00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

HIPERSUPERFICIES TIPO ESPACIO CON CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN LOS ESPACIOS DE LORENTZ

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA

MARCO ANTONIO ORTEGA CRUZ

DIRECTOR DE TESIS: Dr. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE 2004

A mis padres

Agradecimientos

Debo agradecer a mis padres más que a nadie. Ellos me alentaron, respaldaron y me apoyaron, para continuar estos estudios y terminar con éxito este trabajo. Siempre, y más que ninguna otra persona creyeron en mí. Por eso a ellos es a quienes dedico esta tesis.

Agradezco a mi asesor Dr. Oscar A. Palmas Velasco por todo el tiempo que me ha dedicado, por sus sugerencias, apoyo y la confianza que ha tenido en mí.

Gracias al Dr. José Guadalupe Reyes Victoria de la UAM-I mi alma-mater por haber dirigido mis primeros pasos en la geometría y llevarme hasta Oscar.

Gracias a todos mis compañeros de trabajo por haber creido, alentado y tenerme paciencia. También debo agradecer a mis amigos y parientes por haberme soportado en los momentos de tensión y preocupación. Gracias a todos.

Hipersuperficies tipo espacio con curvatura media constante en los espacios de Lorentz

Marco Antonio Ortega Cruz

23 de septiembre de 2004

Resumen

Se definen las hipersuperficies de rotación con curvatura constante en variedades de Lorentz y se estudia el caso particular del espacio de De Sitter mostrando algunas de sus propiedades y proporcionando ejemplos de superficies tipo espacio umbílicas y no umbílicas. Se hace una caracterización local de tales hipersuperficies cuando la dimensión es mayor que dos, en términos de sus curvaturas principales. Se estudian algunos casos especiales de hipersuperficies de rotación con curvatura media constante en el espacio hiperbólico. También se clasifican las hipersuperficies de rotación tipo espacio con H_r constante en el espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$; H_r se considera como la función r-ésima simétrica normalizada de las curvaturas principales. Finalmente se hace una clasificación de las superficies de rotación tipo espacio y tipo tiempo en el espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^4$.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Un poco de historia

Una superficie mínima es una superficie regular cuya curvatura media es nula en todos sus puntos.

A principios del siglo XVIII sólo se conocía una superficie mínima, el plano. El geómetra e ingeniero francés J. B. Meusnier construyó los primeros ejemplos no triviales de las superficies mínimas; a saber, el catenoide y el helicoide. Otro ejemplo no trivial conocido como superficie de Scherk, fue publicado en 1835, su autor fue H. F. Scherk.

Sea C una curva suave y cerrada en el espacio. El problema de Plateau[1] consiste en la construcción de una superficie con frontera igual a la curva dada y con área mínima. El mismo Plateau estudió el problema por métodos experimentales por el año de 1850. Las superficies de área mínima se realizan físicamente con membranas de agua jabonosa.

La primera solución matemáticamente satisfactoria de este problema fue dada por el matemático alemán H. A. Schwarz en el año de 1865. Sin saberlo Schwarz, Riemann estaba trabajando al mismo tiempo en el mismo problema; posiblemente, Riemann tampoco conocía el trabajo de Schwarz.

Antes de que el cálculo de variaciones se utilizara en las superficies mínimas, se había observado que existía una relación entre estas superficies y el análisis complejo desarrollado en el siglo XIX. Utilizando el análisis complejo, K. T. Weierstrass desarrolló las fórmulas de representación que pueden describir cualquier superficie mínima en $\mathbb{R}^3$. En 1866, Weierstrass

[1] Llamado así en honor del físico belga J. A. Plateau.

reconoció que el problema de Plateau era bastante complicado, por lo que restringió el problema al caso en el que la frontera de la curva estaba formada por segmentos de línea recta en lugar de una curva general.

La primera solución general del problema de Plateau fue finalmente dada en 1931 por el norteamericano J. Douglas y por el húngaro T. Radó, de manera independiente. Tanto Douglas como Radó admitieron en sus estudios a las superficies no regulares.

En 1936 Douglas obtuvo la medalla Fields por su trabajo sobre las superficies mínimas. Como es frecuente en la historia de las matemáticas, la solución de este problema generó inmediatamente nuevas interrogantes. El teorema demostrado por Douglas y Radó mostró sólo la existencia de superficies mínimas para una curva cerrada, pero dijo muy poco sobre sus propiedades geométricas.

Uno de los trabajos importantes del siglo XX en esta área fue realizado a principios de la década de 1960 por R. Osserman, quien introdujo desarrollos que llevaron a la construcción de nuevas superficies mínimas. El trabajo de Osserman se basó en artículos de Weierstrass, Radó y Douglas. En su trabajo, Osserman pudo describir muchas superficies mínimas sin frontera.

Existen muchas obras dedicadas al tema de las superficies mínimas; entre otros tenemos los textos de Osserman [23], H. B. Lawson [15] y M. do Carmo [9, 10, 11, 12], sólo por mencionar algunos.

1.2. Algunas generalizaciones

Existen generalizaciones de la teoría de las superficies mínimas en varias direcciones. A continuación mencionaremos algunas de estas generalizaciones.

Comenzaremos con las superficies con curvatura media constante no nula, de las cuales haremos una breve reseña histórica.

La primera referencia que se tiene de ellas aparece en el trabajo de Ch. E. Delaunay realizado en 1841 [8] donde él clasifica las superficies de rotación con curvatura media constante. En una nota de Sturm se destaca que las superficies con curvatura media constante son puntos críticos de un problema variacional.[2] Además Delaunay no sólo clasificó tales superficies, también dió una construcción geométrica que se puede generalizar a otros espacios, tales como $\mathbb{H}^3$.

[2]En el caso de las superficies mínimas, el problema variacional consiste precisamente en minimizar el área de la superficie.

Como ya se había mencionado, las superficies mínimas son aquellas en las que se pide que la curvatura media se anule; esta curvatura está dada por $\frac{k_1+k_2}{2}$, donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales. Más en general, podemos considerar en una variedad n-dimensional la siguiente función de las curvaturas principales $k_1, k_2, \ldots, k_n$:

$$f(k_1, k_2, \ldots, k_n) = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$

y decir que una hipersuperficie es mínima si $f(k_1, k_2, \ldots, k_n) = 0$. Podemos caracterizar dicha superficie como un punto crítico de un problema variacional.

También podemos tomar otra función sencilla, por ejemplo,

$$g(k_1, k_2, \ldots, k_n) = k_1 k_2 \cdots k_n;$$

es decir, el producto de las curvaturas principales. Si este producto se anula, existen muy pocas superficies que satisfacen esta propiedad; por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ sólo tenemos cilindros, conos y planos.[3]

Entre estos extremos se encuentran las r-curvaturas medias:

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{i_1 < \cdots < i_r} k_{i_1} \cdots k_{i_r} \tag{1.1}$$

donde las k_i son las curvaturas principales. Las $r-$curvaturas H_r se revisarán en detalle en el capítulo cuatro.

Una línea de investigación general consiste en tratar de generalizar las propiedades de H_1 y H_n al caso de H_r. Por ejemplo, Barbosa y Colares mostraron que las hipersuperficies r-mínimas (es decir, $H_r = 0$) también son puntos críticos de un problema variacional. En [24] se caracteriza y clasifica todas las hipersuperficies de rotación con H_r constante.

La teoría mencionada se puede extender también a los casos de las variedades semi-riemannianas, donde para cada punto $p \in M$ elegimos una forma bilineal $\langle\, ,\, \rangle_p$ en T_pM, simétrica, no degenerada, no necesariamente definida positiva y que varía diferenciablemente con p.

Como ejemplo de variedad semi-riemanniana tenemos a $\mathbb{R}^{n+2}_1$, que denota a $\mathbb{R}^{n+2}$ dotado de la métrica

$$\langle u, v\rangle = -u_0 v_0 + \sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i$$

[3]Las superficies que satisfacen una ecuación del tipo $h(k_1, k_2) = 0$ son las superficies de Willmore.

donde $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{n+1})$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{n+1})$.

Otro ejemplo es $\mathbb{S}_1^{n+1}$, la esfera unitaria en $\mathbb{R}_1^{n+2}$; es decir,

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \left\{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \langle x, x\rangle = 1\right\},$$

también conocida como espacio de De Sitter.

Una hipersuperficie de una variedad semi-riemanniana es **de tipo espacio** si la métrica inducida en la hipersuperficie es una métrica riemanniana. En 1977, Goddard conjeturó que las únicas hipersuperficies de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ completas tipo espacio con curvatura media constante son umbílicas. Sin embargo, en 1981 Dajczer y Nomizu construyeron una superficie completa con curvatura media constante H en $\mathbb{S}_1^3$ la cual no es umbílica. Este ejemplo mostró que la conjetura de Goddard es falsa en general, por lo que se buscaron condiciones adicionales para que una hipersuperficie sea totalmente umbílica.

Los primeros resultados en esta dirección se obtuvieron independientemente por Ramanathan y por Akutagawa en 1987, los cuales probaron que si la curvatura media H de una superficie completa en $\mathbb{S}_1^3$ satisface $H^2 < 1$, entonces la superficie es umbílica.

Akutagawa también, mostró que cuando $n = 2$, para alguna constante $H^2 > 1$ existe una superficie no umbílica de curvatura media constante H en el espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$. Un año después, S. Montiel [20] resolvió el problema de Goddard en el caso compacto en $\mathbb{S}_1^3$ sin restricción sobre el rango de H. Montiel construyó ejemplos de hipersuperficies tipo espacio completas no umbílicas en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ con curvatura media constante H tal que $H^2 > \frac{4(n-1)}{n^2}$, incluyendo los llamados cilindros hiperbólicos.

1.3. El concepto de estabilidad

La cuestión de estabilidad para hipersuperficies en variedades riemannianas surge en un artículo de Barbosa y do Carmo [2], además de otro interesante artículo de Barbosa, do Carmo y Eschenburg [3]. Ellos mostraron que las esferas son los únicos puntos críticos estables de la funcional de área que mantiene el volumen constante. El concepto de estabilidad se define en el capítulo cuatro.

En el caso riemanniano, las hipersuperficies con curvatura media constante son puntos críticos del problema variacional de minimizar el área para variaciones que preservan el volumen; esto ocurre también en el caso lorentziano, aunque en este segundo caso el problema fundamental es el de maximizar el área.

En 1984, J. L. Barbosa y M. do Carmo [2] publicaron un teorema de estabilidad para hipersuperficies con curvatura media constante. Este teorema afirma que las únicas hipersuperficies compactas estables y con curvatura media constante en $\mathbb{R}^{n+1}$ son las esferas. El teorema de estabilidad fue extendido en 1988 para hipersuperficies con curvatura media constante en los espacios $\mathbb{S}^{n+1}$ y $\mathbb{H}^{n+1}$ por Barbosa, do Carmo y Eschenburg. Barbosa y Oliker dieron una definición para la estabilidad de las hipersuperficies tipo espacio con curvatura media constante en los espacios de Lorentz y obtuvieron varios resultados de estabilidad en $\mathbb{R}_1^{n+1}$ y $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Para el estudio de la teoría de superficies en formas espaciales, son muy importantes los problemas de construcción o clasificación de superficies con curvatura constante. Las hipersuperficies con curvatura media constante también son importantes en la teoría de la relatividad.

El interés en el estudio de las variedades de Lorentz reside en el hecho de que sirven como modelos del espacio tiempo en la relatividad general. En particular, el espacio de De Sitter es un modelo tiempo espacio con curvatura seccional constante. En este contexto, las hipersuperficies de curvatura media constante son importantes, por ejemplo, para el estudio de la propagación de las ondas gravitacionales [19].

Capítulo 2

Geometría Básica de los espacios de Lorentz

2.1. Variedades semi-riemannianas

Recordemos primero que una forma bilineal simétrica en un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ es una función $\mathbb{R}$–bilineal $g : V \times V \to \mathbb{R}$, con $g(v, w) = g(w, v)$ para toda pareja de vectores v y $w \in V$.

Definición 2.1 *Una forma bilineal simétrica en V es*

1. **definida positiva** *(***negativa***) si para cada $v \neq 0$ ocurre que $g(v, v) > 0 \ \ (< 0)$.*
2. **semi-definida positiva** *(***negativa***) si $g(v, v) \geq 0 \ \ (\leq 0)$ para toda $v \in V$.*
3. **no degenerada** *si $g(v, w) = 0$ para toda $w \in V$ implica que $v = 0$.*

Ejemplo 2.2 *Como de costumbre, $\mathbb{R}^n$ denota al conjunto*

$$\{\ v = (v_1, \ldots, v_n)\ \mid v_i \in \mathbb{R}\ \}$$

dotado de la forma bilineal, simétrica y definida positiva

$$\langle v, w \rangle = \sum v_i w_i,$$

donde $w = (w_1, \ldots, w_n)$.

Si g es una forma bilineal simétrica en V, entonces para todo subespacio W en V la restricción $g|_{W\times W}$, denotada solamente por $g|_W$, es también bilineal y simétrica. Si g es (semi-)definida, también lo es $g|_W$. Sin embargo, si g es no degenerada, puede ocurrir que $g|_W$ sea degenerada.

Definición 2.3 *El* **índice** ν *de la forma bilineal simétrica g en V es la dimensión del mayor subespacio $W \subset V$ en el cual $g|_W$ es definida negativa.*

Así $0 \leq \nu \leq \dim V$, y $\nu = 0$ si y sólo si g es definida positiva.

Definición 2.4 *Un* **producto escalar** *g sobre un espacio vectorial V es una forma bilineal simétrica no degenerada en V.*

Definición 2.5 *Un* **tensor métrico** *g sobre una variedad M es un campo tensorial simétrico no degenerado de orden 2 sobre M de índice constante; es decir, para cada $p \in M$, g_p es un producto escalar en T_pM.*

Definición 2.6 *Una* **variedad semi-riemanniana** *es una variedad M provista con un tensor métrico g.*

El valor común ν del índice g_p en una variedad semi-riemanniana M es llamado el **índice** de M; claramente, $0 \leq \nu \leq n = \dim M$. Si $\nu = 0$, M es una **variedad riemanniana**; en este caso, cada g_p es entonces un producto escalar en T_pM. Si $\nu = 1$ y $n \geq 2$, M es una **variedad de Lorentz**.

El significado geométrico del índice de la variedad semi-riemanniana deriva de la tricotomía:

Definición 2.7 *Un vector tangente v a M es*

1. **tipo espacio** *si $\langle v, v\rangle > 0$ o $v = 0$.*

2. **nulo** *si $\langle v, v\rangle = 0$ y $v \neq 0$.*

3. **tipo tiempo** *si $\langle v, v\rangle < 0$.*

El conjunto de vectores nulos en T_pM es llamado el **cono nulo** en $p \in M$. La categoría a la cual pertenece un vector tangente es llamada **carácter causal**. Esta terminología deriva de la teoría de la relatividad.

Ejemplo 2.8 Sea
$$\mathbb{R}^n_\nu = \{(v_1, \ldots, v_n) \,|v_i \in \mathbb{R}\},$$
con la métrica de índice ν dada por
$$\langle v_p, w_p \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} v_i w_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} v_j w_j.$$
Este espacio se reduce a $\mathbb{R}^n$ si $\nu = 0$. Para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n_1$ es llamado el espacio de Minkowski; si $n = 4$ éste es un ejemplo de espacio-tiempo relativista.

Fijando la notación
$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1, & \text{para } 1 \leq i \leq \nu, \\ +1, & \text{para } \nu+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$
entonces el tensor métrico de $\mathbb{R}^n_\nu$ puede ser escrito
$$g = \sum \varepsilon_i du_i \otimes du_i$$
para las coordenadas usuales $(u_1, \ldots, u_n)$ en $\mathbb{R}^n_\nu$.

2.2. Ecuaciones de estructura

Sea M una variedad semi-riemanniana con g un tensor métrico de índice ν.

Un conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_n$ en el espacio tangente T_pM en un punto $p \in M$ es ortonormal si $|\langle v_i, v_j \rangle| = \delta_{ij}$ para toda $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Un **marco móvil ortonormal** es un conjunto de campos vectoriales diferenciables $\{e_1, \ldots, e_n\}$ definidos en un conjunto abierto de M que en cada punto son ortonormales. Denotamos
$$\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle = \begin{cases} -1, & 1 \leq i \leq \nu, \\ 1, & \nu+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$
Las 1-formas $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ definidas por $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}$, son las **formas duales** asociadas al marco $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Proposición 2.9 *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un marco móvil ortonormal en una variedad semi-riemanniana M^n con formas duales $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$. Entonces existen 1-formas ω_{ij} únicas tales que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ y*

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \omega_{ij} \wedge \theta_j. \tag{2.1}$$

La demostración de este hecho puede verse en el apéndice. Las 1-formas ω_{ij} se llaman **formas de conexión** para el marco $\{e_1, \ldots, e_n\}$. La ecuación (2.1) se llama **primera ecuación de estructura**.

Otro resultado fundamental es el siguiente.

Lema 2.10 (de Cartan) *Sean V^n un espacio vectorial de dimensión n, y $\omega_1, \ldots, \omega_r : V^n \to \mathbb{R}$, $r \leq n$, formas lineales en V que son linealmente independientes. Suponemos que existen formas $\theta_1, \ldots, \theta_r : V \to \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0$. Entonces*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j, \quad \text{con } a_{ij} = a_{ji}.$$

Demostración. Completaremos las formas ω_i a una base

$$\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1}, \ldots, \omega_n$$

de V^* y escribimos

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j + \sum_l b_{il}\omega_l, \quad l = r+1, \ldots, n$$

Utilizando la hipótesis, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \omega_i \wedge \theta_i = \sum_{i,j} a_{ij}\, \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i,l} b_{il}\, \omega_i \wedge \omega_l \\ &= \sum_{i<j} (a_{ij} - a_{ji})\, \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i<l} b_{il}\, \omega_i \wedge \omega_l. \end{aligned}$$

Como $\omega_k \wedge \omega_s$, $k < s$, $k, s = 1, \ldots, n$ son linealmente independientes, concluimos que $b_{il} = 0$ y $a_{ij} = a_{ji}$. ■

Por otro lado, definimos n^2 2-formas Ω_{ij}, llamadas **formas de curvatura** de M, mediante:

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \tag{2.2}$$

Como las formas Ω_{ij} tienen grado dos, ellas pueden ser escritas como

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \varepsilon_k \varepsilon_l R_{ijkl} \theta_k \wedge \theta_l = -\sum_{k<l} \varepsilon_k \varepsilon_l R_{ijkl} \theta_k \wedge \theta_l \tag{2.3}$$

donde $R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0$.

Las formas de curvatura permiten definir varios tipos de curvatura en M, siendo de las más importantes la curvatura seccional, que introduciremos a continuación.

Sea $P \subset T_pM$ un subespacio no degenerado de dimensión dos del espacio tangente T_pM de M en $p \in M$. Escojamos un marco ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ en una vecindad de p de tal modo que e_1, e_2 generen a P. El número

$$\frac{\Omega_{12}(e_1, e_2)}{\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2}, \tag{2.4}$$

depende sólo del subespacio P y es llamado la **curvatura seccional** de P, denotada $K(P)$.

2.3. Derivación de campos y formas

Las formas de conexión permiten definir una noción de derivación para campos de vectores en M.

Definición 2.11 *Sean X y Y campos vectoriales diferenciables en M y sea $\{e_i\}$ un marco ortonormal en un abierto $U \subset M$. Supongamos que $Y = \sum_i y_i e_i$. Entonces definimos la* **derivada covariante** *de Y con respecto a X como*

$$D_X Y = \sum_j \left\{ dy_j(X) + \varepsilon_j \sum_i \omega_{ij}(X) y_i \right\} e_j \tag{2.5}$$

Se puede mostrar que $D_X Y$ es independiente del marco $\{e_i\}$ y por lo tanto se puede definir globalmente en M.

