UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE ALGUNAS GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA DE LA MEDIDA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

HECTOR JIMENEZ SANCHEZ

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. VINICIO ANTONIO GOMEZ GUTIERREZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Sobre algunas generalizaciones del problema de la medida"

realizado por Héctor Jiménez Sánchez

con número de cuenta 08517906-4 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemático

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C.	Vinicio Antonio Gómez Gutiérrez	HAGómez G.
Propietario	Dr.	Santiago López de Medrano Sánchez	
Propietario	Dra.	Guadalupe Carrasco Licea	
Suplente	Dr.	Juan González Hernández	
Suplente	Mat.	Luz Arely Carrillo Olivera	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica.

FACULTAD
CONSEJO
MATEMATICAS

A mi madre ***Ángela***
de quien todavía tengo la dicha de contar con su presencia.
Por todo su cariño y a quien le debo lo que soy.

A la memoria de mi padre ***Juan***
de quien tuve tanto y a quien le debo lo que soy.

A mis hermanos ***Sonia, Rosalba, Alma, Hugo*** *y* ***Sergio***
por todo su cariño, apoyo y comprensión.

A ***Arely, Mary, Lety*** *y* ***Martitha***
por su amistad.

A todos mis amigos
por la amistad que me han brindado todos estos años.

Al **C.G.H.**
por todos estos años de lucha y resistencia.
Por su valor estoico.

"...Te doy una canción si abro una puerta
y de la sombra sales tú.
Te doy una canción de madrugada
Cuando más quiero tu ***Luz****"*

S. Rodríguez.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está dirigido principalmente a estudiantes de la carrera de Matemáticas de nivel intermedio (quienes hayan cursado Análisis matemático I y II, en el caso de la facultad de Ciencias) y a estudiantes que tengan una formación en el área de Análisis matemático equivalente al mencionado.

La intención de este trabajo es exponer de manera breve y clara resultados, a mi parecer importantes de Teoría de la medida; además de mostrar también, de manera breve y general, hasta dónde ha llegado la discusión sobre estos resultados. En particular, se expone un resultado poco conocido incluso entre quienes se dedican al Análisis matemático, a saber, el Teorema de Banach y Kuratowski..

Para la presentación de dichos resultados, se ha dividido el trabajo en cinco capítulos, tratando de respetar en lo general, las ideas de los autores. En el primer capítulo se da una motivación histórica mostrando, a grosso modo, cómo surge el concepto de medida y cómo surge la Teoría de la medida misma. Situándonos en el siglo XVIII, a partir de un cambio sustancial en el concepto de función y por ende, un cambio dentro del concepto de integral de una función, se da lugar lugar al surgimiento de una nueva Teoría.

En el segundo capítulo, se presentan las aportaciones de Lebesgue a la Teoría de la medida, se hace notar que dichas aportaciones le permitieron al autor desarrollar, a su vez, una de las Teorías de integración más importantes hasta nuestros tiempos. También se plantea en este capítulo lo que se conoce como el "problema de la medida" y la manera en que Lebesgue aborda este punto.

En el tercer capítulo, se presenta la respuesta al problema de la medida dada por Vitali y, como consecuencia, una generalización de dicho problema planteada por Banach; se expone además, la respuesta a esta generalización dada por el mismo Banach y Kuratowski. Se enuncian también otras generalizaciones sobre el mismo problema dadas por otros matemáticos como Hausdorf, Tarski.

El cuarto capítulo presenta algunas conclusiones que se desprenden de los capítulos anteriores sobre el problema de la medida..

Por último, se presentan algunos resultados, basicamente de Teoría de conjuntos, que se utilizan en el desarrollo y justificación de los resultados planteados en los primeros capítulos.

Contenido

INTRODUCCIÓN **iv**

1 MOTIVACIÓN HISTÓRICA: SURGIMIENTO DEL CONCEPTO DE MEDIDA Y DE LA TEORÍA DE LA MEDIDA **1**

1.1 Replanteamiento de los conceptos de función y de la integral de una función 1

1.2 La integral de Riemann 8

1.3 Teoría de integración y Teoría del contenido 10

1.4 Teoría del Contenido de Jordan 14

1.5 Los conjuntos Borel-medibles y la medida de Borel 18

2 TEORÍA DE LA MEDIDA DE LEBESGUE **23**

3 EL PROBLEMA DE LA MEDIDA **33**

3.1 Un conjunto no medible 33

3.2 Teorema de Banach y Kuratowski 35

3.3 Otras generalizaciones del "problema de la medida" 43

4 CONCLUSIONES **45**

5 APÉNDICE **47**

Capítulo 1

MOTIVACIÓN HISTÓRICA: SURGIMIENTO DEL CONCEPTO DE MEDIDA Y DE LA TEORÍA DE LA MEDIDA

Uno podría pensar que el concepto de "medida" de un conjunto de números reales surge como una generalización natural de los conceptos de longitud, área y volumen. Pero, curiosamente, no es así. Sus orígenes se encuentran en la Teoría de Integración.

1.1 Replanteamiento de los conceptos de función y de la integral de una función

Nuestro punto de partida se situará en el siglo XVIII (a finales de éste) con el replanteamiento del concepto de función y, por lo tanto, con el replanteamiento del concepto de integración de una función.

En esa época el proceso de integración era pensado como el proceso de encontrar la solución a una ecuación diferencial y la función misma era pensada como una "ecuación".

Geométricamente la integración era considerada como el cálculo de un área determinada por una función f cuyos valores son mayores o iguales a cero. Idea que, por cierto, prevalece hasta nuestros días.

Pero estas ideas algebraicas sobre función e integral comenzaron a cambiar cuando se presentó el problema de la cuerda vibrante y d'Alembert dio solución a la ecuación de onda dejando ver que las funciones generadoras de las soluciones no necesariamente venían dadas por una única "ecuación", sino que podían estar definidas por distintas "ecuaciones" en distintos subintervalos de su dominio, o hasta por curvas "trazadas al azar" sin corresponder a una "ecuación". Observación que hizo notar Euler, y quien llamó a dichas funciones , funciones "arbitrarias".

El matemático francés J. Fourier también contribuyó a este cambio con su trabajo sobre la representación de cualquier función mediante una serie trigonométrica. El planteamiento de Fourier era el siguiente:

Si $f(x)$ (que aparece en los problemas de contorno) está definida en$[-l, l]$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\} \ \forall x \in [-l, l]. \tag{1.1.1}$$

Para demostrar la igualdad (1.1.1) da, entre otros, el siguiente razonamiento:

De (1.1.1) se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-l}^{i} f(x)dx &= \int_{-l}^{l} \frac{1}{2}a_0 dx + \int_{-l}^{l}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right\}\right)dx \\ &= \int_{-l}^{l} \frac{1}{2}a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}\{a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\}dx,\end{aligned}$$

y como el segundo sumando del lado derecho de la igualdad vale cero, tenemos

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

Análogamente

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \ \ , b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx.$$

Fourier supone que

$$\int_{-l}^{l}\left\{\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right\}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l} S_n(x)dx,$$

con

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k sen\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\},$$

Sin embargo, la igualdad que supone Fourier no es cierta para cualquier función $S_n(x)$.

Pero entonces ¿cuál era el significado de la integral definida para una función "arbitraria"? Había que reconsiderar el concepto de integral para dichas funciones.

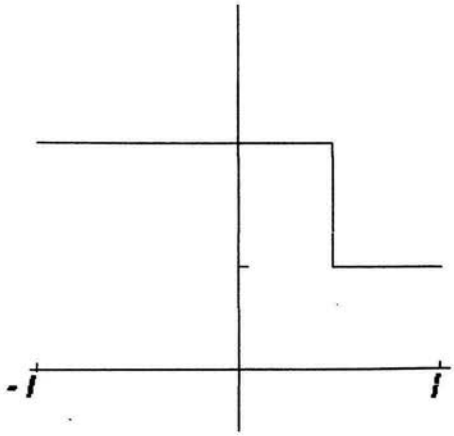

Figure 1.1: Gráfica de una función arbitraria de Fourier

Su trabajo acerca de la transmisión del calor en los sólidos hacía pensar a Fourier que las funciones "arbitrarias" eran en realidad más generales que las que aparecían en el problema de la cuerda vibrante y, en 1822, da una definición de función:

"En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Como la abscisa x recibe una infinidad de valores, hay un número igual de ordenadas $f(x)$ y todas ellas tienen valores numéricos concretos, ya sean positivos, negativos o nulos.

No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común a todas ellas; se suceden unas a otras de una manera arbitraria y cada una de ellas viene dada como si fuera una cantidad aislada."[1]

Aunque Fourier no haya tomado tan literal sus propias palabras, pues los ejemplos dados por él no dejan claro lo contrario, no cabe duda que su definición da un salto cualitativo dentro del concepto de función.

La primera definición analítica de continuidad de una función es dada por el

[1]Grattan-Guinnes, Del cálculo a la tería de conjuntos (Madrid, Alianza Editorial, S.A.,1984) p. 199.

matemático francés Augustin-Louis Cauchy en el año de 1821:

Una función f(x) que toma valores finitos para todo x entre a y b, es continua entre estos dos límites si el valor absoluto de $f(x+\alpha) - f(x)$ "*disminuye indefinidamente con el de* α"[2] para cualquier x.

Basándose en esta definición, en 1823, en su libro *Résumé des leçons données à l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, procede a dar su definición analítica de la integral de una función de la siguiente manera:

Sea f una función continua y sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n \mid a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Tomemos la suma $S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ correspondiente a dicha partición. Se puede probar que las sumas S y S' correspondientes a dos particiones P y P' difieren en una cantidad arbitrariamente pequeña con tal de que las longitudes de todos los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ en las dos particiones sean lo suficientemente pequeñas. Entonces, "*el valor de S terminará obviamente por ser constante... Este límite se denomina la integral definida*".[3]

Partiendo de ésta definición, la existencia de la integral de una función no depende de si la misma está dada por una "ecuación" o no. Más aún, basta con satisfacer la definición de continuidad en el sentido de Cauchy para que la integral tome un valor determinado.

La integrabilidad de una función continua es utilizada por Cauchy para estudiar la representación de una función continua mediante una serie trigonométrica.

Posteriormente, trabajando con funciones discontinuas, hace la siguiente aclaración: "*Es necesario observar que las funciones discontinuas introducidas en el cálculo dejan de ser continuas únicamente para algunos valores de las variables.*"[4] Y, para estas funciones, extiende su concepto de integral como sigue:

Si una función es continua en un intervalo $[a, b]$, excepto en un punto c, en una vecindad del cual f puede ser acotada o no, se puede definir la integral de f como

$$\lim_{h \to 0} \left[\int_a^{c-h} f(x)dx + \int_{c+h}^{b} f(x)dx \right]$$

cuando éste exista.

Indudablemente se había logrado un avance tanto en el concepto de función como en el concepto de integral, e incluso se dejaba planteado un problema que más tarde sería resuelto por el matemático alemán Dirichlet: ¿puede definirse la integral para cualquier función acotada en un intervalo [a,b] dado?

[2] Guines,ob.cit., p. 200.

[3] Guines, ob.cit., p.201

[4] García, M.A. Surgimiento de la Teoría de la medida, p. 4

P.G.L. Dirichlet, trabajando támbien sobre la representación de una función mediante una serie trigonométrica, considerando funciones con un número finito de discontinuidades y, tomando la interpretación literal de la definición de función dada por Fourier, en 1829 obtiene la siguiete función

$$f(x) = \lim_{m\to\infty}[\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}]$$

o, equivalentemente,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

con $x \in [-\pi, \pi]$. Veamos la equivalencia:

$$|\cos m!\pi x| = 1 \text{ si } x = \frac{k}{m!}, \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

y

$$|\cos m!\pi x| < 1 \text{ si } x \neq \frac{k}{m!},$$

entonces

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n} = \begin{cases} 1, & \text{si } x = \frac{k}{m!}, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } x \neq \frac{k}{m!} \end{cases}$$

En particular,

$x \in II \Longrightarrow f_m(x) = 0\ \forall m. \Longrightarrow \lim_{m\to\infty} f_m(x) = 0.$

Por otra parte

$x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow\ x = \frac{p}{q},$ con $p,q \in \mathbb{Z}$ y con factores irreducibles

$\Longrightarrow \exists\ m \in \mathbb{Z}$ tal que q divide a $m!$,

ésto es, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $qr = m!$,

$\Longrightarrow\ x = \frac{p}{q} = \frac{pr}{qr} = \frac{pr}{m!}$,

$\Longrightarrow\ x = \frac{k}{m!}$ con $k = pr \in \mathbb{Z}$,

$\Longrightarrow\ f_m(x) = 1.$

Más aún

$f_m(x) = 1 \ \Longrightarrow\ x = \frac{k}{m!} = \frac{k(m+1)}{(m+1)!},$

$\Longrightarrow\ f_{m+1}(x) = 1.$

Por lo tanto

$x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \lim_{m\to\infty} f_m(x) = 1.$

Por lo tanto

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Está función es utilizada por Dirichlet para dar un ejemplo de una función no integrable. De hecho, tenemos un ejemplo de una sucesión de funciones $f_m(x)$ integrables cada una de ellas, las cuales convergen a la función $f(x)$ que no lo es, luego entonces no se da la igualdad entre

$$\lim_{m\to\infty}\int f_m(x)dx \quad \text{y} \quad \int \lim_{m\to\infty} f_m(x)dx,$$

misma que se necesita para representar a f mediante una serie de Fourier. Ésta es una de las limitaciones de la integral de Riemann que serán superadas con la integral de Lebesgue.

Finalmente la definición de función dada por Fourier comienza a tomar forma con el ejemplo de Dirichlet.

Pero Dirichlet no se quedó ahí, él pensaba que, sin embargo, una función podía soportar un número infinito de discontinuidades y seguir siendo integrable, y planteó que lo único que se necesitaba para "garantizar" dicho resultado era que:

"*Si a y b representan dos cantidades arbitrarias entre $-\pi$ y π, sea siempre posible encontrar dos números r y s entre a y b , lo suficientemente próximas para que la función permanezca continua en el intervalo de r a s.*"[5]

En terminología moderna, Dirichlet estaría pidiendo que el conjunto de discontinuidades de la función fuera denso en ninguna parte (diseminado, en aquellos tiempos):

Definición 1.1.1 *Un conjunto A es denso en ninguna parte si y sólo si el interior de la cerradura del conjunto A es vacío ($(\overline{A})^o = \varnothing$).*

Probaremos la equivalencia entre estas dos definiciones:

Afirmación: Sea A el conjunto de discontinuidades de f.

