UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El lema de van der Corput y los subconjuntos de nivel en una y varias variables.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O.

P R E S E N T A:

Pablo Sandino Morales Chávez

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Director de Tesis
Dra. Magali Louise Marie Folch Gabayet

2004

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: El lema de van der Corput y los subconjuntos de nivel en una y varias variables.

realizado por Pablo Sandino Morales Chávez

con número de cuenta 9532002-9 , quien cubrió los créditos de la carrera de: MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dra. Magali Louise Marie Folch Gabayet	
Propietario	Dr. Francisco Marcos López García	
Propietario	Dr. Salvador Pérez Esteva	
Suplente	Dra. Ana Meda Guardiola	
Suplente	M. en C. Angel Manuel Carrillo Hoyo	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A mi familia.

Contenido

Introducción

En este trabajo analizamos el comportamiento de la integral de Lebesgue oscilatoria

$$I(\lambda) = \int_{[0,1]} e^{i\lambda u(t)} dt$$

y de la medida de los subconjuntos de nivel

$$\{t \in [0,1] : |u(t)| \leq \alpha\}$$

cuando u es una función real de variable vectorial de clase C^∞, λ es cualquier número real y $\alpha > 0$. Estamos interesados en el comportamiento de $I(\lambda)$ al hacer tender λ a infinito; mientras que con los subconjuntos de nivel centramos nuestra atención en parámetros α cercanos a cero.

A partir de los resultados conocidos para funciones de variable real, tratamos de establecer resultados análogos para funciones con dominio en $\mathbb{R}^n$. Desde los años 20 se conocen estimaciones para $I(\lambda)$ cuando u tiene como dominio a los números reales. Johannes Gualtherus van der Corput estableció y probó las siguientes afirmaciones requiriendo sólo hipótesis sobre las derivadas de u:

1. *Sea* $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable tal que* u' *es monótona y para todo* $t \in (a,b)$, $u'(t) \geq \rho$ *ó* $u'(t) \leq -\rho$ *para algún* $\rho > 0$. *Entonces,*

$$\left| \int_a^b e^{2\pi i u(t)} dt \right| \leq \frac{1}{\rho}.$$

2. *Sea* $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función dos veces diferenciable tal que para toda* $t \in (a,b)$, $u''(t) \geq \rho$ *ó* $u''(t) \leq -\rho$ *con* $\rho > 0$. *Entonces,*

$$\left| \int_a^b e^{2\pi i u(t)} dt \right| \leq \frac{4}{\rho^{1/2}}.$$

Estas afirmaciones dieron pie al resultado que ahora conocemos como el Lema de van der Corput:

a)Sean $a < b$, u función real integrable y diferenciable tal que $|u'(t)| \geq 1$ para todo $t \in [a, b]$, u' monótona y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces existe C tal que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda u(t)}\, dt \right| \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

b)Para cualesquiera $a < b$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \geq 2$ y u función real integrable tal que $u^{(k)} \geq 1$, existe C tal que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda u(t)} dt \right| \leq \frac{Ck}{|\lambda|^{1/k}}.$$

En ambos casos la constante C es absoluta, es decir, no depende ni de u, ni de λ ni del intervalo $[a, b]$. Fue en los años 80 cuando se consiguió estimar el Lema de van der Corput de manera óptima. Arhipov, Karacuba y Cubarikov [1] lograron esto utilizando estimaciones de los subconjuntos de nivel.

En el caso de más de una variable se analizará el comportamiento de ciertos operadores integrales con los que se podrán acotar los subconjuntos de nivel ó, en el caso del Lema de van der Corput, trabajar con ellos resultará equivalente a estudiar directamente el comportamiento de $I(\lambda)$.

Este trabajo está dividido en cinco capítulos. En el primero probaremos el Lema de van der Corput a partir de las cotas de los subconjuntos de nivel y algunos otros resultados.

En el segundo capítulo, se trabajará con los subconjuntos de nivel determinados por funciones de más u de una variable a través del estudio del operador integral

$$S_\alpha f(x) = \int \chi_{E_\alpha}(x, y) f(y) dy,$$

donde $E_\alpha = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : |u(x, y)| < \alpha\}$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

En el tercer capítulo trataremos de generalizar el Lema de van der Corput, es decir, buscaremos estimar $|I(\lambda)|$ cuando u es una función de más de una variable. Para ello, utilizaremos distintas propiedades del operador integral

$$T_\lambda f(x) = \int e^{i\lambda u(x,y)} f(y) dy,$$

donde $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.

En el cuarto capítulo trabajaremos los casos particulares en los que el Lema de van der Corput y los subconjuntos de nivel están determinados por un polinomio P real de variable real. Al ser P un polinomio se cumplirán automáticamente hipótesis que facilitarán el análisis.

En el último capítulo, veremos cómo con la ayuda de la Teoría de Gráficas se podrían mejorar algunos de los resultados tratados en los capítulos anteriores.

Como conclusiones, lograremos obtener estimaciones absolutas para $I(\lambda)$ y los subconjuntos de nivel para funciones u de variable vectorial que cumplan con $D^\beta u \leq 1$, para algún multi-índice β, en todo su dominio y, con algunas hipótesis extras, lograremos que tales estimaciones sean como las que sugieren los resultados en una dimensión.

Sobre la notación utilizada en este trabajo, hay que señalar que cuando escribamos $|A|$ nos referimos a la mediada de Lebesgue del conjunto A, por $\{a \wedge b \wedge c\}$ entenderemos el valor mínimo entre los números a, b y c. Hay que resaltar también que C representara una constante positiva, que, aunque no se indique, podrá variar de una linea a otra.

Capítulo 1

El lema de van der Corput.

En este capítulo se prueba el Lema de van der Corput y se obtienen estimaciones para los subconjuntos de nivel determinados por funciones $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Veremos por qué no es posible tener el Lema de van der Corput si sólo pedimos que $u^{(k)} > 1$ con k cualquier número natural. Para enfatizar esta situación trabajamos por separado el caso $k = 1$ y $k \geq 2$.

Comenzamos con algunos lemas que nos ayudarán, en éste y en los siguientes capítulos, a acotar la medida de los subconjuntos de nivel. El primero, no es más que un corolario del Teorema de Rolle y lo utilizaremos para probar una generalización del Teorema del valor medio.

Dados $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, denotaremos con $cnx\{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ al espacio conexo generado por $\{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$, y con $\overline{cnx}\{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ a su cerradura.

Lema 1.0.1. *Sean $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ y $f\colon \overline{cnx}\{a_1, \ldots, a_{k+1}\} \to \mathbb{R}$, tal que $f \in C^k$, y $f(a_i) = f(a_j)$ para todo i, j. Entonces existe $\xi \in cnx\{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ tal que $f^{(k)}(\xi) = 0$.*

Demostración: Por el Teorema de Rolle existe $b_i \in cnx\{a_i, a_{i+1}\}, i=1, \ldots, k-1$ tal que $f'(b_i) = 0$. Por el mismo resultado existe $c_r \in cnx\{b_r, b_{r+1}\} \subseteq cnx\{a_r, a_{r+2}\}, r = 1, \ldots, k-2$, tal que $f''(c_r) = 0$.

Si repetimos $k-2$ veces el proceso anterior obtenemos $\xi \in cnx\{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ tal que $f^k(\xi) = 0$.

$\square$

Lema 1.0.2. *Sean* $a_1, \ldots, a_{k+1} \in \mathbb{R}$ *distintos,* $k \in \mathbb{N}$, $f \colon \overline{cnx}\{a_1, \ldots, a_{k+1}\} \to \mathbb{R}$, *tal que* $f \in C^k$. *Entonces existe* $\xi \in cnx\{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ *tal que:*

$$f^k(\xi) = \sum_{j=1}^{k+1} \pm f(a_m) k! \prod_{i:i\neq m} |a_j - a_i|^{-1}.$$

Demostración: Sea $P_k(x)$ el polinomio de grado k obtenido con interpolación de Lagrange en los puntos $f(a_i), i = 1, \ldots, k+1$. Entonces

$$P_k(x) = \sum_{j=1}^{k+1} f(a_j) \prod_{i:i\neq j} \frac{x - a_i}{a_j - a_i}$$

satisface $P_k(a_i) = f(a_i)$.

Derivando k veces,

$$\begin{aligned} P_k^{(k)}(x) &= \frac{f(a_1)k!}{(a_1 - a_2)\cdots(a_1 - a_{k+1})} + \cdots + \frac{f(a_{k+1})k!}{(a_{k+1} - a_1)\cdots(a_{k+1} - a_{k-1})} \\ &= k! \sum_{j=1}^{k+1} f(a_j) \prod_{i:i\neq j} \frac{1}{a_j - a_i}. \end{aligned}$$

Sea $\Psi(x) = f(x) - P_k(x)$. Por construcción, Ψ se anula en $a_1, \ldots, a_{k+1}$. Entonces, por el Lema 1.0.1, existe $\xi \in cnx\{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ tal que $\Psi^{(k)}(\xi) = 0$. Por lo tanto,

$$f^{(k)}(\xi) = P_k^{(k)}(\xi) = k! \sum_{j=1}^{k+1} \prod_{i:i\neq j} \frac{f(a_j)}{a_j - a_i} = \pm k! \sum_{j=1}^{k+1} \prod_{i:i\neq j} \frac{f(a_j)}{|a_j - a_i|}.$$

□

El lema siguiente nos permitirá relacionar la medida de un conjunto cualquiera con el lema 1.0.2. Recordemos que queremos estimar $|\{x : |u(x)| \leq \alpha\}|$.

Lema 1.0.3. *Sea* $E \subseteq \mathbb{R}$ *Lebesgue medible tal que* $0 \leq |E| < \infty$ *y* $k \in \mathbb{N}$. *Entonces existen* $a_0, \ldots, a_k \in E$ *tales que para toda* $l = 0, \ldots, k$,

$$\prod_{j:j\neq l} |a_j - a_l| \geq (|E|/2e)^k. \tag{1.1}$$

Demostración: Dado que el resultado es claro si $|E| = 0$ podemos suponer que $|E| > 0$. Además, sabemos que para todo conjunto Lebesgue medible $|E| = \sup\{|K| : K \subseteq E \text{ y } K \text{ es compacto}\}$, por lo que es suficiente probar el lema para conjuntos compactos. Aun más, es posible suponer que E es un intervalo y, reescalando, podemos suponer que dicho intervalo es $[0, 1]$. Justificaremos esto último en la parte final de la demostración.

Sean $a_0 = 0, a_1 = 1/k, a_2 = 2/k, \ldots, a_k = k/k$. Veremos primero que el valor mínimo de $\prod_{j:j\neq l} |a_j - a_l|$ se alcanza en $l = k/2$, si k es par, ó en $l = (k+1)/2$ si k es impar.

Supongamos que k es par, hay que demostrar que para todo l,

$$\prod_{j:j\neq k/2} |a_j - a_{(k/2)}| \leq \prod_{j:j\neq l} |a_j - a_l|. \tag{1.2}$$

Partimos del hecho de que

$$\prod_{j:j\neq l} |a_j - a_l| = \frac{l!(k-l)!}{k^k}, \tag{1.3}$$

entonces, para $l < k/2$, (1.2) es equivalente a

$$(k/2)!(k-(k/2))! \leq l!(k-l)!,$$

que a su vez es sinónimo de que

$$(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot l \cdots k/2)^2 \leq (1 \cdot 2 \cdots l)(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot l \cdots k/2 \cdots (k-l)),$$

que es válida si y sólo si,

$$(l+1)(l+2)\cdots(k/2) \leq ((k/2)+1)((k/2)+2)\cdots((k/2)+((k/2)-l)).$$

Pero esta última desigualdad es verdadera porque cada factor del miembro derecho es mayor que cada uno del miembro izquierdo, y cada miembro tiene $(k/2) - l$ factores. De manera similar se prueba el caso en que $l > k/2$.

Por lo tanto, para $l = 0, \ldots, k$,

$$\prod_{j:j\neq k/2} |a_j - a_{(k/2)}| \leq \prod_{j:j\neq l} |a_j - a_l|.$$

Vamos a ver ahora que

$$\prod_{j\neq(k/2)} |a_j - a_{k/2}| \geq (|E|/2e)^k.$$

Por (1.3),

$$\prod_{j\neq(k/2)} |a_j - a_{k/2}| = \frac{((k/2)!)^2}{k^k} = \frac{((k/2)!)^2}{(k/2)^k 2^k} = \left(\frac{(k/2)!}{(k/2)^{k/2}2^{k/2}}\right)^2.$$

Ahora, si

$$e^{k/2} \geq \frac{(k/2)^{k/2}}{(k/2)!} \tag{1.4}$$

entonces

$$\frac{e^{k/2}}{2^{k/2}} \geq \frac{(k/2)^{k/2}}{2^{k/2}(k/2)!},$$

con lo que

$$\frac{(k/2)!}{(k/2)^{k/2}2^{k/2}} \geq 2^{-k/2}e^{-k/2},$$

y así,

$$\left(\frac{(k/2)!}{(k/2)^{k/2}2^{k/2}}\right)^2 \geq (2e)^{-k}.$$

Por lo tanto,

$$\prod_{j:j\neq l} |a_j - a_l| \geq \prod_{j\neq(k/2)} |a_j - a_{k/2}| \geq (|E|/2e)^k.$$

Falta justificar (1.4). Si escribimos $e^{k/2}$ como una serie de Taylor, tenemos que,

$$e^{k/2} = \frac{(k/2)^{k/2}}{(k/2)!} + \sum_{i=0}^{(k/2)-1} \frac{(k/2)^i}{i!} + \sum_{i=(k/2)+1}^{\infty} \frac{(k/2)^i}{i!},$$

es decir,

$$e^{k/2} \geq \frac{(k/2)^{k/2}}{(k/2)!}.$$

La prueba del caso en que k es impar es análoga.

Veamos ahora porqué es válido suponer que E es un intervalo, siempre que E sea compacto y de medida positiva.

Sea $f_E\colon E \subset [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_E(x) = |(-\infty, x] \cap E|$. Veremos que $f_E(E)$ es un intervalo cerrado con medida igual a $|E|$ y que para todo $x, y \in E$, $|f_E(x) - f_E(y)| \leq |x - y|$. Veamos primero que f_E no incrementa distancias. Supongamos que $x < y$, entonces,

$$|f_E(x) - f_E(y)| = ||(-\infty, x] \cap E| - |(-\infty, y] \cap E||$$

$$= ||(-\infty, x] \cap E| - |(-\infty, x] \cap E| - |(x, y] \cap E|| \leq |x - y|.$$

Como consecuencia tenemos que f_E es continua.

Enseguida veremos que $f_E(E) = [0, |E|]$. Demostraremos solamente la contención que no es inmediata. Sea $x_0 \in [0, |E|]$. Tenemos dos casos, a saber, cuando x_0 es punto de acumulación de la imagen de E y cuando no lo es.

No puede ser que x_0 no sea punto de acumulación, ya que la compacidad de E y la continuidad de f_E aseguran la existencia de $x_1, x_2 \in E$ tales que $x_1 < x_2$,

$$f_E(x_1) = \text{máx}\{f_E(x) : f_E(x) < x_0\} \text{ y}$$

$$f_E(x_2) = \text{mín}\{f_E(x) : f_E(x) > x_0\}.$$

Entonces,

$$|[x_1, x_2] \cap E| = 0,$$

por lo que $f_E(x_1) = f_E(x_2)$, que es una contradicción. Por lo tanto, x_0 tiene que ser punto de acumulación de la imagen de E, entonces podemos encontrar una sucesión en E convergente cuyo límite, por la compacidad, también está en E. Por continuidad tenemos que la imagen de dicho límite es x_0.

Por lo tanto si $|E|$ es un subconjunto cualquiera del intervalo $[0, 1]$, existen $a_0, \ldots, a_k \in f_E(E)$ que satisfacen (1.1), entonces si $b_i \in f_E^{-1}(a_i) \neq \emptyset$, $i = 0, \ldots, k$ tenemos que

$$\prod_{i:i\neq l} |b_i - b_l| \geq (|E|/2e)^k.$$

$\square$

Utilizando estos resultados lograremos estimar la medida de los subconjuntos de nivel con una cota independiente de la función que determina al conjunto.

Teorema 1.0.4. *Sea $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $u^{(k)}(t) \geq 1$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces*

$$|\{t \in \mathbb{R} : |u(t)| \leq \alpha\}| \leq 2e\big((k+1)!\big)^{1/k} \alpha^{1/k}.$$

Demostración: Sea $E = \{t \in \mathbb{R} : |u(t)| \leq \alpha\}$. Supongamos que $|E| > 0$. Por el Lema 1.0.3 existen $a_0, \ldots, a_k \in E$ tales que para cualquier $l \in \{0, 1 \ldots, k\}$

$$\prod_{j:j\neq l} |a_j - a_l|^{-1} \leq |E|^{-k} (2e)^k. \tag{1.5}$$

Por otro lado, el Lema 1.0.2 nos asegura la existencia de $\xi \in cnx\{a_0, \ldots, a_k\}$ tal que

$$u^{(k)}(\xi) = k! \sum_{m=0}^{k} \pm u(a_m) \prod_{l:l\neq m} |a_l - a_m|^{-1}.$$

Usando (1.5) y el hecho de que $a_j \in E$, $0 \leq j \leq k$, tenemos

$$k! \sum_{m=0}^{k} \pm u(a_m) \prod_{l:l\neq m} |a_l - a_m|^{-1} \leq k! \sum_{m=0}^{k} |u(a_m)||E|^{-k}(2e)^k \leq$$

$$\leq k!|E|^{-k}(2e)^k(k+1) \max_{m=0,\ldots,k} |u(a_m)| \leq (k+1)!|E|^{-k}(2e)^k\alpha.$$

Como $u^{(k)}(t) \geq 1$ para toda t, tenemos que $1 \leq (k+1)!|E|^{-k}(2e)^k\alpha$. Es decir,

$$|E| \leq (\alpha(k+1)!)^{1/k}(2e).$$

□

Podemos generalizar este teorema en el sentido de que podemos suponer $|u^{(k)}(t)| \geq \beta$ en lugar de $u^{(k)}(t) \geq 1$ para obtener una cota similar pero que ahora dependerá también de β.

Corolario 1.0.5. *Sea $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $|u^{(k)}(t)| \geq \beta$ con $\beta > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces*

$$|\{t \in \mathbb{R} : |u(t)| \leq \alpha\}| \leq 2e\big((k+1)!\big)^{1/k}(\alpha/|\beta|)^{1/k}.$$

Demostración: Sólo probaremos el caso en que $u^{(k)}(t) \geq \beta > 0$.
Por la proposición anterior,

$$|\{t \in \mathbb{R} : |u(t)| \leq \alpha\}| = \left|\left\{t : |w(t)| \leq \frac{\alpha}{\beta}\right\}\right| \leq 2e\big((k+1)!\big)^{1/k}(\alpha/|\beta|)^{1/k},$$

donde $w(t) = \beta^{-1}u(t)$.

□

El siguiente resultado es un corolario del Teorema 1.0.4 en el que estarán involucradas funciones de varias variables. Será de esta manera como apliquemos la mayoría de las veces dicho Teorema en los Capítulos posteriores.

Corolario 1.0.6. *Sean* $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u \in C^\infty$ *y* $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ *multi-índice con* $\beta_n > 0$ *tales que* $D^\beta u \geq 1$. *Entonces existe* C_k *tal que para todo* $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ *y toda* $\alpha > 0$

$$\left|\left\{ y \in [0,1] : \left| \frac{\partial^{\beta^1 + \ldots + \beta^{n-1}}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_{n-1}^{\beta_{n-1}}} u(x_1, ..., x_{n-1}, y) \right| \leq \alpha \right\}\right| \leq C_{\beta_n} \alpha^{1/\beta_n}.$$

Demostración: Para facilitar la notación escribiremos $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y) = (x', y)$ y $\beta = (\beta', \beta_n)$ donde $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$.

Para x' fijo definimos $\psi_{x'}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\psi_{x'}(y) = \partial^{\beta'} u(x', y)/\partial x'^{\beta'}$. Entonces,

$$\psi_{x'}^{(\beta_n)}(y) = \frac{\partial^{\beta' + \beta_n}}{\partial x'^{\beta'} \partial y^{\beta_n}} u(x', y) = D^\beta u(x', y) \geq 1.$$

El Teorema 1.0.4 nos asegura la existencia de una constante C_{β_n} independiente de $\psi_{x'}$ (y por lo tanto de x') tal que

$$\left|\left\{ y \in [0,1] : \left| \frac{\partial^{\beta^1 + \ldots + \beta^{n-1}}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_{n-1}^{\beta_{n-1}}} u(x_1, ..., x_{n-1}, y) \right| \leq \alpha \right\}\right| \leq C_{\beta_n} \alpha^{1/\beta_n}.$$

□

Continuamos ahora con la prueba del Lema de van der Corput. Demostraremos primero el caso en que $|u'(t)| \geq 1$ (caso $k = 1$) y veremos, con un ejemplo, por qué tenemos que pedir hipótesis extras a la función u para probarlo. Después trataremos con el caso general ($k \geq 2$).

Teorema 1.0.7. *Sean* $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $a < b \in \mathbb{R}$ *tales que* u' *es monótona y* $|u'(t)| \geq 1$ *para toda* $t \in [a, b]$. *Entonces para cualquier* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda u(t)}\, dt \right| \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

Demostración:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda u(t)}\, dt \right| = \frac{1}{|\lambda|} \left| \int_a^b \frac{(e^{i\lambda u(t)})'}{u'(t)}\, dt \right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \left| \frac{e^{i\lambda u(t)}}{u'(t)} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{e^{i\lambda u(t)} \cdot u''(t)}{u'(t)^2}\, dt \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left[\left| \frac{e^{i\lambda u(t)}}{u'(t)} \Big|_a^b \right| + \left| \int_a^b \frac{e^{i\lambda u(t)} \cdot u''(t)}{u'(t)^2}\, dt \right| \right]$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|}\left[\left|\frac{e^{i\lambda u(b)}}{u'(b)} - \frac{e^{i\lambda u(a)}}{u'(a)}\right| + \int_a^b \left|\frac{e^{i\lambda u(t)} \cdot u''(t)}{u'(t)^2}\right| dt\right]$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|}\left[\frac{|e^{i\lambda u(b)}|}{|u'(b)|} + \frac{|e^{i\lambda u(a)}|}{|u'(a)|}\right] + \frac{1}{|\lambda|}\left[\int_a^b \left|\frac{u''(t)}{u'(t)^2}\right| dt\right]$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|}\left[\frac{1}{|u'(b)|} + \frac{1}{|u'(a)|}\right] + \frac{1}{|\lambda|}\left[\int_a^b \frac{|u''(t)|}{u'(t)^2}\, dt\right] \leq \frac{2}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|}\left[\int_a^b \left|\frac{u''(t)}{u'(t)^2}\right| dt\right].$$

La última desigualdad se debe al hecho de $|u'(t)| < 1$ para cualquier t. Por otro lado, como $u'(t)$ es monótona, $u''(t) \leq 0$ ó $u''(t) \geq 0$.

Si $u''(t) \geq 0$ entonces,

$$\int_a^b \left|\frac{u''(t)}{u'(t)^2}\right| dt = \int_a^b \frac{u''(t)}{u'(t)^2}\, dt \geq 0.$$

Si $u''(t) \leq 0$ entonces,

$$\int_a^b \left|\frac{u''(t)}{u'(t)^2}\right| dt = \int_a^b \frac{-u''(t)}{u'(t)^2}\, dt \geq 0.$$

Por lo tanto

$$\int_a^b \left|\frac{u''(t)}{u'(t)^2}\right| dt = \left|\int_a^b \frac{u''(t)}{u'(t)^2}\, dt\right| = \left|\frac{1}{u'(b)} - \frac{1}{u'(a)}\right| \leq 2.$$

Todo lo anterior nos permite concluir que

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)}\, dt\right| \leq \frac{4}{|\lambda|}.$$

□

La siguiente proposición muestra que no es posible eliminar la hipótesis de monotonía de u'. Encontraremos una función cuya derivada es mayor o igual a 1, un intervalo (a, b) y una λ para los que $\int_a^b e^{i\lambda u(t)} dt$ no esté acotada.

Proposición 1.0.8. *El Teorema 1.0.7 no tiene por qué ser válido si no se tiene que u' es monótona.*

Demostración: Sean $\lambda = 1$ y u una función suave en $\mathbb{R}$ tal que $u(t) = 10t$ para $t \in A_k = [2\pi k + \epsilon, \pi(2k+1) - \epsilon]$ y $u(t) = t$, si $t \in B_k = [\pi(2k+1) + \epsilon, 2\pi(k+1) - \epsilon]$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\left| \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{iu(t)} dt \right| \geq \left| \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \operatorname{sen}(u(t)) dt \right|$$

$$= \left| \int_{A_k} \operatorname{sen}(10t) dt + \int_{B_k} \operatorname{sen}(t) dt + \int_{[2\pi k, 2\pi(k+1)] \setminus (A_k \cup B_k)} \operatorname{sen}(u(t)) dt \right|. \tag{1.6}$$

Analicemos por separado las integrales sobre A_k y B_k. Por un lado,

$$\int_{2\pi k+\epsilon}^{2\pi(k+1/2)-\epsilon} \operatorname{sen} 10t \, dt = -1/10 \Big[\cos(20\pi(k+1/2) - 10\epsilon) - \cos(20\pi k + 10\epsilon) \Big]$$

$$= 1/10 \Big[- \cos(20\pi(k+1/2)) \cos(10\epsilon) + \operatorname{sen}(20\pi(k+1/2)) \operatorname{sen}(10\epsilon) \Big) \Big]$$

$$+ 1/10 \Big[\cos(20\pi k) \cos(10\epsilon) - \operatorname{sen}(20\pi k) \operatorname{sen}(10\epsilon) \Big]$$

$$= 1/10 \Big\{ - \big[\cos(20\pi k) \cos 10\pi - \operatorname{sen}(20\pi k) \operatorname{sen}(10\pi) \big] \cos(10\epsilon)$$

$$+ \big[\operatorname{sen}(20\pi k) \cos(10\pi) + \operatorname{sen}(10\pi) \cos(20\pi k) \big] \operatorname{sen}(10\epsilon) + \cos(10\epsilon) \Big\}$$

$$= 1/10[- \cos(10\epsilon) + \cos(10\epsilon)] = 0.$$

Por el otro,

$$\int_{2\pi(k+1/2)+\epsilon}^{2\pi(k+1)-\epsilon} \operatorname{sen} t \, dt = - \cos(2\pi(k+1) - \epsilon) + \cos(2\pi(k+1/2) + \epsilon)$$

$$= - \cos(2\pi(k+1)) \cos\epsilon + \operatorname{sen}(2\pi(k+1)) \operatorname{sen}\epsilon$$

$$+ \cos(2\pi(k+1/2)) \cos\epsilon - \operatorname{sen}(2\pi(k+1/2)) \operatorname{sen}\epsilon$$

$$= - \cos\epsilon - \cos\epsilon = -2\cos\epsilon.$$

En ninguno de los dos casos importó quien fuera k. Entonces, por (1.6) y el análisis anterior,

$$\left| \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{iu(t)} dt \right| \geq \left| \int_{B_k} \operatorname{sen}(t) dt + \int_{[2\pi k, 2\pi(k+1)] \setminus (A_k \cup B_k)} \operatorname{sen}(u(t)) dt \right|$$

$$\geq \left| \int_{B_k} \operatorname{sen}(t) dt \right| - \left| \int_{[2\pi k, 2\pi(k+1)] \setminus (A_k \cup B_k)} \operatorname{sen}(u(t)) dt \right|$$

$$\geq 2\cos\epsilon - \int_{[2\pi k,2\pi(k+1)]\setminus(A_k\cup B_k)} 1dt = 2\cos\epsilon - |[2\pi k, 2\pi(k+1)]\setminus(A_k\cup B_k)|$$
$$= 2\cos\epsilon - 4\epsilon.$$

Por lo tanto, si escogemos ϵ suficientemente pequeño entonces,

$$\left|\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{iu(t)}dt\right| \geq C > 3/2$$

con C independiente de k.

