UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TOPOLOGIA EN ESPACIOS DE CONJUNTOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

EDUARDO HERNANDEZ HUERTA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ADALBERTO GARCIA-MAYNEZ CERVANTES

2004

VNIVERSDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Eduardo Hernández Huerta.
FECHA: 19 de Noviembre de 2004.
FIRMA: EHH

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"TOPOLOGIA EN ESPACIOS DE CONJUNTOS"

realizado por EDUARDO HERNANDEZ HUERTA

con número de cuenta 8453438-5 , quien cubrió los créditos de la carrera de: MATEMATICO.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. ADALBERTO GARCIA - MAYNEZ CERVANTES	A. García Máynez
Propietario	DR. HUGO ARIZMENDI PEIMBERT.	Hugo Arizmendi P.
Propietario	DR. SERGEY ANTONYAN.	
Suplente	DR. CARLOS HERNANDEZ GARCIADIEGO.	
Suplente	DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA.	

Consejo Departamental de MATEMATICAS.

M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA
COORDINADOR DE MATEMATICAS.

CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIA.

La realización de este trabajo fué posible gracias al apoyo de mis estimados asesores de tesis:
El Dr. Adalberto García-Máynez Cervantes, del Instituto de Matemáticas de la UNAM, por la aceptación del tema original, que luego fue reconsiderado para "apresurar en lo posible", por su paciente espera y confianza de llevarle los resultados y por sus correcciones, sugerencias y comentarios.
El Dr. José Luis Fernández Muñiz, de la Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas de la BUAP, por la revisión de las demostraciones de los teoremas, que yo le exponía mientras realizaba los estudios de Maestría en la BUAP. Lamentablemente finado no pudo ver concluido este esfuerzo.
La larga historia de este trabajo, detenido por lapsos, sus peripecias y circunstancias solo puede contarse en otro lugar, de sus errores y deficiencias solo yo soy responsable.
Agradesco a los profesores sinodales por su amable aceptación de revisarlo y sus sugerencias para una mejor presentación.
Agradesco y dedico a mi familia y amigos, sin cuyo cariño, no hubiera podido finalizar.
Y agradesco y dedico a Dios, el Señor Jesucristo.

"Al único y sabio Dios, nuestro Salvador, sea gloria y majestad, imperio y potencia, ahora y por todos los siglos. Amén." Judas 25.

TOPOLOGÍA EN ESPACIOS DE CONJUNTOS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El surgimiento de la Topología General es consecuencia de la reconstrucción del fundamento del cálculo infinitesimal realizado durante el siglo XIX.

La Topología General se puede considerar como el estudio abstracto del concepto de punto límite. Muchos conceptos matemáticos importantes son construidos sobre las propiedades de los puntos límite.

La Topología General se inició a partir de los artículos de G. Cantor publicados de 1879 a 1884. Él se dedicó a la investigación de los conjuntos de números reales, originando de esta manera, tanto a la teoría de conjuntos como a la Topología. También definió y estudió en el contexto de los subconjuntos de espacios euclideanos, algunos de los conceptos fundamentales de la Topología.

Posteriormente, nuevos e importantes conceptos topológicos, también relativos a los espacios euclideanos, fueron introducidos de 1893 a 1905 por C. Jordan, H. Poincaré, E. Borel, R. Baire y H. Lebesgue.

B. Riemann fue el precursor en 1854 de la generalización de los espacios euclideanos a los espacios abstractos.

Cerca de 1900, cuando los conceptos topológicos fundamentales ya estaban introducidos, apareció un pequeño número de artículos que mostraban la existencia de estructuras topológicas en ciertos conjuntos especiales tales como: el conjunto de curvas (por G. Ascoli), el conjunto de funciones (por C. Arzelà, V. Volterra, D. Hilbert y I. Fredholm.) y el conjunto de rectas y planos en el espacio tridimensional (por E. Borel.) Así se preparó el terreno para un tratamiento axiomático de los conceptos de límite y de la cercanía de un punto a un conjunto o de un conjunto a otro conjunto.

Los espacios abstractos con una estructura topológica fueron originalmente introducidos por M. Fréchet en 1906 y por F. Riesz en 1907 y 1908. M. Fréchet definió los espacios en términos de sucesiones convergentes y F. Riesz en términos de puntos de acumulación.

J. B. Listing fue el primero en usar la palabra "topologie" en una carta a su anciano profesor de escuela Müller en 1836. Él tenía antipatía por el término "geometria situs" debido a G. Leibniz, entonces usado para las ideas topológicas y escribió el libro "Vorstudien zur Topologie" en 1847 Fue el primer uso publicado de la palabra "topologie". La materia fue conocida como "analysis situs" debido a H. Poincaré, por muchos años y sólo hacia finales de los años veinte del siglo XX, se usó la palabra inglesa "topology" por S. Lefschetz.

La primera definición satisfactoria de espacio topológico fue propuesta por F. Hausdorff en 1914. Él definió un espacio topológico como un conjunto abstracto provisto de un conjunto de vecindades que satisfacen ciertos axiomas, desarrollando una idea que apareció en artículos de D. Hilbert de 1902 y de A. Weyl de 1913, quienes dieron una descripción axiomática, en términos de vecindades, del plano y de una superficie de Riemann, respectivamente.

La contribución de F. Hausdorff fue dar una adecuada generalidad a conceptos introducidos por sus predecesores y desarrollar una sistemática y exhaustiva teoría.

Otro conjunto de axiomas fue propuesto por R. L. Moore. En su libro de 1932, él dió una caracterización axiomática del plano y discutió varias clases de espacios abstractos, obtenidos al considerar que sólo algunos de estos axiomas se cumplen.

La versión original de este enfoque data de un artículo de 1916.

Los conceptos de conjunto abierto y conjunto cerrado, conjunto interior y conjunto cerradura, fueron introducidos y estudiados por G. Cantor en la clase de los subconjuntos de espacios euclideanos.

F. Hausdorff generalizó estos conceptos a espacios abstractos en 1914.

La importancia del Análisis Multivaluado fue reconocida tempranamente, a inicios del siglo XX, y varios matemáticos prominentes como F. Hausdorff, L. Vietoris y K. Kuratowski hicieron investigaciones en el tema. Sin embargo fue hasta los años sesenta que surgió un estudio sistemático del Análisis Multivaluado. Actualmente se establece como el estudio de funciones cuyo contradominio es un conjunto de conjuntos, con estructura topológica. De esta manera con una estructura topológica en un conjunto de conjuntos, se tiene el concepto de cercanía o distancia entre conjuntos, y ya no solamente entre puntos abstractos.
La llamada "distancia" de un subconjunto a otro de un espacio métrico, definida como el ínfimo de las distancias de un punto de un subconjunto a un punto del otro subconjunto, no es una métrica en el conjunto de todos los subconjuntos del espacio métrico, pues ésta no satisface la desigualdad del triángulo.
F. Hausdorff es el primero que definió una métrica en el conjunto de los subconjuntos cerrados de un espacio métrico acotado. L. Vietoris definió en 1923 una topología en el conjunto de los subconjuntos cerrados de un espacio topológico. Ambas topologías coinciden en el conjunto de los subconjuntos compactos de un espacio métrico acotado.
La topología de Pixley-Roy fué introducida en 1969, en el caso especial de los números reales y fué generalizada por E. Van Douwen en 1977, para conjuntos arbitrarios.
La topología de Fell fue introducida en 1962.

En este trabajo se pretende entonces, exponer los elementos básicos de la Topología General en espacios topológicos cuyos miembros son conjuntos y los elementos básicos del Análisis Multivaluado. Se intentó, la mayoría de las veces, generalizar las definiciones y los resultados establecidos en la bibliografía consultada, para el conjunto de subconjuntos cerrados del espacio topológico, al conjunto de todos los subconjuntos del espacio topológico, con la topología de Vietoris.
En la sección I se tratan algunas de las posibles topologías que se pueden definir en P(X) y por tanto en todos sus subconjuntos. Para tener los conceptos de convergencia de sucesiones de conjuntos y de continuidad de funciones multivaluadas es suficiente tener esta estructura.
En la sección II se dan relaciones de contención entre las topologías de Vietoris, semifinita inferior, semifinita superior, de Pixley – Roy y de Fell. En que caso coinciden la topología de Vietoris y la de Fell, la de Vietoris y la de Hausdorff. Se muestran resultados principalmente sobre las relaciones entre las propiedades de densidad, separación, compacidad y completitud de X y P(X) o sus subespacios.
En la sección III se definen los conceptos de continuidad y semicontinuidad de funciones multivaluadas y se analiza su interrelación. Se trata la continuidad o semicontinuidad de funciones multivaluadas canónicas. Se muestran resultados que relacionan la regularidad, la normalidad o la compacidad de un espacio topológico con la continuidad o semicontinuidad de cierta función multivaluada. Se muestran las escalas y su papel en la caracterización de los espacios topológicos y en la compactificación de los espacios de Tychonoff por medio de los conceptos de conjunto nulo o conulo. Se definen ciertos espacios de conjuntos relacionados con la compactificación de Alexandrov de un espacio topológico y se muestra su relación con la topología de Fell.
Al final se incluye un Anexo con las propiedades de los paréntesis triangulares, curvos y cuadrados en la topología de Vietoris y una bibliografía de las fuentes utilizadas, y en donde se puede encontrar la referencia de los resultados no demostrados.

Este trabajo intenta mostrar que es posible un tratamiento de principio unificado, general, simple, claro y riguroso del tema. No es posible ser exhaustivo, sin embargo se incluyeron resultados más o menos representativos del área, según las fuentes bibliográficas consultadas, con las limitantes del tiempo y los recursos disponibles.
Se adoptó libremente una notación que no coincide con la usualmente utilizada.

PRELIMINARES.

Se presentan algunas definiciones, notaciones y lemas útiles para la lectura del trabajo.

Definiciones:

(X,T) es un espacio topológico:

T_0 o espacio de Kolmogoroff ssi para cada par de puntos del espacio existe una vecindad de un punto, que no lo es del otro punto.

T_1 o espacio de Fréchet ssi todo subconjunto finito del espacio es cerrado.

T_2 o espacio de Hausdorff ssi cada par de puntos del espacio tienen vecindades ajenas.

T_3 o espacio regular ssi es un espacio de Fréchet y cada subconjunto cerrado C del espacio y cada punto del espacio no perteneciente a C, tienen vecindades ajenas.

$T_{3.5}$, espacio completamente regular o espacio de Tychonoff ssi es un espacio de Fréchet y para cada subconjunto cerrado C del espacio y cada punto del espacio no perteneciente a C, existe una función continua $f:(X,T) \rightarrow [0,1]$ tal que $f[C] \subseteq \{0\}$ y $f(x) = 1$.

T_4 o espacio normal ssi es un espacio de Fréchet y cada par de subconjuntos cerrados ajenos del espacio tienen vecindades ajenas.

T_5 o espacio completamente normal ssi es un espacio de Fréchet y cada par de subconjuntos separados del espacio tienen vecindades ajenas.

T_6 o espacio perfectamente normal ssi es un espacio normal y todo subconjunto cerrado del espacio es G_δ.

Cero dimensional ssi el espacio tiene una base de cerrados.

Localmente compacto ssi cada punto del espacio tiene una vecindad de cerradura compacta.

Paracompacto ssi toda cubierta abierta del espacio tiene un refinamiento abierto y localmente finito.

Metacompacto ssi toda cubierta abierta del espacio tiene un refinamiento abierto y punto finito.

De Lindelöf ssi toda cubierta abierta del espacio tiene una subcubierta numerable.

MetaLindelöf ssi toda cubierta abierta del espacio tiene un refinamiento abierto y punto numerable.

Pseudocompacto ssi toda función real continua del espacio es acotada.

Real compacto ssi el espacio es homeomorfo a un subconjunto cerrado de un producto de rectas reales.

Primero numerable o débilmente separable ssi todo punto del espacio tiene una base local numerable.

Segundo numerable o completamente separable ssi el espacio tiene una base numerable.

Separable ssi el espacio tiene un subconjunto denso numerable

Finito ssi es un espacio discreto y compacto.

De Stone ssi para cada $x_0 \neq x_1 \in X$ existe una función $f:(X,T) \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x_0) = 0$ y $f(x_1) = 1$.

De Moore ssi es un espacio regular y desarrollable.

Conexo ssi no tiene ninguna separación.

Localmente conexo ssi cada vecindad de cada punto del espacio contiene una vecindad conexa del punto.

Disconexo ssi tiene una separación.

Totalmente disconexo ssi los únicos subconjuntos conexos del espacio son los de un elemento.

Otras definiciones:
La densidad de un espacio topológico es el menor cardinal de los cardinales de los subespacios densos del espacio.

Una función continua $r:(X_0,T_0) \rightarrow (X_1,T_1)$ se llama retracción de (X_0,T_0) a (X_1,T_1) ssi existe una función continua $s:(X_1,T_1) \rightarrow (X_0,T_0)$ tal que $r \circ s = 1_{X_1}$.

Notaciones:

Dado un espacio topológico (X,T), se consideran los espacios de conjuntos siguientes:

$P(X)$:= conjunto de subconjuntos de X.

$E(X)$:= conjunto de subconjuntos no vacíos de X.

$C(X)$:= conjunto de subconjuntos cerrados de X.

$K(X)$:= conjunto de subconjuntos compactos de X.

$J(X)$:= conjunto de subconjuntos finitos de X.

$J_n(X)$:= conjunto de subconjuntos de cardinalidad menor o igual a n de X, $n \in \mathbb{N}$.

Observaciones:

También se pueden considerar el conjunto de subconjuntos perfectos, densos en ninguna parte, dominios, regiones de X, etc.

Si X tiene más estructuras matemáticas se pueden considerar más subespacios como:

el conjunto de subconjuntos convexos, absorbentes, balanceados, acotados, borelianos de X, etc.

Se tiene que:

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n(X) = J(X)$, $J_n(X) \subseteq J_{n+1}(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $J(X) \subseteq K(X)$.

$J(X) \subseteq C(X)$ si (X,T) es un espacio de Fréchet.

$C(X) \subseteq K(X)$ si (X,T) es un espacio compacto.

$K(X) \subseteq C(X)$ si (X,T) es un espacio de Hausdorff.

$C(X) = K(X)$ si (X,T) es un espacio compacto y de Hausdorff.

Lemas.

Lema de Alexander.
Un espacio topológico es un espacio compacto si y sólo si toda cubierta del espacio formada por abiertos de una subbase de la topología del espacio, tiene una subcubierta finita.

Lema de Urysohn.
(X,T) es un espacio normal si y sólo si para cada C y D subconjuntos cerrados y ajenos de (X,T) existe una función continua $f:(X,T) \rightarrow [0,1]$ tal que $C \subseteq f^{-1}[\{0\}]$ y $D \subseteq f^{-1}[\{1\}]$ y (X,T) es un espacio de Fréchet.

I. TOPOLOGÍAS EN EL ESPACIO P(X) Y SUS SUBESPACIOS.

Introducción a los elementos básicos de la Topología en espacios de conjuntos.

Sea (X,T) un espacio topológico. En donde T es una topología en el conjunto X.
En P(X) se definen las bases de topología B_0, B_1, B_2, B_3 y B_4.
Por T_{B_0}, T_{B_1}, T_{B_2}, T_{B_3} y T_{B_4}, se denotan las topologías generadas por tales bases.

Sea $B_0 := \{ \langle A_0,\dots,A_n \rangle \mid A_i \in T,\ 0 \le i \le n,\ n \in N \} \bigcup \{\{\phi\}\}$.
En donde $\langle A_0,\dots,A_n \rangle := \{ E \subseteq X \mid E \subseteq \bigcup_{0\le i\le n} A_i,\ E \bigcap A_i \neq \phi,\ 0 \le i \le n \}$.
B_0 es base de topología pues:
Si $u := \langle A_0,\dots,A_n \rangle$ y $v := \langle B_0,\dots,B_m \rangle$ son elementos de B_0 se tiene que
$u \bigcap v = \langle A_0 \bigcap B,\dots,A_n \bigcap B, B_0 \bigcap A,\dots,B_m \bigcap A \rangle \in B_0$. En donde $A := \bigcup_{0\le i\le n} A_i$ y $B := \bigcup_{0\le i\le m} B_i$.
$u \bigcap \{\phi\} = \phi = \langle \phi \rangle$ y $P(X) = \langle X \rangle \bigcup \{\phi\} = \bigcup B_0$.
La topología T_{B_0} se llama topología finita, de Vietoris o "exponencial".
OBSERVACIONES: $\phi \notin \langle A_0,\dots,A_n \rangle$. $\phi \in B_0$. ϕ es un punto aislado.
Kuratowski define $\langle A_0,\dots,A_n \rangle := \{ E \subseteq X \mid E \subseteq A_0$ y $E \bigcap A_i \neq \phi,\ 1 \le i \le n \}$.

