

00382



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

**Relatividad general en simetría esférica:
estudios numéricos y otros análisis**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

JOSÉ ANTONIO GONZÁLEZ CERVERA

DIRECTORES DE TESIS: DR. MIGUEL ALCUBIERRE MOYA
DR. DANIEL E. SUDARSKY SAIONZ

COMITÉ TUTORAL: DR. MARCELO SALGADO RODRIGUEZ

pcf

posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2004



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

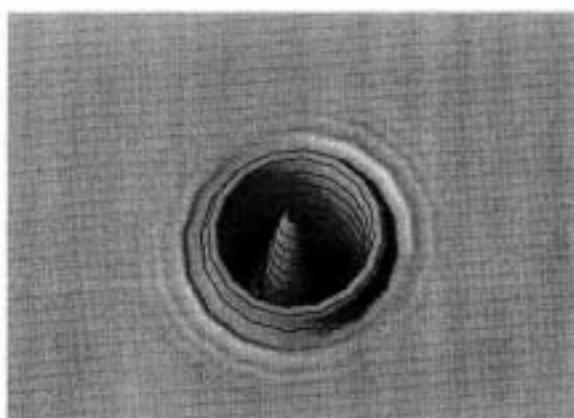
Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Relatividad general en simetría esférica: estudios numéricos y otros análisis

José Antonio González Cervera

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
Instituto de Ciencias Nucleares



Tesis de Doctorado

Posgrado en Ciencias Físicas

Agosto de 2004

Comite Tutorial:

| | | |
|----------------------------|-------------------------------|----------|
| <i>Director de Tesis:</i> | Dr. Miguel Alcubierre Moya | ICN-UNAM |
| <i>Director de Tesis:</i> | Dr. Daniel E. Sudarsky Saionz | ICN-UNAM |
| <i>Miembro del comite:</i> | Dr. Marcelo Salgado Rodríguez | ICN-UNAM |

Sinodales:

| | | |
|--------------------|-------------------------------------|--------------|
| <i>Presidente:</i> | Dr. Daniel E. Sudarsky Saionz | ICN-UNAM |
| <i>Secretario:</i> | Dr. Miguel Alcubierre Moya | ICN-UNAM |
| <i>Vocal:</i> | Dr. Hugo A. Morales Tecotl | DF-UAM-I |
| <i>Vocal:</i> | Dr. Ulises Nucamendi Gómez | DFM-UMSNH |
| <i>Vocal:</i> | Dra. Nora E. Bretón Báez | DF-CINVESTAV |
| <i>Suplente:</i> | Dr. Alejandro Corichi Rodríguez Gil | ICN-UNAM |
| <i>Suplente:</i> | Dr. Shahen Hacyan Saleryan | IF-UNAM |

Gráfica Portada: Simulación numérica del colapso de un solitón de campo escalar formando un agujero negro de Schwarzschild

A Lourdes y José Antonio

A Alba

Esta tesis esta basada en los siguientes artículos:

1. *Scalar solitons in a 4-Dimensional curved space-time.*
José A. González y Daniel Sudarsky. Rev. Mex. Fis. 47, 231-233 (2001). gr-qc/0102061.
2. *Black Hole Scalar Hair in Asymptotically Anti de Sitter Spacetime.*
Daniel Sudarsky y José A. González. Phys. Rev. D 67, 024038 (2003). gr-qc/0207069.
3. *A hyperbolic slicing condition adapted to Killing fields and densitized lapses.*
Miguel Alcubierre, Alejandro Corichi, José A. González, Darío Núñez y Marcelo Salgado. Class. Quantum Grav. 20 No 18 (2003) 3629-3646. gr-qc/0303069.
4. *Hyperbolicity of the Kidder-Scheel-Teukolsky formulation of Einstein's equations coupled to a modified Bona-Masso slicing condition.*
Miguel Alcubierre, Alejandro Corichi, José A. González, Darío Núñez y Marcelo Salgado. Phys. Rev. D 67, 104021 (2003). gr-qc/0303086.
5. *Regularization of spherically symmetric evolution codes in numerical relativity.*
Miguel Alcubierre y José A. González. Aceptado para publicarse en Computer Physics Communications . gr-qc/0401113.
6. *The cosmic censor conjecture: Is it generically violated?.*
Miguel Alcubierre, José A. González, Marcelo Salgado y Daniel Sudarsky. Enviado a publicarse en Phys. Rev. D. gr-qc/0402045.
7. *Dynamical evolution of unstable self-gravitating scalar solitons.*
Miguel Alcubierre, José A. González y Marcelo Salgado. Aceptado para publicarse en Phys. Rev. D. gr-qc/0403035.
8. *A unified Scenario for modeling the Galactic and Cosmological Dark Matter Components.*
José A. González and Daniel Sudarsky. gr-qc/0405097.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a todas y cada una de las personas que de alguna u otra forma se vieron involucradas con esta tesis.

En particular quiero agradecer a Miguel Alcubierre, Marcelo Salgado y Daniel Sudarky ya que sin su dirección y ayuda este trabajo no hubiera sido posible.

También quiero agradecer a mi familia. A mis padres Lourdes y José Antonio, a mi hermano Jorge y mi abuela Irma, que siempre estuvieron presentes y me dieron todo su apoyo.

A Alba, por toda su comprensión y cariño.

Por último quiero agradecer al CONACyT y a la DGEP-UNAM por el apoyo que recibí a través de las becas que sirvieron para concluir mis estudios.

Indice

| | |
|--|-----------|
| Agradecimientos | v |
| Indice | vii |
| Indice de figuras | xi |
| Introducción | 1 |
| I RELATIVIDAD NUMERICA | 5 |
| 1 Formulación ADM | 7 |
| 2 Regularización de códigos de evolución con simetría esférica en relatividad numérica | 11 |
| 2.1 Introducción | 11 |
| 2.2 Condiciones de regularidad | 13 |
| 2.3 Algoritmo de regularización | 15 |
| 2.4 Ejemplos | 18 |
| 2.4.1 Sistema I | 18 |
| 2.4.2 Sistema II | 20 |
| 3 Condición de foliación hiperbólica adaptada a campos de Killing y lapsos densificados | 25 |
| 3.1 Introducción | 25 |
| 3.2 La familia de condiciones de foliación de Bona-Masso | 26 |
| 3.3 Condición de foliación modificada de Bona-Masso | 28 |
| 3.3.1 Lapso densificado | 31 |
| 3.3.2 Divergencia de las líneas de tiempo y campos de Killing | 32 |
| 3.3.3 Ecuación de onda generalizada para la función de tiempo | 33 |
| 3.4 Hiperbolicidad | 34 |
| 3.4.1 Vector de corrimiento prescrito | 34 |
| 3.4.2 Hiperbolicidad de la ecuación de foliación | 35 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 3.5 | Evasión de singularidades | 40 |
| 3.6 | Choques de norma | 41 |
| 4 | Hiperbolicidad de la formulación Kidder-Scheel-Teukolsky de las ecuaciones de Einstein acopladas a la condición de foliación modificada de Bona-Masso | 43 |
| 4.1 | Introducción | 43 |
| 4.2 | La condición de foliación modificada de Bona-Masso | 44 |
| 4.3 | La familia KST de formulaciones de las ecuaciones de evolución de Einstein | 44 |
| 4.4 | Hiperbolicidad de la formulación KST acoplada a la condición modificada de BM | 46 |
| II | APLICACIONES FISICAS | 49 |
| 5 | Solitones escalares en un espacio-tiempo 4-Dimensional | 51 |
| 5.1 | Introducción | 51 |
| 5.2 | El modelo | 52 |
| 6 | Sobre agujeros negros con pelo escalar en espacio-tiempos asintóticamente anti de-Sitter | 57 |
| 6.1 | Introducción | 57 |
| 6.2 | Pelo escalar y condiciones asintóticas | 58 |
| 7 | Evolución dinámica de solitones escalares auto-gravitantes inestables | 67 |
| 7.1 | Introducción | 67 |
| 7.2 | Ecuaciones de campo | 68 |
| 7.3 | Condiciones iniciales | 72 |
| 7.3.1 | Solitón estático | 73 |
| 7.3.2 | Perturbando al solitón | 74 |
| 7.3.3 | Masa | 75 |
| 7.4 | Condiciones de foliación | 77 |
| 7.5 | Metodología numérica | 78 |
| 7.5.1 | Condiciones de frontera | 79 |
| 7.5.2 | Horizonte aparente | 79 |
| 7.6 | Resultados de las simulaciones numéricas | 80 |
| 7.6.1 | Colapso a un agujero negro | 81 |
| 7.6.2 | Explosión | 84 |
| 8 | La conjetura de la censura cósmica:¿Se viola genéricamente? | 91 |
| 8.1 | Introducción | 91 |

| | |
|---|------------|
| 8.2 Descripción | 92 |
| 8.3 Ejemplo numérico | 94 |
| 9 Un escenario unificado para modelar las componentes galácticas y cosmológicas de la materia oscura | 97 |
| 9.1 Introducción | 97 |
| 9.2 El modelo | 99 |
| 10 Discusión | 105 |
| A Hiperbolicidad de la condición de foliación modificada de Bona-Masso | 109 |
| B Hiperbolicidad del sistema de evolución del capítulo 7 | 113 |
| Bibliografía | 115 |

Indice de figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Descomposición ADM donde n^μ es el vector tipo tiempo normal a la hipersuperficie Σ y $t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu$ es el vector tipo tiempo tangente a la línea de mundo de las coordenadas. | 8 |
| 2.1 | Sistema I no regularizado. Las gráficas muestran la evolución de la función métrica A a diferentes tiempos. Nótese el pico en $r = 0$ para $t = 1$ | 19 |
| 2.2 | Sistema I no regularizado. Las gráficas muestran la evolución de la función de lapso α a diferentes tiempos. Nótese el comportamiento patológico en $r = 0$ para $t = 1$ | 19 |
| 2.3 | Sistema I regularizado. Las gráficas muestran la evolución de la función métrica A a diferentes tiempos. | 21 |
| 2.4 | Sistema I regularizado. Las gráficas muestran la evolución de la función de lapso α a diferentes tiempos. | 21 |
| 5.1 | Integración para los valores iniciales ϕ_a^0 y ϕ_b^0 . Obviamente $\phi_a(\frac{\pi}{2}) \neq \phi_b(\frac{\pi}{2})$ y $\dot{\phi}_a(\frac{\pi}{2}) \neq \dot{\phi}_b(\frac{\pi}{2})$ | 54 |
| 5.2 | Integración después de aplicar el método de Newton-Raphson. Podemos ver que $\phi_a(\frac{\pi}{2}) = \phi_b(\frac{\pi}{2})$ y $\dot{\phi}_a(\frac{\pi}{2}) = \dot{\phi}_b(\frac{\pi}{2})$. Esta es una solución de la ecuación de movimiento 5.11. | 54 |
| 7.1 | Potencial escalar $V(\phi)$ correspondiente a la ec. (7.2) con parámetros $\sigma = 1$, $\eta_1 = 0.5$, $\eta_2 = 0.1$ y $a = 0$ | 69 |
| 7.2 | Campo escalar ϕ para la configuración estática (la coordenada radial se muestra en escala logarítmica). | 74 |
| 7.3 | Igual que la figura 7.2 para la función de lapso α | 74 |
| 7.4 | Igual que la figura 7.2 para la función métrica A | 75 |
| 7.5 | Igual que la figura 7.2 para la función de masa $m(r)$ | 76 |
| 7.6 | Evolución de la función métrica A para la perturbación con $\epsilon = -0.002$. Nótese como después de un tiempo la función métrica crece indicando que las hipersuperficies se están estirando. Los círculos muestran la ubicación del horizonte aparente. | 81 |
| 7.7 | Evolución de la función métrica B para la perturbación con $\epsilon = -0.002$. Los círculos muestran la ubicación del horizonte aparente. | 82 |

| | | |
|------|--|-----|
| 7.8 | Evolución de la función de lapso α para la perturbación con $\epsilon = -0.002$. Nótese el colapso del lapso a tiempos grandes, indicativo del acercamiento a una singularidad. Los círculos muestran la ubicación del horizonte aparente. | 82 |
| 7.9 | Evolución del campo escalar ϕ para la perturbación con $\epsilon = -0.002$. A tiempos grandes el campo escalar tiene valores por debajo de 0.1 en todas partes, lo que implica que estamos en la región en la que el potencial es positivo. | 83 |
| 7.10 | Masa del horizonte aparente para la perturbación con $\epsilon = -0.002$. El HA aparece a $t \sim 115$. La línea truncada indica la masa ADM inicial del espacio-tiempo, y las líneas sólida y truncada-punteada indican la masa del horizonte para las resoluciones más alta y más baja respectivamente. Los asteriscos marcan la aparición del horizonte aparente. | 84 |
| 7.11 | Logaritmo de la raíz cuadrada media de la constricción Hamiltoniana como función del tiempo para la perturbación con $\epsilon = -0.002$, para cuatro resoluciones diferentes. | 85 |
| 7.12 | Evolución de la función métrica A para la perturbación con $\epsilon = +0.002$ | 86 |
| 7.13 | Igual que la figura 7.12 para la función métrica B | 86 |
| 7.14 | Igual que la figura 7.12 para la función de lapso α | 87 |
| 7.15 | Evolución del campo escalar ϕ para la perturbación con $\epsilon = +0.002$. Ahora, el campo escalar se mueve hacia el verdadero mínimo del potencial en $\phi = 0.5$ en todos lados. | 87 |
| 7.16 | Logaritmo de la raíz cuadrada media de la constricción Hamiltoniana como función del tiempo para la perturbación con $\epsilon = +0.002$, para cuatro resoluciones diferentes. | 88 |
| 8.1 | Potencial escalar $V(\phi)$ que corresponde a la ec. (8.5). | 94 |
| 8.2 | Evolución del campo escalar ϕ . Nótese como el campo se está moviendo hacia el verdadero mínimo en $\phi = 0.5$ en todos lados. | 96 |
| 8.3 | Evolución de la función de lapso α . Nótese el colapso del lapso indicando que nos estamos acercando a una singularidad. | 96 |
| 8.4 | Evolución de la función métrica radial A | 96 |
| 9.1 | Potencial 9.2 con $V_0 = a = \beta = 1$ y $s = -\frac{1+\sqrt{1+a\beta^2}}{\beta}$ | 100 |

Introducción

La relatividad general es la teoría del espacio, tiempo y gravitación formulada por Einstein en 1915. Las ideas generales detrás de dicha teoría establecen que las propiedades intrínsecas del espacio-tiempo, además de ser independientes del observador están descritas por una métrica espacio-temporal de igual manera que en la relatividad especial, sin embargo a diferencia de ésta, la métrica del espacio-tiempo no tiene porque ser plana. De esta manera la curvatura, i.e. la desviación de la métrica con respecto a la métrica plana, producirá los efectos físicos asociados con el campo gravitacional. La curvatura del espacio-tiempo se relaciona con el tensor de energía momento de la materia a través de las ecuaciones de campo postuladas por Einstein. Casi todas las predicciones de esta teoría han resultado estar en excelente acuerdo con los experimentos y las observaciones, por ejemplo: el corrimiento al rojo gravitacional, la precesión de las órbitas planetarias, el desvío de la luz al pasar cerca de objetos muy masivos y el retraso en el tiempo de las señales de radar.

Por otro lado, una de las predicciones de la teoría de la relatividad general es la existencia de ondas gravitacionales. Si un objeto se mueve a través del espacio-tiempo (e.g. si una estrella o agujero negro órbita alrededor de otra estrella) la variación en el tiempo de la curvatura del espacio-tiempo causada por este objeto puede crear pequeñas “arrugas” en el espacio-tiempo, las cuales se propagan como si fueran olas en un estanque. A estas arrugas se les llama ondas gravitacionales. Dichas ondas pueden propagarse a través de todo el universo sacudiendo a los objetos que se encuentren en su trayectoria. La amplitud de estas ondas es sin embargo, muy pequeña, así que son muy difíciles de detectar. Las ondas mas fuertes se producirían por algunos de los eventos más violentos del universo, tal como el choque de dos agujeros negros.

La existencia de dichas ondas ha sido determinada a través de mediciones indirectas. Por ejemplo, las observaciones del pulsar binario muestran que las ondas gravitacionales existen, a través de la interpretación de los datos que nos llegan de este sistema gracias a las ondas electromagnéticas. De hecho la mayor parte de la información que tenemos hoy en día acerca del universo en el que vivimos, la hemos obtenido a través de ondas electromagnéticas en forma de luz visible, radio, rayos X , rayos γ , etc. Cabe notar que en menor cantidad también recibimos información a través de neutrinos y rayos cósmicos.

El hecho de que las ondas gravitacionales no hayan sido detectadas de manera directa hasta el momento ha despertado un gran interés en la comunidad relacionada con la relatividad general. Una de las fuentes

más prometedoras de ondas gravitacionales son los sistemas binarios de objetos compactos, como dos estrellas de neutrones o dos agujeros negros orbitando uno alrededor del otro. Dichos sistemas binarios pierden energía debido a la emisión de energía gravitacional provocando entonces que el radio de la órbita decrezca. De esta forma, los dos objetos se acercan entre sí en una espiral emitiendo ondas gravitacionales con frecuencia y amplitud que aumenta hasta que se unen formando un solo agujero negro. Este choque producirá una gran cantidad de energía gravitacional que deberíamos de ser capaces de detectar si tuviéramos los aparatos adecuados. Con ésto en mente existen tanto grandes grupos de experimentalistas que se han dado a la tarea de desarrollar grandes interferómetros (como LIGO y VIRGO) que sirvan como detectores de ondas gravitacionales (y grandes proyectos a futuro como LISA) así como grandes grupos de investigadores enfocados a simular colisiones de agujeros negros en computadora.