Lo anterior implica que para todo número natural N existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_0^{2\pi(m+1)} e^{iu(t)}dt\right| \geq \left|\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} u(t)dt + \ldots + \int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \operatorname{sen} u(t)dt\right|$$

$$= \left|\int_{A_0} \operatorname{sen} u(t)dt + \int_{B_0} \operatorname{sen} u(t)dt + \int_{[0,2\pi]\setminus(A_0\cup B_0)} \operatorname{sen} u(t)dt + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \int_{A_m} \operatorname{sen} u(t)dt + \int_{B_m} \operatorname{sen} u(t)dt + \int_{[2m\pi,2\pi(m+1)]\setminus(A_m\cup B_m)} \operatorname{sen} u(t)dt\right|$$

$$= \left|-2m\cos\epsilon + \int_{\bigcup_{i=0}^m [2\pi i,2\pi(i+1)]\setminus(A_i\cup B_i)} \operatorname{sen} u(t)dt\right|$$

$$\geq 2m\cos\epsilon - \left|\int_{\bigcup_{i=0}^m [2\pi i,2\pi(i+1)]\setminus(A_i\cup B_i)} \operatorname{sen} u(t)dt\right|$$

$$\geq 2m\cos\epsilon - \sum_{i=0}^{m} \big|[2\pi i, 2\pi(i+1)]\setminus(A_i\cup B_i)\big| = m2\cos\epsilon - m4\epsilon = mC > N,$$

es decir, siempre podemos encontrar un intervalo η tal que

$$\left|\int_\eta e^{iu(t)}dt\right| \geq j,$$

con j cualquier número natural.

□

Continuamos con la demostración del caso $k \geq 2$ del Lema de van der Corput. Necesitaremos el siguiente resultado que nos permitirá utilizar el Teorema 1.0.7 en la prueba.

Lema 1.0.9. *Sea* $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función integrable tal que* $u^{(k)}$ *es siempre positiva o negativa y* $\beta > 0$. *Entonces* $\{x \in [a,b] : |u'(x)| \geq \beta\}$ *es la unión de a lo más* $O(k)$ *intervalos en los que* u' *es monótona.*

Demostración: Se hará por inducción sobre k. Sin pérdida de generalidad, $u^{(k)} \geq 0$, en caso contrario aplicamos la demostración a $-u$.

Comenzamos con el caso $k = 2$. Supongamos que u'' es positiva, entonces, u' y continua y estrictamente creciente. En consecuencia, $u'\colon [a,b] \to [u'(a), u'(b)]$ es un homeomorfismo. Luego,

$$\begin{aligned}\{x \in [a,b] : |u'(x)| \geq \beta\} &= \{x \in [a,b] : u'(x) \geq \beta\} \cup \{x \in [a,b] : u'(x) \leq -\beta\} \\ &= \{x \in [a,b] : x \geq (u')^{-1}(\beta)\} \cup \{x \in [a,b] : x \leq (u')^{-1}(-\beta)\} \\ &= [(u')^{-1}(\beta), b] \cup [a, (u')^{-1}(-\beta)].\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $k = 2$, $\{x \in [a,b] : |u'(x)| \geq \beta\}$ es la unión de a lo más 2 intervalos en los que u' es monótona. Con una demostración muy parecida se lograrán los mismos resultados si u'' es siempre negativa, es decir, si u' es monótona decreciente.

Supongamos válido el resultado para $k-1$ y demostrémoslo para k. Dividamos $[a,b]$ en $\{x \in [a,b] : |u''(x)| \geq \beta\}$ y en $\{x \in [a,b] : |u''(x)| < \beta\}$.

Si hacemos $v = u'$ entonces $v^{(k-1)}$ es positiva y, por la hipótesis de inducción, $\{x \in [a,b] : |v'(x)| \geq \beta\}$ es la unión de a lo más $O(k-1)$ intervalos en los que v' es monótona.

Tenemos por tanto que $\{x \in [a,b] : |u''(x)| \geq \beta\}$ está dividido en a lo más $O(k-1)$ intervalos donde u'' es monótona, y entonces, por la base de inducción, $\{x \in [a,b] : |u'(x)| \geq \beta\} \cap \{x \in [a,b] : |u''(x)| \geq \beta\}$ se descompone en a lo más $2O(k-1) = O(k-1)$ intervalos en los que u' es monótona.

Falta analizar $\{x \in [a,b] : |u'(x)| \geq \beta\} \cap \{x \in [a,b] : |u''(x)| < \beta\}$. Necesitamos saber cuántas veces u'' se anula para determinar en cuántos intervalos u' es monótona. Como supusimos que $u^{(k)}$ es positiva, entonces $u^{(k-1)}$ se anula a lo más una vez, con lo que $u^{(k-2)}$ se hace cero en dos puntos como máximo y, continuando con este análisis, concluimos que u'' se anula en, a lo más, $k-2$ puntos. En consecuencia u' es monótona en, cuando más, $O(k-1)$ intervalos.

Por lo tanto, $\{x \in [a,b] : |u'(x)| \geq \beta\}$ se descompone en, a lo más, $2O(k-1) = O(k)$ intervalos donde u' es monótona.

□

Estamos listos para demostrar lo que resta del Lema de van der Corput.

Teorema 1.0.10. *Sean $k \geq 2 \in N$, $a < b \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función integrable tal que $u^{(k)}(t) \geq 1$ para todo $t \in [a,b]$. Entonces existe C_k positiva independiente de u, λ, a y b tal que*

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda u(t)} dt \right| \leq \frac{Ck}{|\lambda|^{1/k}}.$$

Demostración:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda u(t)} dt \right| \leq \left| \int_A e^{i\lambda u(t)} dt \right| + \left| \int_{A^c} e^{i\lambda u(t)} dt \right| = I + II$$

donde $A = \{t \in [a,b] : |u'(t)| \leq \beta\}$, con β por determinar.

Empezamos estimando I. Sea $v = u'$. Como $v^{(k-1)} \geq 1$ y $k > 1$, del Teorema 1.0.4 tenemos que

$$|\{t \in [a,b] : |v(t)| \leq \beta\}| \leq C(k!)^{1/(k-1)} \beta^{1/(k-1)}.$$

Pero, $k! = 2 \cdot 3 \cdots k \leq k^{k-1}$, ya que en ambos miembros tenemos $k-1$ factores y cada factor del miembro derecho es mayor ó igual que cada uno del izquierdo. Entonces,

$$I \leq \int_A |e^{i\lambda u(t)}| dt \leq \int_A dt = |\{t : |u'(t)| \leq \beta\}| \leq Ck\beta^{1/(k-1)}.$$

Por el Lema 1.0.9, A^c se descompone en a lo más $O(k)$ intervalos en los que u' es monótona. Sea J uno de estos intervalos. Por el Teorema 1.0.7,

$$\left| \int_J e^{i\lambda u(t)} dt \right| \leq C/(|\lambda|\beta).$$

Entonces

$$\left| \int_{A^c} e^{i\lambda u(t)} dt \right| \leq Ck/(|\lambda|\beta).$$

Por lo tanto

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda u(t)} dt \right| \leq Ck(\beta^{1/(k-1)} + 1/|\lambda|\beta).$$

Tomando $\beta = |\lambda|^{-(k-1)/k}$ se obtiene la conclusión deseada.

□

Como con los subconjuntos de nivel aquí también podemos cambiar $u^{(k)} \geq 1$ por $|u^{(k)}| \geq \beta$.

Corolario 1.0.11. *Existe C positiva tal que para cualesquiera $a < b$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \geq 2$ y $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función integrable que satisfaga $u^{(k)}(t) \geq \rho$ ó $u^{(k)}(t) \leq -\rho$,con $\rho > 0$, para todo $t \in [a, b]$*

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda u(t)} dt \right| \leq \frac{Ck}{(\rho|\lambda|)^{1/k}}.$$

Demostración: Por tener demostraciones muy parecidas sólo haremos el caso en que $u^{(k)} \geq \rho$.

Si hacemos $v = u\rho$ el lema anterior asegura que,

$$\left| \int_a^b e^{i\hat{\lambda} v(t)} dt \right| \leq \frac{Ck}{|\hat{\lambda}|^{1/k}}$$

donde $\hat{\lambda} = \rho\lambda$. Por lo tanto

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda u(t)} dt \right| \leq \frac{Ck}{|\lambda\rho|^{1/k}}.$$

□

Usando el resultado anterior es inmediato demostrar la siguiente generalización del Teorema 1.0.10.

Corolario 1.0.12. *Existe C positiva tal que para cualesquiera $a < b$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \geq 2$ y u función real integrable que satisfaga $|u^{(k)}| \geq \rho$ con $\rho > 0$,*

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda u(t)} dt \right| \leq \frac{Ck}{(\rho|\lambda|)^{1/k}}.$$

Veamos ahora que la cota obtenida en el Teorema 1.0.10 es óptima.

Proposición 1.0.13. *La cota obtenida en 1.0.10 es óptima con respecto a los parámetros λ y k.*

Demostración: Sea $u(t) = t^k/k!$. Entonces $u^{(k)}(t) = 1$, por los Teoremas 1.0.10 y 1.0.7, para cualquier intervalo $[a, b]$, tenemos

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)} dt\right| \leq \frac{Ck}{|\lambda|^k}.$$

Consideremos el intervalo $[0, ((\pi k!\lambda^{-1})/4)^{1/k}]$. Entonces, utilizando el hecho de que para toda $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 4(n!)^{1/n}$,

$$\left|\int_0^{((\pi k!\lambda^{-1})/4)^{1/k}} e^{i\lambda(t^k/k!)} dt\right| \geq \left|\int_0^{((\pi k!\lambda^{-1})/4)^{1/k}} \cos\left(\frac{\lambda t^k}{k!}\right) dt\right| \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\lambda^{-1/k}(k!)^{1/k} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}\pi}{32}\lambda^{-1/k}k.$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_0^{((\pi k!\lambda^{-1})/4)^{1/k}} e^{i\lambda(t^k/k!)} dt\right| = O(k\lambda^{-1/k})$$

□

Enunciaremos ahora el Lema de van der Corput de la manera en la que usualmente se le encuentra, es decir, escribiremos lo establecido en los Teoremas 1.0.7 y 1.0.10 en un solo resultado.

Teorema 1.0.14. ***a)****Sean $a < b$, u función real integrable tal que $|u'| \geq 1$, u' monótona y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces existe C tal que*

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)}\, dt\right| \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

b)*Para cualesquiera $a < b$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \geq 2$ y u función real integrable tal que $u^{(k)} \geq 1$, existe C tal que*

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda u(t)} dt\right| \leq \frac{Ck}{|\lambda|^{1/k}}.$$

Concluimos el capítulo con un corolario en el que probaremos una versión del Lema de van der Corput para funciones de varias variables. Nos será útil para justificar varios resultados en los siguientes capítulos.

Corolario 1.0.15. *Sean $u\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$. Si para alguna $i, 1 \leq i \leq n$,*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} u(x_1, \ldots, x_n) \geq 1$$

entonces existe C_k independiente de u tal que para toda $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left| \int_{[0,1]} \cdots \int_{[0,1]} e^{i\lambda u(x_1,\ldots,x_n)} dx_1 \ldots dx_n \right| \leq \frac{C_k}{|\lambda|^{1/k}}.$$

Si $k = 1$ pediremos además que para cada $\widehat{x_i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n)$ fijo, la primera derivada de la función $\psi_{\widehat{x_i}}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\psi_{\widehat{x_i}}(y) = u(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots x_n)$ sea monótona.

Demostración: Por el Teorema de Fubini,

$$\left| \int_{[0,1]} \cdots \int_{[0,1]} e^{i\lambda u(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots x_n)} dx_1 \ldots dy \ldots dx_n \right| = \left| \int_{[0,1]} \cdots \int_{[0,1]} e^{i\lambda \psi_{\widehat{x_i}}(y)} dy d\widehat{x_i} \right|$$

$$\leq \int_{[0,1]} \cdots \left| \int_{[0,1]} e^{i\lambda \psi_{\widehat{x_i}}(y)} dy \right| d\widehat{x_i}.$$

Por el Lema de van der Corput, existe C_k independiente de $\psi_{\widehat{x_i}}$ (y en consecuencia de $\widehat{x_i}$ y de u) tal que

$$\left| \int_{[0,1]} e^{i\lambda \psi_{\widehat{x_i}}(y)} dy \right| \leq \frac{C_k}{|\lambda|^{1/k}}.$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_{[0,1]} \cdots \int_{[0,1]} e^{i\lambda u(x_1,\ldots,x_n)} dx_1 \ldots dx_n \right| \leq \frac{C_k}{|\lambda|^{1/k}}.$$

Capítulo 2

Los subconjuntos de nivel en más de una variable.

En este capítulo trabajaremos para estimar la medida de los subconjuntos de nivel determinados por funciones reales u con dominio en el cubo unitario n-dimensional, continuas, con todas sus derivadas parciales continuas y que satisfagan $D^\beta u \geq 1$ para algún multi-índice β.

Nuestro objetivo será encontrar una constante positiva C y un exponente ϵ independientes de u tales que,

$$|\{x : |u(x)| \leq \alpha\}| \leq C\alpha^\beta.$$

Para facilitar la notación, definimos $Q^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$ y denotaremos con $U_\beta(Q^n) = U_\beta$ al conjunto de funciones que tengan las características descritas anteriormente.

El análisis se hará a través del siguiente operador integral: Sea $E_\alpha = \{x \in Q^n : |u(x)| \leq \alpha\}$, con $0 < \alpha < 1$. Entonces para $n = n' + n''(1 \leq n' \leq n - 1)$ se define el operador que transforma funciones de $L^p_{Q^{n''}}$ en funciones en $L^q_{Q^{n'}}$ de la siguiente manera:

$$S_\alpha f(x') = \int_{Q^{n''}} \chi_{E_\alpha}(x', x'') f(x'') dx''$$

con $x \in Q^n$ y $x = (x', x'')$.

2.1. El caso bidimensional

Comencemos con el caso de dos variables. Durante toda esta sección, $E_\alpha = \{(x,y) \in Q^2 : |u(x,y)| < \alpha\}$, $S_\alpha \colon L^p([0,1]) \to L^q([0,1])$ y $S_\alpha f(x) = \int_{[0,1]} \chi_{E_\alpha}(x,y) f(y) dy$. Supondremos $u \in U_{(j,k)}$, es decir, para todo $(x,y) \in Q^2$

$$\frac{\partial^{j+k} u(x,y)}{\partial x^j \partial y^k} \geq 1.$$

Obtendremos cotas superiores e inferiores de $\|S_a\|_{L^p \to L^q}$ para estimar los subconjuntos de nivel y para saber qué tan buenas son tales estimaciones. Comenzamos acotando inferiormente al operador S_α.

Proposición 2.1.1. *Sean $p > 1$ y $1 < q < \infty$. Para cada j,k existe $C < \infty$ tal que los siguientes enunciados son válidos.*
a) *Si $u(x,y) = -(x-y)^d, j+k = d \geq 2$, entonces $\|S_\alpha\|_{L^p \to L^q} \geq C\alpha^{1/d}$.*
b) *Si $u(x,y) = x^j y^k$, entonces $\|S_\alpha\|_{L^p \to L^q} \geq C\alpha^{1/jq}$.*
c) *Si $u(x,y) = x^j y^k$, entonces $\|S_\alpha\|_{L^p \to L^q} \geq C\alpha^{1/kp'}$, donde p' es el exponente conjugado de p.*

Demostración:

a) Si $f \equiv 1$,

$$S_\alpha f(x) = \int_{[0,1]} \chi_{E_\alpha}(x,y) dy = \int_{\{y \in [0,1] : |x-y| < \alpha^{1/d}\}} dy = |\{y \in [0,1] : |x-y| < \alpha^{1/d}\}|.$$

Entonces, para $x \in [0, \alpha^{1/d}]$,

$$S_\alpha f(x) = |\{y \in [0,1] : 0 < y < x + \alpha^{1/d}\}| \geq \alpha^{1/d}.$$

Mientras que para $x \in [\alpha^{1/d}, 1 - \alpha^{1/d}]$,

$$S_\alpha f(x) = |\{y \in [0,1] : x - \alpha^{1/d} < y < x + \alpha^{1/d}\}| = 2\alpha^{1/d}.$$

Por último, para $x \in [1 - \alpha^{1/d}, 1]$

$$S_\alpha f(x) = |\{y \in [0,1] : x - \alpha^{1/d} < y < 1\}| \geq \alpha^{1/d}.$$

Como $\|S_\alpha\|_{L^p \to L^q} = \sup_{\|f\|_p = 1} \|S_\alpha f\|_q$, entonces, $\|S_\alpha\|_{L^p \to L^q} \geq C\alpha^{1/d}$.

b) Si $x^j < \alpha$ entonces para toda $y \in [0,1], x^j y^k < \alpha$, es decir, $\{y : x^j y^k < \alpha\} = [0,1]$. Por lo tanto, $S_\alpha f(x) = \int_0^1 f(y)dy$.

Entonces, si $f \equiv 1$

$$\|S_\alpha f\|_q^q \geq \int_0^{\alpha^{1/j}} \left| \int_0^1 f(y)dy \right|^q dx = \int_0^{\alpha^{1/j}} \left| \int_0^1 dy \right|^q dx = \int_0^{\alpha^{1/j}} dx = \alpha^{1/j}.$$

Por lo tanto $\|S_\alpha\|_{L_p \to L_q} \geq \alpha^{1/jq}$.

c) Si $y^k < \alpha$ entonces para toda $x \in [0,1]$, $x^j y^k < \alpha$, es decir, $\{x \in [0,1] : x^j y^k < \alpha\} = [0,1]$. Por lo tanto, $S_\alpha^* g(y) = \int_0^1 g(x)dx$

Entonces, si $g \equiv 1$

$$\|S_\alpha^* g\|_{p'}^{p'} \geq \int_0^{\alpha^{1/k}} \left| \int_0^1 g(x)dx \right|^{p'} dx = \int_0^{\alpha^{1/k}} \left| \int_0^1 dx \right|^{p'} dx = \int_0^{\alpha^{1/k}} dx = \alpha^{1/k}.$$

Por lo tanto, si denotamos con q' al exponente conjugado de q, $\|S_\alpha\|_{L_p \to L_q} = \|S_\alpha^*\|_{L_{q'} \to L_{p'}} \geq \alpha^{1/kp'}$.

□

Juntando los tres casos de la proposición anterior podemos demostrar, de manera inmediata, el siguiente resultado que involucra a cualquier $u \in U_{(j,k)}$, es decir, probaremos un resultado para S_α en general.

Corolario 2.1.2. *Con las hipótesis de la proposición anterior,*

$$\sup_{u \in U_{j,k}} \|S_\alpha\|_{L_p \to L_q} \geq C\alpha^{\frac{1}{d} \wedge \frac{1}{jq} \wedge \frac{1}{kp'}}.$$

Observemos que cuando $p = q = d/j$, $1/(jq) = 1/(kp') = 1/d$. Utilizaremos este hecho más adelante.

A continuación analizaremos para qué índices p, q, j y k la norma del operador $S_\alpha \colon L^p \to L^q$ determinado por funciones $u \in U_{j,k}$ está acotada superiormente por constantes que sólo dependan de α y alguno de lo índices arriba mencionados.

Proposición 2.1.3. *Si $j=0$, $k=d$ y $u\in U_{(0,k)}$, entonces $\|S_\alpha\|_{L^p\to L^q}\leq C\alpha^{1/dp'}$, donde $1/p+1/p'=1$ con $p>1$. Si $j=d$, $k=0$ y $u\in U_{(j,0)}$ entonces $\|S_\alpha\|_{L^p\to L^q}\leq C\alpha^{1/dq}$.*

Demostración: Por la desigualdad de Hölder,

$$|S_\alpha f(x)|\leq\int_{[0,1]}|\chi_{E_\alpha}(x,y)f(y)|dy\leq\left(\int_{[0,1]}|\chi_{E_\alpha}(x,y)|^{p'}dy\right)^{1/p'}\|f\|_p=$$

$$=|\{y\in[0,1]:|u(x,y)|<\alpha\}|^{1/p'}\|f\|_p.$$

El Corolario 1.0.6 nos asegura la existencia de una C_k independiente de la variable x. Por lo tanto,

$$\left(\int_{[0,1]}|S_\alpha f(x)|^q dx\right)^{1/q}\leq(C\alpha^{1/k})^{1/p'}\|f\|_p=C\alpha^{1/kp'}\|f\|_p.$$

Un procedimiento análogo con S^*_α en lugar de S_α nos conducirá a la conclusión de la segunda afirmación.

□

Trabajaremos ahora con funciones $u\in U_{(1,1)}$. Necesitaremos el siguiente lema para acotar superiormente la norma del operador $S_\alpha\colon L^2\to L^2$.

Lema 2.1.4. *Sea $u\in U_{(1,1)}$. Si $E=\{(x,y)\in Q^2:|u(x,y)|\leq\alpha\}$ y $E(y)=\{x\in[0,1]:(x,y)\in E\}$, entonces existe C independiente de u tal que*

$$|E(y_1)\cap E(y_2)|\leq\frac{C4\alpha}{|y_1-y_2|}.$$

Demostración: Sean $y_1,y_2\in[0,1]$. Sea $\psi\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $\psi(x)=u(x,y_1)-u(x,y_2)$. Observamos que $\psi(x)=\int_{y_2}^{y_1}\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)ds$ y que

$$\psi'(x)=\frac{\partial u(x,y_1)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,y_2)}{\partial x}=\int_{y_2}^{y_1}\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial x}(x,s)ds=\int_{y_2}^{y_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial s}(x,s)ds.$$

Ahora, por hipótesis, $\partial^2 u/\partial x\partial y\geq 1$, entonces para toda $x\in[0,1]$

$$|y_1-y_2|=\int_{y_2}^{y_1}ds\leq\int_{y_2}^{y_1}\frac{\partial^2 u(x,s)}{\partial x\partial s}ds=\left|\int_{y_2}^{y_1}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial s}ds\right|=|\psi'(x)|.$$

Tenemos por tanto que $|\psi'(x)| \geq |y_1 - y_2|$, y por el Corolario 1.0.6 existe C independiente de ψ tal que

$$|\{x \in [0,1] : |\psi(x)| \leq 2\alpha\}| \leq C4\alpha/|y_1 - y_2|.$$

Pero $E(y_1) \cap E(y_2) \subseteq \{x \in [0,1] : |\psi(x)| \leq 2\alpha\}$ pues si $x \in E(y_1) \cap E(y_2)$ entonces $|u(x, y_i)| \leq \alpha,\ i = 1, 2$, y por lo tanto,

$$|\psi(x)| = |u(x, y_1) - u(x, y_2)| \leq |u(x, y_1)| + |u(x, y_2)| \leq 2\alpha.$$

Concluimos entonces que

$$|E(y_1) \cap E(y_2)| \leq \frac{C4\alpha}{|y_1 - y_2|}.$$

□

Teorema 2.1.5. *Sea $u \in U_{(1,1)}$. Entonces existe una constante C tal que*

$$\|S_\alpha\|_{L^2 \to L^2} \leq C\alpha^{1/2} \log^{1/2}(1/\alpha).$$

Demostración:

$$\|S_\alpha f\|_2^2 = \int |S_\alpha f(x)|^2 dx = \int \left(\int \chi_{E_\alpha}(x, y_1) f(y_1) dy_1 \right) \left(\overline{\int \chi_{E_\alpha}(x, y_2) f(y_2) dy_2} \right) dx$$

$$\leq \int \int \int \chi_{E_\alpha}(x, y_1) \chi_{E_\alpha}(x, y_2) |f(y_1)||f(y_2)| dy_1 dy_2 dx.$$

Por el teorema de Tonelli, esto último es igual a

$$\int \int \int \chi_{E_\alpha}(x, y_1) \chi_{E_\alpha}(x, y_2) |f(y_1)||f(y_2)| dx dy_1 dy_2$$

$$= \iint |E(y_1) \cap E(y_2)||f(y_1)||f(y_2)| dy_1 dy_2$$

$$\iint_{|y_1 - y_2| \leq 4\alpha} |E(y_1) \cap E(y_2)||f(y_1)||f(y_2)| dy_1 dy_2$$

$$+ \iint_{|y_1 - y_2| \geq 4\alpha} |E(y_1) \cap E(y_2)||f(y_1)||f(y_2)| dy_1 dy_2.$$

En el primer sumando podemos utilizar el hecho de que $E(y_1) \cap E(y_2) \subseteq [0, 1]$ para hacer $|E(y_1) \cap E(y_2)| \leq 1$. Mientras que para el segundo usamos el Lema 2.1.4 para acotar $|E(y_1) \cap E(y_2)|$. Obtenemos entonces que $\|S_\alpha f\|_2^2$ es menor o igual a

$$\iint_{|y_1 - y_2| \leq 4\alpha} |f(y_1)||f(y_2)| dy_1 dy_2 + \iint_{|y_1 - y_2| \geq 4\alpha} \frac{4\alpha}{|y_1 - y_2|} |f(y_1)||f(y_2)| dy_1 dy_2. \quad (2.1)$$

Usando la desigualdad de Hölder, el teorema de Tonelli y simetría acotamos el primer sumando en (2.1),

$$\iint_{|y_1-y_2|\leq 4\alpha} |f(y_1)||f(y_2)|dy_1dy_2 \leq \left(\iint |f(y_1)|^2\chi_{\{(y_1,y_2):|y_1-y_2|\leq 4\alpha\}}(y_1,y_2)dy_2dy_1\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\iint |f(y_2)|^2\chi_{\{(y_1,y_2):|y_1-y_2|\leq 4\alpha\}}(y_1,y_2)dy_2dy_1\right)^{1/2} =$$

$$= \iint |f(y_1)|^2\chi_{\{(y_1,y_2):|y_1-y_2|\leq 4\alpha\}}(y_1,y_2)dy_2dy_1 \leq \int |f(y_1)|^2\left(\int_{\{y_2:|y_1-y_2|\leq 4\alpha\}} dy_2\right)dy_1$$

$$= \int |f(y_1)|^2|\{y_2 : |y_1-y_2|\leq 4\alpha\}|dy_1 \leq \|f\|_2^2 8\alpha.$$

Para el segundo, usamos Hölder nuevamente y un simple cambio de variable,

$$4\alpha\iint_{1\geq|y_1-y_2|\geq 4\alpha} \frac{|f(y_1)f(y_2)|}{|y_1-y_2|}dy_1dy_2 = 4\alpha\iint_{1\geq|y_1-y_2|\geq 4\alpha} \frac{|f(y_1)f(y_2)|}{\sqrt{|y_1-y_2|}\sqrt{|y_1-y_2|}}dy_1dy_2$$

$$\leq 4\alpha\left(\iint_{1\geq|y_1-y_2|\geq 4\alpha} \frac{|f(y_1)|^2}{|y_1-y_2|}dy_1dy_2\right)^{1/2}\left(\iint_{1\geq|y_1-y_2|\geq 4\alpha} \frac{|f(y_2)|^2}{|y_1-y_2|}dy_1dy_2\right)^{1/2}$$

$$= 4\alpha\iint_{1\geq|y_1-y_2|\geq 4\alpha} \frac{|f(y_1)|^2}{|y_1-y_2|}dy_1dy_2 = 4\alpha\int |f(y_1)|^2\int_{\{y_2:1\geq|y_1-y_2|\geq 4\alpha\}} |y_1-y_2|^{-1}dy_2dy_1$$

$$= 4\alpha\int |f(y_1)|^2\int_{4\alpha}^{1} x^{-1}dxdy_1 = 4\alpha\big(\log(1)-\log(4\alpha)\big)\|f\|_2^2 = 4\alpha\|f\|_2^2\log(1/4\alpha).$$

Por lo tanto

$$\|S_\alpha f\|_2^2 \leq 8\alpha\|f\|_2^2 + 4\alpha\|f\|_2^2\log(1/4\alpha) \leq C\alpha\log(1/\alpha)\|f\|_2^2.$$

□

Con este teorema podemos estimar los subconjuntos de nivel determinados por funciones $u \in U_{(1,1)}$

Corolario 2.1.6. *Existe una constante C tal que para toda $u \in U_{(1,1)}$*

$$|\{(x,y)\in Q^2 : |u(x,y)|\leq\alpha\}| \leq C\alpha^{1/2}\log^{1/2}(1/\alpha).$$

Demostración: En el teorema anterior se demostró que para toda $f \in L^2_{[0,1]}$,

$$\|S_\alpha f\|_2 \leq C\alpha^{1/2}\log^{1/2}(1/\alpha)\|f\|_2.$$

Si tomamos $f \equiv 1$:

$$\|S_\alpha 1\|_2 \leq C\alpha^{1/2}\log^{1/2}(1/\alpha).$$

Pero $|\{(x,y) \in Q^2 : |u(x,y)| \leq \alpha\}| = \|S_\alpha 1\|_1 \leq \|S_\alpha 1\|_2$, ya que estamos trabajando en espacios de medida finita.