Sea $B_1 := \{ (A_0,\dots,A_n) \mid A_i \in T,\ 0 \le i \le n,\ n \in N \} \bigcup \{\{\phi\}\}$.
En donde $(A_0,\dots,A_n) := \{ E \subseteq X \mid E \bigcap A_i \neq \phi,\ 0 \le i \le n \}$.
B_1 es base de topología pues:
Si $u := (A_0,\dots,A_n)$ y $v := (B_0,\dots,B_m)$ son elementos de B_1 se tiene que
$u \bigcap v = (A_0,\dots,A_n,B_0,\dots,B_m) \in B_1$, $u \bigcap \{\phi\} = \phi = (\phi)$ y $P(X) = (X) \bigcup \{\phi\} = \bigcup B_1$.
La topología T_{B_1} se llama topología semifinita inferior.
OBSERVACIONES: $\phi \notin (A_0,\dots,A_n)$. $\phi \in B_1$. ϕ es un punto aislado.
$\{ (A) \mid A \in T \} \bigcup \{\{\phi\}\} \subseteq B_1$ es subbase de T_{B_1} pues $(A_0,\dots,A_n) = (A_0) \bigcap \dots \bigcap (A_n)$ y
$(A) \bigcap \{\phi\} = \phi = (\phi)$.

Sea $B_2 := \{ [A] \mid A \in T \}$. En donde [A]:= conjunto de subconjuntos de A.
B_2 es base de topología pues:
Si $u := [A]$ y $v := [B]$ son elementos de B_2 se tiene que $u \bigcap v = [A \bigcap B] \in B_2$ y $P(X) = [X] = \bigcup B_2$.
La topología T_{B_2} se llama topología semifinita superior.
OBSERVACIONES: $\phi \in [A]$, $\phi \notin B_2$ y $\{\phi\} = [\phi] \in B_2$. ϕ no es un punto aislado.

Sea $B_3 := \{ [E,A] \mid E \subseteq X$ y $A \in T \}$.
En donde [E,A]:= conjunto de subconjuntos de A que son superconjuntos de E.
B_3 es base de topología pues:
Si $u := [E,A]$ y $v := [D,B]$ son elementos de B_3 se tiene que $u \bigcap v = [D \bigcup E, A \bigcap B] \in B_3$ y
$P(X) = [\phi, X] = \bigcup B_3$.
La topología T_{B_3} se llama topología de Pixley – Roy.
OBSERVACIONES: $\phi = [E,A] \in B_3$ con $E \not\subset A$ y $\{\phi\} = [\phi,\phi] \in B_3$. ϕ es un punto aislado.

Para la definición de las topologías anteriores no es necesario considerar una topología particular en X, pero si (X,T) es un espacio localmente compacto, se define:

$B_4 := \{ (A_0,\ldots,A_n) \bigcap \langle \bar{B}^c \rangle \mid A_0,\ldots,A_n, B \in T$ y de cerradura compacta, $n \in N \} \bigcup \{\{\phi\}\}$.
B_4 es base de topología pues:

Si $u := (A_0,\ldots,A_n) \bigcap \langle \bar{B}^c \rangle$ y $v := (C_0,\ldots,C_m) \bigcap \langle \bar{D}^c \rangle$ son elementos de B_4 se tiene que

$u \bigcap v = (A_0,\ldots,A_n,C_0,\ldots,C_m) \bigcap \langle \bar{B}^c \bigcap \bar{D}^c \rangle \in B_4$, $P(X) = \langle X \rangle \bigcup \{\phi\} = \bigcup B_4$ y $u \bigcap \{\phi\} = \phi = (\phi) \bigcap \langle X \rangle$,

pues $X = \phi^c$ y $\bar{B}^c \bigcap \bar{D}^c = (\bar{B} \bigcup \bar{D})^c = (\overline{B \bigcup D})^c$.

OBSERVACIONES:

$\{ (A),[\bar{B}^c] \mid A, B \in T$ y de cerradura compacta $\} \bigcup \{\{\phi\}\}$ es subbase de T_{B_4}.

Si (X,T) es un espacio compacto entonces $B_4 = \{ (A_0,\ldots,A_n) \bigcap \langle \bar{B}^c \rangle \mid A_0,\ldots,A_n, B \in T, n \in N \} \bigcup \{\{\phi\}\}$ y $\{ (A),[\bar{B}^c] \mid A, B \in T \}$ es subbase de T_{B_4}.

$\phi \in B_4$. ϕ es un punto aislado.

La topología T_{B_4} se llama topología de Fell.

Considerando las posibles intersecciones entre sí de las anteriores topologías, $T_{B_1} \bigcap T_{B_2}$, $T_{B_1} \bigcap T_{B_4}$, $T_{B_2} \bigcap T_{B_4}$, $T_{B_1} \bigcap T_{B_2} \bigcap T_{B_4}$ se tienen otras topologías para P(X).

La definición de estas topologías depende de topologías en X, pero considerando funciones biyectivas entre P(X) y 2^X, y las topologías en 2^X cuya definición no depende de considerar ninguna topología en X, se tienen otras topologías en P(X) que no dependen de ninguna topología en X.

Por ejemplo, considerando en $2 = \{0,1\}$ la topología de Sierpinski y en 2^X la topología producto o caja o alguna otra topología inicial o final y la función biyectiva $\varphi: P(X) \rightarrow 2^X$, con $\varphi(E) :=$ la función característica de E, $E \subseteq X$.

Dado que el cardinal de P(X) y 2^X es el mismo, el análisis en P(X) es un caso especial del análisis en los espacios de funciones. Sin embargo es más simple tratar este caso por separado.

PSEUDOMÉTRICA DE HAUSDORFF EN P(X).

En el caso de que (X,T) sea pseudometrizable se puede definir una pseudométrica en P(X) de la siguiente forma:

Sean (X,ρ) un espacio pseudométrico acotado con mas de un punto, D, E, $F \subseteq X$ no vacíos y $\rho \neq 0$.

Se definen:

$\rho[D,E] := \inf\{ \rho(d,e) \mid d \in D, e \in E \}$. Este número es llamado "distancia" entre conjuntos.

$\rho[d,E] := \rho[\{d\},E]$, $d \in X$.

$\rho[D,e] := \rho[D,\{e\}]$, $e \in X$.

Para cada número real $r > 0$, $V^{\rho}_r(E) := \{ x \in X \mid \rho[x,E] < r \}$.

$\varphi[D,E] := \sup\{ \rho[d,E] \mid d \in D \}$.

$\varphi[E,D] := \sup\{ \rho[e,D] \mid e \in E \}$.

$\lambda(E) := \sup\{ \rho(x,y) \mid x, y \in E \}$. Este número se llama diámetro de E.

$\lambda(\phi) := 0$.

$\mu : P(X) \times P(X) \to \mathrm{R}$. En donde:

R := conjunto de los números reales.

$\mu(D,\phi) = \mu(\phi,E) := \lambda(X)$.

$\mu(\phi,\phi) := 0$.

$\mu(D,E) := \max\{ \varphi[D,E], \varphi[E,D] \}$.

Se tiene que:

$V^{\rho}_r(E) = \bigcup_{e \in E} B^{\rho}_r(e)$.

$\mu(D,E) = \sup\{ |\rho[x,D] - \rho[x,E]| \mid x \in X \} = \sup\{ \rho[d,E], \rho[e,D] \mid d \in D, e \in E \} =$

$= \inf\{ r > 0 \mid D \subseteq V^{\rho}_r(E) \text{ y } E \subseteq V^{\rho}_r(D) \}$.

$\rho[D,E] = \rho[E,D] = \rho[\bar{D},\bar{E}]$.

$\rho[\{d\},\{e\}] = \rho(d,e) = \mu(\{d\},\{e\}) = \varphi[\{d\},\{e\}] = \varphi[\{e\},\{d\}]$ y $\mu(\{d\},E) = \mu(E,\{d\}) = \varphi[E,\{d\}]$.

$|\rho[x,E] - \rho[y,E]| \leq \rho(x,y)$, para cada $x, y \in X$.

$\rho[d,E]$ y $\mu(\{d\},E)$ no son necesariamente iguales.

$\bar{E} = \{ x \in X \mid \rho[x,E] = 0 \}$.

$\rho[D \cup E,F] \leq \min\{ \rho[D,F], \rho[E,F] \}$.

$\varphi[D,E]$ y $\varphi[E,D]$ no son necesariamente iguales.

$\varphi[D,E] = \inf\{ r > 0 \mid D \subseteq V^{\rho}_r(E) \}$.

$\varphi[E,D] = \inf\{ r > 0 \mid E \subseteq V^{\rho}_r(D) \}$.

$\lambda(E) = \lambda(\bar{E})$.

$\lambda(\{e\}) = 0$.

$\lambda(D \cup E) \leq \lambda(D) + \lambda(E) + \rho[D,E]$

Si $D \subseteq E$ entonces $\lambda(D) \leq \lambda(E)$.

Para cada $d \in D$ y $e \in E$, $\rho[D,E] \leq \rho[d,E] = \varphi[\{d\},E] \leq \rho(d,e) \leq \varphi[D,E] \leq \mu(D,E) \leq \lambda(X)$.

$\rho[D,F] \leq \rho[D,E] + \rho[D \cup E,F] + \lambda(E)$.

TEOREMA. μ es una pseudométrica en P(X).

Prueba:

Sean D, E $\subseteq$ X.
$\mu(D,E) = \mu(E,D)$. Simetría.
$\mu(D,E) \geq 0$. Positividad.
Si D = E entonces $\mu(D,E) = 0$.
Ahora se establecerá la desigualdad del triángulo:
Sean $d \in D$, $e \in E$ y $F \subseteq X$.
$\rho[d,F] \leq \rho(d,e) + \rho[e,F] \leq \rho(d,e) + \mu(E,F)$ implica $\rho[d,F] \leq \rho[d,E] + \mu(E,F) \leq \mu(D,E) + \mu(E,F)$.
Entonces $\varphi[D,F] \leq \mu(D,E) + \mu(E,F)$.
Análogamente se tiene que:
$\rho[f,D] \leq \mu(F,E) + \mu(E,D)$ implica $\varphi[F,D] \leq \mu(D,E) + \mu(E,F)$.
Luego $\mu(D,F) \leq \mu(D,E) + \mu(E,F)$.

TEOREMA. (X,ρ) y $(P(X),\mu)$ son del mismo diámetro.

Prueba: $\lambda(X) := \sup \{ \rho(x,y) \mid x, y \in X \} \leq \lambda(P(X))$ y $\lambda(P(X)) := \sup \{ \mu(D,E) \mid D, E \subseteq X \} \leq \lambda(X)$.

TEOREMA. $\mu|_{C(X) \times C(X)}$ es una métrica en C(X).

Prueba:
Sean D, E subconjuntos cerrados de X.
$0 = \mu(D,E)$ si y sólo si $\varphi[D,E] = \varphi[E,D] = 0$ si y sólo si $\rho[d,E] = \rho[e,D] = 0$ para cada $d \in D$ y para cada $e \in E$ si y sólo si $D \subseteq \bar{E}$ y $E \subseteq \bar{D}$ si y sólo si $D = \bar{D} = \bar{E} = E$.

OBSERVACIONES:
μ se llama pseudométrica de Hausdorff.
μ está acotada por $\lambda(X)$.
La topología generada por μ en P(X) se llama topología de Hausdorff.
También en C(X) se puede definir la topología de Wijsman por medio de la pseudométrica ρ.
Sea $C(X) := \{ f:(X,\rho) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua} \}$ y $\Phi: C(X) \rightarrow C(X)$ con

$$(\Phi(E))(x) := \frac{\rho[x,E]}{1 + \rho[x,E]}, \quad E \in C(X) \text{ y } x \in X.$$

La topología de Wijsman en C(X) es $\Phi^{-1}\{T_P\}$, en donde T_P es la topología producto relativa a C(X) y se tiene que las topologías de Hausdorff y de Vietoris la contienen.
Si X es un espacio normado también se pueden definir las topologías de Mosco en el conjunto de subconjuntos cerrados y convexos de X, y la topología de Attouch – Wets en el conjunto de subconjuntos cerrados de X.
Referencia **10**.

II. RESULTADOS EN EL ESPACIO P(X) Y SUS SUBESPACIOS.

Relaciones de contención entre las topologías definidas en P(X).

TEOREMA. T_{B_0} es la topología supremo de T_{B_1} y T_{B_2}.

Prueba:

Se tiene que $(A_0,\ldots,A_n) = \langle X,A_0,\ldots,A_n\rangle$ y $[B] = \langle B\rangle \bigcup \{\phi\}$. Luego $B_1 \subseteq B_0$ y $B_2 \subseteq T_{B_0}$.

Por tanto $B_1 \bigcup B_2 \subseteq T_{B_0}$ y $T_{B_1} \bigcup T_{B_2} \subseteq T_{B_0}$.

Sea τ una topología en P(X) tal que $T_{B_1} \bigcup T_{B_2} \subseteq \tau$.

$\langle A_0,\ldots,A_n\rangle = (A_0,\ldots,A_n) \bigcap [A] \in \tau$ con $A := \bigcup_{0\le i\le n} A_i$ dado que $(A_0,\ldots,A_n) \in T_{B_1} \subseteq T_{B_1} \bigcup T_{B_2} \subseteq \tau$ y $[A] \in T_{B_2} \subseteq T_{B_1} \bigcup T_{B_2} \subseteq \tau$. Luego $B_0 \subseteq \tau$ y por tanto $T_{B_0} \subseteq \tau$.

OBSERVACIÓN: $\gamma \bigcup B_2$ es una subbase de T_{B_0}, pues $\gamma \bigcup B_2 \subseteq T_{B_0}$, $(A) \bigcap [B] = \langle A \bigcap B, B\rangle$ y $\langle A_0,\ldots,A_n\rangle = (A_0) \bigcap \ldots \bigcap (A_n) \bigcap [A]$. En donde $\gamma := \{ (A) \mid A \in T \} \bigcup \{\{\phi\}\}$.

TEOREMA. $T_{B_0} \subseteq T_{B_3}$.

Prueba:

Sea $E \in \langle A_0,\ldots,A_n\rangle \in B_0$, luego $E \in [E,A]$ con $A := \bigcup_{0\le i\le n} A_i$.

Si $D \in [E,A]$, entonces $E \subseteq D \subseteq A$, luego $\phi \neq E \bigcap A_i \subseteq D \bigcap A_i$, $0 \le i \le n$ y por tanto $D \in \langle A_0,\ldots,A_n\rangle$.

Entonces $[E,A] \subseteq \langle A_0,\ldots,A_n\rangle$. Luego $\langle A_0,\ldots,A_n\rangle = \bigcup_{E \in \langle A_0,\ldots,A_n\rangle} [E,A]$. Esto es $B_0 \subseteq T_{B_3}$.

TEOREMA. Si (X,T) es un espacio localmente compacto entonces $T_{B_4} \subseteq T_{B_0}$.

Prueba:

Sea $(A_0,\ldots,A_n) \bigcap \langle \bar{B}^c\rangle \in B_4$. Como $(A_0,\ldots,A_n) \in B_0$ y $\langle \bar{B}^c\rangle \in B_0$ se tiene que $(A_0,\ldots,A_n) \bigcap \langle \bar{B}^c\rangle \in T_{B_0}$.
Luego $B_4 \subseteq T_{B_0}$.

Coincidencia de las topologías de Vietoris y de Fell.

TEOREMA. Si (X,T) es un espacio compacto y de Hausdorff entonces $(T_{B_0})_{C(X)} = (T_{B_4})_{C(X)}$.

Prueba:

Como $T_{B_4} \subseteq T_{B_0}$, se tiene que $(T_{B_4})_{C(X)} \subseteq (T_{B_0})_{C(X)}$.

Sea $E \in v := \langle A_0,\ldots,A_n\rangle \bigcap C(X) \in (T_{B_0})_{C(X)}$ y $K := (\bigcup_{0\le i\le n} A_i)^c$.

K es compacto pues es un subconjunto cerrado de un espacio compacto y $K \bigcap E = \phi$.

