ■

Recordemos algunos resultados importantes del producto tensorial entre espacios vectoriales y álgebras:

(i) Sean U y V espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$, entonces el producto tensorial $U \underset{\mathbb{K}}{\otimes} V$ es un espacio vectorial.

(ii) Para la aplicación canónica del producto tensorial $f : U \times V \longrightarrow U \underset{\mathbb{K}}{\otimes} V$, con $(u,v) \in U \times V$, escribimos

$$f(u,v) = u \otimes v.$$

(iii) La bilinealidad de $f : U \times V \longrightarrow U \underset{\mathbb{K}}{\otimes} V$ se comporta de la manera siguiente.

Sean $u, u_1 \in U$; $v, v_1, v_2 \in V$ y $r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} (u + u_1) \otimes v & = & u \otimes v + u_1 \otimes v \\ u \otimes (v_1 + v_2) & = & u \otimes v_1 + u \otimes v_2 \\ ru \otimes v & = & r(u \otimes v) \\ u \otimes rv & = & r(u \otimes v) \end{array}$$

(iv) Si $\{u_i\}_{i \in I}$ y $\{v_j\}_{j \in I}$ son bases para U y V respectivamente, entonces $u_i \otimes v_j$ forman una base para $U \underset{\mathbb{K}}{\otimes} V$.

Si $x \in U \underset{\mathbb{K}}{\otimes} V$ entonces

$$x = \sum r_{ij}(u_i \otimes v_j)$$

que denotaremos por $x = u \otimes v$, con $u \in U$ y $v \in V$.

Si consideramos A, B álgebras asociativas con 1 sobre $\mathbb{K}$, podemos definir una multiplicación en su producto tensorial $A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} B$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rrcll} \cdot : & A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} B \times A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} B & \longrightarrow & A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} B & \text{dada por} \\ & [(a \otimes b), (a_1 \otimes b_1)] & \longmapsto & aa_1 \otimes bb_1 & \end{array}$$

para cualesquiera $a, a_1 \in A$ y $b, b_1 \in B$.

Proposición 18 *Si A y B son álgebras asociativas con 1 sobre $\mathbb{K}$ entonces $A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} B$ es un álgebra con la multiplicación definida anteriormente.*

Proof. (1) $A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} B$ es un espacio vectorial pues A y B así lo son.

(2) $A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} B$ es un anillo pues:

(i) $A \underset{\mathbb{K}}{\otimes} B$ es grupo abeliano.

(ii) El producto $\cdot$ es asociativo ya que

$$\begin{array}{rcl} (a \otimes b)\left[(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2)\right] & = & (a \otimes b)\left[a_1 a_2 \otimes b_1 b_2\right] \\ & = & aa_1 a_2 \otimes bb_1 b_2 \\ & = & (aa_1)a_2 \otimes (bb_1)b_2 \\ & = & (aa_1) \otimes (bb_1)(a_2 \otimes b_2) \\ & = & \left[(a \otimes b)(a_1 \otimes b_1)\right](a_2 \otimes b_2). \end{array}$$

(iii) El producto $\cdot$ es distributivo

$$\begin{aligned}
(a\otimes b)[(a_1\otimes b_1)+(a_2\otimes b_2)] &= (aa_1\otimes bb_1)+(aa_2\otimes bb_2)\\
&= (a\otimes b)\,(a_1\otimes b_1)+(a\otimes b)\,(a_2\otimes b_2)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(a\otimes b)+(a_1\otimes b_1)]\,(a_2\otimes b_2) &= (aa_2\otimes bb_2)+(a_1a_2\otimes b_1b_2)\\
&= (a\otimes b)\,(a_2\otimes b_2)+(a_1\otimes b_1)\,(a_2\otimes b_2)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r\,[(a\otimes b)\,(a_1\otimes b_1)] &= [r\,(a\otimes b)]\,(a_1\otimes b_1)\\
&= (a\otimes b)\,[r\,(a_1\otimes b_1)]\,.
\end{aligned}$$

(3) Multiplicando por el $(1\otimes 1)$

$$(1\otimes 1)\,(a\otimes b)=1a\otimes 1b=a\otimes b.$$

Por lo tanto $A\underset{\mathbb{K}}{\otimes}B$ es un álgebra asociativa con 1. ■

Ahora, si consideramos $A=A^0\oplus A^1$ y $B=B^0\oplus B^1$ dos algebras Z_2-Graduadas sobre el campo $\mathbb{K}$, entonces existe el producto tensorial graduado definido por

$$\begin{aligned}
A\widehat{\otimes}B &= (A\widehat{\otimes}B)^0\oplus(A\widehat{\otimes}B)^1 \qquad \text{donde}\\
(A\widehat{\otimes}B)^0 &= (A^0\otimes B^0)\oplus(A^1\otimes B^1) \qquad \text{y}\\
(A\widehat{\otimes}B)^1 &= (A^0\otimes B^1)\oplus(A^1\otimes B^0).
\end{aligned}$$

Así, $A\widehat{\otimes}B$ es una álgebra Z_2-Graduada sobre el campo $\mathbb{K}$ con la siguiente multiplicación

$$\begin{array}{rccc}
\cdot: & (A\widehat{\otimes}B)\times(A\widehat{\otimes}B) & \longrightarrow & A\widehat{\otimes}B \qquad \text{tal que}\\
 & ((a\otimes b),(a_1\otimes b_1)) & \longmapsto & (-1)^{ij}(aa_1\otimes bb_1)
\end{array}$$

si $a_1\in A^j$ y $b\in B^i$ con $i,\ j=0,1$. La demostración es análoga a la anterior.

Este resultado nos lleva a una filtración $f^0\subset f^1\subset\cdots\subset A\widehat{\otimes}B$ del álgebra $A\widehat{\otimes}B$ Z_2-Graduada, donde

$$f^r=\sum_{i+j=r} f^i\,(A)\,\widehat{\otimes}f^j\,(A)\,.$$

La inportancia del producto tensorial Z_2-Graduado para las álgebras de Clifford es evidente en la siguiente proposición. Para esto, observemos lo siguiente.

Para cualesquiera dos formas cuadráticas $q_1:U\longrightarrow\mathbb{K}$ y $q_2:W\longrightarrow\mathbb{K}$, podemos definir una forma cuadrática q sobre la suma directa de $U\oplus W$ dada por

$$\begin{array}{rccc}
q: & U\oplus W & \longrightarrow & \mathbb{K}\\
 & q(v,w) & = & q_1(v)+q_2(w).
\end{array}$$

A q se le llama suma directa de formas cuadráticas q_1y q_2 (usualmente se denota por $q=q_1\oplus q_2$).

Proposición 19 *Para cualesquiera dos formas cuadráticas* $q_1 : U \longrightarrow \mathbb{K}$ *y* $q_2 : W \longrightarrow \mathbb{K}$*. Existe un isomorfismo natural*

$$\psi : Cl(V,q) \longrightarrow Cl(U,q_1)\ \widehat{\otimes}\ Cl(W,q_2)$$

del álgebra de clifford $Cl(V,q)$ *en el producto tensorial graduado* $Cl(U,q_1)\ \widehat{\otimes}\ Cl(W,q_2)$.

Sean $\iota : U \to Cl(U,q_1)$ y $J : W \to Cl(V,q_2)$ las funciones lineales correspondientes a las álgebras de Clifford $Cl(U,q_1)$ y $Cl(W,q_2)$ respectivamente.

Consideremos la función

$$\begin{array}{rcll} \alpha : \ V = U \oplus W & \longrightarrow & Cl(U,q_1)\widehat{\otimes}Cl(W,q_2) & \text{definida por} \\ \alpha(v,w) & = & (\iota(v)\otimes 1) + (1 \otimes J(w)). & \end{array}$$

Proposición 20 *Observemos que* α *cumple la siguiente propiedad, para todo* $(v,w) \in U \oplus W$.

$$\begin{aligned} [\alpha(v,w)]^2 &= [(\iota(v)\otimes 1 + 1\otimes J(w)]^2 \\ &= (\iota(v)\otimes 1)^2 + (-1)^0[\iota(v)\otimes J(w)] \\ &\quad +(-1)^1[\iota(v)\otimes J(w)] + (1\otimes J(w))^2 \\ &= (\iota(v)\otimes 1)^2 + (1\otimes J(w))^2 \\ &= [\iota(v)\otimes 1][\iota(v)\otimes 1] + [1\otimes J(w)][1\otimes J(w)] \\ &= (\iota(v))^2\otimes 1 + 1\otimes (J(w))^2 \\ &= q_1(v)\otimes 1 + 1\otimes q_2(w) \\ &= q_1(v)(1\otimes 1) + (1\otimes 1)(q_2(w)) \\ &= (q_1\oplus q_2)(v,w)\cdot 1\otimes 1 = q(v,w)\cdot 1\otimes 1. \end{aligned}$$

Proof. De la propiedad universal del álgebra de Clifford $Cl(V,q)$ existe

$$\psi : Cl(V,q) \longrightarrow Cl(U,q_1)\widehat{\otimes}Cl(W,q_2)$$

tal que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & U\oplus W & \\ {}^{T}\swarrow & & \searrow{}^{\alpha} \\ Cl(V,q) & \xrightarrow{\psi} & Cl(U,q_1)\widehat{\otimes}CL(W,q_2) \end{array}$$

es decir, $\alpha = \psi T$, donde $T = (\iota \oplus J)$ y es tal que $T(v,w) = (\iota\oplus J)(v,w) = \iota(v) + J(w)$.

Por otro lado, considerando la inclución natural $\sigma_1 : U \to U \oplus W$, tal que $\sigma_1(v) = v+0$, y el álgebra de Clifford $Cl(U,q_1)$ junto con su función ι, podemos construir la siguiente composición

$$T\sigma_1 : \quad U \xrightarrow{\sigma_1} U\oplus W \xrightarrow{T} Cl(V,q) \quad \text{dada por}$$

$$T\sigma_1(u) = T(\sigma_1(u)) = T(u+0)$$

con la siguiente propiedad

$$\begin{aligned}(T\sigma_1(v))^2 &= T\sigma_1(v)\cdot T\sigma_1(v)\\ &= T(v+0)\cdot T(v+0)\\ &= (\iota(v)+J(0))\cdot(\iota(v)+J(0))\\ &= (\iota(v)+0)\cdot(\iota(v)+0)=\iota(v)^2=q_1(v)\cdot 1.\end{aligned}$$

Así, usando la propiedad universal de $Cl(U,q_1)$, existe un único morfismo $\varphi: Cl(U,q_1)\longrightarrow Cl\,(V,q)$. De manera análoga, usando la inclución $\sigma_2: W\to U\oplus W$, tal que $\sigma_2(w)=0+w$, y el álgebra de Clifford $Cl(W,q_2)$ junto con su función J. Obtenemos un único morfismo $\eta: Cl(W,q_2)\longrightarrow Cl\,(V,q)$. De donde definimos el inverso de ψ como

$$\begin{array}{rccl}\psi^{-1}=\varphi\otimes\eta: & Cl(U,q_1)\widehat{\otimes}CL(W,q_2) & \longrightarrow & Cl\,(V,q) \quad \text{tal que}\\ & (a\otimes b) & \longmapsto & \varphi(a)\ \eta(b).\end{array}$$

Demostremos que ψ y ψ^{-1} son inversos reciprocamente. Sea $z=x+y\in Cl\,(V,q)$, donde $x\in Cl(U,q_1)$ y $y\in Cl(W,q_2)$entonces

$$\begin{aligned}(\psi^{-1}\psi)(z) &= \psi^{-1}(\psi(z))=\psi^{-1}(\psi(x+y))\\ &= \psi^{-1}\left[\iota(x)\otimes 1+1\otimes J(y)\right]\\ &= \psi^{-1}(\iota(x)\otimes 1)+\psi^{-1}(1\otimes J(y))\\ &= \varphi(\iota(x))\ \eta(1)+\varphi(1)\ \eta(J(y))\\ &= (\varphi(\iota(x))\ \cdot 1)+(1\cdot\ \eta(J(y)))\\ &= \varphi\iota(x)\cdot 1+1\cdot\eta J(y)\\ &= T\sigma_1(x)+T\sigma_2(y)\\ &= T(x+0)+T(0+y)\\ &= \iota(x)+J(0)+i(0)+J(y)\\ &= x+0+0+y\\ &= x+y=z\\ \text{por lo tanto } \psi^{-1}\psi &= I_{CL(V,q)}\end{aligned}$$

de manera análoga $\psi\psi^{-1}=I_{Cl(V,q_1)\hat{\otimes}Cl(V,q_2)}$. Por lo tanto ψ es isomorfismo de álgebras. ■

Definición 21 *Sea A un álgebra asociativa con 1 sobre el campo $\mathbb{K}$. Un homomorfismo $f: A\longrightarrow A$ se dice que es* ***anti-automorfismo*** *de A si $f(ab)=f(b)$ $f(a)$.*

Proposición 22 *El álgebra $Cl(V,q)$ tiene un anti-automorfismo.*

Proof. Supongamos que $x=x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_k\in T^k(V)$, entonces la función

$$\begin{array}{rccll}\varphi: & T^k(V) & \longrightarrow & T^k(V) & \text{dada por}\\ & \varphi(x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_k) & = & x_k\otimes x_{k-1}\otimes x_{k-2}\otimes\cdots\otimes x_1 & =x^T\end{array}$$

es un anti-automorfismo en $T^k(V)$. Sean

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_k \\ & & \text{y} \\ y & = & y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_k \end{array}$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x \otimes y) & = & \varphi(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_k \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_k,) \\ & = & y_k \otimes y_{k-1} \otimes \cdots \otimes y_1 \otimes x_k \otimes x_{k-1} \otimes \cdots \otimes x_1 \\ & = & y^T x^T. \end{array}$$

Por lo tanto φ induce un anti-automorfismo en $T(V)$ el cual deja invariante al ideal $I_q(V)$, pues $(x \otimes x - q(x) \cdot 1)^T = x \otimes x - q(x) \cdot 1$. Por lo tanto esta operación induce un anti-automorfismo

$$\begin{array}{rcll} T: \; Cl(V,q) & \longrightarrow & Cl(V,q) & \text{dada por} \\ T(x) & = & x^T \end{array}$$

lo cual era lo que queriamos demostrar. ■

Definición 23 *A la función $T : Cl(V,q) \longrightarrow Cl(V,q)$ lo llamaremos el **anti-automorfismo transpuesto** del álgebra de Clifford $Cl(V,q)$.*

Nota 1 RESULTADOS IMPORTANTES.

(1) El anti-automorfismo transpuesto $T|_{I_q(V)}: I_q(V) \longrightarrow I_q(V)$ restringido a $I_q(V)$ es la función identidad. Pues, si $v \in V$ entonces $T(\iota(v)) = T(v)$ $= v^T = v$.

(2) El automorfismo canónico α y el anti-automorfismo transpuesto T inducen otro anti-automorfismo, en $Cl(V,q)$. A saber. Definamos la función

$$\begin{array}{rclll} \varsigma: \; Cl(V,q) & \longrightarrow & Cl(V,q) & \text{dada por} \\ \varsigma(x) & = & (\alpha \circ T)(x). & = \overline{x}. \end{array}$$

Ademas se cumple que

$$\begin{array}{rcl} \varsigma(xy) & = & \alpha T(xy) \\ & = & \alpha(xy)^T \\ & = & \alpha\left(y^T x^T\right) \\ & = & \alpha\left(y^T\right)\alpha\left(x^T\right) \\ & = & \varsigma(y)\varsigma(x). \end{array}$$

Por lo que ς es un anti-automorfismo.

Definición 24 *A la función ς la llamamos **anti-automorfismo conjugación.***

(3) Sea $Cl(V,q) = Cl^0(V,q) \oplus Cl^1(V,q)$ el álgebra de Clifford. La graduación de $Cl(V,q)$ puede estar definida en términos del automorfismo canónico α de la siguiente manera

$$Cl^i(V,q) = \left\{x \in Cl(V,q) \mid \alpha(x) = (-1)^i x\right\}, i = 0, 1.$$

2. LAS ÁLGEBRAS C_N Y $C_{(N,M)}$.

Tal vez los conceptos y resultados anteriores parecieron demasiado abstractos para el lector y quizá fue difícil visualizar el concepto de álgebras de Clifford. No obstante, en este segundo capítulo retomamos los resultados anteriores y los aplicamos a un espacio vectorial, y a una forma cuadrática particular para calcular de manera específica algunas álgebras de Clifford.

En este capítulo estudiaremos las álgebras $Cl\left(V, q_{(n,m)}\right)$, donde $V = \mathbb{R}^{n+m}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y la forma cuadrática $q_{(n,m)}$ esta definida por:

$$\begin{array}{lccc} q_{(n,m)}: & \mathbb{R}^{n+m} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & q_{(n,m)}\left(x_1, x_2, \cdots x_n, x_{n+1}, \cdots x_{n+m}\right) & = & -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i^2 \end{array}$$

Nos enfocaremos a estudiar los casos particulares

$$Cl\left(\mathbb{R}^{n+0}, q_{(n,0)}\right) \text{ y } Cl\left(\mathbb{R}^{0+m}, q_{(0,m)}\right),$$

es decir, los casos cuando al evaluar la forma cuadrática $q_{(n,m)}: \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$ obtenemos $-\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ y $\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i^2$ respectivamente.

Para esto, los conceptos tratados en este capítulo son los siguientes: Las álgebras $Cl\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)$, la $n-$ésima álgebra de Clifford C_n, isomorfismos de álgebras de Clifford C_n, isomorfismos de álgebras C_n^*, la compactificación de las álgebras $Cl\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)$, periocidad de isomorfismos y algunas observaciones sobre C_n y C_n^*.

Definición 25 *Al álgebra $Cl\left(\mathbb{R}^{n+0}, q_{(n,0)}\right)$ la denotamos por C_n e identificamos al espacio $\mathbb{R}^n$ con $\iota_{q_{(n,0)}}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\subset} C_n$ y a los reales $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}\cdot 1 \subset C_n$. Por otro lado, al álgebra $Cl\left(\mathbb{R}^{0+m}, q_{(0,m)}\right)$ la denotamos por C_m^* e identificamos al espacio $\mathbb{R}^m$ con $\iota_{q_{(0,m)}}(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\subset} C_m^*$ y a los reales $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}\cdot 1 \subset C_m^*$.*

Usaremos la notación $e_i = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$, con un 1 en la $i-$ésima coordenada. El álgebra lineal nos permite saber que $e_1, \cdots, e_{n+m}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+m} \subset Cl\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)$.

Las álgebras $Cl\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)$ tienen una presentación clásica dada por la siguiente proposición.

Proposición 26 *Los e_i, $i = 1, 2, \cdots, n+m$ generan a $Cl\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)$ (como álgebra multiplicativamente) y están sujetas a las relaciones*

$$e_i e_j + e_j e_i = \left\{ \begin{array}{cc} -2\delta_{ij} & si\ i = j \leq n \\ 2\delta_{ij} & si\ i = j > n \end{array} \right\}$$

donde δ_{ij} es la delta de kronecker.

Proof. Que generan a $Cl\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)$ se sigue de los resultados obtenidos en el capitulo anterior. Basta ver que las relaciones se cumplen.