□

Observemos que para calcular la medida de $E = \{(x,y) \in Q^2 : |u(x,y)| \leq \alpha\}$ solamente utilizamos estimaciones sobre las secciones $E(y) = \{x \in [0,1] : (x,y) \in E\}$. En la siguiente proposición veremos que no es posible obtener una estimación para $|E|$ del tipo $C\alpha^{1/2}$ si sólo utilizamos las estimaciones de los conjuntos $E(y)$.

Proposición 2.1.7. *Para cualquier $A < \infty$ existe un parámetro α y un conjunto $E \subseteq [0,1]$ tal que para todo $x \neq x' \in [0,1]$,*

$$|E(x) \cap E(x')| \leq \frac{\alpha}{|x - x'|}$$

pero $|E| > A\alpha^{1/2}$.

Demostración: Sea $0 < \delta \leq 1/2$ y $K \subset \mathbb{R}^2$ un δ-conjunto de Kakeya-Besicovitch construido como en [3] . Entonces, $|K| = O(\log\big(\log(\delta^{-1})\big)/\log(\delta^{-1})$ tiende a cero cuando $\delta \to 0$ y a cada $x \in [0,1]$ le podemos asociar un subconjunto $T_x \subseteq K$ tal que $|T_x| \sim \delta$ y para cualquiera $x' \in [0,1]$,

$$|T_x \cap T_{x'}| \leq \frac{B\delta^2}{|x - x'|}$$

para alguna constante B.

Ahora, sea $\varphi\colon [0,1] \to K$ una función medible, suprayectiva y tal que para cada $S \subset [0,1]$, $|\varphi(S)| = |K||S|$. Definimos

$$E = \{(x,y) \in Q : \varphi(y) \in T_x\}$$

y $\alpha = B\delta^2/|K|$.

Veamos ahora que para cada $x_0 \in [0,1]$, $\varphi(E_{x_0}) = T_{x_0}$. Si $y \in E_{x_0}$, entonces $(x_0, y) \in E$, es decir, $\varphi(y) \in T_{x_0}$. Por otro lado, si $(a,b) \in T_{x_0}$ la suprayectividad de φ

nos asegura la existencia de $y_0 \in [0,1]$ tal que $\varphi(y_0) = (a,b)$. Por lo que, $(x_0, y_0) \in E$, y así, $y_0 \in E_{x_0}$. Por lo tanto, $\varphi(E_{x_0}) = T_{x_0}$. En consecuencia,

$$|E_x| = |K|^{-1}|T_x| = |K|^{-1}\delta$$

entonces,

$$|E| = \int_{[0,1]} |E_x|dx \sim |K|^{-1}\delta \sim |K|^{-1/2}\alpha^{1/2} \geq \alpha^{1/2}.$$

Además,

$$|E_x \cap E_{x'}| = |K|^{-1}|T_x \cap T_{x'}| \leq \frac{B\delta^2|K|^{-1}}{|x-x'|} = \frac{\alpha}{|x-x|}.$$

Por lo tanto, para toda $x, x' \in [0,1]$,

$$|E(x) \cap E(x')| \leq \frac{\alpha}{|x-x'|}$$

y $\alpha^{-1/2}|E| \sim |K|^{-1/2}$ tiende a infinito cuando $\delta \to 0$.

□

El siguiente resultado es el caso general del Teorema 2.1.5, es decir, trabajaremos para acotar el operador S_α determinado por funciones $u \in U_{(j,k)}$ con $j,k \geq 1$. Lograremos como corolario estimaciones para la medida de los subconjuntos de nivel para una clase más extensa de funciones u. Procederemos como en la prueba del Teorema 2.1.5. Necesitamos primero una generalización del Lema 2.1.4.

Lema 2.1.8. *Para cada $j,k \geq 1$ existe una constante $C_{j,k}$ tal que para toda $u \in U_{(j,k)}$ y $y_0, \ldots, y_k \in [0,1]$*

$$|E(y_0) \cap \cdots \cap E(y_k)| \leq C_{j,k}\alpha^{1/j} \sum_{m=0}^{k} \prod_{l:l\neq m} |y_l - y_m|^{-1/j}.$$

Demostración: Procederemos como en la prueba del Lema 2.1.4. Sean $y_0, \ldots, y_k \in [0,1]$. Sea $\psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi(x) = k! \sum_{m=0}^{k} \prod_{l:l\neq m} |y_l - y_m|^{-1} u(x, y_m).$$

Luego,

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\psi(x) = k! \sum_{m=0}^{k} \prod_{l:l\neq m} |y_l - y_m|^{-1} \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(x, y_m).$$

Por el Lema 1.0.2,

$$k! \sum_{m=0}^{k} \prod_{l:l\neq m} |y_l - y_m|^{-1} \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(x, y_m) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}\left(\frac{\partial^j}{\partial x^j} u(x,\xi)\right),$$

para algún $\xi \in cnx\{y_0, \dots, y_k\}$. Ahora, la hipótesis $\frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k} u \geq 1$, implica que $\frac{\partial^j}{\partial x^j}\psi \geq 1$. Por lo tanto ψ cumple con las condiciones del Teorema 1.0.4, y así,

$$\left|\left\{x \in [0,1] : |\psi(x)| \leq \alpha k! \sum_{m=0}^{k} \prod_{l:l\neq m} |y_l - y_m|^{-1}\right\}\right| \leq C_j \left(\alpha k! \sum_{m=0}^{k} \prod_{l:l\neq m} |y_l - y_m|^{-1}\right)^{1/j}$$

$$\leq C_{j,k}\alpha^{1/j} \sum_{m=0}^{k} \prod_{l:l\neq m} |y_l - y_m|^{-1/j}.$$

Por otro lado, si $x \in E(y_0) \cap \cdots \cap E(y_k)$ entonces $|u(x, y_m)| < \alpha$ para $0 \leq m \leq k$. Es decir, $x \in \{z \in [0,1] : |\psi(z)| \leq \alpha k! \sum_{m=0}^{k} \prod_{l:l\neq m} |y_l - y_m|^{-1}\}$.

Por lo tanto,

$$|E(y_0) \cap \cdots \cap E(y_k)| \leq C_{j,k}\alpha^{1/j} \sum_{m=0}^{k} \prod_{l:l\neq m} |y_l - y_m|^{-1/j}.$$

□

Estamos listos para demostrar la generalización del Teorema 2.1.5.

Teorema 2.1.9. *Sean* $1 \leq j \leq k$, $p = \frac{j(k+1)}{j(k+1)-k}$, $q = k+1$ *y* $0 < \alpha < 1$. *Entonces existe* $C_{j,k}$ *tal que para toda* $u \in U_{(j,k)}$,

$$\|S_\alpha\|_{L^p \to L^q} \leq C_{j,k} \begin{cases} \alpha^{1/j(k+1)} & si\ j > 1 \\ \alpha^{1/(k+1)}\big(\log(1/\alpha)\big)^{\frac{k}{k+1}} & si\ j = 1 \end{cases}$$

Demostración:

$$\int |S_\alpha f(x)|^{k+1}dx = \int \left| \int \chi_{E_\alpha}(x,y)f(y)dy \right|^{k+1} dx$$

$$\leq \int \int \chi_{E_\alpha}(x,y_1)|f(y_1)|dy_1 \cdots \int \chi_{E_\alpha}(x,y_{k+1})|f(y_{k+1})|dy_{k+1}dx$$

$$= \int \cdots \int \prod_{m=1}^{k+1} \chi_{E_\alpha}(x,y_m)|f(y_1)| \cdots |f(y_{k+1})|dy_1 \cdots dy_{k+1}dx.$$

Por el Teorema de Tonelli podemos integrar primero con respecto a x, y obtener que,

$$\int |S_\alpha f(x)|^{k+1}dx$$

$$\leq \int \cdots \int |E(y_1) \cap \cdots \cap E(y_{k+1})||f(y_1)| \cdots |f(y_{k+1})|dy_1 \cdots dy_{k+1}. \tag{2.2}$$

Supongamos que $j > 1$. Con el Lema 2.1.8 acotamos $|E(y_1) \cap \cdots \cap E(y_{k+1})|$ y entonces, (2.2) está dominado por

$$C_{j,k}\alpha^{1/j} \int \cdots \int \sum_{m=1}^{k+1} \prod_{\ell:\ell \neq m} |y_\ell - y_m|^{-1/j}|f(y_1)| \cdots |f(y_{k+1})|dy_1 \cdots dy_{k+1} \tag{2.3}$$

$$= C_{j,k}\alpha^{1/j} \left(\int |y_1 - y_2|^{-1/j} \cdots |y_1 - y_{k+1}|^{-1/j}|f(y_1)| \cdots |f(y_{k+1})|dy_1 \cdots dy_{k+1} \right.$$

$$+ \int |y_2 - y_1|^{-1/j}|y_2 - y_3|^{-1/j} \cdots |y_2 - y_{k+1}|^{-1/j}|f(y_1)| \cdots |f(y_{k+1})|dy_1 \cdots dy_{k+1} +$$

$$\vdots$$

$$\left. + \int |y_{k+1} - y_1|^{-1/j} \cdots |y_{k+1} - y_k|^{-1/j}|f(y_1)| \cdots |f(y_{k+1})|dy_1 \cdots dy_{k+1} \right).$$

Por simetría, para toda $m \neq 1$,

$$\int |y_m - y_1|^{-1/j}|y_m - y_2|^{-1/j} \cdots |y_m - y_{k+1}|^{-1/j}|f(y_1)| \cdots |f(y_{k+1})|dy_1 \cdots dy_{k+1}$$

$$= \int |y_1 - y_2|^{-1/j}|y_1 - y_3|^{-1/j} \cdots |y_1 - y_{k+1}|^{-1/j}|f(y_1)| \cdots |f(y_{k+1})|dy_1 \cdots dy_{k+1}.$$

Entonces, podemos escribir (2.3) como

$$(k+1)C_{j,k}\alpha^{1/j}\int |y_1-y_2|^{-1/j}|y_1-y_3|^{-1/j}\cdots|y_1-y_{k+1}|^{-1/j}|f(y_1)|\cdots|f(y_{k+1})|dy_1\cdots dy_{k+1}$$

$$= C_{j,k}\alpha^{1/j}\int\int\frac{|f(y_2)|}{|y_1-y_2|^{1/j}}dy_2\int\frac{|f(y_3)|}{|y_1-y_3|^{1/j}}dy_3\cdots\int\frac{|f(y_{k+1})|}{|y_1-y_{k+1}|^{1/j}}dy_{k+1}|f(y_1)|dy_1$$

$$= C_{j,k}\alpha^{1/j}\int[I_\beta f(y_1)]^k f(y_1)dy_1,$$

donde I_β representa integración fraccionaria[1] con $\beta = 1-1/j < 1$. Pero si p' es el exponente conjugado de p tenemos que

$$C_{j,k}\alpha^{1/j}\int[I_\beta f(y_1)]^k f(y_1)dy_1 \le C_{j,k}\alpha^{1/j}\left(\int[I_\beta f(y_1)]^{kp'}dy_1\right)^{1/p'}\|f\|_p$$

$$= C_{j,k}\alpha^{1/j}\|I_\beta f\|_{kp'}^{p'}\|f\|_p.$$

Como $p = \frac{j(k+1)}{j(k+1)-k} > 1$ entonces el operador $I_\beta\colon p \to kp'$ es continuo, por lo tanto,

$$C_{j,k}\alpha^{1/j}\|I_\beta f\|_{kp'}^k\|f\|_p \le C_{j,k}\alpha^{1/j}\|f\|_p^k\|f\|_p = C_{j,k}\alpha^{1/j}\|f\|_p^{k+1}.$$

Revisemos ahora el caso $j=1$. Sea $T\colon L_{p_1}\times\cdots\times L_{p_{k+1}} \to L_1$ tal que

$$T(f_1,\ldots,f_{k+1})(x) = \int\cdots\int\prod_{m=1}^{k+1}\chi_{E_\alpha}(x,y_m)|f_1(y_1)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})|dy_1\cdots dy_{k+1}.$$

Veremos primero que $\|T(f_1,\ldots,f_{k+1})\|_1 \le C\alpha\log^k(\alpha^{-1})\|f_1\|_1\|f_2\|_\infty\cdots\|f_{k+1}\|_\infty$

Por el Teorema de Tonelli y el Lema 2.1.8,

$$\|T(f_1,\ldots,f_{k+1})\|_1$$

$$\le \int\cdots\int|E(y_1)\cap\cdots\cap E(y_{k+1})||f_1(y_1)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})|dy_2\cdots dy_{k+1}dy_1$$

$$\le \int\cdots\int C\min\left\{1,\alpha\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{\ell:\ell\neq m}|y_\ell-y_m|^{-1}\right\}|f_1(y_1)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})|dy_2\cdots dy_{k+1}dy_1$$

$$= \int\cdots\int_{\{y_2\in[0,1]:\alpha\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{\ell:\ell\neq m}|y_\ell-y_m|^{-1}<1\}} C\alpha\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{\ell:\ell\neq m}|y_\ell-y_m|^{-1}$$

[1] ver Apéndice A.

$$\times|f_1(y_1)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})|dy_2\cdots dy_{k+1}dy_1$$

$$+\int\cdots\int_{\{y_2\in[0,1]:\alpha\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{\ell:\ell\neq m}|y_\ell-y_m|^{-1}\geq 1\}}C|f_1(y_1)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})|dy_2\cdots dy_{k+1}dy_1.$$

Al segundo sumando lo estimamos rápidamente de la siguiente manera,

$$\int\cdots\int_{\{y_2\in[0,1]:\alpha\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{\ell:\ell\neq m}|y_\ell-y_m|^{-1}\geq 1\}}C|f_1(y_1)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})|dy_2\cdots dy_{k+1}dy_1\leq$$

$$C\|f_1\|_1\|f_2\|_\infty\cdots\|f_{k+1}\|_\infty.$$

Analicemos ahora el primer sumando.

$$\int\cdots\int_{\{y_2\in[0,1]:\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{\ell:\ell\neq m}|y_\ell-y_m|^{-1}<\alpha^{-1}\}}C\alpha\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{\ell:\ell\neq m}|y_\ell-y_m|^{-1}$$

$$\times|f_1(y_1)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})|dy_2\cdots dy_{k+1}dy_1$$

$$\leq\int\cdots\int_{\left\{y_2\in[0,1]:\prod_{\ell=2}^{k+1}|y_\ell-y_1|^{-1}<\alpha^{-1}\right\}}C\alpha\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{\ell:\ell\neq m}|y_\ell-y_m|^{-1}$$

$$\times|f_1(y_1)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})|dy_2\cdots dy_{k+1}dy_1.$$

Por simetría, como en el caso $j>1$, y por el Teorema de Tonelli tenemos que la última integral es igual a

$$C\alpha(k+1)\int\cdots\int_{\left\{y_2\in[0,1]:\prod_{\ell=2}^{k+1}|y_\ell-y_1|^{-1}<\alpha^{-1}\right\}}\prod_{\ell=2}^{k+1}|y_\ell-y_1|^{-1}$$

$$\times|f_1(y_1)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})|dy_2\cdots dy_{k+1}dy_1$$

$$=C\alpha\int\cdots\int\prod_{\ell=3}^{k+1}|y_\ell-y_1|^{-1}|f_3(y_3)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})||f_1(y_1)|$$

$$\times\left(\int_{\left\{y_2\in[0,1]:\alpha\prod_{\ell=3}^{k+1}|y_\ell-y_1|^{-1}<|y_2-y_1|\leq 1\right\}}\frac{|f_2(y_2)|}{|y_2-y_1|}dy_2\right)dy_3\cdots dy_{k+1}dy_1$$

$$\leq C\alpha\|f_2\|_\infty\int\cdots\int\prod_{\ell=3}^{k+1}|y_\ell-y_1|^{-1}|f_3(y_3)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})||f_1(y_1)|$$

$$\times\left(\int_{\alpha\prod_{\ell=3}^{k+1}|y_\ell-y_1|^{-1}}^{1}\frac{dt}{t}\right)dy_3\cdots dy_{k+1}dy_1$$

$$=C\alpha\|f_2\|_\infty\int\cdots\int\prod_{\ell=4}^{k+1}|y_\ell-y_1|^{-1}|f_4(y_4)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})||f_1(y_1)|$$

$$\times\int\log\left(|y_1-y_3|\left(\frac{\alpha}{\prod_{\ell=4}^{k+1}|y_\ell-y_1|}\right)^{-1}\right)|y_1-y_3|^{-1}|f_3(y_3)|dy_3dy_4\cdots dy_{k+1}dy_1.$$

Si utilizamos el hecho de que para cada $s\geq 1$, $\int_{[0,1]}\text{mín}\{1,(\mu/t)|log^s(t/\mu)|\}dt\leq C\mu\log^{s+1}(\mu^{-1})$, tenemos que lo anterior está dominado por

$$C\alpha\|f_2\|_\infty\|f_3\|_\infty\int\cdots\int\prod_{\ell=5}^{k+1}|y_\ell-y_1|^{-1}|f_5(y_5)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})||f_1(y_1)|\cdot$$

$$\times\int\log^2\left(|y_1-y_4|\left(\frac{\alpha}{\prod_{\ell=5}^{k+1}|y_\ell-y_1|}\right)^{-1}\right)|y_1-y_4|^{-1}|f_4(y_4)|dy_4dy_5\cdots dy_{k+1}dy_1$$

$$\leq C\alpha\|f_2\|_\infty\|f_3\|_\infty\|f_4\|_\infty\int\cdots\int\prod_{\ell=6}^{k+1}|y_\ell-y_1|^{-1}|f_6(y_6)|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})||f_1(y_1)|\cdot$$

$$\times\int\log^3\left(|y_1-y_5|\left(\frac{\alpha}{\prod_{\ell=6}^{k+1}|y_\ell-y_1|}\right)^{-1}\right)|y_1-y_5|^{-1}|f_5(y_5)|dy_5dy_6\cdots dy_{k+1}dy_1.$$

Si continuamos integrando de esta manera, después de $n<k$ pasos podremos estimar lo anterior por

$$C\alpha\|f_2\|_\infty\cdots\|f_{n+1}\|_\infty\int\cdots\int\prod_{\ell=n+3}^{k+1}|y_\ell-y_1|^{-1}|f_{n+3}(y_{n+2})|\cdots|f_{k+1}(y_{k+1})||f_1(y_1)|$$

$$\times\int\log^n\left(|y_1-y_{n+2}|\left(\frac{\alpha}{\prod_{\ell=n+3}^{k+1}|y_\ell-y_1|}\right)^{-1}\right)$$

$$\times|y_1-y_{n+2}|^{-1}|f_{n+2}(y_{n+2})|dy_{n+2}\cdots dy_{k+1}dy_1.$$

En el paso $k-1$ tendremos que $\|T(f_1,\ldots,f_{k+1})\|_1$ está dominado por,

$$C\alpha\|f_2\|_\infty\cdots\|f_k\|_\infty\int|f_1(y_1)|\cdot$$

$$\times \int \log^{k-1}\left(\frac{|y_1 - y_{k+1}|}{\alpha}\right) |y_1 - y_{k+1}|^{-1} |f_{k+1}(y_{k+1})| dy_{k+1} dy_1$$

$$\leq C\alpha \|f_2\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_\infty \log^k(\alpha^{-1}) \int |f_1(y_1)| dy_1.$$

Por lo tanto,

$$\|T(f_1, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(\alpha^{-1}) \|f_1\|_1 \|f_2\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_\infty. \tag{2.4}$$

Podemos lograr, de manera análoga, las siguientes k desigualdades,

$$\|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha) \|f_1\|_\infty \|f_2\|_1 \|f_3\|_\infty \|f_4\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_\infty \tag{2.5}$$

$$\|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha) \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty \|f_3\|_1 \|f_4\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_\infty \tag{2.6}$$

$$\vdots$$

$$\|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha) \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty \|f_3\|_\infty \|f_4\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_1 \tag{2.7}$$

Si interpolamos multilinealmente[2] (2.4) y (2.5); (2.4) y (2.6);..., (2.4) y (2.7) obtenemos $k + 1 - 1 = k$ desigualdades de la siguiente forma,

$$\|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha) \|f_1\|_{k+1} \|f_2\|_{\frac{k+1}{k}} \|f_3\|_\infty \|f_4\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_\infty. \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 &\leq C\alpha \log^k(1/\alpha) \\ \times \|f_1\|_{k+1} \|f_2\|_\infty \|f_3\|_{\frac{k+1}{k}} &\|f_4\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_\infty. \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 &\leq C\alpha \log^k(1/\alpha) \\ \times \|f_1\|_{k+1} \|f_2\|_\infty \|f_3\|_\infty \|f_4\|_{\frac{k+1}{k}} &\|f_5\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_\infty. \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 &\leq C\alpha \log^k(1/\alpha) \\ \times \|f_1\|_{k+1} \|f_2\|_\infty \|f_3\|_\infty \|f_4\|_\infty &\cdots \|f_{k+1}\|_{\frac{k+1}{k}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Observemos que como las constantes de cada desigualdad son iguales, al momento de interpolar éstas permanecen sin cambio.

Si interpolamos ahora (2.8) y (2.9), (2.8) y (2.10),..., (2.8) y (2.11) obtenemos $k + 1 - 2 = k - 1$ desigualdades,

$$\|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha) \|f_1\|_{k+1} \|f_2\|_{k+1} \|f_3\|_{\frac{k+1}{k-1}} \|f_4\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_\infty$$

[2] Vid. Grafakos, Loukas. Classical & Modern Fourier Analysis. E.U.A., Prentice Hall, 2003

$$\|T(f_1, f_2, \cdots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha)\|f_1\|_{k+1}\|f_2\|_{k+1}\|f_3\|_\infty\|f_4\|_{\frac{k+1}{k-1}}\|f_5\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_\infty$$

$$\vdots$$

$$\|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha)\|f_1\|_{k+1}\|f_2\|_\infty\|f_3\|_\infty\|f_4\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_{\frac{k}{k+1}}.$$

Si continuamos interpolando de la misma manera, después de n pasos tendremos $k+1-n$ desigualdades con la siguiente forma,

$$\|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha)$$
$$\times \|f_1\|_{k+1} \cdots \|f_n\|_{k+1}\|f_{n+1}\|_{\frac{k+1}{k+1-n}}\|f_{n+2}\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_\infty.$$
$$\|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha)$$
$$\times \|f_1\|_{k+1} \cdots \|f_n\|_{k+1}\|f_{n+1}\|_\infty\|f_{n+2}\|_{\frac{k+1}{k+1-n}}\|f_{n+3}\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_\infty.$$

$$\vdots$$

$$\|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha)$$
$$\times \|f_1\|_{k+1} \cdots \|f_n\|_{k+1}\|f_{n+1}\|_\infty \cdots \|f_{k+1}\|_{\frac{k+1}{k+1-n}}.$$

Entonces, en el paso $k-1$ tenemos $k+1-(k-1) = 2$ desigualdades,

$$\|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha)$$
$$\times \|f_1\|_{k+1} \cdots \|f_{k-1}\|_{k+1}\|f_k\|_{\frac{k+1}{k+1-(k-1)}}\|f_{k+1}\|_\infty. \tag{2.12}$$

$$\|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha)$$
$$\times \|f_1\|_{k+1} \cdots \|f_{k-1}\|_{k+1}\|f_k\|_\infty\|f_{k+1}\|_{\frac{k+1}{k+1-(k-1)}}. \tag{2.13}$$

Finalmente, interpolando (2.12) y (2.13), concluimos que

$$\|T(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha)\|f_1\|_{k+1} \cdots \|f_{k+1}\|_{k+1}.$$

Si tomamos $f = f_1 = f_2 = \ldots = f_{k+1} \in L_{k+1}$ tenemos que,

$$\|T(f, f, \ldots, f)\|_1 \leq C\alpha \log^k(1/\alpha)\|f\|_{k+1}^{k+1},$$

es decir,

$$\int |S_\alpha f(x)|^{k+1} dx \leq C\alpha \log^k(1/\alpha)\|f\|_{k+1}^{k+1}.$$

□

Como corolario obtenemos fácilmente estimaciones para la medida de los subconjuntos de nivel determinados por $u \in U_{(j,k)}$, $j, k \geq 1$. Como es de esperarse, logramos el mismo resultado que en el Corolario 2.1.6 para $u \in U_{(1,1)}$.