Como el espacio es normal, para cada $k \in K$, existe $u_k \in V_k$ abierta tal que $\bar{u}_k$ es compacto y $\bar{u}_k \subseteq E^c$ pues $K \subseteq E^c$ y $E^c \in T$. Por tanto, $K \subseteq \bigcup_{k\in K} u_k \subseteq \bigcup_{k\in K} \bar{u}_k \subseteq E^c$ y entonces existen $k_0,\ldots,k_m \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{0\le j\le m} u_{k_j} \subseteq \bigcup_{0\le j\le m} \bar{u}_{k_j} \subseteq E^c$. Luego $E \in (A_0,\ldots,A_n) \bigcap \langle (\bigcup_{0\le j\le m} \bar{u}_{k_j})^c\rangle \bigcap C(X) =: w$.
Por tanto $v \subseteq w$.

Si $D \in w$, entonces $D \bigcap A_i \neq \phi$, $0 \le i \le n$ y $D \subseteq \bigcap_{0\le j\le m} (\bar{u}_{k_j})^c \subseteq K^c = \bigcup_{0\le i\le n} A_i$.
Por tanto $D \in v$. Luego $w \subseteq v$. Por tanto $v = w \in (T_{B_4})_{C(X)}$. Luego entonces $(T_{B_0})_{C(X)} \subseteq (T_{B_4})_{C(X)}$.

COROLARIO. Si (X,T) es un espacio finito, entonces $T_{B_0} = T_{B_4}$.

Prueba: $C(X) = P(X)$ en un espacio discreto.

TEOREMA. Sea $x \in (X,T)$ y $B_x \subseteq V_x$:= conjunto de vecindades de x. Entonces:
B_x es base local de x en (X,T) si y sólo si $\{ \langle v\rangle \mid v \in B_x \} = B_{\{x\}}$ es base local de $\{x\}$ en $(P(X),T_{B_0})$.

Prueba:
$\Rightarrow$)
Sea $v \in V_{\{x\}}$:= conjunto de vecindades de $\{x\}$. Por lo tanto existe $\langle A_0,\dots,A_n\rangle \in B_0$ tal que $\{x\} \in \langle A_0,\dots,A_n\rangle \subseteq v$.
Luego $x \in A_i$, $0 \le i \le n$.

Por tanto $x \in \bigcap_{0\le i\le n} A_i =: A \in T$ y existe $u \in B_x$ tal que $x \in u \subseteq A$.
Luego $\{x\} \in \langle u\rangle \subseteq \langle A\rangle \subseteq \langle A_0,\dots,A_n\rangle \subseteq v$.
$\Leftarrow$)
Sea $v \in V_x$. Luego existe $A_v \in T$, tal que $x \in A_v \subseteq v$. Por tanto $\{x\} \in \langle A_v\rangle \subseteq \langle v\rangle$, luego $\langle v\rangle \in V_{\{x\}}$.
Por tanto existe $\langle w\rangle \in B_{\{x\}}$ tal que $\{x\} \in \langle w\rangle \subseteq \langle v\rangle$ con $w \in B_x$. Por tanto $x \in w \subseteq v$.

Resultados sobre propiedades de densidad.

TEOREMA. Si (E,T_E) es un subespacio topológico de (X,T), entonces $(P(E),(T_E)_{B_0}) = (P(E),(T_{B_0})_{P(E)})$.
En donde $T_E := \{ A \cap E \mid A \in T \}$.

Prueba:
Se tiene que $\langle A_0 \cap E,\dots,A_n \cap E\rangle = \langle A_0,\dots,A_n\rangle \cap P(E)$.

COROLARIO. Si E es un subconjunto denso de (X,T), entonces $P(E)$ es un subconjunto denso de $(P(X),T_{B_0})$.

Prueba:
Sean $\phi \ne \langle A_0,\dots,A_n\rangle \in B_0$ y $A := \bigcup_{0\le i\le n} A_i$. Por lo tanto $A \cap E \in \langle A_0,\dots,A_n\rangle \cap P(E)$ pues $A \cap E \cap A_i = E \cap A_i \ne \phi$, $0 \le i \le n$, $A \cap E \subseteq A$ y $\phi \in \{\phi\} \cap P(E)$.
Por lo tanto $\overline{P(E)} = P(X)$.

TEOREMA. Para todo espacio topológico (X,T), $J(X)$ es un subconjunto denso de $(P(X),T_{B_0})$.

Prueba:
Sea $\phi \ne \langle A_0,\dots,A_n\rangle \in B_0$, entonces $\{a_0,\dots,a_n\} \in J(X) \cap \langle A_0,\dots,A_n\rangle$. En donde $a_i \in A_i$, $0 \le i \le n$ y $\phi \in \{\phi\} \cap J(X) = \{\phi\}$.
Por lo tanto $\overline{J(X)} = P(X)$.

COROLARIO. Si (X,T) es un espacio de Fréchet entonces $J(X)$ es un subconjunto denso de $(C(X),(T_{B_0})_{C(X)})$

Prueba: Es inmediato de la prueba anterior pues $\{a_0,\dots,a_n\}$ es cerrado.

TEOREMA. Si (X,T) es un espacio de Hausdorff, entonces $J_n(X)$ es cerrado en $(P(X),T_{B_0})$, para cada $n \in \mathrm{N}$ diferente de cero.

Prueba:
Sea $E \in (J_n(X))^c$. Por lo tanto existen al menos $n + 1$ puntos $e_0,\dots,e_n$ en E, luego existen $n + 1$ conjuntos abiertos de X ajenos $A_0,\dots,A_n$ tales que $A_0 \in V_{e_0},\dots,A_n \in V_{e_n}$.
Luego $E \in (A_0,\dots,A_n) \subseteq (J_n(X))^c$. Luego $(J_n(X))^c$ es abierto.

TEOREMA. Para todo espacio topológico (X,T), $E(X)$ es un conjunto abierto y cerrado en $(P(X),T_{B_0})$.

Prueba: $E(X) = \langle X\rangle \in \mathrm{B}_0$ y $(E(X))^c = \{\phi\} \in \mathrm{B}_0$.

TEOREMA. (X,T) y $(P(X),T_{B_0})$ son de la misma densidad.

Prueba:
Sean α y β las densidades de (X,T) y $(P(X),T_{B_0})$ respectivamente.
Sea D un subconjunto denso de (X,T) de cardinal α.
Por lo tanto $J(D) \subseteq P(D) \subseteq P(X)$. Luego $\overline{J(D)} = \overline{P(D)} = P(X)$.
Esto es, $J(D)$ es un subconjunto denso de $(P(X),T_{B_0})$ del mismo cardinal de D. Luego $\beta \leq \alpha$.
Sea N un subconjunto denso de $(P(X),T_{B_0})$ de cardinal β.
Por lo tanto, para cada $A \in T$ no vacío, se tiene que $N \bigcap (A) \neq \phi$ si y sólo si existe $N_A \in N$ y $N_A \in (A)$ si y sólo si existe $N_A \in N$ y $N_A \bigcap A \neq \phi$.
Por lo tanto $M := \{ x_A \in X \mid x_A \in N_A \bigcap A$ y $A \in T$ no vacío $\}$ es un subconjunto denso de (X,T) de cardinal menor o igual a β. Luego $\alpha \leq |M| \leq \beta$.
Luego $\alpha = \beta$.

COROLARIO. (X,T) es un espacio separable si y sólo si $(P(X),T_{B_0})$ es un espacio separable.

Prueba: En la demostración anterior sea α ó β numerable.

TEOREMA. Para todo espacio topológico (X,T) y para cada $n \in \mathrm{N}$, $J_n(X)$ es un subconjunto denso de $(P(X),T_{B_2})$.

Prueba: Si $[A] \in \mathrm{B}_2$, entonces $\phi \in J_n(X) \bigcap [A]$.

OBSERVACIÓN: En particular la cerradura de $\{\phi\}$ es $P(X)$.

Resultados sobre propiedades de separación.

TEOREMA. Para todo espacio topológico (X,T), $(C(X),(T_{B_0})_{C(X)})$ es un espacio de Kolmogoroff.

Prueba:

Sean $D \neq E \in C(X)$ y supóngase que $D - E = D \cap E^c \neq \phi$.

Por tanto $D \in (E^c) \cap C(X)$ y $E \notin (E^c) \cap C(X)$.

TEOREMA. Si (X,T) es un espacio de Fréchet entonces $(C(X),(T_{B_0})_{C(X)})$ es un espacio de Fréchet.

Prueba:

Sean $D \neq E \in C(X)$ y supóngase que $D - E = D \cap E^c \neq \phi$.

Como existe $x \in D - E$ se tiene que $\{x\} \subseteq D \cap E^c$ si y sólo si $D^c \cup E \subseteq \{x\}^c$.

Por tanto $D \in ((E^c) - [\{x\}^c]) \cap C(X)$ y $E \in ([\{x\}^c] - (E^c)) \cap C(X)$, pues $\{x\}^c$ es abierto dado que $\{x\}$ es cerrado.

TEOREMA. (X,T) es un espacio regular si y sólo si (X,T) es un espacio de Fréchet y $(C(X),(T_{B_0})_{C(X)})$ es un espacio de Hausdorff.

Prueba:

$\Rightarrow$)
Sean $D \neq E \in C(X)$.
Supóngase que existe $x \in E - D$.

Luego, existen subconjuntos abiertos de (X,T), A y B, tales que $D \subseteq A$, $x \in B$ y $A \cap B = \phi$.

Por tanto $D \in [A]$, $E \in (B)$ y $[A] \cap (B) = \phi$.

$\Leftarrow$)
Si (X,T) no es un espacio regular entonces existen un subconjunto cerrado de (X,T) no vacío $E \neq X$ y $x \in E^c$ tales que para todo par de subconjuntos abiertos A y B con $E \subseteq A$ y $x \in B$ se tiene que $A \cap B \neq \phi$. Dado que $E \cup \{x\}$ es un subconjunto cerrado de (X,T) y $E \neq E \cup \{x\}$.

Si $E \in \langle A_0,\dots,A_n\rangle$ y $E \cup \{x\} \in \langle B_0,\dots,B_m\rangle$, en donde $\langle A_0,\dots,A_n\rangle \cap \langle B_0,\dots,B_m\rangle = \phi$, entonces

$E \subseteq (\bigcup_{0 \le i \le n} A_i) =: A$, $E \cap A_i \neq \phi$, $0 \le i \le n$.

$E \cup \{x\} \subseteq (\bigcup_{0 \le j \le m} B_j) =: B$, $(E \cup \{x\}) \cap B_j \neq \phi$, $0 \le j \le m$.

Por tanto $E \subseteq A \cap B \in \langle A_0,\dots,A_n\rangle \cap \langle B_0,\dots,B_n\rangle$ y esto es una contradicción.

COROLARIO. Sea $H \subseteq P(X)$ tal que $C(X) \subseteq H$. Si (X,T) es un espacio de Fréchet y $(H,(T_{B_0})_H)$ es un espacio de Hausdorff entonces (X,T) es un espacio regular.

Prueba:
Si $(H,(T_{B_0})_H)$ es un espacio de Hausdorff entonces $(C(X),(T_{B_0})_{C(X)})$ es un espacio de Hausdorff, por ser ésta una propiedad hereditaria.

TEOREMA. (X,T) es un espacio de Tychonoff si y sólo si (X,T) es un espacio de Fréchet y $(C(X),(T_{B_0})_{C(X)})$ es un espacio de Stone.

Prueba:
$\Rightarrow$)
Sean $D \neq E \in C(X)$.
Supóngase que existe $x \in E - D$ y $D \neq \phi$.
Sea $f:(X,T) \to [0,1]$ una función continua tal que $f(x) = 1$ y $f[D] = \{0\}$. Entonces:
$f^{+}:(C(X),(T_{B_0})_{C(X)}) \to \mathbb{R}$ con $f^{+}(H):= \sup f[H]$ es continua, $f^{+}(D) = 0$ y $f^{+}(E) = 1$.
Si $D = \phi$, sea $f^{+}(D):= 0$.
$\Leftarrow$)
Sean $D \in C(X)$, $D \neq \phi$, X, $x \in D^{c}$ y $F:(C(X),(T_{B_0})_{C(X)}) \to [0,1]$ continua tal que $F(D) = 0$ y $F(D \bigcup \{x\}) = 1$.
Luego sea $f:(X,T) \to [0,1]$ con $f(z):= F(D \bigcup \{z\})$, $z \in X$.
Se tiene que f es continua, $f[D] = \{0\}$ y $f(x) = 1$.

TEOREMA. (X,T) es un espacio normal si y sólo si (X,T) es un espacio de Fréchet y $(C(X),(T_{B_0})_{C(X)})$ es un espacio regular.

Prueba:
$\Rightarrow$)
Sea E un subconjunto cerrado no vacío de (X,T) y $E \in \langle A_0,\dots,A_n\rangle \in B_0$.
Por lo tanto $E \subseteq \bigcup_{0 \le i \le n} A_i =:A$, $E \bigcap A_i \neq \phi$, $0 \le i \le n$ y existe un subconjunto abierto B de (X,T) tal que $E \subseteq B \subseteq \bar{B} \subseteq A$.
Luego, sean $x_0 \in E \bigcap A_0, \dots, x_n \in E \bigcap A_n$. Por lo tanto $A_0 \in V_{x_0},\dots,A_n \in V_{x_n}$.
Luego existen subconjuntos abiertos $B_0,\dots,B_n$ de (X,T) tales que $x_0 \in B_0 \subseteq \bar{B}_0 \subseteq A_0,\dots,x_n \in B_n \subseteq \bar{B}_n \subseteq A_n$.
Por lo tanto $E \in \langle B,B_0,\dots,B_n\rangle \subseteq \overline{\langle B,B_0,\dots,B_n\rangle} = \langle \bar{B},\bar{B}_0,\dots, \bar{B}_n\rangle \subseteq \langle A_0,\dots,A_n\rangle$.
Si $E = \phi$ entonces $E \in \{\phi\} = \overline{\{\phi\}} \subseteq v$, para cada $v \in V_{\phi}$.
$\Leftarrow$)
Sea E un subconjunto cerrado no vacío de (X,T) y A un subconjunto abierto de (X,T) tal que $E \subseteq A$.
Por lo tanto $E \in \langle A\rangle \in V_E$. Luego existe $\langle B_0,\dots,B_n\rangle \in V_E$ tal que $E \in \overline{\langle B_0,\dots,B_n\rangle} = \langle \bar{B}_0,\dots, \bar{B}_n\rangle \subseteq \langle A\rangle$.
Por lo tanto si $B:= \bigcup_{0 \le i \le n} B_i$ se tiene que $E \subseteq B \subseteq \bar{B} = \bigcup_{0 \le i \le n} \bar{B}_i \subseteq A$.

OBSERVACIÓN: En este teorema, la regularidad del espacio $(C(X),(T_{B_0})_{C(X)})$ es equivalente a su regularidad completa.
Referencias **1** y **12**.

TEOREMA. Si (X,T) es un espacio de Fréchet entonces $(P(X),T_{B_2})$ es un espacio de Kolmogoroff.

Prueba: Sean $D \neq E \in P(X)$ y supóngase que existe $x \in D - E$.

Por tanto $D \notin [\{x\}^c]$ y $E \in [\{x\}^c]$, pues $\{x\}^c$ es abierto dado que $\{x\}$ es cerrado.

TEOREMA. Si (X,T) es un espacio de Fréchet entonces $(P(X),T_{B_3})$ es un espacio de Hausdorff y cero dimensional.

Prueba:

Sean $D \neq E \in P(X)$ y supóngase que existe $x \in D - E$.

Sea $A \in T$ tal que $E \subseteq A$ y $x \notin A$.

Si $E = \phi$, sea $A = \phi$.

Si $E \neq \phi$, sea $A = \{x\}^c$.

Por tanto $E \in [E,A]$, $D \in [D,X]$ y $[E,A] \cap [D,X] = \phi$.

B_3 es una base de cerrados pues si $[E,A] \in B_3$.

$[E,A]^c = K \cup L$ con $K := \{ D \subseteq X \mid E \cap D^c \neq \phi \}$ y $L := \{ D \subseteq X \mid D \cap A^c \neq \phi \}$.

Si $D \in K$ entonces existe $x \in E \cap D^c$.

Luego sea $A_D \in T$ tal que $D \subseteq A_D$ y $x \notin A_D$.

Por tanto $D \in [D,A_D]$ y $K = \bigcup_{D \in K} [D,A_D]$.

Si $D \in L$ entonces existe $x \in D \cap A^c = A^c \cap (D^c)^c$.

Luego sea $B_D \in T$ tal que $D^c \subseteq B_D$ y $x \notin B_D$.