Las simulaciones por computadora de estos choques de agujeros negros, han resultado ser bastante más complicadas de lo que se creía en un principio. Originalmente se creía que el verdadero problema que impedía dichas simulaciones era el límite de capacidad de las computadoras con las que se contaba, lo cual sería resuelto en cuanto se tuvieran computadoras lo suficientemente rápidas. Hoy en día sabemos que esto no es así. A pesar de tener grandes supercomputadoras con la capacidad y velocidad suficientes para hacer las evoluciones en tiempos razonables (del orden de días), existen graves problemas durante las evoluciones que hacen que los códigos fallen, y no se sabe con certeza cual es la causa de éstos.

Por ser un problema abierto y de tal magnitud, el tratar de resolver el problema del choque de dos agujeros negros se encuentran por mucho, lejos del alcance de cualquier trabajo de tesis. De hecho existen grandes grupos trabajando en este problema en los cuales los trabajos de tesis son pequeñas contribuciones al proyecto. Sin embargo, el área de la relatividad numérica abre sendas muy interesantes que antes no podían ser exploradas.

Es por esta razón que en esta tesis decidimos enfocarnos a trabajar en aspectos de la relatividad numérica pero haciendo una restricción simplificadora: el espacio-tiempo tiene simetría esférica. Gracias a esta simplificación podemos desarrollar métodos y códigos que pueden ser utilizados para resolver problemas físicos interesantes (aunque no podamos estudiar ondas gravitacionales ya que éstas no existen en simetría esférica). Cabe mencionar que, a pesar de restringirnos a espacio-tiempos que tienen simetría esférica, los problemas que se presentan para desarrollar un código de manera general, resultan ser bastante complejos.

La presentación de esta tesis se divide en dos partes:

En la primera nos enfocamos a los problemas relacionados con la relatividad numérica.

Empezaremos en el capítulo 1 mostrando la formulación 3+1 de las ecuaciones de Einstein, para posteriormente presentar el desarrollo de un código en simetría esférica en el capítulo 2, en éste analizamos que la falta de regularidad en las variables geométricas en el origen es a menudo una fuente de serios problemas para los códigos de evolución con simetría esférica en relatividad numérica. Usualmente este

problema se resuelve restringiendo la norma y solucionando la constricción Hamiltoniana para la métrica. En este capítulo presentamos un algoritmo genérico para tratar la regularización del origen que puede ser usada directamente en las ecuaciones de evolución y que permite el uso de elecciones de norma muy generales. Nuestro enfoque es similar en espíritu al introducido por Arbona y Bona para el caso particular de la formulación de Bona-Masso. Sin embargo, nuestro algoritmo es más general y puede ser usado con una gran variedad de sistemas de evolución.

Por último, como complemento a esta primera parte estudiamos en el capítulo 3 las propiedades de una versión modificada de la familia de condiciones de foliación hiperbólicas de Bona-Masso. Esta condición de foliación modificada tiene dos características muy importantes: En primer lugar, garantiza que si un espacio-tiempo es estático o estacionario, y se inicia la evolución en un sistema de coordenadas en el que inicialmente las derivadas temporales de la 3 métrica son cero, entonces los coeficientes métricos se mantendrán independientes del tiempo durante la evolución subsecuente, *i. e.* el lapso no evolucionará y no hará que las líneas con las que medimos el tiempo se aparten de la dirección del vector de Killing. Segundo, la condición modificada está naturalmente adaptada al uso de un lapso densificado como una variable fundamental, lo que la hace una buena candidata como condición de foliación dinámica que puede ser utilizada en conjunción con algunas reformulaciones hiperbólicas de las ecuaciones de evolución de Einstein recientemente propuestas. En el capítulo 4 mostramos que la familia de formulaciones hiperbólicas Kidder-Scheel-Teukolsky de las ecuaciones de evolución 3+1 de la relatividad general se mantiene hiperbólica cuando se acopla a la versión modificada de la condición de foliación de Bona-Masso.

En la segunda parte presentamos algunos análisis sobre problemas físicos interesantes así como aplicaciones numéricas a algunos de éstos.

Para empezar presentamos un pequeño estudio que nos sirvió como preparación para aplicar los métodos numéricos a problemas físicos. En este estudio, hacemos uso del hecho de que existe un teorema conocido como el Teorema de Derrick que restringe la posible existencia de ondas solitarias no triviales, con campos escalares en un espacio-tiempo plano con 3 o más dimensiones espaciales. Esto nos llevó a preguntarnos: ¿La versión análoga en espacio-tiempos curvos es válida?. En el capítulo 5 investigamos la posibilidad de encontrar solitones en un espacio-tiempo 4-dimensional curvo, usando un modelo simple y con ayuda de un análisis numérico, encontrando que existe una solución estática de la ecuación de onda no lineal. Esto prueba que en un espacio-tiempo curvo en 4 dimensiones es posible encontrar soluciones solitónicas a diferencia de un espacio-tiempo plano.

Posteriormente, en el capítulo 6 se analiza el inesperado descubrimiento de soluciones de agujero negro con “pelo” en teorías con campos escalares simplemente considerando condiciones de frontera asintóticamente anti de-Sitter, en lugar de asintóticamente planas, de tal manera que se exhiben de manera clara las diferencias entre las dos situaciones. Se muestra que la solución trivial de Schwarzschild anti de-Sitter se vuelve inestable en algunas de estas situaciones. Este capítulo sirve como base para plantear los problemas que se estudian en los capítulos 7, 8 y 9. Es importante señalar que la razón

que se encuentra detrás del hecho de que existen soluciones de agujeros negros con pelo no es que el espacio-tiempo sea asintóticamente anti de-Sitter, sino que se tiene un potencial con dos mínimos tales que la región interior de la configuración tiene un valor del potencial menor al que tiene en la región externa (asintótica).

Esto, nos permitió predecir la existencia en este tipo de teorías, de soluciones de agujeros negros con pelo asintóticamente planas, lo cual posteriormente fue descubierto por [1]. Además de estos agujeros negros, también fueron encontradas configuraciones estáticas y esféricamente simétricas de solitones escalares auto-gravitantes globalmente regulares. Estas configuraciones son inestables con respecto a perturbaciones radiales lineales. En el capítulo 7 estudiamos la evolución dinámica de dichas configuraciones y mostramos que dependiendo del signo de la perturbación inicial, los solitones o colapsan a un agujero negro de Schwarzschild o “explotan” a una pared de dominio saliente.

Otro problema interesante relacionado con el tipo de potenciales planteados en el capítulo 6 es el que recientemente Hertog, Horowitz y Maeda [2] sugirieron, mostrando que datos iniciales genéricos razonables en espacio-tiempos esféricamente simétricos y asintóticamente anti de-Sitter dentro de la teoría Einstein-Higgs, evolucionarán hacia una singularidad desnuda, en clara violación de la *conjetura de la censura cósmica*. En el capítulo 8 discutimos la existencia de una falla lógica en el argumento planteado en [2]. Además utilizando las evoluciones numéricas que desarrollamos en el capítulo 7 mostramos que usando un problema relacionado podemos encontrar evidencia numérica que sugiere que esta falla lógica puede ocurrir físicamente.

Por último, y también haciendo uso de las teorías introducidas en el capítulo 6, analizamos en el capítulo 9 la viabilidad de usar ciertos modelos de campos escalares en el contexto del problema de la materia oscura galáctica. Estos modelos se basan en un campo escalar en un espacio-tiempo asintóticamente plano o asintóticamente de-Sitter. Bajo este modelo discutimos la posibilidad de construir un modelo unificado para la materia oscura cosmológica y galáctica.

Primera parte

RELATIVIDAD NUMERICA

Capítulo 1

Formulación ADM

Las ecuaciones de Einstein tratan el espacio y el tiempo de igual manera. Para resolverlas numéricamente es conveniente escribir las ecuaciones como un problema de Cauchy. Una vez hecho esto, se deben de encontrar datos iniciales apropiados al problema físico que se quiera resolver. Para evolucionar los datos iniciales se debe de escoger un sistema de evolución y especificar condiciones de frontera espaciales y condiciones de norma [3].

Para realizar el análisis numérico usaremos la formulación 3+1 basada en las ecuaciones ADM estándar [4, 5]. En este capítulo introduciremos algunas nociones básicas de este formalismo y nuestra intención no es profundizar en los detalles.

Introduzcamos la siguiente notación para los índices:

Índices latinos $i, j, k = 1, 2, 3$ e índices griegos $\mu, \nu, \sigma = 0, 1, 2, 3$.

Comenzemos tomando un espacio-tiempo foliado por hipersuperficies espaciales. Se puede escribir la métrica del espacio-tiempo de la siguiente forma:

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta^i \beta_i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.1)$$

En donde α es la función de lapso que determina el tiempo propio $d\tau = \alpha dt$ medido por un observador que se mueve normal a la hipersuperficie, β^μ es el vector de corrimiento que determina la distancia coordenada que un punto con coordenadas constantes se aleja del vector normal a la hipersuperficie cuando se avanza de una hipersuperficie a la siguiente. Finalmente, γ_{ij} es la métrica espacial inducida en la hipersuperficie 3-dimensional Σ especificada por $t = \text{const}$ (ver figura 1.1).

La manera más simple de escribir las ecuaciones de campo de Einstein que gobiernan el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, donde el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ es un operador diferencial no lineal que actúa sobre la métrica y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía momento. Estas ecuaciones pueden reescribirse de la siguiente manera:

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (1.2)$$

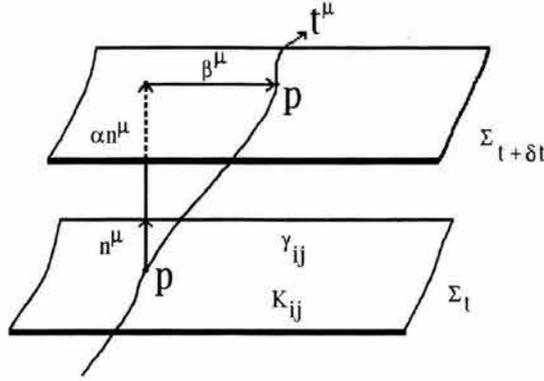


Fig. 1.1: Descomposición ADM donde n^μ es el vector tipo tiempo normal a la hipersuperficie Σ y $t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu$ es el vector tipo tiempo tangente a la línea de mundo de las coordenadas.

en donde ${}^{(4)}R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci 4-dimensional y T es la traza del tensor de energía momento.

Es conveniente introducir el tensor conocido como la curvatura extrínseca K_{ij} , que describe la curvatura de la hipersuperficie 3-dimensional en el espacio Lorentziano 4-dimensional en el que está encajada y que se define de la siguiente manera:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_t \gamma_{ij} - \mathcal{D}_i \beta_j - \mathcal{D}_j \beta_i). \quad (1.3)$$

donde \mathcal{D}_i es la derivada covariante asociada a γ_{ij} .

Para expresar las ecuaciones de Einstein en términos de las variables 3+1, se descomponen el tensor de Ricci y el tensor de energía momento en sus componentes tipo tiempo y tipo espacio. De las componentes tipo tiempo ${}^{(4)}R_{0\nu}$ se obtienen las constricciones Hamiltoniana y de momento:

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho, \quad (1.4)$$

$$\mathcal{D}_l (K^l_i - K\delta^l_i) = 8\pi J_i, \quad (1.5)$$

Mientras que de las componentes tipo espacio ${}^{(4)}R_{ij}$ y usando la definición de la curvatura extrínseca se obtienen las ecuaciones de evolución para la 3-métrica (γ_{ij}) y la curvatura extrínseca (K_{ij})

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \mathcal{D}_i \beta_j + \mathcal{D}_j \beta_i, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= -\mathcal{D}_i \mathcal{D}_j \alpha + \alpha (R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{il}K^l_j - 8\pi M_{ij}) \\ &+ \beta^l \mathcal{D}_l K_{ij} + K_{il} \mathcal{D}_j \beta^l + K_{jl} \mathcal{D}_i \beta^l, \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde \mathcal{D}_i y R_{ij} son la derivada covariante y el tensor de Ricci asociados con γ_{ij} , $R := \text{tr}R_{ij}$, $K := \text{tr}K_{ij}$, y donde las fuentes de materia están definidas en términos del tensor de energía-momento como

$$\rho = n_\mu n_\nu T^{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

$$J_i = -n_\mu T_i^\mu, \quad (1.9)$$

$$S_{ij} = T_{ij}, \quad (1.10)$$

$$M_{ij} = S_{ij} + \frac{1}{2} \gamma_{ij} (\rho - S), \quad (1.11)$$

con n^μ el vector unitario normal a las hipersuperficies espaciales y $S = \text{tr}(S_{ij})$.

Como se puede ver de todo este análisis, las ecuaciones de Einstein nos dicen la forma en la que evolucionan tanto la métrica inducida γ_{ij} como la curvatura extrínseca K_{ij} , sin embargo no nos dicen nada sobre la evolución de la función de lapso α ni del vector de corrimiento β^μ . Esto está relacionado con la libertad que tenemos para escoger las coordenadas en el problema que estamos resolviendo. Tanto al lapso como al vector de corrimiento se les conoce como cantidades de norma y pueden ser elegidos libremente. La elección del lapso nos determina una foliación específica del espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales y la elección del vector de corrimiento nos determina la forma en la que las líneas de coordenadas espaciales constantes se propagan.

Por lo tanto para que nuestro sistema de ecuaciones de evolución se encuentre completo, debemos de especificar las ecuaciones de evolución de α y β^μ . Existen varias formas de seleccionar nuestras condiciones de norma, a continuación se presentan las más comunes:

1. Condiciones prescritas

Foliación geodésica: $\alpha = 1$

Vector de corrimiento nulo: $\beta^\mu = 0$

2. Condiciones algebraicas

Foliación armónica: $\alpha = h(x^i) \sqrt{\gamma_n}$

(donde γ_n es el determinante de la 3-métrica asociado a los observadores normales)

3. Condiciones elípticas

Foliación maximal: $\mathcal{D}^i \mathcal{D}_i \alpha = R\alpha$

Vector de corrimiento de mínima distorsión: $\mathcal{D}^i \mathcal{D}_i \beta_k + \frac{1}{3} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_i \beta^i + R_{ik} \beta^i = \mathcal{D}^i [2\alpha(K_{ik} - \frac{1}{3} \gamma_{ik} K)]$

4. Condiciones hiperbólicas

Foliación de Bona-Masso: $(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\alpha = -\alpha^2 f(\alpha)K$

Vector de corrimiento "gamma driver": $\partial_t^2 \beta^i = F_p \partial_t \bar{\Gamma}^i$

(donde los términos del lado derecho están relacionado con derivadas de la 3-métrica)

Hablaremos un poco más sobre condiciones de norma para el lapso en los capítulos 3 y 4. Las condiciones sobre el vector de corrimiento no serán tratadas en este trabajo, y la condición que utilizaremos en general es $\beta^\mu = 0$.

Los conceptos sobre la formulación ADM que hemos introducido nos servirán a lo largo de este trabajo. En el siguiente capítulo, utilizaremos la formulación 3+1 para desarrollar un código en simetría esférica,

el cual, más adelante nos servirá para entender algunos problemas físicos que poseen dicha simetría y que resultan ser muy interesantes.

Capítulo 2

Regularización de códigos de evolución con simetría esférica en relatividad numérica

2.1 Introducción

Al desarrollar códigos con simetría esférica en relatividad numérica, la singularidad de las coordenadas usuales en el origen puede ser una fuente de graves problemas causados por la falta de regularidad de las variables geométricas. El problema es ocasionado por la presencia de términos en las ecuaciones de evolución que se comportan como $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$ cerca del origen. La regularidad de la métrica (esencialmente que el espacio-tiempo sea localmente plano) garantiza las cancelaciones exactas de dichos términos en el origen, asegurando soluciones bien comportadas. Esta cancelación exacta, aunque es cierta para soluciones analíticas, usualmente falla para soluciones numéricas. Se encuentra que los términos con comportamiento $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$ no se cancelan y la solución tiene problemas cerca de $r = 0$: no solo falla la convergencia de la solución, sino que fácilmente ésta se convierte en violentamente inestable en sólo unos cuantos pasos de tiempo.

La forma usual de atacar este problema es usar la llamada norma *de área* (o *radial*), donde la coordenada radial r se escoge de tal manera que el área propia de las esferas de r constante es siempre $4\pi r^2$. Si además, se escoge que el vector de corrimiento sea cero, se tiene la estándar norma *polar/de área* [6, 7], para la cual, el lapso es forzado a satisfacer cierta ecuación diferencial ordinaria en r . El nombre *polar* viene del hecho de que para esta elección de norma solo hay una componente diferente de cero del tensor de curvatura extrínseca, K_{rr} [6]. En la norma *polar/de área* el problema de lograr la cancelación exacta de los términos que van como $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$ se reduce a imponer la condición de frontera $g_{rr} = 1$ en $r = 0$, lo que puede hacerse fácilmente si uno resuelve g_{rr} de la constricción hamiltoniana (que en este caso es

una ecuación diferencial ordinaria en r) y se ignora su ecuación de evolución. Si uno hace esto en situaciones correspondientes al vacío, se termina inevitablemente con el espacio-tiempo de Minkowski en las coordenadas usuales (también se puede recuperar Schwarzschild trabajando en coordenadas isotrópicas y factorizando el factor conforme analíticamente). Por supuesto, en presencia de materia, se puede obtener una verdadera dinámica no trivial.