Corolario 2.1.10. *Sea* $u \in U_{(j,k)}$, $j, k \geq 1$. *Entonces existe* $C < \infty$ *tal que*

$$|\{(x, y) \in Q^2 : |u(x, y)| \leq \alpha\}| \leq C \begin{cases} \alpha^{1/j(k+1)} & si\ j > 1 \\ \alpha^{1/(k+1)}\big(\log(1/\alpha)\big)^{\frac{k}{k+1}} & si\ j = 1 \end{cases}$$

Demostración: En el teorema anterior $q = k + 1 \geq 2$, entonces:

$$|\{(x, y) \in Q^2 : |u(x, y)| \leq \alpha\}| = \|S_\alpha 1\|_1 \leq \|S_\alpha 1\|_q \leq \|S_\alpha\|_{L^p \to L^q}\|1\|_p = \|S_\alpha\|_{L^p \to L^q}\|1\|_p$$

$$\leq C \begin{cases} \alpha^{1/j(k+1)} & \text{si } j > 1 \\ \alpha^{1/(k+1)}\big(\log(1/\alpha)\big)^{\frac{k}{k+1}} & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

□

Si tomamos p y q como en el teorema anterior, entonces $1/(k+1)j = 1/jq = 1/kp'$, y de acuerdo con el Corolario 2.1.2, tenemos que nuestras estimaciones son adecuadas para toda j, k. Sobre el factor $(\log \alpha^{-1})^{k/(k+1)}$ que aparece en el caso $j = 1$ haremos comentarios más adelante.

2.2. El caso de más de dos variables

Trabajamos ahora con funciones $u\colon \mathbb{Q}^n \to \mathbb{R}$ con $n \geq 3$ y veremos qué cotas podemos conseguir para la medida de los subconjuntos de nivel determinadas por tales funciones. A diferencia del caso $n = 2$, atacaremos directamente a los subconjuntos de nivel.

En el primer resultado trabajaremos con funciones u que cumplen solamente con $D^\beta u \geq 1$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ multi-índice, y obtendremos

$$|\{x \in Q^n : |u(x)| \leq \alpha\}| \leq C\alpha^\epsilon$$

con ϵ dependiendo de n y las primeras $n - 1$ entradas de β.

Más adelante, pediremos a u algunas condiciones extras que nos permitirán mejorar la estimación pues ϵ será igual a $1/|\beta|$.

Teorema 2.2.1. *Para cada $n \geq 1$ y cada β multi-índice existe $\epsilon > 0$ y $C < \infty$ tal que para toda función u integrable que satisfaga $D^\beta u \geq 1$ y para cualquier $\alpha > 0$,*

$$|\{x \in Q^n : |u(x)| \leq \alpha\}| \leq C\alpha^\epsilon.$$

Demostración: Procederemos por inducción sobre n. El caso $n = 2$ fue tratado en el Corolario 2.1.10, así que supondremos válido el resultado para $n-1$ y se realizará la prueba para n.

Sean $\beta = (\beta', k)$, con $\beta' \in \mathbb{N}^{n-1}$ y $k \in \mathbb{N}$, $E = \{x \in Q^n : |u(x)| \leq \alpha\}$ y $E(y) = \{x' \in Q^{n-1} : (x', y) \in E\}$. Veremos primero que para cualesquiera $y_1, \ldots, y_{k+1}$ en Q existe $\epsilon > 0$ tal que,

$$|E(y_1) \cap \cdots \cap E(y_{k+1})|_{H_{n-1}} \leq C\alpha^\epsilon \sum_{m=1}^{k+1} \prod_{l \neq m} |y_l - y_m|^{-\epsilon}, \tag{2.14}$$

donde el miembro izquierdo representa la medida de Hausdorff[3] en dimensión $n-1$.

Sea $\psi\colon Q^{n-1} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x') = \left(\sum_{m=1}^{k+1} k! \prod_{l \neq m} |y_l - y_m|^{-1} u(x', y_m)\right).$$

Entonces,

$$D^{\beta'}\psi(x') = \left(\sum_{m=1}^{k+1} k! D^{\beta'} u(x', y_m) \prod_{l \neq m} |y_l - y_m|^{-1}\right). \tag{2.15}$$

Por el Lema 1.0.2, existe $\xi \in cnx\{y_1, \ldots, y_{k+1}\}$ tal que

$$\frac{\partial^k}{\partial \xi^k}\left(D^{\beta'} u(x', \xi)\right) = D^\beta u(x', \xi) \geq 1.$$

Por la hipótesis de inducción

$$|\{x' \in Q^{n-1} : |\psi(x')| \leq \gamma\}|_{H_{n-1}} \leq C\gamma^\epsilon.$$

Si $x' \in E(y_1) \cap \cdots \cap E(y_{k+1})$ entonces,

$$|\psi(x')| = \sum_{m=1}^{k+1} k! \prod_{l: l \neq m} |y_l - y_m|^{-1} |u(x', y_m)| \leq C_k \alpha \sum_{m=1}^{k+1} \prod_{l: l \neq m} |y_l - y_m|^{-1}.$$

[3] ver Apéndice B

En consecuencia,

$$E(y_1)\cap\cdots\cap E(y_{k+1})\subseteq\left\{z'\in Q^{n-1}:|\psi(z')|\le C_k\alpha\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{l:l\neq m}|y_l-y_m|^{-1}\right\}.$$

Pero

$$\left|\left\{z':|\psi(z')|\le C_k\alpha\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{l:l\neq m}|y_l-y_m|^{-1}\right\}\right|_{H_{n-1}}\le C_{k,\epsilon}\alpha^\epsilon\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{l:l\neq m}|y_l-y_m|^{-\epsilon}.$$

Utilizaremos lo anterior para acotar $|E|$.

$$|E|=\int_{Q^{n-1}}\int_{Q^1}\chi_E(x',y)dydx'$$

$$\le\left[\int_{Q^{n-1}}\left(\int_{Q^1}\chi_E(x',y)dy\right)^{k+1}dx'\right]^{1/(k+1)}\left(\int_{Q^{n-1}}1dx'\right)^{(1/(k+1))'}=$$

$$=\left(\int_{Q^{n-1}}\int_{Q^1}\chi_E(x',y_1)dy_1\cdots\int_{Q^1}\chi_E(x',y_{k+1})dy_{k+1}dx'\right)]^{1/(k+1)},$$

donde $1/(k+1)+(1/(k+1))'=1$. Usando el Teorema de Tonelli para cambiar el orden de integración tenemos que la última integral es igual a

$$\left(\int_{Q^1}\cdots\int_{Q^1}\int_{Q^{n-1}}\chi_E(x',y_1)\cdots\chi_E(x',y_{k+1})dx'dy_1\cdots dy_{k+1}\right)^{1/(k+1)}$$

$$=\left(\int_{Q^1}\cdots\int_{Q^1}\int_{Q^{n-1}}\chi_{E(y_1)\cap\cdots\cap E(y_{k+1})}(x')dx'dy_1\cdots dy_{k+1}\right)^{1/(k+1)}$$

$$=C_n\left(\int_{Q^1}\cdots\int_{Q^1}|E(y_1)\cap\cdots\cap E(y_{k+1})|_{H_{n-1}}dy_1\cdots dy_{k+1}\right)^{(1/k+1)}.$$

Si usamos (2.14) podemos acotar lo anterior con

$$C_{k,\epsilon,n}\left(\alpha^\epsilon\int_{Q^1}\cdots\int_{Q^1}\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{l:l\neq m}|y_l-y_m|^{-\epsilon}dy_1\cdots dy_{k+1}\right)^{1/(k+1)}. \tag{2.16}$$

Entonces, por simetría vemos que

$$|E|\le C_{k,\epsilon,n}\left(\alpha^\epsilon k\int_{Q^1}|y_1-y_2|^{-\epsilon}|y_1-y_3|^{-\epsilon}\cdots|y_1-y_{k+1}|^{-\epsilon}dy_2\cdots dy_{k+1}dy_1\right)^{(1/k+1)}$$

.

$$= C_{k,\epsilon,n}\alpha^{\epsilon/(k+1)}\left[\int_{Q^1}\left(\int_{Q^1}|y_1-y_2|^{-\epsilon}dy_2\right)^k dy_1\right]^{\frac{1}{k+1}} = C_{k,\epsilon,n}\alpha^{\frac{\epsilon}{k+1}}\left(\int_{Q^1}(I_\beta 1)^k dy_1\right)^{\frac{1}{k+1}}$$

donde I_β representa integración fraccionaria[4] con $\beta = 1-\epsilon$. Como $\beta < 1$, entonces, I_β converge casi donde sea. Por lo tanto

$$|\{x \in Q^n : |u(x)| \leq \alpha\}| \leq C_{k,\epsilon,n}\alpha^{\epsilon/(k+1)}.$$

□

Si pedimos hipótesis extras a u podemos generalizar el Teorema 1.0.4, es decir, lograremos acotar $|\{x : |u(x)| \leq \alpha\}|$ donde u es una función de variable vectorial que cumple con $D^\beta u \geq 1$ con un cota similar a la del Teorema 2.2.1 pero en la que el exponente de α sólo depende del multi-índice β.

Teorema 2.2.2. *Sean $\alpha > 0$ y $u \in U_\beta$ tal que para algunos índices $N_2 > \beta_2, N_3 > \beta_3, \ldots, N_n > \beta_n$, $\partial^{N_i}u(x)/\partial x_i^{N_i}$ no cambia de signo, $i = 2,\ldots,n$. Entonces existe $C < \infty$ que sólo depende de $\beta, N_2, \ldots, N_n$ tal que*

$$|\{x \in Q^n : |u(x)| \leq \alpha\}| \leq C\alpha^{1/|\beta|}.$$

Demostración: La prueba se hará por inducción sobre la dimensión n. En el caso $n = 1$, el Teorema 1.0.4 nos asegura la existencia de una constante C que sólo depende de β (que en este caso en un número natural) tal que,

$$|\{x \in Q^n : |u(x)| \leq \alpha\}| \leq C\alpha^{1/|\beta|}.$$

Supongamos válido el caso $n-1$ y demostremos para n. Sean $E = \{x \in Q^n : |u(x)| \leq \alpha\}$ y γ por determinar. Entonces,

$$|E| = \int_{\left\{x\in Q^n:\left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}u(x)\right|<\gamma\right\}}\chi_E(x',x_n)dx + \int_{\left\{x\in Q^n:\left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}u(x)\right|\geq\gamma\right\}}\chi_E(x',x_n)dx.$$

Por un lado,

$$\int_{\left\{x\in Q^n:\left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}u(x)\right|<\gamma\right\}}\chi_E(x',x_n)dx \leq \int_0^1\int_0^1 \chi_{\left\{x\in Q^n:\left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}u(x)\right|<\gamma\right\}}(x',x_n)dx'dx_n \leq$$

[4] ver Apéndice A

$$\leq \int_0^1 \left| \left\{ x' \in Q^{n-1} : \left| \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x', x_n) \right| < \gamma \right\} \right| dx_n.$$

Para cada x_n fija tenemos que $D^{\beta'}\left(\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x', x_n)\right) = D^{\beta} u(x', x_n) \geq 1$. Entonces, por la hipótesis de inducción y por el Corolario 1.0.6,

$$\int_0^1 \left| \left\{ x' \in Q^{n-1} : \left| \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x', x_n) \right| < \gamma \right\} \right| dx_n \leq 1 \cdot C\gamma^{1/|\beta'|}.$$

Por otro lado,

$$\int_{\left\{x \in Q^n : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x)\right| \geq \gamma\right\}} \chi_E(x', x_n) dx = \int_{Q^{n-1}} \int_{\left\{x_n \in [0,1] : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x)\right| \geq \gamma\right\}} \chi_E(x', x_n) dx_n dx'.$$

Ahora, por hipótesis, $D^{(0,0,\ldots,N_n)} u = \frac{\partial^{N_n}}{\partial x_n^{N_n}} u$ es siempre positiva o negativa, entonces, por el Lema 1.0.9, el intervalo $[0,1]$ se descompone en r intervalos, $r \in \mathbb{N}$ y sólo depende de N_n, en los que $\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u$ es siempre positiva o negativa. Entonces, $\left\{x_n \in [0,1] : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x)\right| \geq \gamma\right\}$ se descompone en a lo más r partes en las que $\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x) \leq \gamma$ ó $\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x) \geq -\gamma$. Si J es una de tales partes, por la base de inducción, tenemos que

$$\int_J \chi_E(x', x_n) dx_n \leq |\{x_n \in J : |u(x)| < \alpha\}| \leq C_{\beta_n} |\alpha/\gamma|^{1/\beta_n}.$$

En consecuencia,

$$\int_{\left\{x \in Q^n : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x)\right| \geq \gamma\right\}} \chi_E(x', x_n) dx \leq C_{(\beta_n, N_n)} |\alpha/\gamma|^{1/\beta_n}.$$

Por lo tanto

$$|E| = C_{(\beta, N_n)}(\gamma^{1/|\beta'|} + |\alpha/\gamma|^{1/\beta_n}).$$

Tomando $\gamma = \alpha^{|\beta'|/|\beta|}$ obtenemos el resultado deseado.

□

2.3. Mejorando las estimaciones de los subconjuntos de nivel

En esta sección estimaremos la medida de los subconjuntos de nivel determinados por funciones ϕ tales que $\partial^2\phi \in C^\infty(Q^2)$ y $\int|\phi| < \infty$. A diferencia de los casos anteriores, no utilizaremos integrales del tipo $\int e^{i\lambda\phi}$ para estimar nuestros conjuntos, sino que nos valdremos de las propiedades del operador, $\int e^{i\lambda\psi}F(x)G(y)dxdy$, $F, G \in L^2([0,1]), \psi \in C^\infty([0,1])$.

Definición: *Diremos que los puntos de una colección de números r_j están $\delta-$separados si para todo $i \neq j$, $|r_j - r_i| \geq \delta$ y $|r_j - r_{j+1}| < 2\delta$.*

Proposición 2.3.1. *Sea ϕ: $Q^2 \to \mathbb{R}$ integrable tal que $\partial^2\phi/\partial x\partial y \in C^\infty(Q^2)$ y es distinta de cero en todo Q^2. Entonces existe $C < \infty$ tal que para cualesquiera $\delta > 0, N \in \mathbb{N}$ y cualquier conjunto de números δ-separados $\{r_1, \ldots, r_N\}$,*

$$\left|\bigcup_{j=1}^{N}\{(x,y) \in Q^2 : |\phi(x,y) - r_j| < \delta\}\right| \leq CN^{1/2}\delta^{1/2}\sqrt{\log(1+N)}.$$

Demostración: Supongamos que para cualesquiera i, j, $|r_j - r_i| = n_{i,j}\delta$, $n_{i,j} \in \mathbb{N}$. Es decir, cualesquiera dos puntos de la colección distan entre sí un múltiplo entero de δ. Hagamos $\phi(x,y) = \psi(x,y) + f(x) + g(y)$ donde $\psi \in C^\infty$ y $\partial^2\phi/\partial x\partial y = \partial^2\psi/\partial x\partial y$
Hörmander [6], asegura que para toda $F, G \in L^2_{[0,1]}$, $v \in C^\infty[0,1]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left|\int_{[0,1]^2} e^{i\lambda v(x,y)}F(x)G(y)dxdy\right| \leq C(1+|\lambda|)^{-1/2}\|F\|_{L^2[0,1]}\|G\|_{L^2[0,1]}.$$

Entonces,

$$\left|\int_{[0,1]^2} e^{i\lambda\phi(x,y)}dxdy\right| =$$

$$= \left|\int_{[0,1]^2} e^{i\lambda\psi(x,y)}e^{i\lambda f(x)}e^{i\lambda\ g(y)}dxdy\right| \leq C(1+|\lambda|)^{-1/2}. \tag{2.17}$$

Sean $E_j = |\{(x,y) \in Q^2 : |\phi(x,y) - r_j| < \delta\}|$ para cada $1 \leq j \leq N$, y $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ no negativa tal que $h(t) = 1$ para $|t| \leq 1$, entonces

$$|E_j| = \int_{E_j} dxdy = \int_{\{(x,y)\in Q^2:|\phi(x,y)-r_j|\delta^{-1}<1\}} dxdy =$$

$$= \int_{\{(x,y)\in Q^2 : |\phi(x,y)-r_j|\delta^{-1}<1\}} h\left(\frac{\phi(x,y)-r_j}{\delta}\right) dxdy \leq \int_{Q^2} h\left(\phi(x,y) - r_j\delta^{-1}\right) dxdy.$$

Por lo tanto,

$$\left|\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right| \leq \sum_{j=1}^{N} |E_j| \leq \sum_{j=1}^{N} \int_{Q^2} h\left(\frac{\phi(x,y)-r_j}{\delta}\right) dxdy =$$

$$= \int_{Q^2} \sum_{j=1}^{N} h\left(\frac{\phi(x,y)-r_j}{\delta}\right) dxdy.$$

Si escribimos a h como la transformada inversa de su transformada de Fourier y hacemos $\delta^{-1} = \lambda$, la integral anterior es igual a

$$\int_{Q^2} \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\lambda(\phi(x,y)-r_j)\xi} \hat{h}(\xi) d\xi dxdy,$$

que a su vez, por el Teorema de Fubini, es igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi) \int_{Q^2} \sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i\lambda(\phi(x,y)-r_j)\xi} dxdyd\xi.$$

Como $h \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, entonces $\hat{h}$ es una función en el espacio de Schwartz[5], por lo que,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^2 |\hat{h}(x)| = C < \infty.$$

Entonces, para toda $\xi \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{h}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-2}.$$

Por lo tanto, haciendo $u(\xi) = \sum_{j=1}^{N} e^{-2\pi i\lambda r_j \xi}$ y $v(\xi) = \int_{Q^2} e^{2\pi i\lambda\xi\phi(x,y)} dxdy$,

$$\left|\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right| \leq C \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|)^{-2} |u(\xi)||v(\xi)| d\xi$$

$$= C \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\leq|\xi|\leq k+1} (1+|\xi|)^{-2} |u(\xi)||v(\xi)| d\xi. \tag{2.18}$$

[5]Vid. Folland, Gerald. Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications. E.U.A., John Wiley & Sons, 1984, p. 227

Serán necesarias las siguientes estimaciones para acotar cada sumando de la serie anterior.

Para cada $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+1} |u(\xi)|^2 d\xi = \int_a^{a+1} u(\xi)\overline{u(\xi)} d\xi = \int_a^{a+1} \sum_{j=1}^{N} e^{-2\pi i \lambda r_j \xi} \sum_{\ell=1}^{N} e^{2\pi i \lambda r_\ell \xi} d\xi$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} \int_a^{a+1} e^{2\pi i \xi(\lambda r_\ell - \lambda r_j)} d\xi.$$

En N ocasiones sucede que $\ell = j$, en cada una de ellas $\int_a^{a+1} e^{2\pi i \xi(\lambda r_\ell - \lambda r_j)} d\xi = 1$. Cuando $\ell \neq j$, usamos el hecho de que $\lambda|r_\ell - r_j| = n_{\ell,j}$, $n_{\ell,j} \in \mathbb{N}$ para asegurar que $\int_a^{a+1} e^{2\pi i \xi(\lambda r_\ell - \lambda r_j)} d\xi = 0$. Por lo tanto,

$$\int_a^{a+1} |u(\xi)|^2 d\xi \leq N \tag{2.19}$$

También, para todo ξ

$$|u(\xi)| \leq \sum_{j=1}^{N} |e^{-i\lambda r_j \xi}| \leq N \tag{2.20}$$

Y, utilizando (2.17),

$$|v(\xi)| \leq (1 + 2\pi|\lambda\xi|)^{-1/2} \leq (2\pi|\lambda\xi|)^{-1/2},$$

entonces,

$$|v(\xi)| \leq C \min\{1, |\lambda\xi|^{-1/2}\}. \tag{2.21}$$

Procedemos ahora a estimar $|\cup_{j=1}^{N} E_j|$ vía (2.18).Trabajaremos por separado el caso $k = 0$ que dividiremos en dos partes, cuando $|\xi| \leq 1/N$ y cuando $(1/N) \leq |\xi| \leq 1$.

Por (2.20) y (2.21),

$$\int_{|\xi|\leq 1/N} |v(\xi)||u(\xi)| d\xi \leq \int_{|\xi|\leq 1/N} NC|\lambda\xi|^{-1/2} d\xi = CN\lambda^{-1/2} \int_{|\xi|\leq 1/N} |\xi|^{-1/2} d\xi$$

$$= CN\lambda^{-1/2} N^{-1/2} = CN^{1/2}\lambda^{-1/2}.$$

(2.19) y (2.21) justifican que,

$$\int_{(1/N)\leq|\xi|\leq 1} |v(\xi)||u(\xi)| d\xi \leq \left(\int_{(1/N)\leq|\xi|\leq 1} |v(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{(1/N)\leq|\xi|\leq 1} |u(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_{-1}^{0}|u(\xi)|^2 d\xi+\int_{0}^{1}|u(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{(1/N)\leq|\xi|\leq 1} C|\lambda\xi|^{-1}d\xi\right)^{1/2}$$
$$\leq C\lambda^{-1/2}N^{1/2}\left(\int_{(1/N)\leq|\xi|\leq 1}|\xi|^{-1}d\xi\right)^{1/2}=C\lambda^{-1/2}N^{1/2}\log|\xi|\Big|_{1/N}^{1}$$
$$=C\lambda^{-1/2}N^{1/2}\log^{1/2}(N)\leq C\lambda^{-1/2}N^{1/2}\log^{1/2}(1+N).$$

Entonces,

$$\int_{0\leq|\xi|\leq 1}|(1+|\xi|)^{-2}|u(\xi)||v(\xi)|d\xi\leq C\lambda^{-1/2}N^{1/2}\log(1+N)^{1/2}.$$

Continuamos ahora con $k\geq 1$. Por (2.19), (2.21) y la desigualdad de Hölder,

$$\int_{k\leq|\xi|\leq k+1}(1+|\xi|)^{-2}|v(\xi)||u(\xi)|d\xi$$
$$\leq\left(\int_{k\leq|\xi|\leq k+1}|u(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{k\leq|\xi|\leq k+1}\left((1+|\xi|)^{-2}|v(\xi)|\right)^2d\xi\right)^{1/2}$$
$$=\left(\int_{-k-1}^{-k}|u(\xi)|^2d\xi+\int_{k}^{k+1}|u(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{k\leq|\xi|\leq k+1}(1+|\xi|)^{-4}|v(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}$$
$$\leq CN^{1/2}\lambda^{-1/2}\left(\int_{k\leq|\xi|\leq k+1}(1+|\xi|)^{-4}|\xi|^{-1}d\xi\right)^{1/2}$$
$$\leq CN^{1/2}\lambda^{-1/2}\left(\int_{k\leq|\xi|\leq k+1}|\xi|^{-5}d\xi\right)^{1/2}\leq$$
$$\leq CN^{1/2}\lambda^{-1/2}\left(k^{-5}\int_{k\leq|\xi|\leq k+1}d\xi\right)^{1/2}=CN^{1/2}\lambda^{-1/2}k^{-5/2}.$$

Entonces,

$$\int_{k\leq|\xi|\leq k+1}(1+|\xi|)^{-2}|v(\xi)||u(\xi)|d\xi\leq CN^{1/2}\lambda^{-1/2}k^{-5/2}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\bigcup_{j=1}^{N}E_j\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}CN^{1/2}\lambda^{-1/2}k^{-5/2}+C\lambda^{-1/2}N^{1/2}\log^{1/2}(1+N)$$
$$\leq C\lambda^{-1/2}N^{1/2}\log^{1/2}(1+N).$$

Supongamos ahora que $r_\ell < r_m$ siempre que $\ell < m$, y que $|r_i - r_{i+1}| < 2\delta$, $1 \leq i \leq N-1$. Sean

$$A = (r_1 - \delta, r_N + \delta) \ \text{ y } \ B = \{(x,y) \in Q^2 : \phi(x,y) \in A\},$$

entonces, $|A| < 2N\delta$ y para cada $(x,y) \in \cup_{j=1}^N E_j$

$$r_1 - \delta \leq r_j - \delta < \phi(x,y) < r_j + \delta \leq r_N + \delta,$$

es decir, $\cup_{j=1}^N E_j \subseteq B$.

Sean $\delta' = |A|/2N$, $r_1' = (r_1 - \delta) + \delta'$, $r_2' = (r_1 - \delta) + 3\delta', r_3' = (r_1 - \delta) + 5\delta', \ldots,$ $r_N' = (r_1 - \delta) + (2N-1)\delta'$. Por construcción $|r_i' - r_j'| = n_{i,j}\delta'$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, para algún $n_{i,j} \in \{2, 4, 6, 2N-2\}$. Entonces los puntos $r_1', \ldots r_N'$ son como los del caso anterior, por lo que,

$$\left|\bigcup_{j=1}^N \{(x,y) \in Q^2 : |\phi(x,y) - r_j'| \leq \delta'\}\right| \leq CN^{1/2}(\delta')^{1/2}\sqrt{\log(1+N)}.$$

Observemos que

$$\bigcup_{j=1}^N \{(x,y) \in Q^2 : |\phi(x,y) - r_j'| \leq \delta'\} = B.$$

Por lo tanto,

$$|\bigcup_{j=1}^n E_j| \leq CN^{1/2}(\delta')^{1/2}\sqrt{\log(1+N)} \leq CN^{1/2}\delta^{1/2}\sqrt{\log(1+N)}.$$

□

Podemos estimar ahora a los subconjuntos de nivel determinados por funciones ψ como las de la Proposición anterior. Observemos que dichas funciones cumplen con $\partial^2\psi/\partial x\partial y \geq 1$, entonces podemos pensar en comparar el Corolario 2.1.6 con la cota que aquí obtengamos.

Corolario 2.3.2. *Sea ψ como en la Proposición anterior. Entonces,*

$$|\{(x,y) \in Q^2 : |\psi(x,y)| \leq \delta\}| \leq C\delta^{1/2}.$$

Demostración: Basta con tomar $N = 1$ y $r_1 = 0$ en la proposición anterior.

□

Pudimos deshacernos del factor $\sqrt{log(1/\alpha)}$ del Corolario 2.1.6 pero hay que recordar que las funciones con las que se trabajaron aquí son distintas a las que determinan los subconjuntos de nivel en aquel Corolario.

Capítulo 3

El lema de van der Corput en más de una variable

Vamos ahora a buscar un equivalente al Lema de van der Corput cuando trabajamos en más de una dimensión. Es decir, trataremos de acotar uniformemente

$$I(\lambda) = \int_{Q^n} e^{i\lambda u(x)} dx$$

para la clase más extensa posible de funciones $u\colon Q^n \to \mathbb{R}$ que satisfagan $D^\beta u(x) \geq 1$ con β un multi-índice.

A diferencia del caso de una variable no se podrá conseguir una estimación del tipo $C|\lambda|^{-|\beta|}$ si sólo pedimos que u cumpla con $D^\beta u(x) \geq 1$. Para lograr una tal estimación, tendremos que pedir condiciones extras a u, y β tampoco podrá ser cualquiera. Lograremos obtener estimaciones para distintos tipos de multi-índices β y veremos con un ejemplo que para funciones que satisfacen $u^\beta \geq 1$ con $\beta = (1, 1, \ldots, 1)$ no existe $\alpha > 0$ tal que para alguna constante C, $I(\lambda) \leq C|\lambda|^{-\alpha}$.

En toda esta sección nos valdremos del operador

$$T_\lambda f(x) = \int e^{i\lambda u(x)} f(y) dy$$

para acotar $I(\lambda)$. Comenzamos, una vez más, con el caso de dos variables.