Por tanto $D \in [B_D{}^c,X]$ y $L = \bigcup_{D \in L} [B_D{}^c,X]$.

Por tanto $[E,A]^c \in T_{B_3}$. Por tanto $[E,A]$ es abierto y cerrado.

TEOREMA. (X,T) es un espacio primero numerable y de Fréchet si y sólo si $(J(X),(T_{B_3})_{J(X)})$ es un espacio de Moore.

Referencias **4** y **5**.

Resultados sobre propiedades de compacidad.

TEOREMA. Si (X,T) es un espacio compacto y $C(X) \subseteq H \subseteq P(X)$, entonces $(H,(T_{Bo})_H)$ es un espacio compacto.

Prueba:

Se sabe que $\{ (A) \bigcap H, [B] \bigcap H \mid A, B \in T \}$ es una subbase de $(T_{Bo})_H$. Supóngase que $H = (\bigcup_{i \in I} (A_i) \bigcup \bigcup_{j \in J} [B_j]) \bigcap H$ con $A_i, B_j \in T$.

Si $D := (\bigcup_{i \in I} A_i)^c$, entonces $D \bigcap A_i = \phi$ y $D \notin (A_i)$, para cada $i \in I$ y $D \in H$.

Por tanto $D \in \bigcup_{j \in J} [B_j]$, luego existe $k \in J$ tal que $D \in [B_k]$ y entonces $D \subseteq B_k$.

Por tanto $B_k^c \subseteq D^c = \bigcup_{i \in I} A_i$. B_k^c es un conjunto compacto por ser un subconjunto cerrado de un espacio compacto.

Luego existe un subconjunto finito $F \subseteq I$ tal que $B_k^c \subseteq \bigcup_{i \in F} A_i$.

Por tanto $H = (\bigcup_{i \in F} (A_i) \bigcup [B_k]) \bigcap H$. En efecto: Sea $E \in H$, luego $E \subseteq B_k$ si y sólo si $E \in [B_k]$ ó $E \not\subset B_k$ si y sólo si $E \bigcap B_k^c \neq \phi$, luego $E \bigcap (\bigcup_{i \in F} A_i) \neq \phi$.

Por tanto $E \bigcap A_f \neq \phi$, para alguna $f \in F$.
Por tanto $E \in (A_f)$.
Por tanto, por el lema de Alexander se tiene el resultado.

TEOREMA. Si $\{ \{x\} \mid x \in X \} \subseteq H \subseteq P(X)$ y $(H,(T_{Bo})_H)$ es un espacio compacto, entonces (X,T) es un espacio compacto.

Prueba:
Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una cubierta de X con subconjuntos abiertos.

Luego $\{(A_i) \bigcap H \}_{i \in I} \bigcup \{\phi\}$ es una cubierta de H con subconjuntos abiertos.

Sea entonces $\{(A_i) \bigcap H \}_{i \in F} \bigcup \{\phi\}$ una cubierta de H, en donde $F \subseteq I$ es finito.
Luego $\{A_i\}_{i \in F}$ es una cubierta finita de X.

En efecto: $x \in X$ si y sólo si $\{x\} \in H$ si y sólo si $\{x\} \in (A_f) \bigcap H$, para alguna $f \in F$ si y sólo si $\{x\} \bigcap A_f \neq \phi$, para alguna $f \in F$ si y sólo si $x \in A_f$, para alguna $f \in F$.
Por tanto, (X,T) es un espacio compacto.

COROLARIO. Sea $C(X) \subseteq H \subseteq P(X)$. (X,T) es un espacio compacto y de Fréchet si y sólo si $(H,(T_{B0})_H)$ es un espacio compacto y (X,T) es un espacio de Fréchet.

Prueba: Se tiene de los dos teoremas anteriores.

COROLARIO. Si $H = C(X)$ entonces: (X,T) es un espacio compacto y de Hausdorff si y sólo si $(H,(T_{B0})_H)$ es un espacio compacto y de Hausdorff, y (X,T) es un espacio de Fréchet.

Prueba:

$\Rightarrow)$

Si (X,T) es un espacio compacto y de Hausdorff, entonces (X,T) es un espacio compacto y normal. Luego $(H,(T_{B0})_H)$ es un espacio compacto y regular, luego compacto y de Hausdorff.

$\Leftarrow)$

Si $(H,(T_{B0})_H)$ es un espacio compacto y de Hausdorff, entonces (X,T) es un espacio compacto y regular, luego un espacio compacto y de Hausdorff.

TEOREMA. Si (X,T) es un espacio localmente compacto y $C(X) \subseteq H \subseteq P(X)$, entonces $(H,(T_{B4})_H)$ es un espacio compacto.

Prueba:

Se sabe que $\{ (A) \cap H, [\bar{B}^c] \cap H \mid A, B \in T$ y de cerradura compacta $\} \cup \{\{\phi\}\}$ es una subbase de $(T_{B4})_H$.

Supóngase que $H = (\bigcup_{i \in I} (A_i) \cup \bigcup_{j \in J} [\bar{B}_j^c]) \cap H$.

Si $D := (\bigcup_{i \in I} A_i)^c$, se tiene que $D \cap A_i = \phi$, $D \notin (A_i)$ para cada $i \in I$ y $D \in H$.

Luego $D \in \bigcup_{j \in J} [\bar{B}_j^c]$. Por tanto existe $k \in J$ tal que $D \in [\bar{B}_k^c]$, luego $D \subseteq \bar{B}_k^c$.

Entonces $\bar{B}_k \subseteq D^c = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Luego existe un subconjunto finito $F \subseteq I$ tal que $\bar{B}_k \subseteq \bigcup_{i \in F} A_i$, pues $\bar{B}_k$ es compacto.

Por tanto $H = (\bigcup_{i \in F} (A_i) \cup [\bar{B}_k^c]) \cap H$.

En efecto:

Sea $E \in H$, luego $E \subseteq \bar{B}_k^c$ si y sólo si $E \in [\bar{B}_k^c]$ ó $E \not\subset \bar{B}_k^c$ si y sólo si $E \cap \bar{B}_k \neq \phi$.

Luego $E \cap (\bigcup_{i \in F} A_i) \neq \phi$.

Por tanto $E \cap A_f \neq \phi$, para alguna $f \in F$. Por tanto $E \in (A_f)$.

Por tanto, por el lema de Alexander, $(H,(T_{B4})_H)$ es un espacio compacto.

COROLARIO. Si (X,T) es un espacio localmente compacto entonces $(E(X),(T_{B4})_{E(X)})$ es un espacio compacto.

Prueba: $(E(X))^c = \{\phi\} \in T_{B4}$. Por tanto, $E(X)$ es cerrado en $(P(X),T_{B4})$.

TEOREMA. Para todo espacio topológico (X,T), $(J(X),(T_{B3})_{J(X)})$ es un espacio metacompacto.

Prueba:
Sean C una cubierta de $J(X)$ con subconjuntos abiertos y para cada $E \in J(X)$, $v_E \in C$ tal que $E \in v_E$.
Luego $C' := \{ [E,X] \bigcap v_E \mid E \in J(X) \}$ es un refinamiento abierto y punto finito de C.
Para cada $D \in J(X)$, $\{ u \in C' \mid D \in u \}$ es finito, pues $D \in u = [E,X] \bigcap v_E$ si y sólo si $E \in J(D)$.

También se tienen los siguientes teoremas, para los cuales solo damos las referencias.

TEOREMA. Sea (X,T) un espacio regular.
Son equivalentes:
1.(X,T) es un espacio compacto.
2.$(C(X),(T_{Bo})_{C(X)})$ es un espacio compacto o paracompacto o metacompacto o de Lindelöf o metaLindelöf.
Referencia **6**.

TEOREMA. Si (X,T) es un espacio regular entonces normalidad y compacidad son propiedades equivalentes en $(C(X),(T_{Bo})_{C(X)})$.
Referencias **3**, **6** y **16**.

TEOREMA. (X,T) es un espacio compacto y metrizable si y sólo si (X,T) es un espacio de Fréchet y $(C(X),(T_{Bo})_{C(X)})$ es un espacio metrizable.
Referencia **1**.

Sea $L(X):= C(X) \bigcap K(X)$.
Para (X,T) un espacio de Fréchet se transfieren algunas propiedades entre (X,T) y $(L(X),(T_{Bo})_{L(X)})$ como lo muestra el resultado siguiente.
Sea P una de las propiedades topológicas:
Completamente separable, débilmente separable, de Hausdorff, de Stone, regular, de Tychonoff, compacto y Hausdorff, localmente compacto, metrizable, cero dimensional, discreto, totalmente disconexo, conexo, localmente conexo o realcompacto.
Entonces se tiene que:

TEOREMA. (X,T) tiene la propiedad P si y sólo si $(L(X),(T_{Bo})_{L(X)})$ tiene la propiedad P.
Referencias **1** y **16**.

TEOREMA. Sea $H \subseteq P(X)$ tal que $J(X) - \{\phi\} \subseteq H$. Entonces:

(X,T) es un espacio conexo si y sólo si $(H,(T_{B_0})_H)$ es un espacio conexo.

Prueba:

$\Rightarrow)$

Si (X,T) es un espacio conexo entonces X^n es un espacio conexo con la topología producto y $J_n(X) - \{\phi\}$, con $n \in \mathbb{N}$ distinto de cero, es conexo con la topología de Vietoris.

Entonces: $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n(X)) - \{\phi\} = J(X) - \{\phi\}$ es conexo con la topología de Vietoris.

Por tanto $J(X) - \{\phi\} \subseteq H \subseteq \overline{J(X) - \{\phi\}} = E(X)$ implica que H es conexo.

$\Leftarrow)$

Se tiene que $\bigcup H = X$. Si X no es conexo entonces existen conjuntos abiertos, no vacíos, ajenos A y B tales que $X = A \bigcup B$.

Se tiene que $H \subseteq P(X) = [A] \bigcup (B)$ y $[A] \bigcap (B) = \phi$.

Como H es conexo y $A \neq X$, se tiene que $H \bigcap [A] = \phi$ y $H \subseteq (B)$.

Por tanto, para cada $h \in H$, $h \bigcap B \neq \phi$.

Intercambiando A y B se tiene que $h \bigcap A \neq \phi$.

Por tanto todos los elementos de H son inconexos, pero esto es una contradicción pues H contiene a $\{x\}$, para todo $x \in X$, que son conjuntos conexos.

Coincidencia de las topologías de Vietoris y de Hausdorff.

TEOREMA. $(T_\mu)_{K(X)} = T_\eta = ((T_\rho)_{B_0})_{K(X)}$. En donde $\eta := \mu|_{K(X) \times K(X)}$.

Prueba:

Sean $\phi, X \neq A \in T_\rho$ y $E \in [A] \bigcap K(X)$.

Si $E \neq \phi$ entonces existe un número real $r > 0$ tal que $r < \inf \{ \rho(x,y) \mid x \in A^c \text{ y } y \in E \}$.

Por tanto $B^\eta_r(E) \subseteq [A] \bigcap K(X)$. En efecto:

Si $D \in B^\eta_r(E)$ entonces $D \subseteq V^\rho_{\eta(D,E)}(E) \subseteq V^\rho_r(E) \subseteq A$, pues $\rho[d,E] \leq \eta(D,E) < r$, para cada $d \in D$ y $x \in V^\rho_r(E)$ si y sólo si $\rho[x,E] := \inf \{ \rho(x,y) \mid y \in E \} < r$. Luego $x \in A$. Por tanto $D \in [A] \bigcap K(X)$.

Si $E = \phi$ entonces $B^\eta_r(E) = \{\phi\} \subseteq [A] \bigcap K(X)$, en donde $0 < r < \lambda(X)$.

Por tanto $[A] \bigcap K(X) = \bigcup_{E \in [A] \bigcap K(X)} B^\eta_r(E) \in T_\eta$.

Si $A = \phi$, $\{\phi\} = B^\eta_r(\phi) \in T_\eta$. Si $A = X$, $K(X) = B^\eta_r(E)$ con $r \geq \lambda(X)$, para cada $E \in K(X)$.

Sea $E \in (A) \bigcap K(X)$.

Luego existe $x \in E \bigcap A$ y un número real $r > 0$ tal que $B^\rho_r(x) \subseteq A$.

Por tanto $B^\eta_r(E) \subseteq (A) \bigcap K(X)$. En efecto:

$D \in B^\eta_r(E)$ si y sólo si $\eta(E,D) < r$. Luego $\rho[e,D] < r$, para cada $e \in E$.

Luego existe $d \in D$ tal que $\rho(x,d) < r$.

Por tanto si $\phi \neq D \subseteq D \bigcap A$ entonces $D \in (A) \bigcap K(X)$.

Por tanto $(A) \bigcap K(X) = \bigcup_{E \in (A) \bigcap K(X)} B^{\eta}_r(E) \in T_{\eta}$.

Sea $E \in K(X)$.

$$\text{Si } E = \phi \text{ entonces } B^{\eta}_r(\phi) = \begin{cases} K(X) \text{ si } r \geq \lambda(X). \\ \{\phi\} \text{ si } r < \lambda(X). \end{cases}$$

Si $E \neq \phi$ entonces, sean $\phi \neq D \in B^{\eta}_r(E)$ y $0 < t = \min \{ r - \eta(E,D), \eta(E,D) \}$, si $D \neq E$ ó $t = r$, si $D = E$.
Luego, existe $J_t \subseteq D$ finito no vacío tal que $D \subseteq V^{\rho}_{t/2}(J_t)$, pues D es precompacto al ser compacto.
Por tanto $D \in v_D := (\langle V^{\rho}_t(D) \rangle \bigcap (\bigcap_{x \in J_t} (B^{\rho}_{t/2}(x))) \bigcap K(X)) \subseteq B^{\eta}_r(E)$.
En efecto: $D \subseteq V^{\rho}_t(D)$ y $D \bigcap B^{\rho}_{t/2}(x) \neq \phi$, para cada $x \in J_t$.
Sea $C \in v_D$. Luego $C \subseteq V^{\rho}_t(D)$ y existe $c_x \in C \bigcap B^{\rho}_{t/2}(x) \neq \phi$, para cada $x \in J_t$.
Por tanto $\rho(x,c_x) < t/2$. Luego $\rho[x,C] < t/2$.
Para cada $d \in D$, $\rho(d,c_x) \leq \rho(d,x) + \rho(x,c_x) < (t/2) + (t/2) = t$. Por tanto, para cada $d \in D$, $\rho[d,C] < t$.
Luego $\varphi[D,C] \leq t$ y análogamente $\varphi[C,D] \leq t$, lo cual implica que $\eta(C,D) \leq t$.
Luego $\eta(C,E) \leq \eta(C,D) + \eta(D,E) \leq t + \eta(D,E) < r$. Por tanto $C \in B^{\eta}_r(E)$.
Por tanto $B^{\eta}_r(E) = \bigcup_{D \in B^{\eta}_r(E)} v_D \bigcup \{\phi\}$, si $r \geq \lambda(X)$ ó $B^{\eta}_r(E) = \bigcup_{D \in B^{\eta}_r(E)} v_D$, si $r < \lambda(X)$.
De donde $B^{\eta}_r(E) \in ((T_{\rho})_{B_0})_{K(X)}$.

Resultado sobre la propiedad de completitud.

TEOREMA. (X,ρ) es un espacio completo si y sólo si $(P(X),\mu)$ es un espacio completo.

Prueba:

$\Rightarrow$)

Sea S una sucesión de Cauchy en $(P(X),\mu)$. Se tiene que $S \to Ls\, S$.

En efecto:

Para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(S(n),S(n_m)) \leq \varepsilon/4^{m+1}$, para cada $n \geq n_m$, donde $n_{m+1} \geq n_m$.

$S(n)$ y $S(n_m)$ no pueden ser uno vacío y el otro distinto del vacío.

Pues $\mu(\phi,E) := \lambda(X)$ con $E \subseteq X$ no vacío.

Si ambos son vacíos se tiene que $S(n) = \phi$, para cada $n \geq n_m$. Y esta sucesión converge a ϕ.

Sea entonces $x_m \in S(n_m) \neq \phi$.

Se tiene que $\mu(S(n_{m+1}),S(n_m)) \leq \varepsilon/4$, para $n = n_{m+1}$.

Por tanto existe $x_{m+1} \in S(n_{m+1})$ tal que $\rho(x_m,x_{m+1}) \leq \varepsilon/4$.

Por tanto $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (X,ρ) y entonces existe $p \in X$ tal que $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \to p$, luego $p \in L = Ls\, S$.

