



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“NEUTRINOS DE DIRAC Y MAJORANA”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

ENRIQUE MILPAS ROSAS



DIRECTOR DE TESIS: DR. MANUEL TORRES LABANSAT

2005



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

m. 347828



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Neutrinos de Dirac y Majorana"

realizado por Enrique Milpas Rosas

con número de cuenta 09613081-8 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de Tesis

Propietario Dr. Manuel Torres Labansat

Propietario Dr. Jorge Gustavo Hirsch Ganievich

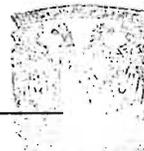
Propietario Dr. Axel Ricardo de la Macorra Pettersson

Suplente Dra. Myriam Mondragón Ceballos

Suplente Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero

Consejo Departamental de Física

M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en la medida de su colaboración a absolutamente **todas** las personas que hicieron algo para que llegara hasta aquí, en especial por supuesto a las que siempre están conmigo.

Agradezco también al proyecto 42026-F del CONACYT ya que su ayuda ha sido indispensable para la realización de este trabajo.

Índice General

1	Introducción	3
2	Teorías de norma y modelo electrodébil	5
2.0.1	<i>Simetrías locales</i>	5
2.1	Rompimiento espontáneo de simetría y mecanismo de Higgs	11
2.1.1	Invariancia del estado base como condición del rompimiento	11
2.1.2	Rompimiento espontáneo para una simetría discreta	12
2.1.3	Rompimiento espontáneo de simetría para un campo escalar complejo	13
2.1.4	El mecanismo de Higgs	15
2.2	Modelo Electrodébil	20
3	Propiedades generales de los neutrinos	27
3.1	La ecuación de Dirac	27
3.2	Soluciones de la ecuación de Dirac	30
3.3	Simetrías de carga y paridad	35
3.3.1	Paridad	36
3.3.2	Conjugación de carga	36
3.3.3	Propiedades bajo CP	40
4	Neutrinos solares y atmosféricos	42
4.1	Oscilaciones de neutrinos	42
4.1.1	Oscilaciones en vacío	42
4.1.2	Oscilaciones en materia	46
4.2	Neutrinos solares y atmosféricos	51

4.2.1	Neutrinos atmosféricos	51
4.2.2	Neutrinos solares	54
4.2.3	Detección de neutrinos	55
4.3	Explicación al problema de los neutrinos	61
5	Masas de neutrinos	64
5.1	Mecanismo see-saw	69
5.2	Modelo izquierdo-derecho	73
5.3	Masas y ángulos de mezcla	79
5.3.1	Formulación básica para una mezcla de tres neutrinos .	79
5.3.2	Masas de neutrinos y la violación del número leptónico	81
5.3.3	Importancia del doble decaimiento beta sin neutrinos .	82
5.3.4	Bariogénesis via leptogénesis del decaimiento de un neutrino pesado	83
5.3.5	Neutrinos degenerados	83
5.3.6	Jerarquía invertida	87
5.3.7	Jerarquía normal	88
5.3.8	Modelos de gran unificación y masas de fermiones . . .	93
6	Conclusiones	98

Capítulo 1

Introducción

La historia de los neutrinos comienza en 1930 cuando Pauli propuso una partícula que se emitía en el decaimiento β la cual llevaba la energía, momento lineal y momento angular para que hubiera conservación de estas magnitudes en el decaimiento. La masa de esta partícula debería ser mucho menor que la masa del electrón. En 1933 Fermi desarrolló en gran parte la teoría cuántica para el decaimiento β en la cual incorporó la partícula que Pauli había propuesto, la cual llamó neutrino, que se refiere a “algo pequeño y neutral” en italiano, con el fin de diferenciarlo del neutrón. Fue hasta 1956 en un experimento, realizado en reactores nucleares que Cowan y Reines lograron observarlos [7].

Hoy se conocen tres tipos de neutrinos, el neutrino electrónico ν_e , el neutrino muónico ν_μ , y el neutrino tau ν_τ , además de sus respectivas antipartículas, estas junto con el electrón e , el muón μ y el tau τ , conforman lo que se conoce como el grupo de los leptones, que junto con los quarks y sus respectivas partículas mediadoras conforman toda la materia que existe en el universo. Los neutrinos al no tener carga, no tienen interacciones electromagnéticas, interaccionan a través de “interacciones débiles”, que desde el punto de vista del modelo estándar, se deben al intercambio de bosones vectoriales (W y Z).

En el estudio de los neutrinos existen varios fenómenos interesantes. Por ejemplo; no se sabe si los neutrinos son partículas de Dirac o Majorana. En el caso de que sean partículas de Dirac entonces por cada neutrino hay un antineutrino. En caso de que sean partículas de Majorana, entonces el neutrino sería su propia antipartícula, esto trae una serie de consecuencias de las que hablaremos más adelante.

Existen además otros fenómenos que también tienen gran interés como las oscilaciones de neutrinos, en las cuales los neutrinos cambian de sabor; la forma en que estos interactúan con la materia y la posible violación de las simetrías de carga y paridad (CP) en fenómenos en los cuales hay neutrinos presentes. Los neutrinos no tienen interacciones electromagnéticas ya que tienen carga cero y además tienen espín semientero (con $s=1/2$).

En esta tesis se lleva a cabo, una revisión de varios aspectos de interés y actualidad en la física de neutrinos.

En el capítulo dos, se abordan las teorías de norma y el modelo electrodébil, comenzando con una simetría local, para después discutir el rompimiento de simetría y el mecanismo de Higgs, terminando con el modelo electrodébil. La importancia del rompimiento de simetría y el mecanismo de Higgs, está en que, según el modelo electrodébil, se tienen neutrinos sin masa, pero resulta que los neutrinos son masivos, así que una forma dar masa a los neutrinos, es con el mecanismo de Higgs.

En el capítulo tres, se revisan propiedades generales de los neutrinos, se parte de la ecuación de Dirac, ya que los neutrinos son partículas de espín semientero. Se definen los campos de Dirac y Majorana y se estudia el comportamiento de estos ante las simetrías de carga y paridad.

En el capítulo cuatro, se estudia el enigma de los neutrinos solares y atmosféricos, la detección de neutrinos, los datos que se tienen, más los que se esperan encontrar y la solución al problema a través de las oscilaciones, lo cual lleva a la conclusión de que los neutrinos tienen masa.

En el capítulo cinco, se lleva a cabo una revisión de algunos modelos de masas de neutrinos, como el mecanismo see-saw, el modelo izquierdo-derecho y se concluye con tópicos actuales de neutrinos masivos, como la relación de las masas de neutrinos y el número leptónico, el doble decaimiento beta sin neutrinos y la relación con los modelos de gran unificación.

En este tratamiento utilizaremos una notación cómoda y compacta en la cual pediremos que $\hbar = 1$ donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ y h es la constante de Planck (en MKS, $h = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$), también consideraremos $c=1$ donde c es la velocidad de la luz (En MKS $c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$), es decir, la expresión $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ ahora se escribe $E = \sqrt{p^2 + m^2}$.

Capítulo 2

Teorías de norma y modelo electrodébil

Para los sistemas físicos tenemos dos simetrías: *las simetrías globales* en las cuales la misma transformación es aplicada a un campo en todos los puntos del espacio-tiempo, y *las simetrías locales*, donde la transformación de simetría es diferente para diferentes puntos del espacio-tiempo.

La existencia de simetrías globales exactas, siempre implica la existencia de leyes de conservación [1].

2.0.1 Simetrías locales

Las demandas de una simetría local son mucho más restrictivas y tienen implicaciones sobre el tipo de interacciones que puede experimentar un campo dado. Consideremos un campo de espín 1, al cual llamamos campo de norma. Esos campos de norma son denotados por A^μ , tienen interacción con todos los campos que se transforman no trivialmente bajo la simetría local y su intercambio da lugar a fuerzas. Entonces el requerimiento de invariancia bajo una simetría local siempre da lugar a fuerzas [1].

Ahora estudiemos *las teorías de norma abeliana y no abeliana*.

Teoría de norma abeliana

Consideremos el lagrangiano de un campo espinorial $\psi(x)$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x). \quad (2.1)$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac ($\mu = 1, 2, 3, 4$), ∂_μ es la derivada parcial respecto a la componente μ . Estas se definen con cuidado en el siguiente capítulo.

Este lagrangiano tiene una simetría global $U(1)$ correspondiente a la invariancia de la teoría bajo un cambio de fase

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha}\bar{\psi}(x).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Cambiaremos esta simetría global a una simetría local haciendo $\alpha = \alpha(x)$

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x).\end{aligned}\tag{2.3}$$

El término de la derivada tendrá la siguiente transformación

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)\partial_\mu\psi'(x) \\ &= \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)}\partial_\mu(e^{-i\alpha(x)}\psi(x)) \\ &= \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) - i\bar{\psi}(x)\partial_\mu\alpha(x)\psi(x).\end{aligned}\tag{2.4}$$

El segundo término estropea la invariancia de norma, así que necesitamos una derivada covariante de norma D_μ para reemplazar ∂_μ . D_μ tendrá una transformación simple

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow [D_\mu\psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi(x).$$

Así la combinación $\bar{\psi}(x)D_\mu\psi(x)$ es invariante de norma. En otras palabras la acción de la derivada covariante no cambia la propiedad de transformación del campo. Esto puede ser realizado si ampliamos la teoría con un nuevo campo vectorial $A_\mu(x)$, el campo de norma. La derivada covariante queda como:

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi,$$

donde e es un parámetro libre que eventualmente identificaremos con la carga eléctrica. La ley de transformación para la derivada covariante se satisface si el campo de norma A_μ tiene la propiedad de transformación.

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x).\tag{2.5}$$

Utilizando los resultados anteriores se verifica que el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (2.6)$$

es invariante ante la transformación de norma definida en (2.3) y (2.5). Para hacer al campo de norma una verdadera variable dinámica, necesitamos agregar un término al lagrangiano que incluya sus derivadas. El término invariante de norma más simple

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

por sustitución directa de (2.5) vemos que $F_{\mu\nu}$ es de hecho un invariante de norma y se relaciona con la derivada covariante como:

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi = ieF_{\mu\nu}\psi. \quad (2.8)$$

Combinando lo anterior (2.7) y (2.6) llegamos al lagrangiano QED

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Notar que el fotón no tiene masa por que $A_\mu A^\mu$ no es invariante de norma y el lagrangiano de QED (2.9) es invariante de norma.

Teoría de norma no abeliana

Ahora ampliaremos la discusión anterior para el caso no abeliano.

Sea ahora el campo un doblete

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Bajo una transformación $SU(2)$ tenemos:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{\frac{-i\tau \cdot \theta(x)}{2}} \psi(x), \quad (2.11)$$

donde $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ son las matrices de Pauli y $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ son los parámetros de la transformación $SU(2)$. El lagrangiano libre

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x),$$

es un invariante bajo la simetría global $SU(2)$. Sin embargo bajo la transformación de simetría local

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(\theta)\psi(x),$$

con

$$U(\theta) = e^{\frac{-i\tau \cdot \theta(x)}{2}},$$

el lagrangiano libre no es completamente invariante, por que el término derivativo se transforma como

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)\partial_\mu\psi'(x) \\ &= \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) + \bar{\psi}(x)U^{-1}(\theta)[\partial_\mu U(\theta)]\psi(x). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Para construir un invariante de norma seguiremos un proceso similar al que se siguió para el caso abeliano [8]. Primero introducimos campos de norma vectoriales A_μ^i con $i = 1, 2, 3$ (uno por cada generador del grupo) para formar la derivada covariante a través del acoplamiento mínimo

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - ig\frac{\tau \cdot A_\mu}{2})\psi.$$

g es la constante de acoplamiento análoga a e en el caso abeliano. Demandamos que $D_\mu\psi$ tenga la propiedad de transformación

$$D_\mu\psi \rightarrow (D_\mu\psi)' = U(\theta)D_\mu\psi.$$

Lo cual implica que

$$\frac{\tau \cdot A'_\mu}{2} = U(\theta)\frac{\tau \cdot A_\mu}{2}U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g}[\partial_\mu U(\theta)]U^{-1}(\theta). \quad (2.13)$$

Esto define la ley de transformación para campos de norma.

Para un cambio infinitesimal $\theta(x) \ll 1$

$$U(\theta) \simeq 1 - \frac{i\tau \cdot \theta(x)}{2}.$$

Entonces (2.13) viene dada como

$$\begin{aligned} \frac{\tau \cdot A'_\mu}{2} &= \frac{\tau \cdot A_\mu}{2} - i\theta^j A_\mu^k \left[\frac{\tau_j}{2}, \frac{\tau_k}{2} \right] - \frac{1}{g} \left(\frac{\tau}{2} \cdot \partial_\mu \theta \right) \\ &= \frac{\tau \cdot A_\mu}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \tau^j \theta^k A_\mu^i - \frac{1}{g} \left(\frac{\tau}{2} \cdot \partial_\mu \theta \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

o bien

$$A_\mu^i = A_\mu^i + \varepsilon^{ijk}\theta^j A_\mu^k - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i,$$

el segundo término es la transformación para la representación de un triplete bajo $SU(2)$. Entonces las A_μ^i s llevan cargas en contraste al campo de norma abeliano. Para obtener el tensor de los campo de norma estudiamos la combinación motivada por (2.8)

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi = ig \left(\frac{\tau^i}{2} F_{\mu\nu}^i \right) \psi. \quad (2.15)$$

Con

$$\frac{\tau \cdot F_{\mu\nu}}{2} = \partial_\mu \frac{\tau \cdot A_\nu}{2} - \partial_\nu \frac{\tau \cdot A_\mu}{2} - ig \left[\frac{\tau \cdot A_\mu}{2}, \frac{\tau \cdot A_\nu}{2} \right],$$

o bien

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\varepsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k.$$

Del hecho de que $D_\mu\psi$ tiene la misma propiedad de transformación que ψ vemos que

$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi]' = U(\theta)(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi, \quad (2.16)$$

sustituyendo (2.15) en (2.16) tenemos

$$\tau \cdot F_{\mu\nu}' U(\theta)\psi = U(\theta)\tau \cdot F_{\mu\nu}\psi,$$

o bien

$$\tau \cdot F_{\mu\nu}' = U(\theta)(\tau \cdot F_{\mu\nu})U^{-1}(\theta),$$

para un transformación infinitesimal $\theta_i \ll 1$ esto se traduce en que

$$F_{\mu\nu}^i = F_{\mu\nu}^i + \varepsilon^{ijk}\theta^j F_{\mu\nu}^k.$$

A diferencia del caso abeliano, $F_{\mu\nu}^i$ se transforma no trivialmente como un triplete $SU(2)$. Sin embargo el producto

$$\text{tr}\{(\tau \cdot F_{\mu\nu})(\tau \cdot F^{\mu\nu})\} \sim F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu},$$

es invariante de norma.

Entonces podemos escribir un lagrangiano que es invariante de norma.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi.$$

En efecto se comprueba de manera directa que acuerdo a las definiciones de $F_{\mu\nu}^i$ y $D_\mu\Psi$ y utilizando las reglas de transformación (2.3)(2.13) el lagrangiano anterior es invariante ante la transformación de norma. Lo discutido anteriormente ejemplifica claramente la estrecha relación entre el principio de invariancia local de los campos y la estructura de las interacciones que experimentan los mismos. En el caso no abeliano, un término de masa para el campo vectorial tendría la forma $A_\mu^i A_i^\mu = \vec{A}_\mu \cdot \vec{A}^\mu$, el cual no se incluye en el lagrangiano, por que no es invariante de norma. Lo anterior no constituye un problema en el caso abeliano, ya que es bien sabido que en QED el fotón es una partícula de masa cero. Sin embargo al tratar de aplicar las ideas de la teoría de norma no abeliana a las interacciones débiles, nos encontramos que estas son de muy corto alcance. Por lo tanto los bosones intermediarios deben ser masivos. Surge la pregunta: ¿es posible preservar la estructura de una teoría invariante de norma y al mismo tiempo tener bosones intermediarios masivos?

Entonces si queremos generar interacción débil via el principio de norma , debemos dar de alguna forma masa al bosón de norma. De aquí el mecanismo de Higgs.

2.1 Rompimiento espontáneo de simetría y mecanismo de Higgs

A continuación estudiamos algunos aspectos del rompimiento espontáneo de simetría y mecanismo de Higgs, el cual resulta de fundamental importancia en el modelo electrodébil, adicionalmente será de utilidad cuando estudiemos el mecanismo see-saw y el modelo izquierdo derecho, ya que a través de estos modelos los neutrinos adquieren masa.

La imposición de una simetría local implica la existencia de partículas vectoriales sin masa. Si queremos evitar esto y obtener bosones vectoriales masivos, la simetría debe romperse de alguna forma [8]. Si introducimos términos explícitos de rompimiento en forma arbitraria se altera el comportamiento de la teoría en altas energías. Podemos contemplar la posibilidad de rompimiento espontáneo de simetría como se ve a continuación.

2.1.1 Invariancia del estado base como condición del rompimiento

Aquí veremos el papel que juega el estado base (vacío físico) en el rompimiento de la simetría.

Consideremos un Hamiltoniano H . Sea U un elemento del grupo de simetría el cual deja al hamiltoniano invariante.

$$UHU^\dagger = H,$$

además conecta estados que forman una base (representación irreducible) para el grupo

$$U|A\rangle = |B\rangle. \quad (2.17)$$

Se sigue que

$$E_A = \langle A|H|A\rangle = \langle B|H|B\rangle = E_B. \quad (2.18)$$

Entonces la simetría del hamiltoniano se manifiesta en las degeneraciones de los estados de energía correspondientes a las bases del grupo de simetría.

Una declaración implícita de (2.17) de la cual se sigue (2.18) es la invariancia del estado base bajo las transformaciones de simetría. Entonces $|A\rangle$ y $|B\rangle$ deben relacionarse con el estado base $|0\rangle$ a través de algunos operadores de creación apropiados ϕ_A y ϕ_B

$$|A\rangle = \phi_A|0\rangle \quad |B\rangle = \phi_B|0\rangle \quad y \quad U\phi_A U^\dagger = \phi_B.$$

La ecuación (2.17) se sigue solo si $U|0\rangle = |0\rangle$, cuando esto no se satisface, las condiciones (2.18) se descomponen además de la consecuencia usual de los niveles de energía degenerados. Esta situación se conoce como *rompimiento espontáneo de simetría*.

Tenemos entonces que la condición para tener rompimiento espontáneo de simetría es, la no invariancia del estado base $U|0\rangle \neq |0\rangle$ lo cual es equivalente a tener:

$$\langle 0|\phi_j|0\rangle \neq 0. \quad (2.19)$$

de aquí se sigue que existen estados de masa cero (bosones de Goldstone).

2.1.2 Rompimiento espontáneo para una simetría discreta

A continuación ilustraremos un caso muy simple, el de un campo escalar real, el cual tiene un solo grado de libertad y presenta una simetría discreta, con lo cual la condición (2.19) tiene lugar.

Consideremos la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad (2.20)$$

Con la simetría discreta $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$.

Como $\partial_0\phi$ es el campo de momento conjugado a ϕ , la densidad hamiltoniana está dada por:

$$H = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (2.21)$$

El potencial clásico puede identificarse como

$$u(\phi) = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)$$

$$\text{con } V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4.$$

El término $(\nabla\phi)^2$ es no negativo, el mínimo de $u(\phi)$ tendrá la propiedad $\nabla\phi = 0$ con ϕ constante dado por la minimización de $V(\phi)$, entonces el acoplamiento λ es positivo.

Los posibles casos para μ^2 se muestran en la siguiente figura

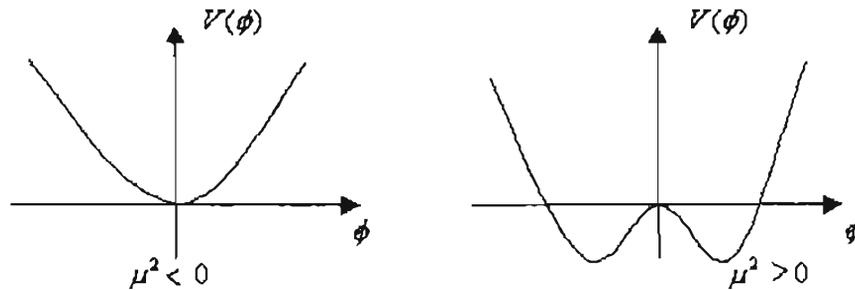


Figura 2.1: Aquí tenemos los dos posibles potenciales para los dos posibles valores de μ^2

En lenguaje de campos cuánticos, el vacío es el estado base y los campos de estado base clásico corresponden a valores esperados del operador de campo ϕ . Es decir

$$\langle 0|\phi|0\rangle = v$$

En el caso $\mu^2 < 0$, el estado base corresponde a $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$, y es no degenerado. Sin embargo para $\mu^2 > 0$, existen dos mínimos posibles dados por

$$v = \pm \left(-\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Estos dos posibles valores para v corresponden a dos posibles vacíos. Uno puede elegir uno y solo uno para construir la teoría, pero cualquiera que sea la elección rompe la simetría original ($\phi \rightarrow -\phi$).

Como ya se había dicho antes este caso es el más sencillo, el potencial depende de un solo campo ϕ , si aumentamos la dependencia a dos grados de libertad entonces los potenciales en la figura anterior se vuelven paraboloides de revolución y de ahí que al segundo de estos potenciales se le llame de sombrero de charro, o fondo de botella de vino.

2.1.3 Rompimiento espontáneo de simetría para un campo escalar complejo

A continuación consideraremos un caso más ilustrativo sobre el rompimiento de la simetría el caso del potencial que depende de dos campos ϕ_1 y ϕ_2 . Es

decir

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

Consideremos la densidad lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\lambda \phi_2)^2 - V(\phi_1^2 + \phi_2^2), \quad (2.22)$$

con

$$V(\phi_1^2 + \phi_2^2) = -\frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2,$$

la cual tiene una simetría $O(2)$ es decir

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

El extremo del potencial V es determinado por

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{\delta \phi_1} &= \phi_1 [-\mu^2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)] = 0 \\ \frac{\delta V}{\delta \phi_2} &= \phi_2 [-\mu^2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)] = 0. \end{aligned}$$

para $\mu^2 > 0$ el mínimo del potencial está en

$$(\phi_1^2 + \phi_2^2) = v^2,$$

con

$$v = \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Una representación gráfica del potencial se ve en la figura siguiente

El mínimo consiste de puntos en un círculo (en la figura es el círculo punteado) de radio v en el plano (ϕ_1, ϕ_2) , ellos se relacionan entre si a través de rotaciones $O(2)$. Son todos equivalentes y son un número infinito de vacíos degenerados. Cualquier punto en este círculo puede ser elegido como el vacío real.

Elegimos por ejemplo

$$\langle 0|\phi_1|0\rangle = v \quad \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0 \quad (2.23)$$

entonces la simetría $O(2)$ es rota por el estado de vacío. Para hallar el espectro de partículas consideremos pequeñas oscilaciones alrededor del mínimo que elegimos anteriormente (2.23) y definimos.

$$\phi'_1 = \phi_1 - v, \quad \phi'_2 = \phi_2$$

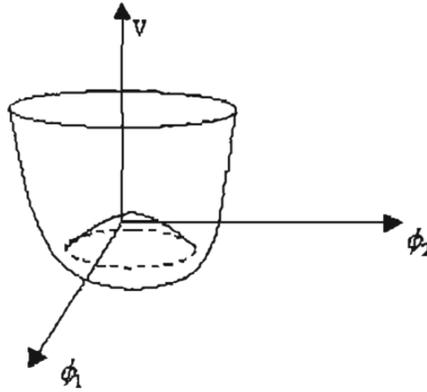


Figura 2.2: En esta figura tenemos una representación del potencial del lagrangiano en (2.22) que es función de los campos ϕ_1 y ϕ_2 y vemos por que se le llama de fondo de botella de vino o de sombrero de charro

La densidad lagrangiana puede ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_\lambda \phi_1]^2 + (\partial_\lambda \phi_2)^2] - \mu^2 \phi_1^2 - \lambda v \phi_1 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2.$$

Podemos ver que no hay términos cuadráticos aislados para el campo ϕ_2 mientras que para el campo ϕ_1' aparece uno con coeficiente $-\mu^2$. Por lo tanto ϕ_2 se identifica con el bosón de Goldstone sin masa, y ϕ_1' es una partícula con masa $(2\mu^2)^{\frac{1}{2}}$.

Esto puede ser visto gráficamente en la figura, pequeñas oscilaciones en cualquier punto del círculo de mínimos pueden ser descompuestas en componentes radial y angular. Las oscilaciones en la parte angular se llevan a cabo a lo largo de una trayectoria equipotencial y hacerlas no cuesta energía alguna, entonces corresponden a partículas sin masa. Con nuestra elección del vacío (2.23) la oscilación polar es a lo largo de la dirección ϕ_2 , entonces ϕ_2 es el boson de Goldstone

2.1.4 El mecanismo de Higgs

Ya vimos que la elección de uno de todos los posibles estados bases degenerados, como vacío físico rompe la simetría. Como consecuencia desaparece la degeneración en los niveles de energía. Pero según el teorema de Goldstone [8], esto debe implicar la existencia de un conjunto de bosones escalares sin masa.

En el caso de la física de partículas elementales, tales bosones de Goldstone

son una característica no deseable de la teoría, ya que no se observan en la naturaleza partículas escalares sin masa.

En contraposición, cuando se consideran campos vectoriales, los cuales son portadores de las interacciones, se tiene que la invariancia de norma de la teoría se cumple solamente si dichos campos tienen masa cero.