El principal problema con este procedimiento estándar es que al usarlo, la elección de norma se ha agotado totalmente. En particular, la norma *polar/de área* no puede penetrar horizontes aparentes, ya que dentro de un horizonte aparente es imposible mantener las áreas de las esferas fijas sin un vector de corrimiento no trivial. A pesar de esto, la norma *polar/de área* ha sido usada de manera exitosa en el estudio del colapso crítico a un agujero negro, donde la presencia de un agujero negro se identifica por el familiar “colapso del lapso” aun cuando el horizonte aparente no puede ser detectado [8].

En vista de lo anterior, se quisiera tener una manera de poder solucionar el problema de regularidad preservando al mismo tiempo la posibilidad de hacer diferentes elecciones de norma, ya sea porque uno está interesado en estudiar la región interior de un horizonte aparente, o porque se quieren probar diferentes condiciones de norma en el caso simple de simetría esférica. Debido a esto hemos desarrollado una técnica general de regularización que puede ser usada directamente en las ecuaciones de evolución de Einstein.

Nuestro método de regularización es similar en espíritu, aunque no en detalle, al presentado por Arbona y Bona en [9]. La diferencia principal consiste en que el método de Arbona y Bona está ligado al uso del sistema de evolución de Bona-Masso [10, 11, 12, 13, 14], mientras que nuestro algoritmo es mucho más general.

Un último punto merece ser mencionado. Los códigos de evolución en simetría esférica que involucran agujeros negros eternos usualmente ignoran el problema de regularidad. Por ejemplo, utilizando coordenadas isotrópicas, se puede hacer uso del método de excisión eliminando la parte interior del agujero negro dejando así $r = 0$ por fuera de la malla numérica. Pero aún sin usar excisión, en un agujero negro en coordenadas isotrópicas $r = 0$ no es un punto regular sino una compactificación del infinito asintótico en el otro lado del puente de Einstein-Rosen. Esta compactificación introduce factores geométricos que compensan los términos que van como $\mathcal{O}(\frac{1}{r})$ lo que hace que las ecuaciones sean regulares en $r = 0$. Esto significa que, en contraste a lo que se podría suponer de manera ingenua, en simetría esférica es más fácil evolucionar agujeros negros eternos (al menos por algún tiempo) que evolucionar espacio-tiempos regulares.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: en la sec. 2.2 discutimos las condiciones de regularidad que las funciones métricas deben satisfacer en el origen de las coordenadas esféricas, y mostramos cuales términos necesitan ser regularizados en las ecuaciones de Einstein. La sección 2.3 describe nuestro algoritmo de regularización en una manera genérica. En la sec. 2.4 presentamos ejemplos de cómo regularizar algunas formulaciones específicas de las ecuaciones de Einstein, y mostramos algunos ejemplos numéricos.

2.2 Condiciones de regularidad

Iniciamos la discusión escribiendo la forma mas general de una métrica espacial en simetría esférica como

$$dl^2 = A(r, t)dr^2 + r^2 B(r, t)d\Omega^2, \quad (2.1)$$

con A y B funciones métricas positivas y $d\Omega^2$ el elemento de ángulo sólido: $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Nótese que hemos factorizado la dependencia r^2 de las funciones angulares métricas. Esto tiene la ventaja de que hace explícita la dependencia en r de las cantidades geométricas y hace el procedimiento de regularización más sencillo.

Como trabajaremos con las ecuaciones de Einstein escritas como un sistema de primer orden, introduciremos las siguientes cantidades auxiliares:

$$D_A := \partial_r \ln A, \quad D_B := \partial_r \ln B. \quad (2.2)$$

También trabajaremos con las componentes mezcladas de la curvatura extrínseca: $K_A := K_r^r, K_B := K_\theta^\theta = K_\phi^\phi$.

Existen dos tipos diferentes de condiciones de regularidad que las variables $\{A, B, D_A, D_B, K_A, K_B\}$ deben satisfacer en $r = 0$. El primer tipo de condiciones son simplemente las impuestas por el requerimiento de que todas las variables estén bien definidas en el origen, e implican el siguiente comportamiento para r pequeña:

$$A \sim A^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (2.3)$$

$$B \sim B^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (2.4)$$

$$D_A \sim \mathcal{O}(r), \quad (2.5)$$

$$D_B \sim \mathcal{O}(r), \quad (2.6)$$

$$K_A \sim K_A^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (2.7)$$

$$K_B \sim K_B^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (2.8)$$

con $\{A^0, B^0, K_A^0, K_B^0\}$ posibles funciones del tiempo, pero no de r . Estas condiciones de regularidad son sencillas de implementar numéricamente. Por ejemplo, se puede utilizar una malla de diferencias finitas que evite el origen, y entonces obtener datos en el punto ficticio en $r = -\Delta r/2$ imponiendo que $\{A, B, K_A, K_B\}$ sean funciones pares en $r = 0$ y $\{D_A, D_B\}$ impares.

El segundo tipo de condiciones de regularidad es mas problemático. Para ver claramente el problema, escribiremos las ecuaciones de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) [4, 5] como un sistema de ecuaciones de primer orden para el caso de simetría esférica. Las ecuaciones de evolución son (para el caso con vector de corrimiento igual a cero)

$$\partial_t A = -2\alpha A K_A, \quad (2.9)$$

$$\partial_t B = -2\alpha B K_B, \quad (2.10)$$

$$\partial_t D_A = -2\alpha [K_A D_\alpha + \partial_r K_A], \quad (2.11)$$

$$\partial_t D_B = -2\alpha [K_B D_\alpha + \partial_r K_B], \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_A = & -\frac{\alpha}{A} \left[\partial_r (D_\alpha + D_B) + D_\alpha^2 - \frac{D_\alpha D_A}{2} + \frac{D_B^2}{2} - \frac{D_A D_B}{2} - AK_A(K_A + 2K_B) \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} (D_A - 2D_B) \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = & -\frac{\alpha}{2A} \left[\partial_r D_B + D_\alpha D_B + D_B^2 - \frac{D_A D_B}{2} - \frac{1}{r} (D_A - 2D_\alpha - 4D_B) - \frac{2(A-B)}{r^2 B} \right] \\ & + \alpha K_B (K_A + 2K_B) \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde α es la función de lapso y $D_\alpha := \partial_r \ln \alpha$. Las constricciones Hamiltoniana y de momento toman la siguiente forma

$$\partial_r D_B = \frac{1}{r^2 B} (A - B) + AK_B (2K_A + K_B) + \frac{1}{r} (D_A - 3D_B) + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4}, \quad (2.15)$$

$$\partial_r K_B = (K_A - K_B) \left[\frac{1}{r} + \frac{D_B}{2} \right], \quad (2.16)$$

Como $\{D_\alpha, D_A, D_B\}$ van como r cerca del origen, los términos del tipo $D_{\{\alpha, A, B\}}/r$ son regulares y no producen problemas. Sin embargo, tanto en la constricción Hamiltoniana como en la ecuación de evolución de K_B hay un término de la forma $(A - B)/r^2$, mientras que en la constricción de momento existe un término de la forma $(K_A - K_B)/r$. Dado el comportamiento de estas variables cerca de $r = 0$ estos términos parecerían diverger en el origen. La razón por la que no ocurre esto es que, cerca del origen, se imponen condiciones de regularidad adicionales

$$A - B \sim \mathcal{O}(r^2), \quad K_A - K_B \sim \mathcal{O}(r^2), \quad (2.17)$$

esto es

$$A^0 = B^0, \quad K_A^0 = K_B^0. \quad (2.18)$$

No es difícil de entender de dónde vienen estas condiciones. Son simplemente la consecuencia del hecho de que el espacio debe de ser localmente plano en $r = 0$. Esta condición implica que, cerca de $r = 0$, debe de ser posible escribir la métrica como

$$dl^2_{R \sim 0} = dR^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (2.19)$$

con R una coordenada radial que mide la distancia propia desde el origen. Una transformación local de coordenadas de R a r transforma la métrica en la siguiente

$$dl^2_{r \sim 0} = \left(\frac{dR}{dr} \right)_{r=0}^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (2.20)$$

lo que implica que $A^0 = B^0$ y, dado que esto debe satisfacerse para todo t , entonces $K_A^0 = K_B^0$.

No resulta trivial implementar numéricamente y de manera simultánea tanto las condiciones de regularidad que aseguran que las funciones tengan ciertas simetrías (2.3)-(2.8) como las condiciones de regularidad que aseguran que el espacio sea localmente plano (2.17). La razón es que en $r = 0$ tenemos tres condiciones de frontera para sólo dos variables: las derivadas de A y B deben ser cero, y además A y B deben de ser iguales entre sí (y lo mismo debe de ocurrir para K_A y K_B). Las condiciones de frontera para las ecuaciones exactas están, por supuesto, sobredeterminadas, pero en ese caso la consistencia de las ecuaciones implica que si se satisfacen inicialmente, se satisfacen para todo tiempo. Sin embargo, en el tratamiento numérico esto no es necesariamente cierto debido a los errores de truncamiento por lo que rápidamente (típicamente después de uno o dos pasos de tiempo) una de estas tres condiciones de frontera deja de satisfacerse. Es fácil convencerse de que ignorar una de estas condiciones e imponer las otras dos no funciona. Si imponemos la condición de que las derivadas sean cero e ignoramos la condición de que $A = B$, entonces el término $(A - B)/r^2$ en la ecuación de evolución rápidamente se vuelve singular. Por otro lado, si imponemos la condición de que $A = B$ e ignoramos una de las condiciones de simetría, entonces estaremos introduciendo una inconsistencia en las ecuaciones de evolución en diferencias finitas, ya que para un Δr finito es muy difícil garantizar que la diferencia entre $\partial_t K_A$ y $\partial_t K_B$ se aproxima a cero en el origen. Esta inconsistencia rápidamente resulta en el desarrollo de grandes gradientes (que no convergen) cerca del origen. En la siguiente sección introduciremos un algoritmo que regulariza las ecuaciones de evolución cerca de $r = 0$.

Como un comentario final, de las ecuaciones anteriores podemos ver fácilmente porqué la norma *polar/de área* no tiene problemas de regularidad. En esta norma tenemos que $B = 1$ por construcción. Si se impone la condición de frontera $A(r = 0) = 1$, y se resuelve $A(r)$ integrando la constricción Hamiltoniana con $B = 1$ y $D_B = 0$ (ignorando las ecuaciones de evolución), entonces el término $(A - B)/r^2$ no causa ningún problema.

2.3 Algoritmo de regularización

En la Ref. [9], Arbona y Bona desarrollaron una técnica de regularización para la versión en simetría esférica del sistema de evolución Bona-Masso (BM) [10, 11, 12, 13, 14]. Su técnica se basa en definir una variable auxiliar dinámica V_r que es parte de la formulación BM estándar de tal manera que les permite absorber los términos $(A - B)/r^2$ y reduce el problema de regularización a aplicar a V_r las condiciones de frontera adecuadas en $r = 0$.

Como estamos interesados en desarrollar una técnica genérica de regularización, comenzaremos con las ecuaciones ADM de la sección anterior. Sin embargo, tomaremos la idea de introducir una variable auxiliar de la técnica de regularización de Arbona y Bona, que nos permita absorber los términos problemáticos. Añadir una variable auxiliar parece ser una manera más directa de resolver el problema de las condiciones de frontera sobredeterminadas: la condición de frontera extra será impuesta en la variable auxiliar.

Definiremos la variable,

$$\lambda := \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{B} \right). \quad (2.21)$$

Nótese que, si el espacio es localmente plano (2.17), entonces la variable λ tiene el siguiente comportamiento cerca del origen

$$\lambda \sim \mathcal{O}(r), \quad (2.22)$$

el cual, como se mencionó antes, puede ser fácilmente implementado numéricamente usando una malla que evite el origen, y pidiendo que λ sea impar en $r = 0$.

La constricción Hamiltoniana se escribe como

$$\partial_r D_B = AK_B(2K_A + K_B) + \frac{1}{r}(-\lambda + D_A - 3D_B) + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4}, \quad (2.23)$$

y la ecuación de evolución para K_B es

$$\begin{aligned} \partial_t K_B &= -\frac{\alpha}{2A} \left[\partial_r D_B + D_\alpha D_B + D_B^2 - \frac{D_A D_B}{2} - \frac{1}{r}(D_A - 2D_\alpha - 4D_B - 2\lambda) \right] \\ &+ \alpha K_B(K_A + 2K_B). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como se mencionó, los términos problemáticos se han transformado ahora en λ/r , el cual será bien comportado siempre que λ sea impar en $r = 0$. La constricción de momento aún tiene un término $(K_A - K_B)/r$, el cual no debe de causar ningún problema ya que no retro-alimenta las ecuaciones de evolución (uno siempre puede multiplicar la constricción de momento por r antes de evaluarla). Por supuesto, hay que recordar que en algunos esquemas se suelen agregar múltiplos de la constricción de momento a las ecuaciones de evolución para obtener formulaciones hiperbólicas, y discutiremos como tratar con dicho término más adelante.

Existe otro ingrediente que debe añadirse: una ecuación de evolución para λ . Esta puede obtenerse directamente de su definición:

$$\partial_t \lambda = \frac{2\alpha A}{B} \left(\frac{K_A - K_B}{r} \right). \quad (2.25)$$

Esta última ecuación de evolución claramente tiene el peligroso término $(K_A - K_B)/r$, pero este término puede removerse con la ayuda de la constricción de momento (2.16) para obtener

$$\partial_t \lambda = \frac{2\alpha A}{B} \left[\partial_r K_B - \frac{D_B}{2}(K_A - K_B) \right], \quad (2.26)$$

la cual es regular en el origen.

Las ecuaciones ADM de primer orden y regularizadas son entonces (2.9)-(2.13) y (2.24) (que reemplaza a (2.14)), más la ecuación de evolución para λ dada por (2.26).

Habiendo regularizado las ecuaciones ADM estándar, la pregunta que sigue es como regularizar formulaciones alternativas donde múltiplos de las constricciones pueden ser agregados a las ecuaciones de evolución de diferentes maneras. Agregar múltiplos de la constricción Hamiltoniana no representa ningún problema, ya que la introducción de la variable λ regularizó dicha constricción, como se ve en (2.23). La

constricción de momento, sin embargo, no esta regularizada ya que todavía tiene el término $(K_A - K_B)/r$. Uno podría intentar usar un método similar al usado anteriormente introduciendo una nueva variable para absorber este término. De cualquier forma, mostraremos que ésto no es realmente necesario.

Supongamos que tenemos una formulación arbitraria de las ecuaciones de evolución de primer orden de Einstein en simetría esférica que tiene la siguiente forma genérica

$$\partial_t u_i = q_i(u, v), \quad (2.27)$$

$$\partial_t v_i = M_i^j(u) \partial_r v_j + p_i(u, v), \quad (2.28)$$

donde $u = (A, B, \lambda)$ y $v = (D_A, D_B, K_A, K_B)$. Los términos tipo “fuentes”: q y p se asumen que son independientes de las derivadas de los campos. La hiperbolicidad de la formulación, depende de la estructura característica de la matriz M . Supondremos que se está trabajando con una formulación hiperbólica lograda agregando múltiplos de las constricciones Hamiltoniana y de momento a las ecuaciones de evolución para las v 's. Esto significa que uno puede esperar que los términos de fuentes p_i tengan en general términos proporcionales a $(K_A - K_B)/r$. Reescribiremos las ecuaciones de evolución para las v_i como

$$\partial_t v_i = M_i^j(u) \partial_r v_j + p_i'(u, v) + \frac{f_i(u)}{r} (K_A - K_B). \quad (2.29)$$

Aquí estamos suponiendo que el coeficiente $f_i(u)$ de los términos $(K_A - K_B)/r$ depende de las u 's, pero no de las v 's, lo cual corresponde en realidad al caso típico. Usando ahora la ecuación (2.25) encontramos

$$\partial_t v_i = M_i^j(u) \partial_r v_j + p_i'(u, v) + \frac{f_i(u)B}{2\alpha A} \partial_t \lambda, \quad (2.30)$$

que implica

$$\partial_t \left(v_i - \frac{f_i(u)B}{2\alpha A} \lambda \right) = M_i^j(u) \partial_r v_j + p_i'(u, v) - \lambda \partial_t \left(\frac{f_i(u)B}{2\alpha A} \right). \quad (2.31)$$

Definimos entonces

$$v_i' := v_i - \frac{f_i(u)B}{2\alpha A} \lambda, \quad (2.32)$$

Obtenemos entonces que la ecuación (2.31) se escribe

$$\partial_t v_i' = M_i^j(u) \partial_r v_j + p_i'(u, v) - \lambda F_i^t(u, v), \quad (2.33)$$

con $F_i^t(u, v) = \partial_t (f_i(u)B/2\alpha A)$. Hay que notar que $F_i^t(u, v)$ no involucra derivadas espaciales ni de las u 's ni de las v 's. El paso final es sustituir la derivada espacial de v_j por la de v_j' de modo tal que

$$\begin{aligned} \partial_t v_i' &= M_i^j(u) \partial_r v_j' + p_i'(u, v) - \lambda F_i^t(u, v) + \partial_r \left(\frac{f_j(u)B}{2\alpha A} \lambda \right) M_i^j(u) \\ &= M_i^j(u) \partial_r v_j' + p_i'(u, v) + \lambda (F_i^r(u, v) - F_i^t(u, v)) + \left(\frac{M_i^j(u) f_j(u) B}{2\alpha A} \right) \partial_r \lambda; \end{aligned} \quad (2.34)$$

con $F_i^r(u, v) = M_i^j(u) \partial_r (f_j(u)B/2\alpha A)$. Usando el hecho de que

$$\partial_r \lambda = -\frac{1}{r} \left[\lambda + \frac{A}{B} (D_A - D_B) \right], \quad (2.35)$$

finalmente encontramos

$$\partial_t v'_i = M'_i{}^j(u) \partial_r v'_j + p'_i(u, v) + \lambda (F'_i{}^r(u, v) - F'_i{}^t(u, v)) - \frac{M'_i{}^j(u) f_j(u) B}{2\alpha A r} \left[\lambda + \frac{A}{B} (D_A - D_B) \right]. \quad (2.36)$$

Esta última ecuación ya es regular, y tiene precisamente la misma estructura característica del sistema original. Lo que se ha hecho es transformar las ecuaciones originales para las variables v_i en ecuaciones de evolución para las nuevas variables v'_i para las cuales los términos de la parte principal son los mismos y los términos de las fuentes son regulares. Nótese que típicamente solo algunos de los $f_i(u)$ serán diferentes de cero, así que no es necesario transformar todas las variables.