Por tanto para cada $\varepsilon > 0$, existe $0 \neq M \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_M,p) \leq \varepsilon/4$, para cada $n \geq M$ y $\rho(x_o,x_M) \leq \rho(x_o,x_1) + \ldots + \rho(x_{M-1},x_M) \leq \varepsilon/4M + \ldots + \varepsilon/4M = \varepsilon/4$.

Por tanto $\rho(x_o,p) \leq \rho(x_o,x_M) + \rho(x_M,p) \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$.

Luego $x_o \in S(n_o)$ implica que $\rho[x_o,L] \leq \varepsilon/2$. Por tanto para toda $x \in S(n_o)$ se tiene que $\rho[x,L] \leq \varepsilon/2$.

Por otro lado se tiene que $Ls\, S = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} (\overline{\bigcup_{n \in R_m} S(n)})$ y $\mu(S(n),S(n_o)) \leq \varepsilon/2$, para cada $n \geq n_o$.

Por lo tanto $\overline{S(n)} \subseteq \{ x \in X \mid \rho[x,S(n_o)] \leq \varepsilon/2 \} = \psi^{-1}_{S(n_o)}[[0,\varepsilon/2]]$, para cada $n \geq n_o$.

Luego $L \subseteq \overline{\bigcup_{n \in R_{n_o}} S(n)} = \bigcup_{n \in R_{n_o}} \overline{S(n)} \subseteq \psi^{-1}_{S(n_o)}[[0,\varepsilon/2]]$.

En donde $\psi_{S(n_o)}:(X,\rho) \to \mathbb{R}$ con $(\psi_{S(n_o)})(x) := \rho[x,S(n_o)]$ es una función continua.

Por tanto $l \in L$ implica que $\rho[l,S(n_o)] \leq \varepsilon/2$. Luego $\mu(S(n_o),L) \leq \varepsilon/2$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(S(n),L) \leq \mu(S(n),S(n_o)) + \mu(S(n_o),L) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, para cada $n \geq n_o$.

$\Leftarrow$)

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (X,ρ).

Por tanto $(\{x_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(P(X),\mu)$.

Luego existe $L \in E(X)$ tal que $(\{x_n\})_{n \in \mathbb{N}} \to L$.

Esto es, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(l,x_n) \leq \mu(\{x_n\},L) \leq \varepsilon$, para cada $n \geq N$ y para cada $l \in L$.

Por tanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to l$, para cada $l \in L$.

(Luego $|L| = 1$).

III. MAPEOS ENTRE ESPACIOS Y ESPACIOS DE CONJUNTOS.

Introducción a los elementos básicos del Análisis Multivaluado.

Definiciones:

Sean X, Y conjuntos. Toda función $\varphi:X \rightarrow P(Y)$ se llama función multivaluada.

Sean (X,T), (Y,Σ) espacios topológicos y $\varphi:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_0})$.

φ es semicontinua inferiormente ssi para cada $\sigma \in \Sigma$, $\{ x \in X \mid \varphi(x) \bigcap \sigma \neq \phi \} \in T$.

φ es semicontinua superiormente ssi para cada $\sigma \in \Sigma$, $\{ x \in X \mid \varphi(x) \subseteq \sigma \} \in T$.

φ es semicontinua ssi φ es semicontinua inferior o superiormente.

TEOREMA. $\varphi:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_0})$ es semicontinua inferiormente y $\varphi^{-1}[\{\phi\}] \in T$ si y sólo si $\varphi:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_1})$ es continua.

Prueba:

Se tiene que:

$\sigma \in \Sigma$ si y sólo si $(\sigma) \in \Sigma_{B_1}$.

$\varphi^{-1}[(\sigma)] = \{ x \in X \mid \varphi(x) \in (\sigma) \} = \{ x \in X \mid \varphi(x) \bigcap \sigma \neq \phi \}$.

Por tanto $\varphi^{-1}[(\sigma)] \in T$ si y sólo si $\{ x \in X \mid \varphi(x) \bigcap \sigma \neq \phi \} \in T$.

TEOREMA. $\varphi:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_0})$ es semicontinua superiormente si y sólo si $\varphi:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_2})$ es continua.

Prueba:

Se tiene que:

$\sigma \in \Sigma$ si y sólo si $[\sigma] \in \Sigma_{B_2}$.

$\varphi^{-1}[[\sigma]] = \{ x \in X \mid \varphi(x) \in [\sigma] \} = \{ x \in X \mid \varphi(x) \subseteq \sigma \}$.

Por tanto $\varphi^{-1}[[\sigma]] \in T$ si y sólo si $\{ x \in X \mid \varphi(x) \subseteq \sigma \} \in T$.

TEOREMA. $\varphi:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_0})$ es continua si y sólo si φ es semicontinua inferior y superiormente.

Prueba:

$\Rightarrow)$

Se tiene por los dos teoremas anteriores.

$\Leftarrow)$

Sea $\langle B_0,\ldots,B_n\rangle = (B_0) \bigcap \ldots \bigcap (B_n) \bigcap [B] \in \Sigma_{B_0}$. En donde $B_i \in \Sigma$, $0 \leq i \leq n$ y $B:= \bigcup_{0 \leq i \leq n} B_i$.

Por tanto $\varphi^{-1}[\langle B_0,\ldots,B_n\rangle] = \varphi^{-1}[(B_0)] \bigcap \ldots \bigcap \varphi^{-1}[(B_n)] \bigcap \varphi^{-1}[[B]] \in T$ y $\varphi^{-1}[\{\phi\}] = \varphi^{-1}[[\phi]] \in T$.

COROLARIO. Si $\varphi:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_0})$ es semicontinua y $|\varphi(x)| = 1$, para cada $x \in X$, entonces φ es continua.

Prueba:

Si φ es semicontinua inferiormente, se tiene que para cada $\sigma \in \Sigma$,

$\{ x \in X \mid \varphi(x) \subseteq \sigma \} = \{ x \in X \mid \varphi(x) \cap \sigma \neq \phi \} \in T$.

Por tanto φ es semicontinua superiormente.

Si φ es semicontinua superiormente, se tiene que para cada $\sigma \in \Sigma$,

$\{ x \in X \mid \varphi(x) \cap \sigma \neq \phi \} = \{ x \in X \mid \varphi(x) \subseteq \sigma \} \in T$.

Por tanto φ es semicontinua inferiormente.

Definiciones:

La función $f:X \rightarrow Y$ es una selección de φ ssi $f(x) \in \varphi(x)$, para cada $x \in X$.
Referencia **1**.
La función $f:P(X) \rightarrow \mathrm{R}$ es una función de Whitney ssi
$f(\phi) = 0 = f(\{x\})$, para cada $x \in X$.
Si $A \subseteq B$ entonces $f(A) \leq f(B)$.
Referencia **15**.

OBSERVACIÓN:

$\lambda:(C(X),\mu|_{C(X)}) \rightarrow \mathrm{R}$, con $\lambda(E):=$ diámetro de E, es una función continua con (X,ρ) un espacio compacto, y es una función de Whitney.
Referencias **13** y **15**.

Funciones multivaluadas canónicas.

TEOREMA. Sea $\{ f_i:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_0}) \}_{i \in I}$ y $f:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_0})$ con $f(x):= \bigcup_{i \in I} f_i(x)$.
Si I es finito y f_i es semicontinua superiormente para cada $i \in I$ entonces f es semicontinua superiormente.

Prueba:

Se tiene que $f^{-1}[[B]] = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}[[B]]$.
En efecto:

$x \in f^{-1}[[B]]$ si y sólo si $f(x) = \bigcup_{i \in I} f_i(x) \in [B]$ si y sólo si $f_i(x) \in [B]$, para cada $i \in I$ si y sólo si $x \in f_i^{-1}[[B]]$, para cada $i \in I$ si y sólo si $x \in \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}[[B]]$.

Si $B \in T$, entonces $[B] \in \Sigma_{B_2}$. Luego $f_i^{-1}[[B]]$ es abierto de T, para cada $i \in I$, luego $f^{-1}[[B]]$ es abierto de T.
Por tanto $f:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_2})$ es continua.

TEOREMA. Sea $\{ f_i:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_0}) \}_{i \in I}$ y $f:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_0})$ con $f(x) := \bigcup_{i \in I} f_i(x)$.
Si f_i es semicontinua inferiormente para cada $i \in I$ entonces f es semicontinua inferiormente.

Prueba:

Se tiene que $f^{-1}[(B)] = f^{-1}[[B^c]^c] = (f^{-1}[[B^c]])^c = (\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}[(B)^c])^c = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}[(B)]$.
Si $B \in T$, entonces $(B) \in \Sigma_{B_1}$. Luego $f_i^{-1}[(B)]$ es abierto de T, para cada $i \in I$, luego $f^{-1}[(B)]$ es abierto de T. Por tanto $f:(X,T) \rightarrow (P(Y),\Sigma_{B_1})$ es continua.

Se tiene también:

TEOREMAS.
Sean $f:(X,T) \rightarrow \mathbf{R}$, $f^+:(C(X),(T_{B_0})_{C(X)}) \rightarrow \mathbf{R}$ con $f^+(E) :=$ sup $f[E]$ y $f^-:(C(X),(T_{B_0})_{C(X)}) \rightarrow \mathbf{R}$ con $f^-(E) :=$ inf $f[E]$. $\mathbf{R}$:= reales extendidos, $E \in C(X)$.
Si f es continua entonces f^+ y f^- son continuas.
Referencia **1**.

Sea (X,T) un espacio de Fréchet.

Son equivalentes:
1. (X,T) es un espacio normal.
2. $\psi:(C(X),(T_{B_0})_{C(X)})^2 \rightarrow (C(X),(T_{B_0})_{C(X)})$ con $\psi((D,E)) := D \cap E$ es semicontinua superiormente. $D, E \in C(X)$.

OBSERVACIÓN:
(X,T) es un espacio compacto y de Hausdorff si y sólo si ψ es semicontinua superiormente para productos arbitrarios.

Referencia **12**.

Son equivalentes:
1. (X,T) es un espacio regular.
2. $\varphi:(C(X),(T_{B_0})_{C(X)})^2 \rightarrow (C(X),(T_{B_0})_{C(X)})$ con $\varphi((D,E)) := \overline{D - E}$ es semicontinua inferiormente. $D, E \in C(X)$.
Referencia **12**.

Sean $(X_i,T_i)_{i \in I}$ espacios compactos y $(X,T) := \prod_{i \in I} (X_i,T_i)$. Entonces:
$f:\prod_{i \in I} (C(X_i),((T_i)_{B_0})_{C(X_i)}) \rightarrow (C(X),(T_{B_0})_{C(X)})$ con $f((D_i)_{i \in I}) := \prod_{i \in I} D_i$ es continua. $D_i \in C(X_i)$, $i \in I$.
Referencia **13**.

TEOREMA. Sean $f:(X,T) \to (Y,\Sigma)$ y $f^*:(P(X),T_{B_0}) \to (P(Y),\Sigma_{B_0})$ con $f^*(E):= f[E]$ y $E \in P(X)$.
Entonces: f es continua si y sólo si f^* es continua.

Prueba:

$\Rightarrow$)

Si $E = \phi$, $f^*(\phi) = f[\phi] = \phi$.

Para cada $v \in V_\phi$ en Σ_{B_0} se tiene que $\{\phi\} \subseteq v$ y existe $u:= \{\phi\} \in V_\phi$ en T_{B_0} tal que $f^*[u] = f^*[\{\phi\}] = \{\phi\} \subseteq v$.

Si $E \neq \phi$. Sea $v:= \langle B_0,\dots,B_n\rangle \in V_{f^*(E)}$.

Por tanto $f[E] \subseteq \bigcup_{0 \le i \le n} B_i =:B$ y $f[E] \bigcap B_i \neq \phi$, $0 \le i \le n$.

Sea $u:= \langle f^{-1}[B_0],\dots,f^{-1}[B_n]\rangle$, $E \subseteq f^{-1}[B]$ y $E \bigcap f^{-1}[B_i] \neq \phi$, $0 \le i \le n$.

Por tanto $u \in V_E$ y $f^*[u] \subseteq v$.

En efecto:

$D \in u$ si y sólo si $D \subseteq \bigcup_{0 \le i \le n} f^{-1}[B_i] = f^{-1}[B]$ y $D \bigcap f^{-1}[B_i] \neq \phi$, $0 \le i \le n$.

Luego $f^*(D) = f[D] \subseteq B$ y $(f^*(D) = f[D]) \bigcap B_i \neq \phi$, $0 \le i \le n$.

Por tanto $f^*(D) \in v$.

$\Leftarrow$)

Sea $x \in X$, luego f^* es continua en $\{x\}$.

Por tanto para cada $v \in V_{f^*(\{x\})}$, existe $u \in V_{\{x\}}$ tal que $f^*[u] \subseteq v$.

Sea $B \in V_{f(x)}$, luego $v:= \langle B\rangle \in V_{f^*(\{x\})}$ y existe $u:= \langle A_0,\dots,A_n\rangle \in V_{\{x\}}$ tal que $f^*[u] \subseteq v$.

Luego $A:= \bigcap_{0 \le i \le n} A_i \in V_x$ es tal que $f[A] \subseteq B$.

En efecto:

$A \in u$, luego $f^*(A) \in v$. Por tanto $f[A] \in \langle B\rangle$ si y sólo si $f[A] \subseteq B$.

COROLARIO. Sean $f:(X,T) \to (Y,\Sigma)$ y $f^*:(P(X),T_{B_0}) \to (P(Y),\Sigma_{B_0})$ con $f^*(E):= f[E]$ y $E \in P(X)$.
Entonces: f es un homeomorfismo si y sólo si f^* es un homeomorfismo.

Prueba:

f es biyectiva si y sólo si f^* es biyectiva.

f y f^{-1} son continuas si y sólo si f^* y $(f^{-1})^*$ son continuas.

$((f^{-1})^* \circ f^*))(E) = (f^{-1})^*(f^*(E)) = f^{-1}[f[E]] = E$, luego $(f^{-1})^* \circ (f^*) = 1_{P(X)}$.

$((f^*) \circ (f^{-1})^*)(H) = f^*((f^{-1})^*(H)) = f[f^{-1}[H]] = H$, luego $(f^*) \circ (f^{-1})^* = 1_{P(Y)}$.

Por tanto $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

TEOREMA. Sean $f:(X,T) \rightarrow (Y,\Sigma)$ suprayectiva y $f^{\square}:(P(Y),\Sigma_{Bo}) \rightarrow (P(X),T_{Bo})$ con $f^{\square}(H):= f^{-1}[H]$.
Entonces: $f^{\square}$ es continua si y sólo si f es abierta y cerrada.

Prueba:

$\Rightarrow$)

Sea $A \in T$.

$(f^{\square})^{-1}[(A)] = \{ H \in P(Y) \mid f^{\square}(H) \in (A) \} = \{ H \in P(Y) \mid f^{\square}(H) \bigcap A \neq \phi \} = (f[A]) \in \Sigma_{Bo}$,

ya que $f^{\square}(H) \bigcap A = f^{-1}[H] \bigcap A \neq \phi$ si y sólo si $H \bigcap f[A] \neq \phi$.

Por tanto $f[A] \in \Sigma$, pues $f[A] \in \Sigma$ si y sólo si $(f[A]) \in \Sigma_{Bo}$, y por tanto f es abierta.

$(f^{\square})^{-1}[[A]] = \{ H \in P(Y) \mid f^{\square}(H) \in [A]\} = \{ H \in P(Y) \mid f^{\square}(H) \subseteq A \} = [(f[A^C])^C] \in \Sigma_{Bo}$,

ya que $f^{\square}(H) \subseteq A$ si y sólo si $f^{-1}[H] \subseteq A$ si y sólo si $A^C \subseteq (f^{-1}[H])^C$.

Por tanto $(f[A^C])^C \in \Sigma$, pues $(f[A^C])^C \in \Sigma$ si y sólo si $[(f[A^C])^C] \in \Sigma_{Bo}$, y por tanto f es cerrada.

$\Leftarrow$)

Sea $A \in T$.

$\{ H \in P(Y) \mid f^{\square}(H) \bigcap A \neq \phi \} = \{ H \in P(Y) \mid H \bigcap f[A] \neq \phi \} = (f[A]) \in \Sigma_{Bo}$,

pues f es abierta y $f^{\square}(H) \bigcap A = f^{-1}[H] \bigcap A \neq \phi$ si y sólo si $H \bigcap f[A] \neq \phi$.

Por tanto $f^{\square}$ es semicontinua inferiormente.