Dicha propiedad es razonable en el caso de la electrodinámica, ya que los fotones tienen masa nula, correspondiente a una interacción de largo alcance. Sin embargo las interacciones débiles son de muy corto alcance, por lo cual deben corresponder a partículas vectoriales muy masivas. una pregunta que surge, es ¿es posible tener partículas vectoriales masivas que preserven las propiedades de invariancia de norma de la teoría?

El mecanismo de Higgs es una forma de obtener partículas vectoriales con masa. Como veremos a continuación, al combinar los bosones de norma sin masa y los bosones de goldstone sin masa obtendremos partículas vectoriales con masa.

Para ejemplificar esto, hagamos un ejemplo sencillo.

Considere el caso de un teoría de norma abeliana $U(1)$. El lagrangiano viene dado como

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.24)$$

donde

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= (\partial_\mu - ig A_\mu) \phi \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned}$$

El lagrangiano es invariante bajo la transformación de norma local, es decir:

$$\begin{aligned} \phi(x) \rightarrow \phi'(x) &= e^{-i\alpha(x)} \phi(x) \\ A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Note que el lagrangiano en (2.24) no incluye un término explícito de masa $\frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu$, ya que dicho término no es invariante ante transformaciones de norma.

Cuando $\mu^2 > 0$ el mínimo del potencial

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (2.26)$$

está en

$$|\phi| = v/\sqrt{2}$$

con

$$v = (\mu^2/\lambda)^{\frac{1}{2}}.$$

Esto significa que el operador de campo ϕ desarrolla un valor esperado en el vacío

$$|\langle 0|\phi|0\rangle| = v/\sqrt{2}.$$

Si escribimos a ϕ en términos de los campos reales ϕ_1 y ϕ_2

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2),$$

podemos elegir

$$\langle 0|\phi_1|0\rangle = v \quad \text{y} \quad \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0. \quad (2.27)$$

Entonces el lagrangiano (y el potencial) tiene simetría $U(1)$ y la minimización puede solo fijar el módulo de ϕ . Al elegir como vacío físico (2.27) entre este infinito número de valores mínimos, se rompe la simetría.

Si usamos los campos

$$\phi'_1 = \phi_1 - v \quad \text{y} \quad \phi'_2 = \phi_2$$

deberíamos concluir que ϕ'_2 corresponde a un bosón de Goldstone sin masa. Sin embargo la característica agregada del caso es que tenemos una simetría de norma local. La derivada ordinaria es remplazada por la derivada covariante, esto produce:

$$\begin{aligned} |D_\mu\phi|^2 &= |(\partial_\mu - igA_\mu)\phi|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi'_1 + gA_\mu\phi'_2)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi'_2 + gA_\mu\phi'_1)^2 \\ &\quad - gvA_\mu(\partial_\mu\phi'_2 + gA_\mu\phi'_1) + \frac{g^2v^2}{2}A^\mu A_\mu. \end{aligned} \quad (2.28)$$

El ultimo término puede ser interpretado como un término de masa para A_μ . Entonces el bosón de norma adquiere una masa $M = gv$.

En (2.28) el término

$$gvA_\mu\partial_\mu\phi'_2,$$

indica una mezcla entre A_μ y ϕ'_2 , lo cual hace la interpretación menos clara. Para remover este término de mezcla, parametrizamos en variables polares y

cambiamos solamente el modulo del campo

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x)]e^{\frac{i\xi(x)}{v}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x) + i\xi(x) + \dots].\end{aligned}\quad (2.29)$$

Entonces para pequeñas oscilaciones $\eta(x)$ y $\xi(x)$ coinciden con ϕ'_1 y ϕ'_2 respectivamente. El lagrangiano tiene ahora la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu\eta)^2 + (\partial_\mu\xi)^2] - \frac{\mu^2}{2}(\eta^2 + \xi^2)\quad (2.30)$$

Las condiciones de cuantización canónicas no cambian, $\eta(x)$ y $\xi(x)$ tienen la misma interpretación de partícula como ϕ_1 y ϕ_2 . Ahora podemos remover los términos de (2.28) que son poco claros, fijando la norma (unitaria).

Para esto definimos nuevos campos con una transformación de norma particular, que se obtiene seleccionando en (2.25) a $\alpha = \xi/v$:

$$\begin{aligned}\phi^u(x) &= e^{i\frac{\xi}{v}}\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x)) \\ b_\mu(x) &= A_\mu(x) - \frac{1}{gv}\partial_\mu\xi(x),\end{aligned}\quad (2.31)$$

De la propiedad de transformación de norma (2.25) tenemos

$$\begin{aligned}D_\mu\phi &= e^{-i\frac{\xi}{v}}(\partial_\mu\phi^u - igB_\mu\phi^u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\xi}{v}}(\partial_\mu\eta - igB_\mu(v + \eta))\end{aligned}\quad (2.32)$$

y

$$|D_\mu\phi|^2 = \frac{1}{2}|\partial_\mu\eta - igB_\mu(v + \eta)|^2,$$

además

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu.$$

El lagrangiano inicial (2.24) se puede escribir

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= [\partial_\mu\eta - igB_\mu(v + \eta)]^2 + \frac{\mu^2}{2}(v + \eta)^2 \\ &\quad - \frac{\lambda}{4}(v + \eta)^4 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \\ &= \ell_0 + \ell_1\end{aligned}\quad (2.33)$$

con

$$\ell_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \eta^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + \frac{1}{2}(gv)^2 B_\mu B^\mu \quad (2.34)$$

$$\ell_1 = \frac{1}{2}g^2 B_\mu B^{\mu\nu} \eta (2v + \eta) - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda \eta^4 \quad (2.35)$$

Es claro que ℓ_0 es el lagrangiano libre para un bosón vectorial masivo con masa $M = gv$ y un mesón escalar con masa $m = \sqrt{2}\mu$. El campo $\xi(x)$ desapareció. Es decir el bosón de Goldstone desaparece.

Antes del rompimiento espontáneo de simetría, teníamos dos campos escalares ϕ_1 y ϕ_2 junto con un bosón de norma sin masa A_μ (con solo dos estados de polarización). Si contamos los grados de libertad son cuatro.

Entonces el campo de norma sin masa A_μ se combina con el campo escalar ξ para dar un campo vectorial masivo B_μ , que tiene tres grados de libertad, el cual aunado al grado de libertad correspondiente al campo de Higgs η nos dan un total de cuatro grados de libertad.

La importancia y belleza del mecanismo de Higgs consiste en que elimina dos características no deseables de la teoría original:

(i) Bosones de Goldstone.

(ii) Bosones de norma sin masa.

los cuales son convertidos en bosones de norma masivos. Lo anterior resulta esencial en el modelo estándar, en el cual los bosones de norma Z^0 y W^\pm portadores de las interacciones débiles, deben ser masivos para poder explicar el corto alcance de las interacciones débiles.

Este es el mecanismo de Higgs para el caso de una simetría abeliana.

2.2 Modelo Electrodébil

En esta sección revisaremos la estructura básica de la teoría electrodébil. El inicio del estudio de estas interacciones se remonta a 1934, cuando Fermi propuso un modelo de interacción para el decaimiento β

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{p}\gamma_\mu n][\bar{e}\gamma^\mu \nu] + h.c.$$

donde las letras p, n, e, ν denotan los nombres de los operadores de campos de fermiones. Después al descubrirse el fenómeno de violación de la paridad (Lee and Yang 1956) este impulsó la formulación de la teoría V-A (Feynman and Gell-Mann; Sudarshan and Marshak; Sakuray. Todos en 1958). Con ella se propuso el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}J_\mu^\dagger J^\mu + h.c. \quad (2.36)$$

con J_μ la corriente débil.

Si separamos en las partes leptónica y hadrónica,

$$J_\mu = J_{l\mu} + J_{h\mu},$$

la corriente leptónica puede ser escrita directamente en términos de campos leptónicos

$$J_l^\mu = \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e + \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu,$$

y la corriente hadrónica puede ser escrita en forma compacta en términos de campos de quarks

$$J_h^\mu = \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d_\theta,$$

con

$$d_\theta = \cos\theta_c d + \sin\theta_c s,$$

donde θ_c es el ángulo de Cabibbo $\sim 15^\circ$ y se puede generalizar como

$$J_h^\mu = \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d_\theta + \bar{c} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) s_\theta.$$

con

$$s_\theta = \cos\theta_c s - \sin\theta_c d$$

Como la corriente electromagnética, la corriente débil en el lagrangiano (2.36) se transforma como un cuadvivector bajo la transformación de Lorentz, así

que de la misma forma que se hace en la electrodinámica cuántica introducimos un nuevo campo masivo W_μ y escribimos la interacción básica como

$$\ell = g(J_\mu W^\mu + h.c.).$$

Las interacciones débiles deben incorporar bosones vectoriales intermediarios con masa, ya que son de muy corto alcance. Sin embargo el hecho de que tengan masa estropea la renormalizabilidad de la teoría (esta se pierde si se inserta con la mano la masa de los bosones intermediarios). Este problema fue resuelto con la aparición de una teoría de norma en la cual la simetría se rompe espontáneamente [11]. La simetría de norma que se requiere es $SU(2) \times U(1)$. Este modelo es hoy en día la teoría estándar de las interacciones electrodébiles.

Elección del grupo $SU(2) \times U(1)$. Consideremos la teoría del bosón intermediario con un electrón y un neutrino. La interacción está dada como antes por el lagrangiano

$$\mathcal{L}_w = g(J_\mu W^\mu + h.c.)$$

donde

$$J_\mu = \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e$$

es la corriente cargada. Por otro lado la interacción electromagnética de esos leptones está dada por

$$\mathcal{L}_{em} = e J_\mu^{em} A^\mu$$

donde

$$J_\mu^{em} = -\bar{e} \gamma_\mu e$$

es la corriente electromagnética. En una teoría de norma de interacciones débiles y electromagnéticas, se necesitan al menos tres bosones vectoriales de norma (W^\pm y el fotón) para acoplar las corrientes J , J^\dagger y J^{em} . El grupo más simple con tres generadores es $SU(2)$. Sin embargo estas tres corrientes no tienen la propiedad de cerradura para formar un álgebra bajo conmutación. Definimos las cargas débil y eléctrica como

$$T_+ = \frac{1}{2} \int d^3x J_0 = \frac{1}{2} \int d^3x \nu_e^\dagger (1 - \gamma_5) e$$

$$T_- = T_+^\dagger$$

$$Q = \int d^3x J_0^{em} = - \int d^3x e^\dagger e.$$

Unsando las reglas de conmutación canónicas para fermiones

$$\{\psi_i^\dagger(x, t), \psi_j^\dagger(x', t)\} = \delta_{ij}\delta^3(x - x'),$$

puede mostrarse que

$$[T_+, T_-] = 2T_3$$

con

$$T_3 = \frac{1}{4} \int d^3x [\nu_e^\dagger(1 - \gamma_5)\nu_e - e^\dagger(1 - \gamma_5)e].$$

Tenemos que $T_3 \neq Q$, entonces T_\pm, Q no forman un álgebra cerrada. Sin embargo, podemos introducir un bosón de norma extra que se acople a T_3 . Estos cuatro generadores (T_+, T_-, T_3, Q) forman el grupo $SU(2) \times U(1)$. Con la elección del grupo $SU(2) \times U(1)$ se puede escribir un lagrangiano invariante de norma

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \quad (2.37)$$

donde

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\varepsilon^{ijk}A_\mu^j A_\nu^k, \quad i = 1, 2, 3$$

y

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

son los tensores de campo-norma de $SU(2)$ y $U(1)$ respectivamente. Claramente, antes del rompimiento espontáneo de simetría estos corresponden a bosones de norma sin masa.

Ahora estudiaremos el modelo estándar con el sector fermiónico reducido (por simplicidad) compuesto por los leptones e, ν_e y los quarks u y d únicamente. Los grados de libertad de fermiones son campos de dos componentes con helicidades definidas. Las interacciones de norma conservan la helicidad [11], así que debemos hacer elecciones independiantes para fermiones izquierdos y derechos.

Elección de los números cuánticos $SU(2) \times U(1)$. Hemos aprendido que el grupo $SU(2)$ es generado por las cargas débiles

$$T_+ = \int (\nu_{eL}^\dagger e_L + u_L^\dagger d_L) d^3x$$

$$T_- = (T_+)^\dagger$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \int (\nu_{eL}^\dagger \nu_{eL} - e_L^\dagger e_L + u_L^\dagger u_L - d_L^\dagger d_L) d^3x.$$

De estas expresiones es claro que

$$l_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad y \quad q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$$

son los dobletes $SU(2)$ y que e_R, u_R y d_R son los singletes. El grupo $U(1)$ debe ser elegido en forma tal que la carga eléctrica Q

$$\begin{aligned} Q &= \int (-e^\dagger e + \frac{2}{3} u^\dagger u - \frac{1}{3} d^\dagger d) d^3x \\ &= \int (-e_L^\dagger e_L - e_R^\dagger e_R + \frac{2}{3} u_L^\dagger u_L + \frac{2}{3} u_R^\dagger u_R - \frac{1}{3} d_L^\dagger d_L - \frac{1}{3} d_R^\dagger d_R) d^3x \end{aligned} \quad (2.38)$$

sea una combinación lineal del generador $U(1)$ y T_3 de $SU(2)$. Observemos que la combinación

$$Q - T_3 = \int [-\frac{1}{2}(\nu_{eL}^\dagger \nu_{eL} + e_L^\dagger e_L) + \frac{1}{6}(u_L^\dagger u_L + d_L^\dagger d_L) - e_R^\dagger e_R + \frac{2}{3} u_R^\dagger u_R - \frac{1}{3} d_R^\dagger d_R] d^3x,$$

tiene la propiedad de dar el mismo número cuántico a todos los miembros de un doblete $SU(2)$. Además conmuta con todos los generadores de $SU(2)$, es decir

$$\{Q - T_3, T_i\} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Elegimos entonces

$$Y = 2(Q - T_3),$$

como el generador de $U(1)$, y nos referimos a Y como la *hipercarga débil*. Para obtener cargas eléctricas correctas hacemos

$$Y(l_L) = -1, \quad Y(e_R) = -2,$$

$$Y(q_L) = 1/3, \quad Y(u_R) = 4/3, \quad Y(d_R) = -2/3.$$

Ahora el lagrangiano completo e invariante de norma será

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4,$$

aquí \mathcal{L}_1 es el término de la energía cinética de los campos de norma (2.37). \mathcal{L}_2 es el término que contiene las derivadas covariantes para los campos fermiónicos, \mathcal{L}_3 es el término para las derivadas covariantes y el potencial de los campos de Higgs, \mathcal{L}_4 es el término de los acoplamientos de Yukawa. Las

formas correspondientes serán:

Para el primer término \mathcal{L}_1 se tendrá la misma forma que se tiene en (2.37).

Para el segundo término:

$$\mathcal{L}_2 = \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi,$$

con la derivada covariante

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - i g T \cdot A_\mu - i g' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \psi.$$

Por ejemplo

$$D_\mu l_L = \left(\partial_\mu - i \frac{g}{2} \tau \cdot A_\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \right) l_L,$$

$$D_\mu e_R = (\partial_\mu + i g' B_\mu) e_R.$$

El tercer término \mathcal{L}_3 tendrá la forma

$$\mathcal{L}_3 = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi),$$

donde

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau \cdot A_\mu - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \Phi,$$

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.$$

El término que contiene a los acoplamientos de Yukawa se escribe como

$$\mathcal{L}_4 = f^{(e)} \bar{l}_L \Phi e_R + f^{(u)} \bar{q}_L \tilde{\Phi} u_R + f^{(d)} \bar{q}_L \Phi d_R + h.c.,$$

con

$$\tilde{\Phi} = i \tau_2 \Phi^*.$$

Dentro de este lagrangiano los términos que involucran campos de Higgs, como (\mathcal{L}_3 y \mathcal{L}_4) son muy importantes pues habíamos mencionado que se requiere una teoría con una simetría que se rompa espontáneamente, esta simetría está contenida en el potencial del tercer término del lagrangiano (\mathcal{L}_3) así que estos términos son esenciales para la teoría.

Masas. Del lagrangiano completo pueden leerse diferentes términos de masa. *Masa escalar.* Es la masa que se obtiene en la parte del lagrangiano para los campos de Higgs (Ver mecanismo de Higgs)

$$m_\eta = \sqrt{2}\mu.$$

Masas de fermiones. Son las masas que se obtienen en la parte de los acoplamientos de Yukawa

$$m_e = f^{(e)}v/2, \quad m_u = f^{(u)}v/2, \quad m_d = f^{(d)}v/2.$$

Masas de bosones vectoriales. Los bosones de Goldstone al acoplarse con los bosones de norma dan lugar a bosones vectoriales intermedarios, los cuales están contenidos en la derivada $(D_\mu\Phi)$ en la parte del lagrangiano para los campos de higgs (ℓ_3)

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{v^2}{2} \chi^\dagger \left(\frac{g}{2} \tau \cdot A'_\mu + \frac{g'}{2} B'_\mu \right) \left(\frac{g}{2} \tau \cdot A'^\mu + \frac{g'}{2} B'^\mu \right) \chi \\ &= \frac{v^2}{8} \{ g^2 [(A'^1_\mu)^2 + (A'^2_\mu)^2] + (gA'^3_\mu - g'B'^\mu)^2 \} \\ &\equiv M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu, \end{aligned} \tag{2.39}$$

con $\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y donde se ha hecho la siguiente identificación

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} = \frac{g^2 v^2}{8} [(A'^1_\mu)^2 + (A'^2_\mu)^2].$$

Entonces

$$W^\pm = (A'^1_\mu \mp iA'^2_\mu)/\sqrt{2}$$

y

$$M_W^2 = g^2 v^2/4.$$

Para bosones vectoriales neutros

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu &= \frac{v^2}{8} (gA'^3_\mu - g'B'^\mu)^2 \\ &= \frac{v^2}{8} (A'^3_\mu, B'^\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^3_\mu \\ B'^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (Z_\mu, A_\mu) \begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

La matriz de masa fue diagonalizada por una transformación ortogonal

$$Z_\mu = \cos\theta_W A'^3_\mu - \sin\theta_W B'_\mu$$

$$A_\mu = \sin\theta_W A'_\mu{}^3 + \cos\theta_W B'_\mu,$$

con

$$\tan\theta_W = g'/g$$

y

$$M_Z^2 = v^2(g^2 + g'^2)/4$$

Esta es la teoría básica de las interacciones débiles, la cual es aceptada actualmente. En 1983 en CERN se corroboró la existencia de los bosones W^\pm y Z^0 cuya masa es aproximadamente de 80 GeV y 90 GeV respectivamente. Esta teoría tiene una limitación; es que según ella los neutrinos tendrían masa cero lo cual no es correcto, por esto es que se requiere hacer algunas modificaciones para obtener neutrinos masivos. Como ejemplo están los modelos de masas para neutrinos que veremos más adelante.

Capítulo 3

Propiedades generales de los neutrinos

3.1 La ecuación de Dirac

Recordemos la ecuación de Dirac para una partícula libre.

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (-i\alpha \cdot \nabla + m\beta)\Psi. \quad (3.1)$$

Donde α y β son matrices que cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \alpha_l^2 &= \beta^2 = 1 \\ \alpha_l\alpha_j + \alpha_j\alpha_l &= 0 \\ \alpha_l\beta + \beta\alpha_l &= 0 \\ l &= 1, 2, 3 \\ l &\neq j. \end{aligned} \quad (3.2)$$

y ∇ es el operador gradiente. Las matrices de menor dimensión que cumplen esas condiciones son matrices de 4x4. Se acostumbra reescribir la ecuación de Dirac en una forma más compacta, utilizando la notación covariante. De (3.1) tenemos

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\alpha} \cdot \nabla - m\beta \right) \Psi = 0.$$

Multiplicamos por β y obtenemos

$$i\beta\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (-i\beta\alpha \cdot \nabla + m\beta^2)\Psi.$$

Pero $\beta^2 = 1$, además llamaremos $\beta = \gamma^0$ y $\beta\alpha_i = \gamma^i$ con $i = 1, 2, 3$. A partir de (3.2) vemos que las relaciones de anticonmutación toman la forma

$$\{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

donde $\mu = 1, 2, 3$ y

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Este tipo de álgebra (3.3) para las matrices γ se conoce como álgebra de Clifford, y juega un papel muy importante en el estudio de las propiedades de la ecuación de Dirac. Entonces

$$(i\gamma^0\partial_t + i\vec{\gamma} \cdot \nabla - m)\Psi = 0.$$

Pero esto se puede compactar más usando la convención para la suma de Einstein, (índices iguales en una misma expresión se suman), entonces:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

Si además usamos la notación de letras cortadas de Feynman $\not{\mu} = a_\mu\gamma^\mu$

$$(i\not{\partial} - m)\Psi = 0. \quad (3.6)$$

Para resolver la ecuación de Dirac se necesita una representación específica de las matrices γ . Existen varias representaciones, las más conocidas son la de Dirac y la de Majorana, pero en el estudio de los neutrinos es conveniente usar la representación de quiral [4] en la cual.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Donde $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ son las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que las matrices γ son de dimensión 4×4 es decir el símbolo 1 en estas matrices representa el negativo de la matriz unidad de 2×2 .

Si Ψ es una solución de la ecuación de Dirac, definimos

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 \quad (3.8)$$

Esta definición será útil, más adelante.

Ahora consideremos la ecuación de Dirac (3.1) y su hermitiana adjunta

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t} &= (-i \vec{\alpha} \cdot \nabla + m\beta)\psi, \\ -i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} &= \psi^\dagger (i \vec{\alpha} \cdot \nabla + m\beta). \end{aligned}$$

Multipliquemos la primera ecuación por la izquierda por Ψ^\dagger y la segunda por la derecha por Ψ , luego le restamos la segunda a la primera y obtenemos

$$i \left(\Psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \Psi \right) = -i (\Psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \Psi + \Psi \vec{\alpha} \cdot \nabla \Psi^\dagger) + m (\Psi^\dagger \beta \psi - \Psi^\dagger \beta \psi),$$

como las matrices α no dependen de x^μ , tenemos

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^\dagger \Psi) = -i \nabla \cdot (\Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi). \quad (3.9)$$

Recordemos que $\gamma^0 \gamma^0 = 1$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \Psi) = -\nabla \cdot (\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \vec{\alpha} \Psi), \quad (3.10)$$

usando la definición (3.8)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\Psi} \gamma^0 \Psi) = -\nabla \cdot (\bar{\Psi} \vec{\gamma} \Psi), \quad (3.11)$$

aquí definimos $\rho = (\bar{\Psi} \gamma^0 \Psi)$ y $\vec{J} = (\bar{\Psi} \vec{\gamma} \Psi)$ entonces (3.11) queda como

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (3.12)$$

Esta ecuación es la conocida ecuación de continuidad. Como hemos visto puede obtenerse de la ecuación de Dirac.

Para usar la notación covariante, definimos la 4-corriente J en la cual $J^0 = \rho$ y $J^i = (\vec{J})_i$ entonces $J = (\rho, \vec{J})$. Podemos ahora escribir la ecuación de continuidad en forma covariante

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (3.13)$$

3.2 Soluciones de la ecuación de Dirac

Ya que conocemos la ecuación de Dirac podemos pasar a ver como son sus soluciones. Consideremos inicialmente el caso libre pues debido al tipo de interacción que los neutrinos tienen, usualmente se comportan como libres. Consideremos (3.5) y propongamos una solución del tipo

$$\Psi = Ne^{-ip \cdot x} \Phi(p). \quad (3.14)$$

En (3.14) usamos la notación $p \cdot x$ en la cual p y x representan a los cuatrivectores $p = (E, p^x, p^y, p^z)$ y $x = (t, x, y, z)$ con lo cual $p \cdot x = (Et - \vec{p} \cdot \vec{x})$. Al sustituir (3.14) en (3.5) se cancelan las exponenciales y nos queda

$$(\not{p} - m) \Phi(p) = 0.$$

Ahora necesitamos la forma explícita de las matrices γ y además proponemos

$$\Phi(p) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Entonces tendremos que

$$\begin{pmatrix} -m & -\sigma \cdot p - E \\ \sigma \cdot p - E & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \quad (3.16)$$

de donde

$$\phi = -\frac{(\sigma \cdot p + E)}{m} \chi, \quad \chi = \frac{(\sigma \cdot p - E)}{m} \phi, \quad (3.17)$$

y como $\Phi(p) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ entonces tenemos dos soluciones para Φ

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(\sigma \cdot p - E)}{m} \end{pmatrix} \phi, \quad v = \begin{pmatrix} -\frac{(\sigma \cdot p + E)}{m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi. \quad (3.18)$$

Lo que genera dos soluciones para la ecuación de Dirac.

$$\Psi_1 = e^{-ip \cdot x} u, \quad \Psi_2 = e^{-p \cdot x} v.$$

La convención usual es tomar a la primera solución como la solución de energía positiva y la segunda de energía negativa, de manera que tengamos.

$$\Psi_+ = e^{-ip \cdot x} u, \quad \Psi_- = e^{p \cdot x} v. \quad (3.19)$$

Tomando en cuenta el cambio de signo en la exponencial de la solución de energía negativa, tenemos las soluciones para los espinores como

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(\sigma \cdot p - E)}{m} \end{pmatrix} \phi, \quad v = \begin{pmatrix} \frac{(\sigma \cdot p + E)}{m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi.$$

Aquí u y v ya son consistentes con (3.19), entonces u es la solución de energía positiva y v la de energía negativa.