A es denso en ninguna parte si y sólo si se satisface la condición de Dirichlet.

Demostración:

$\Longrightarrow]$ Supongamos que para todo intervalo $(r,s) \subseteq (a,b) \subseteq [-\pi,\pi]$ existe una discontinuidad de f en (r,s), entonces la cerradura del conjunto de discontinuidades de f contiene al intervalo (a,b) y, por lo tanto, A no es denso en ninguna parte. Pues si $x \in (a,b)$, en toda vecindad (r,s) de x existe algún punto de discontinuidad de f, entonces existe una sucesión de puntos x_n , donde la función es discontinua, que convergen a x, entonces x está en la cerradura del conjunto de discontinuidades de f. Por lo tanto, (a,b) pertenece a la cerradura del conjunto de discontinuidades de f.

$\Longleftarrow]$ Sea x un punto interior de la cerradura de A, y sea $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \overline{A}$. Por la condición de Dirichlet, existen r y s tales que f es continua en $(r,s) \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, entonces todo el intervalo (r,s) está contenido en el complemento

[5] Ibid., p.203

de la cerradura de A. Por lo tanto x no puede ser punto interior de la cerradura de A. Por lo tanto A es denso en ninguna parte.

Dirichlet no pudo probar su conjetura pues no es cierta (como veremos más adelante).

Más tarde, sumándose a la taréa de resolver el problema de la convergencia de series de Fourier, R. Lipschitz creyó haber demostrado la conjetura de Dirichlet. Su error fue pensar que la condición de Dirichlet implica que el conjunto de puntos de acumulación del conjunto de discontinuidades de f debe ser finito.

Para una función f con un número finito de discontinuidades en el intervalo $[a, b]$, Lipschitz define la integral como sigue:

Sea c un punto donde la función f es discontinua, entonces

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx\right].$$

Si el conjunto de discontinuidades tiene un punto de acumulación c, entonces define

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx\right]$$

Es importante señalar la diferencia conceptual entre las dos definiciones arriba mencionadas. En la primera definición se supone que f es continua en $[a, c-\delta]$ y en $[c+\delta, b]$, y se define la integral de f en $[a, b]$ con un punto de discontinuidad c en dicho intervalo. Con esta primera definición podemos definir de manera inductiva la integral de f en $[a, b]$, si f es discontinua en un número finito de puntos del intervalo $[a, b]$:

Si $x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1}$ fueran los puntos de discontinuidad de f, entonces

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{x_{n+1}-\delta} f(x)dx + \int_{x_{n+1}+\delta}^b f(x)dx\right]$$

con $\delta < x_{n+1} - x_n$; donde

$$\int_a^{x_{n+1}-\delta} f(x)dx$$

ya estaría definida pues f sólo tendría n puntos de discontinuidad en el intervalo $[a, x_{n+1} - \delta]$, y

$$\int_{x_{n+1}+\delta}^b f(x)dx$$

también estaría bien definida pues f sería continua en el intervalo $[x_{n+1} + \delta, b]$

En la segunda definición se supone que f tiene un conjunto de discontinuidades con un solo punto de acumulación c y, como f tendría un número finito de discontinuidades en los intervalos $[a, c-\delta]$ y $[c+\delta, b]$, las integrales

$$\int_a^{c-\delta} f(x)dx \quad \text{y} \quad \int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

estarían bien definidas de acuerdo con la primera definición. Finalmente, con esta segunda definición, podemos establecer nuevamente de manera inductiva la integral de f en $[a, b]$, cuando el conjunto de discontinuidades de f tiene un número finito de puntos de acumulación, de manera análoga a como se hizo con la primera definición cuando se trataba de un número finito de puntos de discontinuidad de f.

Cabe señalar que también se calculaba la integral mediante la asociación de la misma con la primitiva de una función dada.

A excepción de Riemann, hasta ese momento la forma de abordar el problema de la integración de una función había sido exter la definición de la integral a funciones que tuvieran tantas discontinuidades como fuera posible.

1.2 La integral de Riemann

En 1854 el matemático alemán Bernhard Riemann presenta una memoria (publicada después de su muerte) acerca de la integrabilidad de funciones. En él cambia el enfoque para atacar el problema de la integración de una función. Retomando la idea dada por Cauchy, establece la siguiente definición de integrabilidad para cualquier función acotada:

Consideremos una partición $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ del intervalo.Una función f definida y acotada en el intervalo [a,b] es integrable si las sumas

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}), \text{con } t_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

tienden a un valor único conforme $x_i - x_{i-1}$ tiende a cero para toda i. En tal caso, ese valor único se llama el valor la integral definida de f,

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Precisa Riemann que cuando dicho límite no existe, la notación $\int_a^b f(x)dx$ no tiene ningún significado, y menciona como se define la integral de una función cuando ésta tiende a infinito conforme la variable x tiende a un cierto valor, señalando:

"Otras extensiones, debidas a Cauchy, de la definición de la integral definida en el caso en que tal definición no se sigue de las nociones fundamentales que preceden , pueden ser cómodas para ciertas clases de investigaciones, pero no son admitidas en general, y la arbitrariedad que existe en las definiciones de Cauchy sería suficiente para impedir que sean aceptadas universalmente."[6]

[6]García, M.A. Surgimiento de la Teoría de la medida. p. 7

Con la definición anterior, se plantea el problema de caracterizar a las funciones integrables:

"*Busquemos ahora la extensión y el límite de la definición precedente y hagámonos esta pregunta : ¿ en qué casos una función es susceptible de integración ?, ¿ en qué casos no lo es ?*"[7]

Establece dos criterios de integrabilidad basados en el concepto de oscilación de una función en un intervalo (que más tarde sería enunciado por Hankel):

Definición 1.2.1 *Sea $f : [a, b] \to R$ acotada. La diferencia*

$$\sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} - \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

se llama la oscilación de f en $[x_{k-1}, x_k]$, con $k = 0, 1, ..., n$.

Criterio 1.2.2 *f es integrable si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ y $\zeta > 0$,existe $\delta > 0$ tal que si P es una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \delta \ \forall \ i$, entonces $S(P, \zeta) < \varepsilon$, donde $S(P, \zeta)$ representa la suma de todos los Δx_i para los cuales la oscilación de la función en $[x_{i-1}, x_i]$ es mayor que ζ.*

Criterio 1.2.3 *Sea O_k la oscilación de f en $[x_{k-1}, x_k]$, entonces f es integrable si y sólo si*

$$\lim_{\delta_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} O_k \delta_k = 0; \quad \delta_k = x_k - x_{k-1}.$$

Utilizando el Criterio 1.2.2 da un ejemplo de una función integrable (en el sentido de Riemann) cuyo conjunto de discontinuidades es denso en el intervalo:

Sea

$$\phi(x) = \begin{cases} x - m, & \text{con } m \text{ el entero más próximo a } x, \text{ si } x \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, ... \\ 0, & \text{si } x = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, ... \end{cases}$$

Sea

$$\phi_n(x) = \phi(nx)$$

Por último, sea

$$f(x) = \phi_1(x) + \frac{\phi_2(x)}{2^2} + ... + \frac{\phi_n(x)}{n^2} + ...$$

f es discontinua en todos los puntos donde ϕ_n lo es; es decir, f es discontinua en $x = \frac{p}{2q}$ con $(p, q) = 1$ y p impar. Dicho sea de paso, el valor de la integral de esta función es cero.

[7] Loc.cit.

Hoy se conoce a la función de Riemann como:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } x = m/n \text{ con } m, n \in IN \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Aunque no se trata de la función original tiene la misma propiedad que aquella: ser discontinua en un conjunto denso, en este caso en los racionales.

El ejemplo de Riemann es un ejemplo de una función que no cumple la condición de Dirichlet para ser integrable.

1.3 Teoría de integración y Teoría del contenido

Una característica importante de la función de Riemann es que las discontinuidades son discontinuidades de salto. Es decir, existe el límite por la derecha y el límite por la izquierda en el punto de discontinuidad; además, el conjunto de puntos en los que la magnitud del salto es mayor que un número ζ dado es finito.

Prestando atención en lo anterior, Hermann Hankel, quien definiendo la oscilación de una función f en un punto x como $O_f(x) = \lim_{\delta\to 0} O_\delta$ (con O_δ la oscilación de f en $(x-\delta, x+\delta)$), planteó el siguiente resultado:

f es integrable si y sólo si para toda $\zeta > 0$, el conjunto $S_\zeta = \{x \in [a,b] \mid O_f(x) > \zeta\}$ se puede encerrar en un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña.

Y, pensando que los conjuntos densos en ninguna parte (diseminados, como él les llamó) pueden ser encerrados en un número finito de intervalos cuya longitud total puede ser tan pequeña como se quiera , estableció de manera errónea el siguiente resultado:

Sea f una función acotada, f es integrable si y sólo si para toda $\zeta > 0$, el conjunto $S_\zeta = \{x \in [a,b] \mid O_f(x) > \xi\}$ es denso en ninguna parte.

El problema con este resultado es que la condición de que S_ζ sea denso en ninguna parte no es suficiente para que f sea integrable.

Es así como la Teoría de la Integración comienza a ser analizada a partir de la Teoría de Conjuntos y es así como comienza a surgir el concepto de medida de un conjunto de números reales.

Durante varios años se trató de caracterizar a las funciones integrables en base a la propiedad topológica del conjunto de sus discontinuidades. En dicha búsqueda, como el mismo resultado de Hankel muestra, se aprecia que existía una confusión entre lo que debería pensarse como un conjunto "despreciable" desde el punto de vista topológico y un conjunto "despreciable" desde el punto de vista de la teoría de la medida. Pero es a principios de la década de los 70's del siglo XIX cuando la Teoría de Conjuntos comienza a formalizarse. Es en esa época cuando Cantor realiza sus primeras aportaciones a esta área de las matemáticas.

Trabajando acerca de la unicidad de la representación de una función mediante una serie trigonométrica, Cantor estudió conjuntos que tienen la propiedad de que su conjunto derivado n-ésimo resulta ser un conjunto finito, para alguna n.

El conjunto derivado n-ésimo de un conjunto dado se define como sigue:

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Definimos a $A^{(1)}$ como el conjunto de puntos de acumulación de A. A $A^{(1)}$ lo llamaremos el 1er. conjunto derivado de A o simplemente el conjunto derivado de A. $A^{(2)}$ es el conjunto de puntos de acumulación de $A^{(1)}$; es decir, $A^{(2)}$ es el conjunto derivado de $A^{(1)}$ y lo llamaremos el 2o. conjunto derivado da A. Siguiendo con esta notación, $A^{(n)}$ representa el conjunto de puntos de acumulación de $A^{(n-1)}$ y se llama el conjunto derivado n-ésimo de A.

Se dió cuenta que los conjuntos con la propiedad anterior resultaban ser conjuntos diseminados y, además, se podían encerrar en un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña.

Decimos que un conjunto tiene contenido cero si, para toda $\varepsilon > 0$, existe una familia finita de intervalos abiertos que cubren al conjunto tal que la suma total de sus longitudes es menor que ε.

Decimos que un conjunto es de 1a. especie si su conjunto derivado n-ésimo es un conjunto finito, para alguna n.

En terminos de las definiciones anteriores lo que Cantor descubrió fue que los conjuntos de 1a. especie son conjuntos densos en ninguna parte y también son conjuntos con contenido cero.

Este resultado parece haber aumentado la confusión al reforzar la idea, durante esa época, de pensar a los conjuntos de 1a. especie como la única posibilidad para los conjuntos densos en niguna parte.

Posteriormente se desarrollarían métodos para mostrar conjuntos densos en ninguna parte que no son de primera especie, permitiendo aclarar la confusión.

Paul Du Bois Raymond en 1880 dió un ejemplo de un conjunto denso en ninguna parte que no era de 1a. especie:

Tomemos una sucesión de intervalos ajenos, $\{I_n\}$, que convergen a un punto p. Para cada I_n definamos un conjunto Q_n de orden n tal que $Q_n \subset I_n$. Sea $Q = \cup Q_n$. Los conjuntos Q_n son densos en ninguna parte y ajenos entre si, entonces Q es un conjunto denso en ninguna parte. Por otro lado, p pertenece a $Q^{(n)}$ para toda n, por lo tanto, Q no es de 1a. especie. No obstante, el conjunto Q tiene contenido cero (cada Q_n es de contenido cero y forman una sucesión convergente a p).

Por su parte, J. S. Smith, Vito Volterra y el mismo Cantor construyeron conjuntos densos en ninguna parte que no tienen contenido cero.

Un conjunto con esta propiedad, basado en el método de construcción de Cantor, es el siguiente:

Dividamos el intervalo $[0, 1]$ en tres subintervalos con la misma longitud, eliminemos el subintervalo abierto central y definamos a F_1 como la unión de los intervalos cerrados que quedan; ahora, dividamos a cada subintervalo de F_1 en 3^2 subintervalos con igual longitud, eliminemos el subintervalo abierto central en cada caso y definamos a F_2 como la unión de los subintervalos cerrados restantes; juntemos cada grupo de subintervalos contiguos en un solo subintervalo y dividamos cada subintervalo que se forma en 3^3 subintervalos, quitemos el subintervalo abierto central..., y así sucesivamente. Sea $F = \cap F_i$. El conjunto F es un conjunto denso en ninguna parte que no tiene contenido cero.

Surge entonces una nueva clase de conjuntos, los conjuntos con contenido cero, y se establece la siguiente relación entre esta clase y las otras dos clases de conjuntos:

Conjuntos (acotados) de 1a. Especie $\subset$ Conjuntos con Contenido Cero $\subset$ Densos en Ninguna Parte.

Esta relación permitió construir funciones no integrables cuyo conjunto de discontinuidades es denso en ninguna parte. Como ejemplo damos la función característica:

$$X_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \in B^c \end{cases}$$

donde B es un conjunto cerrado, denso en ninguna parte y $C(B) > 0$ (en particular B puede ser el conjunto F).

Además, recordemos que Riemann ya había dado un ejemplo de una función integrable cuyo conjunto de discontinuidades es denso en todo el intervalo.

Quedaba claro que el "desprecio" del conjunto de las discontinuidades en el sentido topológico no determinaba si una función era o no integrable.