Si $i \leq n$ se tiene que:

(a) supongamos $i = j$, entonces

$$\begin{aligned} e_i e_i + e_i e_i &= -2 \cdot 1 \\ e_i^2 + e_i^2 &= -2 \\ 2e_i^2 &= -2 \\ e_i^2 &= -1 \end{aligned}$$

(b) supongamos $i \neq j$, entonces

$$\begin{aligned} e_i e_j + e_j e_i &= 0 \\ e_i e_j &= -e_j e_i \end{aligned}$$

Si $i > n$ se tiene que:

(a) supongamos $i = j$, entonces

$$\begin{aligned} e_i e_i + e_i e_i &= 2 \cdot 1 \\ e_i^2 + e_i^2 &= 2 \\ 2e_i^2 &= 2 \\ e_i^2 &= 1 \end{aligned}$$

(b) supongamos $i \neq j$, entonces

$$\begin{aligned} e_i e_j + e_j e_i &= 0 \\ e_i e_j &= -e_j e_i \end{aligned}$$

■

De la proposición anterior podemos hacer las siguientes definiciones.

(a) Llamamos a C_n la $n-$ésima **álgebra de Clifford** que esta generada por $e_1, \cdots, e_n$ como álgebra sujeta a las relaciones

$$e_i^2 = -1 \text{ y } e_i e_j = -e_j e_i \text{ con } i \neq j \text{ para todos } i,\ j = 1, ..., n.$$

Anexando el 1 y el producto de los básicos e_i, de la siguiente forma: $e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ tal que $i_1 < i_2 < ... < i_r$ con $0 \leq r \leq n$, obtenemos una base como espacio vectorial para C_n.

(b) Llamamos a C_m^* la $m-$ésima álgebra que esta generada por $\varepsilon_1 \cdots, \varepsilon_m$ como álgebra sujeta a las relaciones

$$\varepsilon_i^2 = 1 \text{ y } \varepsilon_i \varepsilon_j = -\varepsilon_j \varepsilon_i \text{ con } i \neq j \text{ para todos } i,\ j = 1, ..., m.$$

Anexando el 1 y el producto de los básicos ε_i, de la siguiente forma: $\varepsilon_{i_1}, \cdots \varepsilon_{i_s}$ tal que $i_1 < i_2 < ... < i_s$ con $0 \leq s \leq m$, obtenemos una base como espacio vectorial para C_m^*.

Las álgebras $Cl\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)$ tienen una descomposición en términos del producto tensorial graduado como se observa en la siguiente proposición.

Proposición 27 *La función*

$$\psi : \; Cl\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right) \longrightarrow C_1\widehat{\otimes}C_1\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}C_1\widehat{\otimes}C_1^*\widehat{\otimes}C_1^*\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}C_1^*$$

donde C_1 aparece n veces y C_1^* aparece m veces, es un isomorfismo de álgebras.

Proof. Basta descomponer $\mathbb{R}^{n+m}$ en subespacios formados por $\mathbb{R}$, relativos a $q_{(n,m)}$. Aplicando los resultados del capítulo anterior inductivamente se obtiene el isomorfismo. ■

A continuación daremos explícitamente la descripción de las álgebras

$$Cl\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)$$

como álgebras de matrices sobre los campos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, o $\mathbb{H}$.

Ejemplo 28 ***ISOMORFISMOS DE ÁLGEBRAS*** C_n

Usaremos el símbolo $\approx$ para denotar isomorfismo de las álgebras C_n y C_m^*.

(1) $C_0 \approx \mathbb{R}$, llamada el **Álgebra de Clifford Trivial.**

(2) $C_1 \approx \mathbb{C}$, donde $\mathbb{C}$ es el campo de los números complejos.

Proof. C_1 es de dim 2 como espacio vectorial y como álgebra. Por definición, la base es $\{1 = e_0, e_1\}$; donde $e_1^2 = -1$. Esta relación especifica la operación producto en C_1 y la suma es componente a componente.

Así, es suficiente definir la función:

$$\begin{aligned} \varphi : C_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{dada por} \\ \varphi(a + e_1 b) &= a + ib, \end{aligned}$$

obsérvese que

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 1 \\ \varphi(e_1) &= i. \end{aligned}$$

Es decir, manda básicos en básicos, por lo tanto, es isomorfismo de álgebras. ■

(3) $C_2 \approx \mathbb{H}$, donde $\mathbb{H}$ es el conjunto de los números cuaternios.

Proof. C_2 es de dim 3 como álgebra y de dim 4 como espacio vectorial. Por definición, la base es $\{1, e_1, e_2, e_1e_2\}$ con $e_1^2 = e_2^2 = -1$ y $e_1e_2 = -e_2e_1$. Estas relaciones especifican la operación producto en C_2, y la suma es componente a componente. Así, es suficiente definir la función:

$$\varphi_2 : C_2 \longrightarrow \mathbb{H} \;\; \text{dada por}$$
$$\varphi_2(a + be_1 + ce_2 + de_1e_2) = a + bi + cj + dk$$

obsérvese que

$$\begin{aligned} \varphi_2(1) &= 1 \\ \varphi_2(e_1) &= i \\ \varphi_2(e_2) &= j \\ \varphi_2(e_1e_2) &= k \end{aligned}$$

donde i, j y k son los cuaterniones puros, tambien se cumplen las relaciones $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$. Es decir, φ_2 manda básicos en básicos, por lo tanto, es isomorfismo de álgebras. ∎

(4) $C_3 \approx \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

Proof. C_3 es de dim 4 como álgebra y de dim 8 como espacio vectorial.

Por definición, la base es:

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3\}$$

con $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$ y $e_ie_j = -e_je_i$ cuando $i \neq j$. Estas relaciones especifican la operación producto es C_3 y la suma es componente a componente.

Para el espacio ($\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$) su base es:

$$\{(1, 1), (i, i), (j, j), (k, k), (k, -k), (-j, j), (i, -i), (-1, 1)\}.$$

Así, es suficiente mandar los básicos de C_3 en los de ($\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$) de la siguiente forma:

$$\varphi_3 : C_3 \longrightarrow \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \text{ tal que}$$

$$\begin{array}{lclclcl}
\varphi_3(1) & = & (1,1) & \quad & \varphi_3(e_1e_2) & = & (k,-k) \\
\varphi_3(e_1) & = & (i,i) & & \varphi_3(e_1e_3) & = & (-j,j) \\
\varphi_3(e_2) & = & (j,j) & & \varphi_3(e_2e_3) & = & (i,-i) \\
\varphi_3(e_3) & = & (k,-k) & & \varphi_3(e_1e_2e_3) & = & (-1,1)
\end{array}$$

que claramente φ_3 es isomorfismo de álgebras. ∎

(5) $C_4 \approx M_2(\mathbb{H})$.

Proof. C_4 es de dim 5 como álgebra y de dim 16 como espacio vectorial. Por definición, la base es:

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_1e_2, e_1e_3, e_1e_4, e_2e_3, e_2e_4,$$
$$e_3e_4, e_1e_2e_3, e_1e_2e_4, e_1e_3e_4, e_2e_3e_4, e_1e_2e_3e_4\}$$

con $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = -1$ y $e_ie_j = -e_je_i$ con $i \neq j$. Estas relaciones especifican la operación producto en C_4 y la suma es componente a componente. Definamos un morfismo que mande los básicos de C_4 en los básicos de $M_2(\mathbb{H})$, de la siguiente forma:

$$\varphi_4 : C_4 \longrightarrow M_2(\mathbb{H}) \text{ dada por}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_4(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\varphi_4(e_1) &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \\
\varphi_4(e_2) &= \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} \\
\varphi_4(e_3) &= \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \\
\varphi_4(e_4) &= \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Así, φ_4 manda a los elementos restantes de la base al producto de las matrices correspondientes; de donde obtenemos el isomorfismo de álgebras. ■

(6) $C_5 \approx M_4(\mathbb{C})$.

Proof. C_5 es de dimensión 6 como álgebra y de dimensión 32 como espacio vectorial. Por definición la base es:

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_1e_2, e_1e_3, e_1e_4, e_1e_5, e_2e_3, e_2e_4, e_2e_5, e_3e_4, e_3e_5,$$
$$e_4e_5, e_1e_2e_3, e_1e_2e_4, e_1e_2e_5, e_1e_3e_4, e_1e_3e_5, e_1e_4e_5, e_2e_3e_4, e_2e_3e_5,$$
$$e_2e_4e_5, e_3e_4e_5, e_1e_2e_3e_4, e_1e_2e_3e_5, e_1e_2e_4e_5, e_1e_3e_4e_5, e_2e_3e_4e_5, e_1e_2e_3e_4e_5\}$$

con $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = -1$ y $e_ie_j = -e_je_i$ con $i \neq j$. Estas relaciones especifican la operación producto en C_5 y la suma es componente a componente. Definimos un morfismo que mande los básicos de C_5 en los básicos de $M_4(\mathbb{C})$, de la siguiente forma:

$$\varphi_5 : C_5 \longrightarrow M_4(\mathbb{C}) \text{ dada por}$$

$$\varphi_5(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_5(e_1) = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$\varphi_5(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_5(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_5(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_5(e_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, φ_5 manda a los elementos restantes de la base a el producto de las matrices correspondientes; de donde obtenemos en isomorfismo de álgebras. ■

Ejemplo 29 ***ISOMORFISMOS DE ÁLGEBRAS C_n^*.***

(1) *Para el caso $n = 0$, $C_0^* = \mathbb{R}$.*

(2) $C_1^* \approx \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Proof. *C_1^* esta generada por $\{1, \varepsilon_1\}$, tal que $\varepsilon_1^2 = 1$. Esta relación especifica la operación producto en C_1^* y la suma es componente a componente. Una base para $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ es $\{(1,1), (1,-1)\}$. Basta definir*

$$\varphi : C_1^* \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \quad \textit{dada por}$$

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= (1,1) \\ \varphi(\varepsilon_1) &= (1,-1) \end{aligned}$$

que claramente es isomorfismo de álgebras. ■

(3) $C_2^* \approx M_2(\mathbb{R})$.

Proof. *C_2^* esta generada por $\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_2\}$ y se cumplen las relaciones $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ y $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -\varepsilon_2\varepsilon_1$. Estas relaciones especifican la operación producto en C_2^* y la suma es componente a componente. Una base para $M_2(\mathbb{R})$ es*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Basta definir

$$\varphi_2 : C_2^* \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \text{ dada por}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(1) &\longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \varphi_2(\varepsilon_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \varphi_2(\varepsilon_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \varphi_2(\varepsilon_1\varepsilon_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Claramente φ_2 es isomorfismo de álgebras. ■

(4) *Como último ejemplo demostremos que $Cl_{(1,1)}\left(\mathbb{R}^{1+1}, q_{(1,1)}\right) \approx M_2(\mathbb{R})$.*

Proof. *Por definición, una base para $Cl_{(1,1)}\left(\mathbb{R}^{1+1}, q_{(1,1)}\right)$ es $\{e_1, \varepsilon_1, 1\}$ y se cumplen las relaciones $e_1^2 = -1$, $\varepsilon_1^2 = 1$, $e_1\varepsilon_1 = -\varepsilon_1 e_1$. Las cuales especifican la operación producto en $Cl_{(1,1)}\left(\mathbb{R}^{1+1}, q_{(1,1)}\right)$ y la suma es componente a componente.*

Una base para $M_2(\mathbb{R})$ es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Basta definir

$$f : Cl_{(1,1)}\left(\mathbb{R}^{1+1}, q_{(1,1)}\right) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \text{ dada por}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ f(e_1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ f(\varepsilon_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ f(e_1\varepsilon_1) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Claramente f es isomorfismo de álgebras. ■

Consideremos las álgebras de Clifford C_n. Si incluimos los generadores e_i de C_{n-1} a los generadores e_i de C_n, tenemos que C_{n-1} es una **subálgebra** de C_n. Por lo que la filtración que se definió en el capítulo anterior es de la siguiente forma:

$$C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \subset M_2(\mathbb{H}) \subset \ldots \subset C_n.$$

Un resultado análogo se obtiene para las álgebras C_n^*.

La clave de la clasificación de las álgebras $Cl_{(n,m)}\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)$ para cualquier n y m es el siguiente resultado.

Teorema 30 *Se cumplen los siguientes isomorfismos*

$$\begin{array}{llll} i) & Cl\left(\mathbb{R}^{(n+2)+0}, q_{(n+2,0)}\right) & \approx & Cl\left(\mathbb{R}^{0+n}, q_{(0,n)}\right) \otimes_{\mathbb{R}} Cl\left(\mathbb{R}^{2+0}, q_{(2,0)}\right) \\ ii) & Cl\left(\mathbb{R}^{0+(n+2)}, q_{(0,n+2)}\right) & \approx & Cl\left(\mathbb{R}^{n+0}, q_{(n,0)}\right) \otimes_{\mathbb{R}} Cl\left(\mathbb{R}^{0+2}, q_{(0,2)}\right) \\ iii) & Cl\left(\mathbb{R}^{n+1+m+1}, q_{(n+1,m+1)}\right) & \approx & Cl\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right) \otimes Cl\left(\mathbb{R}^{1+1}, q_{(1,1)}\right) \end{array}$$

para todo $n, m \geq 0.$ [1]

Proof. Demostremos $i)$.Sean $e_1, \cdots, e_{n+2}$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^{n+2}$, y sea la forma cuadrática

$$\begin{array}{rclcl} q: & \mathbb{R}^{n+2} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{dada por} \\ & q(x) & = & -\sum_{i=1}^{n+2} x_i^2 & = -|x|^2 \end{array}$$

donde $x = (x_1, \cdots, x_{n+2})$.

Por otro lado consideremos $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ los generadores básicos de C_n^* y sean E_1, E_2 los generadores básicos de C_2. Definamos la función

$$\varphi: \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow C_n^* \otimes_{\mathbb{R}} C_2 \text{dada por}$$

$$\varphi(e_i) = \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_i \otimes E_1 E_2 & \text{para } 1 \leq i \leq n \\ 1 \otimes E_{i-n} & \text{para } i = n+1 \text{ ó } n+2. \end{array} \right\}$$

Notemos que para $i, j \in \{1, ..., n\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(e_i)\varphi(e_j) + \varphi(e_j)\varphi(e_i) &= \varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon_j\varepsilon_i \otimes (-1) \\ &= 2\delta_{ij} \cdot 1 \otimes 1, \end{aligned}$$

y para $k, l \in \{n+1, n+2\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(e_k)\varphi(e_l) + \varphi(e_l)\varphi(e_k) &= 1 \otimes (E_{k-n}E_{l-n} + E_{l-n}E_{k-n}) \\ &= 2\delta_{kl} \cdot 1 \otimes 1, \end{aligned}$$

[1] Por comodidad de notacion, los isomorfismos del teorema los denotaremos por $Cl_{(n+2,0)} \approx Cl_{(0,n)} \otimes Cl_{(2,0)}$, $Cl_{(0,n+2)} \approx Cl_{(n,0)} \otimes Cl_{(0,2)}$ y $Cl_{(n+1,m+1)} \approx Cl_{(n,m)} \otimes Cl_{(1,1)}$. Respectivamente. Ademas recordemos que $Cl_{(n+2,0)} = C_{n+2}$; $Cl_{(0,n)} = C_n^*$; $Cl_{(2,0)} = C_2$ y $Cl_{(0,n+2)} = C_{n+2}^*$, $Cl_{(0,2)} = C_2^*$.

tambien se cumple que $\varphi(e_i)\varphi(e_k)+\varphi(e_k)\varphi(e_i)=0$. Se sigue entonces que $(\varphi(x))^2=|x|^2\cdot 1\otimes 1$ para todo $x\in\mathbb{R}^{n+2}$. Por lo tanto, por la propiedad universal del álgebra de Clifford existe

$$\widetilde{\varphi}: C_{n+2}\longrightarrow C_n^*\otimes_{\mathbb{R}} C_2.$$

Ahora como $\widetilde{\varphi}$ mapea sobre un conjunto de generadores para $C_n^*\otimes_{\mathbb{R}} C_2$, es sobreyectiva. Por otro lado, la dimención de C_{n+2} es igual a la dimención de $C_n^*\otimes_{\mathbb{R}} C_2$, por lo que se concluye que $\widetilde{\varphi}$ es isomorfismo.

La demostración de $ii)$ es análoga. Para demostrar $iii)$, procedemos de manera similar. Consideremos una base ortonormal $e_1,\cdots,e_{n+1},\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{m+1}$ para $\mathbb{R}^{n+m+2}$ tal que $q(e_i)=-1$ y $q(\varepsilon_j)=1$ para todo i,j. Sea $e'_1,\cdots,e'_n,\varepsilon'_1,\cdots,\varepsilon'_m$ y e''_1,ε''_1 las bases correspondientes para $\mathbb{R}^{n+m}$ y $\mathbb{R}^2$, definamos la función

$$\psi:\quad \mathbb{R}^{n+m+2}\quad\longrightarrow\quad Cl\left(\mathbb{R}^{n+m},q_{(n,m)}\right)\otimes Cl\left(\mathbb{R}^{1+1},q_{(1,1)}\right)\quad \text{dada por}$$

$$\psi(e_i)\quad=\quad\left\{\begin{array}{ll} e'_i\otimes e''_1\varepsilon''_1 & \text{para } 1\leq i\leq n\\ 1\otimes e''_1 & \text{para } i=n+1\end{array}\right\}$$

y

$$\psi(\varepsilon_j)\quad=\quad\left\{\begin{array}{ll} \varepsilon'_j\otimes e''_1\varepsilon''_1 & \text{para } 1\leq j\leq m\\ 1\otimes \varepsilon''_1 & \text{para } j=m+1\end{array}\right\}$$

y aplicando el mismo razonamiento que en φ, ψ cumple las condiciones para aplicar la propiedad universal del álgebra de Clifford. Asi,obtenemos el isomorfismo deseado .

$$\widetilde{\psi}: Cl\left(\mathbb{R}^{n+1+m+1},q_{(n+1,m+1)}\right)\longrightarrow Cl\left(\mathbb{R}^{n+m},q_{(n,m)}\right)\otimes Cl\left(\mathbb{R}^{1+1},q_{(1,1)}\right).$$

■

Para aplicar esta proposición básica necesitamos los siguientes resultados concernientes al producto tensorial de álgebras sobre $\mathbb{R}$. Para $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$, denotaremos por $M_n(k)$ el álgebra de matrices $n\times n$ con entradas en K.

Proposición 31 *Se cumplen los siguientes isomorfismos.*

i) $M_n(\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}} M_m(\mathbb{R})\approx M_{nm}(\mathbb{R})$ *para todos n y m.*

ii) $M_n(\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}} K\approx M_n(K)$ *donde $K=\mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$ y para todo n.*

iii) $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\approx\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$

iv) $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}\approx M_2(\mathbb{C})$

v) $\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}\approx M_4(\mathbb{R})$

Proof. Para demostrar $i)$ y $ii)$, es suficiente usar los resultados que se conocen sobre dimención en el producto tensorial. Asi, tenemos dimensiones $(nm)^2$ y n^2 respectivamente, obteniendo los isomorfismos.