Antes de proceder con la normalización, es necesario notar algo. De la ecuación (3.1) y de la proposición (3.15) tenemos.

$$E\Phi = (\vec{\alpha} \cdot p + m\beta)\Phi, \quad (3.20)$$

de donde al usar la representación quirral (3.7) y la definición (3.17)

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \cdot p & -m \\ -m & -\sigma \cdot p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

o bien

$$\begin{aligned} \sigma \cdot p \phi &= E\phi + m\chi \\ \sigma \cdot p \chi &= -E\chi - m\phi. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dividimos todo por $|p|$

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \hat{p} \phi &= \frac{E}{|p|} \phi + \frac{m}{|p|} \chi \\ \sigma \cdot \hat{p} \chi &= -\frac{E}{|p|} \chi - \frac{m}{|p|} \phi. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Tomamos el límite $E \simeq |p|$ lo cual implicará que $\frac{E}{|p|} \simeq 1$ $\frac{m}{|p|} \simeq 0$ entonces (3.23) queda como

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \hat{p} \phi &= \phi \\ \sigma \cdot \hat{p} \chi &= -\chi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Aquí vemos que $\sigma \cdot \hat{p}$ tiene dos valores propios respecto a ϕ y χ que son 1 y -1. Esta propiedad se conoce como helicidad y se entiende como la proyección del espín de la partícula respecto a su momento. El operador de helicidad

será $\lambda = S \cdot \hat{p}$ donde $S = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$.

Tomando en cuenta que $\hat{p} = p/|p|$ se tiene que

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot p) \phi &= |p| \phi \\ (\sigma \cdot p) \chi &= -|p| \chi. \end{aligned} \quad (3.25)$$

De acuerdo con (3.24) en el límite de masa cero tenemos dos soluciones independientes y desacopladas $\begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$ la primera de ellas tiene helicidad +1 y la segunda helicidad -1. Esta propiedad se mantiene para masa diferente de cero, se pueden elegir soluciones Ψ con helicidad bien definida, es decir $\lambda\Psi = \pm\Psi$.

Deberá notarse que las soluciones u y v no están normalizadas. Su condición de normalización será

$$u^\dagger u = 2E = v^\dagger v, \quad (3.26)$$

si ocupamos la definición (3.8) podemos ver que (3.26) nos lleva a que.

$$\begin{aligned} \bar{u}u &= 2m \\ \bar{v}v &= -2m. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Tenemos que

$$u^\dagger u = \left(\phi^\dagger \phi + \phi^\dagger \frac{(\sigma \cdot p - E)}{m} \cdot \frac{(\sigma \cdot p - E)}{m} \phi \right), \quad (3.28)$$

haciendo el producto

$$u^\dagger u = \left(\phi^\dagger \phi + \phi^\dagger \frac{p^2 - 2E\sigma \cdot p + E^2}{m^2} \phi \right), \quad (3.29)$$

aquí ocupamos que $\sigma \cdot p\phi = \phi$ lo cual nos lleva a

$$u^\dagger u = \frac{\phi^\dagger \phi}{m^2} (m^2 + p^2 - 2Ep + E^2), \quad (3.30)$$

o bien

$$u^\dagger u = \frac{\phi^\dagger \phi}{m^2} (-2Ep + 2E^2),$$

De donde obtenemos

$$u^\dagger u = \frac{2E}{m^2} (E - p).$$

Entonces de acuerdo a la normalización (3.26) obtenemos la constante que normaliza al espinor. Dicha constante será

$$N = \frac{m}{(E - p)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.31)$$

CAPÍTULO 3. PROPIEDADES GENERALES DE LOS NEUTRINOS 33

Para obtener (3.27) únicamente hay que meter el factor γ^0 entre u y v del desarrollo anterior. Los espinores normalizados, quedan como:

$$u = \frac{m}{(E-p)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(\sigma \cdot p - E)}{m} \end{pmatrix} \phi, \quad (3.32)$$

análogamente

$$v = \frac{m}{(E-p)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \frac{(\sigma \cdot p + E)}{m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi, \quad (3.33)$$

además podemos hacer

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

lo que nos generaría cuatro soluciones, dos de u y dos de v . Explícitamente.

$$\frac{\sigma \cdot p - E}{m} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} p_z - E & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z - E \end{pmatrix}.$$

Y de (3.32) tenemos

$$u_1 = \frac{m}{(E-p)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{(p_z - E)}{m} \\ \frac{(p_x + ip_y)}{m} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{m}{(E-p)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(p_x - ip_y)}{m} \\ \frac{-(p_z + E)}{m} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

además

$$\frac{\sigma \cdot p + E}{m} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} p_z + E & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z + E \end{pmatrix},$$

de aquí

$$v_1 = \frac{m}{(E-p)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \frac{(p_z + E)}{m} \\ \frac{(p_x + ip_y)}{m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{m}{(E-p)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \frac{(p_x - ip_y)}{m} \\ \frac{(E - p_z)}{m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Tenemos cuatro soluciones. Las dos primeras (3.34) son las soluciones de energía positiva. Las otras dos (3.35) son las de energía negativa. En cada signo de la energía, tenemos una solución con helicidad 1 y otra -1.

La solución de energía positiva, corresponde a un estado de partícula, con las dos posibles proyecciones de espín a lo largo de su momento. La solución de energía negativa corresponde al estado de antipartícula, también con dos posibles proyecciones del espín a lo largo de su momento.

Al normalizar los espinores usamos el operador de helicidad, veamos que podemos extraer de un espinor (u ó v) una de las dos partes que lo componen.

Si $u = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ digamos que queremos extraer a ϕ_1 de u , entonces necesitamos una matriz que anule a ϕ_2 y que ϕ_1 permanezca, ese tipo de matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

al multiplicar por u tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u = \frac{m}{(E-p)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(\sigma \cdot p - E)}{m} \end{pmatrix} \phi = \frac{m}{(E-p)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para extraer la otra parte necesitaremos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la representación quirál estas matrices se escriben como

$$\Lambda_+ = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_- = \frac{1 - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

A estos operadores se les denomina operadores de quiralidad. Como puede notarse, al tomar el momento en la dirección z y tomar el límite de masa cero la helicidad y la quiralidad coinciden. Estos operadores toman valores 1 y -1. Cuando toma valor 1 se tiene quiralidad derecha y cuando es -1 quiralidad izquierda. La utilidad de estos operadores es, que para quiralidad bien definida, descomponen una solución de neutrino en una parte izquierda y una derecha. Esta descomposición es esencial para describir las interacciones débiles, a través de las cuales los neutrinos interaccionan.

3.3 Simetrías de carga y paridad

En 1937 Majorana introdujo formalmente la idea de que hay partículas que son idénticas a su antipartícula. La diferencia entre una partícula de Dirac y una de Majorana radica en parte, en el comportamiento de estas bajo la conjugación de carga ¹.

Sea ν_- un neutrino masivo con helicidad negativa. En una teoría CPT invariante existe la imagen bajo CPT de ν_- , esta imagen es un antineutrino con helicidad positiva $\bar{\nu}_+$. Es decir.

$$\nu_- \xrightarrow{CPT} \bar{\nu}_+.$$

El neutrino que estamos considerando tiene masa, por lo que su velocidad es menor que la velocidad de la luz. Un observador puede moverse más rápido que el neutrino, de manera que este observador ve al neutrino viajando en dirección contraria pero con la misma proyección de espín. Esto es, mediante una transformación de Lorentz, convertimos a un neutrino con helicidad negativa en un neutrino con helicidad positiva.

$$\nu_- \xrightarrow{Lorentz} \nu_+.$$

Esto nos lleva a hacer la siguiente pregunta ¿los dos estados de helicidad positiva (ν_+ , $\bar{\nu}_+$) son iguales? Es decir ¿interactúan de la misma forma?

a) Si asumimos que no, entonces ν_+ tiene su propia imagen bajo CPT: $\bar{\nu}_-$

$$\nu_+ \xrightarrow{CPT} \bar{\nu}_-.$$

Este nuevo estado ($\bar{\nu}_-$) puede conectarse a $\bar{\nu}_+$ mediante una transformación de Lorentz.

$$\bar{\nu}_- \xrightarrow{Lorentz} \bar{\nu}_+.$$

Tenemos entonces cuatro estados con la misma masa. Este conjunto de estados se le llama neutrino de Dirac. Como un neutrino puede tener momentos magnético y eléctrico dipolar, los estados (ν_- , $\bar{\nu}_+$) pueden convertirse en (ν_+ , $\bar{\nu}_-$), cada uno mediante una transformación de Lorentz o por la acción de los campos B, E.

¹Más adelante en esta sección, veremos con cuidado esta simetría

- b) Si ν_+ es idéntico a $\bar{\nu}_+$, solo tenemos dos estados con igual masa. A este conjunto de dos estados se le llama neutrino de Majorana. En un marco de referencia en reposo, una transformación CPT aplicada a cada uno de los dos estados de espín, simplemente invierte el espín. Entonces una rotación de 180° lleva al neutrino de regreso a su estado original.

$$\begin{array}{ccc} \nu_+^M & \xrightarrow{CPT} & \nu_-^M \\ \nu_+^M & \xleftarrow{180^\circ} & \nu_-^M \end{array}$$

Esto quiere decir que un neutrino de Majorana es su propia antipartícula.

Hemos mencionado las simetrías de carga, paridad e inversión temporal. A continuación veremos la conjugación de carga y la paridad.

3.3.1 Paridad

Sabemos que la paridad sobre un vector espacial \mathbf{r} lo transforma en su opuesto $-\mathbf{r}$ y como el momento \mathbf{p} está definido en términos de \mathbf{r} ($\mathbf{p} = m(d\mathbf{r}/dt)$) entonces bajo paridad \mathbf{p} va a $-\mathbf{p}$. Si consideramos que la paridad actúa sobre un estado, se espera que

$$P |p, s\rangle = \eta_P | -p, s\rangle, \quad (3.37)$$

donde η_P será un factor de fase.

Si tenemos el operador de paridad P esperamos que este actúe únicamente en la parte espacial de un vector y no en la parte temporal, entonces si aplicamos el operador de paridad a un espinor, esperamos que cambie únicamente la dirección del momento, es decir

$$P u_s(p) = u_s(-p).$$

Propongamos que un campo de fermión libre, se transforma como

$$P \Psi(x, t) P^{-1} = \eta_P \gamma^0 \Psi(-x, t). \quad (3.38)$$

3.3.2 Conjugación de carga

La simetría de conjugación de carga se relaciona con las propiedades de la teoría, cuando se considera que las cargas de las partículas cambian de signo; es decir, se refiere al hecho de que por cada partícula, existe su correspondiente antipartícula.

Si tenemos un campo de Dirac Ψ , se espera que ante conjugación de carga este se transforme como $C\Psi(x, t)C^{-1} = \eta_c\Psi^c(x, t)$. Donde $\Psi^c(x, t)$ representa la antipartícula. La operación conjugación de carga lleva una partícula en su antipartícula, más algún factor de fase. Pedimos que $\Psi^c = \gamma^0 C\Psi^*$. Consideremos ahora la ecuación de Dirac (3.5)

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0,$$

introduzcamos la interacción electromagnética (por lo pronto para un electrón) por medio del principio del acoplamiento mínimo. $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$. Con lo cual se obtiene.

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\Psi = 0. \quad (3.39)$$

El signo menos es por la carga del electrón.

Pero esta ecuación debe valer también para antipartículas. En cuyo caso se debe tener.

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m)\Psi^c = 0. \quad (3.40)$$

Propongamos que la antipartícula sea $\psi^c = U\psi^*$ (Ψ^c es por que proviene de la conjugación de carga) entonces en la ecuación (3.40) tendremos.

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m)U\psi^* = 0,$$

o bien.

$$(i\gamma^\mu U(\partial_\mu + ieA_\mu) - mU)\psi^* = 0.$$

Ahora escribamos el complejo conjugado de esta ecuación.

$$(-i\gamma^{\mu*}U^*(\partial_\mu - ieA_\mu) - mU^*)\psi = 0,$$

multipliquemos por $(U^*)^{-1}$ del lado derecho.

$$\left(-i(U^*)^{-1}\gamma^{\mu*}U^*(\partial_\mu - ieA_\mu) - m(U^*)^{-1}U^*\right)\psi = 0.$$

entonces

$$\left(-i(U^*)^{-1}\gamma^{\mu*}U^*(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\right)\psi = 0.$$

Para que esta ecuación coincida con (3.39) se requiere que

$$-(U^*)^{-1}\gamma^{\mu*}U^* = \gamma^\mu. \quad (3.41)$$

En nuestra representación (3.7) puede verse que eligiendo $U = i\gamma^2$ se cumple (3.41). Por lo tanto $\psi^c = i\gamma^2\psi^*$

Por otro lado.

$$\begin{aligned} i\gamma^2\psi^* &= i\gamma^2(\gamma^0\gamma^0)\psi^* = i\gamma^2\gamma^0\gamma^{0*}\psi^* = i\gamma^2\gamma^0(\gamma^{0*})^{tt}(\psi^*)^{tt} \\ &= i\gamma^2\gamma^0(\psi^{*t}\gamma^{0*t})^t = i\gamma^2\gamma^0(\psi^\dagger\gamma^{0\dagger})^t = i\gamma^2\gamma^0(\psi^\dagger\gamma^0)^t = i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^t. \end{aligned}$$

Entonces $\psi^c = i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^t$ e identificamos que $C = i\gamma^2\gamma^0$ de aquí

$$\psi^c = C\bar{\psi}^t = \gamma^0 C\psi^*.$$

Para un campo Ψ tendremos $\Psi^c = \gamma^0 C\Psi^*$

La forma explícita de C en la representación quirral (3.7) es:

$$C = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

A continuación presentamos algunas propiedades características de la matriz de conjugación de carga

$$\begin{aligned} C^T &= C^\dagger = -C \\ CC^\dagger &= C^\dagger C = 1 \\ C^2 &= -1. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Estas propiedades no dependen de la representación de las matrices γ . Lo que es lo mismo, no dependen de la representación de C .

En la literatura se acostumbra trabajar con operadores de campo de partícula libre o simplemente operadores de campo libre. Como estamos comparando diferencias entre neutrinos de Dirac y Majorana, entonces hay un campo libre de Dirac y uno de Majorana.

El campo libre de Dirac se escribe

$$\Psi_D = \int \frac{d^3p}{\sqrt{V2E_p}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left(f_s(p)u_s(p)e^{-ip\cdot x} + g_s^\dagger(p)v_s(p)e^{ip\cdot x} \right). \quad (3.44)$$

Aquí $f_s(p)$ aniquila un estado de partícula con momento p y proyección de espín en la dirección del momento s . $g_s^\dagger(p)$ Crea un estado de antipartícula, y por simetría $g_s(p)$ aniquila un estado de antipartícula con momento p y espín s . V es un volumen de normalización.

El campo de Majorana tiene en cambio la forma.

$$\Psi_M = \int \frac{d^3p}{\sqrt{V2E_p}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left(f_s(p)u_s(p)e^{-ip\cdot x} + \lambda f_s^\dagger(p)v_s(p)e^{ip\cdot x} \right). \quad (3.45)$$

Aquí λ es un factor de fase de creación. Notar que existe ahora un solo operador f_s lo cual se debe a que en este caso la partícula coincide con su antipartícula, excepto por una fase.

Ya que definimos los operadores de campo, podemos ver las propiedades de estos ante la conjugación de carga.

Tenemos que un campo de fermión libre se transforma

$$C\Psi(x,t)C^{-1} = \eta_c^* \gamma^0 C\Psi^*(x,t) = \eta_c^* \Psi^c(x,t).$$

Veamos que para un campo de Majorana

$$C\Psi(x,t)C^{-1} = (\eta\lambda)^* \Psi(x,t). \quad (3.46)$$

Esto es por que para un campo de Majorana se pide $\Psi^c = \lambda^* \Psi(x)$ (pues una partícula de Majorana es su propia antipartícula, excepto por una fase). Este último argumento puede verse fácilmente usando la expresión para un campo de Majorana (3.45) y le aplicamos la transformación que nos lleve a la antipartícula

$$\Psi_M^c = \gamma^0 C\Psi_M^* = \int \frac{d^3p}{\sqrt{V2E_p}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \gamma^0 C \left(f_s^\dagger(p) u_s^*(p) e^{ipx} + \lambda^* f_s(p) v_s^*(p) e^{-ipx} \right), \quad (3.47)$$

aquí hay que usar que

$$\gamma^0 C u_s^*(p) = v_s(p) \quad \gamma^0 C v_s^*(p) = u_s(p), \quad (3.48)$$

estas propiedades pueden verificarse con (3.7), (3.18) y (3.42)

Entonces

$$\Psi_M^c = \lambda^* \int \frac{d^3p}{\sqrt{V2E_p}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left(\lambda f_s^\dagger(p) v_s(p) e^{ipx} + f_s(p) u_s(p) e^{-ipx} \right) = \lambda^* \hat{\Psi}, \quad (3.49)$$

quedándonos únicamente con los extremos se justifica

$$\hat{\Psi} = \lambda^* \Psi(x).$$

Recordemos (3.46) al juntar esta condición y ver que pasó en (3.47) y (3.49) podemos obtener.

$$\begin{aligned} C f_s(p) C^{-1} &= (\eta_C \lambda)^* f_s(p) \\ C f_s^\dagger(p) C^{-1} &= (\eta_C \lambda)^* f_s^\dagger(p). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Usando que C es unitario (3.43) y estas dos ecuaciones tendremos $(\eta_C \lambda)^* = \eta_C \lambda$

Si tenemos un vacío con simetría de carga C creamos un estado con el operador de creación

$$|p, s\rangle = f_s^\dagger(p) |0\rangle,$$

luego le aplicamos la conjugación de carga

$$C |p, s\rangle = \eta_C \lambda |p, s\rangle,$$

tenemos entonces que $\eta_C \lambda$ es el eigenvalor de C para un estado de partícula y $\eta_C \lambda$ es real. Entonces una partícula libre de Majorana es un eigenestado del operador de conjugación de carga.

3.3.3 Propiedades bajo CP

Al inicio del presente trabajo, se mencionó que existen otras diferentes representaciones para las matrices γ . No es difícil ver que tomando

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Se puede pasar de la representación quirral a la de Dirac² con la siguiente regla de transformación $\gamma_D = A^\dagger \gamma_Q A$. Donde γ_D es una matriz γ en la representación de Dirac y γ_Q es una matriz γ en la representación quirral. Entonces invirtiendo la transformación $\gamma_Q = A \gamma_D A^\dagger$ esto nos dice como podemos cambiar un espinor de la representación de Dirac a la quirral

$$\begin{aligned} A(u_s(p))_D &= (u_s(p))_Q \\ A(v_s(p))_D &= (v_s(p))_Q. \end{aligned}$$

Aquí u' y v' no son las mismas u y v de (3.18). Es conveniente en esta sección usar u' y v' lo cual garantiza la generalidad del resultado.

Recordemos como se transforma un campo con la conjugación de carga (3.46) y como se transforma un campo bajo paridad (3.38) unificamos esas dos condiciones para tener

$$CP\Psi(x, t)(CP)^{-1} = \eta_{CP}^* \gamma^0 \hat{\Psi}(-x, t),$$

²En la representación de Dirac $u = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma \cdot p}{E+m} \end{pmatrix} \phi$ y $v = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot p}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi$ donde ϕ y χ son como las habíamos definido antes

donde η_{CP} es un factor de fase. Para un campo de Majorana (partícula igual a antipartícula) tendremos

$$CP\Psi(x,t)(CP)^{-1} = (\eta_{CP}\lambda)^* \gamma^0\Psi(-x,t), \quad (3.52)$$

usando el campo de Majorana (3.45), sustituyendo en $\gamma^0\Psi(-x,t)$ y cambiando p por $-p$ se tiene

$$\gamma^0\Psi(x,t) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{V2E_p}} \sum_{s=\pm 1/2} \left(f_s(-p)\gamma^0 u'_s(-p)e^{-ip\cdot x} + \lambda f_s^\dagger(-p)\gamma^0 v'_s(-p)e^{ip\cdot x} \right).$$

Puede verse que u' y v' cumplen las siguientes condiciones

$$\gamma^0 u'_s(-p) = u'_s(p), \quad \gamma^0 v'_s(-p) = -v'_s(p),$$

para obtener

$$\gamma^0\Psi(x,t) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{V2E_p}} \sum_{s=\pm 1/2} \left(f_s(-p)u'_s(p)e^{-ip\cdot x} - \lambda f_s^\dagger(-p)v'_s(p)e^{ip\cdot x} \right).$$

Comparando con (3.52)

$$\begin{aligned} CP f_s(p)(CP)^{-1} &= (\eta_{CP}\lambda)^* f_s(-p) \\ CP f_s^\dagger(p)(CP)^{-1} &= -(\eta_{CP}\lambda)^* f_s^\dagger(-p). \end{aligned}$$

Por lo que

$$\eta_{CP}\lambda = -(\eta_{CP}\lambda)^*,$$

de ahí que para un estado de partícula libre

$$CP|p,s\rangle = \eta_{CP}\lambda| -p,s\rangle,$$

donde $\eta_{CP}\lambda$ debe necesariamente ser un imaginario puro, es decir; el eigenvalor de la simetra CP es imaginario.

Capítulo 4

Neutrinos solares y atmosféricos

4.1 Oscilaciones de neutrinos

4.1.1 Oscilaciones en vacío

Habíamos mencionado que existe un fenómeno conocido como oscilaciones de neutrinos, se había mencionado también que consiste básicamente en que, un neutrino generado desde una fuente, al viajar una cierta longitud, cambia de sabor. Revisemos como se podría manifestar este fenómeno en un ejemplo particular. [2]

Consideremos que se tiene un pulso de piones π^+ y los piones después decaen a muones emitiendo un neutrino muónico, es decir $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ y supongamos que en el detector se observa una reacción donde se emite un electrón.

Sabemos que la única forma de que un neutrino interactuando con nucleones produzca un electrón es que ese neutrino sea electrónico. Lo anterior solo podría suceder si en el camino pasó algo que transformó el neutrino en un neutrino electrónico, de manera que pueda producir electrones. Este fenómeno sería el de las oscilaciones de neutrinos.

Entonces decimos que un eigenestado de sabor $|\nu_l\rangle$ (donde $l = e, \mu, \tau$) es una superposición lineal de eigenestados de masa $|\nu_\alpha\rangle$. Podemos pensar que hay N eigenestados de masa. Esto nos llevará a la conclusión de que el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos requiere que al menos un neutrino tenga masa diferente de cero y que los demás neutrinos tengan masas no degeneradas (diferentes).