3.1. El lema de van der Corput en dos variables

Nuestros operadores tomarán la siguiente forma:

$$I(\lambda) = \int_{[0,1]^2} e^{i\lambda u(x,y)} dxdy \quad \text{y} \quad T_\lambda f(x) = \int_{[0,1]} e^{i\lambda u(x,y)} f(y) dy.$$

Examinemos, antes que nada, cuál es la relación que guardan T_λ e $I(\lambda)$.

Teorema 3.1.1. *Sean $j, k \geq 1$ y $\alpha > 0$. Para toda $u \in U_{(j,k)}$ existe C, independiente de u, tal que*

$$|I(\lambda)| = \left| \int_{[0,1]^2} e^{i\lambda u(x,y)} dxdy \right| \leq C|\lambda|^{-\alpha}$$

si y sólo si

$$\|T_\lambda\|_{L^\infty \to L^1} \leq C|\lambda|^{-\alpha}.$$

Demostración: Supongamos que para toda $f \in L^\infty$, $\|T_\lambda f\|_{L^1} \leq C|\lambda|^{-\alpha}\|f\|_\infty$. El caso particular $f \equiv 1$ justifica que,

$$|I(\lambda)| = \left| \int \int e^{i\lambda u(x,y)} dydx \right| \leq \int \left| \int e^{i\lambda u(x,y)} dy \right| dx = \|T_\lambda 1\| \leq C|\lambda|^{-\alpha}.$$

Supongamos ahora que $|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-\alpha}$. Veremos primero que el resultado vale para funciones características. Sean $\phi, \psi \in C^\infty$ y $u \in U_{(j,k)}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k}(u(x,y) + \lambda^{-1}\phi(x) + \lambda^{-1}\psi(y)) &= \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(\frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x,y) + \lambda^{-1} \frac{\partial^k}{\partial y^k}\psi(y) \right) \\ &= \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k} u(x,y) \geq 1. \end{aligned}$$

Es decir, $(u(x,y) + \lambda^{-1}\phi(x) + \lambda^{-1}\psi(y)) \in U_{(j,k)}$, y por hipótesis

$$\left| \int e^{i\lambda u(x,y)} e^{i\phi(x)} e^{i\psi(y)} dxdy \right| = \left| \int e^{i\lambda(u(x,y) + \lambda^{-1}\phi(x) + \lambda^{-1}\psi(y))} dxdy \right| \leq C|\lambda|^{-\alpha} \qquad (3.1)$$

Sean $A, B \subseteq [0,1]$ medibles. Sean $\{\phi_n(x)\}, \{\psi_n(y)\}$ sucesiones de funciones suaves tales que:

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ \pi & \text{si } x \in A^c \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(y) \to \begin{cases} 0 & \text{si } y \in B \\ \pi & \text{si } y \in B^c \end{cases}.$$

Entonces, por el Teorema de la convergencia dominada,

$$\int e^{i\lambda u(x,y)} e^{i\phi_n(x)} e^{i\psi_n(y)} dxdy \to \int e^{i\lambda u(x,y)} [\chi_A - \chi_{A^c}](x)[\chi_B - \chi_{B^c}](y) dxdy \tag{3.2}$$

cuando $n \to \infty$. Además, por (3.1),

$$\left| \int e^{i\lambda u(x,y)} [\chi_A - \chi_{A^c}](x)[\chi_B - \chi_{B^c}](y) dxdy \right| \leq C|\lambda|^{-\alpha} \tag{3.3}$$

con A y B subconjuntos medibles cualesquiera del intervalo $[0, 1]$.

Si combinamos casos particulares de la desigualdad anterior, la podremos escribir en términos solamente de A y B.

$$\left| \int e^{i\lambda u(x,y)} \chi_A(x)\chi_B(y) dxdy \right|$$

$$\leq \left| \int e^{i\lambda u(x,y)} \big[-\chi_A - \chi_A - \chi_{A^c} + \chi_{A^c} \big](x) \big[-\chi_B - \chi_B - \chi_{B^c} + \chi_{B^c} \big](y) dxdy \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int e^{i\lambda u(x,y)} \big[\chi_{A^c} - \chi_A \big](x) \big[-\chi_B - \chi_B - \chi_{B^c} + \chi_{B^c} \big](y) dxdy \right| \\
&+ \left| \int e^{i\lambda u(x,y)} \big[-\chi_{A^c} - \chi_A \big](x) \big[-\chi_B - \chi_B - \chi_{B^c} + \chi_{B^c} \big](y) dxdy \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int e^{i\lambda u(x,y)} \big[\chi_{A^c} - \chi_A \big](x) \big[\chi_{B^c} - \chi_B \big](y) dxdy \right| \\
&+ \left| \int e^{i\lambda u(x,y)} \big[\chi_{A^c} - \chi_A \big](x) \big[-\chi_B - \chi_{B^c} \big](y) dxdy \right| \\
&+ \left| \int e^{i\lambda u(x,y)} \big[-\chi_A - \chi_{A^c} \big](x) \big[\chi_{B^c} - \chi_B \big](y) dxdy \right| \\
&+ \left| \int e^{i\lambda u(x,y)} \big[-\chi_A - \chi_{A^c} \big](x) \big[-\chi_B - \chi_{B^c} \big](y) dxdy \right| \\
&= \left| \int e^{i\lambda u(x,y)} \big[\chi_A - \chi_{A^c} \big](x) \big[\chi_{B^c} - \chi_B \big](y) dxdy \right|
\end{aligned}$$

$$+\left|\int e^{i\lambda u(x,y)}\left[\chi_{A^c}-\chi_A\right](x)dxdy\right|+\left|\int e^{i\lambda u(x,y)}\left[\chi_{B^c}-\chi_B\right](y)dxdy\right|+\left|\int e^{i\lambda u(x,y)}dxdy\right|.$$

Podemos acotar cada sumando de la última suma con (3.3). El primer sumando es el caso general de dicha desigualdad, mientras que los tres sumandos restantes son casos particulares. En el segundo sumando tómese $A=\emptyset$, en el tercero $B=\emptyset$ y en el cuarto $A=B=\emptyset$.

Por lo tanto, para cualesquiera $A,B\subseteq[0,1]$ medibles,

$$\left|\int e^{i\lambda u(x,y)}\chi_A(x)\chi_B(y)dxdy\right|\leq C|\lambda|^{-\alpha}. \tag{3.4}$$

Sean $\{A_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}},\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subseteq[0,1]$ sucesiones de conjuntos medibles y supongamos que

$$\left|\int e^{i\lambda u(x,y)}\left(\sum_{\ell}^{\infty}\alpha_\ell\chi_{A_\ell}(x)\right)\left(\sum_{m}^{\infty}\beta_m\chi_{B_m}(y)\right)dxdy\right|$$
$$\leq C|\lambda|^{-\alpha}\sum_{\ell}^{\infty}|\alpha_l|\sum_{m}^{\infty}|\beta_m|. \tag{3.5}$$

Ahora, si $f,g\in L^\infty[0,1]$ podemos escribirlas como $f=\sum_l\alpha_l\chi_{A_l}$ y $g=\sum_l\beta_m\chi_{B_m}$, con $\sum_l|\alpha_l|\leq\|f\|_\infty$ y $\sum_m|\beta_m|\leq\|g\|_\infty$. Por lo que

$$\left|\int\int e^{i\lambda u(x,y)}g(y)f(x)dydx\right|\leq C|\lambda|^{-\alpha}\|f\|_\infty\|g\|_\infty. \tag{3.6}$$

Como 1 e ∞ son exponentes conjugados,

$$\|T_\lambda g\|_1=\sup_{\|f\|_\infty=1}\left|\int f(x)T_\lambda g(x)dx\right|=\sup_{\|f\|_\infty=1}\left|\int f(x)\left(\int e^{i\lambda u(x,y)}g(y)dy\right)dx\right|.$$

Por lo tanto, utilizando (3.6), concluimos que $\|T_\lambda g\|_1\leq C|\lambda|^{-\alpha}\|g\|_\infty$, es decir, $\|T_\lambda\|_{L^\infty\to L^1}\leq C|\lambda|^{-\alpha}$.

Para probar (3.5) basta utilizar una vez más el Teorema de la convergencia dominada y suponer que $\sum_\ell|\alpha_\ell|,\sum_m|\beta_m|<\infty$.

□

Interpolando, podemos generalizar el Teorema anterior.

Corolario 3.1.2. *Las afirmaciones del teorema anterior son equivalentes a*

$$\|T_\lambda\|_{L^p \to L^q} \leq C|\lambda|^{-\alpha}$$

con p y p' conjugados y $p > 1$.

Demostración: Supongamos que $|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-\alpha}$. Necesitamos demostrar que $\|T_\lambda\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C|\lambda|^{-\alpha}$ para poder utilizar el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin[1]. Procederemos como en la parte final del Teorema anterior.

Sean $f, g \in L^1[0,1]$. Si escribimos $f = \sum_l \alpha_l \chi_{A_l}$ y $g = \sum_l \beta_m \chi_{B_m}$, con $\sum_l |\alpha_l| \leq \|f\|_1$ y $\sum_m |\beta_m| \leq \|g\|_1$, podemos utilizar (3.5) para justificar que,

$$\left| \int \int e^{i\lambda u(x,y)} g(y) f(x) dy dx \right| \leq C|\lambda|^{-\alpha} \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{3.7}$$

Como estamos trabajando en espacios de medida finita y 1 e ∞ son exponentes conjugados,

$$\|T_\lambda g\|_\infty = \sup_{\|f\|_1 = 1} \left| \int f(x) T_\lambda g(x) dx \right| = \sup_{\|f\|_1 = 1} \left| \int f(x) \left(\int e^{i\lambda u(x,y)} g(y) dy \right) dx \right|.$$

Entonces, por (3.7),

$$\|T_\lambda\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C|\lambda|^{-\alpha}.$$

Podemos usar ahora el teorema de interpolación de Riesz-Thorin para concluir que:

$$\|T_\lambda\|_{L^p \to L^{p'}} \leq C|\lambda|^{-\alpha}$$

siempre que p y p' sean conjugados y que $p > 1$.

Por otro lado, supongamos que $\|T_\lambda\|_{L^p \to L^{p'}} \leq C|\lambda|^{-\alpha}$ con p y p' conjugados y $p > 1$. Entonces,

$$\|T_\lambda f\|_1 \leq \|T_\lambda f\|_{p'} \leq C|\lambda|^{-\alpha} \|f\|_p \leq C|\lambda|^{-\alpha} \|f\|_\infty,$$

con lo que la prueba queda concluida.

$\square$

Comenzamos ahora la búsqueda de cotas para $|I(\lambda)|$. Tratando de imitar el lema de van der Corput, podríamos intentar estimar $I(\lambda)$ pidiendo que u sólo cumpla con $\partial^{j+k} u / \partial x^j \partial y^k \geq 1$ para $j + k = d \geq 2$ y pedir hipótesis extras cuando $d = 1$. Con el siguiente ejemplo veremos que esto no es posible. Construiremos una función $u \in U_{(1,1)}$ para la cual será imposible encontrar un $\alpha > 0$ tal que $|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-\alpha}$.

[1] Vid. Folland, Gerald. Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications. E.U.A., John Wiley & Sons, 1984, p. 192-201

Lema 3.1.3. *Para cada $M >> 1$ y cada ϵ existe una función suave $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $g' \geq M$ y $dist(g(y), \mathbb{Z}) < \epsilon$ excepto en un conjunto de medida $O(\epsilon)$ que es la unión de a lo más CM/ϵ intervalos de longitud ϵ^2/M .*

Demostración: *Sea $g(0) = 0$. Construiremos g lineal a pedazos intercalando segmentos con pendiente M/ϵ^2 con segmentos de pendiente M en intervalos de longitud ϵ^2/M y ϵ/M respectivamente. Podemos acomodar estos segmentos de tal manera que $dist(g(y), \mathbb{Z}) < \epsilon$ excepto en la unión de los intervalos de longitud ϵ^2/M, de los cuales necesitamos M/ϵ para construir g en todo $[0,1]$. Para hacer de g una función derivable, podemos convolverla con una aproximación de la identidad*[2]*. (ver figura 1)*
□

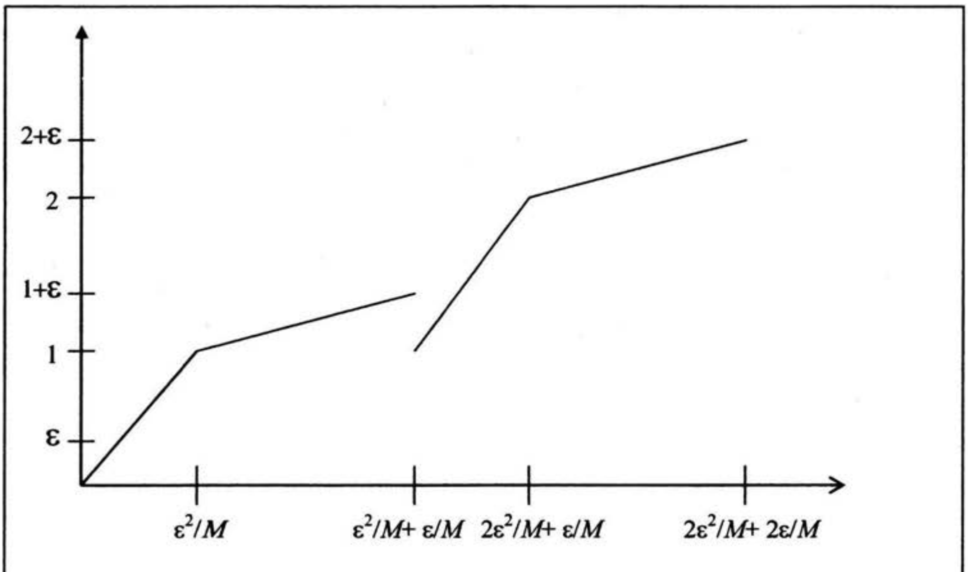

Figura 1.

[2] *ver Apéndice B*

Lema 3.1.4. *Para cualquier $\epsilon > 0$ existe $u \in U_{(1,1)}$ tal que $dist(u(x,y),\mathbb{Z}) < \epsilon$ excepto en un conjunto de medida a lo más ϵ.*

Demostración: Comenzamos construyendo inductivamente algunas funciones auxiliares en el intervalo $[0,1]$. Sean $\epsilon > 0$ y $f_0 \equiv 0$. Por el lema anterior existe una función, f_1, tal que $dist(f_1,\mathbb{Z}) < \epsilon$ excepto en un conjunto de medida ϵ y $f_1'(x) > \epsilon$ para toda $x \in [0,1]$, es decir,

$$\inf_{0\leq y\leq 1} f_1'(y) > \sup_{0\leq y\leq 1} f_0(y) + \epsilon.$$

Utilizando el mismo lema podemos construir f_2 tal que $dist(f_2,\mathbb{Z}) < \epsilon$ excepto en un conjunto de medida ϵ y

$$\inf_{0\leq y\leq 1} f_2'(y) > \sup_{0\leq y\leq 1} f_2(y) + \epsilon.$$

Supongamos construidas $f_3, f_4, \ldots, f_j$ con características análogas a las funciones recién definidas. Por el lema anterior, existe f_{j+1} tal que $dist(f_{j+1}(y),\mathbb{Z}) < \epsilon$ excepto en un conjunto de medida ϵ, y que $f_{j+1}' \geq \sup_{0\leq y\leq 1} f_j' + \epsilon$, es decir, que

$$\inf_{0\leq y\leq 1} f_{j+1}'(y) \geq \sup_{0\leq y\leq 1} f_j'(y) + \epsilon.$$

Ahora, sea $f : Q^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} f_j(y) & \text{si } x = j\epsilon, 0 \leq j \leq 1/\epsilon \\ f_j(y) + (x - j\epsilon)y & \text{si } j\epsilon \leq x \leq (j+1)\epsilon - \epsilon^2 \\ \left(\frac{(j+1)\epsilon - x}{\epsilon^2}\right) f((j+1) - \epsilon^2, y) + & \\ + \left(\frac{x-(j+1)\epsilon+\epsilon^2}{\epsilon^2}\right) f((j+1)\epsilon, y) & \text{si } (j+1)\epsilon - \epsilon^2 \leq x \leq (j+1)\epsilon \end{cases}$$

Si $j\epsilon < x < (j+1)\epsilon - \epsilon^2$ entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[f_j(y) + (x - j\epsilon)y] = \frac{\partial}{\partial x}[f_j'(y) + (x - j\epsilon)] = 1.$$

Y si $(j+1)\epsilon - \epsilon^2 < x < (j+1)\epsilon - \epsilon^2$, entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[((j+1)\epsilon - x)(f_j(y) + (\epsilon - \epsilon^2)y) + (x - j\epsilon - \epsilon - \epsilon^2) f_{j+1}(y)] =$$

$$= \frac{\partial}{\epsilon^2 \partial x}\left[\epsilon(j+1)f_j'(y) + x + (\epsilon - \epsilon^2)(j+1)\epsilon + f_{j+1}'(y)(-j\epsilon - \epsilon + \epsilon^2)\right]$$

$$= \frac{1}{\epsilon^2}\big(f'_{j+1}(y) - f'_j(y) - \epsilon + \epsilon^2\big).$$

Además, por construcción,

$$f'_j(y) + \epsilon \leq f'_{j+1}(y), \text{ por lo que, } \epsilon^2 \leq f'_{j+1} - f'_j - \epsilon + \epsilon^2, \text{ es decir,}$$

$$1 \leq \frac{1}{\epsilon^2}[f'_{j+1}(y) - f'_j(y) - \epsilon + \epsilon^2].$$

Por lo tanto, excepto en las líneas $x = j\epsilon$ y $x = j\epsilon - \epsilon^2$, $\partial^2 f/\partial x \partial y \geq 1$.

Por otro lado, para $j\epsilon < x < (j+1)\epsilon - \epsilon^2$ tenemos

$$|f(x,y) - f_j(y)| = |f_j(y) + (x - j\epsilon)y - f_j(y)| = |(x - j\epsilon)y| = |x - j\epsilon||y| \leq |x - j\epsilon|.$$

Pero $x \in (j\epsilon, (j+1)\epsilon - \epsilon^2)$ entonces, $|x - j\epsilon| < \epsilon$. Por lo tanto, para toda y, $|f(x,y) - f_j(y)| < \epsilon$ y, entonces, $dist(f(x,y), f_j(y)) < \epsilon$. Luego,

$$dist(f(x,y), \mathbb{Z}) \leq dist(f(x,y), f_j(y)) + dist(f_j(y), \mathbb{Z}) \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \tag{3.8}$$

Pero $dist(f_j(y), \mathbb{Z}) < \epsilon$ excepto en un conjunto de medida ϵ y estamos trabajando en franjas de medida $\epsilon - \epsilon^2 < \epsilon$. Entonces (3.8) es válida excepto en un conjunto con medida a lo más ϵ^2. Como hay $1/\epsilon$ de estas franjas, tenemos un conjunto de medida a lo más ϵ en donde (3.8) no vale.

En las franjas restantes, $(j+1)\epsilon - \epsilon^2 < x < (j+1)\epsilon$, tenemos también un conjunto donde (3.8) puede no valer. Pero hay $1/\epsilon$ de estas franjas y cada una mide ϵ^2.

Entonces f es continua, suave fuera de las líneas $x = j\epsilon, x = j\epsilon - \epsilon^2$, satisface $\partial^2 f/\partial x \partial y \geq 1$ también fuera de estas líneas y $dist(f(x,y), \mathbb{Z}) < 2\epsilon$ excepto en un conjunto de medida a lo más 2ϵ. Además, por construcción, para cada y, $x \mapsto \partial f(x,y)/\partial y$ es continua en $x = j\epsilon$ y en $x = j\epsilon - \epsilon$.

Por lo que $\partial^2 f/\partial x \partial y \geq 1$ en el sentido de las distribuciones[3] y si convolvemos f con una aproximación de la identidad no negativa, obtenemos la función deseada $u \in U_{1,1}$.

□

[3]Vid. Schwartz, Laurent. Theorie des Distributions. Publications de l'Institut de Mathematique de l'Universite de Strasbourg. Francia. 1957

Lema 3.1.5. *Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - 2n\pi| < 1/50$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ entonces,* $\cos(x) > 1 - \cos(1/50)$.

Demostración: Por hipótesis

$$x \in [2n\pi - 1/50, 2n\pi + 1/50] = [2n\pi - 1/50, 2n\pi] \cup (2n\pi, 2n\pi + 1/50]$$

Si x está en el primer uniendo entonces $\cos(x) \geq \cos(2n\pi - 1/50) = \cos(1/50) > 1/2$, ya que en dicho intervalo $\cos(x)$ es creciente.

Y, si x está en el segundo uniendo, $\cos(x) \geq \cos(2n\pi + 1/50) = \cos(1/50) > 1/2$ pues en este intervalo $\cos(x)$ es decreciente.

Por lo tanto $\cos(x) + \cos(1/50) \geq 1$, es decir, $\cos(x) \geq 1 - \cos(1/50)$

□

Estamos listos para exhibir el contraejemplo.

Teorema 3.1.6. *No existe $\alpha > 0$ tal que para alguna constante C y toda $u \in U_{(1,1)}$, $|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-\alpha}$. No existe $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\alpha > 0$ para los cuales se tenga $\|T_\lambda\|_{L^p \to L^q} \leq C|\lambda|^{-\alpha}$ uniformemente en $u \in U_{1,1}$.*

Demostración: Es suficiente con probar la primera afirmación ya que el Teorema 3.1.1 asegura que si no tenemos ninguna α para la cual sea verdadero $|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-\alpha}$, entonces no puede ser verdad $\|T_\lambda\|_{L^p \to L^q} \leq C|\lambda|^{-\alpha}$.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $1/(50\epsilon) = 2\pi k_0$ para alguna $k_0 \in \mathbb{N}$. Sea $\lambda = 1/(50\epsilon)$. Por el Lema 3.1.4 existe $u_\epsilon \in U_{1,1}$ tal que $dist(u_\epsilon(x,y), \mathbb{Z}) < \epsilon$ excepto en un conjunto F de medida a lo más ϵ.

Si $(x,y) \in F^c$ y $m \in \mathbb{Z}$ entonces $|u_\epsilon(x,y) - m| \leq \epsilon$, por lo que, $2\pi k_0 |u_\epsilon(x,y) - m| \leq 2\pi k_0 \epsilon$ que a su vez implica que $|\lambda u_\epsilon(x,y) - 2\pi(k_0 m)| \leq 2\pi k_0 \epsilon$ y en consecuencia, $dist(\lambda u_\epsilon(x,y), 2\pi\mathbb{Z}) < \epsilon\lambda = 1/50$. Entonces, por el lema anterior,

$$|I(\lambda)| \geq |Re(I(\lambda))| \geq \left| \int_F \cos[\lambda u_\epsilon(x,y)] dxdy \right| - \left| \int_{F^c} \cos[\lambda u_\epsilon(x,y)] dxdy \right| \geq$$

$$\geq [1 - \cos(1/50)][1 - |F|] - \left| \int_{F^c} \cos[\lambda u_\epsilon(x,y)] dxdy \right| = [1 - \cos(1/50)][1 - |F|] - |F| =$$

$$= 1 - |F|(2 - \cos(1/50)) - \cos(1/50)$$

pero $|F| = \epsilon$ y si $\epsilon < 1/10000$ entonces

$$|I(\lambda)| \geq 1 - (1/100000)(2 - \cos(1/50)) - \cos(1/50) = C_0 > 0.$$

Por lo tanto, existe $u_\epsilon \in U_{1,1}$ tal que para todo ϵ suficientemente pequeño, y entonces, para λ suficientemente grande, $|I(\lambda)| \geq C_0$. Entonces no existe $\alpha > 0$ tal que $|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-\alpha}$, pues $C|\lambda|^{-\alpha} \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$.

□

Comenzamos ahora la búsqueda de cotas superiores para $I(\lambda)$. Trabajaremos con los distintos valores que j y k puedan tomar. Por el ejemplo anterior excluimos el caso $j = k = 1$. Comenzamos con el caso en que j ó k son cero.

Teorema 3.1.7. *Sea $k \in \mathbb{N}$.*

a) *Sea $u \in U_{(0,1)}$ tal que para cada $x \in [0,1]$ fijo la función $y \mapsto \partial u(x,y)/\partial y$ es monótona, entonces*

$$|I(\lambda)| \leq \frac{C_k}{|\lambda|^{1/k}}.$$

b) *Si $k \geq 2$, entonces para toda $u \in U_{(0,k)}$*

$$|I(\lambda)| \leq \frac{C_k}{|\lambda|^{1/k}}.$$

En ambos casos C_k es independiente de u.

Omitimos la demostración del Teorema anterior por ser una consecuencia inmediata del Corolario 1.0.15. Como es de esperarse existe un teorema análogo para funciones $u \in U_{(j,0)}$

Teorema 3.1.8. *Sea $j \in \mathbb{N}$.*

a) *Sea $u \in U_{(1,0)}$ tal que para cada $y \in [0,1]$ fijo la función $x \mapsto \partial u(x,y)/\partial x$ es monótona, entonces*

$$|I(\lambda)| \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

b) *Si $j \geq 2$, entonces para toda $u \in U_{(j,0)}$*

$$|I(\lambda)| \leq \frac{C_j}{|\lambda|^{1/j}}.$$

En ambos casos C_j es independiente de u.

Veremos ahora qué puede decirse cuando $j, k \geq 1$ con j ó k estrictamente mayor que uno. El primer paso será analizar $I(\lambda)$, a través de T_λ, cuando $u \in U_{(1,k)}$ ó $u \in U_{(j,1)}$.

Teorema 3.1.9. *Sean $j, k \geq 2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, para cualquier $u \in U_{(1,k)}$ ó $u \in U_{(j,1)}$*

$$\|T_\lambda\|_{L^2 \to L^2} \leq C|\lambda|^{-1/(2k)}$$

ó

$$\|T_\lambda\|_{L^2 \to L^2} \leq C|\lambda|^{-1/(2j)}$$

respectivamente.

Demostración: Por simetría basta probar el caso en que $k \geq 2$ y que u cumple con $\partial^{1+k}u/\partial x \partial y^k > 1$.

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda f\|_2^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^1 e^{i\lambda u(x,y)} f(x) dx \right|^2 dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 e^{i\lambda u(x_1,y)} f(x_1) dx_1 \int_0^1 \overline{e^{i\lambda u(x_2,y)} f(x_2)} dx_2 dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{i\lambda[u(x_1,y) - u(x_2,y)]} dy \right) f(x_1) \overline{f(x_2)} dx_2 dx_1 \\
&= \int_0^1 \int_{-x_1}^{1-x_1} \left(\int_0^1 e^{i\lambda[u(x_1,y) - u(z+x_1,y)]} dy \right) f(x_1) \overline{f(z+x_1)} dz dx_1 \\
&\leq \int_0^1 \int_{-x_1}^{1-x_1} \left| \int_0^1 e^{i\lambda[u(x_1,y) - u(z+x_1,y)]} dy \right| |f(x_1)| |\overline{f(z+x_1)}| dz dx_1, \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

donde $z = x_2 - x_1$. Sean $\psi_z \colon Q^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\psi_z(x_1, y) = u(x_1, y) - u(x_1 + z, y)$ y $J_{x_1,z} = \int_0^1 e^{i\lambda\psi_z(x_1,y)} dy$. Vamos a demostrar que $|\partial^k \psi_z(x_1, y)/\partial y^k| \geq |z|$, y como $k \geq 2$, utilizaremos el Lema de van der Corput para acotar $|J_{x_1,z}|$.