Contando con estos elementos, en 1881 Axel Harnack demuestra el siguiente

Teorema 1.3.1 *f es integrable si y sólo si para toda $\sigma > 0$, el conjunto de puntos en donde la oscilación de la función es mayor que σ tiene contenido cero.*

La importancia de la construcción de conjuntos densos en ninguna parte de contenido exterior positvo fue más allá; permitieron construir funciones derivables, cuya derivada fuera acotada pero no integrable y, en consecuencia, para ellas no se valdría la conclusión del Teorema fundamental del cálculo (establecido por Gaston Darboux):

Teorema 1.3.2 *Si una función f tiene una derivada f'acotada y Riemann-integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces*

$\int_a^t f'(x)dx = f(t) - f(a)$.

Tan sólo sea porque la integral del lado izquierdo de la igualdad no estaría definida.

Siguiendo las ideas de Vito Volterra, vamos a construir una función, definida en el intervalo $[a, b]$, con las propiedades anteriores, a partir de nuestro conjunto F:

Como el complemento de F es una unión de intervalos abiertos ajenos (a, b) de $[0, 1]$, vamos primero a definir nuestra función f en cada uno de dichos intervalos. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$$f(x; a, b) = \begin{cases} (x-a)^2 sen(\frac{1}{x-a}), & \text{si } a < x \leq x_1 \\ k = cte., & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ (b-x)^2 sen(\frac{1}{b-x}), & \text{si } x_2 \leq x < b \end{cases}$$

donde x_1 es el punto situado a la derecha de a correspondiente al primer máximo de la función $A(x) = (x-a)^2 sen(\frac{1}{x-a})$ que está a la izquierda del punto medio c del intervalo (a, b) (siendo $x_1 \leq c$) y x_2 es el punto situado a la izquierda de b correspondiente al primer máximo de la función $B(x) = (b-x)^2 sen(\frac{1}{b-x})$ que está a la derecha del punto c (siendo $x_2 \geq c$) y $k = A(x_1)$.

Ahora bien, por una parte, un punto (x, y), con $x < c$ está en la gráfica de $A(x)$ si y sólo si $y = A(x)$; por otra parte, el punto simétrico de (x, y) con respecto a la recta $x = c$ es $(2c - x, y) = (2(\frac{a+b}{2}) - x, y) = (a + b - x, y)$, y $(2c - x, y)$ está en la gráfica de $B(x)$ si y sólo si $y = B(2c - x)$.

Si $\Psi(x) = x^2 sen(\frac{1}{x})$, entonces $A(x) = \Psi(x-a)$ y $B(x) = \Psi(b-x)$,

entonces $B(2c-x) = B(a+b-x) = \Psi(b-(a+b-x)) = \Psi(x-a) = A(x)$,

entonces los máximos de $A(x)$ se reflejan en los máximos de $B(x)$. Por lo tanto x_1 y x_2 son simétricos respecto a la recta $x = c$. Por lo tanto $A(x_1) = B(x_2)$.

Por todo lo anterior, $f(x; a, b)$ está bien definida y goza de las siguientes propiedades en el intervalo (a, b):

1o. Para todo $x \in [a, b]$, $|f(x; a, b)| \leq (b-a)^2$; es decir, f es acotada en $[a, b]$,

2o. $f(x; a, b)$ es derivable en todo el intervalo (a, b),

3o. $|f'(x; a, b)| \leq 2(b-a) + 1$. Ésto es, f' está acotada,

4o. $f'(x; a, b)$ no tiene límite en $x = a$ y en $x = b$.

Definamos ahora a $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \begin{cases} f(x; a, b), & \text{si } x \in (a, b), \text{ con } (a, b) \text{ un intervalo de } [0, 1] - F \\ 0 & \text{si } x \in F \end{cases}$$

La función $g(x)$, así definida, tiene tres propiedades, a saber:

1. $g(x)$ es derivable y acotada debido a que $|g(x)| \leq |f(x;a,b)| \leq (b-a)^2 \leq 1$,

2. $g'(x)$ también es acotada pues $|g'(x)| \leq |f'(x;a,b)| \leq 2(b-a)+1 \leq 3$,

3. $g'(x)$ es discontinua en todo punto de F:

F es cerrado y denso en ninguna parte, entonces $\partial F \subseteq F$ y $(\overline{F})^\circ = \varnothing$, entonces $F = \partial F$. Si $x \in F$, entonces $x \in \partial F$, entonces en toda vecindad de x existen puntos de F^c, entonces podemos construir dos sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ convergentes a x tales que la sucesión $\{g(u_n)\}$ converja a 1 y la sucesión $\{g(v_n)\}$ converja a 0

De todo lo anterior, el conjunto de $x \in [0,1]$ para los cuales la oscilación es mayor o igual que 2 es el conjunto F, que tiene contenido exterior estrictamente positivo. Aplicando el criterio de integrabilidad que utiliza el concepto de oscilación, concluimos que g' no es Riemann-integrable.

A partir de este momento se comienza a desarrollar la "teoría del contenido" por matemáticos como Cantor, Harnack, Peano y Camil Jordan.

Tres años más tarde, en 1884, Cantor y Stolz introducen, cada quien por su parte, la idea de contenido (exterior). Podemos decir que se crea así en 1884 la primera Teoría de la Medida.

1.4 Teoría del Contenido de Jordan

Si bien el trabajo de Riemann resolvía el problema de la integral de una función de una variable, no era lo suficientemente preciso para el caso de las funciones de dos o más variables.

Generalmente, la integral de una función de dos variables, $f(x,y)$, se definía sobre una región R del plano limitada por una curva

Así que las sumas de Riemann para este caso quedaban de la siguiente manera:

$$S = \sum f(x_i, y_i) a(R_{i,j}),$$

con $a(R_{i,j})$ =área de $R_{i,j}$.

Pero existen dos tipos de rectángulos, los que están totalmente contenidos en R y los que tienen puntos en común con R, considerando además que los "pedazos" de rectángulos de la "orilla" no tienen una área definida. Entonces ¿ qué rectángulos deberían de tomarse ? Para resolver este problema, se argumentaba que daba igual tomar unos u otros pues la suma de las áreas de los rectángulos que cortan la curva (los "pedazos") se puede hacer arbitrariamente pequeña (haciendo el cuadriculado o partición cada vez más fino).

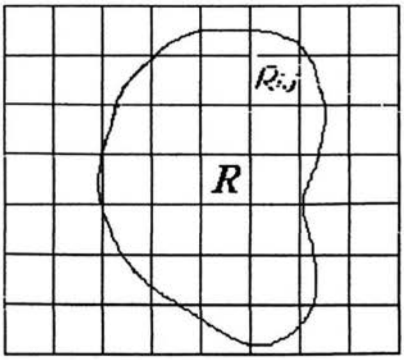

Figure 1.2: Región de integración en el plano

Camille Jordan había aceptado esta idea. De hecho, había trabajado con ella en la primera edición de su libro *Cours d'analyse*. Pero en 1890 Peano construyó una curva que llenaba el cuadrado unitario, lo que tal vez obligó a Jordan a replantear sus resultados.

En 1892, Jordan decide tratar a la región R como un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$, de la misma manera en que lo había hecho Riemann para el caso en $\mathbb{R}$.

Para el caso en $\mathbb{R}$, dada una partición P del intervalo $[a,b]$ en intervalos I_k (i.e. $[a,b] = \cup_{k=1}^{n} I_k$), define el contenido interior, $C_i(E)$, y el contenido exterior, $C_e(E)$, de un conjunto E como sigue:

$$C_i(E) = \sup_P \sum_{I_k \subset E} l(I_k),$$

$$C_e(E) = \inf_P \sum_{I_k \cap E \neq \varnothing} l(I_k).$$

Como

$$\cup_{I_k \subset E} I_k \subset E \subset \cup_{I_k \cap E \neq \varnothing} I_k,$$

entonces

$$\sum_{I_k \subset E} l(I_k) \leq C_i(E) \leq C_e(E) \leq \sum_{I_k \cap E \neq \varnothing} l(I_k)$$

Así, un conjunto será medible (Jordan-medible) si

$$C_i(E) = C_e(E).$$

En tal caso, su contenido (único) será

$$C(E) = C_i(E) = C_e(E).$$

Con este planteamiento generalizó la condición de integrabilidad de Riemann de la siguiente manera:

Sea $[a,b] = \cup_{k=1}^{n} E_k$ una partición P de $[a,b]$ en conjuntos medibles disjuntos E_k. Entonces

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k C(E_k) \quad \text{y} \quad U(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k C(E_k)$$

donde M_k y m_k representan el supremo y el ínfimo, respectivamente, de f en E_k.

Entonces la integral inferior y la integral superior quedan definidas como

$$\underline{\int_a^b} f = \sup L(P) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f = \inf U(P)$$

respectivamente. Y

$$f \text{ es Riemann-Integrable si y sólo si } \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f;$$

en tal caso

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

De las definiciones anteriores se desprenden dos resultados:

1. Si un conjunto A es de contenido cero entonces A es Jordan-medible.

2. Todo intervalo acotado I es Jordan-medible. Más aún $C(I) = l(I)$.

Además, dado un intervalo $[a, b]$, la familia de subconjuntos de $[a, b]$ que son Jordan-medibles forma un álgebra de subconjuntos de $[a, b]$. Y la función que relaciona cada conjunto Jordan-medible con su contenido es finitamente aditiva.

Es importante señalar que la Teoría de el Contenido de Jordan y la Teoría de Integración de Riemann son equivalentes. Todo resultado que se pueda establecer en la Teoría de Integración de Riemann tiene su análogo en la Teoría de el Contenido de Jordan. Como ejemplos mencionaremos los siguientes resultados:

1. Sea f una función no negativa definida en $[a, b]$.

   f es Riemann-integrable si y sólo si el conjunto $E = \{(x, y) \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ es Jordan-medible.

2. Sea A un subconjunto del intervalo $[a, b]$ y sea X_A la función característica sobre A, entonces

$$\overline{\int_b^a} X_A(x)dx = C_e(A) \quad \text{y} \quad \underline{\int_b^a} X_A(x)dx = C_i(A).$$

3. Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definida sobre un subconjunto acotado E de $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{R}^2$ Jordan- medible. Para cada partición P de E en n conjuntos $E_1, E_2, ..., E_n$ Jordan-medibles ajenos, definimos

$$S^-(P; f) = \textstyle\sum_{j=1}^n M_j C(E_j) \quad \text{y} \quad S_-(P; f) = \sum_{j=1}^n m_j C(E_j),$$

   en donde, para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$M_j = \sup\{f(x) : x \in E_j\} \text{ y } m_j = \inf\{f(x) : x \in E_j\},$$

   entonces

$$\overline{\int_E} f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} S^-(P; f) \quad \text{y} \quad \underline{\int_E} f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} S_-(P; f),$$

   con $\|P\| = \max\{C(E_j) : j \in \{1, 2, ..., n\}\}$.

En particular:

f es Riemann- integrable sobre E si y sólo si el límite de las sumatorias

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)C(E_j), \text{ con } \xi_j \in E_j \text{ para cada } j \in \{1,2,...,n\},$$

existe cuando $\|P\| \to 0$, y es independiente de los puntos ξ_j que se tomen.

Además, en ese caso, se tiene

$$\int_E f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)C(E_j).$$

Es Jordan quien finalmente logra establecer la Teoría de Integración de Riemann desde el punto de vista de la Teoría de la Medida.

1.5 Los conjuntos Borel-medibles y la medida de Borel

Otros matemáticos también dieron sus propias definiciones de medibilidad de un conjunto contribuyendo al desarrollo de la Teoría de la medida. Tal es el caso de Emile Borel.

Cuando se trata de ver cuál es la medida de un conjunto numerable, Axel Harnack señala que si en la definición de contenido exterior se acepta una familia infinita numerable de intervalos que cubren al conjunto en lugar de una familia finita con la misma propiedad, se obtiene una paradoja, pues todos los conjuntos numerables tendrían "contenido exterior" cero, en particular el conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ que es denso en $[0,1]$; pero con la definición original dicho conjunto tiene contenido exterior 1, lo que le parecía más razonable.

Borel, en su tesis doctoral, en 1894, trabajando sobre un problema de prolongación analítica, encuentra un resultado importante para la teoría de la medida: dos conjuntos que no son medibles y que, en términos de su contenido, son indistinguibles. El trabajo de Borel es el siguiente:

Considerese la función $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n/(z - a_n)$ donde A_n, z y a_n son números complejos y $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$. Sea C una curva cerrada simple convexa en el plano y supongamos que $N = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un subconjunto denso de C.

Si $z \notin C$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n/(z - a_n)$ converge pues la distancia de z a C es positiva. De hecho, $f(z)$ define dos funciones analíticas distintas, una al interior de la región limitada por C y la otra en el exterior de dicha región.

Basándose en una idea de Cantor, Borel se propone demostrar que las dos funciones pueden "conectarse" una con otra obteniéndose así una forma generalizada de prolongación analítica. Tomemos dos puntos Q_1 y Q_2, uno en el interior de la región

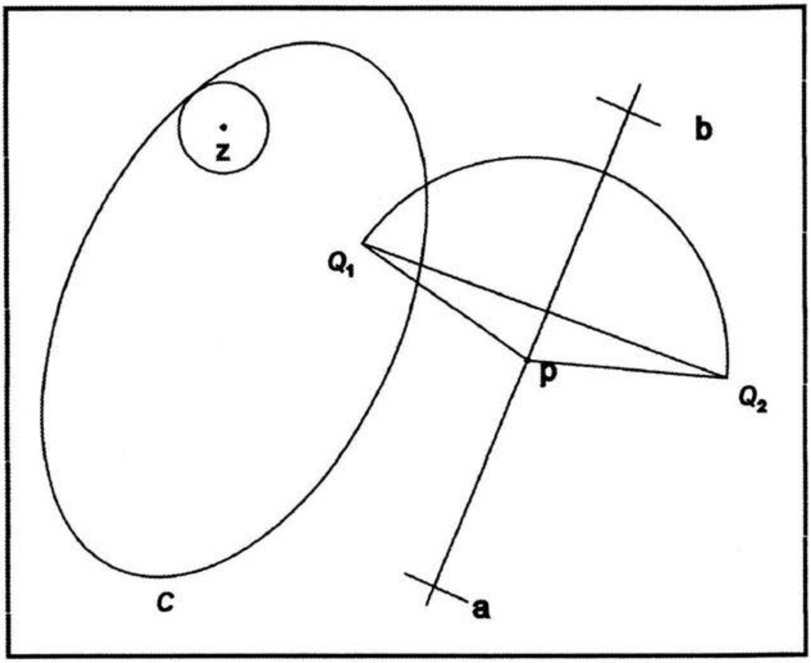

Figure 1.3: Prolongación analítica

(digamos Q_1) y el otro en el exterior de la misma, y tomemos la mediatriz del segmento que une a Q_1 con Q_2. Para cada punto p de la mediatriz existe un único arco circular que une a Q_1 con Q_2. Estos arcos se cortan sólo en estos puntos, así que intersectan al conjunto N en conjuntos ajenos. Por lo tanto, se tiene a lo más una cantidad numerable de puntos $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ de la mediatríz tales que los arcos correspondientes a dichos puntos cortan a C en algún punto de N. El problema para Borel era entonces probar que existe un arco circular que una Q_1 con Q_2 sobre el cual la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n/(z-a_n)$ converja absoluta y uniformemente.