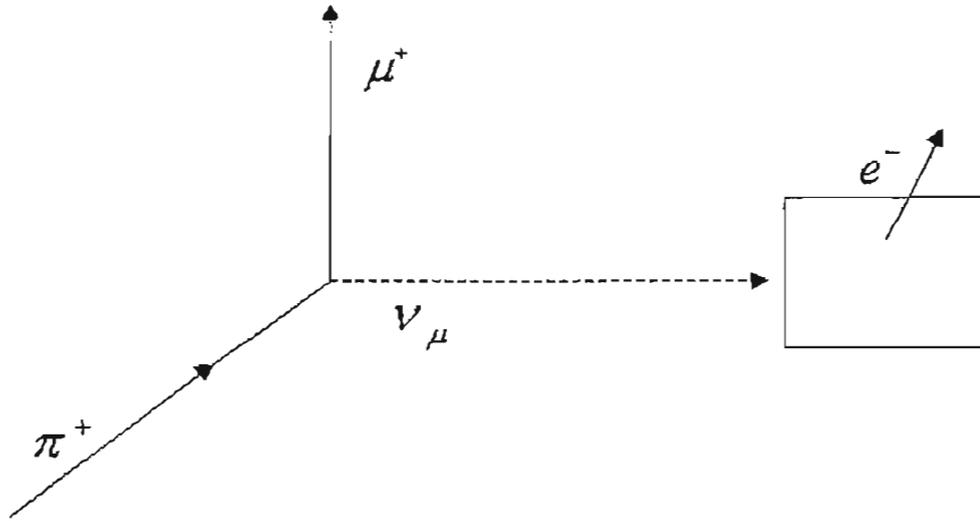


Figura 4.1: Aquí se representa el experimento pensado en el cual se observa la oscilación

Dado lo anterior un eigenestado de sabor se escribirá

$$|\nu_l\rangle = \sum_{\alpha=1}^N U_{l\alpha} |\nu_\alpha\rangle. \quad (4.1)$$

Entonces un eigenestado de sabor al evolucionar, tendrá una dependencia temporal dada por

$$|\nu_l(t)\rangle = \sum_{\alpha} e^{-iE_{\alpha}t} U_{l\alpha} |\nu_\alpha\rangle. \quad (4.2)$$

De (4.1) tenemos que

$$\langle\nu_l| = \sum_{\beta=1}^N \langle\nu_\beta| U_{\beta l}^\dagger. \quad (4.3)$$

Si queremos encontrar la amplitud de probabilidad de hallar $\nu_{l'}$ en el haz que originalmente estaba constituido de ν_l multiplicamos (4.2) por (4.3) y usamos la normalización de los eigenestados de masa

$$\langle\nu_\beta|\nu_\alpha\rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad (4.4)$$

para obtener

$$\langle\nu_{l'}|\nu_l(t)\rangle = \sum_{\alpha,\beta} \langle\nu_\beta| U_{\beta l'}^\dagger e^{-iE_{\alpha}t} U_{l\alpha} |\nu_\alpha\rangle = \sum_{\alpha} e^{-iE_{\alpha}t} U_{l'\alpha} U_{l\alpha}^*. \quad (4.5)$$

Entonces la probabilidad de observar $\nu_{l'}$ al tiempo t , originado por un pulso constituido inicialmente por ν_l esta dada por

$$\begin{aligned} P_{\nu_l \nu_{l'}}(t) &= |\langle \nu_{l'} | \nu_l(t) \rangle|^2 \\ &= \left(\sum_{\alpha} e^{-iE_{\alpha}t} U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* \right) \left(\sum_{\beta} e^{-iE_{\beta}t} U_{l\beta} U_{l'\beta}^* \right)^* \\ &= \sum_{\alpha, \beta} e^{-i(E_{\alpha} - E_{\beta})t} \left(U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right), \end{aligned}$$

separando la amplitud y fase de la siguiente cantidad

$$\left(U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right) = \left| U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right| e^{i\theta_{\alpha\beta}},$$

donde

$$\theta_{\alpha\beta} = \arg \left(U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right).$$

Tenemos que

$$\sum_{\alpha, \beta} e^{-i(E_{\alpha} - E_{\beta})t} \left(U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right) = \sum_{\alpha, \beta} \left| U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right| e^{-i((E_{\alpha} - E_{\beta})t - \theta_{\alpha\beta})},$$

o bien

$$P_{\nu_l \nu_{l'}}(t) = \sum_{\alpha, \beta} \left| U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right| e^{-i((E_{\alpha} - E_{\beta})t - \theta_{\alpha\beta})}. \quad (4.6)$$

Veamos que pasa ante un intercambio de índices ($\alpha \leftrightarrow \beta$) comenzando con que $\left| U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right|$ permanece sin cambios, por otro lado $\left(U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right) \rightarrow \left(U_{l\beta} U_{l'\beta}^* U_{l\alpha}^* U_{l'\alpha} \right)$. Como puede observarse, el cambio de índices actúa como la conjugación compleja, entonces $e^{-i((E_{\alpha} - E_{\beta})t - \theta_{\alpha\beta})} \rightarrow e^{i((E_{\alpha} - E_{\beta})t - \theta_{\alpha\beta})}$. Pero la probabilidad debe permanecer invariante ante el cambio de índices (conjugación compleja), así que esto nos lleva a que la parte compleja de $e^{-i((E_{\alpha} - E_{\beta})t - \theta_{\alpha\beta})}$ es cero, por lo tanto

$$P_{\nu_l \nu_{l'}}(t) = \sum_{\alpha, \beta} \left| U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right| \cos[(E_{\alpha} - E_{\beta})t - \theta_{\alpha\beta}]. \quad (4.7)$$

Esta es la expresión más general para la probabilidad de oscilación a un neutrino del tipo $\nu_{l'}$ al tiempo t , suponiendo que al tiempo inicial el neutrino era ν_l . Si suponemos que CP se conserva, uno puede escoger las fases de la matriz U como reales, en cuyo caso $\theta_{\alpha\beta} = 0$ [2]. En lo que sigue supondremos que CP se conserva.

Tomando en cuenta que los neutrinos son ultrarelativistas, podemos sustituir t por x y aproximar la energía por

$$E_\alpha \simeq |p| + \frac{m_\alpha^2}{2|p|}, \quad (4.8)$$

entonces el término $E_\alpha - E_\beta$ en (4.7) se puede escribir como

$$E_\alpha - E_\beta \simeq \frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2p}, \quad (4.9)$$

con lo cual encontramos que

$$P_{\nu_l \nu_{l'}}(x) = \sum_{\alpha, \beta} |U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta}| \cos \left[\left(\frac{m_\alpha^2 - m_\beta^2}{2|p|} \right) x \right]. \quad (4.10)$$

Para entender la estructura de este término oscilatorio se usa $E \simeq |p|$ y se define

$$L_{\alpha\beta} \equiv \frac{4\pi E}{m_\alpha^2 - m_\beta^2}. \quad (4.11)$$

Entonces (4.10) se escribe como

$$P_{\nu_l \nu_{l'}}(x) = \sum_{\alpha, \beta} |U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta}| \cos \left[\frac{2\pi}{L_{\alpha\beta}} x \right]. \quad (4.12)$$

A (4.11) se le llama longitud de la oscilación, la cual determina la escala en que los efectos de la oscilación son apreciables.

De (4.5) tenemos

$$\langle \nu_{l'} | \nu_l(t) \rangle = \sum_{\alpha} e^{-iE_\alpha t} U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^*,$$

usando (4.9) y cambiando t por x tenemos que

$$\langle \nu_{l'} | \nu_l(x) \rangle = \sum_{\alpha} e^{-i \frac{m_\alpha^2}{2p} x} U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^*,$$

de esta última expresión podemos separar

$$|\nu_l(x)\rangle = \sum_{\alpha} e^{-i \frac{m_\alpha^2}{2p} x} U_{l\alpha} |\nu_\alpha\rangle,$$

en la cual estamos escribiendo un eigenestado de sabor como en (4.1) pero ahora depende de la posición x . esto nos permite observar que este eigenestado tiene una estructura muy parecida a la que se presenta en un experimento de interferencia con rejillas múltiples. Esto nos lleva a una posible forma de entender las oscilaciones. Consideremos a nuestro neutrino en un estado inicial en el cual hay una configuración dada para los eigenestados de masa que lo componen, los eigenestados más ligeros viajan más rápido que los más pesados, por lo tanto la configuración inicial que componía nuestro neutrino se modifica, pues los eigenestados de masa se desfasan unos respecto de otros. De manera que después de un tiempo, la suma de esos eigenestados de masa desfasados da lugar a otro sabor de neutrino.

Puede notarse que si las masas de los eigenestados son iguales, entonces su diferencia desaparece y de acuerdo con (4.11) tenemos una longitud de oscilación infinita, es decir *no hay oscilación*.

Notemos que:

- a) Si $x \ll L_{\alpha\beta}$ el eigenestado de sabor inicial conserva su sabor.
- b) Si $x \gg L_{\alpha\beta}$ el patrón de oscilación desaparece
- c) Si $x \sim L_{\alpha\beta}$ es la distancia optima para observar la oscilación

4.1.2 Oscilaciones en materia

Encontramos en la sección anterior que los eigenestados de masa de los neutrinos, al propagarse en el vacío, pueden ser descritos como

$$\nu(t) = \nu(0)e^{-i(px-Et)} \approx \nu(0)e^{-i\frac{m^2}{2p}t}. \quad (4.13)$$

Pero cuando los neutrinos viajan en materia el factor de fase se modifica de ipx a $inpx$ donde n es el índice de refracción del medio, lo cual modifica las oscilaciones respecto al vacío. Esto fue identificado por Wolfenstein en 1978 [17]. por otro lado Mikheyev y Smirnov en 1985 [6], encontraron que *para condiciones especiales, se puede dar una amplificación resonante de las oscilaciones*.

El índice de refracción se desvía de la unidad, por causa de las interacciones débiles de los neutrinos con las partículas que componen el medio. Si tenemos un neutrino de sabor l y momento p , veremos que su índice de refracción está

dado por

$$n_i = 1 + \frac{2\pi\rho}{p^2} f_i(0), \quad (4.14)$$

donde ρ es la densidad de partículas del medio con las que interactúa el neutrino, p es el momento del neutrino y $f_i(0)$ es la amplitud de dispersión elástica a ángulo cero [6].

La contribución de los nucleones (o quarks) a la amplitud de dispersión viene dada por el término de corriente neutra (intercambio de Z^0) y es idéntica para todos los sabores de neutrinos. Para los electrones hay dos términos, el de corrientes neutras y el de corrientes cargadas (intercambio de W^+) pues los neutrinos interactúan con ellos de ambas formas (ver figura).

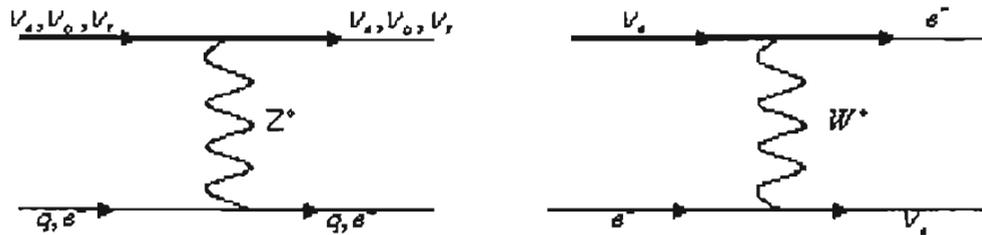


Figura 4.2: En esta figura observamos las dos formas en que interactúa el electrón, corrientes neutras y corrientes cargadas

La parte de la amplitud de dispersión en el índice refractivo correspondiente a las corrientes neutras, es común para todos los sabores y no interesa mucho puesto que modifica la fase de todos los componentes de un haz de la misma forma. Definamos $\Delta f(0) = f_l(0) - f_\alpha(0)$ y veamos que

$$\Delta f(0) = -\sqrt{2} \frac{G_F \rho}{2\pi}. \quad (4.15)$$

A esta ecuación se le conoce como ecuación de Wolfenstein, más la raíz de dos que fue agregada por Lewis en 1980 y el signo negativo por Langacker en 1983.

En las ecuaciones anteriores α representa los sabores de neutrinos excepto e y G_F es la constante de Fermi. Para el caso del neutrino electrónico el signo es inverso.

A continuación presentamos una deducción del resultado (4.15). Consideremos que la energía del neutrino del electrón viene dada como

$$E_{eff} \simeq p + \frac{m^2}{2p} + \langle e\nu | H_{eff} | e\nu \rangle, \quad (4.16)$$

aquí H_{eff} representa el intercambio de una partícula W , además

$$H_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_W^\mu J_{\mu W}^\dagger = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{e}\gamma^\mu \Lambda_- \nu \bar{\nu}\gamma_\mu \Lambda_- e,$$

donde e y ν representan estados de electrón y neutrino respectivamente, Λ_- son los operadores que habíamos definido antes (3.36).

Ahora hay que usar una transformación de Fierz, que nos permite intercambiar dentro del hamiltoniano, los términos de corriente neutra y los de corriente cargada, para tener

$$H_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{e}\gamma^\mu (1 - \gamma_5) e \bar{\nu}\gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu,$$

si consideramos electrones en reposo, entonces solo hay contribución de $\mu = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \bar{e}\gamma^\mu (1 - \gamma_5) e \rangle &= \rho_e \delta_{0\mu} \\ \langle \bar{\nu}\gamma^0 (1 - \gamma_5) \nu \rangle &= 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$E_{eff} \simeq p + \frac{m^2}{2p} + \sqrt{2} G_F \rho_e. \quad (4.17)$$

Tenemos que debido a las interacciones con el medio, el estado de neutrino en (4.13) se modifica a

$$\nu(t) = \nu(0) e^{-it(\frac{m^2}{2p} + \sqrt{2} G_F \rho_e)}. \quad (4.18)$$

Para entender el efecto en el fenómeno de oscilaciones, consideremos dos neutrinos, como combinaciones de eigenestados de masa.

$$\begin{aligned} \nu_e &= \nu_1 \cos\theta + \nu_2 \sin\theta \\ \nu_\mu &= -\nu_1 \sin\theta + \nu_2 \cos\theta. \end{aligned}$$

Esto se puede ver como

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad \text{Con} \quad U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

La ecuación de evolución de ν_1 y ν_2 puede darse como

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix}.$$

donde

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + \frac{m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & E + \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix}.$$

Hagamos $H' = UHU^\dagger$, entonces tendremos una nueva ecuación de evolución

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = H' \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix},$$

aquí

$$H' = E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} + \frac{\Delta}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

con $\Delta = m_2^2 - m_1^2$.

Despejando

$$\tan 2\theta = \frac{2H'_{12}}{H'_{22} - H'_{11}}.$$

Ahora consideremos el efecto de las corrientes neutras y las corrientes cargadas, entonces de (4.19) proponemos

$$\tilde{H} = E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F \rho_n + \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{4E} \cos 2\theta + \sqrt{2} G_F \rho_e & \frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta}{4E} \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

El índice de ρ identifica la corriente neutra y la corriente cargada. Ahora

$$\tan 2\tilde{\theta} = \frac{2\tilde{H}_{12}}{\tilde{H}_{22} - \tilde{H}_{11}} = \frac{\Delta \sin 2\theta}{\Delta \cos 2\theta - 2\sqrt{2} G_F \rho_e E}.$$

Note que el ángulo θ (ángulo de mezcla) cambia drásticamente cuando el denominador de la relación anterior se cancela (condición resonante)

$$\Delta \cos 2\theta = 2\sqrt{2} G_F \rho_e E,$$

o lo que es lo mismo

$$\rho_e = \frac{\Delta \cos 2\theta}{2\sqrt{2} G_F E}.$$

Para entender la evolución de los neutrinos cuando se tienen oscilaciones en presencia de materia, es conveniente obtener los eigenvalores instantaneos de (4.20) dados por:

$$E_\alpha = E - \frac{1}{\sqrt{2}}G_F\rho + \frac{\tilde{m}_\alpha^2}{2E},$$

donde

$$\tilde{m}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[(m_1^2 + m_2^2 + 2\sqrt{2}G_F E) \mp \sqrt{(\Delta \cos 2\theta - 2\sqrt{2}G_F \rho_e E)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta} \right],$$

El comportamiento de los eigenvalores \tilde{m}_1^2 y \tilde{m}_2^2 como función de la densidad ρ_e se muestra esquemáticamente en la siguiente figura.

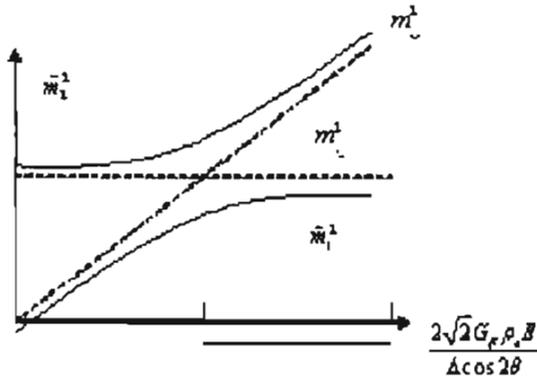


Figura 4.3: Aquí tenemos una gráfica de las masas cuadradas de los neutrinos. La línea continua es la masa cuadrada y la línea punteada son los valores esperados de las masas cuadradas del neutrino electrónico y el neutrino muónico

Un efecto notable de transformación resonante fue descubierto por Mikheyev y Smirnov [6]. Para entenderlo supongamos que en ángulo de mezcla en vacío θ es pequeño; con esto se tiene que en el vacío ν_e prácticamente coincide con ν_1 (el eigenestado de masa más ligero), mientras que $\nu_2 \approx \nu_\mu$. Por otro lado en una región de alta densidad $\tan 2\bar{\theta} \simeq 0$ implica que $\bar{\theta} \simeq \pi/2$, en cuyo caso el eigenestado más ligero coincidirá con ν_μ ($\nu_\mu \simeq \nu_1$) mientras que $\nu_2 \simeq \nu_e$. En este caso se puede tener la situación representada por la figura; en la cual debido al cruzamiento de niveles, un neutrino electrónico que se produce en el interior del sol, se transforma en un neutrino muónico al llegar a una región de baja densidad, a pesar de que θ es pequeño.

4.2 Neutrinos solares y atmosféricos

En este capítulo estudiaremos el fenómeno de los neutrinos atmosféricos y los neutrinos solares, estos tienen relevancia pues la explicación del enigma de los neutrinos solares vino a corroborar la existencia de las oscilaciones de neutrinos, las cuales están íntimamente ligadas al hecho de que los neutrinos son masivos. La medición de las oscilaciones de los neutrinos atmosféricos y solares nos da una medida de las diferencias cuadradas de masas las cuales son usadas en este trabajo.

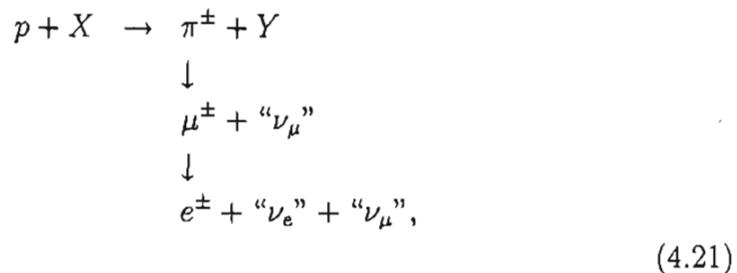
El problema o enigma de los neutrinos atmosféricos y solares es básicamente el mismo; el modelo estándar predice teóricamente un flujo de neutrinos que se supone deberíamos ver y resulta que el flujo observado es mucho menor de lo que se esperaba. En un principio se pensó en revisar los modelos del sol y atmosférico para ver que pasaba, pero finalmente prevaleció la idea de que las oscilaciones son la explicación correcta al déficit en el flujo esperado.

4.2.1 Neutrinos atmosféricos

El fenómeno de neutrinos atmosféricos consiste en la formación de neutrinos en la parte superior de la atmósfera por la colisión de rayos cósmicos con las partículas que ahí se encuentran. La interacción de rayos cósmicos de protones con núcleos, en la atmósfera más alta lleva a la producción de neutrinos de tipos electrónico y muónico.

Durante las décadas de 80's y 90's se realizaron los primeros experimentos para detectar neutrinos. Las observaciones presentes pueden ser interpretadas como indicación positiva de oscilaciones entre diferentes sabores de neutrinos.

Los neutrinos atmosféricos se originan según la siguiente cadena de reacciones



aquí los π^{\pm} 's pueden ser reemplazados por K^{\pm} 's. La notación " ν_{μ} " significa que no hemos distinguido entre ν_{μ} y $\bar{\nu}_{\mu}$ al igual que no se distinguen en los

experimentos.

De las reacciones descritas en la ecuación (4.21) vemos que es razonable esperar que la razón r entre el número neutrinos electrónicos ν_e a neutrinos muónicos ν_μ medidos en los detectores subterráneos (no distinguiendo entre partículas y antipartículas) es aproximadamente 0.5.

Si bien un cálculo más detallado requiere tomar en cuenta varios factores adicionales, al final se mantiene la predicción de que en principio el flujo de ν_e debe ser aproximadamente la mitad del flujo de ν_μ .

Los experimentos cuentan el número de eventos tipo ν_e y ν_μ producidos en las colisiones de neutrinos con el agua del detector. Los experimentos pueden ser completamente contenidos o parcialmente contenidos. Consideraremos mayormente los eventos contenidos. En esta clase de eventos, el vértice de la interacción neutrino-núcleo es localizado dentro del detector como todos los estados finales de partículas. Las energías de leptones cargados para esos eventos están en un rango de pocos cientos de MeV, hasta 1.2 GeV.

Con los eventos contenidos de neutrinos tipo electrónicos y muónicos se construye la siguiente relación

$$R \equiv \frac{(\nu_\mu/\nu_e)}{(\nu_\mu/\nu_e)_{MC}},$$

donde MC representa las predicciones Monte-Carlo. El denominador da la expresión teórica para la razón (ν_μ/ν_e) suponiendo que los neutrinos no tienen masa y todas sus interacciones están dadas por el modelo estándar. Una ventaja de considerar la razón (ν_μ/ν_e) es que las incertidumbres en el flujo de rayos cósmicos no afectan el resultado. Si no hubiera oscilaciones de neutrinos R debería ser 1.

Los valores para esta doble razón obtenidos por varios experimentos son dados a continuación

Kamiokande(1992)	$0.60 \pm 0.6 \pm 0.5$
IMB(1992)	$0.54 \pm 0.5 \pm 0.12$
Sudan 2(1994)	$0.69 \pm 0.19 \pm 0.09$
FREJUS(1990)	0.87 ± 0.21
NUSEX (1991)	0.99 ± 0.40
Super-Kamiokande(1997)	$0.63 \pm 0.03 \pm 0.05$ (sub-GeV)
	$0.60^{+0.07}_{-0.06} \pm 0.07$ (multi-GeV)

Los primeros dos experimentos usan el efecto Cherenkov en detectores de agua, mientras que los siguientes tres usan calorímetros de hierro. los últimos tres tienen mucho menor estadística que los primeros dos. En detectores Cherenkov de agua, los muones son distinguidos de los electrones en dos formas: por el tamaño de los anillos de luz cherenkov o por observación de decaimientos producto de los muones.

Los primeros tres conjuntos de datos implican que hubo un agotamiento de neutrinos muónicos o un exceso de eventos tipo electrónico producidos por alguna propiedad *no-estándar* de los neutrinos.

La manera más simple de entender el rompecabezas del neutrino atmosférico, es la oscilación, lo que nos llevaría a valores observados de flujo en los detectores subterráneos que deben ser compatibles con el esquema de oscilaciones. El escenario más factible para los neutrinos atmosféricos es que ν_μ oscila en ν_τ manteniendo el flujo de neutrinos electrónicos sin cambios.

La probabilidad de sobrevivencia de un neutrino ν_μ está dada por

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{E} \right),$$

donde E es la energía en GeV, Δm^2 es la diferencia cuadrática de masas y L es la distancia en Km. Esta fórmula se obtiene a partir de (4.12) en el caso de oscilaciones de dos familias.

Aquí se tiene una dependencia sinusoidal para L/E, experimentalmente dicho efecto se observó recientemente en el experimento de kamiokande debido a que en este experimento, se detecta la dirección desde la que llegan los neutrinos (los cuales llegan de todas partes de la atmósfera alrededor de la tierra), esto produce un efecto equivalente a variar la distancia de la fuente al detector, permitiendo medir la probabilidad de transición como función de L/E [14]. Según esto, el primer máximo en la oscilación está en $L/E = 500 \text{ km/GeV}$ y se asumen oscilaciones $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$. La región permitida para la diferencia cuadrática de masas es

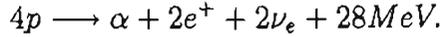
$$1.9 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 < \Delta m^2 < 3.0 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$$

con $\sin^2 2\theta > 0.90$.

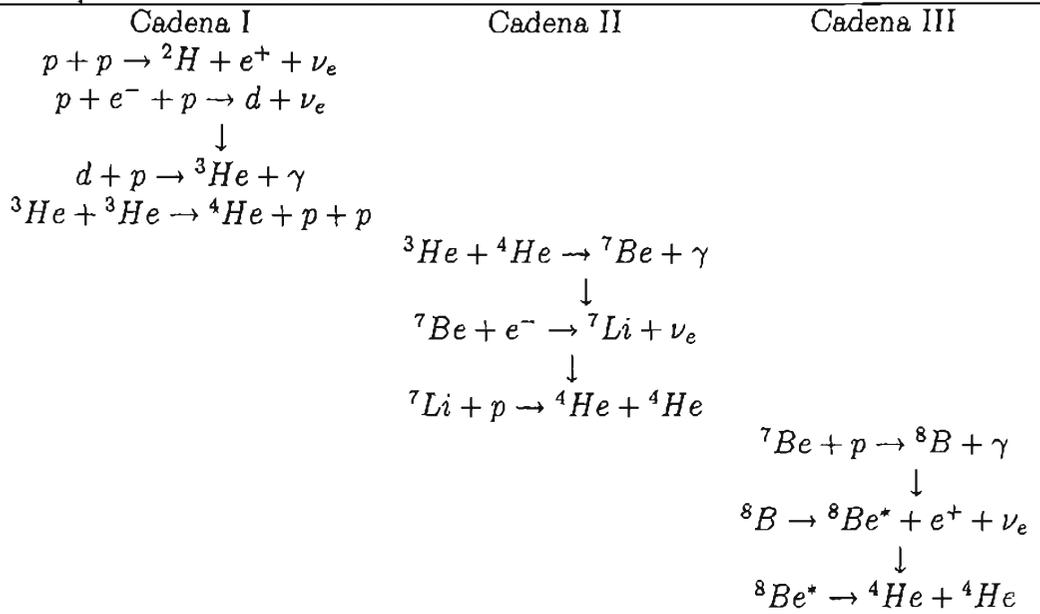
Esta diferencia de masas corresponde principalmente a la oscilación de $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$. Así que ahora el resultado es consistente con el análisis para las oscilaciones.

4.2.2 Neutrinos solares

Los neutrinos son una parte importante en el proceso de evolución estelar. El sol brilla debido a la energía liberada en la reacción en la que protones se fusionan en partículas α . Esta producción de energía se da en la siguiente reacción de fusión nuclear en el interior del sol.



Esta reacción representa en una forma compacta una serie de reacciones sucesivas que se detallan a continuación



Los 28 MeV liberados corresponden a la energía de amarre de la partícula α y se difunden camino hacia afuera del nucleo solar, de manera que aparecen como luz solar.

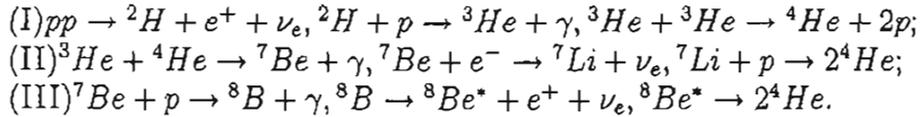
Nuestro interés está en los neutrinos, los cuales tienen energías de pocos MeV's dependiendo del detalle de la reacción nuclear. Recordando que la densidad típica de un nucleo estelar es aproximadamente $100g/cm^3$ y la sección de dispersión típica para un neutrino electrónico ν_e es alrededor de $10^{-43}cm^2$ el camino libre medio para un neutrino es del orden de $10^{17}cm$ lo cual es mucho más grande que el radio de sol y las estrellas típicas. Entonces los neutrinos escapan del sol y las estrellas típicas.