Si $z \geq 0$ y como $u \in U_{(1,k)}$, entonces

$$0 \leq z = \int_{x_1}^{x_1+z} ds \leq \int_{x_1}^{x_1+z} \frac{\partial^{k+1}}{\partial s \partial y^k} u(s,y) ds$$

$$= \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x_1+z,y) - \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x_1,y) = -\frac{\partial^k}{\partial y^k} \psi_z(x_1,y).$$

Por lo que, $|z| \leq |\partial^k \psi_z(x_1,y)/\partial y^k|$. De manera análoga podemos ver que si $z < 0$, entonces $|z| \leq |\partial^k \psi_z(x_1,y)/\partial y^k|$.

Por lo tanto, por el Corolario 1.0.15 existe C independiente de z y de x_1 tal que $|J_{x_1,z}| \leq C(|\lambda z|)^{-1/k}$ (para ver que es posible utilizar el Lema de van der Corput hay que proceder como en la prueba del Teorema 3.1.7). Entonces, por (3.9),

$$\|T_\lambda f\|_2^2 \leq C|\lambda|^{-1/k} \int_0^1 \int_{-x_1}^{1-x_1} |z|^{-1/k} |f(z+x_1) f(x_1)| dz dx_1$$

$$= C|\lambda|^{-1/k} \int_{-1}^0 |z|^{-1/k} \int_{-z}^1 |f(z+x_1) f(x_1)| dx_1 dz$$

$$+ C|\lambda|^{-1/k} \int_0^1 |z|^{-1/k} \int_0^{1-z} |f(z+x_1) f(x_1)| dx_1 dz$$

$$\leq C|\lambda|^{-1/k} \int_{-1}^0 |z|^{-1/k} \left(\int_{-z}^1 |f(z+x_1)|^2 dx_1 \right)^{1/2} \left(\int_{-z}^1 |f(x_1)|^2 dx_1 \right)^{1/2} dz$$

$$+ C|\lambda|^{-1/k} \int_0^1 |z|^{-1/k} \left(\int_0^{1-z} |f(z+x_1)|^2 dx_1 \right)^{1/2} \left(\int_0^{1-z} |f(x_1)|^2 dx_1 \right)^{1/2} dz$$

$$\leq C|\lambda|^{-1/k} \|f\|_2^2 \int_{-1}^1 |z|^{-1/k} dz = C|\lambda|^{-1/k} \|f\|_2^2.$$

Hay que observar que como $k > 1$ entonces $\int_{-1}^1 |z|^{-1/k} dz < \infty$.

En consecuencia,

$$\|T_\lambda f\|_2^2 \leq C|\lambda|^{-1/k} \|f\|_2^2,$$

por lo tanto,

$$\|T_\lambda\|_{L^2 \to L^2} \leq C|\lambda|^{-1/2k}.$$

□

Utilizando este teorema y el Corolario 3.1.2, obtenemos fácilmente nuestras primeras estimaciones para $I(\lambda)$.

Corolario 3.1.10. *Sean $j, k \geq 2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, para cualquier $u \in U_{(1,k)}$ ó $u \in U_{(j,1)}$*

$$|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-1/(2k)}$$

ó

$$|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-1/(2j)}$$

respectivamente.

El siguiente teorema es una generalización del corolario anterior, vamos a estimar $|I(\lambda)|$ con $u \in U_{(j,k)}$, $j \geq 1$ y $k \geq 2$.

Proposición 3.1.11. **a)** *Para cada $j \geq 1$ y $k \geq 2$ existe $C < \infty$ tal que para toda $u \in U_{(j,k)}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-1/(k2^j)}.$$

b) *Para cada $k \geq 1$ y $j \geq 2$ existe $C < \infty$ tal que para toda $u \in U_{(j,k)}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-1/(j2^k)}.$$

Demostración: Por simetría basta probar el inciso a).
Por inducción sobre j. El caso $j = 1$ está dado por el corolario anterior.
Supongamos válida la afirmación para $j - 1$.
Como estamos trabajando en espacios de medida finita

$$\int_{[0,1]} \left| \int_{[0,1]} e^{i\lambda u(x,y)} dx \right| dy \leq \left(\int_{[0,1]} \left| \int_{[0,1]} e^{i\lambda u(x,y)} dx \right|^2 dy \right)^{1/2},$$

entonces,

$$\left(\int_{[0,1]} \left| \int_{[0,1]} e^{i\lambda u(x,y)} dx \right| dy \right)^2 \leq \int_{[0,1]} \left| \int_{[0,1]} e^{i\lambda u(x,y)} dx \right|^2 dy,$$

por lo cual,

$$|I(\lambda)|^2 \leq \int_{[0,1]} \left| \int_{[0,1]} e^{i\lambda u(x,y)} dx \right|^2 dy = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} e^{i\lambda u(x_1,y)} dx_1 \int_{[0,1]} \overline{e^{i\lambda u(x_2,y)}} dx_2 dy$$

$$= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} e^{i\lambda [u(x_1,y) - u(x_2,y)]} dy \right) dx_2 dx_1$$

$$= \int_{[0,1]} \int_{-x_1}^{1-x_1} \left(\int_{[0,1]} e^{i\lambda[u(x_1,y)-u(z+x_1,y)]} dy \right) dz dx_1$$

siempre que $z = x_2 - x_1$. Sean $\psi_z \colon Q^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\psi_z(x_1, y) = u(x_1, y) - u(z+x_1, y)$ y $J_{x_1,z}(\lambda) = \int e^{i\lambda\psi_z(x_1,y)} dy$. Veremos que

$$\left| \frac{\partial^{(j-1)+k}}{\partial x^{j-1} \partial y^k} \psi_z(x_1, y) \right| \geq |z| \tag{3.10}$$

para aplicar la hipótesis de inducción a $|\int J_{x_1,z}(\lambda) dx_1|$.

Si $z < 0$:

$$-z = \int_{x_1+z}^{x_1} ds \leq \int_{x_1+z}^{x_1} \frac{\partial^j}{\partial s^j} \left[\frac{\partial^k}{\partial y^k} u(s, y) \right] ds = \frac{\partial^{(j-1)+k}}{\partial x_1^{j-1} \partial y^k} \psi_z(x_1, y).$$

Si $z \geq 0$

$$z = \int_{x_1}^{x_1+z} ds \int_{x_1}^{x_1+z} \frac{\partial^j}{\partial s^j} \left[\frac{\partial^k}{\partial y^k} u(s, y) \right] ds = -\frac{\partial^{(j-1)+k}}{\partial x_1^{j-1} \partial y^k} \psi_z(x_1, y)$$

ya que $u \in U_{j,k}$. Entonces, para toda z, se satisface (3.10).

Ahora,

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]} \int_{-x_1}^{1-x_1} \left(\int_{[0,1]} e^{i\lambda\psi_z(x_1,y)} dy \right) dz dx_1 \\ &\leq \int_{-1}^{0} \left| \int_{-z}^{1} \int_{[0,1]} e^{i\lambda\psi_z(x_1,y)} dy dx_1 \right| dz \\ &+ \int_{0}^{1} \left| \int_{0}^{1-z} \int_{[0,1]} e^{i\lambda\psi_z(x_1,y)} dy dx_1 \right| dz \end{aligned}$$

Si aplicamos la hipótesis de inducción a ambos sumandos tenemos que,

$$\begin{aligned} |I(\lambda)|^2 &\leq \int_{-1}^{0} C|\lambda z|^{-1/(2^{j-1}k)} dz + \int_{0}^{1} C|\lambda z|^{-1/(2^{j-1}k)} dz \\ &= C|\lambda|^{-1/(2^{j-1}k)} \int_{-1}^{1} |z|^{-1/(2^{j-1}k)} dz. \end{aligned}$$

Lo desarrollado hasta el momento se pudo haber hecho suponiendo que $u \colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, obteniendo estimaciones análogas a las ahora obtenidas en las que las constantes también sean independientes de los parámetros a, b, c y d. Por lo que la constante C obtenida de la hipótesis de inducción es también independiente de los limites de integración de los dos sumandos anteriores.

Como $2^{j-1}k > 1$ entonces $\int_{-1}^{1} |z|^{-1/(2^{j-1}k)}dz \leq \infty$. Por lo tanto

$$|I(\lambda)| \leq C(|\lambda|^{-1/(2^{j-1}k)})^{1/2} = C|\lambda|^{-1/(2^{j}k)}.$$

$\square$

Pidamos ahora hipótesis extras a u para poder obtener un resultado con j y k mayores o iguales a uno. Ya sabemos que sin condiciones extras podemos encontrar un contraejemplo para el caso $j = k = 1$.

Además de permitir el caso $j = k = 1$ con la proposición que sigue obtendremos un mejor exponente para λ.

Proposición 3.1.12. *Sean $j, k \geq 1$, $\beta > 0$ y $u \in U_{(j,k)}$ tales que para alguna $\delta > 0$ el número de componentes conexas del conjunto*

$$\left\{ y \in [0,1] : \left| \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x,y) \right| \geq \beta \right\}$$

es a la más δ, con δ independiente de x y β. Si $k = 1$ supondremos además que $\partial^2 u/\partial y^2$ tiene para cada x a lo más δ cambios de signo. Entonces existe una constante positiva $C_{j,k,\delta}$ tal que para toda $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|I(\lambda)| \leq \frac{C_{j,k,\delta}}{|\lambda|^{1/j+k}}.$$

Demostración: Sean $A = \{(x,y) \in Q^2 : |\frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x,y)| \geq \beta\}$ y $B = \{(x,y) \in Q^2 : |\frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x,y)| < \beta \}$, con β por determinar. Entonces,

$$|I(\lambda)| \leq \left| \int_A e^{i\lambda u(x,y)} dydx \right| + \int_B \int |e^{i\lambda u(x,y)}| dydx = I + II.$$

$$I = \left| \int \int \chi_A(x,y) e^{i\lambda u(x,y)} dydx \right| \leq \int \left| \int_{\{y \in [0,1] : |\partial^k/\partial y^k u(x,y)| \geq \beta\}} e^{i\lambda u(x,y)} dy \right| dx.$$

Las hipótesis nos permiten descomponer la integral interior en la suma de a lo más δ integrales, cada una con un intervalo como dominio en el que $|\partial^k u(x,y)/\partial y^k| \geq \beta$. A cada una de estas nuevas integrales le podemos aplicar el Corolario 1.0.15, siempre que $k \geq 2$, y acotar I con $C_{k,\delta}(|\lambda|\beta)^{-1/k}$. Si $k = 1$, $\partial^2 u/\partial y^2$ tiene a lo más δ cambios de signo para x fija, entonces $\{y \in [0,1] : |\partial u(x,y)/\partial y| \geq \beta\}$ se descompone en a lo más $\delta + 1$ intervalos donde $\partial u/\partial y$ es monótona. En consecuencia podemos estimar la integral, dividiéndola en una suma donde cada sumando tiene como dominio uno de estos intervalos, con $C_\delta/|\lambda|\beta$ (por el Teorema 1.0.7).

Por otro lado,

$$II \leq \int\int_{\left\{x\in[0,1]:\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}u(x,y)\right|\leq\beta\right\}} dxdy = \int\left|\left\{x \in [0,1] : \left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}u(x,y)\right| \leq \beta\right\}\right| dy.$$

Por el Corolario 1.0.6 existe C_j de la variable y y de la función u tal que

$$\left|\left\{x \in [0,1] : \left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}u(x,y)\right| \leq \beta\right\}\right| \leq C_j\beta^{1/j}.$$

Por lo tanto, $II \leq C_j\beta$. Juntando las dos estimaciones

$$I(\lambda) \leq C_j\beta^{1/j} + C_{k,\delta}(|\lambda|\beta)^{-1/k}.$$

Haciendo $\beta = \lambda^{-j/j+k}$ obtenemos el resultado deseado.

$\square$

Observemos que $j + k \leq k2^j$, entonces $|\lambda|^{-1/j+k} \leq |\lambda|^{-1/k2^j}$. Es en este sentido que decíamos que con esta proposición obtendríamos un mejor exponente para λ. Es claro que la desigualdad anterior es válida si y solo si $|\lambda| \geq 1$. Pero como estamos trabajando en espacios de medida finita,

$$|I(\lambda)| \leq \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} |e^{i\lambda u(x,y)}|dxdy \leq 1.$$

Entonces si $|\lambda| \leq 1$ se cumple trivialmente que $|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-1/j+k}$ para toda $u \in U_{(j,k)}$ ($j \geq 2$ y $k \geq 1$ ó $j \geq 1$ y $k \geq 2$).

Corolario 3.1.13. *Sea $u \in U_{j,k}$ con $j,k \geq 1$. Si existe $N > k$ tal que $\partial^N u/\partial y^N$ es positiva o negativa ó si existe $M > j$ tal que $\partial^M u/\partial x^M$ es positiva o negativa, entonces*

$$|I(\lambda)| \leq C/|\lambda|^{1/(j+k)}.$$

Demostración: Vamos a suponer primero que existe $N > k$ tal que $\partial^N u/\partial y^N$ es positiva o negativa. Por el Lema 1.0.9, $\left\{y \in [0,1] : \left|\frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x,y)\right| \geq \beta\right\}$ se divide en un número finito de intervalos que sólo depende de k. Si además suponemos que $k > 1$ entonces, podemos usar la proposición anterior y obtener que

$$|I(\lambda)| \leq C/|\lambda|^{1/(j+k)}.$$

En el lema 1.0.9 vimos que si $\partial^N u/\partial y^N$ es positiva o negativa entonces $\partial^2 u/\partial y^2$ tiene un número finito de cambios de signo, lo que nos permite utilizar la Proposición 3.1.12 cuando $k = 1$ y obtener la cota deseada.

Para estimar $|I(\lambda)|$ cuando se supone que existe $M > j$ tal que $\partial^M u/\partial x^M$ es positiva o negativa basta observar que en la Proposición 3.1.12 podemos utilizar como hipótesis que existe $\delta > 0$ tal que el número de componentes del conjunto

$$\left\{x \in [0,1] : \left|\frac{\partial^j}{\partial y^j} u(x,y)\right| \geq \beta\right\}$$

es a la más δ, con δ independiente de y y β. Si $j = 1$ supondremos además que $\partial^2 u/\partial x^2$ tiene para cada y a lo más δ cambios de signo, para concluir que

$$|I(\lambda)| \leq \frac{C_{j,k,\delta}}{|\lambda|^{1/(j+k)}}.$$

□

3.2. El lema de van der Corput para más de dos variables

Continuamos con los resultados para más de dos variables. No está de más mencionar que ahora T_λ es un operador de $L^p(Q^{n''})$ en $L^q(Q^{n'})$ con $n' + n'' = n \geq 3$, $x = (x', x'') \in Q^{n'} \times Q^{n''}$ y que toma la siguiente forma

$$T_\lambda f(x') = \int_{Q^{n''}} e^{i\lambda u(x',x'')} f(x'')dx'',$$

mientras que

$$I(\lambda) = \int_{Q_n} e^{i\lambda u(x)} dx$$

donde $u\colon Q^n \to \mathbb{R}$ es una función que satisface $D^\beta u \geq 1$ en todo Q^n.

Hay que observar que la prueba del Teorema 3.1.1 puede rehacerse para los operadores T_λ e $I(\lambda)$ determinados por funciones u de más de dos variables sin que se requiera ningún cambio esencial, así que daremos como válido dicho teorema para más de dos dimensiones.

El ejemplo construido en el Teorema 3.1.6 nos impide incluir algún resultado en el que $\beta = (1, 1, \ldots, 1)$, ya que el objetivo es encontrar estimaciones que sean válidas en cualquier dimensión. Veremos que es posible encontrar un $\epsilon > 0$ y una constante C tal que $|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-\epsilon}$ para toda función $u \in U_\beta$ con alguna entrada de β mayor o igual a dos. Después pediremos condiciones extras a u que servirán para lograr $\epsilon = |\beta|$.

Atacaremos directamente $I(\lambda)$ y obtendremos como consecuencia estimaciones para T_λ.

Teorema 3.2.1. *Para cada $n \geq 2$ y cada β multi-índice con al menos una entrada estrictamente mayor a 1, existen $0 < \epsilon_{n,\beta} < 1$ y $C_{\epsilon,n,\beta}$ tal que para toda $u \in U_\beta$ y $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-\epsilon}.$$

Demostración: Revisemos primero el caso $n = 2$. Supongamos $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. Cuando $\beta_2 \geq 2$ y $\beta_1 \geq 1$ ó $\beta_2 \geq 1$ y $\beta_1 \geq 2$ la Proposición 3.1.11 da el resultado. Restan por analizar dos casos, a saber, $a)\, \beta = (0, 2)$ y $b)\, \beta = (2, 0)$. Ambos casos tienen demostraciones muy parecidas, así que sólo escribiremos la prueba del inciso $a)$.

$a)$ Por hipótesis $\partial^2 u/\partial y^2 \geq 1$, entonces por el Corolario 1.0.15,

$$|I(\lambda)| = \left| \int_{Q^2} e^{i\lambda u(x,y)} dy dx \right| \leq \int_0^1 \left| \int_0^1 e^{i\lambda u(x,y)} dy \right| dx \leq \int_0^1 C/|\lambda|^{1/2} dx = C/|\lambda|^{1/2}.$$

Supongamos ahora el resultado válido para $n-1$. Sea $\beta = (\beta', \beta_n)$, $\beta' \in \mathbb{N}^{n-1}$, $\beta_n \in \mathbb{N}$ y supongamos que la entrada que al menos es dos es algún elemento de β'. Procederemos por inducción sobre β_n.

Supongamos que $\beta_n = 0$, entonces si escribimos $x = (x', x_n), x' \in Q^{n-1}, x_n \in Q^1$, tenemos que

$$D^{\beta'} u(x', x_n) = \frac{\partial^{(\beta', \beta_n)}}{\partial x'^{\beta'} \partial x_n^{\beta_n}} u(x', x_n) = D^\beta u(x', x_n) \geq 1.$$

Podemos entonces aplicar la hipótesis de inducción sobre la dimensión y el Corolario 1.0.15 para obtener una constante positiva C independiente da la variable x_n tal que $|\int_{Q^{n-1}} e^{i\lambda u(x',x_n)}dx'| \le C|\lambda|^{-\epsilon}$ y, entonces,

$$|I(\lambda)| \le \int_{[0,1]} \left| \int_{Q^{n-1}} e^{i\lambda u(x',x_n)}dx' \right| dx_n \le C|\lambda|^{-\epsilon}.$$

Supongamos ahora que el resultado es válido para $\beta_n \in \{0,\dots,k-1\}$. Hay que demostrar que si $D^{(\beta',k)}u(x) \ge 1$ entonces $|I(\lambda)| \le C|\lambda|^{-\epsilon}$.

$$|I(\lambda)|^2 \le \int_{Q^{n-1}} \left| \int_{Q^1} e^{i\lambda u(x',x_n)}dx_n \right|^2 dx' = \int_{Q^{n-1}} \int_{Q^1} e^{i\lambda u(x',x_n)}dx_n \overline{\int_{Q^1} e^{i\lambda u(x',z)}dz dx'} =$$

$$= \int_{Q^1}\int_{Q^1}\int_{Q^{n-1}} e^{i\lambda[u(x',x_n)-u(x',z)]}dx'dzdx_n$$

$$= \int_0^1 \int_{-x_n}^{1-x_n} \int_{Q^{n-1}} e^{i\widehat{\lambda}[u(x',x_n+s)-u(x',x_n)]}dx'dsdx_n$$

$$= \int_{-1}^0 \int_{Q^{n-1}} \int_{-s}^1 e^{i\widehat{\lambda}[u(x',x_n+s)-u(x',x_n)]}dx_n dx' ds$$

$$+ \int_0^1 \int_{Q^{n-1}} \int_0^{1-s} e^{i\widehat{\lambda}[u(x',x_n+s)-u(x',x_n)]}dx_n dx' ds,$$

siempre que $s = z - x_n$ y que $\widehat{\lambda} = -\lambda$. Sea $\psi_s\colon Q^n \to \mathbb{R}$ dada por $\psi_s(x',x_n) = u(x',x_n+s) - u(x',x_n)$. Veremos que para toda s

$$|D^{(\beta',k-1)}\psi_s| \ge |s| \tag{3.11}$$

para utilizar la hipótesis de inducción (sobre β_n) y acotar $|\int_{Q^{n-1}}\int_{-s}^1 e^{i\widehat{\lambda}\psi_s(x',x_n)}dx_n dx'|$ y $|\int_{Q^{n-1}}\int_0^{1-s} e^{i\widehat{\lambda}\psi_s(x',x_n)}dx_n dx'|$.

Si $s \ge 0$

$$0 \le s = \int_{x_n}^{x_n+s} 1dt \le \int_{x_n}^{x_n+s} D^\beta u(x',t)dt = \int_{x_n}^{x_n+s} \frac{\partial^{\beta'}\partial^{k-1}}{\partial x^{\beta'}\partial t^{k-1}}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x',t)\right)dt$$

$$= \int_{x_n}^{x_n+s} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{\beta'}\partial^{k-1}}{\partial x^{\beta'}\partial t^{k-1}}u(x',t)\right)dt = \frac{\partial^{\beta'}\partial^{k-1}}{\partial x^{\beta'}\partial t^{k-1}}[u(x',x_n+s)-u(x',x_n)] =$$

$$= D^{(\beta',k-1)}\psi_s(x',x_n).$$

Si $s \leq 0$

$$0 \leq -s = \int_{y+s}^{y} 1dt \leq \int_{y+s}^{y} D^{\beta}u(x',t)dt = \int_{y+s}^{y} \frac{\partial^{\beta'}\partial^{k-1}}{\partial x^{\beta'}\partial t^{k-1}}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x',t)\right)dt$$

$$= \int_{y+s}^{y} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{\beta'}\partial^{k-1}}{\partial x^{\beta'}\partial t^{k-1}}u(x',t)\right)dt = \frac{\partial^{\beta'}\partial^{k-1}}{\partial x^{\beta'}\partial t^{k-1}}[u(x',y) - u(x',y+s)] =$$

$$= -D^{(\beta',k-1)}\psi_s(x',y).$$

Por lo tanto (3.11) se satisface para toda s. Ahora podemos aplicar la hipótesis de inducción sobre β_n y obtener que

$$\left|\int_{Q_{n-1}}\int_{-s}^{1} e^{i\widehat{\lambda}\psi_s(x',x_n)}dx_n dx'\right| \leq C(|\lambda s|)^{-\epsilon}$$

y que

$$\left|\int_{Q^{n-1}}\int_{0}^{1-s} e^{i\widehat{\lambda}\psi_s(x',x_n)}dx_n dx'\right| \leq C(|\lambda s|)^{-\epsilon}$$

para luego integrar con respecto a s (podemos integrar con respecto a s pues $0 < \epsilon < 1$)y lograr así estimar $|I(\lambda)|$ con $O(|\lambda|^{-\epsilon})$.

□

El resultado siguiente es consecuencia del teorema anterior vía el Teorema 3.1.1 para más de dos variables.

Teorema 3.2.2. *Sean $n = n' + n'' \geq 2$, $p > 1$ y $q < \infty$. Sea $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n'}, \ldots, \beta_n)$ tal que $\beta_i \neq 0$ para alguna $0 \leq i \leq n'$ y $\beta_j \geq 2$ para alguna $n'+1 \leq j \leq n$. Entonces existe $\epsilon > 0$ y $C < \infty$ tal que para toda función $u \in U_\beta$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ el operador*

$$T_\lambda f(x') = \int_{Q^{n''}} e^{i\lambda u(x',x'')}f(x'')dx''$$

cumple con

$$\|T_\lambda f\|_{L^q(Q^{n'})} \leq C\lambda^{-\epsilon}\|f\|_{L^p(Q'')}.$$

Por último, pediremos a u condiciones extras para lograr que en la estimación de $I(\lambda)$ el exponente para λ sea el sugerido por el Lema de van der Corput.

Teorema 3.2.3. *Sea u una función integrable tal que $D^\beta u \geq 1$ en Q^n y que para algunos índices $N_2 > \beta_2, N_3 > \beta_3, \ldots, N_n > \beta_n$ las derivadas parciales $D^{(0,0,\ldots,N_n)}u$, $D^{(0,0,\ldots,0,N_{n-1},\beta_n)}u, \ldots, D^{(0,N_2,\beta_3,\ldots,\beta_n)}u$ son positivas ó negativas. Entonces existe C tal que*

$$|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-1/|\beta|}.$$

Demostración: Sean $\beta = (\beta', \beta_n)$, $\beta' \in \mathbb{N}^{n-1}, \beta_n \in \mathbb{N}$ y γ una cantidad por determinar. Entonces, si escribimos $x = (x', x_n), x' \in Q^{n-1}, x_n \in [0,1]$, tenemos que

$$|I(\lambda)| \leq \left| \int_{\left\{(x',x_n)\in Q^n : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x',x_n)\right| \geq \gamma\right\}} e^{i\lambda u(x',x_n)} dx' dx_n \right|$$

$$\left| \int_{\left\{(x',x_n)\in Q^n : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x',x_n)\right| < \gamma\right\}} e^{i\lambda u(x',x_n)} dx' dx_n \right|.$$

Analicemos el segundo sumando,

$$\left| \int_{\left\{(x',x_n)\in Q^n : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x',x_n)\right| < \gamma\right\}} e^{i\lambda u(x',x_n)} dx' dx_n \right|$$

$$\leq \int_{\left\{(x',x_n)\in Q^n : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x',x_n)\right| < \gamma\right\}} |e^{i\lambda u(x',x_n)}| dx' dx_n \leq \int_{\left\{(x',x_n)\in Q^n : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x',x_n)\right| < \gamma\right\}} dx' dx_n$$

$$= \int_{Q^1} \int_{\left\{x'\in Q^{n-1} : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x',x_n)\right| < \gamma\right\}} dx' dx_n = \int_{Q^1} \left| \left\{ x' \in Q^{n-1} : \left| \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x', x_n) \right| < \gamma \right\} \right| dx_n.$$

Para cada x_n fijo definimos $\psi_{x_n}\colon\ Q^{n-1} \to \mathbb{R}$ dada por $\psi_{x_n}(x') = \partial^{\beta_n}/\partial x_n^{\beta_n} u(x', x_n)$. Entonces $D^{\beta'}\psi_{x_n} = D^{(\beta',\beta_n)}u = D^\beta u \geq 1$ y $D^{(0,\ldots,N_{n-1})}\psi_{x_n}, D^{(0,\ldots,N_{n-2},\beta_{n-1})}\psi_{x_n}, \ldots$ $D^{(0,N_2,\beta_3,\ldots,\beta_{n-1})}\psi_{x_n}$ son positivas o negativas, con $N_2 > \beta_2, N_3 > \beta_3, \ldots, N_{n-1} > \beta_{n-1}$. Por lo tanto, ψ_{x_n} satisface las hipótesis del Teorema 2.2.2 que nos permite asegurar que

$$|\{x' \in Q^{n-1} : |\psi_{x_n}(x')| < \gamma\}| \leq C\gamma^{1/|\beta'|}.$$

Trabajando como en la prueba del Corolario 1.0.15 podemos asegurar que la constante que nos proporciona el Teorema 2.2.2 es independiente de la variable x_n.