En la siguiente sección mostraremos ejemplos de regularización de algunos sistemas de ecuaciones de evolución específicos.

2.4 Ejemplos

Las ecuaciones ADM de primer orden regularizadas fueron derivadas en la sección anterior. Aquí mostraremos un par de ejemplos de evoluciones numéricas usando dos sistemas regularizados diferentes.

En las simulaciones numéricas tomaremos como datos iniciales el espacio tiempo de Minkowski en las coordenadas usuales, o sea que:

$$A = B = 1, \quad (2.37)$$

$$D_A = D_B = 0, \quad (2.38)$$

$$K_A = K_B = 0. \quad (2.39)$$

Para obtener una evolución no trivial, escogemos un lapso inicial de la forma:

$$\alpha(t=0) = 1 + r^2 \hat{C} e^{-\frac{(r-\hat{r})^2}{\hat{\sigma}^2}}, \quad (2.40)$$

esto es, añadimos una pequeña contribución Gaussiana al lapso inicial de Minkowski. Entonces evolucionaremos el lapso usando la condición de foliación de Bona-Masso (BM) [13], así que la ecuación de evolución para el lapso será:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) (K_A + 2K_B). \quad (2.41)$$

En las simulaciones mostradas abajo hemos escogido que los parámetros de la Gaussiana sean: $\hat{C} = 0.001$, $\hat{r} = 5.0$, $\hat{\sigma} = 1.0$. También nos hemos restringido a la foliación armónica, esto es, $f(\alpha) = 1$.

2.4.1 Sistema I

Como primer ejemplo construiremos un sistema hiperbólico empezando con las ecuaciones ADM en el vacío y la condición de foliación de BM. Construimos este sistema usando las constricciones Hamiltoniana y de momento para remover los términos proporcionales a $\partial_r D_B$ y $\partial_r K_B$ de las ecuaciones de evolución de K_A y D_α respectivamente. Es fácil mostrar que el sistema resultante es fuertemente hiperbólico.

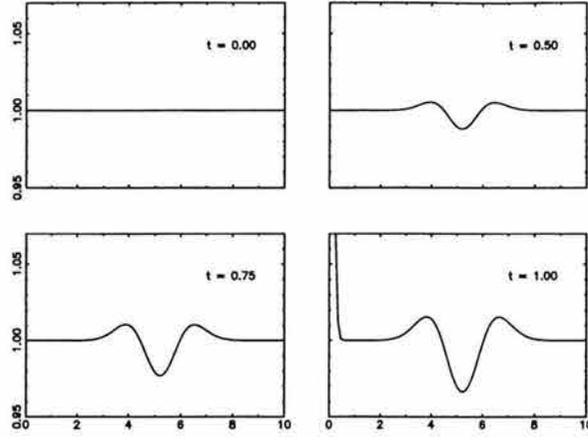


Fig. 2.1: Sistema I no regularizado. Las gráficas muestran la evolución de la función métrica A a diferentes tiempos. Nótese el pico en $r = 0$ para $t = 1$.

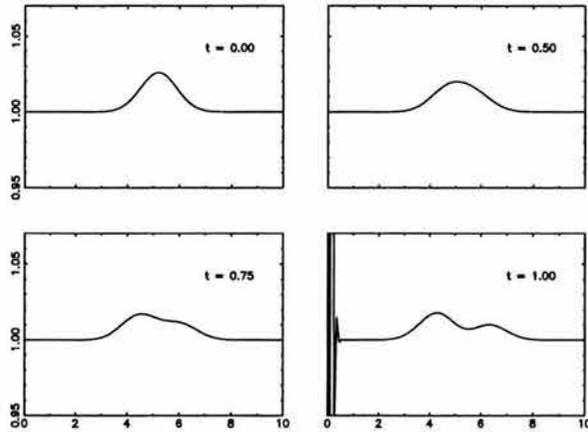


Fig. 2.2: Sistema I no regularizado. Las gráficas muestran la evolución de la función de lapso α a diferentes tiempos. Nótese el comportamiento patológico en $r = 0$ para $t = 1$.

Las figuras 2.1 y 2.2 muestran la evolución de la métrica radial A y de la función de lapso α usando el sistema descrito arriba, sin regularizar. Nótese que ambas gráficas muestran un pico en $r = 0$ para tiempos $t \approx 1$.

Ahora veamos el caso regularizado. Como describimos anteriormente, primero introducimos la variable auxiliar

$$\lambda = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{B} \right). \quad (2.42)$$

También, como usamos la constricción de momento para modificar la ecuación de evolución de D_α , necesitamos reemplazar esta variable por

$$U_\alpha := D_\alpha + \frac{B\lambda}{A}. \quad (2.43)$$

El conjunto de variables a evolucionar es:

$$\{\alpha, A, B, U_\alpha, D_A, D_B, K_A, K_B, \lambda\}. \quad (2.44)$$

Las ecuaciones de evolución para estas variables toman la siguiente forma:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(K_A + 2K_B), \quad (2.45)$$

$$\partial_t A = -2\alpha AK_A, \quad (2.46)$$

$$\partial_t B = -2\alpha BK_B, \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \partial_t U_\alpha = & -\alpha f \partial_r K_A + \alpha(K_A + 2K_B) \left[\frac{f^2 B \lambda}{A} - U_\alpha (f + \alpha f') \right] + \alpha f (K_B - K_A) \\ & \left(D_B - \frac{2B\lambda}{A} \right), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\partial_t D_A = -2\alpha \left[\partial_r K_A + K_A \left(U_\alpha - \frac{fB\lambda}{A} \right) \right], \quad (2.49)$$

$$\partial_t D_B = -2\alpha \left[\partial_r K_B + K_B \left(U_\alpha - \frac{fB\lambda}{A} \right) \right], \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_A = & -\frac{\alpha}{A} \partial_r U_\alpha - \frac{\alpha}{A} \left\{ \left(U_\alpha - \frac{fB\lambda}{A} \right) \left[U_\alpha - \frac{D_A}{2} - \frac{B\lambda}{A} (f + \alpha f') \right] + \frac{fB\lambda}{A} (D_A - D_B) \right. \\ & \left. - \frac{D_B^2}{4} + A(K_B^2 - K_A^2) - \frac{1}{r} \left[\lambda + D_B - f \left(\frac{B\lambda}{A} + D_A - D_B \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = & -\frac{\alpha}{2A} \partial_r D_B + \frac{\alpha}{2A} \left\{ - \left(U_\alpha - \frac{fB\lambda}{A} \right) D_B - D_B^2 + \frac{D_A D_B}{2} + 2AK_B (K_A + 2K_B) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \left[D_A - 2U_\alpha + \frac{2fB\lambda}{A} - 4D_B - 2\lambda \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\partial_t \lambda = \frac{2\alpha A}{B} \partial_r K_B + \frac{\alpha A D_B}{B} (K_B - K_A). \quad (2.53)$$

con $f' := df/d\alpha$.

Las figuras 2.3 y 2.4 muestran nuevamente la evolución de A y α para el caso regularizado. El sistema se puede ahora evolucionar hasta tiempos muy grandes y en el origen las variables de interés mantienen un comportamiento regular. Las gráficas muestran la evolución hasta $t = 12$.

2.4.2 Sistema II

Nuestro segundo ejemplo es nuevamente un sistema hiperbólico construido a partir de las ecuaciones ADM y la condición de foliación de BM, pero en lugar de utilizar D_A y K_A como variables fundamentales, usamos $\tilde{D} = D_A - 2D_B$ y $K \equiv \text{tr}K := K_A + 2K_B$. Para hacer el sistema hiperbólico eliminamos los términos proporcionales a $\partial_r D_B$ y $\partial_r K_B$ de las ecuaciones de evolución de K y \tilde{D} usando las constricciones. Obtenemos un nuevo sistema fuertemente hiperbólico diferente del Sistema I.

Siguiendo el procedimiento de regularización introducimos nuevamente la variable λ . Como en este caso usamos la constricción de momento para modificar la ecuación de evolución de \tilde{D} , necesitamos reemplazar esta variable por

$$\tilde{U} := \tilde{D} - \frac{4B\lambda}{A}. \quad (2.54)$$

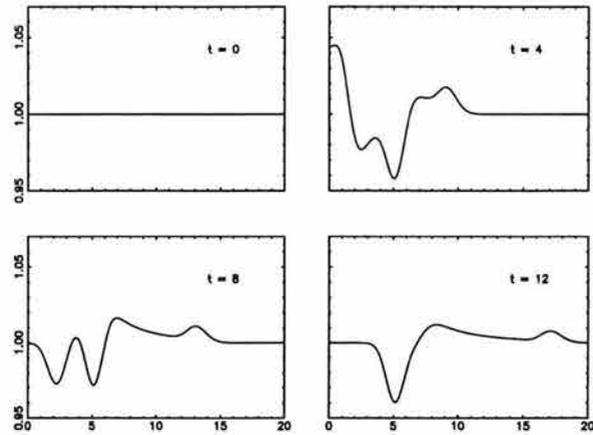


Fig. 2.3: Sistema I regularizado. Las gráficas muestran la evolución de la función métrica A a diferentes tiempos.

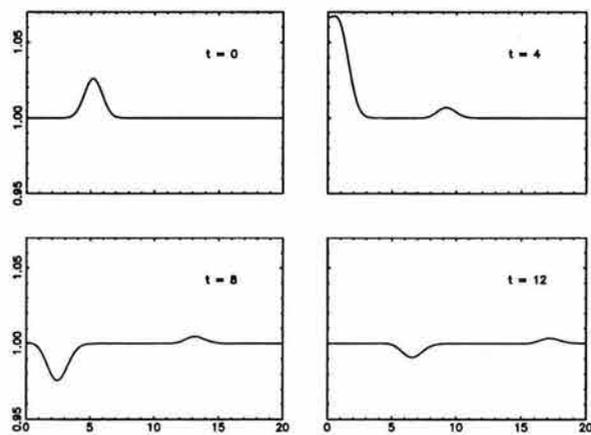


Fig. 2.4: Sistema I regularizado. Las gráficas muestran la evolución de la función de lapso α a diferentes tiempos.

El conjunto final de variables dinámicas es entonces

$$\{\alpha, A, B, D_\alpha, \tilde{U}, D_B, K, K_B, \lambda\}, \quad (2.55)$$

y sus ecuaciones de evolución son:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f K, \quad (2.56)$$

$$\partial_t A = 2\alpha A(2K_B - K), \quad (2.57)$$

$$\partial_t B = -2\alpha B K_B, \quad (2.58)$$

$$\partial_t D_\alpha = -\partial_r(\alpha f K), \quad (2.59)$$

$$\partial_t \tilde{U} = -2\partial_r(\alpha K) + 4\alpha D_B(K - 3K_B) + 8\alpha \left[D_\alpha K_B + \frac{B\lambda}{A}(3K_B - K) \right], \quad (2.60)$$

$$\partial_t D_B = -2\partial_r(\alpha K_B), \quad (2.61)$$

$$\partial_t K = \alpha \left[-4KK_B + 6K_B^2 - \frac{2D_\alpha}{Ar} + K^2 + \frac{D_\alpha}{2A} \left(\tilde{U} + \frac{4\lambda B}{A} \right) - \frac{D_\alpha^2}{A} - \frac{\partial_r D_\alpha}{A} \right], \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B &= \frac{\alpha}{Ar} \left[\frac{\tilde{U}}{2} + \frac{2\lambda B}{A} - D_B - \lambda - D_\alpha \right] + \frac{\alpha}{A} \left[-\frac{D_\alpha D_B}{2} - \frac{\partial_r D_B}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_B}{4} \left(\tilde{U} + \frac{4\lambda B}{A} \right) + AKK_B \right], \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\partial_t \lambda = \frac{2\alpha A}{B} \left[\partial_r K_B - \frac{D_B}{2}(K - 3K_B) \right]. \quad (2.64)$$

Claramente no es necesario mostrar gráficas, ya que la evolución numérica se comporta exactamente de la misma manera que para el Sistema I, con el origen bien comportado.

De esta manera concluimos este capítulo en el que mostramos que la falta de regularidad de las variables geométricas en el origen es a menudo un problema para los códigos de evolución en simetría esférica en relatividad numérica. Hemos mostrado que existen dos tipos de condiciones de regularidad en el origen. Por un lado, existen condiciones de regularidad que garantizan que las variables están bien definidas en el origen. Estas condiciones pueden escribirse como una serie de condiciones de simetría para las diferentes variables en el origen, y pueden ser fácilmente impuestas en las simulaciones numéricas. Sin embargo, también existen condiciones de regularidad relacionadas con la condición de que el espacio tiempo tiene que ser localmente plano en el origen. Juntas, todas estas condiciones de regularidad implican que tenemos más condiciones que satisfacer en $r = 0$ que variables dinámicas, lo que significa que numéricamente algunas condiciones de regularidad se violarán inevitablemente. En esta sección presentamos un algoritmo genérico de regularización que se basa en la introducción de una variable auxiliar que absorbe los términos problemáticos y sobre la cual podemos imponer la condición de frontera extra en $r = 0$. Nuestro algoritmo es similar en espíritu, aunque no en detalle, al algoritmo presentado por Arbona y Bona para el caso particular de la formulación de Bona-Masso [9]. También mostramos la efectividad de nuestro algoritmo en un par de formulaciones diferentes de las ecuaciones de evolución.

Este capítulo nos permitió construir un código de evolución en simetría esférica regularizado. Esto nos permitirá más adelante trabajar en problemas físicos interesantes que de otra forma nos hubiera sido

imposible resolver.

Para concluir con esta primera parte, en los dos siguientes capítulos presentaremos una discusión sobre condiciones de foliación y su importancia en la relatividad numérica.

Capítulo 3

Condición de foliación hiperbólica adaptada a campos de Killing y lapsos densificados

3.1 Introducción

La elección de una foliación adecuada del espacio tiempo es de fundamental importancia cuando se estudia la evolución dinámica de sistemas con campos gravitacionales intensos. En la descomposición 3+1 de la Relatividad General, una foliación del espacio tiempo en hipersuperficies espaciales está descrita en términos de la función de lapso α que mide el intervalo de tiempo propio entre dos hipersuperficies vecinas a lo largo de su dirección normal. La elección de una foliación en particular esta relacionada con la libertad que uno tiene de elegir la coordenada temporal y es por lo tanto arbitraria. En la práctica, sin embargo, uno no puede elegir una foliación antes de iniciar la evolución ya que uno está tratando de resolver para la geometría del espacio-tiempo mismo, así que en lugar de esto, uno debe elegir una condición de foliación, que puede ser una condición geométrica o algebraica que permita calcular la función de lapso de manera dinámica durante la evolución. Las condiciones de foliación aparecen de diferentes formas, y se eligen generalmente equilibrando la comodidad de la implementación con la necesidad de obtener un sistema de coordenadas que se comporte de manera adecuada al problema que se intenta resolver, así como asegurar que el sistema resultante de ecuaciones de evolución se encuentre bien definido (*i.e.* que sus soluciones existen (al menos localmente), son únicas, y son estables en el sentido de que pequeños cambios en los datos iniciales corresponden a pequeños cambios en la solución).

En un artículo reciente [15], se estudió cierta condición de foliación que es determinada a través de una ecuación de evolución hiperbólica para el lapso, y en muchos casos permite construir una foliación que

evita los diferentes tipos de conductas patológicas. Esta condición de foliación, conocida como condición de foliación de Bona-Masso (BM) [13], ha sido utilizada exitosamente para muchas simulaciones numéricas de sistemas gravitacionales tales como hoyos negros (véase por ejemplo [16, 17, 18]). Otras formas de condiciones de foliación hiperbólicas, que generalizan de una manera u otra la propuesta original de Bona y Masso, han sido sugeridas en los últimos años, ejemplos de las cuales se pueden encontrar en [18, 19], y mas recientemente en [20].