Para demostrar $iii)$, definamos la función $f_3 : \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dada por

$$\begin{aligned} f_3(1,0) &= \tfrac{1}{2}(1 \otimes 1 + i \otimes i) \\ f_3(0,1) &= \tfrac{1}{2}(1 \otimes 1 - i \otimes i). \end{aligned}$$

que manda básicos en básicos, obteniendo asi, el isomorfismo.

Para demostrar $iv)$, consideremos a $\mathbb{H}$ como un $\mathbb{C}-$módulo izquierdo, y definamos la función

$$\begin{array}{rcll} \varphi : \quad \mathbb{C} \times \mathbb{H} & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{H},\mathbb{H}) & \text{dada por} \\ \varphi(z,p) & = & \varphi_{(z,p)} & \text{tal que, para todo } x \in \mathbb{H} \\ \varphi_{(z,p)}(x) & = & zx\overline{p}. & \text{donde } \overline{p} \text{ es el conjugado de } p. \end{array}$$

Notemos que φ es $\mathbb{R}-$bilineal pues

$$\begin{aligned} \varphi_{(r(z+w),p)}(x) &= r(z+w)x\overline{p} = rzx\overline{p} + rwx\overline{p} \\ &= r\varphi_{(z,p)}(x) + r\varphi_{(w,p)}(x) = r\left[\varphi_{(z,p)}(x) + \varphi_{(w,p)}(x)\right]. \end{aligned}$$

Análogo para $\varphi_{(z,s(p+l))}$.

Por la propiedad universal del producto tensorial $\otimes$, existe una funcion $\mathbb{R}-$lineal

$$\begin{array}{rcll} \widetilde{\varphi} : \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{H},\mathbb{H}) = M_2(\mathbb{C}) & \text{dada por} \\ \widetilde{\varphi}(z \otimes p) & = & \varphi_{(z,p)}. & \end{array}$$

$\widetilde{\varphi}$ es homomorfismo de álgebras, pues

$$\varphi_{(zz_1,pp_1)}(x) = zz_1x\overline{pp_1} = z(z_1x\,\overline{p})\overline{p_1} = \varphi_{(z,p)}(z_1x\,\overline{p_1}) = \left[\varphi_{(z,p)} \circ \varphi_{(z,p_1)}\right](x).$$

Aplicando $\widetilde{\varphi}$ sobre una base de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ se obtiene que $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva. Por otro lado como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}) = \dim_{\mathbb{R}}(M_2(\mathbb{C}))$, $\widetilde{\varphi}$ resulta ser isomorfismo.

Para demostrar $v)$, consideremos la función

$$\begin{array}{rcll} \psi : \quad \mathbb{H} \times \mathbb{H} & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{H},\mathbb{H}) & \text{dada por} \\ \psi(p_1,p_2) & = & \psi_{(p_1,p_2)}, & \text{tal que, para todo } x \in \mathbb{H} \\ \psi_{(p_1,p_2)}(x) & = & p_1x\,\overline{p_2}. & \text{donde } \overline{p} \text{ es el conjugado de } p. \end{array}$$

y haciendo un análisis semejante que en $iv)$, obtenemos el isomorfismo deseado.

$$\widetilde{\psi} : \ \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \longrightarrow Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{H},\mathbb{H}) = M_4(\mathbb{R})$$

■

Antes de continuar con el estudio de las álgebras

$$Cl_{(n,m)}\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right),$$

observemos que para cualquier (n,m) la complexificación del álgebra $Cl_{(n,m)}\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)$ es solo el álgebra de Clifford sobre $\mathbb{C}$ correspondiente a la forma cuadrática complexificada, es decir,

$$Cl_{(n,m)}\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\approx Cl_{(n,m)}\left(\mathbb{C}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)\otimes\mathbb{C}.$$

Sin embargo, todas las formas cuadráticas no degeneradas sobre $\mathbb{C}^n$ son equivalentes sobre $C_n(\mathbb{C})$. Por lo tanto, ajustando la forma cuadrática por

$$\begin{array}{rccc}
q_{\mathbb{C}(n,0)}: & \mathbb{C}^{n+0} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & q_{\mathbb{C}(n,0)}\left(z_1, z_2, \cdots z_n,\right) & = & \sum_{i=i}^{n} z_i^2 \\
 & \text{y} & & \\
q_{\mathbb{C}(0,n)}: & \mathbb{C}^{0+n} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & q_{\mathbb{C}(0,n)}\left(z_1, z_2, \cdots z_n\right) & = & \sum_{i=i}^{n} z_i^2
\end{array}$$

y definiendo

$$\mathbb{C}_n \equiv Cl\left(\mathbb{C}^n, q_{\mathbb{C}}\right).$$

tenemos los siguientes isomorfismos.

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_n &\approx Cl_{(0,n)}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \\
&\approx Cl_{(1,n-1)}\left(\mathbb{R}^{1+(n-1)}, q_{(1,n-1)}\right)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \\
&\approx Cl_{(2,n-2)}\left(\mathbb{R}^{2+(n-2)}, q_{(2,n-2)}\right)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \\
&\approx \cdots \approx Cl_{(n-1,1)}\left(\mathbb{R}^{(n-1)+1}, q_{(n-1,1)}\right)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \\
&\approx Cl_{(n,0)}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Teorema 32 *Para todo $n\geq 0$, existe una* ***periocidad de isomorfismos***

$$\begin{array}{lrcl}
i) & Cl_{(0,n+8)} & \approx & Cl_{(0,n)}\otimes_{\mathbb{R}} Cl_{(0,8)} \\
ii) & Cl_{(n+8,0)} & \approx & Cl_{(n,0)}\otimes_{\mathbb{R}} Cl_{(8,0)} \\
iii) & \mathbb{C}_{n+2} & \approx & \mathbb{C}_n\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}_2
\end{array}$$

donde

$$\begin{aligned}
Cl_{(0,8)} &= Cl_{(8,0)} = M_{(16)}(\mathbb{R}) \\
\mathbb{C}_2 &= M_{(2)}(\mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Proof. Usando los isomorfismos $i)$ y $ii)$ de la proposición anterior y haciendo que $n+8$ quede en terminos de $n+2$, para luego usar el teorema anterior, tenemos que

$$Cl_{(0,n+8)} \approx Cl_{(0,n)}\otimes Cl_{(2,0)}\otimes Cl_{(0,2)}\otimes Cl_{(2,0)}\otimes Cl_{(0,2)}.$$

Usando el ejemplo y la proposición anterior tenemos que

$$\begin{aligned} Cl_{(0,n+8)} &\approx Cl_{(0,n)} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{R}) \\ &\approx Cl_{(0,n)} \otimes M_4(\mathbb{R}) \otimes M_4(\mathbb{R}) \\ &\approx Cl_{(0,n)} \otimes M_{16}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Esto demuestra el primer isomorfismo. La segunda periocidad se demuestra de manera análoga. Por último, para demostrar *iii*) basta usar los isomorfismos de $\mathbb{C}_n$, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{n+2} &\approx Cl_{(0,n+2)} \otimes \mathbb{C} \\ &\approx Cl_{(n,0)} \otimes Cl_{(0,2)} \otimes \mathbb{C} \\ &\approx \mathbb{C}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_2 \end{aligned}$$

■

Por lo tanto, usando los resultados anteriores, podemos construir la siguiente tabla.

	1	2	3	4
C_n	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$
C_n^*	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$
$\mathbb{C}_n$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{C})$

	5	6	7	8
C_n	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$
C_n^*	$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$
$\mathbb{C}_n$	$M_4(\mathbb{C}) \oplus M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{C}) \oplus M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{C})$

Combinando la tabla anterior con los isomorfismos de periocidad y el hecho de que

$$Cl_{(1,1)}\left(\mathbb{R}^{1+1}, q_{(1,1)}\right) \approx M_2(\mathbb{R}),$$

podemos construir la clasificación completa de las álgebras

$$Cl_{(n,m)}\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right).$$

Como se muestra en la siguiente tabla. Léase n en el renglón horizontal y m en la columna.

8	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{H})$
7	$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H}) \oplus M_8(\mathbb{H})$
6	$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H})$
5	$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$
4	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$
3	$M_2(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R}) \oplus M_4(\mathbb{R})$
2	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R})$
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$
	0	1	2

8	$M_{16}(\mathbb{H}) \oplus M_{16}(\mathbb{H})$	$M_{32}(\mathbb{H})$	$M_{64}(\mathbb{C})$
7	$M_{16}(\mathbb{H})$	$M_{32}(\mathbb{C})$	$M_{64}(\mathbb{R})$
6	$M_{16}(\mathbb{C})$	$M_{32}(\mathbb{R})$	$M_{32}(\mathbb{R}) \oplus M_{32}(\mathbb{R})$
5	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R}) \oplus M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{32}(\mathbb{R})$
4	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{C})$
3	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$
2	$M_4(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$
1	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$
0	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$
	3	4	5

8	$M_{128}(\mathbb{R})$	$M_{128}(\mathbb{R}) \oplus M_{128}(\mathbb{R})$	$M_{256}(\mathbb{R})$
7	$M_{64}(\mathbb{R}) \oplus M_{64}(\mathbb{R})$	$M_{128}(\mathbb{R})$	$M_{128}(\mathbb{C})$
6	$M_{64}(\mathbb{R})$	$M_{64}(\mathbb{C})$	$M_{64}(\mathbb{H})$
5	$M_{32}(\mathbb{C})$	$M_{32}(\mathbb{H})$	$M_{32}(\mathbb{H}) \oplus M_{32}(\mathbb{H})$
4	$M_{16}(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{H}) \oplus M_{16}(\mathbb{H})$	$M_{32}(\mathbb{H})$
3	$M_8(\mathbb{H}) \oplus M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{H})$	$M_{32}(\mathbb{C})$
2	$M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{C})$	$M_{32}(\mathbb{R})$
1	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R}) \oplus M_{16}(\mathbb{R})$
0	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$
	6	7	8

Nota 2 ***RESULTADOS IMPORTANTES SOBRE LAS ÁLGEBRAS*** C_n *y* C_n^*.

(1) Para todo $n \geq 3$, las álgebras de Clifford C_n tiene divisores de cero.

Basta probar que C_3 tiene divisores de cero. Sea $1 + e_1e_2e_3$ y $1 - e_1e_2e_3$ en C_3, entonces

$$\begin{aligned}
(1 + e_1e_2e_3)(1 - e_1e_2e_3) &= 1 - (e_1e_2e_3)(e_1e_2e_3) \\
&= 1 + (e_1e_2e_3)(e_3e_2e_1) \\
&= 1 + (e_1e_2e_3e_3e_2e_1) \\
&= 1 + (e_1e_2(-e_2e_1)) \\
&= 1 + (e_1(-e_2e_2)e_1)) \\
&= 1 + (e_1e_1) \\
&= 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

(2) Si n es par entonces el centro $Z(C_n)$ es unidimensional (y consiste únicamente de los elementos de $\mathbb{R}$) pero si n es impar, entonces el centro $Z(C_n)$ es bidimensional y está generada por el 1 y $e_{[n]} = e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdots e_n$ (el subíndice $[n] = \{1, 2, ..., n\}$). Pues

como $1, e_1, e_2, ..., e_n$ generan a C_n por definición, entonces $y \in Z(C_n)$ si y solo si $ye_i = e_iy$, es decir, $e_iye_i = -y$, para cualquier $i = 1, ..., n$.

Si $i \in I = \{i_1 < i_2 < ... < i_m\}$ e $i = i_T$, entonces

$$e_i e_I = (-1)^{T-1}(-e)_{I\setminus\{i\}} \text{ y } e_I e_i = (-1)^{m-T}(-e)_{I\setminus\{i\}}$$

Si $i \notin I$ y $i_{T-1} < i < i_t$, entonces

$$e_i e_I = (-1)^{T-1} e_{I\cup\{i\}} \text{ y } e_I e_i = (-1)^{m-T+1} e_{I\cup\{i\}}$$

Por lo tanto si y$=\sum\limits_I y_I e_I$, entonces

$$e_i y e_i = \sum_{i\in I}(-1)^{m+1}(-y_I)\, e_I + \sum_{i\notin I}(-1)^m(-y_I)\, e_I, \text{donde } m = |I|\,.$$

Por lo tanto $e_i y e_i = -x_i$ si y solo si $y_I = (-1)^{m+1} y_I$ para $i \in I$ y $y_I = (-1)^m y_I$ para $i \notin I$. Como para cualquier $I \neq \emptyset$ existe $[n]$ y también $i \in I$ e $i \notin I$, se sigue que si $e_i y e_i = -y$ para todo $i = 1, ..., n$ entonces $(-1)^{m+1} y_I = (-1)^m y_I$ por lo que $y_I = 0$. Además $y_{[n]} = (-1)^{n+1} y_{[n]}$ de donde $y_{[n]} = 0$ si n es par. Por lo tanto $Y = Y_\emptyset e_\emptyset$ si n es par y $Y = Y_\emptyset e_\emptyset + Y_{[n]} e_{[n]}$ si n es impar.

(3) Si $x \in C_n$ tal que $x = a_1 a_2 \ldots a_n$ con n par y $a_i \in C_n$, decimos que x es un **elemento par**. Análogo para $x \in C_m^*$.

(4) Para cualesquier número n, los elementos pares del centro del álgebra de Clifford C_n coincide con $\mathbb{R}$. Este resultado se sigue de la observación (2)

(5) Los resultados anteriores se cumplen para las algebras C_m^*.

3. LOS GRUPOS CLÁSICOS.

3.1. EL GRUPO GENERAL LINEAL $GL_n(\mathbb{R})$.

En este capítulo describiremos aspectos algebraicos y topológicos de los grupos clásicos. Recordemos algunos conceptos básicos de topología que se usarán durante la lectura de éste y el siguiente capítulo.

Si consideramos un conjunto X y τ una familia de subconjuntos de X. Decimos que τ es una **topología** de X si, y solo, si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) El conjunto vacio $\emptyset$ y X son elementos de τ.
(ii) $\bigcup\limits_{j\in i} u_j \in \tau$, Para toda $\{u_j\}_{j\in i} \subset \tau$.
(ii) $\bigcap\limits_{j\in i} u_j \in \tau$, Para toda $\{u_j\}_{j\in i} \subset \tau$ con I finito.

Al par (X,τ) se le llama **espacio topológico**, a los elementos de X se les llaman puntos y a los elementos de τ se les llaman abiertos de (X,τ).

Para mayor facilidad de lectura y notación, en lo sucesivo denotaremos a (X,τ) solo como X. Si se requiere decir algo sobre su topología se dirá explícitamente.

Dados dos espacios topológicos X e Y, una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es **continua,** si para todo $U \subset Y$ abierto, la imagen inversa $f^{-1}(U) \subset X$ es abierto de X.

Diremos que X es **disconexo** si existen U y V en τ ajenos distintos del vacío, tales que $X = U \cup V$. De lo contrario diremos que X es **conexo**.

Por otro lado X es **localmente conexo** en $x \in X$ si posee una base local de conexos. Diremos que es **localmente conexo** si lo es en cada uno de sus puntos. Si el lector desea ver con mayor profundidad estos conceptos puede consultar cualquier libro de topologia general. En esta tesis solo usaremos las definiciones anteriores y cuando se requiera algo mas lo introduciremos en su momento.

En ésta primera sección, describiremos el grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$ en el caso real. Consideremos el álgebra de las matrices cuadradas $M_n(\mathbb{R})$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ el producto cartesiano de $\mathbb{R}$, n^2 veces.

Proposición 33 *La función*

$$\varphi : \; M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2} \quad \textit{dada por}$$

$$\varphi(A) = (a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn})$$

$$\textit{donde } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \textit{Es un isomorfismo de grupos aditivos.}$$

Proof. Sean A y $B \in M_n(\mathbb{R})$ entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(A+B) &= \varphi\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{bmatrix}\right) \\
&= \varphi\left(\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}\right) \\
&= (a_{11}+b_{11}, \ldots, a_{1n}+b_{1n}, \ldots, a_{n1}+b_{n1}, \ldots, a_{nn}+b_{nn}) \\
&= (a_{11}, \ldots, a_{nn}) + (b_{11}, \ldots b_{nn}) \\
&= \varphi(A) + \varphi(B)
\end{aligned}$$

Por otro lado, Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(A) = 0$, es decir, $\varphi(A) = (0, 0, \ldots, 0)$ si, y solo si, $a_{ij} = 0$ para todo i, $j = 1, \ldots, n$ y esto es equivalente a que A sea la matriz 0. Por lo tanto φ es monomorfismo. Si $(x_1, \ldots, x_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ entonces existe

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ x_{n+1} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_{n(n-1)} & \ldots & x_{n^2} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tal que}$$

$\varphi(X) = (x_1, \ldots, x_{n^2})$. Por lo tanto φ es isomorfismo de grupos. ∎

El isomorfismo φ induce una topología en $M_n(\mathbb{R})$, es decir, un conjunto $U \subset M_n(\mathbb{R})$ es abierto, si $U = \varphi^{-1}(V)$, donde V es un abierto en $\mathbb{R}^{n^2}$. Por lo tanto $M_n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$ son espacios topológicos homeomorfos.

En el capítulo uno definimos en $\mathbb{R}^{n^2}$ el producto euclideano por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n^2} x_i y_i.$$

Así, podemos definir una **métrica euclideana** en $\mathbb{R}^{n^2}$ como:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{n^2} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

con $x = (x_1, \ldots, x_{n^2})$ e $y = (y_1, \ldots, y_{n^2})$. El isomorfismo φ anterior, induce un producto en $M_n(\mathbb{R})$ y una métrica compatibles con las de $\mathbb{R}^{n^2}$, dados por

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

$$d(A,B) = \|A - B\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

respectivamente, donde $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$.

La función determinante

$$\begin{array}{rccc} \det: & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \det(A) \end{array} \quad \text{dada por}$$

es continua, pues es combinación lineal de los coeficientes de A.

Definición 34 *Llamamos* ***grupo general lineal*** *al conjunto*

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, \det(A) \neq 0\}$$

Nota 3 ***RESULTADOS TOPOLÓGICOS DEL GRUPO*** $GL_n(\mathbb{R})$.

(1) El grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$ es abierto en $M_n(\mathbb{R})$.
(2) El grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$ es n^2 variedad.
(3) El grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$ no es compacto.
(4) $GL_n(\mathbb{R})$ no es conexo.

Proof. Afirmación (1).. Como la función $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $\mathbb{R} - \{0\} \subset \mathbb{R}$ es abierto. Así, se tiene que $\det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) = GL_n(\mathbb{R})$ y por lo tanto, abierto en $M_n(\mathbb{R})$.

Afirmación (2).

Por la proposición anterior, $M_n(\mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$ y por lo tanto una n^2-variedad. Como $GL_n(\mathbb{R})$ es un abierto de $M_n(\mathbb{R})$, se sigue que es una n^2-variedad.

Afirmación (3).

Es suficiente ver que $GL_n(\mathbb{R})$ no es acotado. Sean $I \in M_n(\mathbb{R})$ la matriz identidad y $r \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $\det(rI) = r^n 1 = r^n \neq 0$, por lo tanto $rI \in GL_n(\mathbb{R})$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|rI\| &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} r\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(nr^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{n}r. \end{aligned}$$

Haciendo tender r a infinito, $\|rI\|$ también tiende a infinito. Por lo tanto $GL_n(\mathbb{R})$ no es acotado, y por lo tanto no es compacto.