Hemos definido la derivada $D_X Y$ por medio de las formas de conexión. Mostraremos que puede seguirse el camino inverso, es decir, podemos definir las formas de conexión en términos de la derivada; para esto, hagamos $Y = e_i$ en la ecuación (2.5), de modo que $y_j = \delta_{ij}$ es constante; tenemos

$$D_X e_i = \sum_j \varepsilon_j \omega_{ij}(X) e_j$$

de donde

$$\langle D_X e_i, e_j \rangle = \omega_{ij}(X)$$

Si denotamos

$$\Gamma^j_{ki} = \langle D_{e_k}(e_i), e_j \rangle = \omega_{ij}(e_k),$$

éstos son los **símbolos de Christoffel.**

En particular, cuando $Y = e_i$ tenemos:

$$D_{e_i} e_i = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_{ij}(e_i) e_j \tag{2.6}$$

y

$$\langle D_{e_i} e_i, e_j \rangle = \omega_{ij}(e_i).$$

El siguiente resultado muestra que D satisface las propiedades usuales de una conexión. La demostración aparece en el apéndice.

Lema 2.12 *Para campos vectoriales X y Y en M y para cada $1 \leq i, j \leq n$, son válidas las ecuaciones:*

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle, \\ \Omega_{ij}(X,Y) &= \left\langle D_X D_Y e_i - D_Y D_X e_i - D_{[X,Y]} e_i, e_j \right\rangle. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Este Lema nos dice que los Ω_{ij} definen al tensor de curvatura usual, como en [9], mientras que D es la conexión semi-Riemanniana de M.

Definición 2.13 *Para campos vectoriales X, Y, Z y W en M, definimos*

$$\Omega(X,Y,Z,W) = \left\langle D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z, W \right\rangle.$$

Proposición 2.14 *Para campos vectoriales X, Y, Z y W en M, se tiene*

$$\Omega(X,Y,Z,W) = \sum_{i,j} Z_j W_i \Omega_{ij}(X,Y) = \sum_{i,j,k,l} \varepsilon_k \varepsilon_l Z_i W_j X_k Y_l R_{ijkl},$$

donde $R_{ijkl} = \Omega_{ij}(e_k, e_l)$.

De nuevo, dejamos la demostración de este hecho para un apéndice. Ahora veremos cómo derivar formas en M.

Sea η una 1-forma diferencial en M y $\{e_i\}$ un marco ortonormal en una vecindad U de un punto $p \in M$. Sea $\eta = \sum_i \eta_i \theta_i$, donde $\{\theta_i\}$ son las formas duales de $\{e_i\}$. La **derivada** $d\eta$ es una forma bilineal definida de la siguiente manera:

$$d\eta = \sum_j \left(d\eta_j + \sum_i \varepsilon_j \eta_i \omega_{ij} \right) \wedge \theta_j.$$

Es decir, las componentes $\eta_{ij} = d\eta\,(e_i, e_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$ de $d\eta$ en el marco $\{e_i\}$ están dadas por

$$\sum_i \eta_{ij} \theta_i = d\eta_j + \sum_i \varepsilon_j \eta_i \omega_{ij}. \tag{2.8}$$

Se puede ver que la definición no depende de la elección del marco $\{e_i\}$.

La derivada de 1-formas permite extender los operadores diferenciales gradiente y laplaciano al caso de las variedades semi-riemannianas.

Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en una variedad semi-riemanniana M. El gradiente de f es el campo vectorial grad f en M definido por $\langle \text{grad}\, f, X\rangle\,(p) = df(p)(X)$, para todo $p \in M$ y $X \in T_pM$.

Dado un marco $\{e_i\}$ en M, df se puede escribir como $df = \sum_i f_i \theta_i$. La función f_i es llamada la **derivada** de f en la dirección de e_i. A su vez, la derivada de df está dada por

$$\begin{aligned} d\,(df) &= \sum_i d\,(f_i \theta_i) \\ &= \sum_j \left(df_j + \sum_i \varepsilon_i f_i \omega_{ij} \right) \wedge \theta_j \end{aligned}$$

donde por (2.8),

$$\sum_j f_{ij} \theta_i = df_j + \sum_i \varepsilon_i f_i \omega_{ij}$$

La forma bilineal $d(df)$ es llamada el **hessiano** de f en la métrica de M. La traza de esta forma bilineal, esto es, la función dada por $\Delta f = \sum_i f_{ii}$, es llamada el **laplaciano** de f.

2.4. Elemento de volumen

Definición 2.15 *Sea M una variedad semi-riemanniana n-dimensional. Un* **elemento de volumen** *para M es una n-forma diferenciable dM tal que $dM(e_1, \ldots, e_n) = \pm 1$, para todo marco móvil ortonormal en M.*

Lema 2.16 *Una variedad semi-riemanniana orientable en M tiene un elemento de volumen globalmente definido.*

Demostración. Sea $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ un sistema coordenado. Para cualesquiera campos vectoriales $V_1, \ldots, V_n$ en U, escribimos:

$$V_j = \sum_i v_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

y definimos:

$$dM_x(V_1, \ldots, V_n) = \det(v_{ij}) \left|\det(g_{ij})\right|^{\frac{1}{2}}$$

Las propiedades del determinante muestran que dM_x es una n-forma en $x(U)$.

Si $e_1, \ldots, e_n$ es un marco móvil ortonormal en $x(U)$, entonces tenemos:

$$\delta_{ij}\varepsilon_i = \langle e_i, e_j \rangle = \left\langle \sum_r e_{ir} \frac{\partial}{\partial x_r}, \sum_s e_{js} \frac{\partial}{\partial x_s} \right\rangle = \sum_{r,s} e_{ir} g_{rs} e_{js}.$$

Luego, si ν es el índice de M, tomando el determinante de las matrices de las métricas anteriores tenemos

$$\begin{aligned}
(-1)^\nu &= (\det(e_{ij}))^2 \det(g_{ij}) \\
&= \det(e_{ij}) \left|\det(g_{ij})\right|^{\frac{1}{2}} \det(e_{ij}) \left|\det(g_{ij})\right|^{\frac{1}{2}} \operatorname{signo}(\det(g_{ij})) \\
&= dM_x(e_1, \ldots, e_n)\, dM_x(e_1, \ldots, e_n) \operatorname{signo}(\det(g_{ij}))
\end{aligned}$$

Entonces $(dM_x(e_1, \ldots, e_n))^2 = 1$ y por lo tanto $dM_x(e_1, \ldots, e_n) = \pm 1$.

Sean ahora $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ y $y : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ dos sistemas coordenados orientados positivamente tales que $x(U) \cap y(V) \neq \varnothing$. Mostraremos que dM_x y dM_y coinciden en $x(U) \cap y(V)$.

Sean $V_1, \dots, V_n$ campos de vectores en $x(U) \cap y(V)$. Sea $V_j = \sum_i v_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}$. Entonces

$$dM_x(V_1, \dots, V_n) = \det(v_{ij}) \left|\det(g_{ij})\right|^{\frac{1}{2}}$$

Sean $V_j = \sum_i \widetilde{v}_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i}$ y $dM_y(V_1, \dots, V_n) = \det(\widetilde{v}_{ij}) \left|\det(h_{ij})\right|^{\frac{1}{2}}$, donde $h_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle$. Así, $dM_x = J\, dM_y$ para algún número J por determinar. Para esto, observemos que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es un marco ortonormal tenemos que

$$dM_x(e_1, \dots, e_n) = J\, dM_y(e_1, \dots, e_n).$$

Luego, $J = \pm 1$. Como $J > 0$, entonces $J = 1$ y $dM_x = dM_y$ en $x(U) \cap y(V)$, por lo tanto dM está definido globalmente. ∎

Observación 2.17 *Si $e_1, \dots, e_n$ es cualquier marco ortonormal y*

$$dM(e_1, \dots, e_n) = 1,$$

diremos que el marco está orientada positivamente. En este caso, si $\theta_1, \dots, \theta_n$ es la base dual de $\{e_i\}$, entonces $dM = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n$.

Utilizaremos el siguiente lema en el cálculo de la primera fórmula de variación de área.

Lema 2.18 *Sea $A(t) = (a_{ij}(t))$, $t \in I$, una familia diferenciable de matrices $n \times n$ tal que $A(0) = Id$. Entonces:*

$$\frac{d}{dt}(\det A(t))|_{t=0} = \operatorname{traza} A'(0).$$

Una demostración de este resultado se encuentra en [15], p. 183.

Capítulo 3

Inmersiones tipo espacio

3.1. Hipersuperficies semi-riemannianas

Definición 3.1 *Sea $\bar{M}$ una variedad semi-riemanniana. Una* **hipersuperficie semi-riemanniana** *M es una subvariedad semi-riemanniana de codimensión 1. Así, el co-índice de M en $\bar{M}$ (el índice común de todo espacio normal a T_pM) debe ser 0 ó 1.*

Proposición 3.2 *Sea c un valor regular de $f : \bar{M} \to \mathbb{R}$. Si $M = f^{-1}(c)$ es una hipersuperficie semi-riemanniana de $\bar{M}$, entonces $\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle \neq 0$ en M y $U = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$ es un campo de vectores normales unitarios en M. Es decir,* grad f *es normal a T_pM.*

Demostración. Como grad f es métricamente equivalente a la diferencial df, se sigue que $\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle \neq 0$ en M.

Sea $v \in T_pM$. Entonces $\langle \operatorname{grad} f, v \rangle = v(f) = v(f|_M) = 0$, ya que f es constante en M. ■

Proposición 3.3 *Sea M una hipersuperficie semi-riemanniana en una variedad orientable $\bar{M}$. M es orientable si y sólo si existe un campo diferenciable de vectores normales unitarios en M.*

Demostración. Definiremos un campo diferenciable de vectores unitarios U normales a M de la siguiente manera: para cada $p \in M$, existen dos vectores normales unitarios de M en el punto p. Escogemos uno de ellos como $U(p)$ tomando una parametrización positiva $x : V_0 \subset \mathbb{R}^n \to M$, con

$p \in x(v_0)$, y definiendo $U(p)$ con la condición de que la matriz:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, U(p)\right]$$

tenga determinante positivo. Esto no depende de la parametrización positiva elegida, porque si $y : W_0 \subset \mathbb{R}^n \to M$, con $y \in y(w_0)$, es otra parametrización positiva, tenemos que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, U(p)\right] = \left[\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}, U(p)\right] \cdot \widetilde{A}, \text{ donde } \widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y A es la matriz jacobiana de $y^{-1} \circ x$ en el punto $x^{-1}(p)$. Como x y y son positivas, tenemos que $\det A > 0$, o sea que $\det \widetilde{A} > 0$. Por lo tanto, $\det \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, U(p)\right] > 0$ si y sólo si $\det \left[\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}, U(p)\right] > 0$.

Resta mostrar que el campo es diferenciable. Como la subvariedad M es localmente la imagen inversa $f^{-1}(c)$ de un valor regular, M puede ser cubierta por vecindades conexas V, en cada una de las cuales está definido un campo diferenciable de vectores unitarios normales v, a saber $v(p) = \frac{\operatorname{grad} f(p)}{|\operatorname{grad} f(p)|}$. Dada una parametrización positiva $\phi : V_0 \subset \mathbb{R}^n \to M$, se tiene:

$$\det \left[\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_n}, U(\phi(x))\right] > 0$$

para todo $x \in V_0$, o bien ese determinante es negativo en todos los puntos de V_0. En cualquier caso tenemos $v(p) = U(p)$ para todo $p = \phi(x)$, o bien $v(p) = -U(p)$ para todo $p = \phi(x)$. En cualquier caso U es diferenciable en V. Como las vecindades V cubren a M, concluimos que el campo U está globalmente definido y es diferenciable en M. ■

Sean $\bar{M}^{n+1}$ una variedad semi-riemanniana orientable y $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ una inmersión de una variedad conexa y orientable con frontera ∂M (posiblemente vacía) en $\bar{M}$. Consideremos en M una métrica inducida por la inmersión x. Cuando la métrica inducida es una métrica riemanniana, a la inmersión x se le llama **tipo espacio**. Por el momento consideraremos sólo inmersiones de este tipo.

Localmente, x es un encaje y podemos considerar a M como una subvariedad $M \subset \bar{M}$ y a x como la aplicación de inclusión. Un marco $e_1, \ldots, e_{n+1}$ en $\bar{M}$ está **adaptado** a M si restringidos a M, los campos $e_1, \ldots, e_n$ son tangentes a M y están positivamente orientados. A veces denotaremos $e_{n+1} = N$, y le llamaremos el **vector normal** a M.

Consideremos un marco $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ en $\bar{M}$ adaptado a M. Denotemos por $\{\theta_1, \ldots, \theta_{n+1}\}$ a las formas duales asociadas a este marco y sean ω_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n+1$ las formas de conexión. Restringiéndonos al haz tangente TM de M, $\theta_{n+1} = 0$ y consecuentemente, por la ecuación (2.1) tenemos

$$0 = d\theta_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_{n+1,j} \wedge \theta_j$$

Por el lema de Cartan 2.10, concluimos que:

$$\omega_{n+1,i} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\theta_j, \quad \text{donde } h_{ij} = h_{ji}. \tag{3.1}$$

En la siguiente definición y en lo sucesivo, $\mathfrak{X}(M)$ denotará al conjunto de campos vectoriales diferenciables definidos en una variedad M.

Definición 3.4 *La* **segunda forma fundamental** *de $M \subset \bar{M}$ es la 2-forma $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ definida mediante la igualdad*

$$B(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{n+1,i}(X)\theta_i(Y) = \sum_{i,j} h_{ij}\theta_j(X)\theta_i(Y). \tag{3.2}$$

Las funciones h_{ij} se llaman los **coeficientes de la segunda forma fundamental**.

De la definición de B Tenemos que

$$B(e_k, e_k) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\theta_i(e_k)\theta_j(e_k) = h_{kk}.$$

Luego, la traza de B está dada por $\sum_{i=1}^{n} h_{ii}$.

Definición 3.5 *La* **curvatura media** *de $M \subset \bar{M}$ está dada por:*

$$H = -\frac{1}{n}\,\text{traza}\, B = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ii}. \tag{3.3}$$

Existe una definición alternativa de la segunda forma fundamental. Si en cada punto de $M \subset \bar{M}$ descomponemos $T_p\bar{M}$ en una parte *tangente* en T_pM y una parte *normal* en $T_pM^{\perp}$, y denotamos por $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ al conjunto de campos vectoriales definidos en M y que son normales a M en cada punto, podemos definir una transformación

$$II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

dada por

$$II(X,Y) = (\bar{D}_X Y)^{\perp}.$$

donde $^{\perp}$ denota la proyección de un vector en el espacio normal $T_pM^{\perp}$ y $\bar{D}$ es la conexión en $\bar{M}$.

Lema 3.6 *La transformación II es $\mathcal{F}(M)-$bilineal y simétrica.*

Existe otro operador importante en este contexto. Definimos el **operador de forma** $S : TM \to TM$ como

$$S(X) = -(\bar{D}_X N)^T \tag{3.4}$$

donde ^{T} denota la proyección de un vector en T_pM y N representa un campo vectorial unitario, normal a M.

A continuación veremos la relación entre los conceptos arriba definidos.

Lema 3.7 *Dados los campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y un campo $N \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ unitario, se tiene*

$$-B(X,Y) = \langle II(X,Y), N\rangle = \langle Y, S(X)\rangle.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\langle Y, S(X)\rangle &= \langle Y, -(\bar{D}_X N)^T\rangle = -\langle Y, \bar{D}_X N\rangle \\
&= \langle \bar{D}_X Y, N\rangle = \langle II(X,Y), N\rangle \\
&= \left\langle \sum_j \left\{ dy_j(X) + \varepsilon_j \sum_i \omega_{ij}(X) y_i \right\} e_j, N \right\rangle \\
&= \sum_i \omega_{i,n+1}(X) y_i = -B(X,Y);
\end{aligned}$$

hemos utilizado el hecho de que $y_{n+1} = 0$ en M, por lo que $dy_{n+1}(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. ∎

Observación 3.8 *En la literatura, la 2-forma B y el operador II reciben indistintamente el nombre de segunda forma fundamental de $M \subset \bar{M}$. La* **norma de la segunda forma fundamental** *está dada por*

$$\|II\|^2 = \|B\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^2.$$

El siguiente resultado relaciona las conexiones de M y de $\bar{M}$.

Lema 3.9 *Dadas $M \subset \bar{M}$, si $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, entonces*

$$D_X Y = (\bar{D}_X Y)^T,$$

donde D es la conexión semi-Riemanniana en M.

Tenemos entonces que

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + II(X,Y)$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 3.10 *Definimos $A : TM \to TM$ por $A(X) = \bar{D}_X N$.*

La relación de A con los conceptos anteriores proviene del hecho de que

$$B(X,Y) = \langle A(X), Y \rangle .$$

Obtendremos ahora la ecuación de Gauss, que relaciona las formas de curvatura Ω_{ij} de M con las formas de curvatura $\bar{\Omega}_{ij}$ de $\bar{M}^{n+1}$ y con la segunda forma fundamental. En los siguientes cálculos, recordemos que M es de tipo espacio, de modo que $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = +1$ y $\varepsilon_{n+1} = -1$. Entonces, es válida la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} - \bar{\Omega}_{ij} &= d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \left\{ d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \right\} \\ &= \varepsilon_{n+1} \omega_{i,n+1} \wedge \omega_{n+1,j} = \omega_{n+1,i} \wedge \omega_{n+1,j}. \end{aligned}$$

Ahora, usando la ecuación (3.1), tenemos

$$\Omega_{ij} - \bar{\Omega}_{ij} = \omega_{n+1,i} \wedge \omega_{n+1,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} h_{ik} \theta_k \right) \wedge \left(\sum_{l=1}^{n} h_{jl} \theta_l \right) = \sum_{k,l} h_{ik} h_{jl} \theta_k \wedge \theta_l.$$

De la ecuación (2.3) y del resultado anterior, se tiene

$$\sum_{k<l} (\bar{R}_{ijkl} - R_{ijkl})\, \theta_k \wedge \theta_l = \sum_{k,l} h_{ik}h_{jl}\theta_k \wedge \theta_l = \sum_{k<l} (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})\, \theta_k \wedge \theta_l$$

obteniendo así la ecuación de Gauss,

$$\bar{R}_{ijkl} - R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}. \tag{3.5}$$

Por último, definimos la **curvatura de Ricci** en la dirección de N, dada por

$$\mathrm{Ricci}(N) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\Omega}(N, e_i, N, e_i) = -\sum_i \varepsilon_i \varepsilon_{n+1} \bar{R}_{n+1,i,n+1,i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{R}_{n+1,i,n+1,i}. \tag{3.6}$$

3.2. Hipersuperficies umbílicas en $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Consideremos el espacio de Minkowski $\mathbb{R}_1^{n+2}$, es decir, el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n+2}$ provisto con la métrica

$$\langle v, w \rangle = -v_0 w_0 + \sum_{j=1}^{n+1} v_j w_j,$$

donde $v = (v_0, \ldots, v_{n+1})\,, w = (w_0, \ldots, w_{n+1})$.

El **espacio de De Sitter** $\mathbb{S}_1^{n+1}$ es una subvariedad de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ definida de la siguiente forma:

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{\ x \in \mathbb{R}_1^{n+2} \mid \langle x, x \rangle = 1\ \}.$$

Proposición 3.11 *El espacio de De Sitter satisface las siguientes propiedades:*

1. *El campo vectorial de posición V de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ es en todo punto, normal al espacio de De Sitter;*

2. *$\mathbb{S}_1^{n+1}$ tiene curvatura seccional constante igual a 1;*

3. *Si $x : M^n \to \mathbb{S}_1^{n+1}$ es una inmersión tipo espacio de una variedad orientable M y N es un campo vectorial unitario normal a M, tenemos que* $\mathrm{Ricci}(N) = n$.

Demostración.

1. Consideremos el campo vectorial de posición de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, $V : \mathbb{S}_1^{n+1} \to \mathbb{R}_1^{n+2}$ y definamos $f : \mathbb{S}_1^{n+1} \to \mathbb{R}$ como $x \longmapsto \langle V(x), V(x)\rangle$. Tenemos que $df_x(w) = 2\langle dV_x(w), V(x)\rangle$. Pero sabemos que $f|_{\mathbb{S}_1^{n+1}}$ es constante. Entonces $\langle dV_x(w), V(x)\rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ y $w \in T_x\mathbb{S}_1^{n+1}$. Así, el vector de posición $V(x)$ es normal al espacio de De Sitter.