Con el objetivo de ilustrar sus métodos en los cursos que daba, Borel consideró un caso análogo para una función de variable real:

Sean $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|x-a_n|}$, con $A_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{1/2} < \infty$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ denso en $[0, 1]$.

Cada a_n puede encerrarse en un intervalo $I_n = (a_n - u_n, a_n + u_n)$, donde

$u_n = \frac{A_n^{1/2}}{2k}$.

Sea $B_k = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$,

$x \notin B_k \implies x \notin I_n \ \forall n \implies | x - a_n | \geq u_n \implies \frac{1}{|x-a_n|} \leq \frac{1}{u_n}$
$\implies \frac{A_n}{|x-a_n|} \leq \frac{A_n}{u_n} = \frac{A_n}{A_n^{1/2}/2k} = \frac{2kA_n}{A_n^{1/2}} = 2kA_n^{1/2} \ \forall n$
$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|x-a_n|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2kA_n^{1/2}$
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|x-a_n|}$ converge uniformemente en $[0,1] - B_k$.

Sólo falta mostrar la existencia de puntos x pertenecientes al intervalo $[0,1]$ que no se encuentran en ninguno de los intervalos $I_1, I_2, ..., I_n, ...$

Para mostrar la existencia de tales puntos Borel establece y demuestra que todo intervalo cerrado y acotado es compacto. Entonces, basándose en el resultado anterior, si la familia numerable de intervalos abiertos $\{I_1, I_2, ..., I_n, ...\}$ cubre a $[0,1]$, existe una colección finita de estos intervalos en la cual $[0,1]$ está contenido; evidentemente, la suma total de las longitudes de los intervalos de la colección es mayor que la longitud de $[0,1]$, luego entonces $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq l([0,1])$. Pero, por otro lado, $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{1/2}}{k} = \frac{A}{k}$, con $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{1/2}$; es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$ se puede hacer tan pequeña como se quiera. Por lo tanto, la familia $\{I_1, I_2, ..., I_n, ...\}$ no sólo no puede cubrir al intervalo $[0,1]$, sino que existe una cantidad infinita no numerable de tales puntos x (pues si fueran una cantidad a lo más numerable se podrían encerrar en una familia numerable de intervalos $\{J_1, J_2, ...\}$ cuya suma total de sus longitudes sea tan pequeña como se quiera).

Si P es el conjunto de puntos en donde la serie no converge, entonces $P \subset \cap_{k=1}^{\infty} B_k$, entonces P se puede encerrar en una cantidad numerable de intervalos I_n cuya suma de sus longitudes se puede hacer tan pequeña como se quiera haciendo k suficientemente grande. Además, como $\{a_n\} \subset P$ y $\{a_n\}$ es denso en $[0,1]$, entonces $C_e(P) = 1$, $C_i(P) = 0$ y $C_e([0,1] - P) = 1$, $C_i([0,1] - P) = 0$. Por lo tanto P y $[0,1] - P$ no son medibles, pero sus contenidos interior y exterior ¡son iguales! Borel consideraba que el primero debería tener medida 0 y el segundo medida 1.

Surgiría así un nuevo concepto tan importante para el desarrollo de la Teoría de la medida introducido por Borel:

Se dice que un conjunto A tiene **medida cero** si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una colección numerable de intervalos abiertos $I_1, I_2, ..., I_n, ...$, tal que

i) $A \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} I_n$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq \varepsilon$

Borel pertenecía a la escuela de los constructivistas. Siendo consecuente con su forma de pensar y retomando lo anterior desarrolla su propia Teoría de la medida y, en 1898, hace el siguiente planteamiento:

"Cuando un conjunto esté formado por todos los puntos de una cantidad infinita numerable de intervalos que no se solapan y que tienen longitud total s. entonces diremos que el conjunto tiene medida s. Cuando dos conjuntos no tienen puntos comunes y sus medidas son s y s', entonces el conjunto obtenido uniéndolos, es decir, su suma, tendrá medida $s + s'$.

De una manera más general, si tenemos una infinidad numerable de conjuntos tales que dos a dos no tienen puntos comunes, y que tienen medidas $s_1, s_2, ..., s_n, ...$, entonces su suma tiene medida $s_1 + s_2 + ... + s_n + ...$

Todo esto es consecuencia de la definición de medida. He aquí ahora algunas nuevas definiciones: Si un conjunto E tiene medida s y contiene todos los puntos de otro conjunto E' de medida s', entonces el conjunto E-E' diremos que tiene medida $s - s'$...

Los conjuntos para los cuales se puede definir una medida en virtud de las definiciones precedentes, los denominaremos conjuntos medibles..."[8]

En otras palabras, los conjuntos medibles según Borel o, simplemente, conjuntos de Borel, son aquellos conjuntos que se pueden construir mediante la aplicación numerable de las operaciones de unión y/o diferencia sobre los intervalos o sobre conjuntos de Borel previamente construidos.

Borel consideraba las definiciones de Jordan acerca de la medida de un conjunto más generales que sus propias definiciones. Más aún, señalaba que los trabajos de investigación realizados por él y por Jordan abordan problemas totalmente distintos (de hecho la familia de conjuntos Jordan-medibles tiene una cardinalidad mayor que la de los reales pues, en particular, los subconjuntos del conjunto de Cantor son Jordan medibles, mientras que la familia de conjuntos medibles bajo la definición de Borel tiene la cardinalidad de los reales).

Es Borel quien, considerando la medida de un intervalo como su longitud , establece las propiedades que debe satisfacer una medida m:

1) Si $I_i \cap I_j \neq \varnothing$, con $i \neq j$, entoces $m(\cup_{n=1}^{\infty} I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)$.

2) Si A y B son dos conjuntos medibles y $A \subset B$, entonces

   $m(B - A) = m(B) - m(A)$.

3) La medida de un conjunto nunca es negativa.

Sin embargo, P es un subconjunto de $B = \cap_{k=1}^{\infty} B_k$ Borel-medible y de medida cero, pero de lo anterior no se desprende que P sea Borel-medible.

Para resolver este problema Borel plantea la siguiente definición:

[8] Guinness,,ob.cit., p.229

Si un conjunto E está "encajado" entre dos conjunto A y B, entonces decimos que $m(A) \leq m(E) \leq m(B)$, *sin preocuparnos de si E es o no medible de Borel.*

Como $\varnothing \subset P \subset B$, entonces P tiene medida cero.

La conclusión de Borel sobre su trabajo antes planteado es que la serie converge en $[0, 1]$ excepto en un conjunto de medida cero.

Cabe mencionar que el conjunto P resulta ser Borel-medible.

Hasta aquí se había avanzado notablemente en la Teoría de la medida y su relación con el concepto de integral. Pero todavía faltaba un paso importante por dar.

Capítulo 2

TEORÍA DE LA MEDIDA DE LEBESGUE

En su tesis doctoral, "Integrale, longueur, aire", en 1902, Henri Lebesgue logra conjuntar el trabajo de Camille Jordan y Emile Borel para establecer un concepto de medida más general que la dada por ellos y así desarrollar una Teoría de Integración aún más general que la dada por Riemann.

Siguiendo la idea de Borel, comienza su tesis planteando lo que el llama "*El Problema de la Medida de los Conjuntos*". Más tarde, en su libro *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, retoma este problema:

"*He aquí la cuestión a resolver:*

Nosotros nos proponemos asignar a cada conjunto E acotado, formado de puntos de ox, un número positivo o nulo, $m(E)$, que nosotros llamaremos la medida de E y que satisface las siguientes condiciones:

1' *Dos conjuntos iguales tienen la misma medida.*

2' *El conjunto suma de un número finito o de un infinito numerable de conjuntos, sin puntos comunes dos a dos, tiene por medida la suma de medidas*

3' *La medida del conjunto de todos los puntos de* $(0,1)$ *es 1*".[1]

Donde dos conjuntos son *iguales* si, al trasladar uno hacia el otro, coinciden y el conjunto *suma* es la unión de los conjuntos en cuestión.

Una vez planteado el problema, Lebesgue procede a la construcción de una nueva medida y a la construcción de su Teoría de la medida. Nosotros expondremos a continuación sus ideas:

[1] Lebesgue, H.,*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives (Paris, Gauthier-Villars, 1904). p 103.*

De las propiedades 1',2' y 3' se desprenden:

R1: La medida de un conjunto que consiste de un sólo punto, $\{a\}$, vale cero.

Demostración:

Supongamos que $m\{a\} = r > 0$, y sean $r_1, r_2, ..., r_n, ...$ una enumeración de los racionales pertenecientes al intervalo $(0,1)$, entonces

$$m(0,1) \geq m(\cup_{n=1}^{\infty} r_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(r_n) = \sum_{n=1}^{\infty} r = \infty$$

lo cual contradice la condición 3'.

Por lo tanto $m(\{a\}) = 0$

Corolario 2.0.1 *la medida de un conjunto numerable vale cero.*

R2: La medida de un intervalo es igual a su longitud.

Demostración:

Los intervalos de la forma $(a, a \pm 1)$ con $a \in \mathbb{Z}^+$ son traslaciones de $(0,1)$

$\Longrightarrow m(a, a \pm 1) = m(0,1) = 1 = \mid a - (a \pm 1) \mid = l(a, a \pm 1)$

$\therefore m(0,n) = m[(0,1) \cup \{1\} \cup (1,2) \cup \{2\} \cup ... \cup \{n-1\} \cup (n-1,n)] = \{n[m(0,1)]$

$= n = l(0,n)$

Para los intervalos de la forma $(0, \frac{1}{n})$ con $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$m(0, \frac{1}{n}) = m(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) = ... = m(\frac{n-1}{n}, 1)$,

como $(0,1) = (\cup_{k=1}^{n} (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})) \cup \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{k-1}{n}\}$, entonces

$m[\cup_{k=1}^{n} (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})] = \sum_{k=1}^{n} m(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}) = \sum_{k=1}^{n} m(0, \frac{1}{n}) = n[m(0, \frac{1}{n})] = 1$

$\therefore \; m(0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$

$\therefore \; m(0, \frac{p}{q}) = p[m(0, \frac{1}{q})] = p(\frac{1}{q})$

$\therefore \; m(0, \frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}^+$

Para los intervalos $(0,b)$ con $b = 0.a_1a_2a_3...a_k....$ un irracional, se tiene

$(0,b) = [\cup_{k=1}^{\infty} (0.a_1a_2a_3...a_k, 0.a_1a_2a_3...a_{k+1})] \cup (\cup_{k=1}^{\infty} \{0.a_1a_2a_3...a_k\}) \cup (0, 0.a_1)$,

entonces

$m(0,b) = m[\cup_{k=1}^{\infty} (0.a_1a_2a_3...a_k, 0.a_1a_2a_3...a_{k+1})] + m[\cup_{k=1}^{\infty} \{0.a_1a_2a_3...a_k\}]$

$+ m(0, 0.a_1)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} [(0.a_1a_2a_3...a_{k+1}) - (0.a_1a_2a_3...a_k)] + 0.a_1$

$= (\sum_{k=1}^{\infty} 0.000...a_{k+1}) + 0.a_1 = b$

$\therefore \; m(0,b) = b = l(0,b)$

Finalmente, cualquier intervalo acotado (a,b) se puede ver como una traslación del intervalo $(0, b-a)$. Por lo tanto $m(a,b) = l(a,b)$

Supongamos por el momento que el problema de la medida tiene solución. Tomemos un conjunto $E \subset I$ y una familia de intervalos abiertos $\{I_n\}$, a lo más numerable, que cubran al conjunto E; la suma total de las longitudes de los intervalos I_n debe ser una cota superior de la medida de E. Define entonces Lebesgue la **medida exterior** de E, $m_e(E)$, como

$$m_e(E) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n\}$$

De la definición de medida exterior se infiere:

a) $m_e(\varnothing) = 0$.

b) $A \subset B \Longrightarrow m_e(A) \leq m_e(B)$.

Por otro lado, por la condición 2', se tiene

$$m(E) + m(E^c \cap I) = m(I),$$

entonces

$$m(E) = m(I) - m(E^c \cap I) \geq m(I) - m_e(E^c \cap I) \geq 0.$$

Define Lebesgue la **medida interior** de E, $m_i(E)$, como

$$m_i(E) = m(I) - m_e(E^c \cap I).$$

Probablemente Lebesgue basó su definición de medida interior en la relación análoga para el caso del contenido, a saber

$$c_i(E) = l(I) - c_e(E^c \cap I).$$

Claramente tenemos

$$m_e(E) \geq m(E) \geq m_i(E)$$

Sin embargo, notemos que tanto la medida interior como la medida exterior de un conjunto E, así definidas, son independientes de la existencia o no existencia de una medida m.

Procederemos entonces a demostrar la veracidad de la desigualdad entre la medida exterior y la medida interior al margen de la existencia del valor $m(E)$.