Afirmación (4).

Supongamos que es conexo, como la función determinante det es continua, entonces $\det(GL_n(\mathbb{R}))$ debe ser conexo. Pero $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R} - \{0\}$, el cual es disconexo. Por lo tanto $GL_n(\mathbb{R})$ es disconexo. ■

3.2. EL GRUPO ORTOGONAL.

En esta sección describiremos algunos aspectos topológicos y algebraicos del grupo ortogonal.

Definición 35 *Una función lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es* **ortogonal** *si preserva distancias, esto es, si $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 36 *Sea una función lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) T es ortogonal.

(2) $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(3) Si $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\{T(v_1), T(v_2), \ldots T(v_n)\}$$

también es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

(4) La matriz A asociada a T es invertible y satisface la condición $A^t A = I$. Donde A^t es la matriz **transpuesta** *de A.*

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2)

Por hipótesis tenemos que $\|T(x)\| = \|x\|$ $\forall$ $x \in \mathbb{R}^n$. Esto implica que $\langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sustituyendo $x$por $x + y$ obtenemos

$$\langle T(x+y), T(x+y)\rangle = \langle (x+y), (x+y)\rangle.$$

Usando la propiedad bilineal y simétrica del producto euclideano obtenemos

$$\langle T(x), T(x)\rangle + 2\langle T(x), T(y)\rangle + \langle T(y), T(y)\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle.$$

como

$$\langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle \text{ y } \langle T(y), T(y)\rangle = \langle y, y\rangle$$

se tiene que $2\langle T(x), T(y)\rangle = 2\langle x, y\rangle$ lo cual implica que $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

(2) $\Longrightarrow$ (3)

Sea $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$; entonces

$$\langle v_i, v_i\rangle = 1 \text{ y } \langle v_i, v_j\rangle = 0 \text{ cuando } i \neq j.$$

por (2) tenemos que

$$\langle T(v_i), T(v_i)\rangle = 1 \text{ y } \langle T(v_i), T(v_j)\rangle = 0 \text{ cuando } i \neq j.$$

por lo tanto $\{T(v_1), T(v_2), \ldots T(v_n)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

(3) $\Longrightarrow$ (1)

Supongamos que para alguna base ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ se tiene que $\{T(v_1), T(v_2), \ldots T(v_n)\}$ es también una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Sea $x = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ un vector arbitrario en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle a_1v_1 + \ldots + a_nv_n, a_1v_1 + \ldots + a_nv_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

pues $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ es un conjunto ortonormal.

Similarmente, se tiene que

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_iT(v_i), \sum_{i=1}^{n} a_iT(v_i)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

$(3) \Longrightarrow (4)$

Sean $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y $T(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}v_j$. Como $\{T(v_1), T(v_2), \ldots T(v_n)\}$ es ortonormal, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle T(v_i), T(v_i)\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}v_j, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}v_j\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

y si $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\langle T(v_i), T(v_j)\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}v_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}v_k\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ki}\alpha_{kj} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego la matriz de T en $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ es $A = (\alpha_{ij})$ con $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}^2 = 1$ y $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\alpha_{kj} = 0$. Lo cual implica que $AA^t = I$.

$(4) \Longrightarrow (3)$

$A^{-1} = A^t$ y $A = (T(v_1), \ldots, T(v_n))$ entonces $A = (\alpha_{ij})$ y $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\alpha_{kj} = 0$ y $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}^2 = 1$ implica que $\{T(v_1), T(v_2), \ldots T(v_n)\}$ es base ortonormal. ■

Definición 37 *Una matriz $A \in GL_n(\mathbb{R})$ es* ***ortogonal*** *si $A^{-1} = A^t$. De donde A es la matriz de una función ortogonal con respecto a una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Definamos al conjunto*

$$O(n) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^t\right\}$$

Proposición 38 *El conjunto $O(n)$ es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$.*

Proof. Basta ver que es cerrado bajo el producto. Sean A y $B \in O(n)$ entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t$ ■

Definición 39 *Al grupo $O(n)$ lo llamamos el* **grupo ortogonal** *Decimos que una matriz ortogonal A, es una* **rotación** *si* $\det(A) = 1$. *De lo contrario, si* $\det(A) = -1$, *es una* ***reflexión****.*

Lema 40 *Si $A \in O(n)$ entonces* $\det(A) = \pm 1$.

Proof. Sea $A \in O(n)$, entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \det(I) \\ &= \det(AA^{-1}) \\ &= \det(AA^t) \\ &= \det(A)\det(A^t) \\ &= \det(A)\det(A) \\ &= (\det(A))^2 \end{aligned}$$

por lo tanto $\det(A) = \pm 1$. ■

Ejemplo 41 *Calculemos los primeros casos de $O(n)$.*
(1) *Para $n = 1.O(1) \approx \mathbb{Z}_2$.*
(2) *Para $n = 2.O(2) \approx S^1$ donde*

$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Proof. (1) $O(1) \approx \mathbb{Z}_2$. Sea $A = [a] \in O(1)$. Como $\det(A) = \pm 1$ se tiene que $a = \pm 1$, por lo que una componente de $O(1)$ es el 1 y la otra es el -1. Por lo tanto $O(1) = \{-1, 1\}$. Pero $\{-1, 1\}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

(2) $O(2) \approx S^1$.

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in O(2)$. Como $\det(A) = ad - bc = \pm 1$ se tienen dos casos:

(i) Supongamos que $\det(A) = ad - bc = 1$. Entonces la matriz inversa y transpuesta son

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ y } A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

respectivamente. Como se cumple la condición $A^{-1} = A^t$, concluimos que $d = a$ y $c = -b$.

Por lo anterior, la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ con determinante $a^2 + b^2 = 1$. Por lo tanto, una componente de $O(2)$ es isomorfa a la circunferencia S^1.

(ii) Supongamos que $\det(A) = ad - bc = -1$. Entonces la matriz inversa y transpuesta son

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} \text{ y } A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

respectivamente. Como se cumple la condición $A^{-1} = A^t$, concluimos que $d = -a$ y $c = b$.

Por lo anterior, la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ con determinante $-a^2 - b^2 = -1$. Por lo tanto, la otra componente de $O(2)$ es también isomorfa a la circunferencia S^1. De lo que concluimos que $O(2)$ es isomorfo a S^1. ∎

En general, usando el caso (i), haciendo $a = \cos\theta$ y $b = sen\theta$, se tiene que toda rotación es de la forma

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ para } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

La estructura de una matriz ortogonal se generaliza en el siguiente teorema.

Teorema 42 *Toda matriz ortogonal es similar a una de la forma*

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & R_{\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & R_{\theta_s} \end{bmatrix}$$

Proof. Ver la demostración en [GMA] o en [WC]. ∎

Nota 4 ***RESULTADOS TOPOLÓGICOS DEL GRUPO*** $O(n)$.

(1) El grupo $O(n)$ es compacto.
(2) El grupo $O(n)$ no es conexo.

Proof. (1) $O(n)$ es compacto. Como el conjunto $\{-1, 1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y la función determinante det es continua, se tiene que $\det^{-1}(\{-1, 1\}) = O(n)$ el cual es cerrado.

Por otro lado si $A = (a_{ij}) \in O(n)$ entonces los renglones son una base ortonormal; así

$$\begin{aligned} \|A\| &= \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (n\ 1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

por lo que $O(n)$ esta acotado y por lo tanto compacto.

(2) $O(n)$ no es conexo.

Supongamos que es conexo y por ser la función det continua, entonces $\det(O(n))$ debe ser conexo, pero $\det(O(n)) = (\{-1,1\})$ el cual es disconexo. Por lo tanto $O(n)$ es disconexo. Aun más, $O(n) = \det^{-1}(\{-1\}) \cup \det^{-1}(\{1\})$ que son dos componentes. ■

3.3. EL GRUPO ESPECIAL ORTOGONAL.

En esta sección estudiaremos una de las componentes de $O(n)$; con exactitud fijaremos nuestra atención a la componente que corresponde a $\det^{-1}(\{1\})$.

Definamos al conjunto

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$$

Proposición 43 *El conjunto $SO(n)$ es un subgrupo de $O(n)$.*

Proof. Basta ver que es cerrado bajo el producto. Sean A y $B \in SO(n)$ entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \cdot 1 = 1$. ■

Definición 44 *Al grupo*

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$$

*lo llamamos **grupo especial ortogonal** o **grupo de rotaciones**.*

Ejemplo 45 *Calculemos los primeros casos de $SO(n)$. De los ejemplos del grupo ortogonal $O(n)$ concluimos que:*

(1) *Si $n = 1$, $SO(1)$ es el grupo trivial.*

(2) *Si $n = 2$, $SO(2)$ es isomorfo a S^1. Ademas si*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SO(2)$$

con $ad - bc = 1$, tenemos que su matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in SO(2)$$

con $da - cb = 1$.

Sabemos que para el caso $n = 2$, toda matriz $A \in SO(2)$ es similar a una de la forma

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad para\ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

La estructura general de una matriz $A \in SO(n)$ se obtiene del siguiente teorema.

Teorema 46 *Toda rotación A es similar a una de la forma*

$$B = \begin{bmatrix} R_{\theta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{\theta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{\theta_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es decir, $A = XBX^{-1}$ con $X \in SO(n)$.

Proof. Ver la demostración en [GMA] página 120. ■

Nota 5 *El grupo $SO(n)$ es compacto.*

Proof. Como el conjunto $\{1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y la función det es continua, se tiene que $\det^{-1}(\{1\}) = SO(n)$ el cual es cerrado. Por otro lado, se tiene que $SO(n) \subset O(n)$; y como $O(n)$ es compacto, por lo tanto $SO(n)$ también es compacto. ■

3.4. EL GRUPO GENERAL LINEAL $GL_n(\mathbb{C})$.

En esta sección describiremos algunos aspectos topológicos y algebraicos del grupo general lineal $GL_n(\mathbb{C})$ en el caso complejo.

Sea $M_n(\mathbb{C})$ el álgebra de las matrices cuadradas con coeficientes en $\mathbb{C}$; y $\mathbb{C}^{n^2}$ el producto cartesiano de $\mathbb{C}$, n^2 veces. La función definida por

$$\psi: \quad M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2} \quad \text{dada por}$$

$$\psi(A) = (z_{11}, z_{12}, \ldots z_{1n}, z_{21}, z_{22}, \ldots, z_{2n}, \ldots, z_{n1}, \ldots, z_{nn})$$

donde $A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix}$.Es un isomorfismo de grupos. La demostración es análoga al caso real.

Observemos que la función $\mu : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $\mu(a + ib) = (a, b)$ es un isomorfismo de grupos aditivos. Por lo tanto existe un isomorfismo

$$\alpha: \quad \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n^2}$$

de grupos aditivos. El isomorfismo α induce una topología en $\mathbb{C}^{n^2}$, es decir, un conjunto $U \subset \mathbb{C}^{n^2}$ es abierto si $U = \alpha^{-1}(V)$ donde V es un abierto de $\mathbb{R}^{2n^2}$.

Por otro lado el isomorfismo ψ induce una topología en $M_n(\mathbb{C})$; es decir, un conjunto $W \subset M_n(\mathbb{C})$ es abierto si $W = \psi^{-1}(U)$ donde U es un abierto de $\mathbb{C}^{n^2}$.

Por lo anterior el isomorfismo

$$(\alpha \circ \psi): \quad M_n(\mathbb{C}) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}^{n^2} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^{2n^2}$$

induce una topología a $M_n(\mathbb{C})$. De lo anterior se tienen los siguientes homeomorfismos

$$M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}.$$

Como en $\mathbb{C}^{n^2}$ tenemos un **producto hermitiano** dado por

$$\langle z, y \rangle_H = \sum_{i=1}^{n^2} (z_i \overline{y_i})$$

y una **métrica hermitiana**

$$d_H(z, y) = \|z - y\|_H = \left(\sum_{i=1}^{n^2} (z_i - y_i) \overline{(z_i - y_i)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

con $z = (z_1, \ldots, z_{n^2})$ e $y = (y_1, \ldots, y_{n^2})$ en $\mathbb{C}^{n^2}$; el isomorfismo ψ induce un producto en $M_n(\mathbb{C})$ y una métrica compatibles con las de $\mathbb{C}^{n^2}$, dados por

$$\langle A, B \rangle_H = \sum_{i,j=1}^{n^2} \frac{1}{2} (z_{ij}\, \overline{y_{ij}} + y_{ij} \overline{z_{ij}})$$

y

$$d_H(A, B) = \|A - B\|_H = \left(\sum_{i=1}^{n^2} (z_{ij} - y_{ij}) \overline{(z_{ij} - y_{ij})} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

respectivamente. Donde $A = (z_{ij})$ y $B = (y_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$.

Observemos que si $\alpha(z) = x \in \mathbb{R}^{2n^2}$ y $\alpha(q) = y \in \mathbb{R}^{2n^2}$ entonces la métrica hermitiana en $\mathbb{C}^{n^2}$ es compatible con la métrica en $\mathbb{R}^{2n^2}$.

La función determinante compleja

$$\begin{array}{rccc} Det: & M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & A & \longmapsto & Det(A) \end{array} \quad \text{dada por}$$

es continua, pues es combinación lineal de sus coeficientes.

Definición 47 *Llamamos **grupo general lineal** al conjunto*

$$GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid Det(A) \neq 0\}$$

Nota 6 ***RESULTADOS TOPOLÓGICOS DEL GRUPO*** $GL_n(\mathbb{C})$.

(1) El grupo $GL_n(\mathbb{C})$ es abierto en $M_n(\mathbb{C})$.
(2) El grupo $GL_n(\mathbb{C})$ es $2n^2$ variedad.
(3) El grupo $GL_n(\mathbb{C})$ no es compacto.

Proof. Afirmación (1).

Como la función $Det : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y $\mathbb{C}-\{0\} \subset \mathbb{C}$ es abierto, se tiene que $Det^{-1}(\mathbb{C}-\{0\}) = GL_n(\mathbb{C})$ y por lo tanto abierto.

Afirmación (2).

Sabemos que $M_n(\mathbb{C})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{2n^2}$ y por lo tanto $2n^2$ variedad. Como $GL_n(\mathbb{C})$ es un abierto de $M_n(\mathbb{C})$, se sigue que es $2n^2$ variedad.

Afirmación (3).

Es suficiente ver que no es acotado. Sean $I \in M_n(\mathbb{C})$ la matriz identidad y $z \in \mathbb{C}-\{0\}$, entonces $Det(zI) = z^n 1 = z^n \neq 0$, por lo tanto $zI \in GL_n(\mathbb{C})$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \|zI\|_H &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|z\|_H{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(n\|z\|_H{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{n}\,\|z\|_H \end{aligned}$$

Haciendo tender $\|z\|_H$ a infinito, $\|zI\|_H$ también tiende a infinito, por lo que $GL_n(\mathbb{C})$ no es acotado, y por lo tanto no es compacto. ■

3.5. EL GRUPO UNITARIO $U(n)$.

En esta sección describiremos algunos aspectos topológicos y algebraicos del grupo unitario.

Definición 48 *Una función lineal $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es **unitaria** si preserva distancias, esto es, si $\|T(x)\|_H = \|x\|_H \ \forall\, x \in \mathbb{C}^n$.*

Teorema 49 *Sea una función lineal $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(1) T es unitaria.
(2) $\langle T(x), T(y)\rangle_H = \langle x, y\rangle_H$ para todo x, $y \in \mathbb{C}^n$.
(3) Si $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{C}^n$, entonces

$$\{T(v_1), T(v_2), \ldots T(v_n)\}$$

también es una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

*(4) La matriz A asociada a T es invertible y satisface la condición $A\,\overline{A}^t = I$. Donde $\overline{A}^t$ es la matriz **conjugada transpuesta** de A.*

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2)

Por hipótesis tenemos que $\|T(x)\|_H = \|x\|_H$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Esto implica que $\langle T(x), T(x)\rangle_H = \langle x, x\rangle_H$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Sustituyendo x por $x + y$ obtenemos

$$\langle T(x+y), T(x+y)\rangle_H = \langle (x+y), (x+y)\rangle_H .$$

Usando la propiedad bilineal y simétrica del producto hermitiano obtenemos

$$\begin{aligned} & \langle T(x), T(x)\rangle_H + \langle T(x), T(y)\rangle_H + \langle T(y), T(x)\rangle_H + \langle T(y), T(y)\rangle_H = \\ = \quad & \langle x, x\rangle_H + \langle x, y\rangle_H + \langle y, x\rangle_H + \langle y, y\rangle_H . \\ = \quad & \|T(x)\|_H^2 + \|T(y)\|_H^2 + 2\operatorname{Re}\langle T(x), T(y)\rangle_H \end{aligned}$$

por lo tanto $2\operatorname{Re}\langle T(x), T(y)\rangle_H = 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle_H$ de donde $\operatorname{Re}\langle T(x), T(y)\rangle_H = \operatorname{Re}\langle x, y\rangle_H$. De la segunda igualdad obtenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\langle x, y\rangle_H &= \operatorname{Im}\langle T(x), T(y)\rangle_H \\ \langle x, y\rangle_H &= \langle T(x), T(y)\rangle_H \end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (3)

Sea $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ una base ortonormal para $\mathbb{C}^n$; entonces

$$\langle v_i, v_i\rangle_H = 1 \text{ y } \langle v_i, v_j\rangle_H = 0 \text{ cuando } i \neq j.$$

por (2) tenemos que

$$\langle T(v_i), T(v_i)\rangle_H = 1 \text{ y } \langle T(v_i), T(v_j)\rangle_H = 0 \text{ cuando } i \neq j.$$

por lo tanto $\{T(v_1), T(v_2), \dots T(v_n)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

(3) $\Longrightarrow$ (4)

Sea $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ y $A = (a_{ij})$ la matriz de T con respecto a la base, entonces

$$\begin{aligned} \langle T(v_i), T(v_j)\rangle_H &= \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ki}\ v_k, \sum_{j=1}^n a_{ij}\ v_i \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ki}\ \overline{a_{ij}}\ \langle v_k, v_j\rangle_H \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ki}\ \overline{a_{kj}} = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Luego si $\overline{A}^t = (\overline{a_{ji}})$ tenemos que $A\overline{A}^t = I$.

(4) $\Longrightarrow$ (1)

Si $A\overline{A}^t = I$ entonces $\{T(v_1), T(v_2), \dots T(v_n)\}$ es base ortonormal y luego T es unitaria. ■

Teorema 50 *Sea $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ una función lineal unitaria. Los valores característicos de T son de norma 1 y existe una base ortonormal de vectores característicos de T.*

Proof. Si $v \in T$ es un vector característico de T con valor característico $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle_H &= \langle T(v), T(v) \rangle_H \\ &= \langle \lambda v, \lambda v \rangle_H \\ &= \lambda \overline{\lambda} \langle v, v \rangle_H \\ &= \|\lambda\|_H^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para demostrar la segunda afirmación procedemos por inducción sobre la dimensión de $\mathbb{C}^n$.

Si $\dim \mathbb{C}^n = 1$ la afirmación es inmediata. Supongamos que $\dim \mathbb{C}^n > 1$. Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado existe $v_1 \in \mathbb{C}^n$ eigenvector de T con algún eigenvalor. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\|v_1\|_H = 1$.