2. Sea $\{e_0, e_1, \dots, e_{n+1}\}$ un marco ortonormal de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ en cada punto de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, donde $e_0 = V$ es el campo vectorial de posición de $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Tenemos

$$dV = \sum_{i=0}^{n+1} \theta_i e_i \tag{3.7}$$

y de la ecuación (2.5) se sigue que

$$\bar{D}_x e_0 = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon_i \omega_{0i}(X) e_i \tag{3.8}$$

De las ecuaciones (3.7) y (3.8) obtenemos

$$\omega_{0i} = \varepsilon_i \theta_i. \tag{3.9}$$

La 1-forma dual θ_0 restringida al espacio tangente $T_x\mathbb{S}_1^{n+1}$ es nula. Por lo tanto,

$$0 = d\theta_0 = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon_i \omega_{0i} \wedge \theta_i$$

Luego, por el lema de Cartan 2.10,

$$\omega_{0i} = \sum_{j=0}^{n+1} \varepsilon_i h_{ij} \theta_j \tag{3.10}$$

Comparando (3.9) y (3.10) se tiene que

$$h_{ij} = \delta_{ij}.$$

La ecuacón de Gauss implica entonces que la curvatura de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ es

$$R_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}.$$

Consecuentemente, $\mathbb{S}_1^{n+1}$ tiene curvatura seccional constante $R_{ijij} = 1$.

3. Sean $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = N$, un marco adaptado a x. Usando la definición de Ricci(N) en (3.6), tenemos

$$\text{Ricci}(N) = \sum_{i=1}^{n} R_{n+1,i,n+1,i} = n,$$

lo que concluye la demostración. ∎

Definición 3.12 *Sea $(\bar{M}^{n+1}, g)$ una variedad semi-Riemanniana con métrica g y sea $\bar{D}$ su conexión semi-Riemanniana. Se dice que una inmersión $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ es* **totalmente umbílica** *si para todo $p \in M^n$ se satisface*

$$\left\langle \bar{D}_X Y, N \right\rangle (p) = \lambda(p) \langle X, Y \rangle, \quad \lambda(p) \in \mathbb{R}$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y todo campo unitario $N \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$.

Ejemplo 3.13 *Sea M^n una hipersuperficie de tipo espacio en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ dada por la intersección de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ con un hiperplano afín de $\mathbb{R}_1^{n+2}$; esto es,*

$$M^n = \left\{ x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle x, a \rangle = \tau \right\},$$

donde $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+2}, |a|^2 = \sigma = 1, 0, -1,\ \tau^2 > \sigma$.

Afirmamos que $N(p) = \frac{(a - \tau p)}{(\tau^2 - \sigma)^{\frac{1}{2}}}$ es un campo unitario normal a M^n.
De hecho tenemos

$$\begin{aligned}
\langle N(p), p \rangle &= \frac{1}{(\tau^2 - \sigma)^{\frac{1}{2}}} \langle a - \tau p, p \rangle \\
&= \frac{1}{(\tau^2 - \sigma)^{\frac{1}{2}}} \langle a, p \rangle - \frac{\tau}{(\tau^2 - \sigma)^{\frac{1}{2}}} \langle p, p \rangle \\
&= \frac{\tau}{(\tau^2 - \sigma)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\tau}{(\tau^2 - \sigma)^{\frac{1}{2}}} = 0
\end{aligned}$$

De esta manera, $N(p) \in T_p\mathbb{S}_1^{n+1}$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\langle N(p), N(p) \rangle &= \frac{1}{\tau^2 - \sigma} \langle a - \tau p, a - \tau p \rangle \\
&= \frac{1}{\tau^2 - \sigma} \left\{ \langle a, a \rangle - 2 \langle a, p \rangle + \tau^2 \langle p, p \rangle \right\} \\
&= \frac{1}{\tau^2 - \sigma} \left\{ \sigma - 2\tau^2 + \tau^2 \right\} = \frac{\sigma - \tau^2}{\tau^2 - \sigma} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Análogamente se muestra que si $x \in T_pM^n$, entonces $\langle N(p), x\rangle = 0$.

Por otro lado, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple que

$$\begin{aligned} S(X) &= -\bar{D}_X N = -\bar{D}_X\left(\frac{1}{(\tau^2-\sigma)^{\frac{1}{2}}}(a-\tau p)\right) \\ &= -\frac{\tau}{(\tau^2-\sigma)^{\frac{1}{2}}}\left\{\bar{D}_X a - \tau \bar{D}_X p\right\} = \frac{\tau}{(\tau^2-\sigma)^{\frac{1}{2}}} X \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{D}_X Y, N\right\rangle &= \langle -\langle S(X), Y\rangle N, N\rangle = -\langle S(X), Y\rangle \langle N, N\rangle \\ &= \langle S(X), Y\rangle = \frac{\tau}{(\tau^2-\sigma)^{\frac{1}{2}}}\langle X, Y\rangle . \end{aligned}$$

Por lo tanto, M es totalmente umbílica y, consecuentemente, la curvatura media es constante e igual a $H = \frac{\tau}{(\tau^2-\sigma)^{\frac{1}{2}}}$.

Ahora calculamos la curvatura seccional de M^n. Sean e_i, e_j una base de un plano $P \subset T_pM$. Entonces

$$h_{ij} = \omega_{n+1,i}(e_j) = -B(e_j, e_i) = \langle e_j, S(e_i)\rangle = \varepsilon_j \delta_{ij}\left(\frac{\tau}{(\tau^2-\sigma)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Ya sabemos que la curvatura seccional de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ es 1, de modo que por la ecuación de Gauss (3.5) tenemos

$$K = R_{ijij} = 1 - \left(\frac{\tau}{(\tau^2-\sigma)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 .$$

En otras palabras,

$$K = -\frac{\sigma}{\tau^2-\sigma}. \tag{3.11}$$

Consideramos tres casos:

1. $\sigma = 1$. En este caso, M^n es isométrica al espacio hiperbólico de curvatura seccional $K = -\frac{1}{\tau^2-1}$ y con curvatura media $H = \frac{\tau}{(\tau^2-1)^{\frac{1}{2}}}$ la cual asume cada uno de los valores en $(1, \infty)$.

2. $\sigma = 0$. M^n tiene curvatura seccional $K = 0$ y la curvatura media H cumple $H^2 = 1$. M^n es isométrica al espacio euclidiano.

3. $\sigma = -1$. M^n tiene curvatura seccional $K = \frac{1}{\tau^2+1}$, es isométrica a la esfera y tiene curvatura media $H^2 = \frac{\tau^2}{\tau^2+1}$. En este caso H^2 asume cada uno de los valores en el intervalo $[0,1)$.

Las hipersuperficies del último inciso son llamadas las esferas de $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Si $\tau \neq 0$, M es una esfera pequeña. Si $\tau = 0$, M es una esfera grande. Éstas son las únicas hipersuperficies compactas descritas en este ejemplo.

3.3. Hipersuperficies no umbílicas en $\mathbb{S}_1^{n+1}$

Como ya hemos dicho, Goddard [13] conjeturó que toda hipersuperficie completa con curvatura media constante en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ es totalmente umbílica, y por tanto dicha hipersuperficie sería equivalente a alguna de los ejemplos de la sección anterior. Ahora veremos un ejemplo de hipersuperficie con las mismas propiedades excepto la de ser totalmente umbílica.

Ejemplo 3.14 *Consideremos la hipersuperficie tipo espacio en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ dada por*

$$M^n = \left\{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_k^2 = -\operatorname{senh}^2 r\right\},$$

con $r > 0$ y $1 \leq k \leq n$. M^n es isométrica al producto riemanniano

$$\mathbb{H}^k(1 - \coth^2 r) \times \mathbb{S}^{n-k}(1 - \tanh^2 r)$$

del espacio hiperbólico k-dimensional y la esfera $(n-k)$-dimensional con curvaturas seccionales $1 - \coth^2 r$ y $1 - \tanh^2 r$, respectivamente.

Afirmamos que

$$N(p) = \frac{1}{\operatorname{senh} r \cosh r}(p_0, p_1, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0) + (\tanh r)p$$

para $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ es un campo normal unitario de M^n. En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle N(p), p\rangle &= \frac{1}{\operatorname{senh} r \cosh r}\langle (p_0, p_1, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0), p\rangle + \tanh r \langle p, p\rangle \\
&= \frac{1}{\operatorname{senh} r \cosh r}(-\operatorname{senh}^2 r) + \tanh r \\
&= -\tanh r + \tanh r = 0
\end{aligned}$$

lo que implica que $N(p) \in T_p\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Para ver que $N(p)$ es de tipo tiempo, calculamos

$$\begin{aligned}
\langle N(p), N(p)\rangle &= \frac{1}{\operatorname{senh}^2 r \cosh^2 r} \langle (p_0, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0), (p_0, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0)\rangle \\
&+ \frac{2\tanh r}{\operatorname{senh} r \cosh r} \langle (p_0, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0), p\rangle + \tanh^2 r \langle p, p\rangle \\
&= -\frac{\operatorname{senh}^2 r}{\operatorname{senh}^2 r \cosh^2 r} + \frac{2\tanh r(-\operatorname{senh}^2 r)}{\operatorname{senh} r \cosh r} + \tanh^2 r \\
&= -\frac{\tanh^2 r}{\operatorname{senh}^2 r} - \tanh^2 r = -\tanh^2 r(\operatorname{csch}^2 r + 1) \\
&= -\tanh^2 r(\coth^2 r) = -1
\end{aligned}$$

Análogamente se muestra que $\langle N(p), x\rangle = 0$.

Por otro lado, para $x \in T_pM^n$, tenemos

$$\begin{aligned}
S(X) = -\bar{D}_X N &= -\bar{D}_X \left[\frac{1}{\operatorname{senh} r \cosh r}(p_0, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0) + \tanh r p\right] \\
&= -\frac{1}{\operatorname{senh} r \cosh r} \bar{D}_X \left[(p_0, \ldots, p_k, 0, \ldots, 0)\right] - \tanh r \bar{D}_X p.
\end{aligned}$$

De esta manera, si se escoge $X = (p_0, \ldots, p_k, 0, \ldots 0)$, entonces

$$\begin{aligned}
-\bar{D}_X N &= -\left(\frac{1}{\operatorname{senh} r \cosh r} + \tanh r\right) X \\
&= -\frac{1 + \operatorname{senh}^2 r}{\operatorname{senh} r \cosh r} X \\
&= -\frac{\cosh^2 r}{\operatorname{senh} r \cosh r} X = -\coth r X
\end{aligned}$$

y si escogemos $X = (0, \ldots, 0, p_{k+1}, \ldots, p_n)$, entonces

$$-\bar{D}_X N = -(-\tanh r) X = \tanh r X$$

La ecuación (3.4) implica que S_η tiene dos valores propios, a saber $\coth r$ y $\tanh r$ con multiplicidades k y $n - k$, respectivamente. Entonces, M^n no es umbílica y tiene curvatura media constante

$$H = \frac{1}{n}(k \coth r + (n - k) \tanh r).$$

De esta manera, para $k = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{n^2}\left[\coth r + (n-1)\tanh r\right]^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\left[\coth^2 r + 2(n-1) + (n-1)^2\tanh^2 r\right]. \end{aligned}$$

Tomamos $\coth^2 r = n - 1$ lo cual hace que $n > 2$, y obtenemos

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{n^2}\left[(n-1) + 2(n-1) + (n-1)^2\tanh^2 r\right] \\ &\geq \frac{1}{n^2}\left[4(n-1)\right], \end{aligned}$$

lo que implica que $H^2 \geq \frac{4(n-1)}{n^2}$. Como $k = 1$ y $n > 2$ entonces H^2 alcanza todos los valores posibles en el intervalo $\left[\frac{4(n-1)}{n^2}, \infty\right)$.

Capítulo 4

Hipersuperficies de rotación

4.1. Definición y parametrizaciones

Hemos visto que $\mathbb{S}_1^{n+1}$ es una hipersuperficie semi-riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura seccional 1 en $\mathbb{R}_1^{n+2}$. Ahora estudiaremos algunas de sus subvariedades; en particular, haremos una clasificación de las hipersuperficies de rotación tipo espacio con H_r constante en el espacio de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$, donde H_r es la función simétrica normalizada r-ésima de las curvaturas principales. Terminaremos este capítulo dando una clasificación completa de las superficies de rotación hiperbólicas de tipo espacio y una clasificación parcial de las superficies correspondientes de tipo tiempo. Utilizaremos la siguiente definición para las hipersuperficies de rotación.

Una aplicación lineal $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1^{n+2})$ es una transformación ortogonal de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ si $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo par de vectores $x, y \in \mathbb{R}_1^{n+2}$. Al conjunto de transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ lo denotaremos por $O(n+1,1)$. Si G es la matriz de la métrica de $\mathbb{R}_1^{n+2}$con respecto de alguna base, entonces

$$\begin{aligned} O(n+1,1) &= \{\ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1^{n+2}) \,|\, (Ax)^t G(Ay) = x^t G y, \text{ para toda } x, y \in \mathbb{R}_1^{n+2}\} \\ &= \{\ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1^{n+2}) \mid A^t G A = G\ \} \end{aligned}$$

por lo que $(\det(A))^2 = 1$. Denotaremos entonces por $SO(n+1,1)$ al conjunto de transformaciones ortogonales con determinante 1, es decir;

$$SO(n+1,1) = \{\ A \in O(n+1,1) \mid \det A = 1\ \}.$$

Se muestra fácilmente que $SO(n+1,1)$ tiene estructura de grupo con la composición, y se llama **grupo de rotaciones de $\mathbb{R}_1^{n+2}$**.

Definición 4.1 *Sea P^k un subespacio vectorial k-dimensional de $\mathbb{R}_1^{n+2}$. Decimos que P^k es* **lorentziano** *(resp.* **riemanniano, degenerado***) si $g_{-1}|_{P^k}$ tiene una métrica de Lorentz (resp. riemanniana, degenerada). Escogemos P^2 y $P^3 \supset P^2$ y C una curva regular tipo espacio (resp. tipo tiempo) en $\mathbb{S}_1^{n+1} \cap (P^3 \setminus P^2)$, parametrizada por longitud de arco. Sea G el subgrupo de $SO(n+1,1)$ que deja fijo a P^2 punto a punto; es decir,*

$$G = \{\ A \in SO(n+1,1) \mid Ax = x, \ \textit{para toda } x \in P^2\ \}.$$

El conjunto

$$M = \{y|y = Ax, \ \textit{para toda } A \in G, x \in C\ \}$$

es la **órbita** *de C bajo la acción de G. Esta órbita es una* **hipersuperficie tipo espacio** *(resp.* **tipo tiempo***)* **de rotación esférica** *(resp.* **hiperbólica, parabólica***) en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ generada por C, siempre que P^2 sea lorentziano (resp. riemanniano, degenerado).*

Ahora veremos cómo dar parametrizaciones explícitas de las hipersuperficies de rotación.

En $\mathbb{R}_1^{n+2}$, sea $P^3 = \{(x, y, 0, \ldots, 0, \omega) \,|x, y, \omega \in \mathbb{R}\}$ y

$$C_1(u) = (x(u), y(u), 0, \ldots, 0, \omega(u)),$$

con $u \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, una curva en $P^3 \cap \mathbb{S}_1^{n+1}$ parametrizada por longitud de arco y que satisface

$$x^2(u) + y^2(u) - \omega^2(u) = 1 \tag{4.1}$$

y

$$x'^2(u) + y'^2(u) - \omega'^2(u) = \varepsilon \tag{4.2}$$

donde $\varepsilon = 1$ si C_1 es tipo espacio, y $\varepsilon = -1$ si C_1 es de tipo tiempo.

Sea $\alpha(t_1, \ldots, t_{n-1}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, con $\alpha_i = \alpha_i(t_1, \ldots, t_n)$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots - \alpha_n^2 = -1$, una parametrización ortogonal del espacio hiperbólico unitario. De aquí se sigue que

$$f(t_1, \ldots, t_{n-1}, u) = (x, y, \omega\alpha_1, \ldots, \omega\alpha_n)$$

es una parametrización de la hipersuperficie de rotación generada por la curva $x(u)$, $y(u)$ y $\omega(u)$ alrededor de P^2 en el caso hiperbólico.

Aquí $g_{-1}(x,x) = x_0^2 + x_1^2 + \cdots - x_{n+1}^2$ con $\varepsilon = 1$. Así,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (x', y', \omega'\alpha_1, \ldots, \omega'\alpha_n)$$
$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = (0, 0, \omega\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_j}, \ldots, \omega\frac{\partial \alpha_n}{\partial t_j}).$$

Como α es una parametrización ortogonal, se sigue que

$$\begin{aligned}
g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) &= x'^2 + y'^2 + \omega'^2\alpha_1^2 + \cdots - \omega'^2\alpha_n^2 \\
&= x'^2 + y'^2 + \omega'^2(\alpha_1^2 + \cdots - \alpha_n^2) \\
&= x'^2 + y'^2 - \omega'^2 = \varepsilon; \\
g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t_i}\right) &= 0 + 0 + \omega\omega'\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_i}\alpha_1 + \cdots - \omega\omega'\frac{\partial \alpha_n}{\partial t_i}\alpha_n \\
&= \omega\omega'\left(\alpha_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_i} + \cdots - \alpha_n\frac{\partial \alpha_n}{\partial t_i}\right) = 0; \\
g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j}\right) &= \omega^2\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_i}\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_j} + \cdots - \omega^2\frac{\partial \alpha_n}{\partial t_i}\frac{\partial \alpha_n}{\partial t_j} \\
&= \omega^2\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_i}\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_j} + \cdots - \frac{\partial \alpha_n}{\partial t_i}\frac{\partial \alpha_n}{\partial t_j}\right).
\end{aligned}$$

Si denotamos $\alpha_{ij} = \sum_k \left\langle \frac{\partial \alpha_k}{\partial t_i}, \frac{\partial \alpha_k}{\partial t_j} \right\rangle$, tenemos

$$g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j}\right) = \alpha_{ij}\omega^2$$

Un campo normal unitario N está dado por

$$N = ((y'\omega - \omega' y), (x'\omega - x\omega'), \alpha(y'x - x'y))$$

y además se cumplen las igualdades

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = (x'', y'', \alpha\omega'')$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial t_j} = \left(0, 0, \omega'\frac{\partial \alpha}{\partial t_j}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} = \left(0, 0, \omega\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}\right).$$

De aquí se sigue que las curvas coordenadas son líneas de curvatura. Antes de calcular las curvaturas principales expresaremos x, y en términos de ω. Usando las ecuaciones (4.1) y (4.2) para la curva C_1, omitiendo la variable u, podemos hacer

$$x = \left(\omega^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \tag{4.3}$$

y

$$y = \left(\omega^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\varphi \tag{4.4}$$

para una función φ definida posteriormente. Derivamos (4.3) y (4.4) y sustituimos en (4.2), para obtener

$$x' = -\left(\omega^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\varphi\, \varphi' + \frac{\omega\omega'}{(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}} \cos\varphi \tag{4.5}$$

y

$$y' = \left(\omega^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi\varphi' + \frac{\omega\omega'}{(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sen}\varphi \tag{4.6}$$

Sustituimos estas ecuaciones en la ecuación (4.2) y obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon = &\left[-\left(\omega^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\varphi\varphi' + \frac{\omega\omega'}{(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}}\cos\varphi\right]^2 \\ &+ \left[\left(\omega^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi\varphi' + \frac{\omega\omega'}{(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{sen}\varphi\right]^2 - \omega'^2 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left(\omega^2+1\right)\operatorname{sen}^2\varphi\varphi'^2 - 2\omega\omega' \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\varphi' + \frac{(\omega\omega')^2\cos^2\varphi}{\omega^2+1} \\ &+ \left(\omega^2+1\right)\cos^2\varphi\varphi'^2 + 2\omega\omega'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\varphi' + \frac{(\omega\omega')^2\operatorname{sen}^2\varphi}{\omega^2+1} - \omega'^2 \\ &= \left(\omega^2+1\right)\varphi'^2\left[\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\right] + \frac{(\omega\omega')^2}{\omega^2+1}\left[\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi\right] - \omega'^2 \\ &= \left(\omega^2+1\right)\varphi'^2 + \frac{(\omega\omega')^2}{\omega^2+1} - \omega'^2 \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon - \frac{(\omega\omega')^2}{\omega^2+1} + \omega'^2 &= \left(\omega^2+1\right)\varphi'^2 \\
\varepsilon + \omega'^2\left(-\frac{\omega^2}{\omega^2+1}+1\right) &= \left(\omega^2+1\right)\varphi'^2 \\
\varepsilon + \omega'^2\left(\frac{-\omega^2+\omega^2+1}{\omega^2+1}\right) &= \left(\omega^2+1\right)\varphi'^2 \\
\varepsilon + \frac{\omega'^2}{\omega^2+1} &= \left(\omega^2+1\right)\varphi'^2 \\
\frac{\varepsilon\left(\omega^2+1\right)+\omega'^2}{\omega^2+1} &= \left(\omega^2+1\right)\varphi'^2 \\
\frac{\varepsilon\omega^2+\varepsilon+\omega'^2}{\left(\omega^2+1\right)^2} &= \varphi'^2
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\varphi' = \frac{\pm\left(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\omega^2+1\right)}, \tag{4.7}
$$

siempre que $\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon > 0$ en I (cuando $\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon = 0$, φ es constante). Entonces la función $\varphi(u)$ es de la forma

$$
\varphi(u) = \pm\int_0^u \frac{\left(\varepsilon\omega(t)^2+\omega'(t)^2+\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}}{\omega(t)^2+1}dt. \tag{4.8}
$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el signo es positivo. Así, las coordenadas del contorno de la curva C_1 están dadas en términos de ω y sus derivadas.