De la luminosidad solar observada, se puede determinar que el flujo de neutrinos que llega a la tierra provenientes del sol es alrededor de $6 \times 10^{10}cm^{-2}s^{-1}$.

Estos neutrinos transportan entre 2% y 3% de la energía total emitida por el sol.

Entonces los neutrinos estelares son otros mensajeros de información física aparte de la radiación electromagnética usual. Una ventaja de los neutrinos sobre la radiación electromagnética, es que ellos llevan información sobre el núcleo de la estrella y por lo tanto el estudio detallado de neutrinos estelares es un medio seguro para obtener información del interior estelar, es decir para dar validez de los modelos teóricos existentes para la estructura y evolución del sol y otras estrellas.

Las principales fuentes de neutrinos solares son las cadenas pp de reacción nuclear, En las cuales se convierten protones en núcleos de helio (partículas α). Estas son



La mayoría de esta conversión toma lugar por la vía más rápida que es (I), una pequeña fracción (8%) se desvía hacia (II) y la parte más pequeña (0.1%) por (III). Los neutrinos resultantes son (I) neutrinos pp de baja energía, (II) neutrinos Be de energía intermedia y (III) neutrinos B de energía relativamente alta.

4.2.3 Detección de neutrinos

Hay diferentes tipos de detectores que se especializan en la detección, de neutrinos con cierto intervalo de energía.

El experimento de ${}^{37}\text{Cl}$.

Comenzemos con el experimento de cloro ${}^{37}\text{Cl}$ el cual es basado en la reacción de corriente cargada



La cual tiene una energía umbral de 0.8MeV . El blanco es un tanque de 10^5 galones de C_2Cl_4 (percloroetileno) el cual está ubicado en lo profundo de una mina al sur de Dakota en USA [13]. Este detector está en las profundidades para evitar perturbaciones de rayos cósmicos. El ${}^{37}\text{Ar}$ es periódicamente extraído por métodos químicos, se extraen muy pocos átomos y la efectividad para sacarlos del tanque es del 90% de ahí los flujos de neutrinos incidentes

son estimados. Desafortunadamente este detector no puede captar los neutrinos de la cadena (I) debido a que su energía está por debajo del umbral de este detector.

De acuerdo a los resultados de la siguiente tabla [12], este experimento encuentra un deficit en el número de neutrinos, al medir aproximadamente la mitad de los neutrinos que se esperaba detectar.

El experimento super-kamiokande.

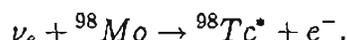
El super-kamiokande es un detector Cherenkov de agua, en tiempo real, basado en la dispersión elástica entre el neutrino y el electrón. La dispersión elástica es dominada por la reacción de corriente cargada $\nu_e + e^- \xrightarrow{CC} \nu_e + e^-$, pero tiene también una sensibilidad limitada a la reacción de corriente neutra $\nu_{e,\mu} + e^- \xrightarrow{NC} \nu_{e,\mu} + e^-$.

Este experimento puede también medir la energía y dirección del neutrino incidente usando la dirección final del electrón [13].

En la siguiente tabla, se tienen también los resultados para el experimento super-kamiokande y se observa que también este experimento encuentra un deficit en el flujo de neutrinos de aproximadamente la mitad [12].

El experimento de ^{98}Mo .

En el experimento geoquímico de molibdeno ^{98}Mo los neutrinos son detectados por su absorción en átomos de molibdeno cubiertos de los fenómenos atmosféricos en una mina profunda. La absorción de neutrinos produce un isótopo inestable, pero de vida media larga de tecnecio, que no debe estar presente en estado normal. Este método usa la la reacción de captura



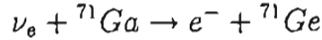
La absorción del neutrino produce una variedad de estados excitados que solo pueden ser habitados por neutrinos de ${}^8\text{B}$ (III) [12].

El ${}^{98}\text{Tc}$ tiene una vida media de 4.2 millones de años, de ahí que su abundancia refleja la producción promedio durante varios millones de años. La vida media es más larga para el isótopo que es detectado por su radioactividad natural y suficiente tecnecio es acumulado ($\sim 10^7$ átomos) para ser contados por un espectrómetro de masas ultra sensible. Este experimento es constancia del flujo de neutrinos ${}^8\text{B}$ durante varios millones de años.

Experimentos de galio.

De los detectores de galio, podemos decir que hay dos experimentos radioquímicos de neutrinos solares que usan ${}^{71}\text{Ga}$, uno de ellos es europeo (GALLEX) y el otro ruso (Institute for Nuclear Research, Moscow). El

GALLEX usa 30 toneladas de solución acuosa de galio, el ruso usa 60 toneladas de galio metálico [13]. La reacción de absorción es:

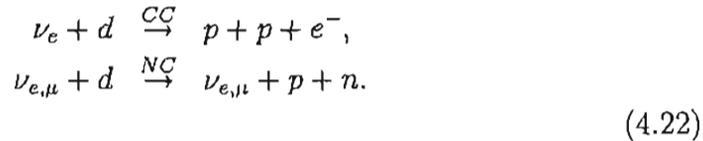


Los átomos de germanio son removidos químicamente del galio y los decaimientos radioactivos del ${}^{71}\text{Ge}$ son medidos por pequeños contadores proporcionales. La vida media del ${}^{71}\text{Ge}$ es de 11.4 días. Este experimento es capaz de medir los neutrinos de baja energía de la cadena (I).

Los resultados de estos experimentos, se encuentran también en la siguiente tabla [12], y estos experimentos confirman el deficit de neutrinos que presentaban los otros experimentos.

El experimento SNO.

El SNO es también un detector Cherenkov pero con un blanco de agua pesada el cual detecta también corrientes cargadas y corrientes neutras en las siguientes reacciones [12]



La primera fase del experimento las corrientes neutras son detectadas via neutrón captura deuterón, $n + d \rightarrow t + \gamma$. En la segunda fase se agrega sal al agua pesada para aumentar la eficiencia de detección de las corrientes neutras via neutrón captura cloro $n + {}^{35}\text{Cl} \rightarrow {}^{36}\text{Cl} + \gamma$. En la tercera fase ${}^3\text{He}$ gaseoso llena los contadores insertados en el agua pesada para detectar corrientes neutras via $n + {}^3\text{He} \rightarrow t + p$.

Veamos los resultados de estos experimentos en la siguiente tabla [12]

Experimento	Galio	Cloro	S-K	SNO
R	0.55 ± 0.03	0.33 ± 0.03	0.465 ± 0.015 (0.36 ± 0.015)	0.36 ± 0.03
E(MeV)	0.2	0.8	5	5
Composición	${}^{pp}(55\%),$ ${}^{Be}(25\%), {}^{B}(10\%)$	${}^{B}(75\%),$ ${}^{Be}(15\%)$	B(100 %)	B(100 %)

El experimento KamLAND.

Este experimento consiste de un detector de 1 kilotón de líquido centellador ultrapuro, contenido en un globo de nylon transparente de 13m de diámetro, suspendido en aceite no centellador. El globo esta rodeado de 1879 tubos fotomultiplicadores montados en la superficie interna de un recipiente esférico

de acero inoxidable de 18m de diámetro. Este detector está rodeado de 53 reactores nucleares con una distancia media de 180 km.

Los antineutrinos electrónicos son detectados vía decaimiento β

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n,$$

con un umbral de energía para $\bar{\nu}_e$ de 1.8 MeV.

También mide la energía incidente E de $\bar{\nu}_e$ vía la energía de centella visible producida por la aniquilación de un positrón y un electrón, es decir

$$E_{vis} = E + m_e + m_p - m_n = E - 0.8MeV,$$

y su región de sensibilidad es $\Delta m^2 \geq 10^{-5}eV^2$ El experimento KamLAND no detecta neutrinos atmosféricos ni neutrinos solares, como ya se dijo antes detecta neutrinos de reactores nucleares. En este también se encuentra evidencia de que los neutrinos oscilan, en KamLAND se ha podido determinar los parámetros de oscilación de acuerdo a [15].

$$\Delta m^2 = 7.9^{+0.6}_{-0.5} \times 10^{-5}eV^2 \quad y \quad \tan^2\theta = 0.76.$$

Cuando el análisis de KamLAND se combina con los resultados de los experimentos que detectan neutrinos solares, se puede restringir los parámetros de oscilación, al asumir invariancia bajo CPT restringe los valores permitidos para Δm^2 y $\tan^2\theta$, entonces se tiene

$$\Delta m^2 = 7.9^{+0.6}_{-0.5} \times 10^{-5}eV^2 \quad y \quad \tan^2\theta = 0.40^{+0.10}_{-0.07}.$$

Con esto ha quedado firmemente establecido que el deficit en el flujo de neutrinos solares se debía a que los neutrinos de tipo ν_e oscilan cambiando a otro sabor.

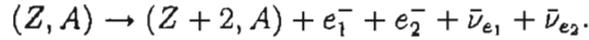
A futuro se planean nuevos experimentos como los siguientes:

Experimentos de doble decaimiento β .

Estos experimentos observan doble decaimiento β de distintas formas y tienen dos objetivos principales, medir la masa de los neutrinos con una sensibilidad de hasta 0.01eV y la otra es demostrar la naturaleza de Majorana de los neutrinos [20].

El doble decaimiento beta es la transición entre un nucleo de carga Z con un número de masa A (con A y Z pares) hacia un nucleo con carga $Z+2$ y

el mismo número de masa. En su forma básica el doble decaimiento beta ($2\nu\beta\beta$) puede ser observado como dos decaimientos β^- .

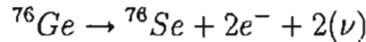


También se piensa en el doble decaimiento beta sin neutrinos pues se emite un neutrino y un antineutrino que se aniquilan, este proceso se da si el número leptónico no es una cantidad conservada y si los neutrinos son masivos, lo que implicaría que el neutrino es idéntico al antineutrino, es decir son neutrinos de Majorana.

Uno de estos experimentos es EXO (Enriched Xenon Observatory) el cual busca doble decaimiento beta sin neutrinos en ^{136}Xe . Un programa activo R & D para un detector de fase líquido de 10 toneladas de xenón enriquecido, se extraeran iones Ba^+ e hijos, se estudia la resolución de energía y etiquetado del Ba^+ por laser.

El Experimento Heidelberg-Moscow

El experimento Heidelberg-Moscow busca doble decaimiento beta sin neutrinos en ^{76}Ge . Con la reacción:



El doble decaimiento beta, corresponde a dos decaimientos beta simultáneos en un núcleo, con la emisión de dos antineutrinos, con vidas medias en la región de 1021 años. Solo ha sido observado para 9 isotopos en experimentos diferentes.

El doble decaimiento beta sin neutrinos, es posible si los neutrinos tienen masas de Majorana. El experimento Heidelberg-Moscow opera con cinco detectores de 10.9 kg en promedio de ^{76}Ge en el laboratorio subterráneo Gran Sasso en Italia. La sensibilidad corresponde a un experimento de más de 1.2 t de germanio natural. La mejor estimación reciente para la vida media del doble decaimiento beta sin neutrinos es:

$$T = 1.5 \times 10^{25} \text{ yr.}$$

correspondiente a una masa de Majorana

$$m_\nu = (0.05 - 0.84) \text{ eV (95\% C.L.)}$$

El experimento k2k.

En este experimento se pretende explorar una región de oscilaciones de neutrinos similar a la región de los neutrinos atmosféricos.

Consiste de un acelerador de protones de tipo *synchrotron* de 12GeV de una organización de investigación (KEK) en la ciudad de Tsukuba y el detector es el Super-Kamiokande a 250km en la ciudad de Kamioka. Se crea un rayo de neutrinos y se mide muy precisamente el flujo y los contaminantes en el rayo, esto se hace con detectores cercanos al acelerador, de manera que se pueda comparar lo que se emitió en el acelerador con lo que se mide en Super-Kamiokande y así se puedan ver los efectos de las oscilaciones de neutrinos [19].

En KEK se producen protones acelerados que se estrellan contra un blanco de aluminio y producen piones, que decaen en muones y neutrinos muónicos, estos neutrinos pasan por el detector cercano y llegan en un milisegundo al Super-Kamiokande.

El detector cercano es un detector *cherenkov* de 1 kilotón y un detector centellante de fibra, de manera que se establece la composición del rayo. El detector en super-Kamiokande ya lo conocemos.

El experimento MiniBooNE.

MiniBooNE (*Mini Booster Neutrino Experiment*), es un experimento nuevo en Fermilab para investigar oscilaciones de neutrinos en un rayo que se obtiene al estrellar protones muy energéticos con un blanco de berilio en presencia de un campo magnético, la colisión produce piones y kaones que decaen en una variedad de partículas incluyendo neutrinos muónicos, este rayo se hace pasar por diversos materiales de manera que estos actúan como filtros para las partículas que componen el rayo y solo los neutrinos sobreviven [21]. Ellos interactúan con el aceite mineral ultrapuro contenido en un tanque esférico de 12m de diámetro el cual está rodeado de 1280 detectores de fotones, que evidenciarán la oscilación de neutrinos muónicos en electrónicos. Las energías de los neutrinos está en un rango de 300MeV a 1.5GeV.

Estos dos experimentos son diferentes de los demás experimentos por que los neutrinos se producen en el laboratorio de manera controlada y se conoce perfectamente el flujo inicial, caso contrario de lo que pasa con los neutrinos atmosféricos y solares.

El experimento MiniBooNE tiene como finalidad corroborar o descartar los resultados previos del experimento LSND. En 1995 LSND presentó evidencia de la oscilación de antineutrinos muónicos en antineutrinos electrónicos. Estos resultados llevan a una diferencia cuadrática de masas alrededor de $1eV^2$, la cual es mucho mayor que la que observaron los experimentos de neutrinos solares y atmosféricos. Estos resultados permanecen sin confirmación, de ser confirmados, entonces habría cuatro sabores diferentes de neutrinos y uno de

ellos debe interactuar muy poco (neutrino estéril) [21].

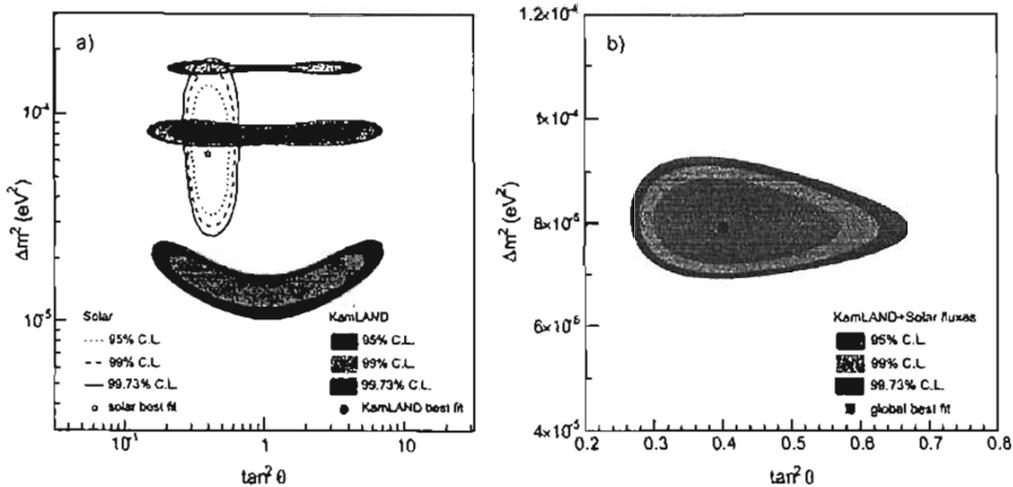


Figura 4.4: En a) tenemos la región permitida para los parámetros de oscilación (contornos rellenos) que se obtienen en el experimento KamLAND y la región de parámetros que se obtiene de los neutrinos solares (líneas). En b) tenemos una región para los parámetros de oscilación, la cual surge al combinar el análisis de KamLAND con los datos de neutrinos solares.

4.3 Explicación al problema de los neutrinos

Hemos venido mencionado insistentemente que los neutrinos presentan un fenómeno en el cual los neutrinos cambian de sabor, pero para que este fenómeno ocurra se necesita que los neutrinos tengan masa.

El análisis del fenómeno de oscilaciones de neutrinos en materia fue revisado en la sección de oscilaciones de neutrinos y ahora nos enfocaremos en el sentido que este tiene para resolver el problema de los neutrinos solares y atmosféricos.

El modelo estándar de las interacciones electrodébiles es presentado usualmente de tal forma que los neutrinos no tienen masa. En algunas extensiones del modelo los neutrinos tienen masa, un ejemplo son las teorías de gran unificación (GUTs), las cuales unifican diferentes tipos de interacción (débil, electromagnética y fuerte) en una sola interacción a muy altas energías, o equivalentemente a una escala de masa muy grande, M_X .

En las teorías de gran unificación las masas de los neutrinos son inversamente proporcionales a la escala de masa M_X . En algunos modelos la masa de neutrino es proporcional a M_{eW}^2/M_X , donde M_{eW} es la masa electrodébil característica de aproximadamente $10^2 GeV$. Si M_X es aproximadamente $10^{15} GeV$, las masas de los neutrinos serán menores que $1eV$. Además se espera que se mantenga la jerarquía de masas $m_{\nu_e} \ll m_{\nu_\mu} \ll m_{\nu_\tau}$, lo cual está fuera del alcance de lo que se puede medir hoy en día.

La solución propuesta para este problema dice que: ν_e son creados en el interior del sol y casi todos son convertidos en ν_μ o ν_τ al pasar a través del sol. Este proceso hace que la probabilidad de que los neutrinos ν_e cambien a ν_μ y ν_τ aumente. Este proceso se llama efecto MSW debido a sus descubridores: Mikheyev, Smirnov y Wolfenstein.

Para que esto se lleve a cabo se necesita que los eigenestados de sabor ν_e, ν_μ, ν_τ sean diferentes de los eigenestados de masa (usualmente etiquetados ν_1, ν_2, ν_3). Por simplicidad se explica el proceso con dos eigenestados de masa y dos eigenestados de sabor, por ejemplo escribamos el estado ν_e como $\nu_e = \cos\theta\nu_1 + \sin\theta\nu_2$ donde θ es llamado ángulo de mezcla y es la amplitud de los estados ν_1 y ν_2 en la función ν_e .

Las oscilaciones de neutrinos ocurren por la variación en el tiempo de las fases relativas de diferentes componentes (eigenestados de masa) de la función de onda que representa al eigenestados de sabor. Estas fases de los eigenestados de masa varían con el tiempo por que diferentes eigenestados de masa se mueven con diferentes velocidades. El cambio en las fases causa que la función inicial ν_e por ejemplo, se vea algunas veces como un eigenestado de sabor diferente.

En un medio con una densidad de electrones y nucleones, el índice de refracción de los neutrinos es proporcional a la densidad por la amplitud de dispersión. Los neutrinos electrónicos tienen diferentes interacciones con los electrones a las que presentan los otros sabores de neutrinos y esto es la esencia del efecto MSW.

La evidencia que se viene dando por los experimentos [12] es que el mejor ajuste para la diferencia cuadrática de masas y el ángulo de mezcla en el caso de los neutrinos solares es

$$\Delta m^2 = (8.3 \pm 0.6) \times 10^{-5} eV^2, \sin^2\theta = 0.28 \pm 0.03.$$

Para los neutrinos atmosféricos

$$1.9 \times 10^{-3} eV^2 < \Delta m^2 < 3.0 \times 10^{-3} eV^2$$

con $\sin^2 2\theta > 0.90$.

Capítulo 5

Masas de neutrinos

Una propiedad fundamental de los neutrinos es su masa. En un principio se pensaba que los neutrinos no tenían masa, pero ahora sabemos que los neutrinos son masivos, lo cual implica un cambio en la concepción del universo [1].

Los experimentos que pretenden medir directamente la masa de los neutrinos, obtienen los siguientes límites superiores [1].

$$\begin{aligned} m_e &< 12eV \\ m_\mu &< 170keV \\ m_\tau &< 24MeV. \end{aligned} \tag{5.1}$$

De acuerdo a lo anterior ν_μ podría tener menos de la mitad de la masa del electrón ($m_e 500keV$) y ν_τ podría ser 50 veces mas pesado que el electrón. Sin embargo sabemos que dicha posibilidad no se da, otro tipo de experimentos y observaciones impone restricciones mucho más severas a las masas de los neutrinos. De acuerdo a nuestro conocimiento actual de la Cosmología [5] sabemos que los neutrinos tienen una densidad que es 8 órdenes de magnitud mayor que la de bariones. En base a lo anterior se obtiene una cota superior para la suma de las masas de todos los neutrinos dada por $\sum_i m_{\nu_i} \leq 0.5eV$; condición mucho más restrictiva que la dada en (5.1).

Sin embargo tal y como discutimos en el capítulo anterior, los experimentos de oscilaciones han arrojado condiciones todavía más restrictivas. Las masas de los neutrinos deben ser mucho menores de lo que se menciona arriba. Estas cotas están dadas por experimentos con oscilaciones de neutrinos las

cuales miden los cuadrados de las diferencias de masas. Hay dos resultados importantes al respecto.

$$\begin{aligned}\delta m_{1,2}^2 &\simeq 8 \times 10^{-5} eV^2 \\ \delta m_{2,3}^2 &\simeq 2.6 \times 10^{-3} eV^2.\end{aligned}$$

los cuales provienen de los neutrinos solares y atmosféricos respectivamente. Tomando en cuenta la jerarquía de las masas de neutrinos $m_1 < m_2 < m_3$, y suponiendo que no existe degeneración se puede hacer la siguiente sugerencia

$$\begin{aligned}m_1 &\sim 0 \\ m_2 &\sim \delta m_{1,2} \\ m_3 &\sim \delta m_{2,3}.\end{aligned}$$

Para continuar con el estudio de la masa del neutrino hay que retomar la discusión de si los neutrinos son partículas de Dirac o de Majorana, pues los términos de masa son diferentes para cada modelo.

En la teoría de campos, la masa es determinada por el término de masa del lagrangiano (término cuadrático, sin derivadas). Este término de masa debe ser hermitiano e invariante ante transformaciones de Lorentz. Mas adelante veremos que este requerimiento restringe los posibles términos de masa a dos grupos:

$$\bar{\Psi}\Psi \quad y \quad \bar{\Psi}^c\Psi^c, \quad (5.2)$$

o bien

$$\bar{\Psi}\Psi^c \quad y \quad \bar{\Psi}^c\Psi. \quad (5.3)$$

Consideremos la densidad lagrangiana de Dirac, tiene la forma

$$l_D \sim (\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \bar{\Psi}m_D\Psi), \quad (5.4)$$

podemos ver que este lagrangiano contiene el término de masa de primera especie (5.2). El factor $\bar{\Psi}m_D\Psi$ se le llama lagrangiano de masa; $l_m = m_D\bar{\Psi}\Psi$. El parámetro m_D debe ser real para preservar la hermiticidad.

El término de masa de Dirac es invariante bajo transformaciones globales de fase. Esto es cambiar $\Psi \rightarrow e^{i\theta}\Psi$ y $\Psi^c \rightarrow e^{i\theta}\Psi^c$ no altera el lagrangiano, pues las exponenciales se cancelan.

El término de masa de Dirac puede ser escrito en términos de las proyecciones de quiralidad (3.36)

$$\Psi_R = \Lambda_+\Psi \quad y \quad \Psi_L = \Lambda_-\Psi,$$

entonces

$$l_m = m_D \bar{\Psi} \Psi = m_D (\bar{\Psi}_R \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_R). \quad (5.5)$$

Vemos que en este lagrangiano aparecen términos únicamente de la forma $\bar{\Psi}_R \Psi_L$ y $\bar{\Psi}_L \Psi_R$; no aparecen términos de la forma $\bar{\Psi}_R \Psi_R$ o $\bar{\Psi}_L \Psi_L$. Podemos ver fácilmente que estos términos se anulan. Consideremos únicamente la proyección izquierda, para la derecha es análogo.

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_L \Psi_L &= \overline{(\Lambda_- \Psi)} \Psi_L = (\Lambda_- \Psi)^\dagger \gamma^0 \Psi_L = \\ \Psi^\dagger \Lambda_-^\dagger \gamma^0 \Psi_L &= \Psi^\dagger \Lambda_- \gamma^0 \Psi_L = \Psi^\dagger \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \gamma^0 \Psi_L = \\ \Psi^\dagger \frac{1}{2} (\gamma^0 - \gamma^5 \gamma^0) \Psi_L &= \Psi^\dagger \frac{1}{2} (\gamma^0 + \gamma^0 \gamma^5) \Psi_L = \\ \Psi^\dagger \gamma^0 \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \Psi_L &= \Psi^\dagger \gamma^0 \Lambda_+ \Psi_L = 0. \end{aligned}$$

aquí hemos usado la anticonmutación de γ^5 con γ^0 además que $\Lambda_+ \Psi_L = 0$. Esto nos lleva a que, si tenemos solamente un campo Ψ_L o Ψ_R no es posible construir el término de masa.