Afirmación 1: Para todo conjunto acotado E de números reales se tiene

$$m_e(E) \geq m_i(E)$$

Demostración:

Sean $\{I_n\}$ y $\{I_m\}$ dos familias numerables de intervalos abiertos que cubren a E y E^c, respectivamente. Evidentemente la unión de las familias cubre al intervalo I, entonces, por el Teorema de Heine - Borel (considerando cubierto al intervalo $[a, b]$ también por la unión de dichas familias), existe un número finito de intervalos, $I_1, I_2, ..., I_k$, pertenecientes a la unión de las familias, que cubren al intervalo I, entonces

$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) + \sum_{m=1}^{\infty} l(I_m) \geq \sum_{i=1}^{k} l(I_i) \geq m(a, b)$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq m(a, b) - \sum_{m=1}^{\infty} l(I_m)$

$\Longrightarrow \{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n\}$ está acotado inferiormente por $m(a, b) - \sum_{m=1}^{\infty} l(I_m)$, con la familia $\{I_m\}$ previamente elegida

$\Longrightarrow \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n\} \geq m(a, b) - \sum_{m=1}^{\infty} l(I_m)$

$\Longrightarrow m_e(E) \geq m(a, b) - \sum_{m=1}^{\infty} l(I_m)$

$\Longrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} l(I_m) \geq m(a, b) - m_e(E)$

$\Longrightarrow \{\sum_{m=1}^{\infty} l(I_m) \mid E^c \subset \cup_{m=1}^{\infty} I_m\}$ está acotado inferiormente por $m(a, b) - m_e(E)$

$\Longrightarrow \inf\{\sum_{m=1}^{\infty} l(I_m) \mid E^c \subset \cup_{m=1}^{\infty} I_m\} \geq m(a, b) - m_e(E)$

$\Longrightarrow m_e(E^c) \geq m(a, b) - m_e(E)$

$\Longrightarrow m_e(E) \geq m(a, b) - m_e(E^c)$

$\therefore\ m_e(E) \geq m_i(E)$.

Corolario 2.0.2 *Un conjunto es medible si su medida exterior es igual a cero*

La relación entre $m_e(E)$ y $m_i(E)$ le da la pauta a Lebesgue para proponer una definición de medibilidad y de medida de un conjunto.

Definición 2.0.3 *Decimos que un conjunto acotado $E \subset I$ es medible si*

$$m_e(E) = m_i(E);$$

en tal caso su medida, $m(E)$, es ese valor único; es decir

$$m(E) = m_e(E) = m_i(E)$$

A esta medida se le llama (por obvias razones) la **medida de Lebesgue,** y a los conjuntos medibles, mediante la definición de Lebesgue, se les llama conjuntos Lebesgue-medibles (L-medibles).

Lebesgue aclara que es sólo para estos conjuntos que estudiará el problema de la medida. Confiesa no saber si existen conjuntos no medibles; sin embargo, señala, en caso de existir tales conjuntos, el trabajo desarrollado en su libro "... *no es suficiente para afirmar ni que el problema de la medida es posible, ni que él es imposible para tales conjuntos.*"[2]

Verificaremos, siguiendo a Lebesgue, que la medida m definida arriba satisface las condiciones **1',2'** y **3'** requeridas para una medida:

[2] Lebesgue,ob. cit., p.106

1' Proposición 1: La medida exterior es invariante bajo traslaciones.

Demostración: Sea A un conjunto acotado y λ un número real fijo.

Por definición $A + \lambda = \{x + \lambda \mid x \in A\}$ y
$m_e(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid A \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n\}$
Sean $I_n = (a_n, b_n)$ y $J_n = (a_n + \lambda, b_n + \lambda)$,
$\Longrightarrow l(J_n) = (b_n + \lambda) - (a_n + \lambda) = b_n + \lambda - a_n - \lambda = b_n - a_n = l(I_n)$ (la longitud de un intervalo es invariante bajo traslaciones)
$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \sum_{i=1}^{\infty} l(J_n)$
Además $(A + \lambda) \subset \cup_{n=1}^{\infty} J_n$, pues $y \in (A + \lambda) \Longrightarrow y = x_0 + \lambda$ con $x_0 \in A$; como
$x_0 \in A \Longrightarrow a_n < x_0 < b_n \Longrightarrow a_n + \lambda < x_0 + \lambda < b_n + \lambda$
$\Longrightarrow y = x_0 + \lambda \in J_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} J_n$
Por lo tanto
$m_e(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid A \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n\} = m_e(A + \lambda)$
$= \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) \mid A + \lambda \subset \cup_{n=1}^{\infty} J_n\}$
Por lo tanto m_e es invariante bajo traslaciones.

Corolario 2.0.4 *La medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones. Ésto es, la condición 1' se satisface.*

2' Si $A_1, A_2, ..., A_n, ...,$ es una sucesión de conjuntos L-medibles, ajenos dos a dos, cuya unión está contenida en I, entonces $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es L-medible, y

$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

Demostración:

Como la unión numerable de intervalos y la intersección de dos uniones numerables de intervalos, digamos $\cup_{i=1}^{\infty} I_i$ y $\cup_{i=1}^{\infty} J_i$, se pueden reescribir, cada uno de ellos, como la unión numerable de intervalos ajenos, los conjuntos en cuestión son medibles. Además, se tiene

$$m[(\cup_{i=1}^{\infty} I_i) \cup (\cup_{i=1}^{\infty} J_i)] = m(\cup_{i=1}^{\infty} I_i) + m(\cup_{i=1}^{\infty} J_i) - m[(\cup_{i=1}^{\infty} I_i) \cap (\cup_{i=1}^{\infty} J_i)].$$

Sean $\{I_i^n\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{J_i^n\}_{i=1}^{\infty}$ dos familias numerables de intervalos abiertos que cubren a A_n y $A_n^c \cap I$, respectivamente, con la propiedad de que
$m[(\cup_{i=1}^{\infty} I_i^n) \cap (\cup_{i=1}^{\infty} J_i^n)] = \frac{\varepsilon}{2^n}$, con $\varepsilon > 0$.
Sean
$\alpha_1 = \cup_{i=1}^{\infty} I_i^1$ y $\beta_1 = \cup_{i=1}^{\infty} J_i^1$
$\alpha_2 = (\cup_{i=1}^{\infty} I_i^2) \cap \beta_1$ y $\beta_2 = (\cup_{i=1}^{\infty} J_i^2) \cap \beta_1$

$\alpha_3 = (\cup_{i=1}^{\infty} I_i^3) \cap \beta_2$ y $\beta_3 = (\cup_{i=1}^{\infty} J_i^3) \cap \beta_2$

$\alpha_4 = (\cup_{i=1}^{\infty} I_i^4) \cap \beta_3$ y $\beta_4 = (\cup_{i=1}^{\infty} J_i^4) \cap \beta_3$

....

$\alpha_n = (\cup_{i=1}^{\infty} I_i^n) \cap \beta_{n-1}$ y $\beta_n = (\cup_{i=1}^{\infty} J_i^n) \cap \beta_{n-1}$

....

Ahora bien,

$A_n \cap A_{n-1} = \varnothing, A_n \cap A_{n-2} = \varnothing, ..., A_n \cap A_1 = \varnothing$

$\Longrightarrow A_n \subset A_{n-1}^c \subset \cup_{i=1}^{\infty} J_i^{n-1}, A_n \subset A_{n-2}^c \subset \cup_{i=1}^{\infty} J_i^{n-2}, ..., A_n \subset A_1^c \subset \cup_{i=1}^{\infty} J_i^1$

$\Longrightarrow A_n \subset \cap_{k=1}^{n-1} (\cup_{i=1}^{\infty} J_i^k)$

$\Longrightarrow A_n \subset \beta_{n-1}$

$\Longrightarrow A_n \subset (\cup_{i=1}^{\infty} I_i^n) \cap \beta_{n-1}$

$\Longrightarrow A_n \subset \alpha_n$

$\Longrightarrow A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

$\Longrightarrow m_e(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(\alpha_n)$ .... (1)

Pero esta suma infinita ¿está acotada? Veamos:

$m(\alpha_1) + m(\beta_1) = m(a,b) + \frac{\varepsilon}{2}$

$m(\alpha_2) + m(\beta_2) = m[(\cup_{i=1}^{\infty} I_i^2) \cap \beta_1] + m[(\cup_{i=1}^{\infty} J_i^2) \cap \beta_1] \leq m(\beta_1) + \frac{\varepsilon}{2^2}$

$m(\alpha_3) + m(\beta_3) = m[(\cup_{i=1}^{\infty} I_i^3) \cap \beta_2] + m[(\cup_{i=1}^{\infty} J_i^3) \cap \beta_2] \leq m(\beta_2) + \frac{\varepsilon}{2^3}$

....

$m(\alpha_n) + m(\beta_n) = m[(\cup_{i=1}^{\infty} I_i^n) \cap \beta_{n-1}] + m[(\cup_{i=1}^{\infty} J_i^n) \cap \beta_{n-1}] \leq m(\beta_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

....

Entonces

$m(\alpha_1) + m(\alpha_2) + m(\alpha_3) + ... + m(\alpha_n) + ...$

$\leq (m(a,b) - m(\beta_1) + \frac{\varepsilon}{2}) + (m(\beta_1) - m(\beta_2) + \frac{\varepsilon}{2^2}) + (m(\beta_2) - m(\beta_3) + \frac{\varepsilon}{2^3}) + ...$

$... + (m(\beta_{n-1}) - m(\beta_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) + ... = m(a,b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = m(a,b) + \varepsilon$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} m(\alpha_n) \leq m(a,b) + \varepsilon$.

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} m(\alpha_n)$ está acotada.

Luego entonces $m_e(A) < \infty$.

Por otro lado

$m(A_n) \leq m(\alpha_n) \leq m((\cup_{i=1}^{\infty} I_i^n) \leq m(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$,

entonces

$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(\alpha_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + \varepsilon$. ....(2)

Por lo tanto, por (1),

$m_e(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + \varepsilon$.

Por lo tanto

$m_e(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

Veamos ahora como es la medida exterior de $A^c \cap I$:

$m(\beta_1) = m(a,b) + \frac{\varepsilon}{2} - m(\alpha_1)$

$m(\beta_2) \leq m(\beta_1) + \frac{\varepsilon}{2^2} - m(\alpha_2) = m(a,b) + \frac{\varepsilon}{2} - m(\alpha_1) + \frac{\varepsilon}{2^2} - m(\alpha_2)$

Supongamos que

$$m(\beta_{n-1}) \leq m(\beta_{n-2}) + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} - m(\alpha_{n-1})$$
$$\leq m(a,b) - m(\alpha_1) - m(\alpha_2) - ... - m(\alpha_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + ... + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}},$$

entonces

$$m(\beta_n) \leq m(\beta_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2^n} - m(\alpha_n)$$
$$\leq m(a,b) - m(\alpha_1) - m(\alpha_2) - ... - m(\alpha_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + ... + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} + \frac{\varepsilon}{2^n} - m(\alpha_n)$$
$$\Longrightarrow m(\beta_n) \leq m(a,b) - \sum_{i=1}^{n} m(\alpha_i) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + ... + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} + \frac{\varepsilon}{2^n}$$
$$\Longrightarrow m(\beta_n) \leq m(a,b) - \sum_{i=1}^{n} m(\alpha_i) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + ... + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} + \frac{\varepsilon}{2^n}$$
$$- \sum_{i=n+1}^{\infty} m(\alpha_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} m(\alpha_i),$$
$$\Longrightarrow m(\beta_n) \leq m(a,b) - \sum_{n=1}^{\infty} m(\alpha_n) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + ... + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} + \frac{\varepsilon}{2^n}$$
$$+ m(\alpha_{n+1}) + m(\alpha_{n+2}) + ...,$$

y dado que

$$A^c \cap I = I - \cup_{n=1}^{\infty} A_n = I \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = I \cap (\cap_{n=1}^{\infty} A_n^c) \subseteq (\cap_{n=1}^{\infty} A_n^c)$$
$$\subseteq [\cap_{n=1}^{\infty}((\cup_{i=1}^{\infty} J_i^n)] = \cap_{n=1}^{\infty} \beta_n$$
$$\Longrightarrow m_e(A^c \cap I) \leq m(\beta_n) \leq [m(I) - \sum_{n=1}^{\infty} m(\alpha_n)] + 2\varepsilon,$$

si n es lo suficientemente grande como para que $\sum_{i=n+1}^{\infty} m(\alpha_i) < \varepsilon$. Entonces

$$m_e(A^c \cap I) \leq m(I) - \sum_{n=1}^{\infty} m(\alpha_n) + 2\varepsilon \leq m(I) - \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + 2\varepsilon$$

(pues, por (2), $-\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \geq -\sum_{n=1}^{\infty} m(\alpha_n)$

$$\Longrightarrow m(I) - \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \geq m(I) - \sum_{n=1}^{\infty} m(\alpha_n))$$
$$\Longrightarrow m_e(A^c \cap I) \leq m(I) - \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$
$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \leq m(I) - m_e(A^c \cap I)$$
$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \leq m_i(A) \qquad .... (3)$$

Por lo tanto, de (2) y (3), tenemos

$$m_e(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \leq m_i(A).$$

Por lo tanto, el conjunto A es L-medible y $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

3' La medida del intervalo $(0,1)$ es igual a su longitud.

Demostración:

Para toda $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon = l(0 - \tfrac{\varepsilon}{2}, 1 + \tfrac{\varepsilon}{2}) \geq m_e(0,1) \geq m_i(0,1) &= m(a,b) - m_e((0,1)^c \cap (a,b)) \\ &\geq m(a,b) - \left[m(a, 0 + \tfrac{\varepsilon}{2}) + m(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}, b)\right] \\ &= m(a,b) - \left[(\tfrac{\varepsilon}{2} - a) + (b - 1 + \tfrac{\varepsilon}{2})\right] \\ &= m(a,b) - [b - a - 1 + \varepsilon] \\ &= (b-a) - (b-a) + 1 - \varepsilon \\ &= 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow 1 + \varepsilon \geq m_e(0,1) \geq m_i(0,1) \geq 1 - \varepsilon$$

$\therefore\ m(0,1) = 1$

Enseguida, Lebesgue muestra dos propiedades importantes para sus conjuntos me dibles, a saber que la unión e intersección numerable de conjuntos medibles es medible. Nosotros enmarcaremos las dos propiedades en el siguiente

Teorema 2.0.5 *La familia L de conjuntos Lebesgue-medibles es una σ-álgebra. Es decir*

1. *El complemento de un conjunto medible es medible.*
2. *La unión (o intersección) de una colección numerable de conjuntos medibles es medible.*

Demostración:

1. Sea A un conjunto medible, entonces

$m_e(A) = m_i(A) = m(I) - m_e(A^c)$,
$\Longrightarrow m_e(A^c) = m(I) - m_e(A) = m(I) - m_e[(A^c)^c] = m_i(A^c)$
$\therefore\ A^c$ es medible.