Podemos de esta manera calcular las curvaturas principales.

A lo largo de las curvas coordenadas t_i tenemos

$$
\begin{aligned}
k_i = & -\tfrac{1}{\omega}(x'y - y'x) \\
= & -\tfrac{1}{\omega}[(-(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\varphi\varphi' + \tfrac{\omega\omega'}{(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}}\cos\varphi)\left((\omega^2+1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\varphi\right) \\
& -((\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\varphi' + \tfrac{\omega\omega'}{(\omega+1)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{sen}\varphi)(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi] \\
= & -\tfrac{1}{\omega}[-(\omega^2+1)\operatorname{sen}^2\varphi\varphi' + \omega\omega'\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi \\
& -(\omega^2+1)\cos^2\varphi\varphi' - \omega\omega'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi] \\
= & \tfrac{1}{\omega}[(\omega^2+1)\varphi'(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)] \\
= & \tfrac{1}{\omega}\left[(\omega^2+1)\tfrac{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\omega^2+1}\right] = -\tfrac{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\omega}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Para calcular k_n, usaremos las ecuaciones (4.3)–(4.6):

$$
\begin{aligned}
y'x &= \left[(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\varphi' + \frac{\omega\omega'}{(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{sen}\varphi\right]\left[(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right] \\
&= (\omega^2+1)\cos^2\varphi\varphi' + \omega\omega'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi. \\
xy' &= \left[-(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\varphi\varphi' + \frac{\omega\omega'}{(\omega+1)^{\frac{1}{2}}}\cos\varphi\right]\left[(\omega^2+1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\varphi\right] \\
&= -(\omega^2+1)\operatorname{sen}^2\varphi\varphi' + \omega\omega'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
y'x - x'y = (\omega^2+1)\cos^2\varphi\varphi' + (\omega^2+1)\operatorname{sen}^2\varphi\varphi' = (\omega^2+1)\varphi'.
$$

De la ecuación (4.7) tenemos

$$
(\omega^2+1)\varphi' = (\varepsilon\omega^2 + \omega'^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}
$$

lo que implica que

$$
y'x - x'y = (\omega^2+1)\varphi' = (\varepsilon\omega^2 + \omega'^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \tag{4.10}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
y''x - x''y = (y'x - x'y)' &= \frac{1}{2}(\varepsilon\omega^2 + \omega'^2 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(2\varepsilon\omega\omega' + 2\omega'\omega'') \\
&= \frac{\varepsilon\omega\omega' + \omega'\omega''}{(\varepsilon\omega^2 + \omega'^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varepsilon\omega\omega' + \omega'\omega''}{y'x - x'y}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Si derivamos la ecuación (4.1) se obtienen las igualdades

$$2xx' + 2yy' - 2\omega\omega' = 0, \qquad xx' + yy' = \omega\omega'.$$

Derivando nuevamente obtenemos la ecuación

$$xx'' + (x')^2 + yy'' + (y')^2 = \omega\omega'' + (\omega')^2$$

Y si sustituimos (4.2), se tiene

$$\begin{aligned} xx'' + yy'' + \varepsilon &= \omega\omega'' \\ xx'' + yy'' &= \omega\omega'' - \varepsilon \end{aligned}$$

Ahora derivamos la ecuación (4.2) para obtener

$$x'x'' + y'y'' = \omega'\omega''$$

y despejamos x'' y y'' en el siguiente sistema

$$\begin{aligned} xx'' + yy'' &= \omega\omega'' - \varepsilon \\ x'x'' + y'y'' &= \omega'\omega'' \end{aligned}$$

De esta forma llegamos a la pareja de igualdades

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{y'(\omega\omega'' - \varepsilon) - y\omega'\omega''}{xy' - x'y} \\ y'' &= \frac{x\omega'\omega'' - x(\omega\omega'' - \varepsilon)}{xy' - x'y} \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} x''y' &= \frac{y'^2(\omega\omega'' - \varepsilon) - yy'\omega'\omega''}{xy' - x'y} \\ y''x' &= \frac{xx'\omega'\omega'' - x'^2(\omega\omega'' - \varepsilon)}{xy' - x'y} \end{aligned}$$

lo que implica que

$$x''y' - y''x' = \frac{\varepsilon\omega\omega'' - \varepsilon\omega'^2 - 1}{xy' - x'y}. \tag{4.12}$$

Por otro lado, sabemos que

$$-k_n = -\varepsilon \langle N, r_{uu} \rangle = \varepsilon \left[-\omega''(x'y - y'x) + \omega'(x''y - y''x) + \omega(y''x' - x''y') \right].$$

Sustituimos (4.10), (4.11) y (4.12) en esta ecuación y obtenemos:

$$\begin{aligned} k_n &= \varepsilon \left[\omega''(y'x - x'y) - \frac{\omega'(\varepsilon\omega\omega' + \omega'\omega'')}{y'x - x'y} - \frac{\omega(\varepsilon\omega\omega'' - \varepsilon\omega'^2 - 1)}{y'x - x'y} \right] \\ &= \varepsilon \left[\frac{\varepsilon\omega'' + \omega}{y'x - x'y} \right] = \frac{\omega'' + \varepsilon\omega}{(\varepsilon\omega^2 + \omega'^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, las curvaturas principales para la hipersuperficie generada por la curva C_1 son

$$\varepsilon k_i = \frac{(\varepsilon\omega^2 + \omega'^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\omega}, \qquad \varepsilon k_n = \frac{\omega'' + \varepsilon\omega}{(\varepsilon\omega^2 + \omega'^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.13}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\varepsilon = 1$ si la hipersuperficie es de tipo espacio, mientras que $\varepsilon = -1$ si es de tipo tiempo.

Observemos que estas fórmulas son válidas para:

$$\omega'^2 \geq -\varepsilon\left(\omega^2 + 1\right)$$

El conjunto de parejas (ω, ω') con $\omega \geq 0$ y $\omega'^2 \geq -\varepsilon\omega^2 - \varepsilon$ es conocido como "región relevante".

Una de las diversas generalizaciones de la curvatura media es la r-ésima curvatura media H_r, que describimos a continuación; en esta parte desarrollaremos una técnica de estudio de las hipersuperficies con H_r constante y más adelante regresaremos al caso particular $r = 1$ para hacer un análisis breve sobre los puntos críticos de la primera integral de una función G_r que corresponderán a los llamados cilindros hiperbólicos definidos por Montiel en [20].

Utilizando las ecuaciones (1.1) y (4.13), obtenemos la fórmula para la

r-ésima curvatura media:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r} H_r &= \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n} k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_r} \\
&= \binom{n-1}{r}\left[\left(\frac{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\omega}\right)\right]^r \\
&\quad +\binom{n-1}{r-1}\left[\left(\frac{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\omega}\right)\right]^{r-1}\frac{\varepsilon\omega''+\omega}{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{n-r}{n}\binom{n}{r}\left[\frac{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\omega}\right]^r \\
&\quad +\frac{r}{n}\binom{n}{r}\left[\frac{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\omega}\right]^{r-1}\frac{\varepsilon\omega''+\omega}{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

De esta manera se sigue que

$$\begin{aligned}
nH_r &= (n-r)\left[\frac{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\omega}\right]^r \\
&\quad +r\left[\frac{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\omega}\right]^{r-1}\frac{\varepsilon\omega''+\omega}{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \\
&= (n-r)\frac{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{r}{2}}}{\omega^r} \\
&\quad +r\left[\frac{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{r}{2}}}{\omega^r}\right]\left[\frac{\omega}{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{\varepsilon\omega''+\omega}{(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

y entonces,

$$nH_r\omega^r = (n-r)\left(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon\right)^{\frac{r}{2}} + r\left(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon\right)^{\frac{r-2}{2}}\omega\left(\varepsilon\omega''+\omega\right) \quad (4.14)$$

Multiplicamos por ω^{n-r-1} está última ecuación, obteniendo

$$\begin{aligned}
nH_r\omega^{n-1} &= (n-r)\left(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon\right)^{\frac{r}{2}}\omega^{n-r-1} \\
&\quad + r\left(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon\right)^{\frac{r-2}{2}}\omega^{n-r}(\varepsilon\omega''+\omega)
\end{aligned}$$

Luego entonces,

$$(n-r)\left(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon\right)^{\frac{r}{2}}\omega^{n-r-1} \\ +r\left(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon\right)^{\frac{r}{2}-1}\omega^{n-r}(\varepsilon\omega''+\omega)-nH_r\omega^{n-1}=0$$

Esta ecuación diferencial puede ser escrita en la siguiente forma

$$\frac{d\left[\omega^{n-r}\left(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{d\omega}-nH_r\omega^{n-1}=0$$

la cual se integra con respecto a ω, suponiendo que H_r es constante:

$$\omega^{n-r}\left(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon\right)^{\frac{r}{2}}-H_r\omega^n=C$$

Hacemos

$$G_r(\omega,\omega')=\omega^{n-r}\left[\left(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon\right)^{\frac{r}{2}}-H_r\omega^r\right] \tag{4.15}$$

Se puede decir que la ecuación (4.15) es una primera integral de (4.14). Dada una solución ω, la pareja (ω,ω') nos describe las curvas de nivel de la función:

$$G_r(u,v)=u^{n-r}(\varepsilon u^2+v^2+\varepsilon)^{\frac{r}{2}}-H_ru^r$$

con $u>0$ y $\varepsilon u^2+v^2+\varepsilon\geq 0$.

De esto, podemos enunciar el siguiente resultado.

Lema 4.2 *El conjunto de parejas ordenadas (ω,ω'), donde ω es una solución de (4.14), son las componentes conexas de las curvas de nivel de G_r contenidas en la región relevante.*

Una hipersuperficie correspondiente a una solución constante de la ecuación (4.14) se llama cilindro.

Para el caso particular $n>r=1$ tenemos que $H_1=H$ es la curvatura media. La ecuación (4.15) toma la forma

$$G_1(\omega,\omega')=\omega^{n-1}\left[\left(\varepsilon\omega^2+\omega'^2+\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}-H\omega\right] \tag{4.16}$$

Analizamos las curvas de nivel de G_1 y $\varepsilon=1$. Es evidente que $G_1=0$ en los puntos del eje ω', y si $H\geq 0$, también en los puntos de la cónica

$$\omega^2(1-H^2)+\omega'^2=-1.$$

Para obtener los puntos críticos de G_1 calculamos

$$\frac{\partial G_1}{\partial \omega} = \omega^{n-2}\left[\frac{\omega^2}{(\omega^2+\omega'^2+1)^{\frac{1}{2}}} - H\omega + (n-1)\left((\omega^2+\omega'^2+1)^{\frac{1}{2}} - H\omega\right)\right]$$
$$\frac{\partial G_1}{\partial \omega'} = \omega^{n-1}\left[\frac{\omega'}{(\omega^2+\omega'^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Cuando $\omega = 0$, los puntos críticos están en el eje ω'. Cuando $\omega' = 0$, los puntos críticos satisfacen la ecuación

$$\omega^2 - nH\omega\left(\omega^2+1\right)^{\frac{1}{2}} + (n-1)(\omega^2+1) = 0 \tag{4.17}$$

Como $\omega^2 > 0$, podemos escribir $\operatorname{senh}(t) = \omega$ y sustituyendo en la ecuación (4.17) obtenemos

$$\operatorname{senh}^2(t) - nH\operatorname{senh}(t)\cosh(t) + (n-1)\cosh^2(t) = 0$$

Si dividimos entre $\operatorname{senh}^2(t)$, tenemos la relación

$$1 - nh\coth(t) + (n-1)\coth^2(t) = 0$$

Resolviendo esta ecuación para $\coth(t)$ se tiene que

$$\coth(t) = \frac{nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}{2(n-1)}$$

De la igualdad $\operatorname{csch}^2(t) = \coth^2(t) - 1$ y de la relación última se sigue que

$$\begin{aligned}\operatorname{csch}^2(t) &= \left[\frac{nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}{2(n-1)}\right]^2 - 1\\ &= \frac{\left(nH \pm \sqrt{n^2H^2-4(n-1)}\right)^2 - 4(n-1)^2}{4(n-1)^2}\end{aligned}$$

O en forma equivalente,

$$\frac{1}{\operatorname{senh}^2(t)} = \frac{\left(nH \pm \sqrt{n^2H^2-4(n-1)}\right)^2 - 4(n-1)^2}{4(n-1)^2}$$

es decir,

$$\omega = \operatorname{senh}(t) = \frac{2(n-1)}{\sqrt{\left(nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}\right)^2 - 4(n-1)^2}}$$

Para el caso $n^2H^2 - 4(n-1) = 0$ o $H = \frac{2\sqrt{n-1}}{n}$, obtenemos un único punto crítico, cuya primera coordenada denotaremos por ω_0. Esto es,

$$\omega_0^2 = \frac{n-1}{2-n}$$

Para $\frac{2\sqrt{n-1}}{n} < H < 1$ tenemos dos puntos críticos cuyas primeras coordenadas denotaremos por ω_0, ω_1. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\omega_0 < \omega_1$.

Finalmente si $H \geq 1$ tenemos solamente un punto crítico cuya primera coordenada denotaremos también por ω_0.

Tenemos las siguientes propiedades para ω_0 y ω_1, como funciones de H.

1. ω_0^2 y $\omega_1^2 \longrightarrow \frac{n-1}{2-n}$ cuando $H \longrightarrow \frac{2\sqrt{n-1}}{n}^+$, lo cual se mostró anteriormente.

2. ω_1 es una función creciente de H si $H \longrightarrow 1^+$, ya que

$$\begin{aligned}\omega_1 \underset{H\to 1^+}{\longrightarrow} & \frac{2(n-1)}{\sqrt{(n \pm \sqrt{n^2 - 4(n-1)})^2 - 4(n-1)^2}} \\ = & \frac{2(n-1)}{\sqrt{(n \pm \sqrt{n^2 - 4n + 4})^2 - 4(n-1)^2}} \\ = & \frac{2(n-1)}{\sqrt{(n \pm \sqrt{(n-2)^2})^2 - 4(n-1)^2}} \\ = & \frac{2(n-1)}{\sqrt{(n \pm (n-2))^2 - 4(n-1)^2}}.\end{aligned}$$

Si tomamos el signo $(+)$ en la última expresión, vemos que $\omega_1 \to \infty$. Por otro lado, si $1 < n < 2$, $\omega_1 \to \frac{n-1}{\sqrt{n(2-n)}}$, tomamos el signo $(-)$ y $n = 2$, tenemos que $\omega_1 \to \infty$.

3. ω_0 es una función decreciente de H y $\omega_0 \longrightarrow 1^+$ cuando $H \longrightarrow \infty$.

4. $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2$ siempre que estos valores estén definidos; aquí ω_2 es la intersección de la curva de nivel-cero de G_1 con el eje ω y satisface $(1 - H^2)\omega_2 = 1$.

Los puntos críticos aquí obtenidos corresponden a los llamados **cilindros hiperbólicos** (ver, por ejemplo, Montiel [20]). Notamos que estos cilindros hiperbólicos son no umbílicos y que el valor especial $H = \frac{2\sqrt{n-1}}{n}$ es precisamente el valor a partir del cual una hipersuperficie puede dejar de ser umbílica, como afirma el siguente resultado.

Teorema 4.3 *(Akutagawa [1]) Sea M^n una hipersuperficie completa, tipo espacio y con curvatura media constante H en $\mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$. Si se cumple que*

1. $H^2 \leq 1$ *para* $n = 2$,

2. $H^2 \leq \frac{4(n-1)}{n^2}$ *para* $n \geq 3$,

entonces M es totalmente umbílica.

En resumen:

Caso hiperbólico para $r = 1$ y curvatura media constante

Ecuación de la primera integral

$$G_1(\omega, \omega') = \omega^{n-1}\left(\sqrt{\omega^2 + \omega'^2 + 1} - H_1\omega\right)$$

Ecuación de los puntos críticos

$$\omega^2 + (n-1)\left(\omega^2 + 1\right) - nH_1\omega\sqrt{\omega^2 + 1} = 0$$

Si $G(\omega, \omega') = 0$ y $\omega \neq 0$, entonces:

$$\omega'^2 + \left(1 - H^2\right)\omega^2 = -1$$

Resolviendo esta ecuación

$$
\begin{aligned}
\omega'^2 &= -1 + (H^2 - 1)\omega^2 \\
\frac{\omega'^2}{(H^2-1)} &= \omega^2 - \frac{1}{(H^2-1)} \\
\frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{H^2-1}}} &= \left(H^2 - 1\right) du \\
\cosh^{-1} \frac{\omega}{\frac{1}{(H^2-1)^{\frac{1}{2}}}} &= \left(H^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} u,
\end{aligned}
$$

lo que implica que

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{H^2-1}} \cosh \left[\left(H^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} u\right]$$

con soluciones existentes para $H > 1$.

4.2. Superficies de rotación hiperbólica y tipo espacio

En esta sección damos una clasificación de las superficies de rotación hiperbólicas tipo espacio con curvatura media constante no nula en $\mathbb{S}_1^3$.

Sea $\mathbb{R}_1^{n+2}$ el espacio de Minkowski de dimensión $n+2$ con la base natural $e_1, \ldots, e_{n+2}$ cuya métrica $\langle \, , \, \rangle$ está dada por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i - x_{n+2} y_{n+2},$$

donde $x, y \in \mathbb{R}_1^{n+2}$, $x = (x_1, \ldots, x_{n+2})$, $y = (y_1, \ldots, y_{n+2})$. El espacio de De Sitter $(n+1)$−dimensional $\mathbb{S}_1^{n+1}$ está definido por

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \left\{x \in \mathbb{R}_1^{n+2} | \langle x, x \rangle = 1\right\}$$

Por lo que vimos en el capítulo anterior $\mathbb{S}_1^{n+1}$ es una hipersuperficie semi-riemanniana completa, simplemente conexa con curvatura seccional constante 1 en $\mathbb{R}_1^{n+2}$.

Una superficie de rotación hiperbólica en el espacio 3-dimensional de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$ obtenida por la rotación de la curva

$$C_1(x(u), y(u), 0, \omega(u))$$

está dada mediante

$$M_1: \ r(u,v) = (x(u), y(u), \omega(u)\operatorname{senh}(v), \omega(u)\cosh(v)),$$

con $u \in I, v \in \mathbb{R}$. Este tipo de rotación de $\mathbb{R}_1^4$ fija un plano tipo espacio, en este caso, el plano xy.