En este capítulo discutimos el hecho de que la forma original de la condición de BM (así como la mayoría de sus generalizaciones) tiene dos inconvenientes importantes: Primero, no está bien adaptada a la presencia de campos de Killing en el sentido que si uno la utiliza para evolucionar un espacio-tiempo estático, se puede fácilmente hacer que las líneas en las que medimos el tiempo se alejen de la dirección del campo de Killing. Segundo, la condición estándar de BM no está bien adaptada al caso en el que uno quiere utilizar un lapso densificado ($q := \alpha\gamma^{-1/2}$) como una variable fundamental. Tal lapso densificado ha sido recomendado recientemente en el contexto de reformulaciones hiperbólicas de las ecuaciones de Einstein (véase por ejemplo [21, 22]), y es por lo tanto un asunto importante que hay que considerar. Aquí estudiaremos una versión modificada de la condición de foliación de BM que trata ambos problemas al mismo tiempo. Esta condición modificada de BM ya se ha utilizado en la literatura, pero hasta donde sabemos sus propiedades nunca se han estudiado con detalle. En este capítulo nos limitaremos a estudiar las propiedades de esta condición de foliación independientemente de las ecuaciones de Einstein, y dejaremos el estudio de cómo esta condición se acopla a las ecuaciones de evolución de Einstein para el siguiente capítulo [23].

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sec. 3.2 hacemos una introducción breve a la familia de condiciones de foliación de BM. La sección 3.3 motiva la introducción de la condición modificada de BM desde el punto de vista de la adaptabilidad con los vectores de Killing en las soluciones estáticas y estacionarias. Entonces estudiamos la relación de la condición modificada con lapsos densificados y con la divergencia de las líneas de tiempo coordinado, e introducimos una manera de escribir la condición independiente de las coordenadas. En la sección 3.4 analizamos la hiperbolicidad de la condición modificada de BM. Empezamos discutiendo la manera en la que se escoge el vector de corrimiento, y luego analizamos la hiperbolicidad del sistema acoplado de evolución de lapso-vector de corrimiento. Finalmente, en las secciones 3.5 y 3.6 estudiamos las circunstancias bajo las cuáles la condición modificada de BM evita las singularidades de enfocamiento y los choques de norma.

3.2 La familia de condiciones de foliación de Bona-Masso

La familia de condiciones de foliación de BM [13] ha sido discutida extensamente en la literatura (para una discusión detallada véase [24] y las referencias ahí citadas). Aquí nos limitaremos a hacer una descripción muy breve de sus propiedades principales. La condición de foliación de BM se obtiene pidiendo que la

función de lapso satisfaga la siguiente ecuación de evolución

$$\frac{d}{dt} \alpha \equiv (\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad (3.1)$$

con \mathcal{L}_β la derivada de Lie con respecto al vector de corrimiento β^i , K la traza de la curvatura extrínseca y $f(\alpha)$ una función positiva pero de otro modo arbitraria de α . La condición anterior es una generalización de condiciones de foliación que se han utilizado en códigos de evolución basados en la formulación de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) [4, 5] desde inicios de los 90's [25, 26], y fue propuesta originalmente en el contexto de la re-formulación hiperbólica de Bona-Masso de las ecuaciones de Einstein [10, 11, 12, 13, 14]. Sin embargo, es muy general y puede ser utilizada con cualquier forma de las ecuaciones de evolución 3+1. Como introduciremos una versión modificada de la condición de foliación de BM, nos referiremos de ahora en adelante a la condición (3.1) como la "condición estándar de BM".

Una propiedad muy importante de la condición estándar de BM es el hecho de que los términos que incluyen al vector de corrimiento a través de la derivada de Lie en la ecuación (3.1) son tales que nos garantizan obtener precisamente la misma foliación del espacio tiempo sin importar el valor del vector de corrimiento (esto se verá mas claramente en la ecuación (3.24)). A primera vista, esto parecería ser un requisito natural para cualquier condición de foliación, pero como veremos más adelante esto quizás no sea la propiedad más importante que una condición de foliación debe tener.

Se puede mostrar que la condición de foliación de BM conduce a una ecuación generalizada de onda para el lapso

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha - \alpha^2 f D^2 \alpha = -\alpha^3 f [K_{ij} K^{ij} - (2f + \alpha f') K^2]. \quad (3.2)$$

A partir de esta ecuación se puede ver que la velocidad de onda a lo largo de una dirección específica x^i esta dada por

$$v_g = \alpha \sqrt{f \gamma^{ii}}, \quad (3.3)$$

donde γ_{ij} es la métrica espacial. La expresión anterior explica la necesidad de que $f(\alpha)$ sea positiva: Si no lo fuera, la velocidad de onda no sería real y la ecuación sería elíptica en lugar de hiperbólica. Nótese también que la velocidad de onda (3.3) puede ser menor o mayor que la velocidad de la luz dependiendo del valor de f . Contrario a lo que uno esperaría, tener una velocidad de norma que sea mayor que la velocidad de la luz no conduce a violaciones de causalidad, ya que la velocidad superlumínica solo esta relacionada con la propagación del sistema de coordenadas. De hecho, empíricamente las condiciones de foliación más exitosas para las simulaciones de espacio tiempos con agujeros negros han sido precisamente aquellas que permiten velocidades de norma superlumínicas (un ejemplo de esto es la condición de foliación 1+log mencionada mas adelante).

La referencia [15] muestra que, para algunas elecciones específicas de la función $f(\alpha)$, la condición de foliación estándar de BM puede evitar tanto singularidades de enfocamiento [14] como choques de norma [27]. Profundizaremos en estos puntos en las secciones siguientes.

Un caso particular muy importante de la condición de BM corresponde a la elección $f(\alpha) = 1$, la cual nos lleva a la también llamada “foliación armónica”, para la cual la coordenada temporal obedece una simple ecuación de onda:

$$\square t = g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0 = 0, \quad (3.4)$$

con $g_{\mu\nu}$ la métrica del espacio-tiempo. Esto es, $f = 1$ corresponde al caso en el que la coordenada temporal es una función armónica. Se puede mostrar fácilmente que para la foliación armónica también se tiene la siguiente relación

$$\alpha = h(x^i) \gamma_n^{1/2}, \quad (3.5)$$

con $h(x^i)$ una función arbitraria independiente del tiempo y $\sqrt{\gamma_n}$ la raíz cuadrada del determinante de la 3 métrica relacionada con el elemento de volumen asociado con los observadores que se mueven normales a la hipersuperficie (que difiere del elemento de volumen coordenado en el caso en el que el vector de corrimiento sea diferente de cero).

Otro caso particular que vale la pena mencionar corresponde a la familia “1+log”, para la cual $f(\alpha) = N/\alpha$ con N constante. En este caso se encuentra la siguiente relación entre la función de lapso y los elementos de volumen normales

$$\alpha = h(x^i) + \ln \left(\gamma_n^{N/2} \right), \quad (3.6)$$

lo cual explica el nombre de 1+log. El caso $N = 2$ ha sido el que empíricamente se comporta mejor [16, 17, 18], lo cual la Ref. [15] atribuye (a posteriori) al hecho de que este es el único miembro de la familia 1+log que evita choques de norma al menos aproximadamente. Nótese que para $N = 2$ la velocidad de norma en las regiones asintóticamente planas donde $\alpha \simeq 1$ es $\sqrt{2} > 1$. En las regiones interiores al agujero negro, donde típicamente el lapso colapsa a cero, la velocidad de norma se puede volver extremadamente grande.

Habiendo discutido brevemente las propiedades de la condición de foliación estándar de BM, regresaremos a nuestra propuesta de una versión modificada de esta condición, motivada por el análisis de espacio-tiempos estacionarios.

3.3 Condición de foliación modificada de Bona-Masso

Consideremos por un momento un espacio-tiempo estático o estacionario, y supongamos que elegimos un sistema de coordenadas en el que los coeficientes de la métrica son independientes del tiempo. Mas aún, supongamos que nuestro sistema de coordenadas es tal que el vector de corrimiento es distinto de cero. Uno pensaría en primera instancia que tener un vector de corrimiento distinto de cero implica que el espacio-tiempo no puede ser estático y que a lo más podría ser estacionario. Esto no es correcto, ya que uno puede escribir un espacio-tiempo estático en un sistema de coordenadas con vector de corrimiento distinto de cero y donde los coeficientes métricos sean independientes del tiempo. Un ejemplo de esto es la métrica de Schwarzschild escrita en las coordenadas de Kerr-Schild o Painlevé-Gullstrand.

Suponiendo que tenemos la situación en que el espacio-tiempo es estático o estacionario, las ecuaciones de evolución de ADM implican en particular que

$$\begin{aligned}\partial_t \gamma_{ij} &= -2\alpha K_{ij} + \mathcal{L}_\beta \gamma_{ij} \\ &= -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i = 0,\end{aligned}\tag{3.7}$$

con D_i la derivada covariante espacial. De la última ecuación se puede obtener

$$\partial_t \gamma^{1/2} = -\gamma^{1/2} (\alpha K - D_i \beta^i) = 0,\tag{3.8}$$

con $\gamma^{1/2}$ los elementos coordenados de volumen. La traza de la curvatura extrínseca debe de estar dada por

$$K = \frac{D_i \beta^i}{\alpha}.\tag{3.9}$$

Veamos ahora si la condición de foliación estándar de Bona-Masso es compatible con el carácter independiente del tiempo de nuestro espacio-tiempo en el sentido de que predice un lapso independiente del tiempo. Sustituyendo la expresión para K en la ecuación (3.1) encontramos

$$\partial_t \alpha = \beta^i \partial_i \alpha - 2\alpha^2 f(\alpha) K\tag{3.10}$$

$$= \beta^i \partial_i \alpha - 2\alpha f(\alpha) D_i \beta^i.\tag{3.11}$$

Es claro de mirar esta expresión que para $f(\alpha)$ arbitraria, $\partial_t \alpha$ en general no se anulará. Esto es, el lapso evolucionará alejándose de su valor preferencial y como consecuencia de esto la métrica espacial no se mantendrá independiente del tiempo. esto indica que la condición de foliación estándar no está bien adaptada a la evolución de espacio-tiempos estacionarios.

Una versión modificada de la condición de foliación de BM que está bien adaptada a dichos espacio-tiempos independientes del tiempo puede obtenerse fácilmente pidiendo que

$$\partial_t \alpha = \frac{\alpha f(\alpha)}{\gamma^{1/2}} \partial_t \gamma^{1/2},\tag{3.12}$$

lo que garantiza automáticamente que el lapso no evolucionará si la métrica espacial es independiente del tiempo. Uno puede integrar trivialmente la última ecuación y encontrar

$$\gamma^{1/2} = F(x^i) \exp \left\{ \int \frac{d\alpha}{\alpha f(\alpha)} \right\},\tag{3.13}$$

con $F(x^i)$ una función independiente del tiempo. Esto nos dice que existe una relación funcional muy general entre α y $\gamma^{1/2}$. Para $f(\alpha) = \text{constante}$ esta relación es una ley de potencias, pero en otros casos es más general (por ejemplo, la bien conocida foliación “1+log” se obtiene usualmente con $f = 2/\alpha$, lo que nos da una relación exponencial entre α y $\gamma^{1/2}$). Relaciones funcionales entre α y $\gamma^{1/2}$ han sido consideradas anteriormente en el contexto de encontrar re-formulaciones hiperbólicas de las ecuaciones de evolución 3+1. Por ejemplo en la referencia [28], Frittelli y Reula proponen una relación de ley de potencias general, la cual como se acaba de mencionar es una forma particular de (3.13)

con $f(\alpha)$ constante. Mas recientemente, Sarbach y Tiglio [19] han considerado una relación funcional completamente general con la única restricción de que $d\alpha/d\gamma > 0$, lo que claramente incluye (3.13) (pidiendo que $f(\alpha) > 0$ se garantiza que $d\alpha/d\gamma > 0$). Lo que hace que (3.13) sea más interesante que una relación mas general es el hecho de que se puede aprender mucho acerca de las propiedades de la foliación estudiando el efecto de diferentes formas de $f(\alpha)$.

Sustituyendo ahora (3.8) en (3.12) encontramos

$$\partial_t \alpha = -\alpha f(\alpha) (\alpha K - D_i \beta^i) . \quad (3.14)$$

Esta es la versión modificada de la condición de foliación de BM que se quiere estudiar aquí (comparese con (3.1)). Es conveniente en este punto hacer algunos comentarios. Primero, debemos mencionar que la versión modificada de BM definida anteriormente ha sido usada antes en la literatura en las Refs. [29, 30]. Ambas referencias estudian la evolución numérica del espacio-tiempo de Schwarzschild escrito en coordenadas de Kerr-Schild, e intentan mantener la estabilidad de la solución estática (exacta) durante la simulación numérica. Para ésto se requiere usar una condición de foliación que mantenga el lapso igual a su valor inicial en el límite al continuo, pero que permita alguna dinámica para responder a los errores de truncamiento numérico a resoluciones finitas. La condición modificada de BM es usada en estas referencias precisamente por la razón antes mencionada, pero no se hace ninguna sugerencia sobre su uso en un caso más general ni se estudian sus propiedades.

Segundo, dado que la condición (3.14) no incluye los términos de la derivada de Lie del lapso con respecto al vector de corrimiento, *no* nos dará la misma foliación del espacio-tiempo para diferentes elecciones del vector de corrimiento, *i.e.* la foliación del espacio-tiempo que uno obtiene dependerá de la elección del vector de corrimiento. Creemos que ésto no es un problema grave ya que en ciertas situaciones uno podría querer escoger una condición de foliación y un vector de corrimiento que estén cercanamente relacionados.

También, creemos que usar una condición de foliación que sea compatible con una solución estática es un requerimiento necesario si uno quiere coordenadas que busquen las simetrías del tipo discutidos por Gundlach y Garfinkle [31] y por Brady *et.al* [32], que sean capaces de encontrar los campos de Killing que los espacio-tiempos estáticos (o estacionarios) tienen, o los campos de Killing aproximados que muchos sistemas astrofísicos interesantes tendrán a grandes tiempos. Por supuesto, tener una condición de foliación que es compatible con la estaticidad no es suficiente, uno también tiene que tener una condición para el vector de corrimiento que tenga la misma propiedad. De otra forma, la evolución del vector de corrimiento también puede producir una desviación de las coordenadas en las que todo se ve estático. En esta tesis no discutiremos el tema de la elección del vector de corrimiento.

Y finalmente, aunque se impusieran las condiciones de norma (tanto para el lapso como para el vector de corrimiento) que mantienen explícitamente estática la solución estática, esto no nos garantiza que se puede encontrar la dirección de Killing si uno comienza en un sistema de coordenadas no apropiado. Lo único que garantiza es que si iniciamos con unas coordenadas adaptadas a dicha dirección de Killing no

nos desviaremos de ella nunca.

3.3.1 Lapso densificado

Desde inicios de los 90's, muchas re-formulaciones de las ecuaciones de evolución 3+1 de la relatividad general han sido propuestas [11, 12, 13, 14, 33, 28, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 21, 40, 22]. El propósito principal de muchas de estas re-formulaciones ha sido reconstruir las ecuaciones de evolución de Einstein como un sistema fuerte o simétricamente hiperbólico motivado por el hecho de que para dichos sistemas se puede probar que las ecuaciones de evolución están bien definidas, y con la esperanza de que ésto conlleve a mejoras en las simulaciones numéricas, tanto en términos de estabilidad como en términos de condiciones de frontera consistentes y bien comportadas.

Aunque no es el propósito de esta sección estudiar las diferentes formulaciones hiperbólicas de las ecuaciones de evolución de Einstein, hay un punto relacionado que es crucial para la discusión de las condiciones de foliación. Se sabe que existen dos problemas principales cuando se intenta pasar de las ecuaciones de evolución estándar de ADM a una formulación fuerte o simétricamente hiperbólica. Un problema está asociado con la existencia de evoluciones numéricas que al violar las constricciones y que destruyen la hiperbolicidad y para solucionarlo se requiere sumar a las ecuaciones de evolución múltiplos de las ecuaciones de constricción, de diferentes maneras (los modos que violan las constricciones no se eliminan, solo se transforman de tal manera que permiten construir un sistema hiperbólico).

El segundo problema, más directamente relacionado con nuestra discusión, es la observación de que no es posible construir una formulación fuertemente hiperbólica de las ecuaciones 3+1 de evolución si la función de lapso se considera como función del espacio y del tiempo determinada de manera a priori. Dos caminos diferentes se han considerado para resolver este segundo problema. El primer camino, adoptado en la re-formulación hiperbólica de Bona-Masso [11, 12, 13, 14], fue proponer una ecuación de evolución para el lapso (ecuación (3.1) de la sección anterior), y de esta forma construir un sistema de ecuaciones fuertemente hiperbólico donde el lapso es considerado como otra variable dinámica. Este mismo camino está siendo seguido por Lindblom y Scheel [20], donde generalizaciones de la condición estándar de foliación de BM y de la condición sobre el vector de corrimiento "Γ-driver" [18] han sido utilizadas para construir un sistema simétricamente hiperbólico que incluye al lapso y al vector de corrimiento como variables dinámicas. El segundo camino es no tomar al lapso, sino al lapso *densificado* $q := \alpha\gamma^{-1/2}$, como una función prescrita del espacio y del tiempo (véase [21, 22] y las referencias que ahí se encuentran). Ambos caminos han sido exitosos construyendo re-formulaciones fuertemente hiperbólicas de las ecuaciones de evolución de Einstein. Los diferentes enfoques están relacionados, pero no son equivalentes, como puede verse fácilmente si uno considera por un momento la condición de foliación de BM en el caso $f = 1$ (el caso armónico). Como ya vimos, en este caso el lapso toma la siguiente forma

$$\alpha = h(x^i) \gamma_n^{1/2}, \quad (3.15)$$

con $\gamma_n^{1/2}$ los elementos de volumen asociados con los observadores normales, y $h(x^i)$ una función arbitraria

del espacio. Podemos de hecho convertir la función $h(x^i)$ en una función arbitraria tanto del espacio y del tiempo si añadimos un término de fuente a la condición estándar de BM de la siguiente manera

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K + H(x, t), \quad (3.16)$$

con $H(x, t)$ arbitraria. Por otro lado, la condición de que el lapso densificado sea una función conocida del espacio-tiempo toma la siguiente forma

$$\alpha = q(x, t) \gamma^{1/2}, \quad (3.17)$$

donde $\gamma^{1/2}$ son los elementos de volumen *coordenados*. En el caso en el que el vector de corrimiento es cero, los elementos de volumen normales y coordenados coinciden, y la condición de BM puede verse como una generalización de la condición de que el lapso densificado esté prescrito. Pero cuando el vector de corrimiento es distinto de cero, esto deja de ser cierto.