Sea W el subespacio de $\mathbb{C}^n$ generado por v_1 entonces $\mathbb{C}^n = W \oplus W^{\perp}$ y $\dim W^{\perp} = \dim \mathbb{C}^n - 1$.

Afirmación: $W^{\perp}$ es invariante bajo T.

Sea $w \in \mathbb{C}^n$ tal que $\langle v_1, w \rangle_H = 0$ luego $0 = \langle v_1, w \rangle_H = \langle T(v_1), T(w) \rangle_H = \langle \lambda v_1, T(w) \rangle_H = \lambda \langle v_1, T(w) \rangle_H$. Por lo tanto $\langle v_1, T(w) \rangle_H = 0$ y $T(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$.

Por hipótesis de inducción sabiendo que la restricción de T a $W^{\perp}$ es unitaria se sigue la demostración al teorema. ■

Definición 51 *Una matriz $A \in GL_n(\mathbb{C})$ es* ***unitaria*** *si $A^{-1} = \overline{A}^t$; entonces A es la matriz de una función unitaria con respecto a una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.*

Corolario 52 *Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ es unitaria, entonces existe otra matriz unitaria B tal que BAB^{-1} es diagonal, con los coeficientes de la diagonal de norma 1.*

Proof. Sea $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la función lineal unitaria correspondiente a A con respecto a la base $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$. Luego existe una base $\{w_1, w_2, \ldots w_n\}$ de eigenvectores ortonormales de A, luego si B es la matriz de cambio de base BAB^{-1} es diagonal y como ambas bases son ortonormales B es unitaria y los elementos de la diagonal son de norma 1. ■

Definamos al conjunto

$$U(n) = \left\{ A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^t \right\}$$

Proposición 53 *El conjunto $U(n)$ es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{C})$.*

Proof. Basta ver que es cerrado bajo el producto. Sean A y $B \in U(n)$ entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \overline{B}^t\overline{A}^t = \left(\overline{AB}\right)^t$ ■

Definición 54 *Al grupo $U(n)$ le llamamos **grupo unitario.***

Lema 55 *Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ es unitaria, entonces $\|Det(A)\|_H^2 = 1$.*

Proof.

$$\begin{aligned} 1 &= Det(I) \\ &= Det\left(AA^{-1}\right) \\ &= Det\left(A\overline{A}^t\right) \\ &= Det\left(A\overline{A}^t\right) \\ &= Det(A)\ Det\left(\overline{A}\right) \\ &= Det(A)\ \overline{Det(A)} = \|Det(A)\|_H^2 \end{aligned}$$

por lo tanto $\|Det(A)\|_H^2 = 1$. ■

Ejemplo 56 *El grupo unitario $U(1)$ es isomorfo a la circunferencia S^1.*

Proof. Sea $A = [z] \in U(1)$ con $z = a+ib$. Como $Det(A) = z$ y $\|Det(A)\|_H^2 = 1$ se tiene que $\|z\|_H^2 = a^2 + b^2 = 1$. Por lo tanto $U(1)$ es isomorfo a S^1. ■

La estructura general de una matriz $A \in U(n)$ se obtiene del siguiente teorema.

Teorema 57 *Toda matriz unitaria A es similar o conjugada a una de la forma*

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad con\ \ \|\lambda_i\|_H^2 = 1$$

es decir, $A = XBX^{-1}$ con $X \in U(n)$.

Proof. Ver la demostración en [GMA] pagina. 120. ■

3.6. EL GRUPO ESPECIAL UNITARIO.

En esta sección describiremos algunos aspectos topológicos y algebraicos del grupo especial unitario.

Definamos el conjunto

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid Det(A) = 1\}$$

Proposición 58 *El conjunto $SU(n)$ es un subgrupo de $U(n)$.*

Proof. Basta ver que es cerrado bajo el producto. Sean A y $B \in SU(n)$ entonces

$$\begin{aligned} Det(AB) &= Det(A)\, Det(B) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Definición 59 *Al grupo $SU(n)$ le llamamos* ***grupo especial unitario.***

Nota 7 ***RESULTADOS IMPORTANTES DEL GRUPO*** $SU(n)$.

(1) *El grupo $SU(1)$ es el grupo trivial.*

(2) *El grupo $SU(n)$ es compacto.*

(1) *El grupo $SU(1)$ es el grupo trivial.*

Proof. *Sea $A = [z] \in SU(1)$ con $z = a + ib$. Como $Det(A) = z = 1$, se tiene que $a + ib = 1$. Por lo tanto, $a = 1$ y $b = 0$ de donde $SU(1)$ es el grupo trivial.*

(2) *El grupo $SU(n)$ es compacto.*

Como el conjunto $\{1\}$ es cerrado en $\mathbb{C}$ y la función Det es continua, se tiene que $Det^{-1}(\{1\}) = SU(n)$ el cual es cerrado. Por otro lado se tiene que $SU(n) \subset U(n)$ y $U(n)$ es compacto, por lo tanto $SU(n)$ es compacto. ■

Observemos que para $A \in SU(2)$, se cumple que si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \overline{A}^t$$

usando lo anterior, la matriz $A \in SU(2)$ se puede ver como

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

que tiene determinante $a\overline{a} + b\overline{b} = \|a\|_H^2 + \|b\|_H^2 = 1$. En otras palabras es isomorfo al grupo S^1.

4. GRUPOS ESPINORIALES Y GRUPO FUNDAMENTAL DE $SO(N)$.

4.1. GRUPOS ESPINORIALES.

En esta sección se describiran algunos aspectos algebraicos de los grupos espinoriales y se darán algunos ejemplos importantes de éstos.

Consideremos el **grupo multiplicativo de unidades** en el álgebra de Clifford $Cl(V,q)$, definido por el conjunto

$$Cl^{\times} = \left\{x \in Cl(V,q) \mid \text{para todo } x, \text{ existe } x^{-1} \text{ con } xx^{-1} = x^{-1}x = 1\right\}$$

Este grupo contiene todos los elementos $v \in V$ con $q(v) \neq 0$.

Por lo anterior, considerando las álgebras de Clifford C_n, se cumple que para cada $v \in \iota_{q_{(n,0)}}(\mathbb{R}^{n+0}) = \mathbb{R}^{n+0} \subset C_n$;todos los elementos $q_{(n,0)}(v) \neq 0$ son invertibles en C_n. Análogo para las álgebras C_m^*.

Definición 60 *Definamos la* ***n-esfera*** *como el conjunto*

$$S^n = \left\{x = a_1e_1 + ... + a_ne_n + a_{n+1}e_{n+1} \mid a_1^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2 = 1, \text{ } con \text{ } a_i \in \mathbb{R}\right\}$$

Observemos que $S^n \subset \mathbb{R}^{(n+1)+0}$.

Proposición 61 *Los elementos de la esfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+0}$ son unidades.*

Proof. Sea $x = a_1e_1 + ... + a_ne_n \in S^{n-1}$, definimos su inverso como

$$\begin{aligned} x^{-1} &= [(-a_1)e_1 + ... + (-a_n)e_n] \text{, y es tal que} \\ (-a_1)^2 + ... + (-a_n)^2 &= a_1^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

por lo tanto $x^{-1} \in S^{n-1}$. Por otro lado

$$\begin{aligned} xx^{-1} &= (a_1e_1 + ... + a_ne_n)\left[(-a_1)e_1 + ... + (-a_n)e_n\right] \\ &= (a_1e_1 + ... + a_ne_n)\left[-1\left(a_1e_1 + ... + a_ne_n\right)\right] \\ &= a_1^2\left(-(e_1)^2\right) + \cdots a_n^2\left(-(e_n)^2\right) \\ &= a_1^2(-(-1)) + ... + a_n^2(-(-1)) \\ &= a_1^2 + ... + a_n^2 + a_n^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Por lo anterior, para cada x definimos su inverso x^{-1}como $-x$, el cual coincide con el conjugado de x, es decir, si

$$x = a_1e_1 + ... + a_ne_n \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+0} \subset C_n,$$

podemos ver a x incluido en C_n de donde,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \overline{a_1e_1 + ... + a_ne_n} \\
&= -(a_1e_1) - \cdots - (a_ne_n) \\
&= -(a_1e_1 + ... + a_ne_n) \\
&= -x
\end{aligned}$$

Observemos que si consideramos el caso en que

$$y \in S^{m-1} \subset \mathbb{R}^{0+m} \subset C_m^*$$

entonces $y^{-1} = y$.

Analizaremos ahora un subgrupo especial del grupo multiplicativo de unidades correspondiente a las álgebras de Clifford C_n.

Definición 62 (1) *Definamos $Pin(n)$ al subgrupo de $Cl^\times$ generado por la esfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+0}$. Este grupo se llama el **Grupo de Clifford de grado** n*

(2) *El subgrupo de $Pin(n)$ que consiste de los elementos pares lo denotamos por $Spin(n)$ y se llama el **Grupo Espinorial de grado** n.*

Por la definición (1) todo elemento u de $Pin(n)$ puede ser representado (en general no es único) como un producto finito $u = x_1x_2x_3 \cdots x_n$ con $x_i \in S^{n-1}$ para todo $i = 1, ..., n$. Por la definición (2), $u \in Spin(n)$, es par si $u = x_1x_2x_3 \cdots x_n$ con n par.

Ejemplo 63 *Calculemos los primeros casos de los grupos de Clifford.*

Proof. (1) Para $n = 1$.

(i) La 0 esfera es $S^o = \{a_1e_1 \mid a_1^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{1+0} \subset C_1$ con generador e_1. La condición $a_1^2 = 1$ implica que $a_1 = \pm 1$, por lo tanto $S^o = \{-e_1, e_1\}$.

(ii) $Pin(1)$ esta generado por los elementos de S^o. Los posibles productos se obtienen de las siguientes relaciones

$$-e_1e_1 = e_1(-e_1) = 1 \text{ y } (e_1)^2 = (-e_1)^2 = -1$$

por lo tanto $Pin(1) = \{-e_1, e_1, -1, 1\}$.

(2) Para $n = 2$

(i) La 1−esfera es $S^1 = \{ae_1 + be_2 \mid a^2 + b^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{2+0} \subset C_2 \approx \mathbb{H}$ con generadores e_1 y e_2.

(ii) El grupo $Pin(2)$ esta generado por los elementos de S^1. Así, si $x = ae_1 + be_2$ e $y = ce_1 + de_2$ están en S^1 entonces

$$\begin{aligned} xy &= (ae_1 + be_2)(ce_1 + de_2) \\ &= ace_1^2 + ade_1e_2 + bce_2e_1 + bde_2^2 \\ &= ace_1^2 + bde_2^2 + ade_1e_2 + bce_2e_1 \\ &= -ac - bd + ade_1e_2 + bce_2e_1 \\ &= -(ac + bd) + (ad - bc)\, e_1e_2 \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} (-(ac+bd))^2 + (ad-bc)^2 &= (ac)^2 + 2acbd + (bd)^2 + (ad)^2 - 2adbc + (bc)^2 \\ &= (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + 2acbd - 2adbc \\ &= \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

por lo tanto $Pin(2) = S^1 \cup S'$ con $S' = \{r + s\,(e_1e_2) \mid r^2 + s^2 = 1\}$.

(3) Para $n = 3$

(i) La 2$-$esfera es $S^2 = \{ae_1 + be_2 + ce_3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{3+0} \subset C_3 \approx \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ con generadores e_1, e_2 y e_3.

(ii) $Pin(3)$ esta generado por los elementos de S^2. Así, si $x = ae_1 + be_2 + ce_3$ e $y = de_1 + fe_2 + ge_3$ están en S^2, entonces

$$xy = (ae_1 + be_2 + ce_3)(de_1 + fe_2 + ge_3)$$
$$xy = -(ad + bf + cg)1 + (af - db)e_1e_2 + (bg - cf)e_2e_3 + (ag - cd)e_1e_3$$

claramente $e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3 \in \mathbb{H}$, por lo tanto, se cumple que

$$\begin{aligned} xy &= -(ad + bf + cg)1 + (af - db)e_1e_2 + (ag - cd)e_1e_3 + (bg - cf)e_2e_3 \\ xy &= a_1 + a_2i + a_3j + a_4k. \end{aligned}$$

con $a_1 = -(ad + bf + cg), a_2 = (af - db), a_3 = (ag - cd)$ y $a_4 = .(bg - cf)$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} a_1^2 &= (-(ad + bf + cg))^2 \\ &= (ad)^2 + 2adbf + (bf)^2 + 2adcg + 2bfcg + (cg)^2 \\ a_2^2 &= (af - db)^2 \\ &= (af)^2 - 2afdb + (db)^2 \\ a_3^2 &= (ag - cd)^2 \\ &= (ag)^2 - 2agcd + (cd)^2 \\ a_4^2 &= (bg - cf)^2 \\ &= (bg)^2 - 2bgcf + (cf)^2 \end{aligned}$$

Sumando las igualdades tenemos que

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$$

Por lo tanto, $Pin(3) = S^2 \cup S^3$ donde

$$S^3 = \left\{a1 + b\,(e_1e_2) + c\,(e_2e_3) + d\,(e_1e_3) \,/\, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\right\}.$$

■

Ejemplo 64 *Ejemplos de los primeros grupos espinoriales.*

Proof. Usando los ejemplos de los grupos de Clifford $Pin(n)$ anteriores tenemos que:

(1) Para el caso $n = 1$. $Spin(1)$ consta de los elementos pares de $Pin(1)$ y estos cumplen bajo el producto las relaciones

$$-1 = e_1^2 = (-e_1)^2 \text{ y } 1 = -e_1e_1 = e_1(-e_1).$$

por lo tanto $Spin(1) = \{-1, 1\} \approx \mathbb{Z}_2$.

(2) Para el caso $n = 2$. $Spin(2)$ consta de los elementos pares de $Pin(2)$, por lo que $Spin(2) = S'$ con

$$S' = \left\{r + s\,(e_1e_2) \,/\, r^2 + s^2 = 1\right\}.$$

(3) Para el caso $n = 3$. $Spin(3)$ consta de los elementos pares de $Pin(3)$, por lo que $SPin(3) = S^3$ con

$$S^3 = \left\{a + b\,(e_1e_2) + c\,(e_2e_3) + d\,(e_1e_3) \,/\, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\right\}$$

■

Usando el automorfismo canónico $\alpha : Cl\,(V, q) \longrightarrow Cl\,(V, q)$ y el anti-automorfismo conjugación $\zeta : Cl\,(V, q) \longrightarrow Cl\,(V, q)$ [1]. Podemos construir una nueva función

$$\begin{array}{rcll} \varphi_u : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \quad \text{dada por} \\ \varphi_u\,(x) & = & \alpha\,(u)\,x\overline{u} & \end{array}$$

para cualquier $u \in Pin\,(n)$ y cualquier $x \in \mathbb{R}^n$. Esta función cumple las siguientes propiedades.

Proposición 65 *Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(1) φ_u *es una función lineal.*

(2) $\varphi_{uv} = \varphi_u\varphi_v$ *con* u, $v \in Pin\,(n)$.

(3) $\varphi_{u^{-1}}\varphi_u = \varphi_u\varphi_{u^{-1}} = \varphi_1 = I_{\mathbb{R}^n}$. *Con* $1, u, u^{-1}$ *en* $Pin_{\varepsilon}\,(n)$ *e* $I_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^{\,n} \longrightarrow \mathbb{R}^{\,n}$ *la función identidad.*

(4) $\varphi_u \circ I_{\mathbb{R}^n} = I_{\mathbb{R}^n}\varphi_u = \varphi_u$.

[1] Vease sus definiciones en el primer capítulo.

Proof. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Además $v, u, u^{-1}, 1$ en $Pin_\varepsilon(n)$ y $r \in \mathbb{R}$.

Probemos (1)

$$\begin{aligned}
\varphi_u(x+y) &= \alpha(u)(x+y)\overline{u} \\
&= (\alpha(u)x + \alpha(u)y)\overline{u} \\
&= \alpha(u)x\overline{u} + \alpha(u)y\overline{u} \\
&= \varphi_u(x) + \varphi_u(y). \\
\varphi_u(rx) &= \alpha(u)(rx)\overline{u} \\
&= r\alpha(u)(x)\overline{u} \\
&= r(\varphi_u(x))
\end{aligned}$$

Afirmación (2)

$$\begin{aligned}
\varphi_{uv}(x) &= \alpha(uv)x\overline{uv} \\
&= (\alpha(u)\alpha(v))x\overline{uv} \\
&= \alpha(u)[\alpha(v)x]\overline{v}\overline{u} \\
&= \alpha(u)[\alpha(v)x\overline{v}]\overline{u} \\
&= \alpha(u)[\varphi_v(x)]\overline{u} \\
&= \varphi_u(\varphi_v(x)) \\
&= \varphi_u\varphi_v(x).
\end{aligned}$$

Afirmación (3)

$$\begin{aligned}
\varphi_u\varphi_{u^{-1}}(x) &= \varphi_{uu^{-1}}(x) \\
&= \varphi_1(x) \\
&= \alpha(1)x\overline{1} \\
&= 1x1 \\
&= x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{u^{-1}}\varphi_u(x) &= \varphi_{u^{-1}u}(x) \\
&= \varphi_1(x) \\
&= x.
\end{aligned}$$

Afirmación (4)

$$\begin{aligned}
\varphi_u I_{\mathbb{R}^n}(x) &= \varphi_u(I_{\mathbb{R}^n}(x)) \\
&= \varphi_u(x) \\
&= \alpha(u)x\overline{u}. \\
I_{\mathbb{R}^n}\varphi_u(x) &= I_{\mathbb{R}^n}(\varphi_u(x)) \\
&= I_{\mathbb{R}^n}(\alpha(u)x\overline{u}) \\
&= \alpha(u)x\overline{u}.
\end{aligned}$$

■

Usando el hecho de que tenemos la base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ para $\mathbb{R}^n$ y por la proposición anterior,existe un homorfismo del grupo $Pin(n)$ al grupo de operadores lineales invertibles. A saber

$$\begin{aligned}
\varphi: \quad Pin(n) &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{dada por} \\
\varphi(u) &= \varphi_u.
\end{aligned}$$

Proposición 66 *Para todo $u \in Pin(n)$, el homomorfismo φ_u es* ***Ortogonal,*** *es decir, preserva distancias.*

Proof.

$$\begin{aligned}
\|\varphi_u(x)\| &= \varphi_u(x)\,\varphi_u(x) \\
&= [\alpha(u)\,x\overline{u}]\,[\alpha(u)\,x\overline{u}] \\
&= (-ux\overline{u})\,(-ux\overline{u}) \\
&= -ux\,[\overline{u}\,(-u)]\,x\overline{u} \\
&= -ux\,[-(\overline{u}u)]\,x\overline{u} \\
&= -ux\,\left[-\left(u^{-1}u\right)\right]\,xu^{-1} \\
&= ux\cdot 1\cdot xu^{-1} \\
&= u\,\langle x, x\rangle\,u^{-1} = u\,\|x\|\,u^{-1} = \|x\|\,uu^{-1} \\
&= \|x\|
\end{aligned}$$

■

Por la proposición anterior φ induce un homomorfismo en el grupo ortogonal

$$\varphi : Pin(n) \longrightarrow O(n).$$

Definición 67 *Una* ***Reflexión*** *a lo largo de un vector $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$ es la transformación lineal dada por la fórmula*

$$\rho_v(x) = x - \frac{2\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}x.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$.Geometricamente, ρ_v es la reflexión respecto al hiperplano $\{v\}^1$ donde $\{v\}^1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v\rangle = 0\}$. Esto es, el hiperplano $\{v\}^1$ sirve de "espejo" al vector v, ya que $\rho_v(v) = -v$. Si x es ortogonal a v ($x \perp v$), se tiene que $\langle x, v\rangle = 0$ y en consecuencia $\rho_v(x) = x$.