La primera forma fundamental de M_1 es $\varepsilon du^2 + \omega(u)^2 dv^2$. Cuando $\varepsilon = 1$, la superficie es tipo espacio, cuando $\varepsilon = -1$, la superficie es tipo tiempo.

Sea

$$\begin{aligned} N_1(u,v) = (&y'(u)\omega(u) - \omega'(u)y(u), x'(u)\omega(u) - \omega'(u)x(u), \\ &(y'(u)x(u) - x'(u)y(u))\operatorname{senh}(v), (y'(u)x(u) - x'(u)y(u))\cosh(v)) \end{aligned}$$

el campo vectorial normal unitario de M_1 en $\mathbb{S}_1^3$.

Entonces para la superficie M_1 se debe cumplir

$$\begin{aligned} &\langle N_1, r_u \rangle = \langle N_1, r_v \rangle = \langle N_1, r \rangle = 0, \\ &\langle N_1, N_1 \rangle = -\varepsilon. \end{aligned}$$

Realizaremos el cálculo de $\langle N_1, N_1 \rangle$. Las otras igualdades se verifican de la misma forma (omitiremos u, para facilitar el cálculo):

$$\begin{aligned} \langle N_1, N_1 \rangle &= (y'\omega - \omega' y)^2 + (\omega' x - x\omega')^2 \\ &\quad + (y'x - x'y)^2 \operatorname{senh}^2(v) + (y'x - x'y)^2 \cosh^2(v) \\ &= (y'\omega - \omega' y)^2 + (\omega' x - x\omega')^2 - (y'x - x'y)^2 \\ &= \omega^2(\varepsilon + \omega'^2) + \omega'^2(1 + \omega^2) - 2\omega^2\omega'^2 - (\varepsilon\omega^2 + \omega'^2 + \varepsilon) \\ &= -\varepsilon \end{aligned}$$

De las ecuaciones (4.13) obtenemos

$$2H\omega = \frac{-2\varepsilon\omega^2 - \omega\omega'' - \omega'^2 - \varepsilon}{(\varepsilon\omega^2 + \omega'^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}};$$

es decir,

$$-2H\omega(\varepsilon\omega^2 + \omega'^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} = 2\varepsilon\omega^2 + \omega\omega'' + \omega'^2 + \varepsilon$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\omega(u) > 0$. Cuando $\omega(u) \neq cte$, tomamos $\omega(u)^2 = \alpha(u) - \frac{1}{2}$, y sustituimos en la ecuación anterior. Como $\alpha' = 2\omega\omega'$ y $\alpha'' = 2\omega\omega'' + 2\omega'^2$, obtenemos:

$$\alpha'' + 4\varepsilon\alpha = -2H\left(4\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon + \alpha'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Como $\omega(u) \neq$ cte., entonces $\alpha \neq 0$. De aquí obtenemos:

$$\frac{\alpha'' + 4\varepsilon\alpha}{(4\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon + \alpha'^2)^{\frac{1}{2}}} = -2H$$

Integrando con respecto a α,

$$(\alpha'^2 + 4\varepsilon\alpha^2 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} = -2H\alpha + a, \quad \text{con} \quad a - 2H\alpha > 0,$$

donde a es la constante de integración. Simplificando esta expresión se obtiene

$$\alpha'^2 = a^2 - 4Ha\alpha + 4(H^2 - \varepsilon)\alpha^2 + \varepsilon. \tag{4.18}$$

Resolvemos la ecuación (4.18) por casos.

Caso 1 (tipo espacio). Como $\varepsilon = 1$, (4.18) se transforma en

$$\alpha'^2 = a^2 - 4Ha\alpha + 4(H^2 - 1)\alpha^2 + 1. \tag{4.19}$$

Ahora consideramos los subcasos respecto al valor de H.

1. Si $H^2 = 1$, entonces la ecuación (4.19) se reduce a

$$\alpha'^2 = -aH\alpha + a^2 + 1$$

Resolviendo esta ecuación para $a \neq 0$, se obtiene

$$\alpha = \frac{1}{4Ha}\left(a^2 + 1 - 4a^2u^2\right) = \frac{H}{4a}(a^2 + 1 - 4a^2u^2).$$

Por lo tanto, tenemos

$$\alpha(u) = \begin{cases} \text{constante}, & \text{si } a = 0, \\ \frac{H}{4a}(a^2 + 1 - 4a^2u^2), & \text{si } a \neq 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Para las soluciones posteriores, tomaremos la constante de integración igual a cero.

2. Cuando $H^2 > 1$, resolvemos la ecuación

$$\alpha'^2 = 4(H^2 - 1)\alpha^2 - 4Ha\alpha + a^2 + 1$$

y obtenemos como solución

$$\alpha(u) = \frac{Ha}{2(H^2-1)} + \frac{\sqrt{a^2 - (H^2-1)}}{2(H^2-1)} \cosh(2\sqrt{H^2-1}u),$$

para $a^2 > H^2 - 1$.

Análogamente, se muestra que si $a^2 < H^2 - 1$, entonces

$$\alpha(u) = \frac{Ha}{2(H^2-1)} + \frac{\sqrt{H^2 - (1+a^2)}}{2(H^2-1)} \operatorname{senh}(2\sqrt{H^2-1}u)$$

Si $a^2 = H^2 - 1$, entonces la ecuación (4.18) toma la forma

$$\alpha'^2 = 4a^2\alpha^2 - 4Ha\alpha + H^2$$

y al resolver obtenemos

$$\alpha(u) = \frac{H}{2a} + e^{2au}$$

Cuando $H^2 > 1$ resolvemos la ecuación (4.17), obteniendo

$$\begin{aligned} \alpha'^2 &= 4(H^2-1)\alpha^2 - 4Ha\alpha + a^2 + 1 \\ \alpha(u) &= \tfrac{Ha}{2(H^2-1)} + \tfrac{\sqrt{a^2-1+H^2}}{2(H^2-1)} \operatorname{sen}(2\sqrt{1 - H^2}u) \end{aligned}$$

siempre que $a^2 > H^2 - 1$.

Caso 2 (tipo tiempo). Como $\varepsilon = -1$, entonces la ecuación (4.18) toma la forma

$$\alpha'^2 = 4(H^2 + 1)\alpha^2 - 4Ha\alpha + a^2 - 1$$

Resolviendo esta ecuación para $a^2 > H^2 + 1$ se tiene

$$\alpha(u) = \frac{Ha}{2(H^2+1)} + \frac{\sqrt{a^2 - (H^2+1)}}{2(H^2+1)} \operatorname{senh}(2\sqrt{H^2+1}u)$$

Similarmente, para $a^2 < H^2 + 1$ obtenemos

$$\alpha(u) = \frac{Ha}{2(H^2+1)} + \frac{\sqrt{H^2+1-a^2}}{2(H^2+1)} \cosh(2\sqrt{H^2+1}u)$$

Por último, si $a^2 = H^2 + 1$ entonces (4.18) se transforma en la relación

$$\alpha'^2 = 4a^2\alpha^2 - 4Ha\alpha + H^2$$

y resolviendo esta ecuación, llegamos a

$$\alpha(u) = \frac{H}{2a} + e^{2au}$$

Resumiendo lo anterior podemos concluir el siguiente resultado.

Teorema 4.4 *(Véase [18].) En el espacio de De Sitter 3-dimensional* $\mathbb{S}_1^3$,

1. *Una superficie de rotación hiperbólica de tipo espacio es congruente a alguna de las siguientes superficies.*

   a) $r(u,v) = (a\,\text{sen}(u), a\cos(u), b\,\text{senh}(v), b\cosh(v))$, *donde* $u \in [0, 2\pi]$, $v \in \mathbb{R}$ *y* a, b *son constantes reales.*

   b) $r(u,v) = (x(u), y(u), \omega(u)\,\text{senh}(v), \omega(u)\cosh(v))$, *donde* $u \in I$, $v \in \mathbb{R}$ *y*

   $$x(u) = (\omega(u)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi(u),$$
   $$y(u) = (\omega(u)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \,\text{sen}\,\varphi(u),$$

   con

   $$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\omega(t)^2 + \omega'(t)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(\omega(t)^2+1)} dt.$$

   La función $\omega(u)$ *tiene la siguiente expresión dependiendo de* a *y* H:

   1) $\left(\frac{H}{4a}(a^2 + 1 - 4a^2u^2) - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ *si* $a \neq 0$ *y* $H^2 = 1$.

   2) $\left(\frac{aH}{2(H^2-1)} + \frac{\sqrt{a^2-(H^2-1)}}{2(H^2-1)} \cosh(2\sqrt{H^2-1}u) - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, *si* $a^2 > H^2 - 1 > 0$.

3) $\left(\frac{aH}{2(H^2-1)} + \frac{\sqrt{H^2-1-a^2}}{2(H^2-1)}\operatorname{senh}(2\sqrt{H^2-1}u) - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,
si $0 < a^2 < H^2 - 1$.

4) $\left(\frac{aH}{2(H^2-1)} + \frac{\sqrt{a^2+1-H^2}}{2(H^2-1)}\operatorname{sen}(2\sqrt{1-H^2}u) - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,
si $H^2 - 1 < 0$.

2. *Una superficie de rotación hiperbólica de tipo tiempo es congruente a la superficie*

$$r(u,v) = (x(u), y(u), \omega(u)\operatorname{senh}(v), \omega(u)\cosh(v)),$$

donde $u \in I, v \in \mathbb{R}$, *y*

$$x(u) = (\omega(u)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi(u)$$
$$y(u) = (\omega(u)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\varphi(u),$$

con

$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(-\omega(t)^2 + \omega'(t)^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{(\omega(t)^2 + 1)}dt.$$

La función $\omega(u)$ *tiene la siguiente expresión dependiendo de* a *y* H*:*

$$\begin{array}{ll} \left(\frac{aH}{2(H^2+1)} + \frac{\sqrt{a^2-(H^2+1)}}{2(H^2+1)}\operatorname{senh}(2\sqrt{H^2+1}u) - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & a^2 > H^2+1, \\ \left(\frac{H}{2a} + e^{2au} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & a^2 = H^2+1, \\ \left(\frac{aH}{2(H^2+1)} + \frac{\sqrt{H^2+1-a^2}}{2(H^2+1)}\cosh(2\sqrt{H^2+1}u) - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & a^2 < H^2+1. \end{array}$$

4.3. Superficies de rotación hiperbólica y tipo tiempo

La superficie

$$M_2 : r(u,v) = (x(u), y(u), \omega(u)\cosh(v), \omega(u)\operatorname{senh}(v)), \quad u \in I, \ v \in \mathbb{R}$$

es por definición la superficie de rotación hiperbólica en $\mathbb{S}^3_1$ obtenida por la rotación de la curva $C_2(u) : c_2(u) = (x(u), y(u), \omega(u), 0)$, $u \in I$. Dado que el análisis de estas superficies es análogo al de la sección anterior, hacemos sólo un breve resumen.

La primera forma fundamental de M_2 es $du^2 - \omega(u)^2 dv^2$ y es siempre de tipo tiempo. Sea

$$\begin{aligned} N_2(u,v) = (&y'(u)\omega(u) - \omega'(u)y(u), \omega'(u)x(u) - x'(u)\omega(u), \\ &(x'(u)y(u) - y'(u)x(u))\cosh(v), (x'(u)y(u) - y'(u)x(u))\,\mathrm{senh}(v)) \end{aligned}$$

el campo vectorial normal unitario de M_2 en $\mathbb{S}^3_1$.

Entonces, para la superficie M_2 se deben cumplir las relaciones

$$\begin{aligned} &\langle N_2, r_u\rangle = \langle N_2, r_v\rangle = \langle N_2, r\rangle = 0, \\ &\langle N_2, N_2\rangle = 1 \end{aligned}$$

En este caso las superficies tienen curvatura media constante $H \neq 0$ si y sólo si se tienen las siguientes relaciones sobre el intervalo I:

$$x(u)^2 + y(u)^2 + \omega(u)^2 = 1 \tag{4.21}$$
$$x'(u)^2 + y'(u)^2 + \omega'(u)^2 = 1 \tag{4.22}$$

y además,

$$2H\omega = \omega^2(x''y' - y''x') - \omega\omega'(x''y - y''x) + (\omega\omega'' - 1)(x'y - y'x) \tag{4.23}$$

Ahora resolvemos dichas ecuaciones. Para la ecuación (4.21) proponemos las soluciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(u) & = & (1-\omega(u)^2)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi(u) \\ y(u) & = & (1-\omega(u)^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sen}\,\varphi(u) \end{array} \right. \tag{4.24}$$

donde $|\omega(u)| < 1$.

Derivamos las ecuaciones (4.24) y sustituimos en la ecuación (4.22), obteniendo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(u) & = & -(1-\omega^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sen}\,\varphi\varphi' - \frac{\omega\omega'}{(1-\omega^2)^{\frac{1}{2}}}\cos\varphi \\ y'(u) & = & (1-\omega^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\varphi' - \frac{\omega\omega'}{(1-\omega^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{array} \right. \tag{4.25}$$

Mediante cálculos directos, despejamos φ' y obtenemos

$$\varphi' = \frac{(1-\omega^2-\omega'^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\omega^2}$$

Suponiendo que $1-\omega^2-\omega'^2 > 0$ sobre el intervalo I (cuando $1-\omega^2-\omega'^2 = 0$, entonces φ es constante).

Así, la función $\varphi(u)$ es de la forma

$$\varphi(u) = \pm \int_0^u \frac{(1-\omega(t)^2-\omega'(t)^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\omega(t)} dt$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el signo es positivo. Ahora calculamos las curvaturas principales:

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{1}{\omega^2}\langle N_2, r_{vv}\rangle = -\frac{1}{\omega}(x'y-y'x) = \frac{(1-\omega^2-\omega'^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega} \\ k_n &= -\langle N_2, r_{uu}\rangle = -\frac{(\omega''+\omega)}{x'y-y'x} = \frac{\omega''+\omega}{(1-\omega^2-\omega'^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, n-1$, con la condición $\omega'^2 \leq 1-\omega^2$.

De las ecuaciones (4.24) y (4.25) podemos obtener

$$x'y - y'x = -(1-\omega^2)\varphi' = -(1-\omega^2-\omega'^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.26}$$

$$x''y - y''x = (x'y-y'x)' = -\frac{\omega\omega'+\omega'\omega''}{x'y-y'x} \tag{4.27}$$

Derivamos las igualdades (4.21) y (4.22) y tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} xx' + yy' &= -\omega\omega' \\ xx'' + yy'' &= -\omega\omega'' - 1 \\ x'x'' + y'y'' &= -\omega'\omega'' \end{aligned}$$

de donde despejamos x'' y y'' para obtener

$$\begin{aligned} (x'y-y'x)x'' &= y'(\omega\omega''+1) - y\omega'\omega'' \\ (x'y-y'x)y'' &= -x'(\omega\omega''+1) + x\omega'\omega'' \end{aligned}$$

De esta ecuaciones se deduce la relación

$$x''y' - y''x' = -\frac{1+\omega\omega''-\omega'^2}{xy'-x'y} = \frac{1+\omega\omega''-\omega'^2}{x'y-y'x} \tag{4.28}$$

Si sustituimos las ecuaciones (4.26), (4.27) y (4.28) en (4.23) obtenemos

$$\omega\omega'' + \omega'^2 + 2\omega^2 - 1 = -2H\omega(1-\omega^2-\omega'^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.29}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\omega(u) > 0$. Si $\omega(u)$ no es constante, hacemos el cambio de variable $\alpha(u) = \omega^2 - \frac{1}{2}$ y entonces (4.29) se convierte en la ecuación

$$\alpha'' + 4\alpha = -2H(1 - 4\alpha^2 - \alpha'^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.30}$$

ya que $\alpha' = 2\omega\omega'$ y $\alpha'' = 2\omega'^2 + 2\omega\omega''$. En virtud de que $\omega(u) \neq$ cte. y $\alpha \neq 0$, tenemos de la ecuación (4.30) que

$$(1 - 4\alpha^2 - \alpha'^2)^{\frac{1}{2}} = 2H\alpha + a \quad \text{con } 2H\alpha + a > 0, \tag{4.31}$$

donde a es la constante de integración.

Al resolver la ecuación anterior llegamos a que

$$\alpha(u) = -\frac{aH}{2(H^2+1)} + \frac{\sqrt{H^2+1-a^2}}{2(H^2+1)}\,\mathrm{sen}(2\sqrt{H^2+1}\,u), \tag{4.32}$$

donde tomamos la constante de integración como cero.

De todo lo anterior podemos concluir el resultado siguiente.

Teorema 4.5 *En el espacio 3-dimensional de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$, la superficie de rotación hiperbólica obtenida al girar la curva C_2 es tipo tiempo y congruente con alguna de las siguientes superficies. (Véase [18].)*

1. $r(u,v) = (a\,\mathrm{sen}(u), a\cos(u), b\cosh(v), b\,\mathrm{senh}(v))$, *donde a y b son constantes, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in \mathbb{R}$.*

2. $r(u,v) = (x(u), y(u), \omega(u)\cosh(v), \omega(u)\,\mathrm{senh}(v))$, *donde $u \in I, v \in \mathbb{R}$. Además,*

$$\begin{aligned}
x(u) &= (1-\omega(u)^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi(u)\\
y(u) &= (1-\omega(u)^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{sen}\,\varphi(u)\\
\varphi(u) &= \int_0^u \frac{(1-\omega(t)^2-\omega'(t)^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\omega(t)^2}\,dt\\
\omega(u) &= \left(-\frac{aH}{2(H^2+1)} + \frac{\sqrt{H^2+1-a^2}}{2(H^2+1)}\,\mathrm{sen}(2\sqrt{H^2+1}\,u) + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

donde a y H son constantes y $a^2 < H^2 + 1$.

Capítulo 5

Estabilidad

En este último capítulo estudiamos las fórmulas para la primera y segunda variación del área, así como la definición de estabilidad. Además estudiaremos algunas características de las hipersuperficies tipo espacio con curvatura media constante relacionadas con estos conceptos.

5.1. Primera variación del área

Sea $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ una inmersión tipo espacio, donde M es una variedad conexa, compacta con frontera ∂M (posiblemente vacía) y $\bar{M}^{n+1}$ es una variedad de Lorentz.

Definición 5.1 *$X : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to \bar{M}$ es una* **variación de** *x si:*

1. *X es C^∞.*
2. *$X_t : M \to \bar{M}$ $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, definida por $p \longmapsto X(p,t)$, es una inmersión tipo espacio.*
3. *$X_0 = x$.*
4. *$X|_{\partial M} = x|_{\partial M}$.*

Definición 5.2 *La* **función de área** *de la inmersión $A : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ está dada por*

$$A(t) = \int_M dM_t,$$

donde dM_t es el elemento de volumen de M en la métrica inducida por X_t. La **función de volumen** *$V : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ está dada por*

$$V(t) = \int_{M\times[0,t]} X^* d\bar{M}.$$

Para cada $p \in M$, consideremos la curva $X_p : I \to \bar{M}$, $t \mapsto X(p,t)$. El campo $\omega(p) = \left(\frac{\partial X_p}{\partial t}\right)_{|t=0}$ es el campo variacional de X. Denotemos $f = -\langle \omega, N \rangle$, donde N es el campo normal de la variedad M. Entonces tenemos

$$\omega = fN + \text{campo tangencial}.$$

Lema 5.3 *Con las definiciones y notaciones anteriores, tenemos:*

1. $\frac{dA}{dt}(0) = -\int_M nHf\ dM$,
2. $\frac{dV}{dt}(0) = -\int_M f\ dM$,

donde H es la curvatura media de la inmersión x.

Demostración.

1. Tenemos inicialmente la igualdad

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_M dM_t\right) = \int_M \frac{d}{dt}(dM_t).$$

Mostraremos que

$$\frac{d}{dt}(dM_t)\,|_{t=0} = -n\langle HN, W\rangle + \operatorname{div} W,$$

donde HN es el vector de curvatura media.