Por lo tanto,

$$\left| \int_{\left\{(x',x_n)\in Q^n : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x',x_n)\right| < \gamma\right\}} e^{i\lambda u(x',x_n)} dx' dx_n \right| \leq C\gamma^{1/|\beta'|}.$$

Por otro lado, para cada x' fija, la existencia de $N_n > \beta_n$ tal que $D^{(0,0,\ldots,N_n)}u$ no cambia de signo nos permite aplicar el Lema 1.0.9 para dividir $\{x_n \in [0,1] : |\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x',x_n)| \geq \gamma\}$ en un número finito de intervalos que sólo depende de N_n en los que $\partial^{\beta_n} u(x',x_n)/\partial x_n^{\beta_n}$ es monótona, para después aplicar en cada uno de estos intervalos el Lema de van der Corput. Entonces,

$$\left| \int_{\left\{(x',x_n)\in Q^n : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x',x_n)\right| \geq \gamma\right\}} e^{i\lambda u(x',x_n)} dx' dx_n \right|$$

$$\leq \int_{Q^1} \left| \int_{\left\{x_n\in [0,1] : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x',x_n)\right| \geq \gamma\right\}} e^{i\lambda u(x',x_n)} dx_n \right| dx' \leq C \int (|\lambda|\gamma)^{-1/\beta_n} dx'.$$

Por lo tanto

$$|I(\lambda)| \leq C(\gamma^{1/|\beta'|} + (|\lambda|\gamma)^{-1/\beta_n}),$$

tomando $\gamma = \lambda^{-|\beta'|/|\beta|}$ obtenemos

$$|I(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-1/|\beta|}.$$

$\square$

Capítulo 4

Casos particulares del lema de van der Corput y de los Subconjuntos de Nivel

Los resultados que a continuación presentamos son casos particulares de estimaciones de la medida de los subconjuntos de nivel y del lema de van der Corput en los que u es un polinomio de grado fijo. Conseguiremos resultados para polinomios de varias variables sin tener que pedir explícitamente hipótesis extras.

Comenzamos con estimaciones para los subconjuntos de nivel.

Teorema 4.0.4. *Sean $d, n \in \mathbb{N}$ y $u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polinomio de grado menor o igual a d que satisface $D^\beta u(x) \geq 1$ para algún multi-índice β y para todo $x \in Q^n$. Entonces existe $C < \infty$ tal que*

$$|\{x \in Q^n : |u(x)| \leq \alpha\}| \leq C\alpha^{1/|\beta|}.$$

Demostración: Supondremos $\beta = (\beta', \beta'') \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}$ y $x = (x', x'') \in Q^{n-1} \times Q$.
Por ser u un polinomio, podemos descomponer $[0, 1]$ en un número finito de intervalos que sólo depende de d en los que para cada x' fijo, $\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} u(x', x_n)$ es positiva o negativa. Con esta observación en mano podemos repetir de manera casi idéntica la prueba del Teorema 2.2.2 para obtener la conclusión deseada.

□

Utilizando el teorema anterior, probaremos el Lema de van der Corput para polinomios de cualquier número de variables.

Teorema 4.0.5. *Para cualquier polinomio* $u\colon Q^n \to \mathbb{R}$ *de grado menor o igual a* d *que satisfaga* $D^\beta u \geq 1$ *para algún multi-índice* β, *existe* $C_{n,\beta,d}$ *tal que*

$$\left|\int_{Q^n} e^{i\lambda u(x)}dx\right| \leq C|\lambda|^{-1/|\beta|}.$$

Demostración: Si dividimos $|I(\lambda)|$ como en la prueba del Teorema 3.2.3 entonces,

$$|I(\lambda)| \leq \int \left|\int_{\left\{x_n\in[0,1]:\left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}u(x',x_n)\right|\geq\gamma\right\}} e^{i\lambda u(x',x_n)}dx_n\right| dx'$$
$$+\int\int_{\left\{x'\in Q^{n-1}:\left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}u(x',x_n)\right|<\gamma\right\}} dx'dx_n,$$

donde γ es una cantidad por determinar.

Utilizando el teorema anterior podemos acotar el segundo sumando por $C\gamma^{-1/|\beta'|}$.

Valiéndonos del hecho de que u es un polinomio podemos descomponer al conjunto $\{x_n \in [0,1] : \left|\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}u(x',x_n)\right| \geq \gamma\}$ en un número finito de intervalos que sólo depende del grado de u en los que $\partial^{\beta_n}u(x',x_n)/\partial x_n^{\beta_n}$ es monótona. Usando el Teorema 1.0.14 podemos estimar el primer sumando por $C(|\lambda|\gamma)^{-1/\beta_n})$.

Tomando $\gamma = \lambda^{-|\beta'|/|\beta|}$, concluimos que

$$\left|\int_{Q^n} e^{i\lambda u(x)}dx\right| \leq C|\lambda|^{-1/|\beta|}.$$

□

Si no pedimos condiciones para alguna derivada de u también podemos acotar $I(\lambda)$, aunque nuestra cota dependerá de los coeficientes del polinomio. Necesitaremos el siguiente lema para el caso $n = 1$.

Lema 4.0.6. *Sea* $p(t) = \sum_{j=1}^d c_j t^j$. *Supongamos que* $\sum_{j=1}^d |c_j| \geq e$, *entonces para alguna* j, $|p^j(t)| \geq 1/2$ *en* $[0, log_e(3/2)]$.

Demostración:
Sea $j_0 \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots, d-2\}$ el primer número tal que

$$|c_{d-j_0-1}| \geq \frac{1}{(d-j_0-1)!}. \tag{4.1}$$

El número j_0 existe ya que si $|C_{d-j-1}| < 1/(d-j-1)!$ para todo $j \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots, d-2\}$ entonces,

$$\sum_{j=1}^{d} |c_j| < \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{j!} < e$$

lo cual es una contradicción. Además, podemos suponer que j_0 es el primer número en satisfacer (4.1) por el Principio del Buen Orden. En consecuencia,

$$j!|c_j| \leq 1 \tag{4.2}$$

para $j = d - j_0, d - j_0 + 1, \ldots, d$.
Entonces,

$$|p^{(d-j_0-1)}(t)| = \left| \sum_{j=d-j_0-1}^{d} \frac{j!}{(j-d+j_0+1)!} c_j t^{i-d+j+1} \right|$$

$$\geq |(d-j_0-1)! c_{d-j_0-1}| - \sum_{j=d-j_0}^{d} \left| \frac{j!}{(j-d+j_0+1)!} c_j t^{i-d+j+1} \right|.$$

Ahora, por (4.1) y (4.2) lo anterior está dominado por,

$$1 - \sum_{d-j_0}^{d} \frac{t^{i-d+j+1}}{(j-d+j_0+1)!} = 1 - \sum_{j=1}^{j_0} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!} \geq 1 - (e^t - 1).$$

Por último, si despejamos, observamos que

$$1 - (e^t - 1) \geq \frac{1}{2}, \text{ siempre que } \frac{3}{2} \geq e^t,$$

es decir, si $t \in [0, \log_e(3/2)]$.

Por lo tanto, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que para toda $t \in [0, \log_e(3/2)]$

$$|p^{(j)}(t)| \geq 1/2.$$

$\square$

Teorema 4.0.7. *Sea* $p(x) = \sum_{|\alpha|\leq d} c_\alpha x^\alpha, c_\alpha \in \mathbb{R}$. *Entonces existe* $C_{d,n}$ *tal que,*

$$\left|\int_{Q^n} e^{ip(x)}dx\right| \leq C_{d,n}\left(\sum_{0<|\alpha|\leq d}|c_\alpha|\right)^{-1/d}.$$

Más aun, si p *es un polinomio de variable real entonces,*

$$\left|\int_{Q^n} e^{ip(t)}dt\right| \leq Cd\left(\sum_{j=1}^{d}|c_j|\right)^{-1/d}.$$

Demostración: Comenzamos con el caso en que $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n \geq 2$. Como en $\sum_{0<|\alpha|\leq d}|c_\alpha|$ no aparece el término constante podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el término independiente de nuestros polinomios es cero. Denotemos con $\wp_d$ el espacio vectorial de polinomios del tipo $p(x) = \sum_{|\alpha|\leq d} c_\alpha x^\alpha, c_\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos para todo $p \in \wp_d$, $\|p\|_{\wp_d} = \sum_{0<|\alpha|\leq d}|c_\alpha|$. $\|\cdot\|_{\wp_d}$ es una norma para $\wp_d$

Consideremos el funcional $\theta\colon \wp_d \to \mathbb{R}$, dado por

$$\theta(p) = \max_{0<|\alpha|\leq d}\ \min_{x\in Q^n}|D^\alpha p(x)|.$$

Analizaremos primero algunas características del operador θ que serán necesarias para estimar $I(\lambda)$. Es inmediato de la definición de θ que $\theta(\lambda p) = \lambda\theta(p)$, es decir, θ es homogénea de grado uno.

Veamos ahora que θ es continua en $p \equiv 0$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{\wp_d}$. Sea $\epsilon > 0$. Si escogemos $q=\sum_{0<|\alpha|\leq d} c_\alpha x^\alpha$ tal que $\|q\|_{\wp_d} < \epsilon/(d!)^n$, entonces para cualquier β multi-índice tal que $0 < |\beta| \leq d$ y $x = (1, 1, \ldots, 1)$,

$$|D^\beta q(x)| \leq (d!)^n \sum_{0<|\alpha|\leq d}|c_\alpha| < \epsilon.$$

Es decir, $|\theta(q)| \leq \epsilon$ siempre que $\|q\|_{\wp_d} \leq \epsilon/(d!)^n$. Por lo tanto, θ es continua en $p \equiv 0$.

Probaremos ahora que si $\theta(p) = 0$ entonces $p = 0$. Supongamos que $\theta(p) = 0$ entonces,

$$\max_{0<\alpha\leq d}\ \inf_{x\in Q^n}|D^\alpha p(x)| = 0, \text{ por lo que, } \inf_{x\in Q^n}|D^\alpha p(x)| = 0$$

para toda $0 < |\alpha| \leq d$. Entonces, escogiendo α adecuados, podemos ver que los coeficientes de los términos de cada grado, empezando con los de grado d, son iguales a cero.

Con ayuda de estas propiedades demostraremos que existe una constante $C > 0$ tal que para todo $p \in \wp_d$, $\theta(p) \geq C\|p\|_{\wp_d}$. Como θ es homogénea de grado uno bastará con probar que $\theta(p) \geq C$ para p que satisfaga $\|p\|_{\wp_d} = 1$.

Supongamos que no existe una tal C . Sea $S^1 = \{p \in \wp_d : \|p\|_{\wp_d} = 1\}$. Entonces existe

$$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S^1 \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} \theta(p_n) = 0.$$

La compacidad de S^1 nos asegura la existencia de

$$\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ y de } p_0 \in S^1 \text{ tales que } \lim_{k\to\infty} p_{n_k} = p_0.$$

Pero por ser θ continua en $q \equiv 0$ y $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión tenemos que $p_0 = 0$, pero esto es imposible porque $p_0 \in S^1$. Por lo tanto, existe $C > 0$ tal que $\theta(p/\|p\|_{\wp_d}) \geq C$ para todo $p \in \wp_d$.

Entonces, para algún α_0 multi-índice, $|\alpha_0| \leq d$,

$$\inf_{x\in Q^n} \left| D^{\alpha_0}\left(\frac{p}{\|p\|_{\wp_d}}\right)(x)\right| \geq C,$$

es decir,

$$\left| D^{\alpha_0}\left(\frac{p}{\|p\|_{\wp_d}}\right)(x)\right| \geq C$$

para toda $x \in Q^n$. Podemos ahora utilizar el Teorema 4.0.5 para asegurar que

$$\left|\int_{Q^n} e^{i\|p\|_{\wp_d}\left(\frac{p}{\|p\|_{\wp_d}}\right)(x)} dt\right| \leq C'(C\|p\|_{\wp_d})^{-1/|\alpha_0|}.$$

Por lo tanto, siempre que $\|p\|_{\wp_d} > 1$,

$$\left|\int_{Q^n} e^{ip(x)} dx\right| = \left|\int_{Q^n} e^{i\|p\|_{\wp_d}\left(\frac{p}{\|p\|_{\wp_d}}\right)(x)} dx\right| \leq C'(C\|p\|_{\wp_d})^{-1/d}.$$

Y si $\|p\|_{\wp_d} \leq 1$ entonces,

$$\left|\int_{Q^n} e^{ip(x)} dx\right| \leq \int_{Q^n} dx \leq 1 \leq \|p\|_{\wp_d}^{-1/d}.$$

Trabajaremos ahora el caso en que p es un polinomio de variable real. Supongamos que $p(t) = \sum_{j=1}^{d} c_j t^j$ y que $\|p\| = \sum_{j=1}^{d} |c_j| > 1$. Sea

$$\hat{p}(t) = \sum_{j=1}^{d} b_j t^j,$$

donde $b_j = c_j(\log_e(3/2))^{-j}$. Entonces,

$$\int_0^1 e^{ip(t)}dt = C\int_0^{\log_e 3/2} e^{i\hat{p}(t)}dt = C\int_0^{\log_e 3/2} e^{i\|p\|e^{-1}(\|p\|^{-1}e\hat{p}(t))}dt.$$

Puesto que

$$e\|p\|^{-1}\sum_{j=1}^{d}|b_j| > e\|p\|^{-1}\sum_{j=1}^{d}|c_j| = e,$$

podemos usar el Lema 4.0.6 para asegurar la existencia de $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$, tal que $e\|p\|^{-1}|\hat{p}^{(j)}(t)| > 1/2$ siempre que $t \in [0, \log_e(3/2)]$. Por el Lema de van de Corput,

$$\left|\int_0^{\log_e 3/2} e^{i\|p\|e^{-1}(\|p\|^{-1}e\hat{p}(t))}dt\right| \leq Cj(e^{-1}\|p\|)^{-1/j}.$$

Como supusimos $\|p\| > 1$ y $j \leq d$, concluimos que

$$\left|\int_0^1 e^{ip(t)}dt\right| \leq Cd\left(\sum_{j=1}^{d}|c_j|\right)^{-1/d}.$$

Para el caso en que $\|p\| \leq 1$ basta con observar que

$$\left|\int_0^1 e^{ip(t)}dt\right| \leq \int_0^1 dt \leq 1 \leq Cd\left(\sum_{j=1}^{d}|c_j|\right)^{-1/d}.$$

□

Obtendremos ahora una estimación para el operador T_λ determinado por un polinomio q.

Corolario 4.0.8. *Para cada $d, n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y para $p = 2$ y $q = 2$ existen $C < \infty$ y $\delta > 0$ tales que para cualquier polinomio $Q(x,y) = \sum_\alpha c_\alpha x^{\alpha'} y^{\alpha''}$, donde $x \in Q^{n'}, y \in Q^{n''}$, y $n' + n'' = n, 1 \leq n' \leq n-1$,*

$$\|T_\lambda\|_{L^2\to L^2} \leq C\lambda^{-\delta}\left(\sum_{\alpha:\alpha'\neq 0,\alpha''\neq 0}|c_\alpha|\right)^{-\delta}.$$

Demostración: Haremos el caso $n = 2$ para simplificar la notación. Supongamos que $\sum_{\alpha:\alpha'\neq 0,\alpha''\neq 0} |c_\alpha| = 1$ y sea $\beta = (\beta', \beta'') \neq (0,0)$ tal que $|c_\beta| > 0$.

$$\|T_\lambda f\|_2^2 = \int \left| \int e^{i\lambda Q(x,y)} f(y) dy \right|^2 dx \leq \int \int \left| \int e^{i\lambda[Q(x,y)-Q(x,z)]} dx \right| |f(y)| |\overline{f(z)}| dz dy \leq$$

$$\leq \left(\int \int \left| \int e^{i\lambda[Q(x,y)-Q(x,z)]} dx \right| |f(y)|^2 dz dy \right)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\int \int \left| \int e^{i\hat{\lambda}[Q(x,z)-Q(x,y)]} dx \right| |f(z)|^2 dy dz \right)^{1/2}$$

donde $\hat{\lambda} = -\lambda$. Ambos factores de la última integral requieren de análisis análogos, por lo que sólo escribiremos cómo estimar el primero. Sea

$$\rho(y,z) = \frac{\partial^{\beta'}}{x^{\beta'}}[Q(x,y) - Q(x,z)]|_{x=0} = \sum_{\alpha:\alpha'=\beta',\, \alpha''\neq 0} c'_\alpha (y^{\alpha''} - z^{\alpha''}),$$

entonces,

$$|\rho(y,z)| \leq \sum_{\alpha:\alpha'=\beta',\, \alpha''\neq 0} d! |c_\alpha| |y^{\alpha''} - z^{\alpha''}| \leq \sum_{|\alpha|\leq d} d! |c_\alpha| |y^{\alpha''} - z^{\alpha''}|. \tag{4.3}$$

Por otro lado, el Teorema 4.0.7 asegura que

$$\left| \int e^{i\lambda[Q(x,y)-Q(x,z)]} dx \right| \leq C |\lambda|^{-1/d} \left(\sum_{|\alpha|\leq d} |c_\alpha| |y^{\alpha''} - z^{\alpha''}| \right)^{-1/d},$$

pero, si usamos (4.3) tenemos que

$$\left| \int e^{i\lambda[Q(x,y)-Q(x,z)]} dx \right| \leq C \min\{1, |\lambda|^{-1/d} |\rho(y,z)|^{-1/d}\}. \tag{4.4}$$

Utilizaremos ahora el siguiente resultado que puede ser encontrado en [12].

Para todo $\epsilon < 1/\delta$ existe una constante A que sólo depende de ϵ tal que para todo polinomio $P(x) = \sum_{|\alpha|\leq d} \gamma_\alpha x^\alpha$,

$$\int_{|x|\leq 1} |P(x)|^{-\epsilon} dx \leq A \left(\sum_{|\alpha|<d} |\gamma_\alpha| \right)^{-\epsilon}.$$

Para cada $y \in [0,1]$, $\rho(y,z)$ es un polinomio en z de grado a lo más d, entonces para cualquier $\epsilon < 1/d$,

$$\int_{[0,1]} |\rho(y,z)|^{-\epsilon} dz \leq A \left(\sum_{\alpha:\alpha'=\beta',\,\alpha''\neq 0} |c'_\alpha| + \left| \sum_{\alpha:\alpha'=\beta',\,\alpha''\neq 0} c'_\alpha y^{\alpha''} \right| \right)^{-\epsilon}$$

$$\leq A \left(\sum_{\alpha:\alpha'=\beta',\,\alpha''\neq 0} |c'_\alpha| \right)^{-\epsilon}.$$

Pero,

$$\frac{\partial^{\beta''}}{\partial z^{\beta''}}(\rho(y,z)) = \sum_{\alpha:\alpha'=\beta',\,\alpha''\geq\beta''} c''_\alpha z^{\alpha''-\beta''},$$

entonces,

$$\left.\frac{\partial^{\beta''}}{\partial z^{\beta''}}(\rho(y,z))\right|_{z=0} = \left.\sum_{\alpha:\alpha'=\beta',\,\alpha''=\beta''} c''_\alpha z^{\alpha''-\beta''}\right|_{z=0} = \beta'!\beta''!c_\beta > 0.$$

En consecuencia,

$$\sum_{\alpha:\alpha'=\beta'} |c'_\alpha| > 0,$$

por lo que, para toda $y \in [0,1]$,

$$\int_{[0,1]} |\rho(y,z)|^{-\epsilon} dz \leq A. \tag{4.5}$$

Ahora, supongamos que

$$|\lambda|^{-1/d} |\rho(y,z)|^{-1/d} < 1,$$

por consiguiente,

$$\lambda |\rho(y,z)| > 1,$$

por lo tanto, para todo $\epsilon < 1/d$,

$$\lambda^{-1/d} |\rho(y,z)|^{-1/d} < |\lambda|^{-\epsilon} |\rho(y,z)|^{-\epsilon}.$$

Entonces, por la desigualdad anterior, (4.4) y (4.5),

$$\int\int \left| \int e^{i\lambda[Q(x,y)-Q(x,z)]} dx \right| |f(y)|^2 dz dy \leq \int\int C|\lambda|^{-\epsilon} |\rho(y,z)|^{-\epsilon} |f(y)|^2 dz dy$$

$$= C|\lambda|^{-\epsilon} \int |f(y)|^2 \int |\rho(y,z)|^{-\epsilon} dz dy \le CA|\lambda|^{-\epsilon} \|f\|_2^2.$$

De manera análoga,

$$\int \int \left| \int e^{i\widehat{\lambda}[Q(x,z)-Q(x,y)]} dx \right| |f(z)|^2 dy dz \le CA\left|\widehat{\lambda}\right|^{-\epsilon} \|f\|_2^2 = CA|\lambda|^{-\epsilon} \|f\|_2^2.$$

Si sucediera que $|\lambda|^{-1/d} |\rho(y,z)|^{-1/d} > 1$, entonces,

$$\int \int \left| \int e^{i\lambda[Q(x,y)-Q(x,z)]} dx \right| |f(y)|^2 dz dy \le \int \int |f(y)|^2 dz dy \le \|f\|_2^2.$$

Por lo tanto,

$$\|T_\lambda\|_2^2 \le C|\lambda|^{-\epsilon} \|f\|_2^2.$$

□

Capítulo 5

Relaciones

En este capítulo veremos cómo ciertos resultados de la Teoría de Gráficas podrían ayudar a mejorar la estimación de los subconjuntos de nivel determinados por funciones u con dominio en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Por ejemplo, si la siguiente afirmación fuese verdadera, cosa que hasta el momento no se sabe, podríamos mejorar la estimación de los subconjuntos de nivel para $u \in U_{1,1}$.

Afirmación 5.0.9. *Existe $\epsilon_0 > 0$ con la siguiente propiedad. Para cualquier $E \subseteq [0,1]^2$, $|E| \neq 0$, existen $A, B, C, D \in E$ tal que el rectángulo $ABCD$ tiene las aristas paralelas a los ejes y con área al menos $\epsilon_0 |E|^2$.*

Supongamos que es posible probar la existencia de tal ϵ_0, entonces, el factor $\log^{1/2}(\alpha^{-1})$ en la estimación del Corolario 2.1.6 puede ser eliminado. Para ver esto necesitamos probar que cada rectángulo con vértices en $E = \{(x,y) \in [0,1]^2 : |u(x,y)| \leq \alpha\}$ y aristas paralelas a los ejes tiene área a lo más 4α.

Procederemos como en la prueba del Lema 2.1.4. Sean $A = (x_1, y_1), B = (x_1, y_2), C = (x_2, y_2), D = (x_2, y_1) \in E$. Supongamos que $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ y que el rectángulo $ABCD$ tiene aristas paralelas a los ejes. En la prueba del Lema 2.1.4 vimos que la función $\psi \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = u(x, y_1) - u(x, y_2)$ cumple con $|\psi'(x)| > |y_1 - y_2|$ en todo $[0,1]$ y que $|\psi(x_1)|, |\psi(x_2)| \leq 2\alpha$. Entonces,

$$[x_1, x_2] \subseteq \{z \in [0,1] : |\psi(z)| \leq 2\alpha\}$$

(si hubiera $x_0 \in [x_1, x_2]$ tal que $|\psi(x_0)| > 2\alpha$ tendría que existir $\widehat{x_0}$ tal que $\psi'(\widehat{x_0}) = 0$), y como sabemos que $|\{z \in [0,1] : |\psi(z)| \leq 2\alpha\}| \leq C4\alpha/|y_1 - y_2|$ (por el Lema 2.1.4) entonces $ABCD$ tiene área a lo más $C4\alpha$.

Por lo tanto, la Afirmación 5.0.9 nos asegura la existencia de un rectángulo $R \subseteq E$ y de $\epsilon_0 > 0$ tales que $\epsilon_0 |E|^2 \leq |R|$ (con ϵ_0 independiente de E). Pero por el análisis anterior, $|R| \leq c\alpha$, entonces,

$$|E| = |\{(x,y) \in [0,1]^2 : |u(x,y)| \leq \alpha\}| \leq C\epsilon_0^{-1/2}\alpha^{1/2}.$$

Por otro lado, podemos escribir la Afirmación 5.0.9 en términos de medidas de probabilidad de la siguiente manera.

Afirmación 5.0.10. *Sean μ, ν medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$. Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible tal que $(\mu \otimes \nu)(E) > 0$, existen $A, B, C, D \in E$ tales que el rectángulo $ABCD$ tiene las aristas paralelas a los ejes y con área al menos $\epsilon_0 |E|^2$.*

Utilizando los métodos que se emplearon en el Capítulo 2 podemos probar la afirmación anterior si modificamos un poco las conclusiones.

Proposición 5.0.11. *Existe $\epsilon_{0>0}$ con la siguiente propiedad. Sean μ, ν medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$. Para cada $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible que cumpla con que $(\mu \otimes \nu)(E) > 0$, existe un rectángulo $R \subseteq \mathbb{R}$ con vértices en E y aristas paralelas a los ejes y que satisface*

$$(\mu \otimes \nu)(R) \geq \epsilon_0 (\mu \otimes \nu)(E)^2 / \log^+[1/\mu \otimes \nu(E)].$$

Demostración: Probaremos la contrapositiva, es decir, si cada rectángulo R con aristas paralelas a los ejes y vértices en E cumple con $(\mu \otimes \nu)(R) \leq \alpha$, entonces $(\mu \otimes \nu)(E) \leq C\alpha^{1/2} \log(1/\alpha)^{1/2}$.

Escribiremos, como en el Capítulo 2, $E(y) = \{x \in [0,1] : u(x,y) \in E\}$. Como μ y ν son medidas de probabilidad,

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x,y) d\nu(y) \right| d\mu(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x,y) d\nu(y) \right|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}.$$

Entonces,

$$(\mu \otimes \nu)^2(E) \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \int_R \chi_E(x,y) d\nu(y) \right|^2 d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x,y_1) \chi_E(x,y_2) d\mu(x) d\nu(y_1) d\nu(y_2)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \chi_{E(y_1)}(x)\chi_{E(y_2)}(x)d\mu(x)d\nu(y_1)d\nu(y_2)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mu(E(y_1)\cap E(y_2))d\nu(y_1)d\nu(y_2)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{y_2\le y_1} \mu(E(y_1)\cap E(y_2))d\nu(y_1)d\nu(y_2) + \int_{\mathbb{R}}\int_{y_2\ge y_1} \mu(E(y_1)\cap E(y_2))d\nu(y_1)d\nu(y_2).$$

Por ser simétricas las dos integrales anteriores, tenemos que

$$(\mu\otimes\nu)^2(E) \le 2\int_{\mathbb{R}}\int_{y_2\le y_1} \mu(E(y_1)\cap E(y_2))d\nu(y_1)d\nu(y_2). \tag{5.1}$$

Sean $x_1, x_2 \in E(y_1)\cap E(y_2)$. Supongamos que $x_1 \le x_2$, entonces el rectángulo formado por $(x_1,y_2),(x_2,y_2),(x_2,y_1),(x_1,y_1)$ cumple con $\mu([x_1,x_2])nu([y_2,y_1]) \le \alpha$.