Proposición 68 *Sea $u \in S^{n-1} \subset Pin(n)$, con $u \neq 1$ y $u \neq -1$, entonces el homomorfismo φ_u es una reflexión en $\mathbb{R}^n$ en el hiperplano perpendicular a u.*

Proof. Consideremos la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$dada por $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ con $u_1 = u$. Así, aplicamos φ_u

$$\begin{aligned}
&\varphi_u(u_i) = \alpha(u)\,u_i\overline{u} = -uu_i\overline{u}. \\
&\text{Si } i = 1, \text{ entonces } -uu_i\overline{u} = -uu\overline{u} = -u(u\overline{u}) = -u, \\
&\text{si } i \neq 1, \text{ entonces } -uu_i\overline{u} = u_iu\overline{u} = u_i.
\end{aligned}$$

Por lo tanto φ_u es reflexión. ■

Proposición 69 *El homomorfismo $\varphi : Pin(n) \longrightarrow O(n)$ es un epimorfismo y el kernel* $\ker(\varphi) = \{1, -1\}$.

Proof. Para demostrar que es epimorfismo se dara por hecho que $O(n)$ está generado por reflexiones.[2]

Para todo $u \in Pin(n)$, φ_u manda $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ y sabemos que φ_u es ortogonal y es producto de reflexiones. Esto prueba que es sobreyectiva. Para demostrar que $\ker\varphi = \{-1,1\}$, demostrémoslo por contenciones:

$i)$ $\{-1,1\} \subset \ker\varphi$ pues:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \alpha(1)\,x\overline{1} \\ &= 1x\overline{1} = x \\ \varphi_{-1}(x) &= \alpha(-1)\,x\overline{1} \\ &= -(-1)\,x1 \\ &= 1x1 = x, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\varphi_1 = \varphi_{-1} = I_{\mathbb{R}^n}$.

$ii)$ $\ker\varphi \subset \{-1,1\}$.

Supongamos que $u \in \ker\varphi$ con $u \neq \pm 1$ esto implica que $u = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{ir}$ con $r > 1$ y que $\varphi_u = I_{\mathbb{R}^n}$ es decir $\varphi_u(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\begin{aligned} x &= \varphi_u(x) \\ &= \alpha(u)\,x\overline{u} \\ &= \alpha(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r})\,x\left[(-1)^r e_{i_r}e_{i_{r-1}}\cdots e_{i_1}\right] \\ &= \alpha(e_{i_1})\alpha(e_{i_2})\cdots\alpha(e_{i_r})x\left[(-1)^r e_{i_r}e_{i_{r-1}}\cdots e_{i_1}\right] \\ &= (-1)^r(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r})\,x\left[(-1)^r e_{i_r}e_{i_{r-1}}\cdots e_{i_1}\right] \\ &= (-1)^r(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r})\,x\left[(-1)^r e_{i_r}e_{i_{r-1}}\cdots e_{i_1}\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos la igualdad

$$(-1)^r(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r})\,x = x\,(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}).$$

En particular si $x = e_{i_1}$

$$(-1)^r(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r})\,e_{i_1} = e_{i_1}\,(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r})$$

donde

$$\begin{aligned} (-1)^r(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r})\,e_{i_1} &= (-1)^r\left(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{r-1}}\right)e_{i_r}e_{i_1} \\ &= (-1)^r(-1)\left(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{r-1}}\right)e_{i_1}e_{i_r} \\ &= (-1)^r(-1)\left(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{r-2}}\right)e_{i_{r-1}}e_{i_1}e_{i_r} \\ &= (-1)^r(-1)(-1)\left(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{r-2}}\right)e_{i_1}e_{i_{r-1}}e_{i_r} \\ &= (-1)^r(-1)^2\left(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{r-2}}\right)e_{i_1}e_{i_{r-1}}e_{i_r} \end{aligned}$$

continuando con este proceso $r-1$ veces, tenemos

$$\begin{aligned} (-1)^r(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r})\,e_{i_1} &= (-1)^r(-1)^{r-1}e_{i_1}e_{i_1}\left(e_{i_2}e_{i_3}\cdots e_{i_{r-2}}e_{i_{r-1}}e_{i_r}\right) \\ &= (-1)^r(-1)^{r-1}(-1)\left(e_{i_2}e_{i_3}\cdots e_{i_{r-2}}e_{i_{r-1}}e_{i_r}\right) \end{aligned}$$

---

[2] Consúltese una demostración de que $O(n)$ está generado por reflexiones en [MC] página 119 o en [WC] página 290.

y por el otro lado de la igualdad

$$\begin{aligned} e_{i_1}(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}) &= e_{i_1}e_{i_1}(e_{i_2}\cdots e_{i_r}) \\ &= (-1)(e_{i_2}\cdots e_{i_r}) \end{aligned}$$

de donde concluimos que:

$$\begin{aligned} (-1)^r(-1)^{r-1}(-1)(e_{i_2}\cdots e_{i_r}) &= (-1)(e_{i_2}\cdots e_{i_r}) \\ (-1)^{2r-1}(e_{i_2}\cdots e_{i_r}) &= 1(e_{i_2}\cdots e_{i_r}) \end{aligned}$$

y esta igualdad es cierta si y solo si

$$(-1)^{2r-1} = 1,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $u = \pm 1$ y así concluimos que $\ker \varphi = \{-1, 1\}$. ■

Definición 70 *Sea el homomorfismo* $\varphi : Pin(n) \longrightarrow O(n)$, *definimos el grupo espinorial en términos de* φ *como*

$$Spin(n) = \varphi^{-1}(SO(n)).$$

Restringiendo a φ de la proposición anterior, al subgrupo $Spin(n)$. El morfismo φ induce un morfismo

$$\begin{aligned} \varphi_o : \ Spin(n) &\longrightarrow SO(n) \quad \text{dado por} \\ \varphi_o(u) &= \varphi_u. \end{aligned}$$

Es decir, si $u \in Spin(n)$ con $u = u_1u_2\cdots u_r$ y r par, entonces $\varphi_u = \varphi_{u_1}\varphi_{u_2}\varphi_{u_r} \in SO(n)$. Por la definición y proposición anterior el morfismo φ_o es epimorfismo.

Proposición 71 *El centro de* φ_o *es el conjunto* $\{-1, 1\}$.

Proof. Claramente $\ker \varphi_o \subset \{-1, 1\}$, pues, si $u \in \ker \varphi_o \Longrightarrow ue_i = e_iu$ para cualquier $i = 1, 2, ..., n$; entonces $u \in Z(C_n)$. Pero como u es par, entonces $u \in R$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi_u(x) &= -uxu \\ &= -u(-u)x \\ &= u^2x. \end{aligned}$$

Es decir: $\varphi_u = u^2 I_{\mathbb{R}}$; y en consecuencia, por ser φ_u ortogonal, $u = \pm 1$. La contención $\{-1, 1\} \subset \ker \varphi_o$ es análoga a la demostración del $\ker \varphi$, de la proposición anterior. ■

4.2. GRUPO FUNDAMENTAL DE $SO(n)$.

En esta sección calcularemos el grupo fundamental de $SO(n)$, para ésto usaremos resultados de los capítulos anteriores y conceptos básicos de grupos de Lie. Como nuestra intención es el cálculo del grupo fundamental, no profundizaremos el tema de grupos de Lie, únicamente usaremos lo necesario para nuestro cálculo.

Definición 72 *Sean $\pi : X \longrightarrow Y$ una función sobreyectiva continua y $U \subset Y$ abierto, decimos que U es* **cubierto uniformemente** *por π si se cumple lo siguiente:*

(i) Existe una familia disjunta de abiertos $\{u_i\}_{i\in I}$ de X tal que $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup u_i$.

(ii) El morfismo $\pi|_{u_i}: u_i \longrightarrow U$ es homeomorfismo, para todo $i \in I$.

La función π se dice que es una **cubierta** de Y si dado cualquier $y_0 \in Y$ existe V_{y_0} vecindad abierta de y_0 cubierta uniformemente por π. En este caso, a X se le llama **espacio cubriente.** Cuando $\pi : X \longrightarrow Y$ es homeomorfismo, se llama **cubierta trivial.** Si cualquier cubierta de Y es trivial, decimos que Y es **simplemente conexo.**

Definición 73 *Sea G al mismo tiempo un grupo y una $n-$variedad, decimos que G es un* **grupo de Lie** *si las operaciones*

$$\begin{array}{rccc} & \rho : G \times G & \longrightarrow & G \\ \textit{dada por} & \rho(a,b) & = & ab \\ & y & & \\ & \tau : G & \longrightarrow & G \\ \textit{dada por} & \tau(a) & = & a^{-1} \end{array}$$

son suaves en la estructura del grupo.

Considerando la primera definición pero con X y Y grupos conexos de Lie,el epimorfismo entre estos $\pi : X \longrightarrow Y$ suave, y las restricciones (del inciso (ii)) difeomorfismos. Entonces al morfismo π se le llama **cubierta de grupos.** En este caso al grupo X se le llama **grupo cubriente.** Diremos que una cubierta $\pi : X \longrightarrow Y$ de un grupo de Lie Y es **universal**, si para toda cubierta de grupos $\pi_1 : Z \longrightarrow Y$ existe un único morfismo de grupos de Lie $f : X \longrightarrow Z$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Z \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

es decir, $\pi_1 f = \pi$.

Por los resultados de la sección anterior, observemos que el grupo $Spin(n)$ para $n > 1$ es conexo y el homomorfismo φ_o de la proposición 4.1.7 es epimorfismo, por lo tanto φ_o es cubierta de grupo. Por otro lado, la imagen inversa de cualquier punto bajo la cubierta φ_o consiste de dos elementos. Esta clase de cubierta es llamada **Doble Cubierta.**

El hecho de que $SO(n)$ tiene una cubierta no trivial, implica que $SO(n)$ no es simplemente conexo, por definición.

Proposición 74 *Para cualquier $n \geqslant 2$ la n-esfera S^n es simplemente conexa.*

Proof. Para la demostración se dará por hecho, que un espacio topológico X es simplemente conexo, si para U y V abiertos, conexos y simplemente conexos, se cumple que $X = U \cup V$ y $U \cap V$ es conexo.[3]

Sean p y q dos puntos antipodales de la esfera S^n y sea $U = S^n - \{p\}$ y $V = S^n - \{q\}$ dos conjuntos abiertos de S^n. Estos abiertos son homeomorfos a un cubo abierto $n-$dimensional (por ser S^n una n-variedad). Y son por lo tanto simplemente conexos. La intersección $U \cap V = S^n - \{p\} \cup \{q\}$ conexa para $n - 1 \geqslant 2$. Por lo tanto $S^n = U \cup V$ es simplemente conexa. ■

Consideremos la función $\phi : SO(n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que asocia la última columna de cada matriz. La imagen de $SO(n)$ bajo la función ϕ, consiste de todos los vectores del espacio $\mathbb{R}^n$ de norma 1 y puede ser identificado con la esfera S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$; es decir:

$$\begin{array}{rccl} \phi : & SO(n) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \quad \text{dada por} \\ & \phi(A) & = & V \quad \text{con } \|V\| = 1. \end{array}$$

De esta manera $SO(n)$ se identifica con $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. La imagen inversa de todos estos vectores en $SO(n)$ es una clase relativa al subgrupo $SO(n-1)$, que es la imagen inversa del vector $(0, 0, ..., 0, 1) \in S^{n-1}$. Consecuentemente la función ϕ induce una función biyectiva

$$\delta : SO(n) / SO(n-1) \longrightarrow S^{n-1},$$

Es decir, tenemos la identificación $SO(n) / SO(n-1)$ con S^{n-1} y usando la proposición anterior sabemos que S^{n-1} es simplemente conexo para $n \geq 3$.

Definición 75 *Sea $\pi : H \longrightarrow G$ cubierta universal de grupo . El centro de π, definido por el grupo de Lie G, es llamado el* ***grupo fundamental*** *de G o* ***grupo de poincaré*** *de G; y lo denotamos por $\Pi_1(G)$.*

Proposición 76 *Dado cualquier subgrupo cerrado conexo H de un grupo de Lie G conexo, donde el cociente F/H es una variedad simplemente conexa. Entonces el grupo fundamental $\Pi_1(G)$ de G es $(\Pi_1(G))$, es un grupo factor del grupo fundamental $\Pi_1(H)$ del grupo de Lie H.*

[3] Ver una demostración de este hecho en [MP] página 170.

Proof. Sea F un grupo cubriente simplemente conexo de G; y sea $\pi : F \longrightarrow G$ la cubierta de grupos correspondiente. La imagen inversa $\pi^{-1}(H) = H_\pi$ es cerrado en F (pues π es continua). Más aún la función inducida por π que va de F/H_π en G/H es un difeomorfismo. Por lo tantoF/H_π también es simplemente conexo y por lo tanto se tiene que H_π es conexo.

Por lo tanto, la restricción $\pi : H_\pi \longrightarrow H$ es una cubierta que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & H_\pi \\ {}_\rho\searrow & & \swarrow_{\pi_H} \\ & H & \end{array}$$

donde $\rho : M \longrightarrow H$ es una cubierta universal del grupo de Lie H. La función $\pi : H_\pi \longrightarrow H$ (que en si misma es una cubierta) es un epimorfismo; y por lo tanto induce un epimorfismo del $\ker \rho$ sobre el $\ker \pi_H$. Esto es precisamente lo que queríamos probar, pues por definición $\Pi_1(H) = \ker \rho$; y $\Pi_1(G) = \ker \pi = \ker \pi_H$. ■

Usando la proposición anterior, para cualquier $n \geq 3$, el grupo fundamental $\Pi_1(SO(n))$ es el grupo factor del grupo $\Pi_1(SO(3))$. Por lo tanto es suficiente calcular únicamente el grupo fundamental $\Pi_1(SO(3))$.

Consideremos al conjunto de los números cuaterniones imaginarios puros

$$\mathbb{H}^* = \left\{ai + bj + dk \mid i^2 = j^2 = k^2 = -1\right\}.$$

Para todo $q \in \mathbb{H}^*$ se cumple que $\overline{q} = -q$. Por otro lado, el grupo de unidades es la $3-$esfera $S^3 \subset \mathbb{H}^*$; pues sabemos que si $x \in S^3$ entonces $\overline{x} = x^{-1}$ (ver la primera sección de éste capìtulo).

Para todo $x \in S^3$ y $q \in \mathbb{H}^*$ se cumple que

$$\begin{aligned} \left(\overline{xqx^{-1}}\right) &= \overline{x^{-1}}\left(\overline{xq}\right) \\ &= \overline{x^{-1}}\;\overline{q}\;\overline{x} \\ &= x\;\overline{q}\;\overline{x} \\ &= -xqx^{-1} \\ &= -\left(xqx^{-1}\right) \end{aligned}$$

por lo tanto $xqx^{-1} \in \mathbb{H}^*$.

Proposición 77 *Para cualesquiera números cuaternios $x \in S^3$ y $q \in \mathbb{H}^*$ definamos la función*

$$\begin{array}{rccc} & \varphi_x : \mathbb{H}^* & \longrightarrow & \mathbb{H}^* \\ \textit{dada por} & \varphi_x(q) & = & xqx^{-1}. \end{array}$$

entonces φ_x cumple las siguientes propiedades. (1) *φ_x es una función lineal.*
(2) *φ_x es ortogonal.*

Proof. Afirmación (1)

Si consideramos q, $p \in \mathbb{H}^*$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi_x(p+q) &= x(p+q)x^{-1} \\ &= (xp+xq)\,x^{-1} \\ &= xpx^{-1}+xqx^{-1} \\ &= \varphi_x(p)+\varphi_x(q)\,.\end{aligned}$$

Afirmación (2)

Es suficiente ver que preserva distancias.

$$\begin{aligned}\|\varphi_x(q)\| &= \|xqx^{-1}\| \\ &= \|x\|\,\|q\|\,\|x^{-1}\| \\ &= 1\,\|q\|\,1 \\ &= \|q\|\,.\end{aligned}$$

■

Por otro lado existe una identificación natural del conjunto $\mathbb{H}^*$ con el espacio $\mathbb{R}^3$,es decir, para cada $ai+bj+ck \in \mathbb{H}^*$ lo identificamos con $ae_1+be_2+ce_3 \in \mathbb{R}^3$, esta identificación induce un homomorfismo del grupo S^3 al grupo ortogonal $O(3)$ definido como

$$\begin{array}{rccc} & \varphi : S^3 & \longrightarrow & O(3) \\ \text{dado por} & \varphi(x) & = & \varphi_x.\end{array}$$

Tal que $\varphi_{xy}=\varphi_x\varphi_y$.Pues si $q\in\mathbb{H}^*$,

$$\begin{aligned}\varphi_{xy}(q) &= (xy)\,q\,(xy)^{-1} \\ &= (xy)\,q\,(y^{-1}x^{-1}) \\ &= x\left(yqy^{-1}\right)x^{-1} \\ &= x\left(\varphi_y(q)\right)x^{-1} \\ &= \varphi_x\left(\varphi_y(q)\right) \\ &= \varphi_x\varphi_y(q)\,.\end{aligned}$$

Más aún, el hecho de que S^3 es un grupo conexo, implica que el homomorfismo φ tiene su imagen dentro del grupo conexo $SO(3)$.

Lema 78 *Sea $\mu : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos conexos de Lie. Si su centro $K=\ker\mu$ es discreto y $\dim G=\dim H$, entonces μ es cubierta de grupo; y por lo tanto es un epimorfismo.*

Proof. Como el centro de μ es discreto. El homomorfismo considerado como una función sobre su imagen $\mu(G)$ es isomorfo a G/K, es decir, $\mu : G \longrightarrow .G/K$ es cubierta de grupo. Por lo tanto, es únicamente necesario probar que $\mu(G)=H$. Como la $dim\mu(G)=\dim G=\dim H$ la identidad $e\in\mu(G)$ es un punto interior de el subgrupo $\mu(G)$, es decir, existe U_e vecindad abierta de e en H tal que $U\subset\mu(G)$. Por conexidad del grupo H, la vecindad U_e genera a H. Por lo tanto $\mu(G)=H$. ■

Proposición 79 *El homomorfismo $\phi : S^3 \longrightarrow SO(3)$ es un epimorfismo, y el grupo de segundo orden $\{1, -1\}$ es el centro de ϕ.*

Proof. Como la dimensión de S^3es igual a $\dim SO(3)$, por el lema anterior es suficiente probar únicamente que $\{1, -1\}$ es el centro de ϕ. Pero si $x \in Ker\phi$, entonces para los cuaternios unitarios i, j, k tenemos $xi = ix$, $xj = jx$, $xk = kx$ entonces $x \in Z(\mathbb{H})$, esto implica que $x \in \mathbb{R}$ y como $\|x\| = 1$ entonces $x = \pm 1$. Por tanto $Ker\phi = \{1, -1\}$. Por lo tanto $\phi : S^3 \longrightarrow SO(3)$ es cubierta de grupos. ■

La proposición anterior implica que la función $\phi : S^3 \longrightarrow SO(3)$ es una doble cubierta de grupo; es decir, tiene dos componentes. Una donde está el 1 y otra el -1. Como la esfera S^3 es simplemente conexa, ϕ es cubierta universal. Por lo tanto $\Pi_1 SO(3) = Z_2$, por lo que el grupo $\Pi_1 SO(n)$ con $n \geq 3$ es un grupo factor de Z_2. Pero Z_2 es un grupo no trivial, por lo tanto con $n \geq 3$, el grupo fundamental $\Pi_1 SO(n)$ es el grupo de segundo orden Z_2.