Fijemos $p \in M$ y consideremos un marco móvil $e_1, .., e_n$ en $x(U_p)$, donde U_p es una vecindad del punto $p \in M$, tal que

a) $e_1, .., e_n$ son ortonormales en la métrica inducida por x;

b) $(D_{e_i} e_i)_p = \left(\bar{D}_{dx_p(e_i)} dx_p(e_j)\right)^T_{x(p)} = 0$

Definamos $g_{ij}(t) = \langle dX_t(e_i), dX_t(e_j)\rangle$ y consideremos $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ las respectivas 1-formas duales de $e_1, \ldots, e_n$.

Se tiene que

$$dM_t = \sqrt{\det(g_{ij}(t))}\,\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n = \sqrt{\det(g_{ij}(t))}\,dM.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(dM_t)|_{t=0} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij}(t))}}\frac{d}{dt}(\det g_{ij}(t))\,dM_t|_{t=0}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij}(0))}}\frac{d}{dt}(\det(g_{ij}(t)))|_{t=0}dM\end{aligned}$$

Por hipótesis, $g_{ij}(0) = \langle dx(e_i), dx(e_j)\rangle = \delta_{ij}$. Entonces $\det(g_{ij}(0)) = 1$ y

$$\left.\frac{d}{dt}(dM_t)\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left.(g_{ij}(t))\right|_{t=0} dM$$

Usando el lema 2.18, tenemos

$$\left.\frac{d}{dt}(dM_t)\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\det(g_{ij}(t)))|_{t=0}dM = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g'_{kk}(0)dM.$$

Sean $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$ levantamientos de $e_1, \ldots, e_n$ en $U_p \times I \subset M \times I$. Entonces $\left[\frac{\partial}{\partial t}, \widetilde{e}_k\right] = 0$ para $k = 1, \ldots, n$. Denotemos por $\bar{\omega}, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ las imágenes dadas por la aplicación dX de los campos $\frac{\partial}{\partial t}, \widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$. Entonces

$$g_{kk}(t) = \langle dX_t(\widetilde{e}_k), dX_t(\widetilde{e}_k)\rangle = \langle \bar{e}_k, \bar{e}_k\rangle.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}g'_{kk}(t) = \frac{d}{dt}(g_{kk}(t)) &= \frac{d}{dt}\langle \bar{e}_k, \bar{e}_k\rangle = 2\left\langle \frac{D\bar{e}_k}{dt}, \bar{e}_k\right\rangle\\ &= 2\left\langle \bar{D}_{\bar{\omega}}\bar{e}_k, \bar{e}_k\right\rangle = 2\left\langle \bar{D}_{\bar{e}_k}\bar{\omega} + [\bar{\omega}, \bar{e}_k], \bar{e}_k\right\rangle.\end{aligned}$$

ya que $[\bar{\omega}, \bar{e}_k] = \bar{D}_{\bar{\omega}}\bar{e}_k - \bar{D}_{\bar{e}_k}\bar{\omega}$. Además,

$$[\bar{\omega}, \bar{e}_k] = \left[dX\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dX(\widetilde{e}_k)\right] = dX\left[\frac{\partial}{\partial t}, \widetilde{e}_k\right] = 0$$

Consecuentemente,

$$g'_{kk}(t) = 2\left\langle \bar{D}_{\bar{e}_k}\bar{\omega}, \bar{e}_k \right\rangle = 2\left[\bar{e}_k\left\langle \bar{\omega}, \bar{e}_k\right\rangle - \left\langle \bar{\omega}, \bar{D}_{\bar{e}_k}\bar{e}_k\right\rangle\right]$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g'_{kk}(0) &= \sum_{k=1}^{n} \bar{e}_k\left\langle \bar{\omega}, \bar{e}_k\right\rangle - \sum_{k=1}^{n}\left\langle \bar{\omega}, (\bar{D}_{\bar{e}_k}\bar{e}_k)_{X(p)}\right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \bar{e}_k\left\langle \bar{\omega}, \bar{e}_k\right\rangle - \left\langle \bar{\omega}, \sum_{k=1}^{n}(\bar{D}_{\bar{e}_k}\bar{e}_k)_{X(p)}\right\rangle.\end{aligned}$$

Como $0 = (D_{e_k}e_k)_p = \left(\bar{D}_{\bar{e}_k}\bar{e}_k\right)^T_{x(p)}$, se sigue que $\bar{D}_{\bar{e}_k}\bar{e}_k = (\bar{D}_{\bar{e}_k}\bar{e}_k)^N$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g'_{kk}(0) = \sum_{k=1}^{n} \bar{e}_k\left\langle \bar{\omega}, e_k\right\rangle - \left\langle \bar{\omega}, nHN\right\rangle.$$

De esta manera,

$$\left.\frac{d}{dt}(dM_t)\right|_{t=0} = -\left\langle nHN, \bar{\omega}\right\rangle + \sum_{k=1}^{n} e_k\left\langle \bar{\omega}, e_k\right\rangle = -\left\langle nHN, \bar{\omega}\right\rangle + \operatorname{div}\bar{\omega}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0} &= -\int_M \left\langle nHN, \bar{\omega}\right\rangle dM + \int_M \operatorname{div}\bar{\omega}\, dM \\ &= -\int_M \left\langle nHN, \bar{\omega}\right\rangle dM + \int_{\partial M}\left\langle \bar{\omega}, N\right\rangle d\sigma,\end{aligned}$$

donde N es el vector normal unitario de ∂M en la orientación inducida y $d\sigma$ es el elemento de volumen de ∂M.

Como $\omega|_{\partial M} \equiv 0$, la segunda parte de la ecuación se anula y tenemos que

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0} = -\int_M \left\langle nHN, \omega\right\rangle dM.$$

Además, por la ecuación (2.6) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{D}_{e_i}e_i)^{\perp} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j\omega_{ij}(e_i)e_j\right\}^{\perp} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\epsilon_{n+1}\omega_{i,n+1}(e_i)N) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}h_{ij}\theta_j(e_i)\,N\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h_{ii}N = -HN
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0} &= -\int_M \langle nHN,\bar{\omega}\rangle\, dM = \int_M \langle nHN,\bar{\omega}\rangle\, dM \\
&= \int_M nH\,\langle N,\bar{\omega}\rangle\, dM = -\int_M nHf\, dM.
\end{aligned}$$

2. Fijamos un punto $p \in M$ y escogemos un marco móvil ortonormal adaptado, orientado positivamente, $e_1,\ldots,e_n,e_{n+1} = N$ en $x(p)$. Entonces $X^*(d\bar{M}) = a(p,t)dM \wedge dt$, donde

$$\begin{aligned}
a(p,t) &= (X^*d\bar{M})\left(e_1,\ldots,e_n,\frac{\partial}{\partial t}\right) \\
&:= d\bar{M}\left(dX_t(e_1),\ldots,dX_t(e_n),\frac{\partial X}{\partial t}\right).
\end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
a(p,0) &= d\bar{M}(dx(e_1),\ldots,dx(e_n),\omega) \\
&= d\bar{M}(dx(e_1),\ldots,dx(e_n),fN + \text{componente tangencial}) \\
&= d\bar{M}(dx(e_1),\ldots,dx(x_n),fN) \\
&\quad + d\bar{M}(dx(e_1),\ldots,dx(e_n),\text{comp. tangencial}) \\
&= fd\bar{M}(dx(e_1),\ldots,dx(e_n),N) \\
&= fdM(e_1,\ldots,e_n) = f.
\end{aligned}$$

Como es válida la cadena de igualdades

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}\int_{M\times[0,t]} a(p,\tau)dM \wedge d\tau \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\int_M \left(\int_0^t a(p,\tau)d\tau\right) dM\right\} \\
&= \int_M \left(\frac{d}{dt}\int_0^t a(p,\tau)d\tau\right) dM \\
&= \int_M a(p,t)\, dM,
\end{aligned}
$$

se sigue que $\frac{dV}{dt}(0) = \int_M f\, dM$. ∎

Definición 5.4 *Una variación es* **normal** *si ω es paralelo a N. La variación* **preserva volumen** *si $V(t) = V(0) = 0$, para todo t.*

Lema 5.5 *Dada una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ con $f|_{\partial M} = 0$ y $\int_M f dM = 0$, existe una variación normal que preserva volumen cuyo campo variacional es fN.*

Demostración. Sea $\phi : (-\epsilon,\epsilon) \times M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\phi(0,p) = 0$ y $\phi|_{\partial M} = 0$. Definamos

$$X : (-\epsilon,\epsilon) \times M \to \bar{M}, \quad (t,p) \longmapsto \exp_{x(p)} \phi(t,p)N.$$

Afirmamos que X es una variación normal con $\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{t=0} N$.

La diferenciabilidad de X es consecuencia de la diferenciabilidad de las funciones $p \longmapsto x(p)$, $p \longmapsto N(x(p))$, $(t,p) \longmapsto \phi(t,p)$, ya que X es composición de todas ellas en conjunto con la exponencial, la cual también es diferenciable. Tenemos por un lado que

$$X_0(p) = X(0,p) = \exp_{x(p)} \phi(0,p)N = \exp_{x(p)} \overrightarrow{0} = x(p).$$

y si $p \in \partial M$, entonces

$$X_t(p) = \exp_{x(p)} \phi(t,p)N = \exp_{x(p)} \overrightarrow{0} = x(p).$$

Consecuentemente, $(X_t)|_{\partial M} = x|_{\partial M}$.

Es claro que X_t es inmersión y además,

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(d(\exp_{x(p)})_{\phi(t,p)N}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)N\right)_{t=0}$$
$$= d\left(\exp_{x(p)}\right)_{\vec{0}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{t=0} N = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{t=0} N.$$

Mostraremos ahora que ϕ puede ser escogida para satisfacer las hipótesis del lema.

Calculemos entonces la función volumen $V(t)$ relativa a la variación X. Observemos que $X = e \circ \psi$, donde

$$\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to \mathbb{R} \times M, \quad (t,p) \longmapsto (\phi(t,p), p)$$

y

$$e : \mathbb{R} \times M \to \bar{M}, \quad (u,p) \longmapsto \exp_{x(p)} N_{x(p)}.$$

Si denotamos $E(u,p) = \det(de(p,u))$, entonces

$$V(t) = \int_{[0,t]\times M} X^* d\bar{M} = \int_{[0,t]\times M} \psi^* e^* d\bar{M}.$$

Por definición, $(e \circ \psi)^* d\bar{M}$ es una $(n+1)$-forma diferencial definida en $(-\epsilon, \epsilon) \times M$ mediante

$$\left[(e \circ \psi)^* d\bar{M}\right]_{(t,p)} (v_1, \ldots, v_{n+1})$$
$$= d\bar{M}_{X(t,p)} \left(de_{(\phi(t,p),p)} d\psi_{(t,p)} v_1, \ldots, de_{(\phi(t,p),p)} d\psi_{(t,p)} v_{n+1}\right)$$
$$= \det(de_{(\phi(t,p),p)}) \det(d\psi_{(t,p)})(dM \wedge dt)(v_1, \ldots, v_{n+1})$$

o, de otra forma,

$$(e \circ \psi)^* d\bar{M}_{(t,p)} = \det(de_{(\phi(t,p),p)}) \det(d\psi_{(t,p)}) dM \wedge dt.$$

Por otro lado,

$$d\psi_{(t,p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial t} & * \\ 0 & I \end{pmatrix}_{(t,p)}$$

Luego, $\det(d\psi_{(t,p)}) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,p)$. Además,

$$V(t) = \int_{[0,t]\times M} E(\phi(t,p),p) \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,p) dM \wedge dt$$
$$= \int_M \left(\int_0^t E(\phi(t,p),p)\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,p) dt\right) dM.$$

Ahora consideramos el problema de Cauchy

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,p) = \frac{f(p)}{E(\phi(t,p),p)},$$
$$\phi(0,p) = 0.$$

Tenemos que

$$E(\phi(t,p),p) = \det(de_{(\phi(t,p),p)}) = \det[(d\exp_{x(p)})_{\phi(t,p)N_{x(p)}}] \neq 0$$

puesto que $\exp_{x(p)}$ es un difeomorfismo local.

Luego, el problema de Cauchy está bien definido y por el teorema de existencia y unicidad de las EDP, tiene una solución única ϕ.

Sustituimos ϕ en $V(t) = \int_M \left(\int_0^t E\frac{\partial\phi}{\partial t}dt\right) dM$, y tenemos

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_M \left(\int_0^t E\frac{f(p)}{E}dt\right) dM \\ &= \int_M \left(\int_0^t f(p)dt\right) dM \\ &= \int_M f(p)tdM = t\int_M f(p)dM = t\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in (-\epsilon,\epsilon)$. Por lo tanto, X preserva volumen y además,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t}(0,p) &= \left\{ \left[d\exp_{x(p)}\right]_{\phi(t,p)N_{x(p)}} \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,p)N_{x(p)} \right\}_{t=0} \\ &= \left[d\exp_{x(p)}\right]_{\vec{0}} \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,p)N_{x(p)} = \frac{\partial\phi}{\partial t}(0,p)N \\ &= \frac{f(p)}{E(0,p)}N. \end{aligned}$$

Como $E(0,p) = \det(de_{(0,p)}) = 1$, tenemos $\frac{\partial X}{\partial t}(0,p) = f(p)N$ y por lo tanto X es normal.

De la hipótesis $f|_{\partial M} = 0$, se sigue que $\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,p) = 0$, para todo $p \in \partial M$. Luego $\phi(t,p)$ es constante en relación a t. Por la condición inicial $\phi(0,p) = 0$, se tiene $\phi(t,p) = 0$, para todo $p \in \partial M$ y para todo $t \in (-\epsilon,\epsilon)$. Esto concluye la demostración. ■

Para una variación dada X de una inmersión $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$, denotemos

$$H_0 = \frac{1}{A(0)} \int_M H dM,$$

donde $A(0) = A$.

Definamos el siguiente operador: $J : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, dado por

$$t \longmapsto J(t) = A(t) + nH_0V(t) = A(t) + \frac{nV(t)}{A(0)} \int_M H dM.$$

Proposición 5.6 *Sea $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ una inmersión tipo espacio. Entonces son equivalentes:*

1. *x tiene curvatura media constante igual a H_0;*
2. *Para cualquier variación X de x que preserva volumen tenemos que $A'(0) = 0$.*
3. *Para cualquier variación X de x, $J'(0) = 0$.*

Demostración. *1* $\Rightarrow$ *3*) Derivando $J(t)$, tenemos que

$$J'(t) = A'(t) + nH_0V'(t).$$

Al evaluar en $t = 0$ y usar el Lema 5.3, tenemos

$$J'(0) = A'(0) + nH_0V'(0) = -\int_M nHfdM + nH_0 \int_M fdM$$

Como por hipótesis $H \equiv H_0$, tenemos

$$J'(0) = -\int_M nH_0fdM + nH_0 \int_M fdM = 0$$

3 $\Rightarrow$ *2*) Sea X una variación de x que preserva volumen; es decir, $V(t) \equiv V(0)$. Entonces, $V'(t) \equiv 0$.

Además, por hipótesis, $J'(0) = 0$. Luego,

$$J'(0) = A'(0) + nH_0V'(0) = A'(0) = 0$$

2 $\Rightarrow$ *1*) Supongamos, por contradicción, que existe algún punto $p \in M$ donde $(H - H_0)(p) = H(p) - H_0 \neq 0$. Podemos suponer además que $(H - H_0)(p) > 0$. Afirmamos que $\int_M (H - H_0) dM = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}\int_M (H - H_0)dM &= \int_M \left[H - A^{-1}(0)\int_M HdM\right]dM\\ &= \int_M HdM - \int_M \left(A^{-1}(0)\int_M HdM\right)dM\\ &= \int_M HdM - \left(A^{-1}(0)\int_M HdM\right)\int_M dM\\ &= \int_M HdM - A^{-1}(0)\left[\int_M HdM\right]A(0) = 0.\end{aligned}$$

Consideremos ahora los conjuntos:

$$D^+ = \{q \in M; (H - H_0)(q) > 0\}, \qquad D^- = \{q \in M; (H - H_0)(q) < 0\}.$$

Como $H - H_0 : M \to \mathbb{R}$ es continua y $(H - H_0)(p) > 0$, entonces existe una vecindad V_p de p tal que $(H - H_0)|_{V_p}$ es estrictamente positiva. Por otro lado, como $\int_M (H - H_0)dM = 0$, entonces existe alguna vecindad $V_{\widetilde{p}}$ de algún otro punto $\widetilde{p}$ de M, donde $(H - H_0)|_{V_{\widetilde{p}}} < 0$. Como M es compacto, entonces podemos tomar funciones ϕ no negativas con soporte $\mathrm{sop}(\phi) \subset V_p \subset D^+ \setminus \partial M$, cuyo producto por $H - H_0$ sea tal que $\int_M \phi(H - H_0)\, dM$ asuma un valor positivo arbitrario. Análogamente, tenemos una función ψ no negativa con soporte $\mathrm{sop}(\psi) \subset V_{\widetilde{p}} \subset D^- \setminus \partial M$ tal que $\int_M \psi(H - H_0)\, dM$ asume un valor negativo arbitrario. Entonces existen funciones ϕ y ψ no negativas y diferenciables por partes tales que $p \in \mathrm{sop}(\phi) \subset D^+$; $\mathrm{sop}(\psi) \subset D^-$ y $\int_M (\phi + \psi)(H - H_0)\, dM = 0$.

Denotemos $f = (\phi + \psi)(H - H_0)$. Si $q \in \partial M$, entonces

$$f(q) = (\phi(q) + \psi(q))(H(q) - H_0(q)) = 0(H(q) - H_0(q)) = 0.$$

Por lo tanto, el lema anterior indica que existe una variación normal que preserva volumen, cuyo vector variacional es fN. Por hipótesis, $A'(0) = -\int_M nHf dM = 0$ para tal variación. Como $\int_M f dM = 0$, tenemos que $\int_M H_0 f dM = 0$. Luego entonces

$$0 = \int_M f(H - H_0)dM = \int_M (\phi + \psi)(H - H_0)^2 dM > 0.$$

Esto es una contradicción. De esta manera, $H = H_0$ en M. ■

5.2. Segunda variación del área

Ahora calculamos la segunda variación de $J = A(t) + nH_0V(t)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt}(t) &= \frac{dA}{dt}(t) + nH_0\frac{dV}{dt}(t)\\ &= -\int_M nH_tf_tdM_t + nH_0\int_M f_tdM_t\\ &= \int_M (-nH_t + nH_0)\, f_tdM_t,\end{aligned}$$

donde H_t es la curvatura media de X_t y $f_t = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t\right\rangle$, siendo N_t es el vector normal de X_t.

Tenemos entonces que

$$\frac{d^2J}{dt^2}(t) = \int_M \left(-n\frac{\partial H_t}{\partial t}\right) f_tdM_t + \int_M (-nH_t + nH_0)\left\{\frac{\partial f_t}{\partial t}dM + f_t\frac{d}{dt}(dM_t)\right\}.$$

Haciendo $t = 0$ y considerando que la curvatura media de x es constante, tenemos:

$$\frac{d^2J}{dt^2}(0) = \int_M -n\frac{\partial H_t}{\partial t}(0)fdM, \ \ con \ \ (H_t)\,|_{t=0} = H_0.$$

Teorema 5.7 *Sea $x : M^n \to \bar{M}$ una inmersión tipo espacio con curvatura media constante H_0 y sea X una variación de x que preserva el volumen. Entonces $J''(0)$ depende solamente de f y está dada por*

$$J''(0)(f) = \int_M \left(f\Delta f - \|B\|^2 f^2 + \mathrm{Ricci}(N)f^2\right) dM$$

donde Δ es el laplaciano en la métrica inducida, $\|B\|$ es la norma de la segunda forma fundamental de x, y Ricci(N) *es la curvatura de Ricci (normalizada) de $\bar{M}$ en la dirección de N.*

Probaremos el resultado para variaciones normales. El hecho de que X sea normal significa que $\omega = \frac{\partial X}{\partial t}(0) = fN$.

Para calcular la segunda derivada de J es suficiente calcular $\left(\frac{\partial H_t}{\partial t}\right)(0)$. Para hacer esto vamos a probar dos lemas.

Lema 5.8 $\operatorname{grad} f = \bar{D}_W (N_t)_{t=0}$.