Se puede, de hecho, reescribir la condición estándar de BM en términos del lapso densificado q de la siguiente manera

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta) q = -q^2 \gamma^{1/2} (f - 1) K, \quad (3.18)$$

lo que muestra que aún para $f = 1$, el lapso densificado q evolucionará dinámicamente debido al término de la derivada de Lie en la dirección del vector de corrimiento.

La observación crucial en este punto es que cuando la condición modificada de BM (3.14) es escrita en términos del lapso densificado, toma la forma

$$\partial_t q = -q (f - 1) \left[q \gamma^{1/2} K - D_i \beta^i \right]. \quad (3.19)$$

Ahora es claro que tomando $f = 1$ esta ecuación se reduce al caso de un lapso densificado estático (el caso de un lapso densificado prescrito que no sea independiente del tiempo puede ser fácilmente obtenido sumando un término fuente a la ecuación anterior). La condición modificada de foliación de BM debe ser vista como una generalización natural del lapso densificado prescrito, y debería de estar bien adaptado a las re-formulaciones hiperbólicas de las ecuaciones de Einstein que usan un lapso densificado [23].

3.3.2 Divergencia de las líneas de tiempo y campos de Killing

De las ecuaciones ADM puede fácilmente mostrarse que

$$\nabla_\mu t^\mu = \frac{1}{\alpha} \left[\partial_t \alpha - \alpha (\alpha K - D_i \beta^i) \right], \quad (3.20)$$

donde t^μ es el vector tangente a las líneas en la que medimos el tiempo 3+1. Este vector, en términos de los vectores normal y de corrimiento está definido como

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu. \quad (3.21)$$

La ecuación (3.20) implica que la condición de foliación modificada de BM también puede escribirse como

$$\partial_t \alpha = \alpha \left(\frac{f}{f+1} \right) \nabla_\mu t^\mu. \quad (3.22)$$

Esta última ecuación muestra que la evolución del lapso está directamente relacionada con la divergencia de las líneas de tiempo. Entonces vemos que mientras la condición original de foliación de BM es tal que el lapso reacciona a la divergencia del vector asociado a los observadores normales, la condición modificada asegura que el lapso reacciona a la divergencia del vector asociado a las líneas de tiempo coordinado.

Supongamos por el momento que nuestro espacio-tiempo tiene un campo de Killing temporal v^μ que apunta hacia el futuro. En este caso tenemos

$$\nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_\mu v^\mu = 0. \quad (3.23)$$

Si ahora suponemos que nuestras líneas de tiempo están orientadas en la dirección del campo de Killing, la ecuación (3.22) automáticamente implica que la función de lapso es independiente del tiempo. Esto, por supuesto, ha sido la principal motivación para modificar la condición de BM.

3.3.3 Ecuación de onda generalizada para la función de tiempo

En la referencia [15] se mostró que la condición de foliación estándar de BM puede ser escrita como una ecuación de onda generalizada para una “función de tiempo” ϕ de la siguiente manera

$$(g^{\mu\nu} - a n^\mu n^\nu) \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = 0, \quad (3.24)$$

con n^μ el vector unitario normal a las hipersuperficies espaciales y $a := 1/f(\alpha) - 1$. Los diferentes miembros de la foliación espacio-temporal pueden ser obtenidos como los conjuntos de niveles de la función de tiempo ϕ .

Se puede también construir dicha ecuación de foliación para la condición modificada de BM (3.14). La ecuación correspondiente para la función de tiempo ϕ resulta ser

$$\left(g^{\mu\nu} - \frac{a}{\alpha} t^\mu n^\nu \right) \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \nabla_\mu \left(\frac{\beta^\mu}{\alpha^2} \right). \quad (3.25)$$

Escribiendo la ecuación (3.25) en el sistema de coordenadas estándar 3+1 adaptado a la foliación, no es difícil mostrar que de hecho esta es equivalente a la condición de foliación (3.14). Por otro lado, nótese que cuando esta ecuación se escribe en un sistema de coordenadas distinto, el vector t^μ no tiene porque estar alineado con el vector tangente a las líneas de tiempo 3+1. También, el vector de corrimiento β^μ tendrá una componente temporal distinta de cero. De cualquier forma, aún tenemos

$$\beta^\mu n_\mu = 0. \quad (3.26)$$

En el caso en el que el vector de corrimiento sea cero, la ecuación (3.25) se reduce a la ecuación (3.24), que es solo otra manera de decir que en ese caso las condiciones original y modificada de BM coinciden. Cuando el vector de corrimiento no es cero, ambas ecuaciones difieren. La ecuación de foliación para la condición original de BM no hace referencia al vector de corrimiento, lo que implica que la foliación es

independiente de nuestra elección de dicho vector (como se mencionó anteriormente). La ecuación de foliación modificada, sin embargo, claramente depende de la elección del vector de corrimiento, entonces la foliación del espacio-tiempo que se obtiene dependerá de como se elija dicho vector.

La ecuación de foliación (3.25) es muy útil para entender las propiedades de la condición de foliación de una manera covariante de forma que es independiente de las ecuaciones de campo de Einstein.

3.4 Hiperbolicidad

El concepto de hiperbolicidad es de importancia fundamental en el estudio de ecuaciones de evolución asociados con un problema de Cauchy. Que el sistema sea debilmente hiperbólico, implica que el sistema de ecuaciones es causal, *i.e.* que la solución en un punto dado del espacio-tiempo depende solo de los datos en una región de soporte compacto que se encuentra en el pasado de dicho punto (el cono característico). Las versiones fuertes de hiperbolicidad pueden ser usadas para probar rigurosamente que el sistema de ecuaciones esta bien definido, ésto es, que sus soluciones existen (al menos localmente), son únicas, y son estables en el sentido de que pequeños cambios en los datos iniciales corresponden a pequeños cambios en la solución. La hiperbolicidad también nos permite construir sistemas de evolución con datos iniciales y condiciones de frontera bien definidos, lo que implica que se pueden obtener condiciones de frontera bien comportadas para simulaciones numéricas con fronteras artificiales.

Debido a ésto, el asegurar que un sistema de ecuaciones de evolución es hiperbólico se ha convertido en un importante requerimiento para las nuevas formulaciones de las ecuaciones 3+1. En nuestro caso, como se está estudiando una condición de foliación que es obtenida a través de una ecuación de evolución para el lapso, la pregunta sobre la hiperbolicidad de dicha ecuación de evolución se vuelve importante. Como queremos investigar esta situación de tal manera que la condición de norma sea independiente de las ecuaciones de Einstein, consideraremos de ahora en adelante un espacio-tiempo de fondo (que puede o no obedecer las ecuaciones de Einstein), y estudiaremos nuestra condición de foliación en este fondo fijo.

3.4.1 Vector de corrimiento prescrito

Como la ecuación de foliación (3.25) involucra el vector de corrimiento β^μ , para poder analizar la hiperbolicidad se debe de decir algo acerca de como evoluciona en el tiempo dicho vector. La manera más simple es suponer que se tiene un vector de corrimiento prescrito, *i.e.* no dinámico. Sin embargo, ésto inmediatamente lleva a la siguiente pregunta: ¿Qué significa tener un vector de corrimiento prescrito desde un punto de vista covariante?

Claramente, no podemos solo suponer que el vector de corrimiento es un campo-vectorial conocido *a priori* en el espacio-tiempo. Esto se debe a que el vector de corrimiento debe siempre ser paralelo a las hipersuperficies espaciales que constituyen la foliación, y estas hipersuperficies son precisamente las que se obtienen resolviendo la ecuación de evolución del lapso. Esto significa que inevitablemente, mientras

se resuelve la ecuación que nos permite determinar las hipersuperficies, el vector de corrimiento debe de evolucionar dinámicamente para garantizar que se mantiene paralelo a ellas. De esta manera, lo más que se puede pedir es que la magnitud y la dirección del vector de corrimiento *sobre una hipersuperficie dada* sean funciones prescritas del espacio y del tiempo.

Propondremos entonces la ecuación de evolución más general para el vector de corrimiento que es compatible con el hecho de que dicho vector es tangente a las hipersuperficies espaciales. Para esto procederemos de la siguiente forma: En una hipersuperficie dada uno puede elegir una base de vectores espaciales e_i^μ , y expresar el vector de corrimiento en términos de dicha base:

$$\beta^\mu = e_i^\mu b^i, \quad (3.27)$$

donde b^i son las componentes del vector de corrimiento en la base considerada. Ahora identificaremos esta base con la base espacial de las coordenadas estándar 3+1. Esto significa que la base espacial e_i^μ , junto con el vector temporal t^μ , forman una base coordenada para el espacio-tiempo en el punto considerado (forman la base coordenada estándar 3+1), lo que implica la siguiente relación de conmutación

$$t^\nu \partial_\nu e_i^\mu = e_i^\nu \partial_\nu t^\mu. \quad (3.28)$$

Usando esta relación, se puede obtener la siguiente ecuación de evolución muy general para el vector de corrimiento:

$$t^\nu \partial_\nu \beta^\mu = \beta^\nu \partial_\nu t^\mu + s^\mu, \quad (3.29)$$

donde $s^\mu = e_i^\mu t^\nu \partial_\nu b^i$. Nótese que la última ecuación es completamente covariante aunque esté escrita en términos de derivadas parciales, ya que los símbolos de Christoffel se cancelan. Si ahora suponemos que las componentes b^i del vector de corrimiento en la base coordenada espacial 3+1 son funciones prescritas del espacio-tiempo, entonces podemos considerar a s^μ como términos fuente en el análisis de hiperbolicidad.

Usaremos la ecuación (3.29) anterior como nuestra ecuación de evolución general para el vector de corrimiento. Nótese que en el caso particular en el que nos restringimos al sistema coordenado 3+1, para el cual $t^\mu = (1, 0, 0, 0)$, esta ecuación se reduce a

$$\partial_t \beta^i = \partial_t b^i, \quad (3.30)$$

que es lo que se espera.

3.4.2 Hiperbolicidad de la ecuación de foliación

Estamos interesados en estudiar la hiperbolicidad de la condición de foliación modificada de BM de tal manera que sea independiente de las ecuaciones de Einstein. Para hacer esto suponemos que tenemos un espacio-tiempo de fondo con métrica $g_{\mu\nu}$, y estudiamos la ecuación de foliación (3.25), la cual repetimos aquí por claridad:

$$\left(g^{\mu\nu} - \frac{a}{\alpha} t^\mu n^\nu \right) \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \nabla_\mu \left(\frac{\beta^\mu}{\alpha^2} \right). \quad (3.31)$$

Aquí ϕ es una función escalar cuyos conjuntos de nivel identifican los elementos de la foliación, y $a := 1/f(\alpha) - 1$. En términos de ϕ , la función de lapso y el vector unitario normal pueden ser expresados como

$$\alpha = (-\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi)^{-1/2}, \quad (3.32)$$

$$n_\mu = -\alpha \nabla_\mu \phi. \quad (3.33)$$

Ahora nos concentraremos en un punto sobre una hipersuperficie, y construiremos coordenadas localmente planas en esta vecindad. Además definiremos las siguientes cantidades a primer orden

$$\partial_t \phi \equiv \Pi, \quad (3.34)$$

$$\partial_i \phi \equiv \Psi_i. \quad (3.35)$$

El lapso y el vector unitario normal se convierten en

$$\alpha = (\Pi^2 - \Psi^2)^{-1/2}, \quad (3.36)$$

$$n^\mu = \alpha (\Pi, -\Psi^i), \quad (3.37)$$

con $\Psi^2 \equiv \sum \Psi_i^2$. Nótese que, como estamos en coordenadas localmente planas, no hay diferencia entre los índices espaciales covariantes y contravariantes, así que los usaremos indiscriminadamente.

Por otro lado, como el vector de corrimiento es paralelo a la hipersuperficie debemos de tener

$$\beta^\mu n_\mu = 0, \quad (3.38)$$

lo que nos permite expresar la componente β^0 como

$$\beta^0 = -\frac{\beta^i \Psi_i}{\Pi}. \quad (3.39)$$

Con las definiciones anteriores podemos reescribir la ecuación de foliación (3.31) de la siguiente forma:

$$-(P \alpha^2 - ((1+a)\Pi^2 + \Psi^2) Q) \partial_t \Pi + \frac{\Psi_i}{\alpha^2 \Pi} \partial_t \beta^i + B^m \partial_m \Pi + C^{mj} \partial_m \Psi_j - \frac{1}{\alpha^2} \partial_m \beta^m = 0, \quad (3.40)$$

y donde hemos definido

$$P := (1+a)\Pi^2 - \Psi^2, \quad (3.41)$$

$$Q := \frac{\beta^i \Psi_i}{\Pi^2}, \quad (3.42)$$

$$B^m := -((1+a)\Pi^2 + \Psi^2) \frac{\beta^m}{\Pi} + (2a\alpha^2 - (2+a)Q) \Pi \Psi^m, \quad (3.43)$$

$$C^{mj} := \delta^{mj} - \Psi^m (a\alpha^2 \Psi^j - (2+a)\beta^j). \quad (3.44)$$

Nótese que para llegar a la ecuación (3.40) hemos usado el hecho de que

$$\partial_t \Psi_i = \partial_i \Pi, \quad (3.45)$$

Podemos reescribir la ecuación de evolución para el vector de corrimiento que se introdujo en la sección anterior, la ec. (3.29), en nuestras coordenadas localmente planas para hallar que

$$2\alpha^2\Psi_m\beta^m\Psi^i\partial_t\Pi + \Pi\partial_t\beta^i - N^{im}\partial_m\Pi + L^{ijm}\partial_m\Psi_j - \Psi^m\partial_m\beta^i - \frac{s^i}{\alpha^2} = 0, \quad (3.46)$$

donde ahora

$$N^{im} := \Pi Q\delta^{im} + 2\alpha^2\Pi\Psi^i(Q\Psi^m + \beta^m), \quad (3.47)$$

$$L^{ijm} := (\delta^{ij} + 2\alpha^2\Psi^i\Psi^j)\beta^m. \quad (3.48)$$

Las ecuaciones (3.40) y (3.46) pueden ahora ser usadas para encontrar las siguientes ecuaciones de evolución para Π , y la parte espacial del vector de corrimiento β^i :

$$\partial_t\Pi = \frac{1}{T_1} \left(T_2^m\partial_m\Pi + T_3^{jm}\partial_m\Psi_j + T_4^{jm}\partial_m\beta^j + F^0 \right), \quad (3.49)$$

$$\partial_t\beta^i = D_1^{im}\partial_m\Pi + D_2^{ijm}\partial_m\Psi_j + D_3^{ijm}\partial_m\beta^j + F^i, \quad (3.50)$$

donde

$$T_1 = P(Q - \alpha^2), \quad (3.51)$$

$$T_2^m = \frac{P}{\Pi}\beta^m - \Pi\Psi^m \left(2a\alpha^2 - \frac{PQ}{\Pi^2} \right), \quad (3.52)$$

$$T_3^{jm} = -\delta^{jm} + a\Psi^j(\alpha^2\Psi^m - \beta^m) - \frac{\beta^j\Psi^m}{\alpha^2\Pi^2}, \quad (3.53)$$

$$T_4^{jm} = \frac{1}{\alpha^2} \left(\delta^{jm} - \frac{\Psi^j\Psi^m}{\Pi^2} \right), \quad (3.54)$$

$$F^0 = \frac{\Psi_i s^i}{\alpha^4\Pi}, \quad (3.55)$$

$$D_1^{im} = Q \left[\delta^{im} + 2\alpha^2\Psi^i \left(\Psi^m + \frac{\beta^m}{Q} - \Pi\frac{T_2^m}{T_1} \right) \right], \quad (3.56)$$

$$D_2^{ijm} = -\frac{\delta^{ij}\beta^m}{\Pi} - \frac{2\alpha^2\Psi^i}{\Pi} \left(\Psi^j\beta^m + \frac{Q\Pi^2 T_3^{jm}}{T_1} \right), \quad (3.57)$$

$$D_3^{ijm} = \frac{1}{\Pi} \left(\delta^{ij}\Psi^m - 2\alpha^2\Pi^2 Q\Psi^i\frac{T_4^{jm}}{T_1} \right), \quad (3.58)$$

$$F^i = \frac{1}{\Pi} \left(\frac{s^i}{\alpha^2} - 2\alpha^2\Pi^2 Q\Psi^i\frac{F^0}{T_1} \right). \quad (3.59)$$

Las ecuaciones (3.49) y (3.50), junto con la ec. (3.45), forman nuestro conjunto cerrado de ecuaciones de evolución. Véase que estas ecuaciones son solo válidas si $\alpha^2 \neq Q$, el caso $\alpha^2 = Q$ se vuelve degenerado. La razón por la que se degenera es porque si $\alpha^2 = Q$, entonces $\beta^i\Psi_i = (\alpha\Pi)^2$, lo que implica que $t^0 = \alpha n^0 + \beta^0 = \alpha^2\Pi - \beta^i\Psi_i/\Pi = 0$. Esto significa que el vector t^μ no tiene componente temporal y la ecuación (3.29) deja de ser una ecuación de evolución para el vector de corrimiento. Que ésto es puramente un problema de coordenadas puede ser visto del hecho de que siempre podemos hacer un boost de nuestras coordenadas localmente planas de tal manera que Ψ_i se vuelva cero y el problema desaparezca.