$\{ H \in P(Y) \mid f^{\square}(H) \subseteq A \} = \{ H \in P(Y) \mid H \subseteq (f[A^C])^C \} = [(f[A^C])^C] \in \Sigma_{Bo}$,

pues f es cerrada y $f^{\square}(H) \subseteq A$ si y sólo si $f^{-1}[H] \subseteq A$ si y sólo si $A^C \subseteq (f^{-1}[H])^C$
si y sólo si $A^C \subseteq f^{-1}[H^C]$ si y sólo si $f[A^C] \subseteq H^C$ si y sólo si $H \subseteq (f[A^C])^C$.

Por tanto $f^{\square}$ es semicontinua superiormente.

COROLARIO. Sean $f:(X,T) \rightarrow (Y,\Sigma)$ suprayectiva y $f^{\square}:(P(Y),\Sigma_{Bo}) \rightarrow (P(X),T_{Bo})$ con $f^{\square}(H):= f^{-1}[H]$.
Entonces: f es un homeomorfismo si y sólo si $f^{\square}$ es un homeomorfismo.

Prueba:

f es biyectiva si y sólo si $f^{\square}$ es biyectiva.

$(f^{\square})^{-1} = (f^{-1})^{\square} = f^*$.

f y f^{-1} son continuas si y sólo si f^{-1} y f son abiertas (cerradas) si y sólo si $(f^{-1})^{\square}$ y $f^{\square}$ son continuas.

TEOREMA. $\sigma:(P(P(X)),(T_{B_0})_{B_0}) \rightarrow (P(X),T_{B_0})$ con $\sigma(E):= \bigcup E$ y $E \subseteq P(X)$ es continua.

Prueba:
Para cada $v \in V_{\sigma(E)}$, existe $u \in V_E$ tal que $\sigma[u] \subseteq v$. En efecto:
$\sigma(E) = \bigcup E = \phi$ si y sólo si $E = \phi$ o $E = \{\phi\}$.
Si $u:= [\{\phi\}] = \{\phi,\{\phi\}\}$ entonces $\sigma[u] = \{\phi\} \subseteq v$.
$\sigma(E) = \bigcup E \neq \phi$ si y sólo si $E \neq \phi$ y $E \neq \{\phi\}$.
Sean $v:= \langle A_0,\ldots,A_n\rangle$ y $u:= \langle [A],\langle A,A_0\rangle,\ldots,\langle A,A_n\rangle\rangle$. En donde $A:= \bigcup_{0 \leq i \leq n} A_i$.
Se tiene que $u \in V_E$, pues si $e \in E$ entonces $e \subseteq \bigcup E = \sigma(E) \subseteq A$.
Luego $E \subseteq [A] \subseteq [A] \bigcup \langle A,A_0\rangle \bigcup \ldots \bigcup \langle A,A_n\rangle$.
Además existe $h_i \in \sigma(E) \bigcap A_i$, $0 \leq i \leq n$.
Esto implica que existe $e_i \in E$ tal que $h_i \in e_i$.
Luego $e_i \in \langle A,A_i\rangle$ pues $e_i \subseteq A$ y $h_i \in e_i \bigcap A_i$.
Por tanto $e_i \in E \bigcap \langle A,A_i\rangle$, $0 \leq i \leq n$. Luego $E \in u$.
Si $D \in u$, $D \subseteq [A] \bigcup \langle A,A_0\rangle \bigcup \ldots \bigcup \langle A,A_n\rangle$, $D \bigcap [A] \neq \phi$ y existe $d_i \in D \bigcap \langle A,A_i\rangle$, $0 \leq i \leq n$.
Se tiene que $h \in \sigma(D)$ si y sólo si existe $d \in D$ tal que $h \in d$.
Luego $h \in A$ pues $d \subseteq A$.
Por tanto $\sigma(D) \subseteq A$.
Por otro lado $d_i \subseteq A$ y $d_i \bigcap A_i \neq \phi$.
Pero $d_i \bigcap A_i \subseteq \sigma(D) \bigcap A_i$. Luego $\sigma(D) \in v$.
Por tanto $\sigma[u] \subseteq v$.

TEOREMA. $\eta:(P(P(X)),(T_{B_0})_{B_0}) \rightarrow (P(X),T_{B_0})$ con $\eta(E):= \bigcap E$ y $E \subseteq P(X)$, es semicontinua superiormente.
Referencia **1**.

TEOREMA. Sea $f^{\Delta} := (f^{\square})|_{\mathrm{Y}}$. En donde $\mathrm{Y}:= \{ \{y\} \mid y \in Y \}$. Entonces:
$f^{\square}$ es continua si y sólo si f^{Δ} es continua.

Prueba:
$\Rightarrow$)
La restricción de una función continua a un subespacio es una funcion continua.
$\Leftarrow$)
Se tiene que $\sigma \circ (f^{\Delta})^* = f^{\square}$. En efecto:
$(Y,\Sigma) \cong (\mathrm{Y},(\Sigma_{B_0})_{\mathrm{Y}})$ y $(P(Y),\Sigma_{B_0}) \cong (P(\mathrm{Y}),((\Sigma_{B_0})_{\mathrm{Y}})_{B_0})$.
$f^{\Delta}:(\mathrm{Y},(\Sigma_{B_0})_{\mathrm{Y}}) \rightarrow (P(X),T_{B_0})$.
$(f^{\Delta})^*:(P(\mathrm{Y}),((\Sigma_{B_0})_{\mathrm{Y}})_{B_0}) \rightarrow (P(P(X)),(T_{B_0})_{B_0})$ es continua.
$(f^{\Delta})^*(H) = f^{\Delta}[H] = \{ f^{\square}(\{y\}) \mid \{y\} \in H \} = \{ f^{-1}[\{y\}] \mid \{y\} \in H \}$. Sea $H \in P(\mathrm{Y})$.
$\sigma((f^{\Delta})^*(H)) = \sigma(f^{\Delta}[H]) = \bigcup \{ f^{-1}[\{y\}] \mid \{y\} \in H \} = f^{-1}[H] = f^{\square}(H)$.
Y la composición de funciones continuas es continua.

TEOREMA. $f:\Pi_{0\le i\le n}(X,T)_i \to (P(X),T_{B_0})$ y $n \in \mathbb{N}$ con $f((x_0,\ldots,x_n)) := \{x_0,\ldots,x_n\}$ es continua.

Prueba:
Sea $\langle A_0,\ldots,A_m\rangle \in V_{\{x_0,\ldots,x_n\}}$.

$x_i \in \{x_0,\ldots,x_n\} \subseteq \bigcup_{0\le j\le m} A_j =: A$, luego existe $0 \le K_i \le m$ tal que $x_i \in A_{K_i}$, $0 \le i \le n$.

Y se tiene que $\{x_0,\ldots,x_n\} \bigcap A_j \neq \phi$, $0 \le j \le m$. Por tanto, existe $0 \le l_j \le n$ tal que $x_{l_j} \in A_j$.

Si $B_0 := \bigcap \{ A_k \in \{A_0,\ldots,A_m\} \mid x_0 \in A_k \},\ldots, B_n := \bigcap \{ A_k \in \{A_0,\ldots,A_m\} \mid x_n \in A_k \}$
se tiene que $B_0 \times\ldots\times B_n \in V_{(x_0,\ldots,x_n)}$ y $f[B_0 \times\ldots\times B_n] \subseteq \langle A_0,\ldots,A_m\rangle$.
En efecto:

$f[B_0 \times\ldots\times B_n] = \{ \{y_0,\ldots,y_n\} \mid (y_0,\ldots,y_n) \in B_0 \times\ldots\times B_n \}$, $\{y_0,\ldots,y_n\} \subseteq A$ y $\{y_0,\ldots,y_n\} \bigcap A_j \neq \phi$

pues $y_{l_j} \in B_{l_j} \bigcap A_j$ para cada $0 \le j \le m$.

TEOREMA. $f:(X,T) \to (X,(T_{B_0})_X)$ con $f(x) := \{x\}$ es un homeomorfismo.

Prueba:
f es una función biyectiva.

f es una función continua pues $f^{-1}[(A) \bigcap X] = f^{-1}[[A] \bigcap X] = A$, para cada $A \in T$.

$f[A] = \{ \{a\} \mid a \in A \} = X \bigcap \langle A\rangle$, luego f es una función abierta.
Por tanto f^{-1} es una función continua.

TEOREMA. $\varphi:\prod_{0\leq i\leq n} (P(X),T_{B_0})_i \to (P(X),T_{B_0})$ con $\varphi((E_0,\dots,E_n)) := \bigcup_{0\leq i\leq n} E_i$ y $n \in \mathbb{N}$ es continua.

Prueba:

Sea $\psi:\prod_{0\leq i\leq n} (P(X),T_{B_0})_i \to (P(P(X)),(T_{B_0})_{B_0})$ con $\psi((E_0,\dots,E_n)) := \{E_0,\dots,E_n\}$.

Luego $\sigma(\psi((E_0,\dots,E_n)) = \sigma(\{E_0,\dots,E_n\}) = \bigcup \{E_0,\dots,E_n\} = \bigcup_{0\leq i\leq n} E_i = \varphi((E_0,\dots,E_n))$.

Por tanto $\varphi = \sigma \circ \psi$. Luego φ es continua por ser composición de funciones continuas.

TEOREMA.

$\eta:\prod_{0\leq i\leq n} (P(X),T_{B_0})_i \to (P(X),T_{B_0})$ con $\eta((E_0,\dots,E_n)) := \bigcap_{0\leq i\leq n} E_i$ es semicontinua superiormente.
Referencia **1**.

TEOREMA. Sea $X := \bigcup_{0\leq i\leq n} X_i$ con X_i cerrados de (X,T) y ajenos entre sí y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$\varphi:\prod_{0\leq i\leq n} (P(X_i),(T_i)_{B_1}) \to (P(X),T_{B_1})$ con $\varphi((E_0,\dots,E_n)) := \bigcup_{0\leq i\leq n} E_i$, $E_i \subseteq X_i$ y $T_i := T_{X_i}$, $0 \leq i \leq n$, es un homeomorfismo.

Prueba:

φ es inyectiva. Pues si $p = (D_0,\dots,D_n) \neq (E_0,\dots,E_n) = q$ se tiene que $\varphi(p) \neq \varphi(q)$.

φ es suprayectiva. Pues si $E \subseteq X$, se tiene que $E = \bigcup_{0\leq i\leq n} (E \cap X_i)$.

Por tanto $\varphi((E \cap X_0,\dots,E \cap X_n)) = E$. Luego φ es biyectiva.

φ es continua.

En efecto:

Sea $v := (A) \in V_{\varphi((E_0,\dots,E_n))}$.

Por tanto $(\bigcup_{0\leq i\leq n} E_i) \cap A \neq \phi$. Luego existe $0 \leq j \leq n$ tal que $E_j \cap A \neq \phi$.

Luego, sea $u := ((X_0) \cup \{\phi\}) \times\dots\times \underset{\text{t. lugar j.}}{(A)} \times\dots\times ((X_n) \cup \{\phi\}) \in V_{(E_0,\dots,E_j,\dots,E_n)}$. Entonces $\varphi[u] \subseteq v$.

$\varphi^{-1}:(P(X),T_{B_1}) \to \prod_{0\leq i\leq n} (P(X_i),(T_i)_{B_1})$ con $\varphi^{-1}(E) := (E \cap X_0,\dots,E \cap X_n) = H$ es continua.

En efecto:

Sea $v := ((A_0 \cap X_0) \cup \{\phi\}) \times\dots\times ((A_n \cap X_n) \cup \{\phi\}) \in V_H$ con $A_i \in T$, $0 \leq i \leq n$.

Luego, si $u := (A) \cup \{\phi\}$. En donde $A := \bigcup_{0\leq i\leq n} A_i$. Se tiene que $u \in V_E$ y $\varphi^{-1}[u] \subseteq v$.

TEOREMA.
Sean (Y,Σ) un espacio de Fréchet, $f:(X,T) \to (Y,\Sigma)$ función continua y $f^*:(P(X),T_{Bo}) \to (C(Y),(\Sigma_{Bo})_{C(Y)})$ con $f^*(E) = \overline{f[E]}$.
Son equivalentes:
a. (Y,Σ) es un espacio normal.
b. Para cada espacio (X,T) y cada función continua $f:(X,T) \to (Y,\Sigma)$, $f^*:(P(X),T_{Bo}) \to (C(Y),(\Sigma_{Bo})_{C(Y)})$ es una función continua.

Prueba:

a. $\Rightarrow$ b.
Sea $E \in P(X)$.
Si $E = \phi$, $f^*(\phi) = \phi$. Por tanto $f^*[\{\phi\}] = \{\phi\}$.
Si $E \neq \phi$. Sea $v := \langle A_0,\ldots,A_n\rangle \in V_{f^*(E)}$.
Por tanto $f^*(E) \subseteq \bigcup_{0\le i\le n} A_i$ y $f^*(E) \bigcap A_i \neq \phi$, $0 \le i \le n$.
Por tanto existe $B \in V_{f^*(E)}$ tal que $f[E] \subseteq f^*(E) \subseteq B \subseteq \overline{B} \subseteq \bigcup_{0\le i\le n} A_i$,
$\phi \neq f[E] \bigcap A_i \subseteq f^*(E) \bigcap A_i \subseteq B \bigcap A_i$ y $E \bigcap f^{-1}[B \bigcap A_i] \neq \phi$, $0 \le i \le n$.
Por tanto si $u := \langle f^{-1}[B \bigcap A_0],\ldots,f^{-1}[B \bigcap A_n]\rangle$, entonces $u \in V_E$, pues
$E \subseteq f^{-1}[B] = \bigcup_{0\le i\le n} f^{-1}[B \bigcap A_i]$ y $B = \bigcup_{0\le i\le n} (B \bigcap A_i)$.
Sea $D \in u$, luego $D \subseteq f^{-1}[B]$ y $D \bigcap f^{-1}[B \bigcap A_i] \neq \phi$, $0 \le i \le n$.
Por lo tanto $f[D] \subseteq B$, $\overline{f[D]} \subseteq \overline{B} \subseteq \bigcup_{0\le i\le n} A_i$ y $\phi \neq f[D] \bigcap B \bigcap A_i = f[D] \bigcap A_i \subseteq \overline{f[D]} \bigcap A_i$, $0 \le i \le n$.
Luego $\overline{f[D]} \in v$. Luego $f^*[u] \subseteq v$.
b. $\Rightarrow$ a.
Sea $C \subseteq Y$ cerrado y $X := Y$ con $T := P(Y-C) \bigcup T'$.
En donde $T' := \{ D \subseteq Y \mid \phi \neq D \bigcap C = B \bigcap C$ para alguna $B \in \Sigma$ con $B \subseteq D \}$.
T es topología en X.
$i:(X,T) \to (Y,\Sigma)$ con $i(x) := x$, es continua, pues $\Sigma \subseteq T$.
$(i)^*:(P(X),T_{Bo}) \to (C(Y),(\Sigma_{Bo})_{C(Y)})$ con $(i)^*(E) = \bar{E}$ es continua.
Luego sea v vecindad de C en Σ, para $[v] \bigcap C(Y) \in V_C$ en $(\Sigma_{Bo})_{C(Y)}$, existe $u := \langle A_0,\ldots,A_n\rangle \in V_C$ en T_{Bo} tal que $(i)^*[u] \subseteq [v] \bigcap C(Y)$.
Sea $A := \bigcup_{0\le i\le n} A_i$, como $A \in u$, se tiene que $(i)^*(A) = \bar{A} \in [v]$.
Esto es $\bar{A} \subseteq v$. Por tanto $C \subseteq A \subseteq \bar{A} \subseteq v$.

TEOREMA. Si $(X = Y, T = \Sigma)$ es un espacio normal y $f = 1_X$, entonces $f^* = (1_X)^*$ es una retracción de $(P(X),T_{Bo})$ a $(C(X),(T_{Bo})_{C(X)})$.

Prueba:

$$
\begin{tikzcd}
(C(X),(T_{Bo})_{C(X)}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_{C(X)}"'] & (P(X),T_{Bo}) \arrow[dl, "f^*"] \\
(C(X),(T_{Bo})_{C(X)}) &
\end{tikzcd}
\quad , \; i(E) = E.
$$

$f^*(i(E)) = f^*(E) = \overline{f(E)} = \bar{E} = E = 1_{C(X)}(E)$.
Por tanto $(1_X)^* \circ i = 1_{C(X)}$.