Demostración. Sea $x : U \to M$ una parametrización alrededor del punto $p \in M$. Sean $\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}$ levantamientos de los campos $\frac{\partial}{\partial x_i}$ a $x(u) \times I \subset M \times I$. Tenemos que $\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}\right] = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, $\left[dX(\frac{\partial}{\partial t}), dX(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i})\right] = 0$.

En consecuencia, si $v_i = dX\left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}\right)$ y $W = dX\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, tenemos que para cada $1 \leq i \leq n$, $0 = [W, v_i] = \bar{D}_W v_i - \bar{D}_{v_i} W$. Luego entonces, $\bar{D}_W v_i = \bar{D}_{v_i} W$. Ahora se tiene

$$0 = W \langle N_t, v_i \rangle = \langle \bar{D}_W N_t, v_i \rangle + \langle N_t, \bar{D}_W v_i \rangle$$

Entonces

$$\langle \bar{D}_W N_t, v_i \rangle |_{t=0} = - \langle (N_t) |_{t=0}, (\bar{D}_W v_i) |_{t=0} \rangle = - \langle N, (\bar{D}_{v_i} W) |_{t=0} \rangle .$$

Pero $W|_{t=0} = fN$ y $(\bar{D}_{v_i} W) |_{t=0} = \bar{D}_{v_i} (fN) = v_i [f] N + f \bar{D}_{v_i} N$. Esto implica que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{D}_W N_t, v_i \rangle &= - \langle N, v_i [f] N + f \bar{D}_{v_i} N \rangle \\
&= - \langle N, v_i [f] N \rangle - \langle N, f \bar{D}_{v_i} N \rangle \\
&= -v_i [f] \langle N, N \rangle \\
&= v_i [f] .
\end{aligned}$$

Observemos que $\langle N, N \rangle = \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle = -1$. Además, $\langle \nabla f, v_i \rangle = D_{v_i} f = v_i [f]$. Por lo tanto, $\operatorname{grad} f = \bar{D}_W (N_t) |_{t=0}$, lo cual concluye la prueba del lema. ■

Asociado con cada X_t tenemos una segunda forma fundamental B y una aplicación A definidas como en el capítulo 2, relacionadas por

$$B(X, Y) = \langle AX, Y \rangle.$$

Lema 5.9 *Si X y Y son vectores en T_pM entonces*

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} A\right) X, Y \right\rangle = \langle \bar{D}_X \operatorname{grad} f, Y \rangle + f \bar{\Omega} (N, X, N, Y) - f \langle A^2 X, Y \rangle .$$

Demostración. Calcularemos la derivada de B de dos maneras diferentes. Primero usaremos que $B(X, Y) = \langle \bar{D}_X N, Y \rangle$. Sea $W = dX\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial X}{\partial t}$.

Podemos extender X y Y a campos vectoriales tangentes en $\bar{M}$ también llamados X y Y tal que $[X,W]=[Y,W]=0$ en el punto p.

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}B(X,Y) &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \bar{D}_X N, Y\right\rangle \\ &= \left\langle \bar{D}_W \bar{D}_X N, Y\right\rangle + \left\langle \bar{D}_X N, \bar{D}_W Y\right\rangle\end{aligned}$$

Usamos la ecuación (2.7) para obtener

$$\left\langle \bar{D}_W \bar{D}_X N, Y\right\rangle = \left\langle \bar{D}_X \bar{D}_W N, Y\right\rangle + \left\langle \bar{D}_{[W,X]} N, Y\right\rangle + \bar{\Omega}\left(W,X,N,Y\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}B(X,Y) &= \left\langle \bar{D}_X \bar{D}_W N, Y\right\rangle + \left\langle \bar{D}_{[W,X]} N, W\right\rangle \\ &\quad +\bar{\Omega}\left(W,X,N,Y\right) + \left\langle \bar{D}_X N, \bar{D}_Y W\right\rangle.\end{aligned}$$

Haciendo $t=0$, usando el lema anterior, la expresión de W y $[X,W]_p=0$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}B(X,Y) &= \left\langle \bar{D}_X(\bar{D}_W N)_{t=0}, Y\right\rangle + \left\langle \bar{D}_0 N, W\right\rangle + \\ &\quad +\bar{\Omega}\left(fN,X,N,Y\right) + \left\langle \bar{D}_X N, \bar{D}_Y fN\right\rangle \\ &= \left\langle \bar{D}_X(\operatorname{grad} f), Y\right\rangle + f\bar{\Omega}(N,X,N,Y) \\ &\quad +f\left\langle \bar{D}_X N, \bar{D}_Y N\right\rangle.\end{aligned}$$

Observemos además que

$$\begin{aligned}\left\langle \bar{D}_X N, \bar{D}_Y fN\right\rangle &= \left\langle \bar{D}_X N, Y\left[f\right]N + f\bar{D}_Y N\right\rangle \\ &= \left\langle \bar{D}_X N, Y\left[f\right]N\right\rangle + f\left\langle \bar{D}_X N, \bar{D}_Y N\right\rangle.\end{aligned}$$

El último término es igual a $f\langle AX, AY\rangle = f\langle A^2X, Y\rangle$ y el término $Y[f]N$ desaparece ya que f es constante en M.

Derivamos ahora de otra manera observando que $B(X,Y)=\langle AX,Y\rangle$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}B(X,Y) = \frac{\partial}{\partial t}\langle AX,Y\rangle &= \left\langle \bar{D}_W(AX),Y\right\rangle + \left\langle AX,\bar{D}_W Y\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}A\right)X + A\left(\bar{D}_W X\right)^T, Y\right\rangle + \left\langle AX,\bar{D}_Y W\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}A\right)X, Y\right\rangle + \left\langle A(\bar{D}_X W)^T, Y\right\rangle + f\left\langle AX,\bar{D}_Y N\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}A\right)X, Y\right\rangle + f\left\langle A(\bar{D}_X^T N), Y\right\rangle + f\left\langle AX,\bar{D}_Y N\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}A\right)X, Y\right\rangle + f\left\langle A^2 X, Y\right\rangle + f\left\langle AX,AY\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}A\right)X, Y\right\rangle + f\left\langle AX, AY\right\rangle + f\left\langle AX,AY\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}A\right)X, Y\right\rangle + 2f\left\langle AX,AY\right\rangle
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \bar{D}_X \operatorname{grad} f, Y\right\rangle + f\bar{\Omega}(N,X,N,Y) + f\left\langle \bar{D}_X N, \bar{D}_Y N\right\rangle \\
&\qquad = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}A\right)X, Y\right\rangle + 2f\left\langle AX,AY\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Finalmente, observando que $\left\langle \bar{D}_X N, \bar{D}_Y N\right\rangle = \langle AX, AY\rangle$, se tiene

$$
\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t}A\right)X, Y\right\rangle = \left\langle \bar{D}_X \operatorname{grad} f, Y\right\rangle + f\bar{\Omega}\,(N,X,N,Y) - f\left\langle A^2X, Y\right\rangle .
$$

lo que termina la prueba. ■

Proposición 5.10 *Para variaciones normales tenemos*

$$
-n\frac{\partial H_t}{\partial t}(0) = \Delta f + f\,\mathrm{Ricci}(N) - f\,\|B\|^2 .
$$

Demostración. Sea $\{e_1,\ldots,e_n,e_{n+1}=N\}$ un marco adaptado a la inmersión x de la cual X es una variación. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left\langle A^2 e_i, e_i\right\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i), A(e_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j W_{n+1j}(e_i) W_{n+1j}(e_i)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^2 = \|B\|^2 \qquad (5.1)\end{aligned}$$

y además

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \bar{D}_{e_i}(\operatorname{grad} f), e_i\right\rangle \qquad (5.2)$$

Por definición, el tensor de Ricci es

$$\begin{aligned}\operatorname{Ricci}(N) &= \sum_{i=1}^{n}\bar{\Omega}\left(N, e_i, N, e_i\right) = -\sum_{i}\varepsilon_i\varepsilon_{n+1}\bar{R}_{n+1,i,n+1,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\bar{R}_{n+1,i,n+1,i}.\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}-n\frac{\partial H}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\langle A(e_i), e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\left\langle\frac{D(Ae_i)}{dt}, e_i\right\rangle + \left\langle A(e_i), \frac{De_i}{dt}\right\rangle\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-n\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_{ii}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}A\right)e_i, e_i\right\rangle.$$

y por el lema anterior, tenemos

$$\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}A\right)X, Y\right\rangle = \left\langle\bar{D}_X \operatorname{grad} f, Y\right\rangle + f\bar{\Omega}\left(N, X, N, Y\right) - f\left\langle A^2 X, Y\right\rangle.$$

Consecuentemente

$$
\begin{aligned}
-n\frac{\partial H}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}A\right)e_i, e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\left\langle \bar{D}_{e_i}\operatorname{grad} f, e_i\right\rangle + f\bar{\Omega}\left(N, e_i, N, e_i\right) - f\left\langle A^2 e_i, e_i\right\rangle\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \bar{D}_{e_i}\operatorname{grad} f, e_i\right\rangle + \sum_{i=1}^{n} f\bar{\Omega}\left(N, e_i, N, e_i\right) - \sum_{i=1}^{n} f\left\langle A^2 e_i, e_i\right\rangle \\
&= \Delta f + f\operatorname{Ricci}(N) - f\left\|B\right\|^2,
\end{aligned}
$$

lo que prueba la afirmación. ■

5.3. Estabilidad y campos de Jacobi

Definición 5.11 *Sea $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ una inmersión tipo espacio con curvatura media constante. La inmersión x es* **estable** *si $J'' \leq 0$ para toda variación de x que preserva el volumen. Si M no es compacta, diremos que x es* **estable** *si para toda subvariedad con frontera $\widetilde{M} \subset M$, la restricción $x|_{\widetilde{M}}$ es estable.*

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones diferenciables $f : M \to \mathbb{R}$ con $f|_{\partial M} = 0$ y $\int_M f dM = 0$.

Proposición 5.12 *Una inmersión $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ es estable si y solamente si $J''(0)(f) \leq 0$ para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos que $J''(0)(f) \leq 0$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Sea $X : (-\epsilon, \epsilon) \times M^n \to \bar{M}^{n+1}$ una variación de x que preserva el volumen. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $p \longmapsto -\left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{t=0}, N\right\rangle$.

En virtud de que X fija la frontera, $\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)(0,p) = 0$ para toda $p \in M$. Luego, $f|_{\partial M} = 0$. Como $V'(0) = \int_M f dM$, tenemos que $0 = V'(0) = \int_M f dM$. Así $f \in \mathcal{F}$.

Por la construcción de f efectuada arriba tenemos que $X = X(f)$ y por hipótesis debemos tener $J''(0) = J''_X(0) = J''_{X(f)} \leq 0$. Por lo tanto, x es estable.

Recíprocamente, supongamos que x es estable. Sea $f \in \mathcal{F}$. Por el lema 5.5 tenemos la existencia de una variación $X(f) : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to \bar{M}^{n+1}$ normal que preserva volumen con campo variacional dado por fN. Por hipótesis, tenemos entonces que $J''_{X(f)}(0) = J''(0)(f) \leq 0$. ■

Definamos la forma bilineal $I : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ mediante

$$I(f,g) = \int_M g \left\{ \Delta f - \|B\|^2 f + \mathrm{Ricci}(N) f \right\} dM \tag{5.3}$$

Definición 5.13 *Sea $x : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ una inmersión con curvatura media constante. Un campo vectorial normal $W = fN$, $f \in \mathcal{F}$, es un* **campo de Jacobi** *si y sólo si $f \in Ker\ I$.*

Proposición 5.14 *Sea $f \in \mathcal{F}$. Entonces fN es un campo de Jacobi si y solamente si*

$$\Delta f + \left(\mathrm{Ricci}(N) - \|B\|^2\right) f = c$$

donde c es una constante.

Demostración. Si $\Delta f + \left(\mathrm{Ricci}(N) + \|B\|^2\right) f = c$, tenemos

$$I(f,g) = \int_M g\ c\ dM = c \int_M g\ dM$$

para toda $g \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, fN es un campo de Jacobi.

Supongamos ahora que fN es un campo de Jacobi. Sea F_0 el valor medio de $F = \Delta f + \left(\mathrm{Ricci}(N) - \|B\|^2\right) f$ en M; es decir,

$$F_0 = \frac{\int_M F dM}{\int_M dM}.$$

Entonces tenemos que

$$\int_M (F - F_0)\, dM = 0.$$

Como por hipótesis, $\int_M gF dM = 0$ para toda $g \in \mathcal{F}$ y $\int_M gF_0 dM = 0$, tenemos que

$$\int_M g(F - F_0) dM = 0$$

para toda $g \in \mathcal{F}$. Mostraremos que $F \equiv F_0$.

Supongamos que existe algún $p \in M$ tal que $(F - F_0)(p) > 0$. Por continuidad, tenemos la existencia de un abierto $U_1 \subset M$ tal que $(F - F_0)|_{U_1}$ es estrictamente positivo. Como $\int_M (F - F_0)\, dM = 0$, existe un abierto U_2 de M tal que $(F - F_0)|_{U_2}$ es estrictamente negativo. Consideremos una función diferenciable $\phi : M \to \mathbb{R}$ tal que:

1. $\operatorname{sop}\phi \subset U_1 \cup U_2$;

2. $\phi|_{U_1}$ sea no negativa y $\phi|_{U_2}$ sea no positiva;

3. $\phi \in \mathcal{F}$.

Entonces, $\int_M \phi(F - F_0)\, dM$ será positivo, en contradicción con el hecho de que

$$\int_M g(F - F_0)\, dM = 0, \text{ para cualquier } g \in \mathcal{F}.$$

Esto demuestra la suficiencia. ∎

5.4. Valores propios del laplaciano

Sea $\Phi \in C^\infty(M)$. Definimos una norma en $C^\infty(M)$ por:

$$\|\Phi\|_1 = \left(\int_M |\Phi(x)|^2 + \int_M |\nabla\Phi|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Al completar $C^\infty(M)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$ obtenemos el llamado espacio de Sobolev, denotado por $L_1^2(M)$.

Sea $\partial M = \emptyset$ y M compacta, entonces Δ es un operador elíptico auto-adjunto en $L_1^2(M)$. Por la teoría espectral de los operadores auto-adjuntos, sabemos que Δ tiene valores propios discretos $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_i \to \infty$ y las correspondientes funciones propias $\{\Phi_i\}$ que satisfacen $\Delta\Phi_i = -\lambda_i\Phi_i$, $\Phi_i \in C^\infty(M) \cap L_1^2(M)$, pueden ser escogidas de tal manera que $\{\Phi_i\}$ formen una base ortonormal de $L_1^2(M)$.

Si $\partial M = \varnothing$ y $H = \left\{f \in L_1^2(M) : \int_M f = 0\right\}$, Δ es un operador elíptico auto-adjunto en H, y podemos encontrar una base ortonormal $\{f_i\}$, con $\Delta f_i = -\lambda_i f_i$, $f_i \in C^\infty(M) \cap H$, tal que

$$\lambda_1 = \text{ínf}\left\{\frac{\int |\nabla f|^2}{|f|^2} : f \in H\right\}$$

Utilizaremos los siguientes resultados cuyas demostraciones aparecen en Spivak [26].

Lema 5.15 *El primer valor propio λ_1 de la esfera $\mathbb{S}^n$ está dado por $\lambda_1 = nk$, donde k es la curvatura seccional de $\mathbb{S}^n$.*

Observación 5.16 *Si x tiene curvatura media constante, entonces la fórmula de la segunda variación (4.4) se puede escribir*

$$\begin{aligned} I(f,f) &= \int_M \left(f\Delta f - \|B\|^2 f^2 + nf^2\right) dM \\ &= -\int_M \left\{\|\text{grad}\, f\|^2 + \left(\|B\|^2 - n\right) f^2\right\} dM \end{aligned}$$

Lema 5.17 *Para cualquier inmersión tipo espacio tenemos*

$$\|B\|^2 - nH^2 \geq 0$$

La igualdad se da si y sólo si la inmersión es umbílica.

Demostración. Sean $k_1, \ldots, k_n$ las curvaturas principales de x en $p \in M$. Entonces $\|B\|^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2$ y

$$\|B\|^2 = \sum_{i<j} (k_i - k_j)^2 = \sum_{i<j} \left(k_i^2 + k_j^2\right) - 2\sum_{i<j} k_i k_j = n^2 H^2 - 2\sum_{i<j} k_i k_j.$$

Por lo que

$$\|B\|^2 - n^2 H^2 = -2\sum_{i<j} k_i k_j.$$

Se muestra por inducción que

$$\sum_{i<j} \left(k_i^2 + k_j^2\right) = (n-1)\sum_i k_i^2, \tag{5.4}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \sum_{i<j} (k_i - k_j)^2 &= (n-1)\sum_i k_i^2 - 2\sum_{i<j} k_i k_j \\ &= (n-1)\|B\|^2 - 2\sum_{i<j} k_i k_j \end{aligned} \tag{5.5}$$

Sumando las ecuaciones (5.4) y (5.5) tenemos

$$n\left(\|B\|^2 - nH^2\right) = \sum_{i<j} (k_i - k_j)^2 \geq 0$$

por lo que $\|B\|^2 - nH^2 \geq 0$; si p es umbílica, entonces $\|B\|^2 - nH^2 = 0$, lo que prueba el Lema. ∎

Ejemplo 5.18 *Las esferas de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ son estables.*

Demostración. Consideremos una esfera M en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ con curvatura media H. Como M es isométrica a una esfera euclidiana con curvatura seccional $\frac{1}{\tau^2+1}$, el Lema 5.15 implica que el primer valor propio del laplaciano de M es $\lambda_1 = \frac{n}{\tau^2+1}$. De la proposición 3.11, tenemos que $\mathrm{Ricci}(N) = n$, de modo que la segunda fórmula de variación está dada por

$$\begin{aligned} J''(0)(f) &= -\int_M \left\{\|\mathrm{grad}\, f\|^2 + (\|B\|^2 - n)f^2\right\} dM \\ &\leq -\int_M (\lambda_1 + nH^2 - n)f^2 dM \end{aligned}$$

Por el lema 5.17 se tiene $\|B\|^2 = nH^2 = \frac{n\tau^2}{\tau^2+1}$. Así,

$$\begin{aligned} J''(0)(f) &\leq -\int_M (\lambda_1 + nH^2 - n)f^2 dM \\ &= -\int_M \left(\frac{n}{\tau^2+1} + n\frac{\tau^2}{\tau^2+1} - n\right) f^2 dM = 0, \end{aligned}$$

lo que demuestra que la esfera $M \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ es estable. ∎

Apéndice A

Algunas demostraciones técnicas

En este apéndice incluimos la demostración de algunas proposiciones del capítulo 1.

Proposición A.1 (Prop. 2.9) *Sea* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *un marco móvil ortonormal en una variedad semi-riemanniana* M^n *con formas duales* $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$. *Entonces existen 1-formas* ω_{ij} *únicas tales que* $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ *y*

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_j \omega_{ij} \wedge \theta_j \tag{A.1}$$

Demostración. Supongamos que existen 1-formas ω_{ij} que satisfacen las condiciones de la Proposición. Entonces existen funciones unívocamente determinadas a_{ij}^k y b_{ij}^k tales que:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \theta_k \tag{A.2}$$

$$d\theta_i = \frac{1}{2} \sum_{k,j} b_{kj}^i \theta_k \wedge \theta_j \tag{A.3}$$

con $b_{jk}^i = -b_{kj}^i$.