Para determinar si el sistema de ecuaciones de evolución es o no hiperbólico, primero lo escribimos en notación matricial. Comenzamos por definir el vector \mathbf{u} de la siguiente manera

$$\mathbf{u} = (\Pi, \Psi_x, \Psi_y, \Psi_z, \beta^x, \beta^y, \beta^z). \quad (3.60)$$

Entonces el sistema de ecuaciones puede expresarse como

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{M}^x \partial_x \mathbf{u} + \mathbf{M}^y \partial_y \mathbf{u} + \mathbf{M}^z \partial_z \mathbf{u} + \mathbf{s}, \quad (3.61)$$

donde las matrices Jacobianas \mathbf{M}^i y el vector fuente \mathbf{s} dependen de las u 's pero no de sus derivadas.

La matriz \mathbf{M}^x tiene la forma particular

$$\mathbf{M}^x = \begin{pmatrix} T_2^x/T1 & T_3^{jx}/T1 & T_4^{jx}/T1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_1^{ix} & D_2^{ijx} & D_3^{ijx} \end{pmatrix}, \quad (3.62)$$

con $i, j = x, y, z$. Las matrices \mathbf{M}^y y \mathbf{M}^z tienen estructuras similares.

Habiendo escrito nuestro sistema de ecuaciones en la forma (3.61), podemos ahora estudiar las propiedades de hiperbolicidad. Para hacer ésto primero debemos construir el "símbolo principal" $M^i n_i$, donde n_i es un vector unitario arbitrario. El sistema se dice que es fuertemente hiperbólico (en el mismo sentido en el que se había definido anteriormente) si los eigenvalores del símbolo principal son reales y existe un conjunto completo de eigenvectores para todo n_i ; más aún, se dice que el sistema es simétricamente hiperbólico si el símbolo principal puede ser simetrizado de tal manera que es independiente de n_i [41]. Si, por el otro lado, los eigenvalores son reales, pero no existe un conjunto completo de eigenvectores, el sistema es solamente débilmente hiperbólico. Aquí utilizaremos un camino útil cuando todas las direcciones tienen estructuras equivalentes: Encontraremos los eigenvalores de una de las matrices Jacobianas M^i la que por inspección puede ser generalizada más tarde a cualquier dirección arbitraria. Nos concentraremos en la matriz M^x , y los resultados para las otras dos matrices pueden obtenerse de manera directa.

Los eigenvalores de \mathbf{M}^x son

$$\lambda_{\pm} = \frac{\Pi}{P} (a\Psi_x \pm R), \quad (3.63)$$

$$\lambda^{(3)} = \frac{\beta^x - \Psi_x \alpha^2}{\Pi(Q - \alpha^2)}, \quad (3.64)$$

$$\lambda^{(4)} = \lambda^{(5)} = \frac{\Psi_x}{\Pi}, \quad (3.65)$$

$$\lambda^{(6)} = \lambda^{(7)} = 0, \quad (3.66)$$

con $R = \sqrt{P - a\Psi_x^2}/\alpha\Pi$.

Como era de esperarse, dos de los eigenvalores son cero debido al hecho de que dos de las columnas de la matriz son cero. De los restantes eigenvalores, $\lambda^{(3)}$, $\lambda^{(4)}$ y $\lambda^{(5)}$ son claramente reales, pero λ_{\pm}

involucra raíces cuadradas a través de R así que éstas requieren un análisis más cuidadoso. De cualquier forma, inspeccionando las expresiones para λ_{\pm} es fácil ver que, aunque están escritos de otra forma, estos eigenvalores son idénticos a los encontrados en la Ref. [15] para el caso de la condición de foliación estándar de BM. Como en la referencia se muestra que estos eigenvalores son siempre complejos para $f(\alpha) < 0$, siempre reales para $0 < f(\alpha) \leq 1$ y pueden siempre hacerse reales para $f(\alpha) > 1$ a través de una adecuada orientación del sistema de coordenadas, concluimos que nuestro sistema de ecuaciones es hiperbólico, al menos débilmente, siempre que $f > 0$.

El hecho de que dos de los eigenvalores sean idénticos a aquellos encontrados en el caso de la condición de foliación estándar de BM es sorprendente. Uno hubiera esperado que, como la condición modificada de BM depende de la elección del vector de corrimientos, este vector debería de haber afectado estos eigenvalores. El hecho de que estos eigenvalores permanezcan sin cambios puede entenderse mejor en el sistema de coordenadas 3+1. Hacemos este análisis en el apéndice A.

Habiendo encontrado que las ecuaciones son al menos débilmente hiperbólicas, ahora mostraremos que son fuertemente hiperbólicas. Para ésto debemos de ver si existe un conjunto completo de eigenvectores. Los eigenvectores asociados con la matriz M^x son:

$$e_{\pm} = [\lambda_{\pm}, 1, 0, 0, (\Psi_x B_{\pm} \pm R) A_{\pm}, \Psi_y B_{\pm} A_{\pm}, \Psi_z B_{\pm} A_{\pm}], \quad (3.67)$$

$$e^{(3)} = \left[\frac{1}{\alpha^2} \left(\Psi_x - \frac{\beta^x}{\alpha^2} \right), \frac{\Pi}{\alpha^2} \left(1 - \frac{Q}{\alpha^2} \right), 0, 0, \Pi \left(1 - \frac{Q}{\alpha^2} \right) + \Psi_x W, \Psi_y W, \Psi_z W \right], \quad (3.68)$$

$$e^{(4)} = \left[0, 0, 0, 0, \frac{\Psi_x \Psi_y}{\Pi^2 - \Psi_x^2}, 1, 0 \right], \quad (3.69)$$

$$e^{(5)} = \left[0, 0, 0, 0, \frac{\Psi_x \Psi_z}{\Pi^2 - \Psi_x^2}, 0, 1 \right], \quad (3.70)$$

$$e^{(6)} = [0, Z^1, 1, 0, Z^2, Z^3, Z^4], \quad (3.71)$$

$$e^{(7)} = [0, Z^5, 0, 1, Z^6, Z^7, Z^8], \quad (3.72)$$

donde

$$B_{\pm} = 2 \left(\frac{\Psi_x}{\Pi} \lambda_{\pm} - 1 \right), \quad (3.73)$$

$$A_{\pm} = \frac{\alpha^2 \Pi^2}{(\Pi^2 - \Psi_x^2)(P - a\Psi_x^2)} \left\{ (\alpha^{-2} - a\Psi_x^2) Q \Psi_x - (P - 2a\Psi_x^2) \beta^x + (\beta^y \Psi_y + \beta^z \Psi_z) \frac{P \lambda_{\pm}}{\Pi} \right\}, \quad (3.74)$$

$$W = 2\Pi (\beta^x - Q\Psi_x). \quad (3.75)$$

Las funciones Z^i son expresiones largas cuya forma explícita no se necesita en lo siguiente, así que no las escribiremos.

Se sabe que aquellos eigenvectores que corresponden a diferentes eigenvalores son linealmente independientes. Los eigenvectores asociados con los eigenvalores degenerados $\lambda^{(4)}$, $\lambda^{(5)}$ y $\lambda^{(6)}$, $\lambda^{(7)}$, se puede ver que son independientes por inspección. Entonces, los eigenvectores dados anteriormente forman un conjunto completo. Esto, junto con el hecho de que los eigenvalores son reales para $f > 0$ nos permite concluir que el sistema de ecuaciones de evolución (3.45,3.49,3.50) es fuertemente hiperbólico si $f > 0$.

3.5 Evasión de singularidades

En la referencia [15] se mostró que la condición de foliación original de BM puede evitar las llamadas “singularidades de enfocamiento” (que se definen como el lugar en el que los elementos espaciales de volumen tienden a cero [14]) dependiendo de la forma que la función $f(\alpha)$ tome en el límite en el que α es pequeña. En particular, se mostró que si $f(\alpha)$ se comporta como $f = A\alpha^n$ para α pequeña y los elementos normales de volumen se anulan en términos del tiempo propio τ como $\gamma_n^{1/2} \sim (\tau_s - \tau)^m$, se pueden tener tres tipos diferentes de comportamientos:

1. Para $n < 0$ el lapso se anula antes que los elementos normales de volumen espacial lo haga, lo que corresponde a evasión fuerte de singularidades
2. Para $n = 0$ y $mA \geq 1$ el lapso se anula con los elementos normales de volumen espacial y la singularidad se alcanza después de un tiempo coordinado infinito, lo que corresponde a evasión marginal de singularidades
3. Tanto para $n > 0$, como $n = 0$ con $mA < 1$, el lapso se anula con los elementos normales de volumen pero la singularidad es alcanzada en un tiempo coordinado finito, por lo que no hay evasión de singularidades.

Sin embargo, los resultados resumidos arriba dependen de manera crucial del hecho de que la condición de foliación original de BM relaciona la evolución del lapso con la evolución de los elementos normales de volumen. La versión modificada de la condición de BM, por otro lado, relaciona la evolución del lapso con la evolución de los elementos *coordinados* de volumen. Debemos entonces ver como afecta esto las conclusiones acerca de la evasión de singularidades. Lo primero que hay que notar es que todo el análisis hecho en [15] se puede repetir de manera exacta para la condición modificada de BM si reemplazamos los elementos normales de volumen por los elementos coordinados de volumen. Esto significa que la condición modificada de BM evitará singularidades donde los elementos coordinados de volumen se anulen (*i.e.* singularidades coordinadas de enfocamiento) bajo las mismas condiciones que antes.

Existe una diferencia muy importante entre singularidades “normales” de enfocamiento y singularidades “coordinadas” de enfocamiento. Cuando los elementos normales de volumen se anulan, la dirección normal a la hipersuperficie se vuelve mal-definida y las hipersuperficies dejan de ser suaves. Por otro lado, cuando los elementos coordinados de volumen se anulan quiere decir que las líneas de tiempo se cruzan. Esto significa que se podría en principio desarrollar una singularidad coordinada de enfocamiento en una hipersuperficie perfectamente suave, o peor aún, se podría desarrollar una singularidad normal de enfocamiento para la cual las líneas de tiempo no se crucen y los elementos coordinados de volumen sean diferentes de cero. El segundo caso sería extremadamente problemático ya que nuestras hipersuperficies dejarían de ser suaves y el lapso no colapsaría en respuesta a esto.

Para ver bajo qué condiciones se puede tener un tipo de singularidades de enfocamiento y no el otro debemos de ver las ecuaciones de evolución para los elementos normales y coordenados de volumen:

$$\partial_t \ln \gamma_n^{1/2} = -\alpha K ; \quad (3.76)$$

$$\partial_t \ln \gamma^{1/2} = -(\alpha K - D_i \beta^i) . \quad (3.77)$$

De la primera de estas ecuaciones se puede ver que una de las condiciones para que se forme una singularidad de enfocamiento normal (*i.e.* $\gamma_n^{1/2} \rightarrow 0$) es que $K \rightarrow \infty$. De la segunda ecuación vemos que la única manera en la que se puede desarrollar una singularidad de enfocamiento normal mientras que al mismo tiempo se mantiene un elemento coordenado de volumen distinto de cero es que $D_i \beta^i$ diverja con K mientras se mantiene su diferencia finita.

Entonces concluimos que si la divergencia del vector de corrimiento se mantiene finita, ambos tipos de singularidades de enfocamiento ocurrirán al mismo tiempo. Esto significa que si el vector de corrimiento se mantiene regular, la condición de foliación modificada de BM evitará singularidades exactamente de la misma manera en que la condición original lo hacía.

3.6 Choques de norma

En la sección 3.4 mostramos que el sistema de ecuaciones (3.61) para las variables (3.60) es fuertemente hiperbólico. Podemos entonces definir un conjunto completo de “eigencampos” ω_i asociados con el sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = R\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = R^{-1} \mathbf{u} , \quad (3.78)$$

donde R es la matriz cuyas columnas son los eigenvectores \mathbf{e}_i .

Decimos que el eigencampo ω_i está “linealmente degenerado” si su eigenvalor correspondiente λ_i es independiente del eigencampo, esto es

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \omega_i} = \sum_{j=1}^{N_u} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \omega_i} = \nabla_u \lambda_i \cdot \mathbf{e}_i = 0 . \quad (3.79)$$

La degeneración lineal garantiza que el eigencampo correspondiente no desarrollará choques. Esto se puede entender intuitivamente notando que la degeneración lineal implica que las líneas características no cambian como consecuencia a cambios en el campo que se propaga a lo largo de ellas.

Usando los eigenvalores y eigenvectores encontrados en la sec. 3.4, las condiciones para la degeneración lineal son

$$C_{\pm} := \lambda_{\pm} \frac{\partial \lambda_{\pm}}{\partial \Pi} + \frac{\partial \lambda_{\pm}}{\partial \Psi_x} = 0 , \quad (3.80)$$

$$C_3 := \mathbf{e}_1^{(3)} \frac{\partial \lambda^{(3)}}{\partial \Pi} + \mathbf{e}_2^{(3)} \frac{\partial \lambda^{(3)}}{\partial \Psi_x} + \mathbf{e}_5^{(3)} \frac{\partial \lambda^{(3)}}{\partial \beta^x} + \mathbf{e}_6^{(3)} \frac{\partial \lambda^{(3)}}{\partial \beta^y} + \mathbf{e}_7^{(3)} \frac{\partial \lambda^{(3)}}{\partial \beta^z} = 0 , \quad (3.81)$$

$$C_4 := \mathbf{e}_5^{(4)} \frac{\partial \lambda^{(4)}}{\partial \beta^x} + \frac{\partial \lambda^{(4)}}{\partial \beta^y} = 0 , \quad (3.82)$$

$$C_5 := e_5^{(5)} \frac{\partial \lambda^{(5)}}{\partial \beta^x} + \frac{\partial \lambda^{(5)}}{\partial \beta^z} = 0, \quad (3.83)$$

$$C_6 = C_7 = 0. \quad (3.84)$$

Un cálculo directo muestra que las ecuaciones (3.81)-(3.83) se satisfacen idénticamente. Por otro lado, la ecuación (3.80) es precisamente la misma ecuación que se encontró para la condición de foliación estándar de BM en la referencia [18], donde se mostró que conduce a la siguiente condición en la función $f(\alpha)$

$$1 - f - \frac{\alpha f'}{2} = 0. \quad (3.85)$$

Esto significa que la condición de foliación modificada de BM está linealmente degenerada bajo las mismas circunstancias que la condición estándar de BM, y por lo tanto evitará los choques de norma en los mismos casos.

Para concluir recordemos que en este capítulo se estudió una versión modificada de la condición de foliación de BM que tiene dos características importantes: 1) garantiza que si el espacio-tiempo es estático o estacionario, y se comienza la evolución en un sistema de coordenadas en el cual los coeficientes métricos sean independientes del tiempo, entonces permanecerán independientes del tiempo durante la evolución subsecuente, y 2) la condición modificada está naturalmente adaptada al uso del lapso densificado como variable fundamental.

Analizando esta condición modificada de BM escrita de manera covariante en un espacio-tiempo de fondo arbitrario, también mostramos que es fuertemente hiperbólica para $f(\alpha) > 0$, al igual que la condición original de BM. Más aún, encontramos que las velocidades características de condición original de BM no se modifican. Finalmente, mostramos que mientras el vector de corrimiento se mantenga regular, la condición modificada de BM evita tanto singularidades de enfocamiento como choques de norma bajo las mismas condiciones que la condición original de BM lo hace.

Debido a estos resultados creemos que la condición modificada de BM debe de ser al menos tan útil como la condición original de BM para evolucionar sistemas fuertemente gravitacionales, mientras que al mismo tiempo tiene los beneficios extras mencionados anteriormente. Para probar esto, se requiere hacer experimentos numéricos, pero como la condición modificada de BM conduce a diferentes foliaciones del espacio-tiempo para diferentes elecciones del vector de corrimiento, dichos experimentos requieren primero el estudio de diferentes condiciones para el vector de corrimiento, lo cual está fuera del alcance de este trabajo.

Todo este análisis será utilizado en el siguiente capítulo, en el que estudiaremos una formulación bastante conocida de las ecuaciones de Einstein conocida como la formulación KST acoplada con la condición de norma que acabamos de introducir.