Sin embargo, utilizando el campo conjugado de carga (al término generado por un campo y su conjugado de carga se le llama término de Majorana) se puede construir un lagrangiano más general. Esto es por las propiedades de las proyecciones quiral ante conjugación de carga.

$$\begin{aligned} (\Psi_L)^c &= (\Psi^c)_R \\ (\Psi_R)^c &= (\Psi^c)_L. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Veamos que (5.6) se cumple, consideremos un caso, el otro es análogo

$$(\Psi_L)^c = C \bar{\Psi}_L^t = C \gamma^0 (\Lambda_- \Psi)^* = \Lambda_+ C \gamma^0 \Psi^* = (\Psi^c)_R,$$

ahora ya podemos escribir un lagrangiano más general.

$$L \sim (\bar{\Psi} m_D \Psi + \bar{\Psi}^c m_D \Psi^c + \bar{\Psi} m_M \Psi^c + \bar{\Psi}^c m_M^* \Psi). \quad (5.7)$$

Este lagrangiano es invariante de Lorentz y depende de tres parámetros reales m_D , m_1 y m_2 donde $m_M = m_1 + im_2$.

Los términos de masa que involucran a Ψ y su conjugado de carga, son conocidos como términos de Majorana. Tomando en cuenta la definición de Ψ^c , resulta inmediato comprobar que los términos de Majorana $\bar{\Psi} \Psi^c$ y $\bar{\Psi}^c \Psi$ no son invariantes ante la transformación global de fase ($\Psi \rightarrow e^{i\alpha} \Psi$). Por esta razón no son términos válidos para partículas cargadas, sin embargo son permitidos en el caso de neutrinos. Cabe aclarar que el hecho de que los

términos de Majorana no sean invariantes ante la transformación global de fase, tiene como resultado que el número leptónico no se conserve.

La ecuación (5.7) se puede escribir de una forma más cómoda como:

$$L \sim (\bar{\Psi}, \bar{\Psi}^c) \begin{pmatrix} m_D & m_M \\ m_M^* & m_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi^c \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

de aquí resulta natural llamar a la matriz que contiene términos de masa de Dirac y de Majorana, matriz de masa para neutrinos, denotada por

$$M = \begin{pmatrix} m_D & m_M \\ m_M^* & m_D \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Esta matriz se puede diagonalizar. Los eigenvalores correspondientes son

$$\begin{aligned} \eta_1 &= m_D + |m_M| = m_D + \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \\ \eta_2 &= m_D - |m_M| = m_D - \sqrt{m_1^2 + m_2^2}. \end{aligned}$$

y sus eigenvectores

$$\begin{pmatrix} \Psi^+ \\ \Psi^- \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} e^{i\theta}\Psi + e^{-i\theta}\Psi^c \\ -e^{-i\theta}\Psi + e^{i\theta}\Psi^c \end{pmatrix}.$$

Donde $\tan 2\theta = \frac{m_2}{m_1}$, note que estos eigenvectores son campos de Majorana, con eigenvalor opuesto. Si $m_M = 0$ la matriz de masa M es diagonal con valor m_D y los eigenvectores describen una partícula de Dirac.

Una dificultad asociada a la diagonalización de M es que como es hermitiana, tiene valores propios reales no necesariamente positivos, y la dificultad está en que nuestra costumbre es definir a la masa positivamente. Si $m_D > |m_M|$ no hay ningún problema, pero si $|m_M| > m_D$ entonces una de ellas es negativa, pero esto no es gran problema pues podemos multiplicar por γ^0 y cambiar el signo de m entonces usaremos $\gamma^0\varphi_-$ en lugar de φ_- . Si $m_D = 0$ usamos combinaciones de φ_+ y $\gamma^0\varphi_-$ como eigenvectores.

Si se usan las proyecciones de quiralidad (3.36) como ya vimos, el término de masa de Dirac se expresa como combinación lineal de las proyecciones $\bar{\Psi}_L\Psi_R$ o $\bar{\Psi}_R\Psi_L$ y el término de masa de Majorana será $\bar{\Psi}_L(\Psi^c)_R$. Si los términos de masa se expresan en términos de proyecciones de quiralidad, obtenemos

$$l_m \sim (\bar{\Psi}_R, \bar{\Psi}_R^c, \bar{\Psi}_L, \bar{\Psi}_L^c) \begin{pmatrix} 0 & M \\ M^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_R^c \\ \Psi_L \\ \Psi_L^c \end{pmatrix}.$$

Ahora M es una matriz de 2×2 con tres parámetros complejos libres que se puede escribir en términos de las matrices de Pauli como $M = m_D 1 + m_1 \sigma_x + m_2 \sigma_y$. Este término es CPT invariante, si se quiere un término CP invariante, entonces m_D y m_1 deben ser reales y m_2 debe ser imaginario puro.

5.1 Mecanismo see-saw

A continuación construiremos la relación see-saw, partiendo del lagrangiano de masa que ya conocemos, la forma en que lo tenemos escrito, será modificada de manera que la matriz de masa se pueda manipular de acuerdo a nuestro propósito.

Consideremos el lagrangiano (5.7)

$$L \sim m_D(\bar{\Psi}\Psi + \bar{\Psi}^c\Psi^c) + m_M(\bar{\Psi}\Psi^c + \bar{\Psi}^c\Psi).$$

Sabemos que los términos de masa de Dirac, se pueden escribir en términos de las proyecciones de quiralidad (3.36) es decir:

$$L_D \sim m_D[\bar{\Psi}_R\Psi_L + h.c.].$$

Desarrollando la parte correspondiente a los términos de Majorana tendremos

$$\bar{\Psi}\Psi^c = \bar{\Psi}_L(\Psi_L)^c + \bar{\Psi}_R(\Psi_R)^c$$

$$\bar{\Psi}^c\Psi = \overline{(\Psi_L)^c}\Psi_L + \overline{(\Psi_R)^c}\Psi_R.$$

Juntamos los términos de Majorana de manera que los izquierdos queden con izquierdos y los derechos con derechos, el lagrangiano que los contiene a ambos ahora se escribe

$$L \sim m_D[\bar{\Psi}_L\Psi_R + h.c.] + m_L[\overline{(\Psi_L)^c}\Psi_L + h.c.] + m_R[\overline{(\Psi_R)^c}\Psi_R + h.c.]. \quad (5.10)$$

Definamos los operadores

$$f = \Psi_L + (\Psi_L)^c \quad F = \Psi_R + (\Psi_R)^c, \quad (5.11)$$

note que $f^c = f$ y $F^c = F$; es decir corresponde a estados de Majorana.

Usando esto tenemos las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \bar{f}f &= [\overline{(\Psi_L)^c}\Psi_L + h.c.] \\ \bar{F}F &= [\overline{(\Psi_R)^c}\Psi_R + h.c.] \\ \bar{f}F &= [\bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L] \\ \bar{F}f &= [\bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L]. \end{aligned}$$

El lagrangiano en términos de estos operadores se escribe como

$$L_m = m_D(\bar{f}F + \bar{F}f) + m_L\bar{f}f + m_R\bar{F}F,$$

o bien

$$L_m = (\bar{f}, \bar{F}) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Así que ahora la matriz de masa tiene la forma

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Recordemos que el lagrangiano de una teoría de norma, contiene acoplamientos de Yukawa entre un campo de fermión Ψ y un campo escalar de Higgs Φ de la forma:

$$\bar{\Psi}\Phi\Psi,$$

estos acoplamientos son permitidos por la invariancia de norma.

Durante el rompimiento espontáneo de la simetría, el campo Φ adquiere un valor de expectación en el vacío $\langle\Phi\rangle_0$.

El acoplamiento de Yukawa está dado como:

$$\bar{\Psi}\langle\Phi\rangle_0\Psi, \quad (5.14)$$

el cual es un término de masa, el valor de expectación $\langle\Phi\rangle_0$ es proporcional a la masa.

El lagrangiano en la ec (5.12) sirve de punto de partida para entender el mecanismo see-saw. Este se presenta por que como veremos a continuación se puede justificar que el valor de m_L es despreciable, mientras que $m_R \gg m_D$. Lo anterior se presenta por ejemplo en las teorías de gran unificación en las cuales los leptones y los quarks son unificados. Por ejemplo en el modelo de unificación $SU(5)$ la parte izquierda de la primera familia leptónica $(e, \nu)_L$ se incorpora en la representación de un *quintete* junto con los tres colores del quark d

$$\psi_L = \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e^- \\ -\nu \end{pmatrix}_L \quad (5.15)$$

En las extensiones de los modelos de gran unificación se incluye un neutrino derecho ν_R . El término $m_R \bar{\nu}_R \nu_R$ es singulete de $SU(5)$ por lo cual permanece invariante ante las transformaciones $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ del modelo estándar, por lo cual se espera que m_R sea del orden de la escala de

gran unificación $m_R \sim M_{GU} \sim 10^{14} - 10^{15} GeV$.

En este modelo las masas de Dirac serán de la forma

$$m_D \bar{\nu}_R H_a(\psi)_L$$

donde H es un campo escalar de dimensión 5 que da lugar al rompimiento espontáneo de la simetría. Debido a que ψ_L en (5.15) incluye quarks y leptones es razonable esperar que m_D sea del orden de la masa de los quarks.

Finalmente notamos que términos del tipo $m_L \bar{\psi}_L^c H \psi_L$ no son compatibles con la simetría del problema por lo cual se espera $m_L \simeq 0$.

Considerando el lagrangiano de masa (5.10) y los acoplamientos de Yukawa mencionados anteriormente (5.14), vemos que cuando los campos de Higgs adquieren valores esperados en el vacío. Los términos en (5.14) se pueden interpretar como masas de Dirac y Majorana, con: $m_L \sim 0$, $m_R \sim M_x$, $m_d \sim m_q$. Al comparar los tres términos m_L , m_D y m_R se tiene que m_L debe desaparecer, y que $m_R \gg m_D$ entonces la matriz de masa tomará la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}.$$

cuyos eigenvalores seran:

$$m_N \simeq m_R \quad m_{\nu'} \simeq -\frac{m_D^2}{m_R}. \quad (5.16)$$

Ya que tenemos los eigenvalores (5.16) encontramos los eigenvectores correspondientes en términos de los campos f y F

$$N \simeq F + \frac{m_D}{m_R} f \quad \nu' \simeq f - \frac{m_D}{m_R} F$$

Para tener una masa positiva del neutrino ligero, tomamos el campo de neutrino físico ν el cual se relaciona con ν' por $\nu = \gamma^5 \nu'$. Note que $\bar{\nu} \nu = -\bar{\nu}' \nu'$. Entonces

$$l \sim m_\nu \bar{\nu} \nu + m_N \bar{N} N$$

con

$$m_\nu \simeq \frac{m_D^2}{m_R}, \quad m_N \simeq m_R$$

Tomando en cuenta, que como comentamos para una teoría de gran unificación esperamos $m_d \sim m_q$ (masa de quarks) y $m_R \sim M_x \sim 10^{14} GeV$, se

tiene que predice un neutrino ligero con masa

$$m_\nu \sim \frac{m_q^2}{M_x}$$

y uno superpesado con masa

$$m_N \sim M_x$$

De estas últimas dos expresiones se obtiene la famosa relación *see-saw*

$$m_\nu m_N = m_{q,l}^2 \tag{5.17}$$

donde m_q pertenece a la masa del leptón correspondiente al neutrino, o bien m_l la masa de un quark.

Este mecanismo sugiere que se podría esperar en el futuro descubrir un leptón neutro pesado N.

5.2 Modelo izquierdo-derecho

En esta sección vamos a estudiar el modelo simétrico *izquierdo-derecho* el cual fue presentado por Mohapatra [10]. El resultado de este modelo nos da una relación para las masas de los neutrinos en términos de la masa de su respectivo leptón y la masa del W_R . Considerando estos resultados y los resultados que se tienen de las diferencias de masas cuadráticas procedentes de los experimentos de oscilaciones de neutrinos, podemos estimar posibles valores para las masas de neutrinos *según este modelo*.

En el modelo simétrico izquierdo-derecho, el rompimiento espontáneo de la simetría es un proceso de dos pasos. Primero, el grupo de norma $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ es llevado a través del rompimiento de simetría hacia $SU(2)_L \times U(1)$ y el campo W_R adquiere una masa $M(W_R)$ la cual es del orden de la escala de rompimiento de simetría $\langle \Phi \rangle_R$

$$\langle \Phi \rangle_R : SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \longrightarrow SU(2)_L \times U(1),$$

produciendo

$$M_{W_R} \sim \langle \Phi \rangle_R.$$

Entonces el grupo $SU(2)_L \times U(1)$ es llevado a $U(1)$ el factor de electromagnetismo y el W_L usual adquiere masa $M(W_L)$ medida alrededor de 83 GeV.

$$\langle \Phi \rangle_L : SU(2)_L \times U(1) \longrightarrow U(1)_{EM},$$

produciendo

$$M_{W_L} \sim 83 \text{ GeV} \sim \langle \Phi \rangle_L.$$

Experimentalmente no se han visto efectos de corrientes derechas, por lo que esperamos que la masa de W_R sea muy grande.

La escala de rompimiento de $SU(2)_R$ esperamos que sea mucho más grande que la de $SU(2)_L$ es decir $\langle \Phi \rangle_R \gg \langle \Phi \rangle_L$.

Ahora construimos los acoplamientos de Yukawa.

Los campos de neutrino Ψ_L y Ψ_R en el modelo simétrico izquierdo derecho, tienen números cuánticos de acuerdo a: $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$.

El campo Ψ_L esta en un doblete $SU(2)_L \begin{bmatrix} \Psi_L \\ e_L \end{bmatrix}$, con $I_L = \frac{1}{2}$ $I_R = 0$

El campo Ψ_R esta en un doblete $SU(2)_R \begin{bmatrix} \Psi_R \\ e_R \end{bmatrix}$, con $I_L = 0$ $I_R = \frac{1}{2}$

Así que los productos bilineales que envuelven Ψ_R y Ψ_L tienen los siguientes números cuánticos:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_R \Psi_L \text{ tiene } I_L = \frac{1}{2} \quad I_R = \frac{1}{2} \\ (\bar{\Psi}_L)^c \Psi_L = \Psi_L^t C \Psi_L \text{ tiene } I_L = 1 \quad I_R = 0 \\ (\bar{\Psi}_R)^c \Psi_R = \Psi_R^t C \Psi_R \text{ tiene } I_L = 0 \quad I_R = 1. \end{aligned}$$

Estos términos con coeficientes constantes, son prohibidos debido a que el lagrangiano debe ser un escalar. Términos permitidos (con totales $I_L = I_R = 0$) pueden ser construidos acoplando estos bilineales a campos de Higgs Φ , Δ_L y δ_R con números cuánticos apropiadamente elegidos.

Estos acoplamientos de Yukawa son:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_R \Phi \Psi_L \text{ donde } \Phi \text{ tiene } I_L = \frac{1}{2} \quad I_R = \frac{1}{2} \\ (\bar{\Psi}_L)^c \Delta_L \Psi_L \text{ donde } \delta_L \text{ tiene } I_L = 1 \quad I_R = 0 \\ (\bar{\Psi}_R)^c \Delta_R \Psi_R \text{ donde } \delta_R \text{ tiene } I_L = 0 \quad I_R = 1. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Considerando el modelo simétrico izquierdo-derecho $(SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1))$ vamos a obtener una relación para las masas de los neutrinos similar a la see-saw. Iniciamos con una generación de leptones y para las demás es el mismo procedimiento.

Comenzamos proponiendo la existencia de dos neutrinos de Majorana ν y N entonces elegimos multipletes de la siguiente forma

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad \psi_R = \begin{pmatrix} N_R \\ e_R \end{pmatrix},$$

con sus respectivos números cuánticos $(\frac{1}{2}, 0, -1)$ y $(0, \frac{1}{2}, -1)$ respectivamente, elegidos de acuerdo a $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$. Pedimos que el lagrangiano tenga una simetría izquierda-derecha. Bajo esta simetría $\psi_L \leftrightarrow \psi_R$.

Para romper la simetría introducimos multipletes de Higgs con un potencial elegido adecuadamente. Entonces φ tendrá como números cuánticos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ además $\Delta_L \equiv (1, 0, 2)$ y $\Delta_R \equiv (0, 1, 2)$. Bajo una simetría izquierda-derecha tendremos que $\varphi \leftrightarrow \varphi^\dagger$ y $\Delta_L \leftrightarrow \Delta_R$. Si se parte de un potencial con simetría izquierda-derecha es posible hallar un dominio de parámetros de acoplamiento, para los cuales

$$\langle \varphi \rangle = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix} \quad \langle \Delta_L \rangle = 0 \quad \langle \Delta_R \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

se puede ver que si $v \gg k', k$ después de la primera etapa de rompimiento de simetría, el grupo local de simetría es reducido a $SU(2)_L \times U(1)$ donde $U(1)$ corresponde a $I_{3_R} + Y$ lo cual es finalmente roto cuando $\langle \varphi \rangle \neq 0$.

Ahora por simplicidad asumimos también que $k' \ll k$.

Los acoplamientos invariantes de norma de Yukawa se pueden escribir como.

$$\ell_Y = h_1 \bar{\psi}_L \varphi \psi_R + h_2 \psi_L \bar{\varphi} \psi_R + h_3 (\psi_L^T C i \tau_2 \Delta_L \psi_L + \psi_R^T C i \tau_2 \Delta_R \psi_R) + h.c.$$

donde $\bar{\varphi} \equiv \tau_2 \varphi^* \tau_2$,

$$\Delta_{L,R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \delta^+ & \delta^{++} \\ \delta^0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \delta^+ \end{pmatrix}_{L,R},$$

C es la matriz de conjugación de carga de Dirac.

Dados los números cuánticos que elegimos para φ en el modelo $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ podemos ver que estructura tiene usando la relación $Q = I_{3_L} + I_{3_R} + \frac{1}{2}Y$, pero para φ tenemos que $Y = 0$. Entonces si $I_{3_L} = \frac{1}{2}$ $I_{3_R} = \frac{1}{2}$. Tenemos cuatro casos.

Si $I_{3_L} = \frac{1}{2}$ $I_{3_R} = -\frac{1}{2}$ entonces se puede interpretar como una partícula neutra.

Si $I_{3_L} = -\frac{1}{2}$ $I_{3_R} = -\frac{1}{2}$ se interpreta como una partícula de carga negativa.

Si $I_{3_L} = \frac{1}{2}$ $I_{3_R} = \frac{1}{2}$ se tendrá una partícula de carga positiva.

Si $I_{3_L} = -\frac{1}{2}$ $I_{3_R} = \frac{1}{2}$ se tendrá nuevamente una partícula neutra pero que no tiene por que ser igual al primer caso.

Entonces estas partículas cumplen con los números cuánticos elegidos para φ por lo que podemos asumir que φ tiene la siguiente forma

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^0 & \varphi^+ \\ \varphi^- & \bar{\varphi}^0 \end{pmatrix}.$$

Habiendo escrito específicamente a φ podemos desarrollar el lagrangiano con el fin de poder separar los términos de masa que nos interesan, que son los términos que involucran neutrinos.

El primer término del lagrangiano es:

$$h_1 \bar{\psi}_L \varphi \psi_R = h_1 \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^0 & \varphi^+ \\ \varphi^- & \tilde{\varphi}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_R \\ e_R \end{pmatrix} =$$

$$h_1 \bar{\nu}_L \varphi^0 N_R + h_1 \bar{\nu}_L \varphi^+ e_R + h_1 \bar{e}_L \varphi^- N_R + h_1 \bar{e}_L \tilde{\varphi}^0 e_R.$$

El segundo es

$$h_2 \psi_L \tilde{\varphi} \psi_R = h_2 \psi_L \tau_2 \varphi^* \tau_2 \psi_R =$$

$$h_2 \begin{pmatrix} \nu_L & e_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{0*} & \varphi^{+*} \\ \varphi^{-*} & \tilde{\varphi}^{0*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_R \\ e_R \end{pmatrix} =$$

$$-h_2 \nu_L \varphi^{-*} e_R + h_2 \nu_L \tilde{\varphi}^{0*} N_R + h_2 e_L \varphi^{0*} e_R - h_2 e_L \varphi^{+*} N_R.$$

El tercero

$$\psi_L^T C i \tau_2 \Delta_L \psi_L = \begin{pmatrix} \nu_L & e_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \delta^+ & \delta^{++} \\ \delta^0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \delta^+ \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$$

$$= h_3 \nu_L C \delta^0 \nu_L - h_3 \nu_L C \frac{1}{\sqrt{2}} \delta^+ e_L - h_3 e_L C \frac{1}{\sqrt{2}} \delta^+ \nu_L - h_3 e_L C \delta^{++} e_L.$$

El cuarto

$$\psi_R^T C i \tau_2 \Delta_R \psi_R = \begin{pmatrix} N_R & e_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \delta^+ & \delta^{++} \\ \delta^0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \delta^+ \end{pmatrix}_R \begin{pmatrix} N_R \\ e_R \end{pmatrix}$$

$$= h_3 N_R C \delta^0 N_R - h_3 N_R C \frac{1}{\sqrt{2}} \delta^+ e_R - h_3 e_R C \frac{1}{\sqrt{2}} \delta^+ N_R - h_3 e_R C \delta^{++} e_R.$$

Habiendo hecho esto podemos separar los lagrangianos que contienen términos de electrón y términos de neutrino. Para el electrón tenemos:

$$\ell_{Y_e} = h_1 \bar{e}_L \tilde{\varphi}^0 e_R + h_2 e_L \varphi^{0*} e_R - h_3 e_L C \delta^{++} e_L - h_3 e_R C \delta^{++} e_R + h.c.$$

para el neutrino

$$\ell_{Y_N} = h_1 \bar{\nu}_L \varphi^0 N_R + h_2 \nu_L \tilde{\varphi}^{0*} N_R + h_3 \nu_L C \delta^0 \nu_L + h_3 N_R C \delta^0 N_R + h.c.$$

Usando (5.19) junto con que $k' \ll k$ la parte del lagrangiano que contiene términos para el electrón se reduce a

$$\ell_{Y_e} = h_2 e_L \varphi^{0*} e_R \simeq h_2 k. \quad (5.20)$$

Si hacemos lo mismo con la parte del lagrangiano para neutrinos tendremos

$$\begin{aligned}\ell_{Y_N} &= h_1 \bar{\nu}_L \varphi^0 N_R + h_3 N_R C \delta^0 N_R + h.c. \\ &= h_1 \bar{\nu}_L k N_R + h_3 \bar{N}_R v N_L + h.c.\end{aligned}$$

Lo cual puede ser escrito en una forma matricial

$$\begin{array}{c} \bar{\nu} \quad \bar{N} \\ v \quad \left(\begin{array}{cc} 0 & h_1 k \\ h_1 k & h_3 v \end{array} \right) \\ N \end{array}.$$

Ahora calculamos los eigenvalores de esta matriz, evidentemente $m_N \simeq h_3 v$ y $m_\nu = \frac{(h_1 k)^2}{m_N}$ pero de (5.20) se tiene que $m_e \simeq h_2 k$ entonces

$$m_\nu = \frac{m_e^2}{m_N} = \frac{m_e^2}{h_3 v} = \frac{m_e^2}{g^2 v},$$

la primera parte de la ecuación anterior es básicamente una relación tipo see-saw.

Comparando con la relación (5.16), vemos que la diferencia esencial, es que aquí tenemos la masa del electrón m_e en lugar de la masa m_D y además m_N corresponde a la escala de rompimiento de la simetría izquierda derecha. Podemos identificar también que $gv \simeq m_{W_R}$ y en la última parte elegimos que $h_3 \simeq g^2$ entonces tendremos

$$m_{\nu_e} \simeq \frac{m_e^2}{gm_{W_R}} \quad m_{\nu_\mu} \simeq \frac{m_\mu^2}{gm_{W_R}} \quad m_{\nu_\tau} \simeq \frac{m_\tau^2}{gm_{W_R}}. \quad (5.21)$$

Ahora veamos que pasa si usamos las relaciones que acabamos de obtener y además usamos la información de las diferencias de masas cuadráticas que se obtienen en los experimentos de oscilaciones de neutrinos [5]. Tenemos que

$$\begin{aligned}\delta m_{1,2}^2 &\simeq 8 \times 10^{-5} eV^2 \\ \delta m_{2,3}^2 &\simeq 2.6 \times 10^{-3} eV^2.\end{aligned} \quad (5.22)$$

Consideremos la primera relación y sustituyamos (5.21)

$$m_2^2 - m_1^2 \simeq \frac{m_\mu^4 - m_e^4}{(gm_{W_R})^2} \simeq 8 \times 10^{-5} eV^2,$$

de aquí obtenemos

$$(gm_{wR})^2 = \frac{m_\mu^4 - m_e^4}{8 \times 10^{-5} eV^2}, \quad (5.23)$$

ahora hay que usar los valores de las masas de los leptones

$$\begin{aligned} m_e &= 0.511 MeV \\ m_\mu &= 0.105 GeV \\ m_\tau &= 1.77 GeV, \end{aligned} \quad (5.24)$$

sustituyendo en (5.23) obtenemos $(gm_{wR})^2 = 1.6 \times 10^{18} GeV^2$ de aquí tenemos en aproximación la magnitud $m_{wR} \simeq 10^9 GeV$ lo cual nos da una idea de la escala de rompimiento de la simetría izquierda-derecha según este modelo. Otra cosa que se puede hacer con los resultados de este modelo (5.21) y los datos de las oscilaciones (5.22) es tomar un de las diferencias por ejemplo $m_2^2 - m_1^2$ y dividirla entre m_1^2 con lo que tendremos

$$\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 1 = \frac{8 \times 10^{-5} eV^2}{m_1^2}, \quad (5.25)$$

por otro lado de (5.21) tenemos que

$$\frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2,$$

sustituyendo esto en (5.25) tenemos

$$\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^4 - 1 = \frac{8 \times 10^{-5} eV^2}{m_1^2},$$

de donde

$$m_1^2 = \frac{8 \times 10^{-5} eV^2}{\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^4 - 1},$$

le damos valores usando (5.24) y obtenemos

$$\begin{aligned} m_1 &\simeq 2.03 \times 10^{-7} eV \\ m_2 &\simeq 9 \times 10^{-3} eV \\ m_3 &\simeq 5.2 \times 10^{-2} eV. \end{aligned}$$

Lo cual da valores muy pequeños de las masas de los neutrinos, La suma total de las masas es $\sim 0.06 eV$. La mayoría de las constricciones cosmológicas para las masas de neutrinos [5] dicen que la suma total de las masas está entre $0.1 eV$ y $1 eV$ por lo que este resultado ($0.06 eV$) está un orden de magnitud fuera, aunque en [11] se señala un valor aproximado de $0.05 eV$ que es casi lo mismo que se tiene aquí $0.06 eV$

5.3 Masas y ángulos de mezcla

Ahora presentamos una revisión de conocimiento actual acerca de las masas y los ángulos de mezcla de los neutrinos. El tema de las masas y ángulos de mezcla ha sido ampliamente estudiado en el sector de quarks. Sin embargo, debido a la dificultad de medir procesos en los que intervienen neutrinos, el estudio del sector leptónico es más limitado. Hay también una conexión con la astrofísica y cosmología como por ejemplo la bariogénesis a través de leptogénesis y la posible contribución de los neutrinos a la materia oscura en el universo [16].