Sustituimos la ecuación (A.2) en la ecuación (A.1) obteniendo

$$
\begin{aligned}
d\theta_i &= \sum_{j,k} \varepsilon_j a_{ij}^k \theta_k \wedge \theta_j = \sum_{k<j} \varepsilon_j a_{ij}^k \theta_k \wedge \theta_j + \sum_{k>j} \varepsilon_j a_{ij}^k \theta_k \wedge \theta_j \\
&= \sum_{k<j} \varepsilon_j a_{ij}^k \theta_k \wedge \theta_j - \sum_{k>j} \varepsilon_j a_{ij}^k \theta_j \wedge \theta_k \\
&= \sum_{k<j} \varepsilon_j a_{ij}^k \theta_k \wedge \theta_j - \sum_{k<j} \varepsilon_k a_{ik}^j \theta_k \wedge \theta_j = \sum_{k<j} (\varepsilon_j a_{ij}^k - \varepsilon_k a_{ik}^j) \theta_k \wedge \theta_j.
\end{aligned}
$$

Entonces tenemos:

$$
\sum_{k<j} b_{kj}^i \theta_k \wedge \theta_j = \sum_{k<j} (\varepsilon_j a_{ij}^k - \varepsilon_k a_{ik}^j) \theta_k \wedge \theta_j
$$

Así,

$$
b_{kj}^i = \varepsilon_j a_{ij}^k - \varepsilon_k a_{ik}^j, \tag{A.4}
$$

para $k < j$, donde

$$
a_{ij}^k = -a_{ji}^k \tag{A.5}
$$

Veamos que la ecuación (A.4) es válida para toda $1 \leq j, k \leq n$. En primer lugar, sabemos que es válida para $k < j$. Ahora para $k = j$ tenemos que $b_{jj}^k = 0$. Ya que $\varepsilon_j a_{ij}^k - \varepsilon_j a_{ij}^k = 0$. Así, $b_{jj}^k = \varepsilon_j a_{ij}^k - \varepsilon_j a_{ij}^k$.

Finalmente, supongamos que $k > j$. De (A.4) tenemos que $b_{jk}^i = \varepsilon_k a_{ik}^j - \varepsilon_j a_{ij}^k$. Como $b_{jk}^i = -b_{kj}^i$, tenemos:

$$
b_{kj}^i = \varepsilon_j a_{ij}^k - \varepsilon_k a_{ik}^j
$$

Permutando cíclicamente la ecuación (A.5), tenemos:

$$
\begin{aligned}
a_{ij}^k &= -a_{ji}^k, \\
a_{jk}^i &= -a_{kj}^i, \\
a_{ki}^j &= -a_{ik}^j;
\end{aligned}
$$

y, usando la ecuación (A.4),

$$
\begin{aligned}
b_{kj}^i &= \varepsilon_j a_{ij}^k - \varepsilon_k a_{ik}^j \\
b_{ji}^k &= \varepsilon_i a_{ki}^j - \varepsilon_j a_{kj}^i \\
b_{ik}^j &= \varepsilon_k a_{jk}^i - \varepsilon_i a_{ji}^k
\end{aligned}
$$

Sustituyendo (A.5) en las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} b^i_{kj} &= -\varepsilon_j a^k_{ji} - \varepsilon_k a^j_{ik} \\ b^j_{ik} &= -\varepsilon_k a^i_{kj} - \varepsilon_i a^k_{ji} \\ b^k_{ji} &= -\varepsilon_i a^j_{ik} - \varepsilon_j a^i_{kj} \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_j & 0 & \varepsilon_k \\ \varepsilon_i & \varepsilon_k & 0 \\ 0 & \varepsilon_j & \varepsilon_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^k_{ji} \\ a^i_{kj} \\ a^j_{ik} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b^i_{kj} \\ b^j_{ik} \\ b^k_{ji} \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante de este sistema de ecuaciones:

$$\det \begin{bmatrix} \varepsilon_j & 0 & \varepsilon_k \\ \varepsilon_i & \varepsilon_k & 0 \\ 0 & \varepsilon_j & \varepsilon_i \end{bmatrix} = \varepsilon_j(\varepsilon_k\varepsilon_i) + \varepsilon_k(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 2\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k \neq 0$$

Y por la regla de Cramer existe una solución única para a^k_{ij} dada por:

$$a^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_i b^i_{kj} - \varepsilon_k b^k_{ji} + \varepsilon_j b^j_{ik}}{\varepsilon_i\varepsilon_j}\right)$$

Por lo tanto, como las 1-formas ω_{ij} se escriben como $\omega_{ij} = \sum a^k_{ij}\theta_k$ y las a^k_{ij} son únicas entonces las 1-formas ω_{ij} también lo son. Para probar la existencia definamos las 1-formas ω_{ij} usando la última ecuación; entonces, claramente estas formas satisfacen las condiciones de la Proposición. ∎

Lema A.2 (Lema 2.12) *Para campos vectoriales X y Y en M y para cada $1 \leq i, j \leq n$, son válidas las ecuaciones:*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \bar{D}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \bar{D}_X Z\rangle \tag{A.6}$$

$$\Omega_{ij}(X, Y) = \langle \bar{D}_X \bar{D}_Y e_i - \bar{D}_Y \bar{D}_X e_i - \bar{D}_{[X,Y]} e_i, e_j\rangle . \tag{A.7}$$

Demostración. Para probar (A.6), sean $Y = \sum y_i e_i$ y $Z = \sum z_j e_j$. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle \bar{D}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \bar{D}_X Z\rangle = &\left\langle \sum_j \left\{ dy_j(X) + \varepsilon_j \sum_i \omega_{ij}(X) y_i \right\} e_j \,, \sum_k z_k e_k \right\rangle \\ &+ \left\langle \sum_i y_j e_j, \sum_k \left\{ dz_k(X) + \varepsilon_k \sum_i \omega_{ik}(X) z_i \right\} e_k \right\rangle \end{aligned}$$

Como el marco $\{e_i\}$ es ortonormal, lo anterior es igual a

$$\sum_j \varepsilon_j z_j (dy_j(X) + \varepsilon_j \sum_i y_i \omega_{ij}(X)) + \sum_j \varepsilon_j y_j (dz_j(X) + \varepsilon_j \sum_i z_i \omega_{ij}(X))$$
$$= \sum_j \varepsilon_i \left(z_j dy_j(X) + y_j dz_j(X)\right) + \sum_{i,j} y_i z_j \omega_{ij}(X) + \sum_{i,j} y_i z_j \omega_{ji} = X \langle Y, Z \rangle .$$

Ahora realizaremos la prueba de (A.7):

$$\begin{aligned}&\left\langle \bar{D}_X \bar{D}_Y e_i - \bar{D}_Y \bar{D}_X e_i - \bar{D}_{[X,Y]} e_i, e_j \right\rangle \\ &\qquad = \left\langle (\bar{D}(\bar{D}_{e_i}(Y)))(X), e_j \right\rangle - \left\langle (\bar{D}(\bar{D}_{e_i}(X)))(Y), e_j \right\rangle - \left\langle \bar{D}_{e_i}([X,Y]), e_j \right\rangle\end{aligned}$$

Calculemos $\left\langle (\bar{D}(\bar{D}_{e_i}(Y)))(X), e_j \right\rangle$.

$$\begin{aligned}\left\langle \bar{D}(\bar{D}_{e_i}(Y)))(X), e_j \right\rangle &= \left\langle \left(\bar{D} \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \omega_{ij}(Y) e_k \right) \right) (X), e_j \right\rangle \\ &= \left\langle \left\{ \sum_{k=1}^{n} \bar{D}(\varepsilon_k \omega_{ij}(Y)) e_k \right\} (X), e_j \right\rangle \\ &= \left\langle \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(\varepsilon_k d\omega_{ik}(Y) + \varepsilon_k \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l \omega_{il}(Y) \omega_{lk} \right) e_k \right\} (X), e_j \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k d\omega_{ik}(Y)(X) \langle e_k, e_j \rangle + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \varepsilon_l \omega_{il}(Y) \omega_{lk}(X) \langle e_k, e_j \rangle \\ &= (d\omega_{ij}(Y))(X) + \sum_l \varepsilon_l \omega_{il}(Y) \omega_{lj}(X).\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\left\langle \left(\bar{D}(\bar{D}e_i(X))\right)(Y), e_j \right\rangle = (d\omega_{ij}(X)(Y) + \sum \varepsilon_l \omega_{il}(X) \omega_{lj}(Y).$$

y

$$\begin{aligned}\left\langle \bar{D}(e_i)([X,Y]), e_j \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \omega_{ik} e_k([X,Y]), e_j \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \omega_{ik}([X,Y]) \langle e_k, e_j \rangle = \omega_{ij}([X,Y]).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\langle \bar{D}_X \bar{D}_Y e_i - \bar{D}_Y \bar{D}_X e_i - \bar{D}_{[X,Y]}e_i, e_j \rangle = \\ (d\omega_{ij}(Y))(X) - (d\omega_{ij}(X))(Y) - \omega_{ij}[X,Y] \\ + \sum_k \varepsilon_k \{\omega_{ij}(Y)\omega_{kj}(X) - \omega_{ij}(X)\omega_{kj}(Y)\} \quad \text{(A.8)}\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\Omega_{ij}(X,Y) &= d\omega_{ij}(X,Y) - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \omega_{ij} \wedge \omega_{kj}(X,Y) \\ &= X(\omega_{ij}(Y)) - Y(\omega_{ij}(X)) - \omega_{ij}([X,Y]) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\omega_{ik}(X)\omega_{kj}(Y) - \omega_{ik}(Y)\omega_{kj}(X))) \quad \text{(A.9)}\end{aligned}$$

Comparando (A.8) y (A.9) obtenemos la ecuación (A.7). ■

Proposición A.3 (Prop. 2.14) *Para X, Y, Z, W campos en M,*

$$\Omega(X,Y,Z,W) = \sum_{i,.j} Z_j W_i \Omega_{ij}(X,Y) = \sum_{i,j,k,l} \varepsilon_k \varepsilon_l Z_i W_j X_k Y_l R_{ijkl},$$

donde $R_{ijkl} = \Omega_{ij}(e_k, e_l)$.

Demostración. De hecho, si $Z = \sum_i z_i e_i$ y $W = \sum_l w_l e_l$, se tiene

$$\begin{aligned}\bar{D}_X \bar{D}_Y Z = \left(\bar{D} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (dz_i(Y) + \varepsilon_i \sum_{j=1}^{n} z_j \omega_{ij}(Y)) e_i \right\} \right)(X) \\ = \sum_{i=1}^{n} \{ d(dz_i(Y) + \varepsilon_i \sum_{j=1}^{n} z_j \omega_{ij}(Y))(X) \\ + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{n} [dz_k(Y) + \varepsilon_k \sum_{j=1}^{n} z_j \omega_{ij}(Y)] \omega_{ki}(X) \} e_i\end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned}\bar{D}_Y\bar{D}_X Z &= \sum_{i=1}^{n}\{((d(dz_i(X)))(Y)+\varepsilon_i\sum_{j=1}^{n}d(z_j\omega_{ij}(X))(Y)\\ &\quad+\varepsilon_i\sum_{k=1}^{n}[dz_k(X)+\varepsilon_k\sum_{j=1}^{n}z_j\omega_{jk}(X)]\omega_{ki}(Y)\}e_i\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\bar{D}_{[X,Y]}Z &= \sum_{i=1}^{n}(\bar{D}_{z_i})([X,Y])e_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\{dz_i([X,Y])+\varepsilon_i\sum_{j=1}^{n}z_i\omega_{ij}([X,Y])\right\}e_i.\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}&\langle\bar{D}_X\bar{D}_Y Z-\bar{D}_Y\bar{D}_X Z-\bar{D}_{[X,Y]}Z,W\rangle\\ &\qquad=\langle\bar{D}_X\bar{D}_Y Z,W\rangle-\langle\bar{D}_Y\bar{D}_X Z,W\rangle-\langle\bar{D}_{[X,Y]}Z,W\rangle\\ &=\sum_{i=1}^{n}\{d(dz_i(Y))(X)+\varepsilon_i\sum_{j=1}^{n}(d(z_j\omega_{ij}(Y)))(X)+\varepsilon_i\sum_{k=1}^{n}[(dz_k(Y)\\ &\qquad+\varepsilon_k\sum_{j=1}^{n}z_j\omega_{jk}(Y))\omega_{ki}(X)]\}\left\langle e_i,\sum_{l}\omega_l e_l\right\rangle\\ &\qquad+\sum_{i=1}^{n}\{((d(dz_i(X)))(Y)+\varepsilon_i\sum_{j=1}^{n}(d(z_j\omega_{ji}(X))(Y)\\ &\quad-\varepsilon_i\sum_{k=1}^{n}[dz_k(X)+\varepsilon_k\sum_{j=1}^{n}z_j\omega_{jk}(X))\omega_{ki}(Y)]\}\left\langle e_i,\sum_{l}\omega_l e_l\right\rangle\\ &\qquad\qquad-\sum_{k=1}^{n}\{dz_k[X,Y]+\varepsilon_j\sum_{j=1}^{n}z_j\omega_{ji}([X,Y])\}\left\langle e_i,\sum_{l}\omega_l e_l\right\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \bar{D}_X \bar{D}_Y Z &- \bar{D}_Y \bar{D}_X Z - \bar{D}_{[X,Y]} Z, W\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \omega_i (d(dz_i(Y)))(X) + \sum_{i,j} \omega_i dz_j(X)\omega_{ij}(Y) \\
&\quad + \sum_{i,j} \omega_i dz_j(d(\omega_{ij}(Y)))(X) \\
&\quad + \sum_{i,k} \omega_i dz_k(Y)\omega_{ki}(X) + \sum_{i,j,k} \varepsilon_k \omega_i z_j \omega_{jk}(Y)\omega_{ki}(X) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \omega_i (d(z_i(X)))(Y) \\
&\quad - \sum_{i,j} \omega_i dz_j(Y)\omega_{ji}(X) - \sum_{ij} \omega_i z_j (d(\omega_{ji})(X)))(Y) \\
&\quad - \sum_{ik} \omega_i dz_k(X)\omega_{ki}(Y) \\
&\quad - \sum_{ijk} \varepsilon_k \omega_i z_j \omega_{jk}(X)\omega_{ki}(Y) - \sum_{i} \varepsilon_i \omega_i dz_i([X,Y]) \\
&\quad - \sum_{ij} \omega_i z_j \omega_{ji}([X,Y]).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \omega_i d(dz_i(Y)))(X) + \sum_{i,j} \varepsilon_i \omega_i dz_j(X)\omega_{ji}(Y) + \sum_{i,k} \varepsilon_i \omega_i dz_k(Y)\omega_{ki}(X) \\
&- \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \omega_i (d(dz_i(X)))(Y) - \sum_{i,j} \varepsilon_i \omega_i dz_j(Y)\omega_{ji}(X) - \sum_{j,k} \varepsilon_i \omega_i dz_k(X)\omega_{ki}(Y) - \\
&- \sum_{i} \omega_i \varepsilon_i dz_i([X,Y]) \\
&= \sum_{i,j} \varepsilon_i \omega_i \{dz_j(X)\omega_{ji}(Y) + dz_j(Y)\omega_{ji}(X) - dz_j(Y)\omega_{ji}(X) - dz_j(X)\omega_{ji}(Y)\} \\
&+ \sum_{i} \varepsilon_i \omega_i \{(d(dz_i(Y)))(X) - (d(dz_i(X)))(Y) - dz_i([X,Y])\} = 0
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{D}_X \bar{D}_Y Z & - \bar{D}_Y \bar{D}_X Z - \bar{D}_{[X,Y]} Z, W \rangle \\
&= \sum_{i,j} \omega_i z_j (d(\omega_{ij}(Y)))(X) + \sum_{i,j,k} \omega_i \varepsilon_k z_j \omega_{jk}(Y) \omega_{ki}(X) \\
& \quad - \sum_{i,j} \omega_i z_j (d(\omega_{ji}(X)))(Y) - \sum_{i,j,k} \varepsilon_k \omega_i z_j \omega_{jk}(X) \omega_{ki}(Y) \\
& \quad - \sum_{i,j} \omega_i z_j \omega_{ji}([X,Y]) \\
&= \sum_{i,j} \omega_i z_j \{[d(\omega_{ji}(Y))](X) + \sum_k \varepsilon_k \omega_{ik}(Y) \omega_{ki}(X) \\
& \quad -[d(\omega_{ji}(X))](Y) - \sum_k \varepsilon_k \omega_{jk}(Y) \omega_{ki}\,(Y)\, \omega_{ki}(X) \\
& \quad -\omega_{ji}([X,Y])\} \\
&= \sum_{i,j} \omega_i z_j \Omega_{ij}(X,Y) \\
&= \sum_{i,j} \omega_i z_j \Omega_{ij} \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k X_k e_k, \sum_l Y_l e_l \right) \\
&= \sum_{i,j,k,l} \omega_i z_j \varepsilon_k \varepsilon_l X_k Y_k \Omega_{ij}(e_k, e_l) \\
&= \sum_{i,j,k,l} \varepsilon_k \varepsilon_l \omega_i z_j X_k Y_k R_{ijkl}
\end{aligned}$$

■

Bibliografía

[1] Akutagawa, K., *On Spacelike Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in the De Sitter Space*, Math Z. 196-1, p. 13-19 (1987).

[2] Barbosa J. L., do Carmo M. P., *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*, Math Z. 185-3, p. 339-353 (1984).

[3] Barbosa J. L., do Carmo M., Eschenburg J., *Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds*, Math Z. 197-1, p. 123-138 (1988).

[4] Barbosa J. L., Oliker V, *Spacelike Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Lorentz Space*, Matemática Contemporânea 4, p. 27-44 (1993).

[5] Brasil Jr. A., Colares A. G., *On Constant Mean Curvature Spacelike Hypersurfaces in Lorentz Manifolds*, Anais da Academia Brasileira da Ciencias (2000).

[6] Brasil Jr. A., Colares A. G., Palmas O., *A Gap Theorem for Complete Constant Scalar Curvature Hypersurfaces in the De Sitter Space*, Journal of Geometry and Physics 37-3, p. 237-250 (2001).

[7] de Oliveira Vaz C. R., *Hipersuperfícies tipo Espaço de Curvatura Média Constante em Espaço de Lorentz*, Tesis de maestría, Universidade Federal do Ceará (2000).

[8] Delaunay Ch., *Sur le Surface de Révolution dont la Courbure Moyenne est Constante*, Jour. de Math. Pures et Apliqueés, p. 309-321 (1841).

[9] do Carmo M. P., *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides (1975).

[10] do Carmo M. P. *Differential Forms and Applications*, Springer-Verlag, p. 113 (1994).

[11] do Carmo M. P., *Hypersurfaces of Constant Mean Curvature*, Lecture Notes 1410: Diff. Geometry, 3^{rd} International Symposium of Differential Geometry, p. 128-144 (1988).

[12] do Carmo M. P., Dajczer M., *Rotation Hypersurfaces in Space of Constant Curvature*, Transactions of the American Mathematical Society 277, p. 685-709 (1983).

[13] Goddard, A. J., *Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 82, p. 489-495 (1977).

[14] Hsiang W. Y., Lawson Jr. H. B., *Minimal Submanifolds of Low Cohomogeneity*, J. Differential Geometry, p. 1-38 (1971).

[15] Lawson Jr. H. B., *Lectures on Minimal Submanifolds*, Monografías de Matemática (1970).

[16] Leite M. L., *Rotational Hypersurfaces of Space Forms with Constant Scalar Curvature*, Manuscripta Mathematica, p. 285-304 (1990).

[17] Lindelöf H. L., *Sur les Limites entre Lesquelles le caténoïde est une Surface minima*, Mathematica Annalen II, p. 160-166 (1871).

[18] Liu H., Liu G., *Hyperbolic Rotation Surfaces of Constant Mean Curvature en 3-De Sitter Space*, Bull. Belg. Math. Soc. 7, p. 455-466 (2000).

[19] Marsden, Jerrold E., Tipler, Frank J., *Maximal Hypersurfaces and Foliations of Constant Mean Curvature in General Relativity*, Physics Reports 66 No. 3 (1980) 109-139.

[20] Montiel S., *An Integral Inequality for Compact Spacelike Hypersurfaces in De Sitter Space and Applications*, Indiana University Mathematics Journal 37-4, p. 909-917 (1988).

[21] Mori H., *Rotational Surfaces in a Pseudo-Riemannian 3-Sphere*, Tôhoku Math Journ. 38, p. 29-36 (1986).

[22] O'Neill B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press (1983).

[23] Osserman R., *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover (1969).

[24] Palmas O., *Complete Rotation Hypersurfaces with H_k Constant in Space Forms*, Bol. Soc. Bras. Mat. 30, p. 139-161 (1999).

[25] Palmas O., *Spacelike Rotation Hypersurfaces with H_r Constant in De Sitter Space*, publicación preliminar.

[26] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish Inc. (1975).