2. Sean A y B dos conjuntos medibles y $\varepsilon > 0$.

Sean $\{I_n^1\}$, $\{I_n^2\}$, $\{J_n^1\}$ y $\{J_n^2\}$ unas cubiertas abiertas (formadas por intervalos abiertos) para A, B, A^c y B^c, respectivamente, tales que
$m[(\cup_{n=1}^{\infty} I_n^1) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} J_n^1)] < \frac{\varepsilon}{2}$ y $m[(\cup_{n=1}^{\infty} I_n^2) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} J_n^2)] < \frac{\varepsilon}{2}$.
Entonces
$D = B - A = B \cap A^c \subset (\cup_{n=1}^{\infty} I_n^2) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} J_n^1)$ y
$D^c = (B \cap A^c)^c = A \cup B^c \subset (\cup_{n=1}^{\infty} I_n^1) \cup [(\cup_{n=1}^{\infty} J_n^2) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} J_n^1)]$.
Y como
$[(\cup_{n=1}^{\infty} I_n^2) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} J_n^1)] \cap [(\cup_{n=1}^{\infty} I_n^1) \cup ((\cup_{n=1}^{\infty} J_n^2) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} J_n^1))]$
$\subset [(\cup_{n=1}^{\infty} I_n^1) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} J_n^1)] \cup [(\cup_{n=1}^{\infty} I_n^2) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} J_n^2)]$,
$\Longrightarrow m[(\cup_{n=1}^{\infty} I_n^2) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} J_n^1)] \cap [(\cup_{n=1}^{\infty} I_n^1) \cup ((\cup_{n=1}^{\infty} J_n^2) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} J_n^1))] < \varepsilon$,
entonces
$m_e(D) - m_i(D) = m_e(D) - [m(I) - m_e(D^c)] = m_e(D) + m_e(D^c) - m(I)$
$\leq m[(\cup_{n=1}^{\infty} I_n^2) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} J_n^1)] + m[(\cup_{n=1}^{\infty} I_n^1) \cup ((\cup_{n=1}^{\infty} J_n^2) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} J_n^1))] - m(I)$
$< m(I) + \varepsilon - m(I) = \varepsilon$
$\Longrightarrow m_e(D) - m_i(D) < \varepsilon$.
Por lo tanto $m_e(D) = m_i(D)$
Por lo tanto D es L-medible.

Por lo tanto la diferencia de dos conjuntos L-medibles es L-medible.

Ahora, tomemos una familia $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...\}$ de conjuntos L-medibles y definamos los conjuntos

$B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2), ..., B_n = A_n - (\cup_{i=1}^{n-1} A_i), ...$

Los conjuntos B_n resultan ser ajenos dos a dos. En efecto, consideremos dos conjunto B_n y B_m con $n \neq m$; sin pérdida de generalidad, podemos suponer $m < n$, entonces

$B_m = A_m - (\cup_{i=1}^{m-1} A_i) \subseteq A_m \subseteq \cup_{i=1}^{n-1} A_i \subseteq B_n^c$

Por lo tanto $B_n \cap B_m = \varnothing$ si $n \neq m$.

Más aún, los conjuntos B_n son conjuntos L-medibles. Claramente B_1 y B_2 son L-medibles;

$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1) = B_1 \cup B_2$ es L-medible, por lo tanto B_3 es L-medible;

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup (A_3 - (A_1 \cup A_2)) = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ es L-medible, por lo tanto B_4 es L-medible; y así sucesivamente.

Por lo tanto

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n, ...$

$= A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - (A_1 \cup A_2)) \cup ... \cup (A_n - (\cup_{i=1}^{n-1} A_i)) \cup ... = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$

es L-medible.

Por lo tanto la familia L es una *σ-álgebra*.

En particular, **los conjuntos medibles bajo la definición de Borel son conjuntos Lebesgue-medibles.** Continuando con la relación anterior, se tiene el siguiente teorema debido a Lebesgue:

Teorema 2.0.6 *Si E es un conjunto medible, entonces existen dos conjuntos medibles de Borel A y B tal que $B \subset E \subset A$ y $m(B) = m(E) = m(A)$.*

Por otro lado, considerando que

$\{\{I_i\}_{i=1}^{n} \mid I_i \subset E$ con $I_i$un intervalo abierto$\}$

$\subset \{\{I_k\}_{k=1}^{\infty} \mid I_k \subset E$ con I_k un intervalo abierto$\}$ y

$\{\{I_i\}_{i=1}^{n} \mid E \subset \cup_{i=1}^{n} I_i$ con I_i un intervalo abierto$\}$

$\subset \{\{I_k\}_{k=1}^{\infty} \mid E \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k$ con I_k un intervalo abierto$\}$,

se tiene

$\{\sum_{i=1}^{n} l(I_i) \mid I_i \subset E\} \subset \{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \mid I_k \subset E\}$ y

$\{\sum_{i=1}^{n} l(I_i) \mid E \subset \cup_{i=1}^{n} I_i\} \subset \{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \mid E \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k\}$,

entonces

$\sup\{\sum_{i=1}^{n} l(I_i) \mid I_i \subset E\} \leq \sup\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \mid I_k \subset E\}$ y

$\inf\{\sum_{i=1}^{n} l(I_i) \mid E \subset \cup_{i=1}^{n} I_i\} \geq \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \mid E \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k\}$,

entonces

$C_i(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq C_e(E)$.

La desigualdad anterior implica que **los conjuntos Jordan-medibles también son Lebesgue-medibles** y la medida es la misma.

Lebesgue encontró cotas más precisas para la medida de un conjunto que las de Jordan consiguiendo así ampliar la famílía de conjuntos medibles y, a su vez, ampliar la familia de funciones integrables. Su Teoría de la medida no sólo es más general que la de Jordan y la de Borel sino que, además, contiene a las dos.

Para terminar con esta sección enunciaremos la caracterización dada por Lebesgue para las funciones Riemann-integrables y que es la que usualmente se maneja en los cursos modernos de análisis:

Una función acotada f definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y con valores en los reales es Riemann-integrable si y sólo si el conjunto de puntos donde la función es discontinua tiene medida cero.

Capítulo 3

EL PROBLEMA DE LA MEDIDA

3.1 Un conjunto no medible

En 1905 Vitali prueba que el problema planteado por Lebesgue no tiene solución mostrando la existencia de un conjunto no medible.

Antes de dar dicho conjunto tendremos que establecer un resultado que nos servirá para la correspondiente demostración de la afirmación hecha arriba:

Lema 3.1.1 *Sea $E \subset [0,1)$ un conjunto medible. Entonces para cada $y \in [0,1)$ el conjunto $E \dotplus y$ es medible y $m(E \dotplus y) = m(E)$.*

Demostración: Sean $E_1 = E \cap [0, 1-y)$ y $E_2 = E \cap [1-y, 1)$.
Es claro que los conjuntos E_1 y E_2 son conjuntos medibles, ajenos y que
$E = E_1 \cup E_2$.
Entonces $m(E) = m(E_1) + m(E_2)$.
Por otro lado
$z \in E_1 \Rightarrow z < 1 - y \Rightarrow z + y < 1 \Rightarrow E_1 \dotplus y = \{w \mid w = z + y\} = E_1 + y$.
Entonces $E_1 \dotplus y$ es medible y $m(E_1 \dotplus y) = m(E_1)$.
Análogamente
$z \in E_2 \Rightarrow 1 - y \leq z \Rightarrow 1 \leq z + y \Rightarrow E_2 \dotplus y = \{w \mid w = (z+y) - 1\}$
$= \{w \mid w = z + (y-1)\} = E_2 + (y-1)$.
Entonces $E_2 \dotplus y$ es medible y $m(E_2 \dotplus y) = m(E_2 + (y-1)) = m(E_2)$.
Resulta que los conjuntos $E_1 \dotplus y$ y $E_2 \dotplus y$ son ajenos, pues de lo contrario
$x \in (E_1 \dotplus y) \cap (E_2 \dotplus y) \Rightarrow x \in E_1 + y$ y $x \in E_2 + (y-1)$
$\Rightarrow x = z_1 + y$ con $z_1 \in E_1$ y

$x = z_2 + (y-1)$ con $z_2 \in E_2 \Rightarrow z_1 + y = z_2 + (y-1) \Rightarrow z_2 = z_1 + 1$, lo que es una contradicción.

Además $E \dot{+} y = (E_1 \dot{+} y) \cup (E_2 \dot{+} y)$,

$\therefore\ m(E \dot{+} y) = m(E_1 \dot{+} y) + m(E_2 \dot{+} y) = m(E_1) + m(E_2) = m(E)$,

$\therefore\ m(E \dot{+} y) = m(E)$.

Construcción del conjunto no medible:

Tomemos $x, y \in [0,1)$. Diremos que $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

La relación anterior, $\sim$, es una relación de equivalencia.

Demostración:

1. $x \sim x : x - x = 0 \in \mathbb{Q}$.
2. $x \sim y \Longleftrightarrow y \sim x : x \sim y \Longleftrightarrow x - y = r \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow y - x = -r \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow y \sim x$.
3. $x \sim y\ \ y\ y \sim z \Rightarrow x \sim z : x \sim y \Longleftrightarrow x - y = r \in \mathbb{Q}\ y\ \ y \sim z \Longleftrightarrow y - z = q \in \mathbb{Q}$ $\Longrightarrow x - z = (x-y) + (y-z) = r + q \in \mathbb{Q}\ \therefore\ x \sim z$.

Esta relación genera una partición del intervalo [0,1) en clases de equivalencia, es decir, dos elementos pertenecen a la misma clase de equivalencia si su diferencia es un racional, y, por lo tanto, dos elementos pertenecen a distintas clases de equivalencia si su diferencia es un irracional. Por ejemplo, todos los racionales pertenecen a la misma clase de equivalencia, mientras que $\sqrt{2}$ pertenece a otra clase de equivalencia (a la misma clase a la que pertenecen todos los números de la forma $\sqrt{2} + q$, $q \in \mathbb{Q}$).

Por el axioma de elección podemos formar un conjunto P que conste de uno y sólo un elemento de cada clase de equivalencia.

Afirmación: P es un conjunto no medible

Demostración: Sea $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ una enumeración de los números racionales del intervalo [0,1), con $r_0 = 0$.

Definimos los conjuntos $P_i = P \dot{+} r_i$, con $i = 1, 2, ...$

Los conjuntos P_i tienen las siguientes propiedades:

P1) Los conjuntos P_i son ajenos:

Supongamos que $P_i \cap P_j \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ x \in [0,1)$ tal que $x \in P_i$ y

$x \in P_j \Rightarrow x = p_i \dot{+} r_i$ y $x = p_j \dot{+} r_j$, con $p_i, p_j \in P$ y

$r_i, r_j \in \mathbb{Q} \Longrightarrow p_i \dot{+} r_i = p_j \dot{+} r_j$

$\Longrightarrow (p_i + r_i) \equiv (p_j + r_j) \bmod 1 \Longrightarrow (p_i + r_i) - (p_j + r_j) \equiv 0 \bmod 1$

$\Longrightarrow p_i + r_i - p_j - r_j = n$ con $n = 1, 0$ ó -1

$\Longrightarrow p_i - p_j = r_j - r_i + n \Longrightarrow p_i - p_j \in \mathbb{Q} \Longrightarrow p_i \sim p_j \Longrightarrow p_i = p_j$

$\Longrightarrow r_j - r_i + n = 0 \Longrightarrow r_j - r_i \in \mathbb{Z}$

Como $0 \leq r_j < 1$ y $-1 < -r_i \leq 0 \Longrightarrow -1 < r_j - r_i < 1$

$\Longrightarrow r_j - r_i = 0 \Longrightarrow r_j = r_i \Longrightarrow i = j.$

Por lo tanto los conjuntos P_i son ajenos dos a dos.

P2) $\cup_{i=0}^{\infty} P_i = [0,1)$:

$\subset$] Esta contención es clara pues $P_i \subset [0,1) \forall i$

$\supset$] $x \in [0,1)$, entonces x pertenece a alguna de las clases de equivalencia, entonces x tiene un representante x' en P.

Tenemos dos casos:

I) $x' \leq x$:

$x \sim x' \Rightarrow x - x' = r \in \mathbb{Q}$, con $0 \leq r < 1$

$\Rightarrow x = x' + r \Rightarrow x = x' + r_i$ p.a. $i \Rightarrow x \in P_i$ p.a. i.

II) $x < x'$:

Se ve que la forma de llegar de x' a x es sumandole "un número" w y luego restarle 1.

Es decir, $x = x' + w - 1 \Rightarrow x - x' + 1 = w$,

como $x \sim x' \Rightarrow w \in \mathbb{Q} \cap [0,1) \Longrightarrow w = r_i$ p.a. i

$\Rightarrow x = x' + r_i - 1$ p.a. $i \Rightarrow x = x' \dot{+} r_i$ p. a. $i \Longrightarrow x \in P_i$ p.a. i.

$\therefore \cup_{i=0}^{\infty} P_i = [0,1)$.

De lo anterior, se tiene que

$m[0,1) = m(\cup P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i)$.

Como P_i es una traslación módulo 1 de P

$\sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P)$

Entonces

$m[0,1) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P)$.

Si $m(P) = 0$, entonces $m[0,1) = 0$. Mientras que si $m(P) > 0$, entonces $m[0,1) = \infty$. Pero $m[0,1) = 1$.

Por lo tanto P no puede ser medible.

3.2 Teorema de Banach y Kuratowski

Una vez demostrado que el problema de la medida no tiene solución, varios matemáticos se dieron a la tarea de buscar condiciones menos restrictivas para la función "m" con la finalidad de garantizar la medibilidad de todos los subconjuntos del intervalo $[0,1]$ (o, equivalentemente, de todos los subconjuntos de la recta real). Uno de esos matemáticos fue Stefan Banach.

En 1929 Banach plantea la siguiente generalización del "problema de la medida":

¿Existirá una función "m" que, eliminando la condición de invariabilidad bajo traslaciones y añadiendo la condición que para X compuesto de un solo elemento $m(X) = 0$, le asigne a cada subconjunto X de $E = [0, 1]$ un valor real?

La respuesta que dan Banach y Kuratowski a este problema es negativa y es presentada como un Teorema, el cual nosotros llamaremos "Teorema de Banach y Kuratowski".

Para la demostración de este resultado, con la intención de separar todos los argumentos y resultados que no utilizan la Hipótesis del continuo, seguiremos el esquema que a continuación se indica. Primero definiremos una relación de orden parcial en el conjunto de sucesiones de enteros positivos (dada por B. y K.) y enunciaremos dos Proposiciones (Proposición 3.2.2 y Proposición 3.2.3); enseguida probaremos que la Proposición 3.2.2 implica la Proposición 3.2.3; continuaremos con el planteamiento de un Teorema (Teorema 3.2.5), el cual es una modificación del Teorema de Banach y Kuratowski, y probaremos que la Proposicion 3.2.3 implica dicho Teorema ; luego, enunciaremos el Teorema de Banach y Kuratowski, un Lema y un Corolario, y demostraremos que el Teorema 3.2.5 implica el Teorema de Banach y Kuratowski. Posteriormente, asumiendo la Hipótesis del continuo, mostraremos la equivalencia entre las dos Proposiciones dadas y verificaremos la veracidad de la Proposición 3.2.2 para, finalmente, obtener el resultado buscado (Corolario 3.2.13).