Ya conocemos el problema de los neutrinos solares y atmosféricos, el cual se resuelve con el fenómeno de oscilaciones, lo cual implica la existencia de neutrinos masivos.

Hay varios modelos para obtener neutrinos masivos, pero siguen sin explicar algunas ambigüedades experimentales como el valor absoluto de la masa de los neutrinos o el valor del tercer ángulo de mezcla del cual solo se tiene una cota superior, pero esto lo veremos más adelante.

5.3.1 Formulación básica para una mezcla de tres neutrinos

Sabemos que las oscilaciones de neutrinos se producen debido a que hay un desfase entre la base de sabor, ($\nu' \equiv \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$) y la base de eigenestados de masa ($\nu \equiv \nu_1, \nu_2, \nu_3$).

$$\nu' = U\nu,$$

donde U es la matriz unitaria de mezcla de 3×3 . Dada la definición de U y las propiedades de transformación de la matriz efectiva de masa de neutrino ligero m_ν :

$$\begin{aligned} \nu'^T m_\nu \nu' &= \nu^T U^T m_\nu U \nu \\ U^T m_\nu U &= \text{Diag}(m_1, m_2, m_3) \equiv m_{diag}, \end{aligned} \tag{5.26}$$

obtenemos la forma general de m_ν :

$$m_\nu = U^* m_{diag} U^\dagger.$$

La matriz U puede ser parametrizada en términos de tres ángulos de mezcla θ_{12}, θ_{23} y θ_{13} ($0 \leq \theta_{ij} \leq \pi/2$) y una fase φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Es común adoptar la siguiente definición:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{i\varphi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\varphi} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

donde $s_{ij} \equiv \sin\theta_{ij}$, $c_{ij} \equiv \cos\theta_{ij}$. Si los neutrinos son partículas de Majorana, aparecen fases relativas acompañando las masas de Majorana m_1, m_2 y m_3 , esas fases pueden ser asociadas a $m_{1,2} \equiv |m_{1,2}|e^{i\varphi_{1,2}}$. Así que tendremos 9 parámetros; 3 eigenvalores, 3 ángulos de mezcla y 3 fases de violación de CP. Mientras que en el caso de Dirac se tiene una sola fase de violación de CP. Como hemos visto en el caso de tres familias se pueden definir dos diferencias cuadráticas de masas: Δm_{12}^2 y Δm_{23}^2 , una de estas diferencias corresponde a los neutrinos solares y otra a los neutrinos atmosféricos. Las oscilaciones de neutrinos atmosféricos se pueden escribir en términos de los parámetros $(\Delta m_{23}^2, \theta_{23}, \theta_{13})$ y para los neutrinos solares $(\Delta m_{12}^2, \theta_{12}, \theta_{13})$ pero en el límite ideal s_{13} desaparece y las oscilaciones se desacoplan. Para neutrinos atmosféricos tenemos $c_{23} \sim s_{23} \sim 1/\sqrt{2}$, correspondiente a una mezcla máxima.

Si tomamos s_{23} máximo y mantenemos únicamente términos lineales en $u = s_{13}e^{i\varphi}$, de los experimentos hallamos la siguiente estructura de la matriz de mezcla U_{fi} ($f = e, \mu, \tau$, $i = 1, 2, 3$):

$$U_{fi} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & u \\ -(s_{12} + c_{12}u^*)/\sqrt{2} & (c_{12} - s_{12}u^*)/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ (s_{12} - c_{12}u^*)/\sqrt{2} & -(c_{12} + s_{12}u^*)/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

donde θ_{12} es cercano a $\pi/6$ (para $s_{12} = 1/\sqrt{3}$ y $u = 0$ tenemos el también llamado patrón de mezcla tribimáximo con las entradas en la segunda columna todas iguales a $1/\sqrt{3}$ en valor absoluto). Tenemos entonces tres posibles patrones de los eigenvalores de masa:

$$\begin{aligned} \text{Degenerado} & : |m_1| \sim |m_2| \sim |m_3| \gg |m_i - m_j| \\ \text{Jerarquía Invertida} & : |m_1| \sim |m_2| \gg |m_3| \\ \text{Jerarquía Normal} & : |m_3| \gg |m_{2,1}| \end{aligned} \quad (5.29)$$

Aquí cobra importancia el doble decaimiento beta sin neutrinos, si es observado confirmaría la naturaleza de Majorana de los neutrinos y determinará cual de los posibles patrones de los eigenvalores de masa es el correcto.

5.3.2 Masas de neutrinos y la violación del número leptónico

Las oscilaciones de neutrinos implican la existencia de masas de neutrinos, las cuales a su vez demandan la existencia de neutrinos derechos (masas de Dirac) o la violación del número leptónico (masas de Majorana) o ambas cosas [16].

Tal y como discutimos anteriormente la inclusión de masas de Majorana viola la conservación del número leptónico. La inclusión simultánea de masas de Dirac y Majorana puede dar lugar al mecanismo see-saw, el cual es un método elegante para explicar la pequeñez de las masas de los neutrinos. Por lo tanto en términos de la violación del número leptónico, la pequeñez de las masas de neutrinos puede ser entendida como inversamente proporcional a una gran escala de energía donde el número leptónico es violado; del orden de M_{GUT} .

Si aceptamos la no conservación del número leptónico, ganamos una explicación elegante de la pequeñez de las masas de neutrinos.

Consideraremos que la existencia de neutrinos derechos es igualmente posible por que todos los grupos de gran unificación mayores que $SU(5)$ requieren de ellos. Así que asumiremos ambos, violación del número leptónico y neutrinos derechos, lo que hace posible el mecanismo see-saw, cuyo resultado ya conocemos; Las masas de neutrinos ligeros son cuadráticas en las masas de Dirac e inversamente proporcionales a la gran masa de Majorana.

$$m_\nu \approx m_D^2/M.$$

Tomando una masa ligera de neutrinos del orden de la raíz de la diferencia cuadrática de masa de los neutrinos atmosféricos (0.05eV) y una masa de Dirac de 200GeV tenemos que $M \approx 10^{15} GeV$ lo que es un indicativo para M_{GUT} .

5.3.3 Importancia del doble decaimiento beta sin neutrinos

Los experimentos de oscilaciones de neutrinos no proveen información sobre el valor absoluto de las masas de neutrinos y no permiten distinguir entre neutrinos de Dirac o Majorana. Del punto final del espectro de decaimiento beta de tritio tenemos una cota superior de 2.2eV para la masa del antineutrino del electrón [16].

De acuerdo con análisis recientes de la colaboración WMAP se tiene que $\sum_i |m_i| < 0.69\text{eV}$. Análisis más conservadores dan $\sum_i |m_i| < 1.01\text{eV}$. El límite presente para el doble decaimiento beta sin neutrinos es $|m_{\nu_e}| < 0.2\text{eV}$. Entonces estamos en un nivel en que esperamos una señal, pues la cantidad que acotan estos experimentos es la entrada 11 (m_{ee}) de la matriz de masa de neutrinos en la base de sabor (5.26)(5.27) [16].

$$|m_{ee}| = |(1 - s_{13}^2)(m_1 c_{12}^2 + m_2 s_{12}^2) + m_3 e^{2i\varphi} s_{13}^2|,$$

para modelos con 3 neutrinos con masa degenerada, jerarquía normal o jerarquía invertida. Partiendo de esta fórmula se obtiene.

- a) Caso degenerado. Si $|m|$ es la masa común y tomamos $s_{13} = 0$. Tenemos $m_{ee} \sim |m|(c_{12}^2 + s_{12}^2)$. Aquí la ambigüedad de fase ha sido reducida a una ambigüedad de signo la cual es suficiente para deducir cotas. En este caso m_{ee} debe ser grande como el actual límite experimental (del orden de la diferencia de masa de los neutrinos atmosféricos) $\sim 10^{-2}\text{eV}$.
- b) Caso de jerarquía inversa. En este caso se tiene la misma fórmula aproximada $m_{ee} \sim |m|(c_{12}^2 + s_{12}^2)$, m_3 es pequeña y s_{13} puede ser despreciada. La diferencia es que sabemos que $|m| \approx \sqrt{\Delta m_{atm}^2}$ así que $|m_{ee}| < \sqrt{\Delta m_{atm}^2} \sim 0.05\text{eV}$. Esperamos que $|m_{ee}| > 0.01\text{eV}$.
- c) Caso de jerarquía normal. Aquí no podemos despreciar el término m_3 . Sin embargo en este caso $|m_{ee}| \sim |\sqrt{\Delta m_{sun}^2} s_{12}^2 \pm \sqrt{\Delta m_{atm}^2} s_{13}^2|$ y tenemos la cota $|m_{ee}| < 10^{-3}\text{eV}$.

Evidencia reciente para el doble decaimiento beta sin neutrinos dice que $|m_{ee}| \sim (0.2 \div 0.6)\text{eV}$. Si se confirma, nos lleva al caso a) o a modelos con más de tres neutrinos.

5.3.4 Bariogénesis via leptogénesis del decaimiento de un neutrino pesado

En el universo observamos un exceso de bariones sobre antibariones. Es tentador el poder explicar la asimetría por una evolución dinámica (bariogénesis) partiendo de un estado inicial del universo sin bariones. Para tener bariogénesis necesitamos las famosas condiciones de Sakharov: violación de **B**, violación de **CP** y una evolución en condiciones fuera del equilibrio termodinámico. Estas condiciones podrían tener lugar en el contexto del Modelo Estándar durante la transición de fase electrodébil [16]. **B** es violado por instantones cuando kT es del orden de la escala débil (pero $B-L$ se conserva), **CP** es violada por la fase de la matriz CKM y el suficiente desequilibrio térmico debió ocurrir en la transición de fase electrodébil. Un análisis cuantitativo muestra que la bariogénesis no es posible en el Modelo Estándar por que no hay suficiente violación de **CP** y la transición de fase no es suficientemente fuerte a primer orden, a menos que $m_H < 80 GeV$ lo cual por ahora está excluido [16].

Si la bariogénesis en la escala débil está excluida por los datos, esta puede ocurrir en, o por debajo de la escala GUT, después de la inflación. Entonces la bariogénesis a $kT \sim 10^{10} - 10^{15} GeV$ necesita la violación de $B-L$ en alguna etapa, lo cual podría suceder si los neutrinos son partículas de Majorana. Los dos efectos deben estar relacionados si la bariogénesis emerge de la leptogénesis entonces convertida en leptogénesis por instantones. Resultados recientes de masas de neutrinos dan pie e impulsan esta posibilidad.

En leptogénesis la asimetría bariónica es producida fuera de equilibrio, los decaimientos de neutrinos derechos pesados violando L y **CP**. En los casos más simples el espectro de neutrinos derechos se asume jerárquico y el mecanismo es dominado por el estado más ligero ν_1^c . Entonces la asimetría bariónica esperada es proporcional al producto entre la asimetría **CP** del decaimiento y un factor de eficiencia. Finalmente una cota superior para la masa del neutrino ligero puede ser obtenida. Estudios cuantitativos muestran que

$$|m_i| < (0.12 \div 0.15)eV.$$

5.3.5 Neutrinos degenerados

La observación de mezclas casi máximas de neutrinos atmosféricos y solares sugiere que las masas de estos podrían ser casi degeneradas, aunque esta

posibilidad es poco favorecida por la más reciente información experimental. En general en modelos degenerados no hay una relación directa entre las masas de Dirac de los quarks y los leptones, la posibilidad de una descripción simultánea de todas las masas de fermiones sin una teoría de gran unificación es más remota [16].

La degeneración de los neutrinos debe ser garantizada por algún rompimiento suave de la simetría. Modelos basados en simetrías discretas o continuas han sido propuestos [16], por ejemplo la simetría $SO(3)$ en el límite simétrico, los neutrinos son degenerados y los leptones no tienen masa. Cuando la simetría se rompe las masas de leptones cargados son mucho más grandes que las de neutrinos. En esta variedad de modelos los ángulos de mezcla están completamente indeterminados en la fase simétrica y ello se origina solo en la fase espontáneamente rota de desalineación entre términos de rompimiento de simetría para neutrinos y leptones cargados.

Debemos tener en mente que las correcciones radiativas pueden modificar las masas y los ángulos de mezcla. Dados los presentes límites superiores para las masas de neutrinos estas correcciones son siempre despreciables en el Modelo Estándar.

El límite más directo de laboratorio proveniente del decaimiento en tritio es $|m| < 2.2eV$. En años anteriores se han propuesto modelos con masas entre 1 y 2eV de manera que sean una contribución importante para la materia oscura del universo. Sin embargo el límite existente en ausencia de doble decaimiento beta sin neutrinos implica aproximarse a doble mezcla máxima (bimezcla). Para $|m| \gg m_{ee}$ se necesita $m_1 \approx -m_2$ y $c_{12}^2 \approx s_{12}^2$. En plan de satisfacer la cota para m_{ee} . Esto se ejemplifica por la siguiente textura [16]

$$m_\nu = m \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & (1+\eta)/2 & (1+\eta)/2 \\ 1/\sqrt{2} & (1+\eta)/2 & (1+\eta)/2 \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

donde $\eta \ll 1$ correspondiente a una mezcla bimáxima exacta, $s_{13} = 0$ y los eigenvalores son $m_1 = m, m_2 = -m$ y $m_3 = (1+\eta)m$. Esta textura ha sido propuesta en el contexto de una simetría de sabor espontáneamente rota $SO(3)$.

Una matriz de masa más realista se puede obtener agregando pequeñas per-

turbaciones a m_ν de la ecuación (5.30):

$$m_\nu = m \begin{pmatrix} \delta & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & (1+\eta)/2 & (1+\eta-\epsilon)/2 \\ (1-\epsilon)/\sqrt{2} & (1+\eta-\epsilon)/2 & (1+\eta-2\epsilon)/2 \end{pmatrix},$$

donde ϵ parametriza las primeras correcciones radiativas y δ controla $m_{\nu e}$. Consideremos el primer caso $\delta \ll \epsilon$. En primera aproximación θ_{12} permanece máximo. Se obtiene $\Delta m_{sun}^2 \approx m^2 \epsilon^2 / \eta$ y

$$\theta_{13} \approx \left(\frac{\delta m_{sun}^2}{\delta m_{atm}^2} \right)^{1/2}, \quad m_{\nu e} \ll m \left(\frac{\delta m_{sun}^2 \delta m_{atm}^2}{m^4} \right)^{1/2}.$$

Si suponemos que $\delta \gg \epsilon$ hallamos $\Delta m_{sun}^2 \approx 2m^2 \delta$, $\theta_{23} \approx \pi/4$, $\sin^2 2\theta_{12} \approx 1 - \delta^2/4$. También en este caso el ángulo de mezcla solar permanece inaceptablemente cercano a $\pi/4$. Obtenemos:

$$\theta_{13} \approx 0, \quad m_{ee} \approx \frac{\delta m_{sun}^2}{2m},$$

también difícil de detectar si la masa del neutrino es de la escala de eV. Las masas grandes de neutrinos son desfavorecidas ya sea por el doble decaimiento beta sin neutrinos o por la solución de ángulo de mezcla grande pero no máximo para el caso solar. Para $|m|$ no más grande que la cota del doble decaimiento beta sin neutrinos no se necesita cancelación en m_{ee} además m_1 y m_2 pueden ser aproximadamente iguales en magnitud y fase. Un ejemplo diferente (también sin cancelación entre m_1 y m_2) [16], es un modelo el cual es simple de describir pero difícil de derivar en forma natural es aquel donde los quarks u y d y los leptones cargados tienen matrices de masa "democráticas" con todas las entradas iguales (en primera aproximación)

$$m_f = \hat{m}_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \delta m_f, \quad (5.31)$$

donde \hat{m}_f ($f = u, d, e$) son los tres parámetros de masa y δm_f denota pequeñas perturbaciones. Esta matriz puede ser diagonalizada por una matriz unitaria U_f la cual es en parte determinada por el término δm_f . Si $\delta m_u \approx \delta m_d$, la matriz CKM dada por $V_{CKM} = U_u^\dagger U_d$, es diagonal, en parte por una compensación entre ángulos de mezcla grandes contenidos en U_u y U_d . Cuando los

términos pequeños δm_f son diagonales y de la forma $\delta m_f = \text{Diag}(-\epsilon_f, \epsilon_f, \delta_f)$ con $\delta_f \gg \epsilon_f$, las matrices U_f son aproximadamente dadas por:

$$U_f^\dagger \approx \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Note que, dada por la degeneración en el sector 1,2 en el límite no perturbado, cualquier superposición de los primeros dos renglones debe ser también un eigenvector de masa cero. Al mismo tiempo los quarks más ligeros y los leptones cargados adquieren masas no nulas. La parte dominante de la matriz de masa en la ecuación (5.31) es invariante bajo una simetría discreta de permutación $S_{3L} \times S_{3R}$. El mismo requerimiento conduce a:

$$m_\nu = m \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \delta m_\nu,$$

donde δm_ν es un pequeño término de rompimiento de simetría y los dos invariantes independientes son permitidos por la naturaleza de Majorana de los neutrinos ligeros. Si r se anula los neutrinos son casi degenerados. En presencia de δm_ν la simetría de permutación se rompe y la degeneración desaparece.

El problema con esta clase de modelos es que el ángulo solar debe ser cercano al máximo, el espectro de los neutrinos y los ángulos de mezcla no están determinados por el límite simétrico, únicamente por una elección específica de r y de las perturbaciones que no pueden ser fácilmente justificadas en bases teóricas. En este modelo los ángulos de mezcla son producidos casi en su totalidad por el sector de leptones cargados.

Entonces en presencia de dos ángulos de mezcla grandes θ_{12} y θ_{23} con un tercer ángulo θ_{13} pequeño, la construcción de un modelo natural con dominio de U_e es más difícil que en el caso en el que solo el ángulo atmosférico θ_{23} es grande.

Anarquía

Modelos anárquicos pueden considerarse como casos particulares de modelos degenerados con $m^2 \sim \Delta m_{atm}^2$. En esta clase de modelos la degeneración de masa es remplazada por el principio de que todas las matrices de masa no tienen estructura en el sector de neutrinos [16]. Para la solución de ángulo grande, la razón de frecuencias solares a atmosféricas no es muy pequeña

$r = (\Delta m_{sun}^2)_{LA} / \Delta m_{atm}^2 \sim 1/40$ y los tres ángulos de mezcla son grandes. La observación clave es que el mecanismo see-saw agranda las razones de los eigenvalores; es cuadrático en m_D con un factor de jerarquía f en m_D que viene como f^2 en m_ν y la presencia de la matriz de Majorana M resulta en una posterior ampliación de la distribución. Una generación de elementos de matriz aleatorios para m_D y M lleva a la distribución de r a un máximo en 0.1. Al mismo tiempo la distribución de $\sin^2\theta_{ij}$ es plana para los tres ángulos de mezcla. La pequeñez de θ_{13} es problemática para la anarquía. Esto puede ser cambiado en la predicción en que, en modelos anárquicos θ_{13} debe ser cercana a la cota presente lo que permite argumentar que las masas de neutrinos y mezclas interpretadas por el mecanismo see-saw, solo pueden emerger principalmente de las matrices de Dirac y Majorana sin estructura.

5.3.6 Jerarquía invertida

La configuración de jerarquía invertida $|m_1| \sim |m_2| \gg |m_3|$ consiste de dos niveles m_1 y m_2 con una pequeña división $\Delta m_{12}^2 = \Delta m_{sun}^2$ y una masa común dada por $|m_{1,2}^2| \sim |\Delta m_{atm}^2| \sim 2.6 \times 10^{-3} eV^2$, lo cual lleva a que la mezcla doble máxima es obtenida con la elección de fase $m_1 = -m_2$ y entonces:

$$m_{diag} = \text{Diag}(\sqrt{2}m, -\sqrt{2}m, 0).$$

La matriz efectiva de masa para neutrino ligero

$$m_\nu = U^* m_{diag} U^\dagger,$$

la cual corresponde a la matriz de mezcla máxima doble $c_{12} = s_{12} = 1/\sqrt{2}$ y $s_{13} = u = 0$ en (5.28).

$$U_{fi} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

es dada por

$$m_\nu = m \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

La textura gobernante en (5.32) puede ser perturbada sumando pequeños términos:

$$m_\nu = m \begin{pmatrix} \delta & -1 & 1 \\ -1 & \eta & \eta \\ 1 & \eta & \eta \end{pmatrix},$$

donde δ y η son pequeños ($\ll 1$). La perturbación deja Δm_{sun}^2 y θ_{23} sin cambios, en primera aproximación. Obtenemos $\tan^2\theta_{12} \approx 1 + \delta + \eta$ y $\Delta m_{sun}^2/\Delta m_{atm}^2 \approx \eta$, donde coeficientes de orden uno han sido despreciados. Además $\theta_{13} \approx \eta$. Si $\eta \gg \delta$, tenemos

$$\theta_{13} \approx \frac{\Delta m_{sun}^2}{\Delta m_{atm}^2}, \quad m_{ee} \ll \sqrt{\Delta m_{sun}^2} \left(\frac{\Delta m_{sun}^2}{\Delta m_{atm}^2} \right)^{1/2}.$$

En el otro caso, $\eta \ll \delta$ tenemos:

$$\theta_{13} \ll \frac{\Delta m_{sun}^2}{\Delta m_{atm}^2}, \quad m_{ee} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\Delta m_{sun}^2} \left(\frac{\Delta m_{sun}^2}{\Delta m_{atm}^2} \right)^{1/2}.$$

Esta es la dificultad conocida de este escenario para ajustar la solución de ángulo grande. Verdaderamente la cancelación entre las perturbaciones, para obtener un Δm_{sun}^2 cercanas al mejor ajuste del valor de ángulo grande, η y δ deben ser más pequeñas que 0.1 y esto mantiene el valor de $\sin^2 2\theta_{12}$ muy cercano a 1, en desacuerdo con los ajustes globales de los datos solares.

Con la elección de fase $m_1 = m_2$, es decir para $Diag[m_\nu] = m(1, 1, 0)$, en el límite $s_{13} = 0$ se obtiene la matriz

$$m_\nu = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

la cual corresponde a un θ_{23} grande con ángulo solar inestable a pequeñas perturbaciones. Entonces también para jerarquía normal, alguna dinámica especial o simetría es necesaria para reproducir en detalle las características observadas en los datos.

5.3.7 Jerarquía normal

Iniciemos por suponer tres neutrinos ampliamente separados (en sus masas) y la existencia de un neutrino derecho por cada generación, también suponemos la dominación del mecanismo see-saw. Sabemos que el eigenvalor de tercera generación de las matrices de masa de Dirac de los quarks u , d y de leptones cargados es sistemáticamente el más grande y es natural pensar que pasa algo similar para la matriz de masa de los neutrinos. Note sin embargo que, para la solución de ángulo grande: $r \sim 1/140$ el valor requerido de jerarquía

$r = \Delta m_{atm}^2 / \Delta m_{sun}^2 = m_3^2 / m_2^2$ es moderado [16].

Una posible dificultad para modelos jerárquicos es que uno espera que las separaciones grandes correspondan a mezclas pequeñas, por que normalmente solo los estados muy cercanos son mezclados fuertemente. En el contexto de matrices de 2×2 , el requerimiento de separaciones grandes y ángulos de mezcla grandes lleva a la condición de que el determinante se anule. Por ejemplo la matriz

$$\begin{pmatrix} x^2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

tiene eigenvalores 0 y $1+x^2$ y para x de $O(1)$ el ángulo de mezcla es grande. Entonces en el límite en el que se pueden despreciar términos pequeños de masa del orden de $m_{1,2}$ la demanda de mezcla grande para neutrinos atmosféricos y la dominación de m_3 se traduce en la condición de que el subdeterminante 23 de 2×2 de la matriz de mezcla de 3×3 , aproximadamente se anule. El problema es mostrar que esta nulidad puede ser arreglada de forma natural. Una vez que la mezcla máxima para neutrinos atmosféricos es reproducida la mezcla de neutrinos solares puede ser arreglada para ser cada una pequeña o grande, sin dificultad por implementar relaciones convenientes entre términos pequeños de masa.