Las escalas son ejemplos de funciones multivaluadas y permiten dar caracterizaciones simples de los espacios topológicos completamente regulares, perfectamente normales y pseudocompactos en términos de sus conjuntos conulos, como se mostrará a continuación.

Definiciones: Sean $D = [0,1]$ y (X,T) un espacio topológico.
Una función $\varphi:(D,\leq) \to P(X)$ tal que para cada $d \in D$ y cada $e \in D$ mayor a d se tiene que $\overline{\varphi(d)} \subseteq \dot{\varphi}(e)$, se llama una escala en (X,T).
El conjunto $N(\varphi) := \bigcap \varphi[D]$ se llama núcleo de la escala φ.

TEOREMA. La función $\varphi^c:(D,\leq) \to P(X)$ en donde $\varphi^c(d) := (\varphi(1-d))^c$ es una escala en (X,T). φ^c se llama la escala complementaria de φ.

Prueba: Se tiene que si $e \in D$ es mayor a $d \in D$ entonces $\dot{\varphi}(1-e) \subseteq \overline{\varphi(1-e)} \subseteq \dot{\varphi}(1-d) \subseteq \overline{\varphi(1-d)}$ pues $1-d \in D$ es mayor a $1-e \in D$. Luego $\overline{(\varphi(1-d))^c} \subseteq (\dot{\varphi}(1-d))^c \subseteq \overline{(\varphi(1-e))^c} \subseteq (\dot{\varphi}(1-e))^c$

TEOREMA. Si $\phi \notin \varphi[D]$ entonces $\varphi[D]$ es una base de filtro en (X,T) y $N(\varphi)$ = puntos de adherencia de $\varphi[D]$.

Prueba: Sea x punto de adherencia de $\varphi[D]$. Por tanto $x \in \overline{\varphi(d)}$, para cada $d \in D$. Por tanto existe $f_d \in D$ tal que es menor a d. Por tanto $x \in \overline{\varphi(f_d)} \subseteq \dot{\varphi}(d) \subseteq \varphi(d)$. Por tanto $x \in \bigcap \varphi[D]$.
Sea $x \in \bigcap \varphi[D]$. Por tanto $x \in \varphi(d) \subseteq \overline{\varphi(d)}$, para cada $d \in D$.
Por tanto $x \in (\bigcap_{d \in D} \overline{\varphi(d)})$ = puntos de adherencia de $\varphi[D]$.

TEOREMA. Sean $f:(X,T) \to [0,1]$ una función continua y $\varphi_f:(D,\leq) \to P(X)$ en donde $\varphi_f(d) := f^{-1}[[0,d]]$, $d \in D$.

Entonces: φ_f es una escala en (X,T), $N(\varphi_f) = f^{-1}[\{0\}]$ y $N(\varphi_f^c) = f^{-1}[\{1\}]$.

Referencia **7**.

TEOREMA. Si $\varphi:(D,\leq) \to P(X)$ es una escala en (X,T) entonces existe una función continua $f:(X,T) \to [0,1]$ tal que $f^{-1}[\{0\}] = N(\varphi)$ y $f^{-1}[\{1\}] = N(\varphi^c)$.

Referencia **7**.

Definición: Un subconjunto C de (X,T) es un conjunto nulo de (X,T) ssi es el núcleo de alguna escala φ en (X,T).

Definición: Un subconjunto C de (X,T) es un conjunto conulo ssi su complemento es un conjunto nulo de (X,T).

OBSERVACIONES: Los conjuntos nulos (conulos) son cerrados (abiertos) y G_δ (F_σ). ϕ y X son conjuntos nulos y conulos.

TEOREMA. Sea (X,T) un espacio normal y C un subconjunto de (X,T). C es cerrado (abierto) y G_δ (F_σ) en (X,T) si y sólo si C es un conjunto nulo (conulo) de (X,T).

Prueba:

$\Rightarrow$) Sean $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots$ abiertos de (X,T) tales que $C = \bigcap_{n \in N} A_n$.
Se tiene entonces que por el Lema de Urysohn, para cada $n \in N$ existe una función continua $f_n:(X,T) \to [0,1]$ tal que $C \subseteq f_n^{-1}[\{0\}]$ y $A_n^c \subseteq f_n^{-1}[\{1\}]$.
Sea $f:(X,T) \to \mathbb{R}$ con $f(x) := \Sigma_{n \in N} 2^{-n-1} f_n(x)$.
$0 \leq f_n(x) \leq 1$ si y sólo si $0 \leq 2^{-n-1} f_n(x) \leq 2^{-n-1}$. Para cada $n \in N$.
Se tiene que $0 \leq f(x) \leq \Sigma_{n \in N} 2^{-n-1} = 1$. Por tanto $f:(X,T) \to [0,1]$ y $C = f^{-1}[\{0\}]$. En efecto:
Si $x \in C$ entonces $f_n(x) = 0$, para cada $n \in N$ y por tanto $f(x) = 0$.
Si $f(x) = 0$ y $x \notin C$ entonces existe $m \in N$ tal que $x \notin A_m$. Por tanto $f_m(x) = 1$ y $f(x) \geq 2^{-m-1} f_m(x) = 2^{-m-1} > 0$ y esto es una contradicción.
f es continua y se tiene que $N(\varphi_f) = f^{-1}[\{0\}] = C$.

$\Leftarrow$) Sea $C = N(\varphi)$, para alguna escala φ en (X,T). Por tanto existe una función continua $f:(X,T) \to [0,1]$ tal que $C = N(\varphi) = f^{-1}[\{0\}]$.
Dado que $\{0\} = \bigcap_{n \in N} (-1/n+1, 1/n+1)$. Se tiene que $f^{-1}[\{0\}] = \bigcap_{n \in N} f^{-1}[(-1/n+1, 1/n+1)]$.
Por tanto C es un conjunto cerrado y G_δ en (X,T).

Sea (X,T) un espacio de Fréchet.

TEOREMA. (X,T) es un espacio de Tychonoff si y sólo si el conjunto de conjuntos conulos de (X,T) es una base de T.

Prueba:

$\Rightarrow$) Sean $A \in T$ y $x \in A$. Luego existe una función continua $f:(X,T) \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $A^c \subseteq f^{-1}[\{0\}]$. Sea $B := (f^{-1}[\{0\}])^c$. B es un conjunto conulo de (X,T) y $x \in B \subseteq A$.

$\Leftarrow$) Sea $C \subseteq X$ cerrado no vacío y $x_0 \in C^c$. Luego existe un conjunto conulo B de (X,T) tal que $x_0 \in B \subseteq C^c$.
Luego existe una función continua $f:(X,T) \to [0,1]$ tal que $B^c = f^{-1}[\{0\}]$.
Por tanto $C \subseteq f^{-1}[\{0\}]$ y $f(x_0) \neq 0$.
Se tiene que la función $g:(X,T) \to [0,1]$ con $g(x) := \min\{1, f(x)/f(x_0)\}$ es continua, $C \subseteq g^{-1}[\{0\}]$ y $g(x_0) = 1$.

Definición: Sea **B** base de la topología T en el espacio X.
B es base normal de T ssi:
1. Si $x \in B \in$ **B** entonces existe $A \in$ **B** tal que $x \in A^C \subseteq B$.
2. Si A y $B \in$ **B** entonces $A \cap B \in$ **B** y $A \cup B \in$ **B**.
3. Si A y $B \in$ **B** son tales que A^C y B^C son ajenos, entonces existen L y $M \in$ **B** ajenos tales que $L^C \subseteq A$ y $M^C \subseteq B$.

TEOREMA. (X,T) es un espacio de Tychonoff si y sólo si T tiene una base normal.

Prueba:

$\Rightarrow$) Si (X,T) es un espacio de Tychonoff entonces el conjunto de conjuntos conulos de (X,T) es una base normal de T.

$\Leftarrow$) Sean **B** una base normal de T, $C \subseteq X$ cerrado no vacío y $x \in C^c$. Sea $B \in$ **B** tal que $x \in B \subseteq C^c$. Por ser **B** una base normal de T, existe $A \in$ **B** tal que $x \in A^C \subseteq B$ y existe una función continua $f:(X,T) \to [0,1]$ tal que $A^c \subseteq f^{-1}[\{1\}]$ y $B^c \subseteq f^{-1}[\{0\}]$. Por tanto $f(x) = 1$ y $C \subseteq B^c \subseteq f^{-1}[\{0\}]$.

TEOREMA. (X,T) es un espacio normal si y sólo si T es base normal.

Prueba:

$\Rightarrow$) T es base de T y la primera y tercera condición de la definición de base normal se cumplen por la propiedad de separación de conjuntos cerrados ajenos en los espacios normales.
La segunda condición se cumple pues T es una topología.

$\Leftarrow$) Si T es base normal entonces la propiedad de separación de conjuntos cerrados ajenos es equivalente a la tercera condición de la definición de base normal.

TEOREMA. (X,T) es un espacio completamente normal si y sólo si todo subespacio de (X,T) es un espacio normal.

Prueba:

⇒) Sean $E \subseteq X$, G_0 y G_1 subconjuntos cerrados ajenos de (E,T_E). Es decir $G_0 = C_0 \cap E$ y $G_1 = C_1 \cap E$ con C_0 y C_1 subconjuntos cerrados de (X,T). Se tiene que G_0 y G_1 son subconjuntos separados de (X,T), pues $(\bar{G}_0 \cap G_1) \cup (G_0 \cap \bar{G}_1) \subseteq (C_0 \cap G_1) \cup (C_1 \cap G_0) = C_0 \cap C_1 \cap E = G_0 \cap G_1 = \phi$.
Por tanto existen subconjuntos A_0 y A_1, abiertos ajenos de (X,T), tales que $G_0 \subseteq A_0$ y $G_1 \subseteq A_1$.
Por tanto $G_0 \subseteq A_0 \cap E$ y $G_1 \subseteq A_1 \cap E$. Por tanto (E,T_E) es un espacio normal.

⇐) Sean G_0 y G_1 subconjuntos separados de (X,T) y $E := X - ((\bar{G}_0 - G_0) \cup (\bar{G}_1 - G_1))$. Se tiene que G_0 y G_1 son subconjuntos cerrados ajenos de (E,T_E). Por tanto como este subespacio es normal, existen subconjuntos A_0 y A_1 abiertos de (X,T) tales que $G_0 \subseteq A_0 \cap E$ y $G_1 \subseteq A_1 \cap E$ y estos abiertos relativos son ajenos.
Por tanto se tiene que $G_0 \subseteq A_0 \cap \bar{G}_1^{\,C}$ y $G_1 \subseteq A_1 \cap \bar{G}_0^{\,C}$ y estos abiertos son ajenos.

TEOREMA. (X,T) es un espacio perfectamente normal si y sólo si T es el conjunto de conjuntos conulos de (X,T).

Prueba:

⇒) Un conjunto conulo es un conjunto abierto y un conjunto abierto es un conjunto F_σ y por tanto es un conjunto conulo, por ser el espacio normal.

⇐) T es base de T, por tanto el espacio es de Tychonoff y luego entonces el conjunto de conjuntos conulos es base normal del espacio. Por tanto T es base normal y luego el espacio es normal. Luego todo conjunto cerrado es nulo y por tanto G_δ .

TEOREMA. (X,T) es un espacio pseudocompacto si y sólo si toda familia localmente finita de conjuntos conulos de (X,T) es finita.

Prueba:

⇒) Sea H una familia infinita y localmente finita de conjuntos conulos no vacíos de X. Se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ diferente de cero, existen $H_n \in H$ y $f_n:(X,T) \to [0,n]$ continua tal que $f_n^{-1}[\{0\}] = H_n^{C}$ y $f_n^{-1}[\{n\}] \neq \phi$. Por tanto la función $f:(X,T) \to \mathbb{R}$ con $f(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ es continua y no acotada.

⇐) Si (X,T) no es un espacio pseudocompacto entonces existe una función continua, no acotada y positiva $f:(X,T) \to \mathbb{R}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ diferente de cero, existe $x_n \in X$ con $f(x_n) > f(x_{n-1}) + 1$.
$\{ f^{-1}[(f(x_n) - 1/2, f(x_n) + 1/2)] \mid n \in \mathbb{N} \}$ es una familia infinita y localmente finita de conjuntos conulos.

TEOREMA. (X,T) es un espacio de Tychonoff si y sólo si el conjunto $\mathcal{U}$ de cubiertas finitas con conjuntos conulos de (X,T), es una uniformidad de X compatible con T.

Referencia **7**.

La compactificación de Stone - Čech de un espacio de Tychonoff.

Se define en base en los ultrafiltros sobre el conjunto de sus conjuntos nulos.
Sean (X,T) un espacio de Tychonoff, N(X):= conjunto de conjuntos nulos de (X,T),
$\beta(X) := \{ \mathcal{F} \subseteq P(X) \mid \mathcal{F}$ es ultrafiltro sobre N(X) $\}$, $\tilde{E} := \{ \mathcal{F} \in \beta(X) \mid F \subseteq E$ para alguna $F \in \mathcal{F} \}$ y
$\mathcal{B} := \{ \tilde{E}^c \mid E \in N(X) \}$. $\mathcal{B}$ es base de topología en $\beta(X)$.
$(\beta(X),T_{\mathcal{B}})$ es un espacio compacto y de Hausdorff.
$\varphi:(X,T) \to (\beta(X),T_{\mathcal{B}})$ con $\varphi(x) := \{ E \in N(X) \mid x \in E \}$, es inyectiva, abierta y continua.
$\varphi[X]$ es denso en $\beta(X)$.
$(\beta(X),T_{\mathcal{B}},\varphi)$ es la compactificación de Stone – Čech de (X,T) y posee la propiedad universal.

Sean (X,T) un espacio de Fréchet y (X^*,T^*) su compactificación de Alexandrov.

Esto es: $X^* := X \bigcup \{\infty\}$, $\infty \notin X$. $P(X^*) = P(X) \bigcup \mathcal{F}_{\{\{\infty\}\}}$.

$\mathcal{F}_{\{\{\infty\}\}} := \{ E \bigcup \{\infty\} \mid E \subseteq X \} = \{ D \subseteq X^* \mid \infty \in D \}$.

$T^* := T \bigcup \{ A \bigcup \{\infty\} \mid A \in T$ y A^C es compacto $\}$. T^* es topología en X^*.

OBSERVACIONES:

(X^*,T^*) es espacio compacto y de Fréchet.

$\{\infty\}$ es cerrado en (X^*,T^*).

(X,T) es espacio localmente compacto y de Hausdorff si y sólo si (X^*,T^*) es espacio de Hausdorff.

(X,T) es espacio compacto si y sólo si $\{\infty\}$ es un punto aislado en (X^*,T^*).

(X^*,T^*) es metrizable y separable si y sólo si (X,T) es espacio localmente compacto, de Hausdorff y completamente separable.

El filtro generado por $\{\infty\}$ en X^* se denota por $\mathcal{F}_\infty$ y $\mathcal{F}_\infty - \{\{\infty\}\}$ se denota por $\mathcal{F}$.

TEOREMA. $\mathcal{F}_\infty$ es cerrado en $(P(X^*),(T^*)_{B0})$.

Prueba:

$(\mathcal{F}_\infty)^C = P(X) = [X] \in T_{B0} \subseteq (T^*)_{B0}$.

COROLARIO. $(\mathcal{F}_\infty,((T^*)_{B0})_{\mathcal{F}\infty})$ es un espacio compacto.

Prueba: Todo cerrado en un espacio compacto es un espacio compacto.

TEOREMA. Si (X,T) es un espacio compacto entonces $(\mathcal{F},((T^*)_{B0})_{\mathcal{F}})$ es un espacio compacto.

Prueba:

$\mathcal{F}^C = P(X) \bigcup \{\{\infty\}\} = [X] \bigcup \langle\{\infty\}\rangle$ es abierto.

Por tanto $\mathcal{F}$ es cerrado en $(P(X^*),(T^*)_{B0})$.

TEOREMA. Si (X,T) es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces

$$(\mathcal{F}_\infty \bigcap C(X^*),((T^*)_{B0})_{\mathcal{F}\infty \cap C(X^*)})$$ es un espacio compacto y de Hausdorff.

Prueba:

$(C(X^*),((T^*)_{B0})_{C(X^*)})$ es un espacio compacto, y es de Hausdorff por ser (X^*,T^*) un espacio regular, (pues es un espacio normal por ser un espacio compacto y de Hausdorff).

Por tanto $F_\infty \bigcap C(X^*)$ es un espacio compacto por ser la intersección de espacios compactos, y es de Hausdorff por ser ésta una propiedad hereditaria.