Cuando $n = 1$ el grupo $SO(1)$ es grupo unitario.

Cuando $n = 2$ el grupo de Lie $SO(2)$ es isomorfo el círculo S^1, por lo tanto el grupo $\Pi_1 SO(2)$ es isomorfo al grupo de los números enteros $\mathbf{Z}$.[4]

Con los resultados anteriores podemos construir la siguiente sucesión exacta corta

$$\{1\} \longrightarrow Z_2 \xrightarrow{i} S^3 \xrightarrow{\phi} SO(3) \longrightarrow \{I\},$$

donde i es la inclusión natural e I es la transformación identidad.

[4] Consultese la demostración de este hecho en [CK].

5. EL GRUPO DE LORENTZ.

En este capítulo estudiaremos una aplicación importante a la Física usando los resultados de los capítulos anteriores.

Consideremos $\mathbb{R}^4$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; y la función

$$\begin{array}{rcll} q: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \quad \text{dada por} \\ & q(v) & = & \langle v, v \rangle_{\mathrm{M}} \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{M}} & : & \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle v, v \rangle_{\mathrm{M}} & = & x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \end{array}$$

considerando a v como el vector columna

$$v = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Proposición 80 $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{M}} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una forma bilineal simétrica, es decir, es lineal en cada coordenada y* $\langle v\ , w\ \rangle_{\mathrm{M}} = \langle w\ , v\ \rangle_{\mathrm{M}}$ *para todo* $v, w \in \mathbb{R}^4$.

Proof. Consideremos a los vectores $u = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^4$ y $r \in \mathbb{R}$.

(1) La forma $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{M}}$ es bilineal pues:

$$\begin{array}{rcl} \langle u + v\ , w\ \rangle_{\mathrm{M}} & = & (x_0 + y_0)z_0 - (x_1 + y_1)z_1 - (x_2 + y_2)z_2 - (x_3 + y_3)z_3 \\ & = & (x_0z_0 + y_0z_0) - (x_1z_1 + y_1z_1) - (x_2z_2 + y_2z_2) - (x_3z_3 + y_3z_3) \\ & = & \langle u, w\ \rangle_{\mathrm{M}} + \langle v, w \rangle_{\mathrm{M}}\ . \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \langle u\ , v + w\ \rangle_{\mathrm{M}} & = & \langle u, v\ \rangle_{\mathrm{M}} + \langle u, w \rangle_{\mathrm{M}}\ . \text{ Análoga a la anterior.} \\ & = & \\ \langle ru\ , w\ \rangle_{\mathrm{M}} & = & (rx_0)z_0 - (rx_1)z_1 - (rx_2)z_2 - (rx_3)z_3 \\ & = & r(x_0z_0 - x_1z_1 - x_2z_2 - x_3z_3) \\ & = & r\,\langle u\ , w\ \rangle_{\mathrm{M}}\ . \end{array}$$

(2) La forma $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{M}}$ es simétrica pues:

$$\begin{array}{rcl} \langle u, w\ \rangle_{\mathrm{M}} & = & x_0z_0 - x_1z_1 - x_2z_2 - x_3z_3 \\ & = & z_0x_0 - z_1x_1 - z_2x_2 - z_3x_3 \\ & = & \langle w, u\ \rangle_{\mathrm{M}}\ . \end{array}$$

■

Proposición 81 *La forma bilineal* $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{M}}$ *es no degenerada, es decir, si* $\langle u, w\ \rangle_{\mathbf{M}} = 0$ *para todo* $w \in \mathbb{R}^4$*, entonces* $u = 0$*. Y la forma* $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{M}}$ *no está positivamente definida, es decir, existe* $u \neq 0$ *tal que* $\langle u, u\ \rangle_{\mathbf{M}} = 0$*.*

Proof. La forma bilineal $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{M}}$ es no degenerada pues si $\langle u, w\ \rangle_{\mathbf{M}} = 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^4$ entonces debe cumplirse en particular para los básicos

$$e_0 = (1,0,0,0)\,,\ e_1 = (0,1,0,0)\,,\ e_2 = (0,0,1,0) \text{ y } e_3 = (0,0,0,1)\,.$$

Si hacemos $w = e_0$ y u como en la proposición anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \langle u, w\ \rangle_{\mathbf{M}} &= x_0 1 - 0 - 0 - 0 \\ &= x_0 1 \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\langle u, w\ \rangle_{\mathbf{M}} = 0$$

de donde $x_0 = 0$. Haciendo lo mismo para e_1, e_2 y e_3, concluimos que $u = (0,0,0,0)$. Por otro lado $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{M}}$ no está positivamente definida pues si $u = e_0 + e_3$ entonces

$$\begin{aligned} \langle u, u\ \rangle_{\mathbf{M}} &= \langle e_0 + e_3, e_0 + e_3 \rangle_{\mathbf{M}} \\ &= \langle e_0, e_0 \rangle_{\mathbf{M}} + \langle e_3, e_3 \rangle_{\mathbf{M}} + \langle e_0, e_3 \rangle_{\mathbf{M}} + \langle e_3, e_0 \rangle_{\mathbf{M}} \\ &= 1 - 1 + 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Definición 82 *Denotando a* $\mathbb{R}^4$ *por* $\mathbf{M}$*. Y a* $\langle u, u\ \rangle_{\mathbf{M}}$ *por* $\|u\|_{\mathbf{M}}^2$*. Definimos a* $\mathbf{M}$ *como el* ***Espacio de Minkovsky*** *de la relatividad especial, con* $\|u\|_{\mathbf{M}}^2$ *la* ***Métrica de Minkovsky.***

Definición 83 *Una* ***transformación de Lorentz*** B*, es una transformación lineal* $B : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$ *tal que preserva la métrica de Minkovsky. Es decir, satisface*

$$\|B(u)\|_{\mathbf{M}}^2 = \|u\|_{\mathbf{M}}^2 \text{ para todo } u \in \mathbf{M}$$

o bien

$$\langle B(u), B(u) \rangle_{\mathbf{M}} = \langle u, u \rangle_{\mathbf{M}}\,.$$

Proposición 84 *El conjunto* L *compuesto por todas las transformaciones de Lorentz,* [1] *junto con la operación composición*

$$\begin{array}{rccc} \circ : & \mathsf{L}\times\mathsf{L} & \longrightarrow & \mathsf{L} \\ \textit{dada por} & \circ\,(B_0,B_1) & = & B_0B_1 \end{array}$$

forman un grupo, llamado el ***Grupo de Lorentz.***

Proof. Sean $B_0, B_1, B_2 \in \mathsf{L}$ y $u \in \mathbf{M}$.

i) L es cerrado en el producto, es decir, B_0B_1 es transformación de Lorentz pues

$$\begin{aligned} \|B_0B_1\,(u)\|^2_{\mathbf{M}} &= \langle B_0B_1\,(u)\,, B_0B_1\,(u)\ \rangle_{\mathbf{M}} \\ &= \langle B_0(B_1\,(u)), B_0(B_1\,(u))\ \rangle_{\mathbf{M}} \\ &= \langle B_1\,(u)\,, B_1\,(u)\ \rangle_{\mathbf{M}} \\ &= \langle u, u\ \rangle_{\mathbf{M}} \\ &= \|u\|^2_{\mathbf{M}}\,. \end{aligned}$$

ii) El producto es asociativo pues

$$\begin{aligned} \|B_0\,(B_1B_2)\,(u)\|^2_{\mathbf{M}} &= \langle B_0(B_1B_2)\,(u)\,, B_0(B_1B_2)\,(u)\ \rangle_{\mathbf{M}} \\ &= \langle B_1B_2\,(u)\,, B_1B_2\,(u)\ \rangle_{\mathbf{M}} \\ &= \langle B_1(B_2\,(u)), B_1(B_2\,(u))\ \rangle_{\mathbf{M}} \\ &= \langle B_2\,(u)\,, B_2\,(u)\ \rangle_{\mathbf{M}} \\ &= \langle u, u\ \rangle_{\mathbf{M}} \\ &= \|u\|^2_{\mathbf{M}}\,. \end{aligned}$$

De manera análoga para $\|(B_0B_1)B_2\,(u)\|^2_{\mathbf{M}} = \|u\|^2_{\mathbf{M}}$.

iii) Por demostrar que existe una transformación identidad $I \in \mathsf{L}$ tal que $Iu = u$ para todo $u \in M$.

$$\text{Sean} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

la matriz que le corresponde a la transformación I y un vector cualquiera $u \in M$, respectivamente. Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(x_0) \\ -1(-x_1) \\ -1(-x_2) \\ -1(-x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, si denotamos el transpuesto de v por ${}^tv$, entonces en el producto tenemos que:

---

[1] En algunos libros de Física definen a L como $Aut\,(\mathbf{M}, \langle\ ,\ \rangle_M)$, es decir los automorfismos de $\mathbf{M}$ en $\mathbf{M}$ que preservan la métrica de Minkovsky.

$$
{}^t v \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(x_0) & -1(-x_1) & -1(-x_2) & -1(-x_3) \end{pmatrix}
$$
$$
= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.
$$

Por lo tanto, la matriz

$$
I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

es la matriz que le corresponde a la transformación identidad en L.

iv) Por demostrar que para toda $B \in \mathsf{L}$ existe $B^{-1} \in \mathsf{L}$ tal que $BB^{-1} = B^{-1}B = I$.

Definimos $B^* := \overline{B}^{t}$[2] entonces

$$
\langle B\, u, B\, w \rangle = \langle\, u, B^* B\, w \rangle\,, \text{ para todo } u, w \in \mathbf{M}.
$$

Por otro lado se tiene que:

$$
\langle B\, u, B\, w \rangle = \langle\, u,\ w \rangle\,,
$$

de donde

$$
\langle\, u,\ w \rangle = \langle\, u, B^* B\, w \rangle \text{ para todo } w \in \mathbf{M}.
$$

Por lo tanto

$$
w = B^* B\,(w) \Longrightarrow B^* = B^{-1}.
$$

■

Proposición 85 *El conjunto* $SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid Det\,(A) = 1\}$ *junto con la multiplicación usual de matrices*

$$
\begin{array}{rccc} \cdot: & SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C}) & \longrightarrow & SL(2,\mathbb{C}) \\ \textit{dada por} & (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}
$$

forman un grupo.

Proof. *i*) $SL(2,\mathbb{C}) \neq \emptyset$, pues la matriz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$.

ii) Si $A, B \in SL(2,\mathbb{C})$ entonces $AB \in SL(2,\mathbb{C})$ pues,

$$
Det\,(AB) = Det\,(A)\, Det\,(B) = 1 \cdot 1 = 1.
$$

[2] Adelante se hacen algunas aclaraciones sobre B^*, por ejemplo que es de Lorentz, lo cual es necesario para esta demostración.

iii) Claramente el producto es asociativo.

iv) Existe $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ tal que $IA = AI = A$ para todo $A \in SL(2,\mathbb{C})$.

v) Para toda $A \in SL(2,\mathbb{C})$ se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= Det\,(I) = Det\,(AA^{-1}) \\ &= Det\,(A)\,Det\,(A^{-1}) \\ &= 1Det\,(A^{-1}) \\ &= Det\,(A^{-1}), \\ \text{por lo tanto } A^{-1} &\in SL(2,\mathbb{C}). \end{aligned}$$

■

Observemos que el grupo especial unitario

$$SU(2) = \left\{ A \in U(2);\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix};\ Det\,(A) = 1. \right\}$$

forma un subgrupo de $SL(2,\mathbb{C})$.

Nota 8 ***RESULTADOS IMPORTANTES DEL GRUPO DE LORENTZ*** L.

(1) L Tiene cuatro componentes conexas.

Proof. Como $M = \mathbb{R}^4$ consideremos cualquier $s = (t, x_1, x_2, x_3) \in M$ y pensemos a t como coordenada temporal y x_1, x_2, x_3 como coordenadas espaciales; si "quitamos" la coordenada temporal, es decir, si $s = (x_1, x_2, x_3)$ y $B \in$ L tenemos que:

$$\begin{aligned} \|B\,(s)\|_{\mathrm{M}}^2 &= \|s\|_{\mathrm{M}}^2 \\ &= -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ &= -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &= -\|s\|^2 \end{aligned}$$

donde $\|s\|^2$ coincide con la métrica euclideana, lo cual nos dice que B preserva la métrica para $s = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. De donde, la matriz asociada a B es ortogonal. Así, el conjunto de todas estas matrices forman el grupo ortogonal $O(3)$ y usando los resultados del capítulo tres, sabemos que $O(3)$ tiene dos componentes conexas, la del determinante 1 y la del determinante -1.

Por otro lado si consideramos a $s = (t, x_1, x_2, x_3)$ entonces

$$\|s\|_{\mathrm{M}}^2 = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

y en t tenemos dos componentes; la que corresponde a la del tiempo positivo y la que corresponde a la del tiempo negativo. Por lo tanto L tiene cuatro componentes conexas. ■

(2) Considerando la observación anterior; definimos al conjunto $SO^{+}(1,3)$ como la componente conexa de L que contiene la transformación identidad I. La notación $(1,3)$ se refiere a los vectores $s=(t,x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{M}$, cuya norma es $t^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$; donde el número 1 denota al tiempo positivo $t>0$ y el número 3 denota los tres signos negativos. Al conjunto $SO^{+}(1,3)$ se le llama el **Grupo Propio de Lorentz.**

Describiremos ahora un homomorfismo del grupo $SL(2,\mathbb{C})$ al grupo de Lorentz L. Para esto identificaremos M con, H donde

$$\mathsf{H}=\left\{X\in\mathbf{M}_2(\mathbb{C})\text{ tal que } X \text{ es } \textbf{Hermitiana}\text{, es decir, } X=\overline{X^t}=X^*\right\}$$

de la siguiente manera:

Definimos la función

$$\begin{aligned}\sigma &: \mathbf{M}\longrightarrow\mathsf{H}\\ \text{dada por }\sigma(x_0,x_1,x_2,x_3) &= \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & x_0-x_3\end{pmatrix}=X.\end{aligned}$$

Proposición 86 *La función σ cumple las siguientes dos propiedades.*

i) σ es lineal.

ii) $\sigma(x_0,x_1,x_2,x_3)$ es hermitiana.

iii) $Det(\sigma(x_0,x_1,x_2,x_3))=\|s\|_{\mathbf{M}}^2$.

Proof. Sean $\mathbf{x}=(x_0,x_1,x_2,x_3)$ y $\mathbf{y}=(y_0,y_1,y_2,y_3)\in\mathbf{M}$, $r\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \sigma(x_0+y_0,x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)\\
&= \begin{pmatrix} (x_0+y_0)+(x_3+y_3) & (x_1+y_1)-i(x_2+y_2)\\ (x_1+y_1)+i(x_2+y_2) & (x_0+y_0)-(x_3+y_3)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} (x_0+x_3)+(y_0+y_3) & (x_1-ix_2)+(y_1-iy_2)\\ (x_1+ix_2)+(y_1+iy_2) & (x_0-x_3)+(y_0-y_3)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & x_0-x_3\end{pmatrix}\\
&\quad+\begin{pmatrix} y_0+y_3 & y_1-iy_2\\ y_1+iy_2 & y_0-y_3\end{pmatrix}\\
&= \sigma((x_0,x_1,x_2,x_3)+\sigma(y_0,y_1,y_2,y_3)).\\
\sigma(r(x_0,x_1,x_2,x_3)) &= \sigma(rx_0,rx_1,rx_2,rx_3)\\
&= \begin{pmatrix} rx_0+rx_3 & rx_1-irx_2\\ rx_1+irx_2 & rx_0-rx_3\end{pmatrix}\\
&= r\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & x_0-x_3\end{pmatrix}\\
&= r\sigma(x_0,x_1,x_2,x_3)
\end{aligned}$$

ii) $\sigma(x_0,x_1,x_2,x_3)$ es hermitiana.

$$\begin{aligned}
\sigma(x_0, x_1, x_2, x_3) &= X \\
&= \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

de donde

$$X^t = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\overline{X^t} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = X$$

iii) $Det(\sigma(x_0, x_1, x_2, x_3)) = \|s\|^2_{\mathbf{M}}$.

$$\begin{aligned}
Det(\sigma(x_0, x_1, x_2, x_3)) &= Det\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \\
&= (x_0 + x_3)(x_0 - x_3) - [(x_1 - ix_2)(x_1 + ix_2)] \\
&= {x_0}^2 - x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \\
&= {x_0}^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \\
&= \|s\|^2_{\mathbf{M}}.
\end{aligned}$$

■

Definición 87 *Definamos al conjunto*

$$\mathsf{ML} = \left\{ X \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C}) \mid X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

donde $X = \sigma(s)$ *con* $s = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{M}$. *Al conjunto* ML *se le llama* ***Matrices de Lorentz.***

Proposición 88 *El conjunto* ML *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *de dimensión 4 con las operaciones producto y suma usuales de matrices respectivamente.*

Proof. Es suficiente dar una base para ML. Consideremos el conjunto

$$\beta = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

entonces β es base. Pues si suponemos que

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde a, b, c y $d \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ic \\ ic & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -ic \\ ic & -d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a+d & b-ic \\ b+ic & a-d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obteniendo así, la igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} a+d & b-ic \\ b+ic & a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Igualando las coordenadas de las matrices, obtenemos los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$\begin{array}{rcrcl} a & + & d & = & 0 \\ a & - & d & = & 0 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcrcl} b & + & ic & = & 0 \\ b & - & ic & = & 0 \end{array}$$

Resultando, $a = 0 = d$ y $b = 0 = c$. Por lo tanto, las matrices de β son linealmente independientes.

Por otro lado, si $X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \mathsf{ML}$, entonces

$$X = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, X es una combinación lineal de los elementos de β. Por lo tanto β es una base para ML. ■

Definición 89 *A las matrices I, σ_1, σ_2 y σ_3 se les llaman* ***Matrices de Pauli.***

Por la proposición anterior, hemos identificado el vector $s = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{M}$ con la matriz $X \in \mathsf{ML}$ de la siguiente forma

$$X = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

o bien

$$X = x_0 I + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3.$$

Notemos que $\sigma(e_1) = I$, $\sigma(e_2) = \sigma_1$, $\sigma(e_3) = \sigma_2$, $\sigma(e_4) = \sigma_3$. Donde e_i son los vectores canónicos del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. En otras palabras la función σ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Usando los resultados anteriores, podemos construir la siguiente función.

$$\begin{array}{rcll} \phi_A : & \mathsf{H} & \longrightarrow & \mathsf{H} \quad \text{dada por} \\ \phi_A(X) & = & AXA^* & \end{array}$$

para cualquier $A \in M_2(\mathbb{C})$ y cualquier $X \in \mathsf{H}$.