Comencemos pues con el desarrollo del esquema planteado.

Definición 3.2.1 *Sean $S = \{k_i\}$ y $T = \{n_i\}$ dos sucesiones de enteros positivos, convenimos escribir $T \prec S$, si $n_i \leq k_i \ \forall i$.*

Proposición 3.2.2 *Existe una familia F de la potencia del continuo cuyos elementos son sucesiones de enteros positivos y tal que, para cualquier sucesión S, el conjunto de sucesiones $T \in F$, con $T \prec S$, es a lo más numerable.*

Proposición 3.2.3 *Existe una familia de conjuntos A_k^i tal que*

1o. $E = A_1^1 \cup A_2^1 \cup ... \cup A_k^1 \cup ...$

$E = A_1^2 \cup A_2^2 \cup ... \cup A_k^2 \cup ...$

....

$E = A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_k^i \cup ...$

....

2o. Los conjuntos de una misma linea son disjuntos.

3o. Dada cualquier sucesión de enteros positivos $k_1, k_2, ..., k_i, ...$, el conjunto $\cap_{i=1}^{\infty}(A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i)$ es a lo más numerable.

Teorema 3.2.4 *Proposición 3.2.20* $\Longrightarrow$ *Proposición 3.2.3*

Demostración:

De acuerdo con la Proposición 3.2.2, existe una familia F de sucesiones que tiene la cardinalidad de E, entonces se puede establecer una biyección entre ambos conjuntos, $T_x \leftrightarrow x$ con $T_x \in F$ y $x \in E$.

Sea $T_x = n_1^x, n_2^x, ..., n_i^x, ...$

Definimos los conjuntos A_k^i de la Proposición 3.2.3 de la siguiente manera:

$x \in A_k^i$ cuando $k = n_i^x$.

Por ejemplo: si $n_1^x = 2, \quad x \in A_2^1$.
si $n_2^x = 7, \quad x \in A_7^2$.
si $n_6^x = 12, \quad x \in A_{12}^6$.

Es decir, el primer elemento n_1^x de T_x define a que conjunto de la primera fila pertenece x; el segundo elemento n_2^x de T_x define a que conjunto de la segunda fila pertenece x; y así sucesivamente. Es claro que 1o. se satisface.

Por otro lado, $x \in A_i^k \cap A_j^k \Rightarrow x \in A_i^k$ y $x \in A_j^k \Rightarrow n_k^x = i$ y $n_k^x = j \Rightarrow i = j$. Por lo tanto, también 2o. se satisface.

Para probar 3o, demos una sucesión arbitraria de números naturales $k_1, k_2, ..., k_i, ...$, y tomemos x que pertenece a $\cap_{i=1}^{\infty}(A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i)$:

$x \in \cap_{i=1}^{\infty}(A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i) \Rightarrow x \in (A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i), \ \forall i$
$\Rightarrow x \in A_j^i$, con $1 \leq j \leq k_i \ \forall i \Rightarrow j = n_i^x \leq k_i \ \forall i \Rightarrow T_x \prec S$.
$\Rightarrow \{T_x \mid x \in \cap_{i=1}^{\infty}(A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i)\}$ es a lo más numerable
$\therefore \{x \mid x \in \cap_{i=1}^{\infty}(A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i)\}$ es a lo más numerable.

Teorema 3.2.5 *No existe ninguna función m que haga corresponder a cada conjunto $X \subset E$ un número real $m(X)$ de manera que*

1. *Para cada X compuesto de un solo elemento, $m(X) = 0$*
2. *$m(X)$ es sigma aditiva*
3. *$m(E) \neq 0$*

Teorema 3.2.6 *Proposición 3.2.3* $\Longrightarrow$ *Teorema 3.2.5*

Demostración:

Supongamos que existe una función que satisface las condiciones del Teorema 3.2.5.

Sea $m(E) = a \neq 0$. Tomemos una familia de conjuntos A_k^i que satisfacen las condiciones 1o. y 2o. de la Proposición 3.2.3.

Por 2o, $a = m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k^1)$,

entonces existe k_1 tal que $|\sum_{k=k_1+1}^{\infty} m(A_k^1)| \leq \frac{|a|}{4}$,
definiendo $R^1 = A_{k_1+1}^1 \cup A_{k_1+2}^1 \cup ...$, se sigue que $| m(R^1) | \leq \frac{|a|}{4}$.

En general, sea $R^i = A_{k_i+1}^i \cup A_{k_i+2}^i \cup ...$ (los números k_i serán definidos inductivamente más adelante). Puesto que para toda i se tiene

$E - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}$
$= \cup_{k=1}^{\infty} A_k^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}$
$= (A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_k^i \cup ...) - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}$
$= (A_1^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}) \cup (A_2^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}) \cup ...,$

entonces

$m(E - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1})$ (por 2o. y 2)). Ahora vamos a definir a k_i, suponiendo definidos los números $k_1, k_2, ..., k_{i-1}$.

Como la medida de $E - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}$ es finita, existe k_i suficientemente grande tal que

$| \sum_{k=k_i+1}^{\infty} m(A_k^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}) | \leq \frac{|a|}{2^{i+1}}$, y
$(R^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1})$
$= (A_{k_i+1}^i \cup A_{k_i+2}^i \cup ...) - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}$
$= (A_{k_i+1}^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}) \cup (A_{k_i+2}^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}) \cup ...$
$= \cup_{k=k_i+1}^{\infty} (A_k^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1})$
$\therefore \ | m(R^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}) | \leq \frac{|a|}{2^{i+1}}$.

Por otro lado, observemos que

$\cup_{i=1}^{\infty} R^i = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup ...$
$= (R^1) \cup (R^2 - R^1) \cup (R^3 - R^2 - R^1) \cup ...$
$= \cup_{i=1}^{\infty} (R^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1})$,

entonces

$| m(\cup_{i=1}^{\infty} R^i) | = | m(\cup_{i=1}^{\infty} R^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}) |$
$= | \sum_{i=1}^{\infty} m(R^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}) |$
$\leq \sum_{i=1}^{\infty} | m(R^i - R^1 - R^2 - ... - R^{i-1}) |$
$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a|}{2^{i+1}} \leq \frac{|a|}{2}$.

Haciendo $b = m(\cup_{i=1}^{\infty} R^i)$ y $c = m(E - \cup_{i=1}^{\infty} R^i)$, se tiene

$a = b + c$
$\Longrightarrow a - b = c$
$\Longrightarrow | c | = | a - b | \geq | a | - | b | \geq \frac{|a|}{2}$,

y como

$E - \cup_{i=1}^{\infty} R^i = (\cup_{i=1}^{\infty} R^i)^c = \cap_{i=1}^{\infty} (R^i)^c = \cap_{i=1}^{\infty} (A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i)$,

se sigue que

$| m(\cap_{i=1}^{\infty} (A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i)) | \geq \frac{|a|}{2} \neq 0$.

Por lo tanto, por (1) y (2), el conjunto $\cap_{i=1}^{\infty} (A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i)$ es no numerable.

Por lo tanto, la condición 3o. no se satisface, lo cual es una contradicción.

La contradicción provino de haber supuesto la existencia de dicha función m. Por lo tanto, el teorema ha quedado demostrado.

Teorema 3.2.7 (de Banach y Kuratowski) *No existe ninguna función m que haga corresponder a cada conjunto $X \subset E$ un número real $m(X)$ de manera que*

1. *Para cada X compuesto de un solo elemento, $m(X) = 0$*
2. *m es sigma aditiva*
3. *m no es idénticamente cero.*

Observemos que 1. se desprende de 1' y 2' del problema de la medida, y que m puede tomar incluso valores negativos.

Para demostrar el siguiente teorema necesitamos dos resultados:

Lema 3.2.8 *Sean a, b, c, d números cardinales infinitos tales que $a < b$ y $c < d$. Entonces $a + c < bd$*

P.D.

i) $a + c \leq bd$

ii) $a + c \neq bd$

Demostración:

i) Supongamos que $a = |A|$, $b = |B|$, $c = |C|$, y $d = |D|$, con A, B, C, D ajenos y $|*|$ denota la cardinalidad del conjunto. Por hipótesis, existen $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ inyectivas. Sean a_1, a_2 elementos de A con $a_1 \neq a_2$, sean c_1, c_2 elementos de C con $c_1 \neq c_2$, y sea $F : A \cup C \longrightarrow B \mathrm{x} D$ con

$$F(x) = \begin{cases} (f(x), g(c_1)) & \text{si } x \in A \text{ pero } x \neq a_1 \\ (f(a_1), g(x)) & \text{si } x \in C \\ (f(a_2), g(c_2)) & \text{si } x = a_1. \end{cases}$$

F es inyectiva. Por lo tanto $|A| + |C| \leq |B|\,|D|$. Por lo tanto $a + c \leq bd$

ii) Supongamos que $a + c = bd$. Entonces existe $G : B \mathrm{x} D \longrightarrow A \cup C$ tal que G sería inyectiva.

Caso I) Para algún $d_0 \in D$ sucede que $G(b, d_0) \in A$ para todos los $b \in B$. En tal caso sea $\Psi : B \longrightarrow A$ con $\Psi(b) = G(b, d_0)$. G inyectiva implica Ψ inyectiva. Lo que es una contradicción (pues $a < b$).

Caso II) Para todo $d \in D$ hay algún $b_d \in B$ tal que $G(b_d, d) \in C$. Por el Axioma de elección, existe una función $\Phi : D \longrightarrow B$ tal que $G(\Phi(d), d) \in C$. Sea $\Psi\prime : D \longrightarrow C$, con $\Psi\prime(d) = G(\Phi(d), d)$. G inyectiva implica $\Psi\prime$ inyectiva. Lo que es una contradicción (pues $c < d$).

Corolario 3.2.9 *Supongamos* $a < |\mathbb{R}|$ *y* $c < |\mathbb{R}|$. *Entonces* $a + c < |\mathbb{R}|$.

Teorema 3.2.10 *Asumiendo el Axioma de elección, el Teorema 3.2.5 implica el Teorema 3.2.7.*

Demostración:

Supongamos que existe una función m que satisface las condiciones del Teorema 3.2.7.

Si $m(E) = 0$, por 3., existe $E_1 \subset E$ tal que $m(E_1) \neq 0$. Como $E = (E - E_1) \cup E_1$, por 2., $m(E - E_1) \neq 0$. Por lo menos uno de los dos conjuntos E_1, $E - E_1$ debe tener la cardinalidad de E (si no fuera así: sean $a = |E_1|$ y $c = |E - E_1|$. Por el Corolario 3.2.9 $a + c < |E|$, pero $a + c = |E_1 \cup (E - E_1)| = |E|$, lo cual es una contradicción); Sin pérdida de generalidad, supondremos que E_1 tiene la cardinalidad de E. Entonces podemos establecer una función f biyectiva entre E_1 y E, y podemos definir una función m^* para todos los subconjuntos X de E de la siguiente manera: $m^*(X) = m(f(X))$.

Afirmación: m^* hereda las propiedades de m.

Demostración:

1') Sea X un subconjunto de E con un solo elemento, entonces $f(X)$ es un subconjunto de E_1

(y de E) con un solo elemento, entonces $m(f(X)) = 0$, entonces $m^*(X) = 0$

2') Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos disjuntos de E

$f(X_i) \cap f(X_j) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, y \in E_1$ tal que $y \in f(X_i)$ y $y \in f(X_j) \Rightarrow f^{-1}(y) \in X_i$ y $f^{-1}(y) \in X_j$

$\Rightarrow X_i \cap X_j \neq \emptyset$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto $\{f(X_i)\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos disjuntos de E_1 (y de E).

Entonces

$m^*(\cup_{i=1}^{\infty} X_i) = m(f(\cup_{i=1}^{\infty} X_i)) = m(\cup_{i=1}^{\infty} f(X_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} m(f(X_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(X_i)$.

3') $f(E) = E_1 \Rightarrow m*(E) = m(f(E)) = m(E_1) \neq 0$ $\therefore m^*$ no es idénticamente cero.

Por lo tanto, existe una función m^* que satisface las condiciones del Teorema 3.2.5.

Teorema 3.2.11 *Asumiendo la Hipótesis del continuo, la Proposición 3.2.2 y la Proposición 3.2.3 son equivalentes.*

Sólo necesitamos probar que la Proposición 3.2.3 implica la Proposición 3.2.2.

Demostración:

Sean A_k^i los conjuntos que satisfacen la Proposición 3.2.3, sea

$T = \{n_1, n_2, ..., n_i, ... \mid n_i \in \mathbb{N}\}$ y sea $F = \{T \mid \cap_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i \neq \emptyset\}$.

Cada $\cap_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$ es a lo más numerable por la condición 3o. (3.2.3) y, por otro lado, $\cup(\cap_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i) = E$ por la condición 1o. (3.2.3), entonces debe haber una cantidad infinita no numerable de conjuntos $\cap_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$. Por lo tanto F y E tienen la misma cardinalidad.

Sea $S = \{k_1, k_2, ..., k_i, ...\}$ una sucesión arbitraria de números naturales. El conjunto $\cap_{i=1}^{\infty}(A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i)$, por 3o. (3.2.3), es a lo más numerable.

Tomemos $\cup(\cap_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i)$, con $n_i \leq k_i \ \forall i$.

Probaremos que $\cup(\cap_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i) \subseteqq \cap_{i=1}^{\infty}(A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i)$, con $n_i \leq k_i \ \forall i$:

Sea $x \in \cup(\cap_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i) \Longrightarrow x \in \cap_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i \Rightarrow x \in A_{n_i}^i$ (con $n_i \leq k_i \ \forall i$)

$\Longrightarrow x \in (A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i) \ \forall i \Longrightarrow x \in \cap_{i=1}^{\infty}(A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i)$. Además

$(\cap_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i) \cap (\cap_{i=1}^{\infty} A_{m_i}^i) = \emptyset$ (de lo contrario $x \in A_{n_1}^1$ y $x \in A_{m_1}^1$, contradiciendo 2o).