Entonces, por la definición de ínfimo y supremo, el rectángulo R formado por $(\text{ínf}(E(y_1)\cap E(y_2)),y_2), (\sup(E(y_1)\cap E(y_2)),y_2), (\sup(E(y_1)\cap E(y_2)),y_1), (\text{ínf}(E(y_1)\cap E(y_2)),y_1)$ cumple con $(\mu\otimes\nu)(R)\le\alpha$.

Pero al estar $E(y_1)\cap E(y_2)$ contenido en el intervalo $[\text{ínf}(E(y_1)\cap E(y_2)), \sup(E(y_1)\cap E(y_2))]$ se cumple que

$$\mu(E(y_1)\cap E(y_2)) \le \frac{\alpha}{\nu([y_2,y_1))}.$$

En consecuencia, por (5.1),

$$(\mu\otimes\nu)^2(E) \le 2\int_{\mathbb{R}}\int_{y_2\le y_1}\left[\frac{\alpha}{\nu([y_2,y_1))}\wedge 1\right]d\nu(y_1)d\nu(y_2)$$

$$= C\int_{\mathbb{R}}\int_{\{y_1>y_2:\alpha\le\nu((y_2,y_1])\le 1\}}\frac{\alpha}{\nu([y_2,y_1))}d\nu(y_1)d\nu(y_2)$$

$$+C\int_{\mathbb{R}}\int_{\{y_1>y_2:0\le\nu((y_2,y_1])\le\alpha\}}d\nu(y_1)d\nu(y_2).$$

Al segundo sumando lo estimamos usando únicamente que $\nu(\mathbb{R})=\mu(\mathbb{R})=1$,

$$C\int_{\mathbb{R}}\int_{\{y_1>y_2:0\le\nu([y_2,y_1))\le\alpha\}}d\nu(y_1)d\nu(y_2) \le C\int_{\mathbb{R}}\int d\nu(y_1)d\nu(y_2)\le C.$$

Analicemos el primer sumando. Para cada y_2 definimos $y_0 = \text{mín}\{y_1 > y_2 : \nu([y_2,y_1)) \ge \alpha\}$, entonces,

$$C\int_{\mathbb{R}}\int_{\{y_1>y_2:\alpha\le\nu([y_2,y_1))\le 1\}}\frac{\alpha}{\nu([y_2,y_1))}d\nu(y_1)d\nu(y_2)$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}} \int_{\{y_1 \in \mathbb{R}: y_1 \geq y_0\}} \frac{\alpha}{\nu([y_2, y_1))} d\nu(y_1) d\nu(y_2)$$
$$= C \int_{\mathbb{R}} \int \frac{\alpha}{\nu([y_2, y_1))} \chi_{\{y_1 \in \mathbb{R}: y_1 \geq y_0\}}(y_1) d\nu(y_1) d\nu(y_2).$$

Ahora, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(y_1) = (\nu([y_2, y_1))^{-1} \chi_{[y_0, y_0+n]}(y_1)$. Por ser ν una medida de probabilidad, para cada término de la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se cumple[1] que,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(y_1) dy_1 = \int_{y_0}^{y_0+n} \frac{1}{\nu([y_2, y_1))} d\nu(y_1) = \int_{\nu([y_2, y_0))}^{\nu([y_2, y_0+n))} \frac{1}{x} dx \leq \int_{\alpha}^{\nu([y_2, y_0+n))} \frac{1}{x} dx$$
$$= \log\left(\nu([y_2, y_0 + n))\right) - \log(\alpha).$$

Observemos que cuando n tiende a infinito, $\nu([y_2, y_0 + n)) \to 1$.

Además para cada $y_1 > y_2$,

$$f_1(y_1) \leq \ldots \leq f_n(y_1) \leq \ldots \leq (\nu([y_2, y_1)))^{-1} \chi_{\{y_1 \in \mathbb{R}: y_1 \geq y_0\}}(y_1).$$

Entonces, por el Teorema de la Convergencia Monótona,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha}{\nu([y_2, y_1))} \chi_{\{y_1 \in \mathbb{R}: y_1 \geq y_0\}}(y_1) d\nu(y_1) = \alpha \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(y_1) dy_1$$
$$= \alpha \left(\lim_{n \to \infty} \log\left(\nu([y_2, y_0 + n))\right) - \log(\alpha) \right) = \alpha \left(\log(1) - \log(\alpha)\right) = \alpha \log(1/\alpha).$$

Por lo tanto,

$$(\mu \otimes \nu)(E) \leq C \alpha^{1/2} \log^{1/2}(1/\alpha).$$

□

Podemos encontrar conjeturas referentes a polígonos en la Teoría de Gráficas, similares a la Afirmación 5.0.9 que también pueden ser utilizadas para mejorar las estimaciones obtenidas para los subconjuntos de nivel. Necesitaremos la siguiente definición.

Definición: *Una curva de Jordan es una curva plana que es topológicamente equivalente al círculo de radio uno.*

Es decir, una curva de Jordan es un curva cerrada sin cruces.

[1] Vid. Folland, Gerald. Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications. E.U.A., John Wiley & Sons, 1984, p. 103

Afirmación 5.0.12. *Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $E \subseteq Q^2$ con medida de Lebesgue distinta de cero existen $k \in \{4, 6, 8, \ldots\}$ y $V_1, V_2, \ldots, V_k \in E$ tal que la figura $R = V_1V_2 \ldots V_k$ es una curva poligonal de Jordan con todas las aristas paralelas a los ejes y tal que*

$$\text{\it Área}(R) \geq \epsilon_0 k|E|^2.$$

El siguiente Lema es necesario para relacionar los subconjuntos de nivel con la afirmación anterior.

Lema 5.0.13. *Sean $u \in U_{(1,1)}$, $\Gamma \subseteq Q$ una curva poligonal de Jordan tal que todas sus aristas son verticales u horizontales y todos sus vértices pertenezcan a $E = \{(x, y) : |u(x, y)| \leq \alpha\}$. Denotemos con R a la región encerrada por Γ. Entonces*

$$\text{\it Área}(R) \leq \omega \cdot \alpha,$$

donde ω es el número de vértices (punto de intersección de un segmento vertical con uno horizontal) de Γ.

Demostración: Como $u \in U_{(1,1)}$,

$$\begin{aligned}
\text{Área}(R) = \int_R dxdy \leq \int_R \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} dxdy &= \frac{1}{2}\int_R 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_R \left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}\right) dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)\right] dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(-u(x,y))}{\partial x}\right)\right] dxdy.
\end{aligned}$$

Si hacemos $P(x, y) = \frac{\partial(-u(x,y))}{\partial x}$, $Q(x, y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, por el Teorema de Green tenemos que,

$$\begin{aligned}
\text{Área}(R) \leq \frac{1}{2}\int_R \left(\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}P(x,y)\right) dxdy &= \frac{1}{2}\int_\Gamma Q(x,y)dy + P(x,y)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy - \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Integremos por separado los segmentos verticales de los horizontales.

Sean $v_i = (a,b)$, $v_j = (c,b)$ dos vértices de Γ y $c_{ij}(t) = (a+(c-a)t, b)$ el segmento horizontal que los une. Entonces,

$$\int_{c_{ij}} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} dy - \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} dx = \int_0^1 \left(\frac{\partial u(c_{ij}(t))}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial u(c_{ij}(t))}{\partial x}\frac{dx}{dt} \right) dt.$$

Si hacemos $h(t) = u(c_{ij}(t))$ entonces,

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t) = \frac{\partial u(c_{ij}(t))}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial u(c_{ij}(t))}{\partial x}\frac{dx}{dt}.$$

Pero, por ser c_{ij} un segmento horizontal,

$$\frac{dx}{dt} = c - a, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u(c_{ij}(t))}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial u(c_{ij}(t))}{\partial x}\frac{dx}{dt} \right) dt = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} h(t) dt = -h(t)\Big|_0^1$$

$$= -u(c_{ij}(t))\Big|_0^1 = -u\big(a+(c-a)1, b\big) + u\big(a+(c-a)0, b\big) = u(a,b) - u(c,b)$$
$$= u(v_i) - u(v_j).$$

Si calculamos ahora el segmento vertical que sigue, es decir, el que está comprendido entre los vértices v_j y $v_k = (c,d)$ con el mismo método, obtendríamos que

$$\int_{c_{jk}} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} dy - \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} dx = u(c,d) - u(c,b) = u(v_k) - u(v_j).$$

Por lo tanto, con ayuda de (5.2), tenemos que

$$\text{Área(R)} \leq 1/2\big[2u(v_1) - 2u(v_2) + 2u(v_3) + \ldots\big] \leq |u(v_1)| + |u(v_2)| + \ldots + |u(v_\omega) = \omega\alpha.$$

□

Con este lema en mano y si la Afirmación 5.0.12 fuera verdadera podríamos, una vez más, mejorar la estimación del Corolario 2.1.6 quitando el factor logarítmico.

Supongamos válida la Afirmación 5.0.12. Sea $u \in U_{(1,1)}$. Entonces, existe una curva cerrada de Jordan Γ tal que sus k vértices pertenecen a $E = \{(x,y) \in [0,1]^2 : |u(x,y)| \leq \alpha\}$, todas sus aristas son paralelas a los ejes y que cumple con

$$\text{Área}(R) \geq \epsilon_0 k |E|^2,$$

donde R es la figura delimitada por Γ. Pero por el lema anterior,

$$\text{Área}(R) \leq k\alpha.$$

Por lo tanto,

$$|E| \leq C\alpha^{1/2}.$$

Apéndice A

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $0 < \alpha < n$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$, definimos la integración fraccionaria de f de grado α como

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{\pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2)}{\Gamma(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

donde $\Gamma\colon [0,\infty] \to \mathbb{R}$, y $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$. En este apéndice veremos que $I_\alpha f$ converge casi donde sea si $f \in L^p$, $p > 1$. Además, examinaremos para qué exponentes p y q el operador $I_\alpha\colon L^p(R^n) \to L^q(R^n)$, $f \mapsto I_\alpha f$, está acotado.

Teorema A.1: *Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p < q < \infty$, $1/q = 1/p - \alpha/n$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $I_\alpha(f)$ converge absolutamente casi donde sea y*

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q} \|f\|_p.$$

Demostración: Sea $K(x) = |x|^{-n+\alpha}$. Entonces el operador T_K: $L^p(R^n) \to L^q(R^n)$ tal que $T_K(f) = K * f$ difiere solamente en un factor constante de I_α, por lo que, para facilitar la notación, probaremos el teorema para T_K. Sea μ una cantidad por determinar. Definimos,

$$K_1(x) = \begin{cases} K(x), & \text{si } |x| \leq \mu \\ 0, & \text{si } |x| > \mu \end{cases} \quad \text{y} \quad K_\infty(x) = \begin{cases} K(x), & \text{si } |x| > \mu \\ 0, & \text{si } |x| \leq \mu. \end{cases}$$

Entonces $K = K_1 + K_\infty$ y así,

$$T_K f(x) = (K * f)(x) = K_1 * f(x) + K_\infty * f(x). \tag{3}$$

Examinemos ahora $\|K_1\|_1$ y $\|K_\infty\|_{p'}$. Si $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, entonces

$$\|K_1\|_1 = \int_{|x| \leq \mu} |x|^{-n+\alpha} dx = |S^{n-1}| \int_0^\mu r^{-n+\alpha} r^{n-1} dr = C_1 \mu^\alpha. \tag{4}$$

$$\|K_\infty\|_{p'} = \left(\int_{|x|\geq\mu} |x|^{(-n+\alpha)p'} dx\right)^{1/p'} = \left(|S^{n-1}| \int_\mu^\infty r^{(-n+\alpha)p'+n-1} dr\right)^{1/p'}.$$

Por hipótesis $q < \infty$, entonces $1/p - \alpha/n > 0$, por lo que,

$$\frac{1}{\alpha p} > \frac{1}{n},$$

que a su vez implica que

$$\alpha p - np < n - np,$$

y así,

$$(\alpha - n)\frac{p}{p-1} < -n, \text{ es decir, } (n-\alpha)p' - n > 0.$$

Entonces la última integral existe y es igual a $C_3\mu^{\alpha-n+(n/p')}$. Pero,

$$\alpha - n + \frac{n}{p'} = \alpha - n + n\frac{p-1}{p} = \alpha - n\left(1 + \frac{1-p}{p}\right) = \alpha - \frac{n}{p} = \frac{-n}{q}.$$

Por lo tanto,

$$\|K_\infty\|_{p'} = C_3\mu^{-n/q}. \tag{5}$$

Para probar la primera del Teorema tenemos que ver que $T_K|f|$ existe casi donde sea. La desigualdad de Young nos asegura que $|K_1| * |f|$ existe casi donde sea, ya que, por (4), $|K_1| \in L^1$ y por hipótesis $|f| \in L^p$. Además, como p y p' son exponentes conjugados y $|K_\infty| \in L^{p'}$, $|K_\infty| * |f|$ existe para cualquier x.

Por lo tanto, la integral definida por $T_K(f)$ converge absolutamente casi donde sea.

Veremos ahora que T_K es un operador débil (p,q) para todo p, q como en las hipótesis, para después utilizar el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz[2] y concluir que

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A\|f\|_p.$$

Supongamos que $\|f\|_p = 1$ y sea $\lambda > 0$. Como $K * f = K_1 * f + K_\infty * f$, entonces,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |(K * f)(x)| > 2\lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : |(K_1 * f)(x)| > \lambda\}|$$

$$+|\{x \in \mathbb{R}^n : |(K_\infty * f)(x)| > \lambda\}|.$$

[2]Vid. Folland, Gerald. Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications. E.U.A., John Wiley & Sons, 1984, p. 192-201

Por un lado,

$$|\{x\in\mathbb{R}^n : |(K_1 * f)(x)| > \lambda\}| = \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|(K_1*f)(x)|/\lambda>1\}} dx \leq$$

$$\leq \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|(K_1*f)(x)|/\lambda>1\}} \frac{|K_1 * f|^p}{\lambda^p} dx \leq \frac{\|K_1 * f\|_p^p}{\lambda^p} \leq \frac{\|K_1\|_1^p \|f\|_p^p}{\lambda^p} = \frac{\|K_1\|_1^p}{\lambda^p}.$$

Pero $\|K_1\|_1 = C_1\mu^\alpha$, entonces,

$$|\{x\in\mathbb{R}^n : |(K_1 * f)(x)| > \lambda\}| \leq (C_1\mu^\alpha/\lambda)^p.$$

Luego,

$$\|K_\infty * f\|_\infty \leq \|K_\infty\|_{p'}\|f\|_p = \|K_\infty\|_{p'}.$$

Pero, por (5),

$$\|K_\infty\|_{p'} = C_2\mu^{-n/q}.$$

Si hacemos $\mu = C_2^{-1}\lambda^{-q/n}$, entonces, $\|K_\infty * f\|_\infty \leq \lambda$. Por lo que,

$$|\{x\in\mathbb{R}^n : |(K_\infty * f)(x)| > \lambda\}| = 0.$$

Por lo tanto,

$$|\{x\in\mathbb{R}^n : |(K * f)(x)| > 2\lambda\}| \leq (C_1\mu^\alpha/\lambda)^p + 0 = \frac{C_1^p C_2^{-1}}{\lambda^{p+\frac{\alpha pq}{n}}}.$$

La hipótesis $1/q = 1/p - \alpha/n$ implica que $qn/p = n + \alpha q$. Entonces, $p + (\alpha pq/n) = q$. Por lo que,

$$|\{x\in\mathbb{R}^n : |(K * f)(x)| > 2\lambda\}| \leq \frac{C_1^p C_2^{-1}}{\lambda^q} = C_1^p C_2^{-1}\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^q,$$

es decir, T_K es débil (p, q).

Box

Apéndice B

Dada una función $f \in L^p$ con características especiales, es posible aproximarse a ella, tanto como se necesite, con funciones en L^p de clase C^k. Esto es, podemos hacer que una función k veces diferenciable tenga las propiedades de f.

Para lograrlo necesitaremos el siguiente resultado sobre cómo es la convolución de una función de clase C^∞ con una función integrable.

Teorema B.1 *Sean $f \in L^1$ y $g \in C^k$ tal que $\partial^\alpha g$ está acotada para $|\alpha| \leq k$. Entonces $f * g \in C^k$ y $\partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g$ para $|\alpha| \leq k$.*

Demostración: Por hipótesis existe $M_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(g(x-y)f(y)) \leq M_\alpha f(y)$$

para toda x, y y siempre que $|\alpha| \leq K$. Entonces, como supusimos $f \in L^1$ la siguiente cadena de igualdades está justificada.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha(f * g)}{\partial x^\alpha}(x) &= \frac{\partial^\alpha(g * f)}{\partial x^\alpha}(x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left(\int g(x-y)f(y)dy\right)\\ &= \int \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(g(x-y)f(y))dy = f * \partial^\alpha g(x) < \infty.\end{aligned}$$

□

Sea ϕ cualquier función con dominio en $\mathbb{R}^n$ y $t > 0$. Definimos,

$$\phi_t(x) = t^{-n}\left(\frac{x}{t}\right).$$

En el siguiente teorema aproximaremos una función f cualquiera en L^p con una convolución de f con una función integrable.

Teorema B.2 *Sea $\phi \in L^1$ tal que $\int \phi(x)dx = a$. Entonces, para toda $f \in L^p, 1 \leq p \leq \infty$, $f * \phi_t \to af$ en la norma L^p cuando $t \to 0$.*

Demostración:

$$f * \phi_t(x) - af(x) = \int f(x-y)\phi_t(y)dy - \int \phi_t(y)f(x)dy = \int [f(x-y) - f(x)]\,\phi_t(y)dy.$$

Si hacemos $z = y/t$ tenemos que,

$$f * \phi_t(x) - af(x) = \int [f(x-tz) - f(x)]\phi(z)dz = \int [(T_{tz}f)(x) - f(x)]\phi(z)dz,$$

donde $(T_{tz}f)(x) = f(x - tz)$. Entonces, por la desigualdad de Minkowski para integrales,

$$\|f * \phi_t(x) - af(x)\|_p = \left(\int \left|\int [(T_{tz}f)(x) - f(x)]\phi(z)dz\right|^p dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \int \left(\int |(T_{tz}f)(x) - f(x)|^p |\phi(z)|^p dx\right)^{1/p} dz = \int |\phi(z)|\, \|f^{tz} - f\|^p dz.$$

Pero $\|f_{tz} - f\|_p \leq 2\|f\|_p$ y tiende a cero cuando $t \to 0$ para cada z (las traslaciones son funciones continuas en L_p, es decir, $T_z\colon L^p \to L^p$ es un operador continuo[3]). Podemos usar ahora el Teorema de la convergencia dominada para concluir que

$$\lim_{t\to 0} \|f * \phi_t - af\|_p = 0.$$

□

Cuando $\int \phi = 1$, $\{\phi_t\}_{t>0}$ es llamada una aproximación de la identidad y la utilizaremos para aproximar funciones en L^p por funciones, también en L^p, que tienen propiedades especificas. Por ejemplo, en espacios de medida finita podemos pedir que cada $\phi_t \in C^k$ para usar el Teorema B.1 y aproximar f con funciones k veces diferenciables.

[3]Vid. Folland, Gerald. Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications. E.U.A., John Wiley & Sons, 1984, p. 229

Apéndice C

En este apéndice trataremos la medida y la dimensión de Hausdorff, así como algunas de sus propiedades. La siguiente definición es necesaria para una adecuada introducción a la medida de Hausdorff.

Definición: *Sea $1 \leq k \leq n$. Una subvariedad C^1 de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ con la siguiente propiedad: Para cada $x \in M$ existe una vecindad $U \subset \mathbb{R}^n$ de x, un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función inyectiva, $f : V \to U$ de clase C^1 tal que $f(V) = M \cap U$ y la diferencial $D_x f$ es inyectiva para cada $x \in V$. Tal función f es llamada una parametrización de $M \cap U$.*

El área k-dimensional de una función $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 está definida como la integral del Jacobiano de f sobre D. Entonces, el área de una subvariedad C^1 de dimensión k está dada por el cálculo del área de cualquier parametrización.

En 1918 F. Hausdorff introdujo una medida k-dimensional en $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$, que da la misma área para k-subvariedades, pero que está definida para todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y que es igual a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ cuando $k = n$.

Comenzamos con la construcción de la p-medida de Hausdorff para cualquier $p > 0$. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$, un conjunto no vacío, se define el diámetro de U como *diam* $U = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$.

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$. Diremos que $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un δ-cubierta de A, si $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ y *diam* $C_i \leq \delta$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces, para cualquier $p \geq 0$,

$$H_{p,\delta}(A) = \operatorname{ínf}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(\mathit{diam}\ B_j)^p : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \text{ y } \mathit{diam}\ B_j \leq \delta\right\},$$

con la convención de que $\operatorname{ínf}\emptyset = \infty$. Observemos que cuando δ disminuye, el ínfimo es tomado sobre una familia más pequeña de cubiertas de A, por lo que, el valor de $H_{p,\delta}(A)$ se incrementa.

Definimos

$$H_p(A) = \lim_{\delta \to 0} H_{p,d}(A).$$

Teorema C.1 *H_p es una medida exterior métrica.*

Demostración: $H_{p,\delta}$ es una medida exterior por la manera en que fue definida. Fácilmente podemos ver que H_p es también una medida exterior. Veamos ahora que H_p es una medida métrica, es decir, veremos que para todos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $dist(A, B) > 0$ se verifica que,

$$H_p(A \cup B) = H_p(A) + H_p(B).$$

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $\text{dist}(A, B) > 0$ y $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una δ cubierta de $A \cup B$ con $\delta < \text{dist}(A, B)$. Observemos que la elección de δ implica que no existe ninguna $i \in \mathbb{N}$ tal que C_i interseca a A y B. Entonces, por definición de $H_{p,\delta}$,

$$H_{p,\delta}(A) + H_{p,\delta}(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } C_i^A)^p + \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } C_i^B)^p = \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } C_i)^p$$

donde C_j^A denota a los elementos de $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $C_j \cap A \neq \emptyset$ y C_k^B denota a los elementos de la misma sucesión cuya intersección con el conjunto B no es el conjunto vacío. Como $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ fue una δ cubierta cualquiera de $A \cap B$, entonces

$$H_{p,\delta}(A \cup B) \leq H_{p,\delta}(A) + H_{p,\delta}(B).$$

Esta desigualdad es válida para cualquier $\delta < \text{dist}(A, B)$, por lo que, al hacer tender a δ a cero,

$$H_p(A \cup B) \leq H_p(A) + H_p(B).$$

La otra desigualdad la tenemos por el hecho de que H_p es medida. Por lo tanto $H_p(A \cap B) = H_p(A) + H_p(B)$.

□

Entonces, la restricción de H_p a los conjuntos de Borel[4] es una medida, que seguiremos denotando con H_p y la conoceremos como la medida p-dimensional de Hausdorff.

El siguiente Teorema nos permitirá definir la dimensión de Hausdorff.

Teorema C.2 *Si $H_p(A) < \infty$, entonces $H_q = 0$ para toda $q > p$. Si $H_p > 0$, entonces $H_q(A) = \infty$ para toda $q < p$.*

[4] Vid. Folland, Gerald. Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications. E.U.A., John Wiley & Sons, 1984, p. 322

Demostración: Sólo probaremos la primera afirmación, ya que la segunda es la contrapositiva.

Si $H_p(A) < \infty$, para cualquier $\delta > 0$ existe una δ cubierta $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum(\text{diam } B_j)^p \leq H_{p,\delta}(A) + 1$, entonces,

$$\sum(\text{diam } B_j)^p \leq H_p(A) + 1.$$

Ahora, si $q > p$,

$$\begin{aligned}\sum(\text{diam } B_j)^q = \sum(\text{diam } B_j)^{p+(q-p)} \leq \\ \leq \delta^{q-p}\sum(\text{diam } B_j)^p \leq \delta^{q-p}\big(H_{p(A)} + 1\big),\end{aligned}$$

entonces, $H_{q,\delta}(A) \leq \delta^{q-p}\big(H_p(A) + 1\big)$. Si hacemos que $\delta \to 0$ vemos que $H_q(A) = 0$.

□

De acuerdo a este último resultado, para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\text{ínf}\{p \geq 0 : H_p(A) = 0\} = \sup\{p \geq 0 : H_p(A) = \infty\}.$$

Definimos a este valor como la dimensión de Hausdorff de A.

En el caso en que p sea un número natural tenemos en siguiente resultado cuya prueba puede ser encontrada en [4].

Teorema C.3 *Existe una constante $\gamma_n > 0$ tal que $\gamma_n H_n$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.*

Cabe mencionar que γ_n resulta ser el volumen de la bola de radio 1, es decir, $\gamma_n = \pi^{n/2}/2^n\Gamma((n/2) + 1)$. Esto no es importante para nuestros propósitos.

Concluimos entonces que con la medida de Hausdorff podemos medir un conjunto k-dimensional de $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$, y esta medida coincidirá (módulo una constante) con la medida de Lebesgue correspondiente a $\mathbb{R}^k$.

Bibliografía

[1] G.I. Arhipov, A.A. Karacuba, and V.N. Čubarikov. Trigonometric integrals. *Math. USSR Izvestija*, 15(2):211–239, 1980.

[2] A. Carbery, M. Christ, and James Wright. Multidimensional van der corput and sublevel sets estimates. *Journal of the American Mathematical Society*, 12(4):981–1015, 1999.

[3] K. J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambrige University Press. Gran Bretaña, 1985.

[4] Gerald B. Folland. *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley and Sons. E.U.A., 1984.

[5] Loukas Grafakos. *Classical and Modern Fourier Analysis*. Prentice Hall. E.U.A., 2003.

[6] L. Hörmander. Oscillarory integrals and multipliers on fl^p. *Ark. Mat.*, 11:1–11, 1973.

[7] E. Isaacson and H.B. Keller. *Analysis of Numerical Methods*. Jonh Wiley and Sons. E.U.A., 1966.

[8] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons. E.U.A., 2000.

[9] Leslie Lamport. *Latex, user's guide and reference manual*. Addison-Wesley Publishing Company. E.U.A., 1994.

[10] Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba. *Cálculo Vectorial*. Addison Wesley Longman. México, 1998.

[11] Frank Morgan. *Measure Theory, a Beginner's Guide*. Academic Press. E.U.A., 2000.

[12] F. Ricci and E. M. Stein. Harmonic analysis on nilpotent groups and singular integrals. *Journal of Functional Analysis*, 73:179–194, 1987.

[13] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill. E.U.A., 1976.

[14] Laurent Schwartz. *Theorie des Distributions.* Publications de l'Institut de Mathematique de l'Universite de Strasbourg. Francia, 1957.

[15] Elias M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press. E.U.A., 1986.

[16] Elias M. Stein. *Armonic Analisis.* Princeton University Press. E.U.A., 1993.

[17] A. Zygmund. *Trigonometric Series.* Cambridge University Press. Gran Bretaña, 2002.