TEOREMA. Si (X,T) es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, entonces $(F \cap C(X^*),((T^*)_{B0})_{F \cap C(X^*)})$ es un espacio localmente compacto y de Hausdorff.

Prueba:

$(F_\infty - F) \cap C(X^*) = \{\{\infty\}\} = \langle\{\infty\}\rangle$ es cerrado en $(F_\infty \cap C(X^*),((T^*)_{B0})_{F\infty \cap C(X^*)})$.

Por tanto $F \cap C(X^*)$ es abierto en este espacio, que es localmente compacto (por ser compacto) y regular, y es de Hausdorff por ser ésta una propiedad hereditaria.

por ser normal

La topología de Fell nos permite dar una descripción más simple de los espacios anteriores, como se mostrará a continuación.

TEOREMA. Sea $\varphi:(C(X) - \{\phi\},(T_{B4})_{C(X) - \{\phi\}}) \rightarrow (F \cap C(X^*),((T^*)_{B0})_{F \cap C(X^*)})$ con $\varphi(E):= E \cup \{\infty\}$. Si (X,T) es un espacio localmente compacto y de Hausdorff entonces φ es un homeomorfismo.

Prueba:

$D \neq E$ si y sólo si $\varphi(D):= D \cup \{\infty\} \neq E \cup \{\infty\} =:\varphi(E)$. Por tanto φ es inyectiva.

$\varphi[C(X) - \{\phi\}] = F \cap C(X^*)$. Por tanto φ es suprayectiva.

Por tanto φ es biyectiva.

Sea $A \in T$ tal que $\bar{A}$ es compacto.

$\varphi[(A) \cap C(X)] = (A) \cap F \cap C(X^*)$ es abierto relativo.

$\varphi[\langle\bar{A}^c\rangle \cap C(X)] = \langle\bar{A}^c \cup \{\infty\}\rangle \cap F \cap C(X^*)$ es abierto relativo.

Luego, φ es una función abierta. Por tanto, φ^{-1} es una función continua.

Sea $B \in T$.

Para cada $b \in B$, existe $u_b \in V_b$ abierta tal que $\bar{u}_b$ es compacto y $\bar{u}_b \subseteq B$, luego $(B) = \bigcup_{b \in B} (u_b)$ y

$\varphi^{-1}[(B) \cap F \cap C(X^*)] = (B) \cap C(X) = (\bigcup_{b \in B} (u_b)) \cap C(X)$ es abierto relativo.

El abierto relativo $[B] \cap F \cap C(X^*)$ es vacío.

Sea $B \in T$ tal que B^c es compacto.

$(B \cup \{\infty\}) \cap F \cap C(X^*) = F \cap C(X^*)$.

$\varphi^{-1}[F \cap C(X^*)] = C(X) - \{\phi\}$ es abierto relativo.

$\varphi^{-1}[[B \cup \{\infty\}] \cap F \cap C(X^*)] = \langle B\rangle \cap C(X)$ es abierto relativo.

Sea $E \in \langle B\rangle \cap C(X)$. Por tanto $\phi \neq E \subseteq B$ si y sólo si $B^c \subseteq E^c \in T$. Luego existe $A_E \in T$ tal que $\bar{A}_E$ es compacto y $B^c \subseteq A_E \subseteq \bar{A}_E \subseteq E^c$ si y sólo si $E \subseteq (\bar{A}_E)^c \subseteq (A_E)^c \subseteq B$.

Por tanto, $\langle B\rangle \cap C(X) = \bigcup_{E \in \langle B\rangle \cap C(X)} \langle(\bar{A}_E)^c\rangle \cap C(X)$.

Luego, φ^{-1} es una función abierta. Por tanto, φ es una función continua.

COROLARIO. Si (X,T) es un espacio localmente compacto y de Hausdorff entonces $(C(X) - \{\phi\},(T_{B4})_{C(X) - \{\phi\}})$ es un espacio localmente compacto y de Hausdorff.

Prueba: El espacio codominio de la función φ del teorema anterior es un espacio localmente compacto y de Hausdorff.

TEOREMA. Sea $\psi:(C(X),(T_{B4})_{C(X)}) \rightarrow (F_\infty \bigcap C(X^*),((T^*)_{B0})_{F\infty \bigcap C(X^*)})$ con $\psi(E):= E \bigcup \{\infty\}$. Si (X,T) es un espacio compacto y de Hausdorff entonces ψ es un homeomorfismo.

Prueba: $\psi|_{C(X) - \{\phi\}} = \varphi$ y $\varphi[\{\phi\}] = \{\{\infty\}\} = \langle\{\infty\}\rangle \bigcap F_\infty \bigcap C(X^*)$ es abierto.

COROLARIO. Si (X,T) es un espacio compacto y de Hausdorff entonces $(C(X),(T_{B4})_{C(X)})$ es un espacio compacto y de Hausdorff.

Prueba: El espacio codominio de la función ψ del teorema anterior es un espacio compacto y de Hausdorff.

COROLARIO. Si (X,T) es un espacio compacto y de Hausdorff entonces $(C(X) - \{\phi\},(T_{B4})_{C(X) - \{\phi\}})$ es un espacio compacto y de Hausdorff.

Prueba: $C(X) - \{\phi\}$ es cerrado en $(C(X),(T_{B4})_{C(X)})$, por tanto es un espacio compacto, y es de Hausdorff por ser ésta una propiedad hereditaria.

fin

Sean D, E, $E_i \subseteq X$ para cada $i \in I$.

$[E] = \langle E \rangle \cup \{\Phi\}$.

$\langle E_0,\dots,E_n \rangle = (E_0, \dots,E_n) \cap [E]$ con $E := \bigcup_{0 \le i \le n} E_i$.

$(E_0,\dots,E_n) = \langle X,E_0,\dots,E_n \rangle = (E_0) \cap \dots \cap (E_n)$.

$\langle E \rangle^c = (E^c) \cup \{\Phi\}$.

$\langle E_0,\dots,E_n \rangle^c = (E^c) \cup [E_0{}^c] \cup \dots \cup [E_n{}^c]$ con $E := \bigcup_{0 \le i \le n} E_i$.

$(E_0,\dots,E_n)^c = [E_0{}^c] \cup \dots \cup [E_n{}^c]$.

$[E]^c = (E^c)$.

$\langle \bigcap_{i \in I} E_i \rangle = \bigcap_{i \in I} \langle E_i \rangle$. $\langle D,E \rangle = \langle E,D \rangle$.

$(\bigcup_{i \in I} E_i) = \bigcup_{i \in I} (E_i)$. $(D,E) = (E,D)$.

$[\bigcap_{i \in I} E_i] = \bigcap_{i \in I} [E_i]$. $\langle D,D,E \rangle = \langle D,E \rangle$.

$\bigcup_{i \in I} \langle E_i \rangle \subseteq \langle \bigcup_{i \in I} E_i \rangle$. $(D,D,E) = (D,E)$.

$(\bigcap_{i \in I} E_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} (E_i)$. $\langle E,E \rangle = \langle E \rangle$.

Si $\bigcap_{i \in I} E_i \neq \Phi$ entonces $(\bigcap_{i \in I} E_i) = \bigcap_{i \in I} (E_i)$. $(E,E) = (E)$.

$\bigcup_{i \in I} [E_i] \subseteq [\bigcup_{i \in I} E_i]$.

$(D) \cap [E] = (D) \cap \langle E \rangle = \langle D \cap E,E \rangle$.

$\langle E_0 \cap E,\dots,E_n \cap E \rangle = \langle E_0,\dots,E_n \rangle \cap P(E)$.

$D \subseteq E$ si y sólo si $\langle D \rangle \subseteq \langle E \rangle$. / $(D) \subseteq (E)$. / $[D] \subseteq [E]$.

$D \neq E$ si y sólo si $\langle D \rangle \neq \langle E \rangle$. / $(D) \neq (E)$. / $[D] \neq [E]$.

En donde E^c es el complemento de E.

Sea $H \subseteq P(X)$ tal que $J(X) \subseteq H$. En $(H,(T_{B_0})_H)$ se tiene que:

TEOREMA. $\overline{\langle E_0,\dots,E_n\rangle} = \langle \bar{E}_0,\dots,\bar{E}_n\rangle$.

Prueba:

Sean $D \in \langle \bar{E}_0,\dots,\bar{E}_n\rangle$ y $\langle A_0,\dots,A_m\rangle \cap H \in V_D$. $E := \bigcup_{0\le i\le n} E_i$ y $A := \bigcup_{0\le j\le m} A_j$.
Luego $D \subseteq \bar{E} \cap A$, $D \cap \bar{E}_i \neq \Phi$, $0 \le i \le n$ y $D \cap A_j \neq \Phi$, $0 \le j \le m$.
Por lo tanto $A \cap \bar{E}_i \neq \Phi$, $0 \le i \le n$ y $A_j \cap \bar{E} \neq \Phi$, $0 \le j \le m$.
Luego existe $p_i \in A \cap E_i$, $0 \le i \le n$ y existe $q_j \in A_j \cap E$, $0 \le j \le m$. Sea entonces $F := \{p_0,\dots,p_n,q_0,\dots,q_m\}$.
Por lo tanto $F \in \langle E_0,\dots,E_n\rangle \cap \langle A_0,\dots,A_m\rangle \cap H$.

Luego $D \in \overline{\langle E_0,\dots,E_n\rangle}$. Por lo tanto $\langle \bar{E}_0,\dots,\bar{E}_n\rangle \subseteq \overline{\langle E_0,\dots,E_n\rangle}$.
Por otro lado se tiene que $\langle E_0,\dots,E_n\rangle \subseteq \langle \bar{E}_0,\dots,\bar{E}_n\rangle$ y $\langle \bar{E}_0,\dots,\bar{E}_n\rangle$ es cerrado, pues
$\langle \bar{E}_0,\dots,\bar{E}_n\rangle^c = ((\bar{E})^c) \cup [(\bar{E}_0)^c] \cup \dots \cup [(\bar{E}_n)^c]$ es abierto.

Por lo tanto $\overline{\langle E_0,\dots,E_n\rangle} \subseteq \langle \bar{E}_0,\dots,\bar{E}_n\rangle$.

COROLARIO. $\overline{(E_0,\dots,E_n)} = (\bar{E}_0,\dots,\bar{E}_n)$.

Prueba:
$(E_0,\dots,E_n) = \langle X,E_0,\dots,E_n\rangle$.
Luego $\overline{(E_0,\dots,E_n)} = \overline{\langle X,E_0,\dots,E_n\rangle} = \langle X,\bar{E}_0,\dots,\bar{E}_n\rangle = (\bar{E}_0,\dots,\bar{E}_n)$.

COROLARIO. $\overline{[E]} = [\bar{E}]$.

Prueba:

$[E] = \langle E\rangle \cup \{\Phi\}$ luego $\overline{[E]} = \overline{\langle E\rangle \cup \{\Phi\}} = \overline{\langle E\rangle} \cup \overline{\{\Phi\}} = \langle \bar{E}\rangle \cup \{\Phi\} = [\bar{E}]$.

COROLARIO. $\dot{\langle E_0,\dots,E_n\rangle} = (\dot{E}_0,\dots,\dot{E}_n) \cap [\dot{E}]$ con $E := \bigcup_{0\le i\le n} E_i$.

Prueba:

$\dot{\langle E_0,\dots,E_n\rangle} = (\overline{\langle E_0,\dots,E_n\rangle^c})^c = (\overline{(E^c) \cup [E_0^c] \cup \dots \cup [E_n^c]})^c =$
$= ((\overline{E^c}) \cup [\overline{E_0^c}] \cup \dots \cup [\overline{E_n^c}])^c = [(\overline{E^c})^c] \cap ((\overline{E_0^c})^c) \cap \dots \cap ((\overline{E_n^c})^c) =$
$= [\dot{E}] \cap (\dot{E}_0,\dots,\dot{E}_n)$ pues $(\overline{E^c})^c = \dot{E}$.

En donde $\dot{E}$ es el interior de E y $\bar{E}$ es la cerradura de E en la topología T.

TEOREMA. E es cerrado si y sólo si $\langle E \rangle$ es cerrado.

Prueba:

$E = \bar{E}$ si y sólo si $\langle E \rangle = \langle \bar{E} \rangle = \overline{\langle E \rangle}$.

TEOREMA. E es cerrado si y sólo si (E) es cerrado.

Prueba:

$E = \bar{E}$ si y sólo si $(E) = (\bar{E}) = \langle X, \bar{E} \rangle = \overline{\langle X, E \rangle} = \overline{(E)}$.

TEOREMA. E es cerrado si y sólo si [E] cerrado.

Prueba:

$E = \bar{E}$ si y sólo si $[E] = [\bar{E}] = \overline{[E]}$.

COROLARIO. E es abierto si y sólo si $\langle E \rangle$ es abierto.

Prueba:

E es abierto si y sólo si E^c es cerrado si y sólo si (E^c) es cerrado si y sólo si $(E^c) \cup \{\Phi\}$ es cerrado si y sólo si $\langle E \rangle^c$ es cerrado si y sólo si $\langle E \rangle$ es abierto.

COROLARIO. E es abierto si y sólo si (E) es abierto.

Prueba:

E es abierto si y sólo si E^c es cerrado si y sólo si $[E^c] = (E)^c$ es cerrado si y sólo si (E) es abierto.

COROLARIO. E es abierto si y sólo si [E] es abierto.

Prueba:

E es abierto si y sólo si E^c es cerrado si y sólo si $(E^c) = [E]^c$ es cerrado si y sólo si [E] es abierto.

BIBLIOGRAFÍA.

1. MICHAEL, E. TOPOLOGIES ON SPACES OF SUBSETS. TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. VOLUME 71. 1951. PP. 152-182.

2. MARJANOVIĆ, M. M. TOPOLOGIZING THE HYPERSETS. PUBLICATION DE L´INSTITUT MATHÉMATIQUE. NOUVELLE SÉRIE, TOME 11. (25). 1971. PP. 123-134.

3. SEKANINA, MILAN. TOPOLOGIES ON SYSTEMS OF SUBSETS. GENERAL TOPOLOGY AND ITS RELATIONS TO MODERN ANALYSIS AND ALGEBRA II. PROCEEDINGS OF THE SECOND PRAGUE TOPOLOGICAL SYMPOSIUM. 1966. PP. 420-424.

4. HANDBOOK OF SET-THEORETIC TOPOLOGY. EDITED BY K. KUNEN AND J. E. VAUGHAN. NORTH-HOLLAND. 1984. P. 711.

5. SET-THEORETIC TOPOLOGY. EDITED BY GEORGE M. REED. ACADEMIC PRESS. 1977. P. 111.

6. KEESLING, J. E. NORMALITY AND PROPERTIES RELATED TO COMPACTNESS IN HYPERSPACES. PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. VOLUME 24. 1970. PP. 760-766.

7. GARCÍA-MÁYNEZ, ADALBERTO Y TAMARIZ MASCARÚA, ÁNGEL. TOPOLOGÍA GENERAL. EDITORIAL PORRÚA, S. A. MÉXICO. 1988.

8. HINRICHSEN, D Y FERNÁNDEZ, J. L. TOPOLOGÍA GENERAL. EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN. LA HABANA. CUBA. 1977.

9. HOCKING, J. G Y YOUNG, G. S. TOPOLOGÍA. EDITORIAL REVERTÉ. S. A. 1966.

10. HU, SHOUCHUAN AND S. PAPAGEORGIOU, NIKOLAS. HANDBOOK OF MULTIVALUED ANALYSIS. VOLUMEN I: THEORY. MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS. ED. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS. 1977.

11. KELLEY, J. L. GENERAL TOPOLOGY. VAN NOSTRAND. NEW YORK. 1955.

12. KURATOWSKI, K. TOPOLOGY. VOL. I. PWN. WARSZAWA ACADEMIC PRESS. NEW YORK AND LONDON. 1966.

13. KURATOWSKI, K. TOPOLOGY. VOL. II. PWN. WARSZAWA ACADEMIC PRESS. NEW YORK AND LONDON. 1968.

14. SALICRUP, GRACIELA. INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA. SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA. TEXTOS. 1993.

15. S. B. NADLER, Jr. HYPERSPACES OF SETS. MONOGRAPHS AND TEXTBOOKS IN PURE AND APPLIED MATHEMATICS. VOLUME 49. MARCEL DEKKER. INC. N. Y. 1978.

16. ENGELKING, R. GENERAL TOPOLOGY. SIGMA SERIES IN PURE MATHEMATICS. VOLUME 6. HELDERMANN VERLAG BERLIN. 1989.