No es difícil imaginar mecanismos que naturalmente lleven a la aproximada nulidad del subdeterminante 23 . Puede suponerse que un ν^c es particularmente ligero y acoplado a μ y τ . En un contexto simplificado (2×2) si tenemos

$$M \sim \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1/\epsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

entonces para una m_D generica, encontramos

$$m_\nu = m_D^T M^{-1} m_D \approx \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix},$$

Una posibilidad diferente es que en el límite en el que se pueden despreciar términos de orden $m_{1,2}$ y en la base donde los leptones cargados son diagonales, la matriz de masa de Dirac m_D , definida por $\nu^c m_D \nu$, toma la forma

$$m_D \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene la propiedad de que para una matriz de Majorana genérica M se encuentra:

$$m_\nu = m_D^T M^{-1} m_D \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

La única condición en M^{-1} es que la entrada 33 no se anule. Sin embargo cuando los elementos de matriz aproximadamente se anulan, son remplazados por términos pequeños, debemos suponer también que términos (no nuevos) de orden 1 son generados en m_ν por compensación entre pequeños términos en m_D y términos grandes en M^{-1} .

En el contexto de super simetría $SU(5)$ este mecanismo puede llevarse a cabo. En el $\bar{5}$ de $SU(5)$ el singlete d^c aparece junto con el doblete leptón (ν, e) . El doblete (u, d) y e^c pertenecen al 10 y ν^c al 1, similarmente para las otras familias. Como consecuencia, en el modelo más simple con términos de masa emergiendo solamente de los quintupletes de Higgs, la matriz de Dirac de los quarks d es la transpuesta de la matriz de leptón cargado: $m_d = (m_l)^T$. Entonces, en verdad una mezcla grande para quarks d derechos corresponde a una mezcla grande para leptones cargados izquierdos. En el orden dominante podemos tener la siguiente textura:

$$m_d = (m_l)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v_d.$$

Para obtener una matriz de masa más realista, permitimos desviaciones del límite simétrico de (5.33) con $x \sim O(1)$. Podemos considerar esos modelos donde los elementos de matriz de masa de neutrinos son dominados vía el mecanismo see-saw, por intercambio de dos neutrinos derechos. Entonces el intercambio de un solo neutrino derecho da una textura de orden cero. Agregamos una contribución sub-dominante de un segundo neutrino derecho, suponiendo que el tercero da una contribución despreciable, por que tiene acoplamientos de Yukawa más pequeños o más grandes que los otros dos. El lagrangiano que describe este posible subconjunto de modelos see-saw, escrito en la base de los eigenestados de masa de neutrinos derechos y leptones cargados, es

$$\mathcal{L} = y_i \nu^c H l_i + y'_i \nu^{c'} H l_i + \frac{M}{2} \nu^{c2} + \frac{M'}{2} \nu^{c'2},$$

llevando a

$$(m_\nu)_{ij} \sim \frac{y_i y_j}{M} + \frac{y'_i y'_j}{M'},$$

donde $i, j = \{e, \mu, \tau\}$. En particular, si $y_e \ll y_\mu \approx y_\tau$ y $y'_\mu \approx y'_{\tau\mu}$ obtenemos:

$$m_\nu = m \begin{pmatrix} \delta & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1 + \eta & 1 + \eta \\ \epsilon & 1 + \eta & 1 + \eta \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

donde coeficientes de orden uno multiplicando las cantidades pequeñas δ, ϵ, η se omitieron. El subdeterminante 23 es genéricamente de orden η . La matriz de masa en (5.34) no describe la perturbación más general de la textura de orden cero (5.33). Hemos supuesto implícitamente una simetría entre ν_μ y ν_τ la cual se preserva por las perturbaciones al menos en su orden de magnitud. Es posible construir modelos a lo largo de esta línea basados en el rompimiento espontáneo de una simetría de sabor $U(1)_F$, donde δ, ϵ y η están dados por potencias de uno o más parámetros de rompimiento de simetría. Regresemos a la matriz de masa m_ν ec. (5.34) Después de una rotación por un ángulo θ_{23} cercano a $\pi/4$ y una segunda rotación con $\theta_{13} \approx \epsilon$, obtenemos

$$m_\nu \approx m \begin{pmatrix} \delta + \epsilon & \epsilon & 0 \\ \epsilon & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

para obtener un ángulo solar de mezcla grande, necesitamos $|\eta - \delta| < \epsilon$. En modelos realistas esto no es razón suficiente para una cancelación entre perturbaciones independientes, entonces suponemos $\delta \leq \epsilon$ y $\eta < \epsilon$.

Consideremos primero el caso $\delta \approx \epsilon$ y $\delta < \epsilon$. El ángulo de mezcla solar θ_{12} es grande pero no máximo. Tenemos también $\Delta m_{atm}^2 \approx 4m^2, \Delta m_{sun}^2 \approx \Delta m_{atm}^2 \epsilon^2$ y

$$m_{ee} \approx \sqrt{\Delta m_{sun}^2}. \quad (5.36)$$

Si $\eta \approx \epsilon$ y $\delta \ll \epsilon$, todavía tenemos un ángulo de mezcla solar grande y $\Delta m_{sun}^2 \approx \epsilon^2 \Delta m_{atm}^2$, como antes. Sin embargo m_{ee} es mucho menor que lo estimado en (5.36). Este es el caso de modelos basados en la mencionada simetría de sabor $U(1)_F$, que en su realización más simple, predice $\delta \approx \epsilon$. En esta clase de modelos hallamos

$$m_{ee} \approx \sqrt{\Delta m_{sun}^2} \left(\frac{\Delta m_{sun}^2}{\Delta m_{atm}^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

lo cual se encuentra bajo la sensibilidad de los experimentos planeados de nueva generación. Lo valioso es que en ambos casos tenemos

$$\theta_{13} \approx \left(\frac{\Delta m_{sun}^2}{\Delta m_{atm}^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

lo cual puede estar cercano al presente límite experimental, si la frecuencia de oscilación de la solución de ángulo grande para neutrinos solares está en la parte alta de su rango permitido.

Si ambos δ y η son mucho más pequeños que ϵ , el bloque 12 de m_ν tiene una estructura aproximada pseudo-Dirac y el ángulo de mezcla θ_{12} es máximo. tenemos dos eigenvalores dados aproximadamente por $\pm m\epsilon$. Consideremos el caso donde $\eta = 0$ y $\delta \approx \epsilon$. Hallamos $\sin^2 2\theta_{12} \approx 1 - \epsilon/4$, $\Delta m_{sun}^2 \approx m^2 \epsilon^3$ y

$$\theta_{13} \approx \left(\frac{\Delta m_{sun}^2}{\Delta m_{atm}^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad m_{ee} \approx \sqrt{\Delta m_{sun}^2} \left(\frac{\Delta m_{sun}^2}{\Delta m_{atm}^2} \right)^{\frac{1}{6}}.$$

Para recobrar la solución de ángulo grande necesitamos un valor relativamente grande de ϵ .

Con modelos de jerarquía normal, tenemos suficiente flexibilidad para reproducir en forma natural, las frecuencias y ángulos de mezcla de los experimentos.

Semi-anarquía

Hemos visto que la anarquía es la ausencia de estructura en el sector neutrino. Consideraremos una atenuación de anarquía donde la ausencia de estructura es limitada al sector 23. Una textura típica de este caso es:

$$m_\nu \approx m \begin{pmatrix} \delta & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1 & 1 \\ \epsilon & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde δ y ϵ son pequeños, y 1 quiere decir entradas de orden 1 y también el determinante 23 es de orden 1. En general debemos esperar dos eigenvalores de masa de orden 1, en unidades de m , y uno pequeño, de orden δ o ϵ^2 . Este patrón no ajusta las frecuencias observadas solares y atmosféricas. Sin embargo, dado que la razón $r = (\Delta m_{sun}^2)_{LA} / \Delta m_{atm}^2 \sim 1/40$ no es muy pequeña, podemos suponer que el pequeño valor r es generado accidentalmente, como en el caso de la anarquía. Si procedemos con el mismo cambio de base como en (5.35) es suficiente que por casualidad $\eta \sim \delta + \epsilon^2$ para obtener el valor correcto de r con θ_{23} grande y θ_{12} pequeño, y $\theta_{13} \sim \epsilon$. La pequeñez natural de θ_{13} es la principal ventaja sobre la anarquía.

5.3.8 Modelos de gran unificación y masas de fermiones

Las masas de neutrinos y las mezclas deben hallar un contexto natural en el tratamiento de GUT de todas las masas de fermiones [16].

Modelos basados en cargas abelianas horizontales

Los generadores $SU(5)$ actúan “verticalmente” dentro de una generación, mientras que las cargas $U(1)_F$ son diferentes “horizontalmente” de una generación a otra. En esos modelos las generaciones conocidas de leptones y quarks, están contenidas en tripletes Ψ_i^{10} y $\Psi_i^{\bar{5}}$, ($i=1,2,3$) correspondiendo a las tres generaciones, transformándose como 10 y $\bar{5}$ respectivamente. Tres singletes $SU(5)\Psi_i^1$ describen los neutrinos derechos. En modelos supersimétricos (SUSY) se tienen dos multipletes de Higgs H_u y H_d , los cuales se transforman como 5 y $\bar{5}$ en el modelo mínimo. Los dos multipletes de Higgs pueden tener iguales o diferentes cargas. Hay muchas variantes de estos modelos: las cargas de fermiones pueden ser no negativas, con únicamente saborones cargados negativamente, o pueden ser cargas de fermiones de diferentes signos con cada saborón de ambas cargas o solo saborones de una carga. Las cargas de Higgs pueden ser iguales, en particular pueden desaparecer ambas o ser diferentes. Puede arreglarse que toda la estructura este en masas de fermiones cargados, mientras los neutrinos son anárquicos.

$$F(\text{fermiones}) \geq 0$$

Considere, por ejemplo, un modelo simple con todas las cargas de campos materiales, siendo no negativas y conteniendo un saborón simple $\bar{\theta}$ de carga $F=-1$. Para máxima simplicidad se asume que las tres generaciones de masas son permitidas directamente en el límite simétrico.

Para la matriz de mezcla U_{ij} determinada por m_ν en la base donde los leptones cargados son diagonales, se puede probar que $U_{ij} \approx \lambda^{|q_i^{\bar{5}} - q_j^{\bar{5}}|}$, en términos de las diferencias de las $\bar{5}$ cargas, cuando términos que decrecen por potencias del parámetro pequeño λ son despreciadas (λ es un parámetro de rompimiento de simetría).

Se obtiene los patrones $m_d : m_s : m_b \sim m_e : m_\mu : m_\tau \sim \lambda^{3+b} : \lambda^2 : 1$ ($b \geq 0$). Además las entradas 22, 23, 32, 33 de la matriz de masa efectiva de neutrino ligero m_ν son todas de orden 1, esto es acomodando los valores cercanos al máximo de s_{23} . Los términos pequeños no diagonales de la matriz de masa de leptón cargado no pueden cambiar esto. Omitiendo arbitrariamente

coeficientes de orden 1, tenemos

$$m_\nu = \begin{pmatrix} \lambda^{2b} & \lambda^b & \lambda^b \\ \lambda^b & 1 & 1 \\ \lambda^b & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{v_u^2}{\Lambda},$$

donde v_u es el valor esperado en el vacío del doblete de Higgs dando masa a los quarks u . Si tomamos $v_u \sim 250 \text{ GeV}$, la escala de masa Λ de los neutrinos pesados de Majorana se acerca a la escala de unificación $\Lambda \sim 10^{15} \text{ GeV}$.

Si b se anula, la matriz de masa de neutrino ligero perderá la estructura y se recupera la imagen anárquica (A). En un gran número de modelos anárquicos, generados con coeficientes aleatorios, el espectro de masa resultante puede exhibir jerarquía normal o inversa.

Si b es positivo, la matriz de masa perderá la estructura solo en el subsector (2,3) y obtenemos modelos semi-anárquicos (SA). En este caso es espectro de masa de neutrinos, tiene jerarquía normal. Sin embargo, a menos que el subdeterminante (2,3) se suprima accidentalmente, las frecuencias esperadas para oscilaciones solares y atmosféricas son del mismo orden y el ángulo de mezcla solar es pequeño.

F(fermiones) y F(saborones) de ambos signos

Modelos con separaciones (en masa) naturalmente grandes 23 son obtenidos si se permiten cargas negativas, al mismo tiempo, cada uno introduce saborones de cargas opuestas o se estipula que los elementos de matriz con carga total negativa, son cero.

En el sector neutrino, después de la diagonalización del sector de leptón cargado y después integrando fuera los neutrinos derechos, se obtiene la siguiente matriz de masa en la teoría efectiva a baja energía:

$$m_\nu = \begin{pmatrix} \lambda^{2b} & \lambda^b & \lambda^b \\ \lambda^b & 1 + \lambda^\alpha \lambda'^\alpha & 1 + \lambda^\alpha \lambda'^\alpha \\ \lambda^b & 1 + \lambda^\alpha \lambda'^\alpha & 1 + \lambda^\alpha \lambda'^\alpha \end{pmatrix} \frac{v_u^2}{\Lambda}, \quad (5.37)$$

donde λ' es dada por $\langle \theta \rangle / \Lambda_c$ y Λ denota como antes la escala de masa asociada a neutrinos derechos: $\Lambda \gg v_{u,d}$. Una propiedad crucial de m_ν es que como resultado del mecanismo see-saw y la asignación específica de cargas $U(1)_F$, el determinante del bloque 23 es automáticamente de orden $\lambda^\alpha \lambda'^\alpha$. La matriz de masa de neutrinos (5.37) es un caso particular de un patrón más general presentado en (5.34), para $\delta \approx \lambda^{2b}$, $\epsilon \approx \lambda^b$ y $\eta \approx \lambda^\alpha \lambda'^\alpha$. Si tomamos $\lambda \approx \lambda'$ puede verificarse que los eigenvalores de m_ν satisfacen las relaciones:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \lambda^{2(b-a)} : \lambda^{2a} : 1.$$

Las oscilaciones de neutrinos atmosféricos requieren $m_3^2 \sim 10^{-3} eV^2$. La diferencia cuadrática de masa entre los estados ligeros es de orden $\lambda^{4a} m_3^2$, no muy lejos de la solución de ángulo grande si elegimos $a = 1$. Mas allá de la mezcla grande en el sector 23, ν provee un ángulo de mezcla $\theta_{12} \sim \lambda^{b-2a}$ en el sector 12. Cuando $b = 2a$, como en el caso $b = 2$ y $a = 1$, la solución de ángulo grande, puede ser reproducida y el espectro resultante es jerárquico (H).

Alternativamente, un espectro con jerarquía inversa (IH) puede obtenerse eligiendo:

$$\begin{aligned} (q_1^{10}, q_2^{10}, q_3^{10}) &= (3, 2, 0) \\ (q_1^{\bar{5}}, q_2^{\bar{5}}, q_3^{\bar{5}}) &= (1, -1, -1) \\ (q_1^1, q_2^1, q_3^1) &= (-1, 1, 0) \\ (q_{H_u}, q_{H_d}) &= (0, 1). \end{aligned}$$

Debido a la carga no nula del doblete de Higgs H_d , en el sector de leptón cargado, recobramos el mismo patrón previamente discutido. La matriz de masa de neutrino ligero es dada por:

$$m_\nu = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda'^2 & \lambda'^2 \\ 1 & \lambda'^2 & \lambda'^2 \end{pmatrix}.$$

La razón entre la frecuencias de oscilación solar y atmosférica, no está directamente relacionada al subdeterminante 23.

Modelos jerárquicos y semi-anárquicos tienen cargas similares en los sectores $(10, \bar{5})$ y en ausencia del mecanismo see-saw (SS), deben dar lugar a resultados similares.

Podemos distinguir los siguientes tipos de modelos, todos soportados por elecciones específicas de cargas $U(1)$: A_{SS} , A_{NOSS} , SA_{SS} , SA_{NOSS} , $H_{(SS,I)}$, $H_{(SS,II)}$, $IH_{(SS,I)}$, $IH_{(SS,II)}$, $IH_{(NOSS,I)}$, $IH_{(NOSS,II)}$.

Es interesante calificar la habilidad de cada modelo de reproducir los parámetros de oscilación observados. Para anarquía el ajuste correcto de datos experimentales es de poco porcentaje. Para cada modelo, puntos exitosos en el espacio de parámetros son seleccionados pidiendo que las cuatro cantidades observadas r , $\tan^2\theta_{12}$, $|\sin\theta_{13}|$ y $\tan^2\theta_{23}$ caigan en rangos permitidos:

$$0.018 < r < 0.053$$

$$\begin{aligned}
|U_{e3}| &< 0.23 \\
0.30 &< \tan^2\theta_{12} < 0.64 \\
0.45 &< \tan^2\theta_{23} < 2.57
\end{aligned}$$

Las observaciones dicen que modelos con jerarquía normal son preferidos sobre anárquicos y con jerarquía inversa, en el caso SS, los modelos H_{II} con jerarquía normal, dos saborones cargados opuestamente y subdeterminante 23 suprimido, son preferidos. Modelos del tipo H_I son desfavorecidos. En el caso NOSS la supresión see-saw del determinante 23 es claramente no operativa y todos los modelos con jerarquía normal coinciden con SA.

Modelos basados en $SU(5) \times U(1)_F$ son modelos para jugar y pueden dar una descripción semi-cuantitativa de masas de fermiones. Solo el orden de magnitud puede ser especificado.

Modelos GUT basados en $SO(10)$

El neutrino derecho completa una familia del Modelo Estandar en una representación 16, entonces ofrece una base natural para el mecanismo see-saw y la bariogénesis a través de leptogénesis. Además la escala de violación del número leptónico determinada por el patrón de rompimiento de simetría de norma, puede ser más pequeño que el Λ_c de la teoría y acercar a la misma escala de gran unificación, como sugiere la escala de masa asociada a las oscilaciones de neutrinos atmosféricos.

En sus más simples realizaciones, los modelos $SO(10)$ son simétricos izquierdo-derecho en la escala GUT.

En modelos simétricos izquierdo-derecho, la pequeñez de las mezclas izquierdas implica que también las mezclas derechas son pequeñas, así que todas las mezclas tienden a ser pequeñas, a menos que operadores de masa no renormalizables con un patrón de sabor conveniente, sean introducidos.

Una posibilidad es explotar el mecanismo see-saw para agrandar los ángulos de mezcla de neutrino ligero. Podemos obtener una mezcla grande partiendo de matrices de masa casi diagonales m_D y M con un neutrino derecho, igualmente acoplado a ν_μ y ν_τ .

Alternativamente para evitar la introducción de operadores no renormalizables, es posible agrandar el contenido del Higgs y considerar por ejemplo un modelo $SO(10)$ donde todas las matrices de masas de fermiones originadas de interacciones renormalizables de campos materiales en tres representaciones

16 con dos multipletes de Higgs, un 10_H y un 126_H :

$$\mathcal{L}_Y = 10_H 16_{y_{10}} 16 + 126_H 16_{y_{126}} 16,$$

donde y_{10} y y_{126} son dos matrices simétricas en el espacio de sabor. Ambas y_{10} y y_{126} contribuyen a las matrices de masa de Dirac, con el factor característico -3 para y_{126} entre los sectores (u, d) y (ν, e) :

$$\begin{aligned} m_d &= \alpha y_{10} + \beta y_{126} \\ m_e &= \alpha y_{10} - 3\beta y_{126} \end{aligned}$$

y las relaciones de masa correctas para primera y segunda generaciones pueden ser acomodadas. En el caso más general, cuando 126_H adquiere valores esperados en el vacío en sus componentes de singlete y triplete $SU(2)$, ambas masas de Majorana izquierda y derecha pueden emerger del sector neutrino.

Esto permite predecir los parámetros de mezcla solares y atmosféricos con un rango el cual es aún permitido y $|U_{e3}| \approx 0.16$ no lejos de la cota presente. Una desventaja del modelo es la ocurrencia de dos pares de dobletes de Higgs con valores esperados en el vacío que no se anulan de los cuales solo una combinación es permitida para permanecer ligeros. Esto claramente hace la separación de doblete-triplete igualmente complicado que en modelos mínimos.

Modelos basados en $SO(10)$ veces una simetría de sabor son más difíciles de construir por que una generación completa es contenida en el 16, por ejemplo para $U(1)F$ uno debe tener el mismo valor de carga para todos los quarks y leptones de cada generación lo cual es muy rígido [16].

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo hemos revisado, desde conceptos fundamentales como la ecuación de Dirac, sus soluciones, las definiciones de los campos de Dirac y de Majorana, esto nos permite establecer las diferencias entre neutrinos de Dirac y Majorana. Abordamos también las simetrías de carga y paridad, además del comportamiento de los campos de Dirac y Majorana bajo estas simetrías. Esto nos permite tener un panorama sobre como nació la física de neutrinos, así como tener una base para entender las teorías actuales.

Revisamos también la definición de una simetría (global y local), el rompimiento espontáneo y el mecanismo de Higgs. La idea es, entender diversos modelos que proponen neutrinos masivos a través de un rompimiento espontáneo de simetría. Vimos también una simplificación del modelo electrodébil, el cual predice neutrinos sin masa. Esto nos plantea la necesidad de extender el Modelo Estándar, pues como vemos más adelante, hay evidencia de que los neutrinos tienen masa.

La necesidad de tener neutrinos masivos es motivada en parte por el problema de los neutrinos solares y atmosféricos, cuya explicación se tiene en las oscilaciones de neutrinos y estas a su vez requieren de neutrinos masivos. Las oscilaciones aportan nuevos ingredientes como la existencia de los eigenestados de masa, los cuales son diferentes de los eigenestados de sabor, la mezcla entre eigenestados de masa da lugar a los eigenestados de sabor. Esta mezcla de eigenestados de masa, está parametrizada por un ángulo al que se llama ángulo de mezcla.

Consideramos algunos de los diversos experimentos de detección de neutrinos, los cuales tienen información confiable sobre las diferencias cuadráticas de masas entre los diferentes sabores de neutrinos, de manera que tenemos

una idea de que miden y como miden, sus límites de detección y que a futuro se espera hacer mediciones directas de la masa de neutrinos, lo cual permitirá en parte distinguir si los neutrinos son partículas de Dirac o Majorana.

Con la herramienta que se reunió, se discutieron algunos modelos de masa para los neutrinos, en particular se discutió el mecanismo see-saw y el modelo izquierdo-derecho. Al revisar estos modelos, unimos sus resultados, junto con la información experimental de las oscilaciones de neutrinos obtenemos algunas estimaciones para las masas de los neutrinos. Por lo pronto no se sabe cual predicción da el valor correcto, así que, esta incertidumbre ha dado lugar a la construcción de nuevos modelos de los cuales hablamos en la última parte.

Terminamos con una pequeña revisión de como se relacionan las masas y los ángulos de mezcla. Se revisan los modelos para neutrinos masivos; por ejemplo modelos basados en: anarquía, semianarquía, jerarquía normal o jerarquía invertida, de manera que se tengan ángulos de mezcla congruentes con los medidos experimentalmente. Se mencionan las ventajas que tienen estas nuevas construcciones y su plausibilidad en base a comparaciones con información experimental. Actualmente hay mucha expectación sobre experimentos de doble decaimiento beta sin neutrinos, los cuales se espera permitirán aclarar la naturaleza de los neutrinos (Dirac o Majorana).

Con toda esta información tenemos claro que es sumamente importante la evolución de los futuros experimentos para dar luz de por donde debe continuar la teoría de los neutrinos.

Bibliografía

- [1] *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*
Rabindra N. Mohapatra, Palash B. Pal
World Scientific. 1998
- [2] *The Physics of Massive Neutrinos*
Boris Kayser, Françoise Gibrat-Debu and Frederic Perrier
World Scientific. 1989
- [3] *Physics of Massive Neutrinos*
Felix Boehm, Petr Vogel
Cambridge University 1987
- [4] *Quantum Field Theory*
Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber
Mc Graw-Hill 1980
- [5] Steen Hannestad: arXiv:hep-ph/0409108
- [6] S.P. Mikheyev and A.Y. Smirnov: *P L B* **200** (1988) 560
- [7] *Modern Physics*
Paul A. Tipler
Freeman 1999
- [8] *Gauge theory of elementary particle physics*
Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li Oxford 1984
- [9] *Particle Physics and Cosmology*
P.D.B. Collins, A.D. Martin and E.J. Squires
- [10] Rabindra N. Mohapatra and Goran Sejanović *Phys. Rev. Lett.* **44**
912(1980)

- [11] Hong Li, Zigao Dai and Xinmin Zhang [arXiv:hep-ph/0411228](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0411228)
- [12] D.P. Roy [arXiv:hep-ph/0409336](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0409336)
- [13] Neutrino Astrophysics J.N. Bahcal
Cambridge University Press
- [14] Evidence for an oscillatory signature in atmospheric neutrino oscillation
[arXiv:hep-ex/0404034](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0404034) 27 de abril 2004
- [15] Measurement of neutrino oscillation with KamLAND
[arXiv:hep-ex/0406035](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0406035) 1 de Noviembre del 2004
- [16] Models of Neutrino Masses and Mixings
Guido Altarelli and Ferruccio Feruglio [arXiv:hep-ph/0405048](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0405048)
- [17] L. Wolfenstein, Phys. rev. D, 17, 1978 2369.
- [18] J.N. Bahcal and M.H. Pinsonneault <http://www.sns.ias.edu/~jnb>
- [19] K2K Long-baseline Neutrino Oscillation Experiment
<http://neutrino.kek.jp/>
- [20] Enriched Xenon Observatory for double beta decay
<http://www-project.slac.stanford.edu/exo/>
- [21] Booster Neutrino Experiment <http://www-boone.fnal.gov/>