Proposición 90 *La función ϕ_A cumple las siguientes afirmaciones.*
(i) $\phi_A(X)$ es autoadjunta.
(ii) $\phi_{AB}(X) = (\phi_A\phi_B)(X)$. Para toda A y $B \in M_2(\mathbb{C})$.

Proof. (*i*) $\phi_A(X)$ es autoadjunta.

$$\begin{aligned}(\phi_A(X))^* &= (AXA^*)^* \\ &= (A^*)^* X^* A^* \\ &= AXA^* \\ &= \phi_A(X).\end{aligned}$$

(*ii*) La función ϕ_A es morfismo de grupos, es decir, $\phi_{AB}(X) = (\phi_A\phi_B)(X)$.

$$\begin{aligned}\phi_{AB}(X) &= (AB)X(AB)^* \\ &= (AB)X(B^*A^*) \\ &= A(BXB^*)A^* \\ &= A(\phi_B(X))A^* \\ &= \phi_A(\phi_B(X)) \\ &= \phi_A\phi_B(X).\end{aligned}$$

■

Por la proposición anterior, ϕ_A induce un morfismo

$$\begin{array}{rcl}\phi'_A: & \mathsf{ML} \longrightarrow & \mathsf{ML} \quad \text{dado por} \\ \phi'_A(X) & = & AXA^*.\end{array}$$

para toda $A \in SL(2,\mathbb{C})$ a las matrices de lorentz ML.

Nota 9 *El morfismo ϕ'_A cumple lo siguiente.*
(i) El morfismo ϕ'_A esta bien definido,
(ii) El morfismo ϕ'_A no es inyectivo.
(iii) $\phi'_A(I_{\mathsf{ML}}) = I_{\mathsf{ML}}$. Donde I_{ML} es la matriz identidad en las matrices de Lorentz ML.

Proof. (*i*) Es suficiente demostrar que ϕ'_A es una transformación de Lorentz.

$$\begin{aligned}\|\phi'_A(X)\|_M^2 &= Det(AXA^*) \\ &= Det(A)\,Det(X)\,Det(A^*) \\ &= |Det(A)|^2\,Det(X) \\ &= 1Det(X) \\ &= 1\,\|s\|_M^2 \\ &= \|s\|_M^2.\end{aligned}$$

por lo tanto, ϕ'_A es una transformación de Lorentz.
(ii) El morfismo $\phi'_A(X)$ no es inyectivo.

$$\begin{aligned}
\phi'_A(X) &= (AXA^*). \\
\text{Donde, } \|\phi'_A(X)\|_M^2 &= Det(A)\, Det(X)\, Det(A^*) \\
&= |Det(A)|^2\, Det(X) \\
&= 1Det(X) \\
&= Det(X).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\phi'_{-A}(X) &= (-A)X(-A)^*. \\
\text{Donde, } \|\phi'_A(s)\|_M^2 &= Det(-A)\, Det(X)\, Det(-A)^* \\
&= |Det(A)|^2\, Det(X) \\
&= 1Det(X) \\
&= Det(X).
\end{aligned}$$

Por lo que $\phi'_A = \phi'_{-A}$. Es decir, las matrices A y $-A$ corresponden a la misma transformación de Lorentz.

(iii) $\phi'_A(I_{\mathsf{ML}}) = I_{\mathsf{ML}}$.

$$\begin{aligned}
\phi'_A(I_{\mathsf{ML}}) &= (A)\, I_{\mathsf{ML}}(A)^* \\
&= AI_{\mathsf{ML}}A^* \\
&= AA^* \\
&= I_{\mathsf{ML}}.
\end{aligned}$$

■

Los resultados anteriores inducen un morfismo

$$\begin{aligned}
\psi: \ SL(2,\mathbb{C}) &\longrightarrow SO^+(1,3) \quad \text{dada por} \\
\psi(A) &= \phi'_A
\end{aligned}$$

Por la proposición anterior incisio ii), ψ es morfismo, por la observación anterior ψ es transformación de Lorentz y no inyectiva.Ademas $\psi(I) = \phi'_I$, tal que para toda X matriz de Lorentz $\phi'_I(X) = IXI^* = X$, es la transformación identidad de Lorentz.

Consideremos a la matriz $A \in SU(2)$ (la cual satisface que $AA^* = I$, es decir, $AIA^* = I$) y al vector $e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}$, tal que

$$\begin{aligned}
\sigma(e_0) &= \begin{pmatrix} 1+0 & 0-i0 \\ 0+i0 & 1-0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \in \mathsf{ML}.
\end{aligned}$$

entonces, la composición $(\phi'_A \circ \sigma)$ aplicada a e_0, es tal que

$$\begin{aligned}
(\phi'_A \circ \sigma)(e_0) &= \phi'_A(\sigma(e_0)) \\
&= \phi'_A(I) \\
&= AIA^* \\
&= AA^* = I = \sigma(e_0).
\end{aligned}$$

Si una transformación de Lorentz B satisface $B(e_0) = e_0$, entonces B también "lleva" el espacio tridimencional $e_0^\perp$ (el complemento ortogonal de e_0), que consiste de los vectores de la forma

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(Es decir, quitamos la primer coordenada que corresponde al tiempo) en él mismo. Lo que significa es que B respeta la métrica en $O(3)$ (ver la sección de grupo ortogonal). Por lo que B es una transformación ortogonal sobre el espacio tridimencional. Puesto de otra manera, podemos definir al grupo ortogonal como

$$O(3) = \{B \in \mathsf{L} \mid B(e_0) = e_0\}.$$

Con esta definición del grupo ortogonal $O(3)$. Se cumple la siguiente proposición.

Proposición 91 *El grupo $O(3)$ es subgrupo del grupo de Lorentz* L.

Proof. Sean $B, B_0 \in O(3)$. Entonces $(BB_0)(e_0) = B(B_0(e_0)) = B(e_0) = e_0$. ■

Por lo tanto, la función ψ restringida a $SU(2)$, mapea $SU(2)$ en $O(3)$ (adelante se da una demostración de éste hecho). Veamos como actúa ψ en algunos ejemplos importantes.

Ejemplo 92 *Ejemplos importantes.*

(1) *Consideremos a* $0 \leq \theta \leq \pi$ *y* $U_\theta = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \in SU(2)$ *y* $s = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}$ *con* $\sigma(s) = X \in \mathsf{ML}$.*Aplicando* ψ *tenemos que*

$$\begin{aligned}
\phi'_{U_\theta}(X) &= U_\theta\, X\, U_\theta^* \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & e^{-i2\theta}(x_1 - ix_2) \\ e^{i2\theta}(x_1 + ix_2) & x_0 - x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ'_{U_0} *no cambia a* x_0 *y* x_3, *por lo que es una rotación al rededor del eje* x_3. *Como* ϕ *manda a* $x_1 + ix_2$ *en* $e^{i2\theta}\,(x_1 + ix_2)$, *vemos que es una rotación de un ángulo de* 2θ *en el plano* x_1x_2. *Esto muestra que* ϕ'_{U_0} *es una rotación de un ángulo de* 2θ *al rededor del eje* x_3. *Nótese que como* $0 \leq \theta \leq \pi$ *la correspondiente rotación es de* 0 *a* 2π, *haciendo un circuito completo. Si* $0 \leq \theta \leq 2\pi$ *la correspondiente rotación es de dos vueltas completas.*

(2) *Consideremos a* $0 \leq \alpha \leq \pi$ *y* $V\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in SU(2)$ *y* $s = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}$ *con* $\sigma(s) \in \mathsf{ML}$.*Aplicando* ψ *tenemos que*

$$\begin{aligned}
\phi'_{V_\alpha}(X) &= V_\alpha\, X\, V_\alpha^* \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si hacemos la identificación del vector

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con la matriz X, *bajo la función* σ, *tenemos que:*

$$\sigma(e_2) = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\phi'_{V_\alpha}(\sigma_2) &= V_\alpha\, \sigma_2\, V_\alpha^* \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -isen\alpha & -i\cos\alpha \\ i\cos\alpha & -isen\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -isen\alpha\cos\alpha + i\cos\alpha sen\alpha & -isen^2\alpha - i\cos^2\alpha \\ i\cos^2\alpha + isen^2\alpha & i\cos\alpha sen\alpha - isen\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ'_{V_α} *debe ser una rotación al rededor del eje* x_2. *Por otro lado si hacemos la identificación del vector*

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}$$

con la matriz X bajo la función σ, tenemos que:

$$\sigma(e_3) = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando ϕ'_{V_α} a la matriz σ_3, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi'_{V_\alpha}(\sigma_3) &= V_\alpha \sigma_3 V_\alpha^{\star} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & sen2\alpha \\ -sen2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esta última matriz es la identificación del vector y dado por

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ sen2\alpha \\ 0 \\ \cos 2\alpha \end{pmatrix} = sen2\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos 2\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

bajo σ. Por lo que podemos concluir que $\phi'_{V_\alpha}(e_3) = e_3 \cos 2\alpha + e_1 sen2\alpha$. Así que ϕ'_{V_α} representa una rotación de un ángulo de 2α al rededor del eje x_3.

(3) *Consideremos la matriz $M_r \in SU(2)$, dada por*

$$M_r = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}$$

con entradas reales r y $r \neq 0$. Observe que $M_r = M_r^{\star}$, entonces

$$\begin{aligned} \phi'_{M_r}(X) &= M_r X M_r^{\star} \\ &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^2(x_0 + x_3) & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & r^{-2}(x_0 - x_3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la transformación de Lorentz ϕ'_{M_r} deja x_1 y x_2 fijos. Haciendo los cambios de variables con respecto a x_0 y x_3

$$x'_o = \left(\tfrac{1}{2}\right)(r^2 + r^{-2})x_0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)(r^2 - r^{-2})x_3$$
$$y$$
$$x'_3 = \left(\tfrac{1}{2}\right)(r^2 - r^{-2})x_0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)(r^2 + r^{-2})x_3$$

tenemos que x'_o y x'_3 son tales que

$$x'_o + x'_3 = r^2(x_0 + x_3) \quad y\ x'_o - x'_3 = r^{-2}(x_0 - x_3).$$

Por lo tanto, obtenemos la transformación dada por la siguiente igualdad.

$$\phi'_{M_r}(X) = \begin{pmatrix} x'_0 + x'_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x'_0 - x'_3 \end{pmatrix}.$$

Recordando la definición de las funciones hiperbólicas

$$\cosh\ u = \left(\frac{1}{2}\right)\left(e^u + e^{-u}\right) \quad y\ senh\ u = \left(\frac{1}{2}\right)\left(e^u - e^{-u}\right)$$

Definición 93 *El* ***Levantamiento de Lorentz*** *en la dirección z con parámetro t, es definido como la transformación dada por $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$, $x'_0 = (\cosh\ t)x_0 + (\ senh\ t)x_3$ y $x'_3 = (senh\ t)x_0 + (\cosh\ t)x_3$, y lo denotamos como L^z_t.*

En otras palabras, el levantamiento de Lorentz L^z_t es la transformación de Lorentz dada por la siguiente matriz.

$$L^z_t = \begin{pmatrix} \cosh\ t & 0 & 0 & senh\ t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ senh\ t & 0 & 0 & \cosh\ t \end{pmatrix}.$$

Si hacemos $r = e^t$ en el ejemplo anterior, tenemos que $\phi'_{M_{e^t}} = L^z_{2t}$.

Para sintetizar: Sea R^z_θ una rotación de un ángulo θ al rededor del eje x_3 , R^z_θ una rotación de un ángulo θ en el eje x_2. Lo que hemos probado es que

$$\phi'_{U_\theta} = R^z_{2\theta},\ \phi'_{V_\theta} = R^y_{2\theta} \text{ y } \phi'_{M_{e^t}} = L^z_{2t}.$$

Con lo anterior uno puede hacerse la pregunta natural ¿Cuáles elementos $B \in \mathsf{L}$ son de la forma ϕ_A para alguna $A \in SL(2, \mathbb{C})$? O la pregunta equivalente ¿cuál es el rango de ϕ? . Para responder a ésta pregunta primero demostraremos la siguiente proposición.

Proposición 94 *Toda $A \in SL(2, \mathbb{C})$ es homotópica a la identidad por medio de una curva A_t de matrices que pertenecen a $SL(2, \mathbb{C})$.*

Proof. Por álgebra lineal sabemos que cualquier $A \in SU(2)$ es conjugada a una matriz triangular superior. En particular, consideremos a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},$$

asi, A se puede ver como como el siguiente producto

$$A = B\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}B^{-1}.$$

Ahora consideremos la homotopia definida por

$$\begin{array}{rcll} H: \; SU(2)\times I & \longrightarrow & SU(2) & \text{dada por} \\ H(A,t) & = & A_t & \text{donde} \end{array}$$

$$A_t = B\begin{pmatrix} 1-t+at & bt \\ 0 & (1-t+at)^{-1} \end{pmatrix} B^{-1}$$

La homotopia H es una curva de matrices en $SL(2,\mathbb{C})$, que cumple la condición

$$\begin{aligned} H(A,0) &= A_0 = I \\ H(A,1) &= A_1 = A. \end{aligned}$$

■

Sin embargo, no toda transformación de Lorentz puede ser homotópico a la identidad por una curva continua. Por ejemplo, existen transformaciones en el grupo de Lorentz L, que les corresponden matrices cuadradas de dimenciones 4×4 que tienen determinante negativo. Como el determinante es una función continua, una matriz con determinante negativo no puede ser llevada continuamente a la matriz identidad que tiene determinante 1 que es positivo, esto es sin tocar el cero. Por lo tanto existen elementos en L que no pueden estar en el rango de ϕ. Así, podemos afirmar el siguiente resultado.

El homomorfismo

$$\begin{array}{rcll} \psi: \; SL(2,\mathbb{C}) & \longrightarrow & SO^{+}(1,3) & \text{dada por} \\ \psi(A) & = & \phi'_A & \end{array}$$

es epimorfismo.Para la demostración usaremos el siguiente lema.

Lema 95 *Toda transformación de Lorentz B, puede escribirse como*

$$B = R_1 L_u^s R_2$$

donde R_1 y R_2 son rotaciones y L_u^s es un levantamiento de Lorentz en la dirección de z.

Proof. Podemos escribir

$$B(e_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ s \end{pmatrix}$$

donde

$$s = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \text{ y } x_0^2 - \|s\|^2 = 1.$$

Podemos encontrar una rotación S que al componerla con B rota al vector s al eje positivo x_3, así que

$$S(B(e_0)) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ \|s\| \end{pmatrix}.$$

La matriz autoadjunta que le corresponde a $S(B(e_0))$ esta dada por

$$\begin{pmatrix} x_0 + \|s\| & 0 \\ 0 & x_0 - \|s\| \end{pmatrix}.$$

Ahora, tomando a r que cumpla la condición

$$r^2 = (x_0 + \|s\|)^{-1} = x_0 - \|s\|.$$

Y recordando que el determinante es 1, es decir,

$$(x_0 + \|s\|)(x_0 - \|s\|) = x_0^2 - \|s\|^2 = 1.$$

Podemos aplicar M_r obteniendo $\phi'_{M_r}[S(B(e_0))] = e_0$. Por lo tanto $\phi'_{M_r}(SB)$ es una rotación llamada R_2 . Así tenemos

$$\phi'_{M_r}(SB) = R_2,$$

o bien

$$B = S^{-1}\left[\phi'_{M_r}\right]^{-1} R_2.$$

Esta es la descomposición deseada con $R_1 = S^{-1}$ y $L_u^z = \left[\phi'_{M_r}\right]^{-1}$. Por lo tanto ψ es epimorfismo. ■

6. CONCLUSIONES.

Los resultados que se obtuvieron en esta tesis fue la periocidad de isomorfismos de Algebras de Clifford $Cl_{(n,m)}\left(\mathbb{R}^{n+m}, q_{(n,m)}\right)$ asociadas al espacio vectorial $\mathbb{R}^{n+m}$ y a la forma cuadratica $q_{(n,m)}$. Estos isomorfismos nos indujeron una identificacion con el algebra de matrices $M_n(\mathbb{R})$ de la cual se analizaron aspectos algebraicos y topologicos en el caso real y complejo de sus subgrupos clasicos. Se puso enfasis en los grupos de Clifford y los grupos espinoriales, los cuales se analizaron los primeros casos y además se calculó el grupo fundamental del grupo de rotaciones $SO(n)$. Por último se aplicaron los resultados algebraicos y topológicos al espacio de Minkovsky de la relatividad especial y al grupo de Lorentz.

Obteniendo con esta tesis los antecedentes necesarios para el analisis de " El problema de las tijeras de Dirac ", el cual establece que existen sistemas físicos a nives subatómicos cuyo estado es alterado por una rotación de 2π del sistema sobre algún eje, pero este regresa a su estado original por una rotacion de 4π. Éstas son las particulas elementales clasificadas como fermiones (electrones, protones, neutrones,etc) poseen lo que los fsicos llaman "spin un medio (1/2)".

7. BIBLIOGRAFIA.

[MA] M.F.Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, Clifford Modules, Topology 3 (suppl. 1) (1964), 3-38.

[EB] Ethan D. Bolker, The Spinor Spanner, American Mathematical Monthly.

[MC] Morton L. Curtis, Matrix Groups, Springer-Verlag, 1984.

[TB] Theodor Bröcker, Tammo Tom Dieck, Representations of Compact Lie Groups, Springer-Verlag, G.T.M, número 98, 1982.

[PB] P. Bundich A. Trautman, The Spinorial Chessboard, Trieste Notes in Phisics, Springer-Verlag, 1988.

[WC] Charles W.Curtis, Linear Algebra, An Introductory Approach, Springer-Verlag, U.T.M, 1984.

[WH] Morris W. Hirsh, Diferential Topology, Springer-Verlag, G.T.M, número 33, 1976.

[CK] C. Kosniowsky, Topología Algebraica, Editorial reverté, S.A, 1986.

[SL] Serge Lang, Algebra Lineal, Fondo Educativo Interamericano, S.A, 1976.

[BL] H. Blaine Lawson, Jr. and Marie-Louise Michelsohn, Spin Geometry, Princeton University Press, 1989.

[GMc] George McCarty, Topology, Dover Publications, Inc, 1988.

[Ma] Maclane, Categories for the Working Mathematician, Springer-Verlag, G.T.M, número 5, 1972.

[GM] G. Moreno, Simetría, Aportaciones Matematicas, vol. 16, 1955, 371-102.

[GMA] G. Moreno, Algebra Lineal, Publicaciones del Departamento de Matematicas del CINVESTAV.

[LP] L.S. Pontryagin, Topological Groups, 2_{nd} ed., Gordon and Breach, New York, 1996.

[MP] M. Postnikov, Lectures in Geometry, Semester V, Lie Groups and Lie Algebras, Publicaciones Mir, 1986.

[SS] S. Stenberg, Group Theory and Physics, Cambridge University Press, 1994.