Así que por cada conjunto $\cap_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$ tenemos, al menos, un elemento

$x \in \cap_{i=1}^{\infty}(A_1^i \cup A_2^i \cup ... \cup A_{k_i}^i)$. Por lo tanto, existe a lo más una cantidad numerable de conjuntos $\cap_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$, con $n_i \leq k_i \ \forall i$, y por cada uno de estos conjuntos tenemos una sucesión T. Por lo tanto, el conjunto $\{T \in F \mid T \prec S\}$ es a lo más numerable.

Ahora, probaremos la veracidad de la Proposición 3.2.2 (y, por tanto, la veracidad de la Proposición 3.2.3):

Teorema 3.2.12 *Asumiendo la Hipótesis del continuo y el Axioma de elección (bajo la forma del Principio del buen orden), existe una familia F, de la potencia del continuo, cuyos elementos son sucesiones de enteros positivos y tal que para cualquier sucesión S, el conjunto de sucesiones $T \in F$, con $T \prec S$, es a lo más numerable.*

Demostración:

Tomemos la familia de todas las sucesiones cuyos elementos son números naturales, $\hbar = \{S \mid S : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}\}$.

Por un lado $C(\mathbb{R}) = C(\hbar) = 2^{\aleph_0}$; por otro lado, el Principio del buen orden implica que el conjunto $\hbar$ se puede bien ordenar:

$S_0, S_1, S_2, ... S_\omega, ... S_\alpha, ...$, con $S_\alpha \in \hbar$

Ahora, utilizando la Hipótesis del continuo ($C(\mathbb{R}) = \aleph_1$), el conjunto de predecesores de cualquier elemento del conjunto es a lo más numerable.

Construción por inducción transfinita sobre α:

1) Para $\alpha = 0$, sea $\xi_0 = 0$, i.e., $S_0 \longrightarrow S_{\xi_0} = S_0$.

Evidentemente, para $\beta < \alpha$, no ocurre que $S_{\xi_0} \prec S_\beta$ ni $S_{\xi_0} = S_{\xi_\beta}$.

2) Hipótesis de inducción:

Supongamos que, dada α, el conjunto de predecesores de S_α,

$\{T_1, T_2, ..., T_i, ... \mid T_i = S_\gamma \text{ p.a.} \gamma < \alpha\}$, tiene la propiedad de que a cada i se le puede asignar un número ξ_i tal que, para $\beta < i$, no se tiene $T_{\xi_i} \prec S_\beta$, de tal manera que la asociación es inyectiva (tampoco se tiene $T_{\xi_i} = S_{\xi_\beta}$), Es decir, a cada sucesión T_i le asociamos una sucesión T_{ξ_i} con las condiciones antes mencionadas:

$T_1 \quad T_2 \ ...T_i \ ...$

$\downarrow \quad \downarrow \ ... \ \downarrow$

$T_{\xi_1} \ T_{\xi_2}...T_{\xi_i}...$

Denotemos a cada sucesión como

$T_1 = \{t_1^1, t_2^1, t_3^1, ..., t_i^1, ...\}, T_{\xi_1} = \{t_1^{\xi_1}, t_2^{\xi_1}, t_3^{\xi_1}, ..., t_i^{\xi_1}, ...\}$

$T_2 = \{t_1^2, t_2^2, t_3^2, ..., t_i^2, ...\}, T_{\xi_2} = \{t_1^{\xi_2}, t_2^{\xi_2}, t_3^{\xi_2}, ..., t_i^{\xi_2}, ...\}$

.

.

.

$T_i = \{t_1^i, t_2^i, t_3^i, ..., t_i^i, ...\}, \ T_{\xi_i} = \{t_1^{\xi_i}, t_2^{\xi_i}, t_3^{\xi_i}, ..., t_i^{\xi_i}, ...\}$

.

.

.

Sea $p_i > máx\{t_i^i, t_i^{\xi_i}\}$.

Por último, sea ξ_α tal que $S_{\xi_\alpha} = \{p_i\}$.

Si $\beta < \alpha$ no se tiene $S_{\xi_\alpha} \prec S_\beta$ ni $S_{\xi_\alpha} = S_{\xi_\beta}$ (por construcción).

Definimos a la familia F como el conjunto de sucesiones S_{ξ_α}.

La familia F tiene la cardinalidad del continuo, pues la construcción se ha hecho para cada α. Además, dada cualquier sucesión S_β, si $S_{\xi_\alpha} \prec S_\beta$ se tiene que $\alpha \leq \beta$; como el conjunto de números α menores que β es un conjunto a lo más numerable, también lo será el conjunto $\{S_{\xi_\alpha} \mid S_{\xi_\alpha} \prec S_\beta\}$. Con lo que queda probado el Teorema.

Finalmente tenemos el siguiente

Corolario 3.2.13 *Asumiendo la Hipótesis del continuo, no existe una función* $m : X \longrightarrow \mathbb{R}$, *con* $X \subset E$, *que satisfaga:*

1. *Para cada* X *compuesto de un solo elemento* $m(X) = 0$,

2. $m(X)$ *es sigma aditiva,*

3. $m(X)$ *no es idénticamente cero.*

De esta manera, queda probada la afirmación de Banach y Kuratowski.

3.3 Otras generalizaciones del "problema de la medida"

En la búsqueda por encontrar una función medida definida para todos los subconjuntos acotados de la recta real o, equivalentemente, para todos los subconjuntos del intervalo $[0,1]$, varios matemáticos se dieron a la tarea de estudiar otras alternativas para el problema de la medida; ésto es, modificando las condiciones pedidas por Lebesgue, haciéndolas menos restrictivas, para entonces, quizás, poderle asignar un valor a todos los subconjuntos del intervalo $[0,1]$. A continuación presentaremos los resultados obtenidos en ese sentido:

En 1914, M. Hausdorff planteó el problema de la medida en sentido amplio, que consiste en encontrar una función medida m definida para todos los subconjuntos acotados de la recta real con las siguientes características:

1. m es no negativa,
2. m es finitamente aditiva,
3. m es invariante bajo traslaciones,
4. $m([0,1]) = 1$.

La solución a este problema fué dada por Banach en 1923, e incluso probó que el problema análogo en dos dimensiones también tiene solución. No obstante, Hausdorff había demostrado que el problema análogo para el caso de tres o más dimensiones no tiene solución.

En 1929, S. Banach y C. Kuratowski demostraron, asumiendo la Hipótesis del continuo, que la siguiente generalización del problema de la medida propuesta por Banach tampoco tiene solución:

Encontrar una función m definida para todos los subconjuntos del intervalo $[0,1]$ con valores en los reales y que satisfaga:

1. Para cada X compuesto de un solo elemento, $m(X) = 0$,
2. m es sigma aditiva,
3. m no es idénticamente cero.

(En la sección 3.2 se expone este resultado).

El resultado anterior muestra que aún quitando la condición de invariabilidad bajo traslaciones a la función medida, el problema planteado po Lebesgue no tiene solución.

Estudiando el problema de la medida en sentido amplio, en 1930, A. Tarski propuso el siguiente problema:

Encontrar una función m definida para todos los subconjuntos del intervalo $[0,1]$ tal que:

1. m es no negativa,

2. m es finitamente aditiva,

3. La medida de un intervalo es su longitud.

Tarski demostró que este problema y sus análogos en cualquier otra dimensión tiene solución, pero que la solución no es única.

A. Horn y A. Tarski, en 1948, demostraron que el problema de la extensión de una función finitamente aditiva definida sobre un álgebra de conjuntos a un álgebra más grande tiene solución. En particular, asumiendo el Axioma de elección, se tiene

Teorema 3.3.1 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras de subconjuntos de un conjunto Γ, tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{B} - \mathcal{A}$ y m una función con valores en los reales definida sobre $\mathcal{A}$ con las siguientes propiedades:*

1. *m es no negativa,*

2. *m es $\sigma-$ aditiva,*

3. *$m(\Gamma) < \infty$.*

   Por último, sean

   $m_i(B) = \sup\{m(D) \mid D \subset B, D \in \mathcal{A}\}$,

   $m_e(B) = \inf\{m(D) \mid B \subset D, D \in \mathcal{A}\}$.

   y c un número real tal que $m_i(B) \leq c \leq m_e(B)$

   Entonces existe $m^*: \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$, que satisface las propiedades para m y tal que $m^*(B) = c$

Finalmente tenemos el siguiente

Teorema 3.3.2 *Asumiendo la Hipótesis del Continuo, no existe una extensión de la medida de Lebesgue sobre todos los subconjuntos del intervalo $[0,1]$, ni de cualquier otra medida (σ-aditiva).*

Capítulo 4

CONCLUSIONES

La Teoría de la medida surgue a partir de la necesidad de caracterizar a las funciones integrables. Es Jordan quien por primera vez, logra establecer la Teoría de integración en términos de la Teoría de la medida. El desarrollo de ésta última permitió, a su vez, desarrollar la Teoría de integración. Las aportaciones en uno y en otro sentido no son pocas, sin embargo, podemos señalar en especial las contribuciones hechas por Henri Lebesgue. Este último logra conjuntar los trabajos de Borel y Jordan para desarrollar una Teoría de la medida a partir de la cual logra desarrollar una Teoría de integración vigente hasta nuestros días, siendo una de las más importantes. Por otro lado, Lebesgue deja planteado un problema, llamado por él mismo el "problema de la medida" (ver capítulo 2), para el cual no tiene respuesta pero que despertaría el interés de varios matemáticos.

Como puede apreciarse, el problema de la medida de un conjunto de números reales es, en esencia, un problema de extensión. Es decir, se define una función medida m sobre una familia de conjuntos y después se procede, de ser posible, a extender esta función a una familia más grande de conjuntos, tanto como se pueda. Ahora, como también se puede observar, una manera de lograrlo, partiendo de que la medida de un intervalo es igual a su longitud, es siguiendo el procedimiento dado por Lebesgue (ver capítulo 2). Esta opción es la única que puede darse manteniendo la propiedad de σ-aditividad para dicha función; condición importante cuando se trata de extender una función definida sobre un álgebra a la σ-álgebra generada por ella. El problema con esta opción es que no se podría definir dicha función sobre todos los subconjuntos del intervalo $[0,1]$. Otra manera de lograrlo es eliminando las propiedades de invariancia bajo traslaciones y σ-aditividad. La primera de ellas se tiene que eliminar si se desea extender la Teoría de la medida a conjuntos en donde no estén definidas operaciones algebraicas; la segunda se reemplaza por la propiedad de aditividad finita. El problema con esta última es que la forma de lograr la extensión no es única. Así que se tienen dos opciones: o nos quedamos con la propiedad de σ-aditividad y la unicidad de la extensión sin poder abarcar a todos los subconjuntos del intervalo $[0, 1]$, o nos quedamos con la propiedad de aditividad finita, abarcando a todos los subconjuntos del intervalo $[0, 1]$, pero la extensión no será única. En la teoría moderna se prefiere la primera opción.

Capítulo 5

APÉNDICE

A continuación daremos algunas definiciones y resultados que se utilizan en éste trabajo

Definición 5.0.3 $E + y = \{w \mid w = z + y \quad con \quad z \in E\}$

Definición 5.0.4 *Sean x y y dos números reales que pertenecen al intervalo* $[0, 1)$. *Definimos la **suma modulo 1** de x y y como*

$$x \dot{+} y = \begin{cases} x + y & si\ x + y < 1 \\ x + y - 1 & si\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

Definición 5.0.5 *La **traslación modulo 1** de E es el conjunto*

$$E \dot{+} y = \{w \mid w = z \dot{+} y \ para\ algún\ z \in E\}$$

Definición 5.0.6 *Un conjunto Ω es llamado un **conjunto ordenado**, si dada la relación $\prec$ para cualesquiera dos elementos a y b del conjunto se satisfacen las siguientes dos condiciones:*

1. *Si $a \neq b$, entonces se satisface sólo una de las siguintes condicones: $a \prec b$ o $b \prec a$.*

2. *Si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces se tiene $a \prec c$.*

Definición 5.0.7 *Un conjunto ordenado Ω se dice **bien -ordenado**, si tanto Ω como cualquier subconjunto no vació de Ω tienen un primer elemento bajo el orden prestablecido para los elementos de Ω. El conjunto vacío es también considerado un conjunto bien-ordenado.*

Definición 5.0.8 *Un **número ordinal** (u ordinal) es un conjunto bien ordenado $(X, \prec)$ tal que*

$$a = \{x \in X \mid x \prec a\}$$

para toda $a \in X$.

Principio del buen orden: *Todo conjunto puede ser bien-ordenado.*

Axioma de elección: *Sea F un conjunto de conjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos. Entonces existe un conjunto M que consta de precisamente un elemento de cada miembro de F.*

Teorema 5.0.9 *El Axioma de Elección y el Principio del buen orden son equivalentes.*

Hipótesis del continuo: *La cardinalidad de los reales es $\aleph_1$ ($|\mathbb{R}| = \aleph_1$).*

Bibliografía

[1] Banach, S et Kuratowski, C.,Sur une généralisation du probléme de la mesure, Fundamenta Mathematicae, t. 14, 1929.

[2] García, Álvarez, M.A., Surgimiento de la teoría de la medida, Notas mecanográficas, México.

[3] Guinness, Grattan, Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1a. ed., España, Ed. cast.: Alianza Editorial, S.A., 1984.

[4] Hawkins, Thomas, Lebesgue's theory of integration, 2a. ed., Estados Unidos de América, Ed. Chelsea Publishing Company, 1975.

[5] Kamke, E., Theory of Sets, 1a. ed., Estados Unidos de América, Nueva York, Ed. Dover publications, Inc.,

[6] Keith, Devlin, The Joy of Sets, 2a. ed., Estados Unidos de América, Nueva York, Ed. Springer, 1993,

[7] Lebesgue, Henri, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 1a. ed., Francia, Paris, Colección de monografías sobre la teoría de funciones, 1904.

[8] Royden, H.L., Real Analisys, 3a. ed., Estados Unidos de América, Ed. Earlier editions, 1988.

[9] Volterra, Vito, Sui principii del calcolo integrale, Opere Matematiche, volume primo 1881-1892, Roma, 1954

Agradecimientos:

A Miguel Ángel Garcia Álvarez,
Profesor de tiempo completo del Depto. de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M.,
por su valiosa ayuda al asesorarme en la elaboración de éste trabajo.

A José Alfredo Amor,
Profesor de tiempo completo del Depto. de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M.,
por su asesoría en temas referentes a la Teoría de conjuntos.

A David,
Profesor del Depto. de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M.,
por su colaboración en temas referentes a la Teoría de conjuntos