Capítulo 4

Hiperbolicidad de la formulación Kidder-Scheel-Teukolsky de las ecuaciones de Einstein acopladas a la condición de foliación modificada de Bona-Masso

4.1 Introducción

Como ya hemos mencionado, el problema de Cauchy para relatividad general ha recibido renovado interés en los últimos años. En gran parte, este interés ha sido motivado por el hecho de que la comunidad se ha dado cuenta de que la estructura matemática de las ecuaciones de evolución puede tener un impacto directo en la estabilidad de las simulaciones numéricas. Mucha investigación se ha concentrado en desarrollar formulaciones fuertemente, o más aún, simétricamente hiperbólicas de las ecuaciones de evolución de la relatividad general [11, 12, 13, 33, 28, 34, 35, 36, 37, 14, 38, 39, 21, 40, 22]. Se puede mostrar que los sistemas simétricamente hiperbólicos están bien definidos, mientras que para que un sistema fuertemente hiperbólico esté bien definido requiere que algunas condiciones adicionales de suavidad se satisfagan. El hecho de que un sistema de ecuaciones de evolución este bien definido implica que se pueden encontrar discretizaciones numéricas que son estables en el sentido que el crecimiento de los errores esté acotado [42].

Siempre que se propone una nueva condición de norma, se debe de estudiar si dicha condición afecta el hecho de que el sistema de ecuaciones de evolución este bien definido. Dicho análisis, por ejemplo, ha sido llevado a cabo por Sarbach y Tiglio [19] para una generalización de la condición de BM y más

recientemente por Lindblom y Scheel [20] para otra generalización de la condición de BM acoplada a la cierta condición sobre el vector de corrimiento [18]. En ambos casos el análisis fue hecho usando formulaciones multi-paramétricas a primer orden de las ecuaciones de evolución de Einstein. Aquí consideraremos una de estas formulaciones, la llamada Kidder-Scheel-Teukolsky (KST) [22] acoplada a la condición de foliación modificada de BM estudiada en [43].

Este capítulo se organiza de la siguiente forma. En la sec. 4.2 introducimos brevemente las condiciones de foliación estándar y modificada de BM. En la sección 4.3 describimos la formulación KST de las ecuaciones de evolución de Einstein. En la sec. 4.4 analizamos la hiperbolicidad del sistema acoplado de ecuaciones de evolución KST más la condición de foliación modificada.

4.2 La condición de foliación modificada de Bona-Masso

Como vimos en el capítulo anterior, la familia de condiciones de foliación de BM [13] requiere que la función de lapso satisfaga la siguiente ecuación de evolución

$$\frac{d}{dt} \alpha \equiv (\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad (4.1)$$

y propusimos una versión modificada de la condición (4.1) que mantiene muchas de sus propiedades más importantes y al mismo tiempo está bien adaptada a la evolución de espacio-tiempos estáticos o estacionarios y también al uso del lapso densificado como variable fundamental. Creemos que tener una condición de foliación que es compatible con una solución estática es un requerimiento necesario si uno espera tener coordenadas que busquen las simetrías del tipo discutido por Gundlach y Garfinkle [31] y por *et. al* [32], que sean capaces de mantenerse en los campos de Killing que los espacio-tiempos estáticos (o estacionarios) tienen, o los campos de Killing aproximados que muchos sistemas astrofísicos interesantes pueden tener. Esta condición de foliación de BM tiene la siguiente forma

$$\partial_t \alpha = -\alpha f(\alpha) (\alpha K - \nabla_i \beta^i), \quad (4.2)$$

Recordemos que esta condición puede obtenerse de una ecuación de onda generalizada para la función tiempo y por lo tanto es hiperbólica independiente de las ecuaciones de Einstein. También se puede mostrar fácilmente que, a diferencia de la ec. (4.1), el lado derecho de la ec. (4.2) se anula si estamos en un espacio-tiempo estacionario y tenemos coordenadas en las que esta estacionariedad se manifiesta.

4.3 La familia KST de formulaciones de las ecuaciones de evolución de Einstein

El sistema de ecuaciones conocido como la familia KST de formulaciones de las ecuaciones de evolución de Einstein es un sistema, multi-paramétrico, de primer orden para 30 variables dinámicas independientes $\{g_{ij}, K_{ij}, d_{kij}\}$, donde g_{ij} es la métrica espacial, K_{ij} la curvatura extrínseca, y $d_{kij} := \partial_k g_{ij}$. Nótese que

la definición de d_{kij} es usada únicamente para obtener datos iniciales, las d 's son entonces promovidas a variables independientes y su definición en términos de las derivadas de las g 's se convierte en una constricción.

Si definimos $\partial_0 \equiv (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)/\alpha$, el sistema de ecuaciones de evolución en vacío puede ser escrito como:

$$\partial_0 g_{ij} = -2K_{ij}, \quad (4.3)$$

$$\partial_0 K_{ij} = R_{ij} - (\nabla_i \nabla_j \alpha) / \alpha - 2K_{im} K_j^m + K K_{ij} + \gamma g_{ij} C + \zeta g^{ab} C_{a(ij)b}, \quad (4.4)$$

$$\partial_0 d_{kij} = -2 \partial_k K_{ij} - 2K_{ij} \partial_k \ln \alpha + \eta g_{k(i} C_{j)} + \chi g_{ij} C_k, \quad (4.5)$$

donde $\{\gamma, \zeta, \eta, \chi\}$ son parámetros libres y

$$C := (R - K_{ab} K^{ab} + K^2) / 2, \quad (4.6)$$

$$C_i := \nabla^a K_{ai} - \nabla_i K, \quad (4.7)$$

$$C_{kij} := d_{kij} - \partial_k g_{ij}, \quad (4.8)$$

$$C_{lkij} := \partial_{[l} d_{k]ij}, \quad (4.9)$$

son constricciones del sistema (las dos primeras son las constricciones Hamiltoniana y de momento, y las dos últimas son constricciones de consistencia). Nótese que como las d_{kij} no son componentes de un tensor (al hacer cambios de coordenadas estas no se transforman como tensores), su derivada de Lie con respecto a β^i debe ser entendida como

$$\mathcal{L}_\beta d_{kij} = \beta^a \partial_a d_{kij} + d_{aij} \partial_k \beta^a + 2d_{ka(i} \partial_{j)} \beta^a + 2g_{a(i} \partial_{j)} \partial_k \beta^a. \quad (4.10)$$

El tensor de Ricci R_{ij} que aparece en la ecuación de evolución para K_{ij} se escribe en términos de las d 's como

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{1}{2} g^{ab} (-\partial_a d_{bij} + \partial_a d_{(ij)b} + \partial_{(i} d_{|ab|j)} - \partial_{(i} d_{j)ab}) + \frac{1}{2} [d_i^{ab} d_{jab} + (d_k - 2b_k) \Gamma_{ij}^k] \\ &- \Gamma_{im}^k \Gamma_{jk}^m, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde hemos definido $d_k := g^{ij} d_{kij}$, $b_k := g^{ij} d_{ijk}$ y $\Gamma_{jk}^i := (d_{jk}^i + d_{kj}^i - d^i_{jk})/2$. Es importante mencionar que el sistema de ecuaciones anterior no es la forma más general del sistema KST el cual tiene 12 parámetros libres. Aquí solo hemos considerado los 4 parámetros que están relacionados a los términos de las constricciones e ignoramos los 7 parámetros que redefinen las variables independientes y el parámetro relacionado al peso del lapso densificado prescrito el cual lo reemplazaremos con nuestra condición de foliación modificada de BM.

En el análisis original de KST, se mostró que el sistema de ecuaciones (4.3)-(4.5) es fuerte o simétricamente hiperbólico para ciertas regiones del espacio de parámetros $\{\gamma, \zeta, \eta, \chi\}$, con el lapso reemplazado por un "lapso densificado" q dado por

$$q := \ln(g^{-\sigma} \alpha), \quad (4.12)$$

con g el determinante de g_{ij} , y σ positiva (con un valor preferencial de $1/2$). El lapso densificado q se supuso prescrito, i.e. una función conocida a priori, dependiente del espacio y del tiempo. Esta condición después fue relajada por Sarbach y Tiglio en [19] donde el lapso fue tomado como una función arbitraria de g tal que

$$\sigma_{\text{eff}} := \frac{g}{\alpha} \partial_g \alpha > 0. \quad (4.13)$$

4.4 Hiperbolicidad de la formulación KST acoplada a la condición modificada de BM

Comenzamos con la condición de foliación modificada de BM (4.2) la cual reescribimos como

$$\partial_t \alpha = -\alpha f(\alpha) T, \quad (4.14)$$

con

$$T := \alpha K - \nabla_m \beta^m. \quad (4.15)$$

Ahora definimos la siguiente variable a primer orden:

$$A_i := \frac{\partial_i \ln \alpha}{f(\alpha)}. \quad (4.16)$$

De la ec. (4.14) fácilmente se puede mostrar que

$$\partial_t A_i = -\partial_i T. \quad (4.17)$$

Por otro lado, las derivadas de α que aparecen en las ecuaciones de evolución de K_{ij} dadas en la sección anterior, ec. (4.4), pueden escribirse en términos de A_i como

$$\frac{\nabla_i \nabla_j \alpha}{\alpha} = f [\partial_{(i} A_{j)} + (f + \alpha f') A_i A_j - \Gamma_{ij}^k A_k], \quad (4.18)$$

donde hemos usado el hecho que $\partial_i A_j$ es simétrica. Véase que de las ecuaciones de evolución para g_{ij} , ec. (4.3), también se puede encontrar que

$$\partial_t g = -2 g T, \quad (4.19)$$

lo que implica que

$$\partial_t D_i = -2 \partial_i T, \quad (4.20)$$

con $D_i := \partial_i \ln g$. Comparando las ecuaciones (4.17) y (4.20) encontramos

$$\partial_t A_i = \frac{1}{2} \partial_t D_i. \quad (4.21)$$

Ahora, de la definición de d_{kij} , debemos tener $D_i = d_i$, con d_i como se definió en la sección anterior. Sin embargo, como en la formulación KST las ecuaciones de evolución para las d_{kij} son modificadas

añadiéndoles múltiplos de las constricciones, tendremos generalmente $\partial_t D_i \neq \partial_t d_i$ ya que las constricciones se violan numéricamente. Debido a ésto, proponemos modificar la ecuación de evolución para A_i de la siguiente forma

$$\partial_t A_i = -\partial_t T + F_i(C, C_k, C_{klm}, C_{klmn}) . \quad (4.22)$$

De la ecuación de evolución (4.5) para d_{kij} , se puede encontrar después de algo de álgebra que

$$\partial_t d_i = -2 \partial_t T + \alpha(\eta + 3\chi)C_i + 2\alpha K^{ab}C_{iab} + C_{ma}{}^a \partial_i \beta^m + \beta^m \partial_m C_{ia}{}^a , \quad (4.23)$$

lo que significa que si tomamos

$$2F_i = \alpha(\eta + 3\chi)C_i + 2\alpha K^{ab}C_{iab} + C_{ma}{}^a \partial_i \beta^m + \beta^m \partial_m C_{ia}{}^a , \quad (4.24)$$

entonces siempre tendremos

$$\partial_t A_i = \frac{1}{2} \partial_t d_i . \quad (4.25)$$

Esta última ecuación nos permite definir las cantidades

$$Q_i := A_i - d_i/2 . \quad (4.26)$$

Estas cantidades son tales que $\partial_t Q_i = 0$, ésto es, no son dinámicas.

Otra forma de introducir la Q_i es la siguiente: A partir de la condición modificada de BM y las ecuaciones de evolución para g_{ij} es fácil mostrar que

$$\frac{\partial_t \alpha}{\alpha f} = \frac{\partial_t g}{2g} , \quad (4.27)$$

que se puede integrar fácilmente para encontrar

$$g^{1/2} = H(x^i) \exp \int \frac{d\alpha}{\alpha f} , \quad (4.28)$$

con $H(x^i)$ una función arbitraria e independiente del tiempo. Esto muestra que si definimos

$$q := \ln \left(g^{-1/2} \exp \int \frac{d\alpha}{\alpha f} \right) , \quad (4.29)$$

entonces tendremos $\partial_t q = 0$. Hay que notar que la q definida arriba es solo la generalización del lapso densificado definido en (4.12) para el caso $f \neq 1$. Ahora podemos mostrar que las Q_i definidas a través de (4.26) son precisamente tales que $Q_i = \partial_i q$, y como q es independiente del tiempo, entonces también lo son las Q_i .

Habiendo introducido estas cantidades Q_i no dinámicas, podemos reescribir las derivadas de A_i que aparecen en las ecuaciones de evolución de K_{ij} a través del término (4.18) en términos de derivadas de Q_i y d_i . Como las Q_i no evolucionan, pueden ser consideradas como términos fuente. De esta forma, el sistema de ecuaciones de evolución para K_{ij} y d_{kij} se convierte en

$$\begin{aligned} \partial_0 K_{ij} &\sim \frac{1}{2} g^{ab} [-\partial_a d_{bij} + (1 + \zeta) \partial_a d_{(ij)b} + (1 - \zeta) \partial_{(i} d_{|ab|j)} - (1 + f) \partial_{(i} d_{j)ab} \\ &\quad + \gamma g_{ij} g^{kl} \partial_a (d_{klb} - d_{bkl})] , \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\partial_0 d_{kij} \sim -2\partial_k K_{ij} + \eta g_{k(i} g^{ab} (\partial_{|a|} K_{j)b} - \partial_j K_{ab}) + \chi g_{ij} g^{ab} (\partial_a K_{kb} - \partial_k K_{ab}) , \quad (4.31)$$

donde el símbolo \sim significa igual hasta parte principal (*i.e.* que solo nos fijamos en los términos que contienen derivadas espaciales de las cantidades bajo estudio). El sistema anterior es exactamente el mismo al presentado por Sarbach y Tiglio en [19] con el cambio $\sigma_{\text{eff}} = f/2$. El análisis de hiperbolicidad hecho en esa referencia se puede aplicar exactamente igual. En particular, los eigenvalores diferentes de cero del sistema son

$$\lambda_1 = f, \quad (4.32)$$

$$\lambda_2 = 1 + \chi - \frac{1}{2}(1 + \zeta)\eta + \gamma(2 - \eta + 2\chi), \quad (4.33)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\chi + \frac{3}{8}(1 - \zeta)\eta - \frac{1}{4}(1 + f)(\eta + 3\chi), \quad (4.34)$$

$$\lambda_4 = 1. \quad (4.35)$$

Hay 12 eigenvectores asociados con estos eigenvalores diferentes de cero: dos con λ_1 , dos con λ_2 , cuatro con λ_3 y cuatro con λ_4 . Hay otros 12 eigenvectores con eigenvalor cero. El sistema resulta ser fuertemente hiperbólico si

$$\begin{aligned} \lambda_j &> 0, \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{4}(3\lambda_1 + 1) \quad \text{si } \lambda_1 = \lambda_2. \end{aligned}$$

Las velocidades características asociadas están dadas simplemente por $v_i^\pm = \pm(\lambda_i)^{1/2}$. En particular, obtenemos $v_1^\pm = \pm f^{1/2}$, que está de acuerdo con el resultado esperado para la condición de foliación de BM. Más aún, como ya fue mostrado por Sarbach y Tiglio en la ref. [19], también se pueden encontrar subfamilias simétricamente hiperbólicas de este sistema.

De esta forma concluimos este capítulo en el que estudiamos la hiperbolicidad de la familia de formulaciones KST de las ecuaciones de evolución de Einstein acopladas a la condición de foliación modificada de BM. Encontramos que la condición modificada de BM nos permite construir una función q que no es dinámica que generaliza al lapso densificado en el caso en el que la función $f(\alpha)$ que define la foliación es diferente de 1. De esta cantidad no dinámica uno puede construir tres cantidades de primer orden que no evolucionan $Q_i := \partial_i q$ que pueden ser usadas para reemplazar las derivadas espaciales del lapso en las ecuaciones de evolución de la curvatura extrínseca K_{ij} . Haciendo esto, el sistema de ecuaciones de evolución se reduce a uno previamente analizado por Sarbach y Tiglio, lo que nos permite mostrar que el sistema acoplado KST *mas* la condición de foliación modificada de BM permanece fuertemente hiperbólico bajo las mismas circunstancias que antes, e identificar directamente las velocidades características. El análisis de Sarbach y Tiglio puede también ser usado para encontrar subfamilias simétricamente hiperbólicas del sistema completo.

Así concluimos la parte dedicada a relatividad numérica. En la siguiente parte estudiaremos algunos problemas físicos tanto teórica como numericamente.

Segunda parte

APLICACIONES FISICAS

Capítulo 5

Solitones escalares en un espacio-tiempo 4-Dimensional

5.1 Introducción

En esta segunda parte utilizaremos algunas de las herramientas numéricas que desarrollamos en la primera parte para resolver algunos problemas físicos interesantes. Para empezar, en este capítulo presentaremos un pequeño resultado relacionado con el teorema de Derrick, el cual en realidad es bastante simple pero nos sirvió para empezar a trabajar en códigos numéricos.

Empecemos recordando que los solitones son soluciones especiales de ecuaciones de onda no lineales. La característica más relevante de los solitones es que son soluciones localizadas estáticas. El ejemplo más simple consiste en un campo escalar ϕ en una dimensión espacial y una dimensión temporal. Tal vez el más famoso es el solitón de sine-Gordon [44, 45].

A primera vista, puede pensarse que una ecuación de onda con un campo escalar en cualquier número de dimensiones espaciales puede tener soluciones solitónicas. Sin embargo existe un teorema que restringe esta posibilidad. Aquí vamos a transcribir dicho teorema y su prueba para conveniencia del lector [46]:

Teorema 5.1.1 *No existen ondas solitarias estáticas no triviales para sistemas con campos escalares cuando la dimensión espacial es mayor o igual a tres y cuando el Lagrangiano tiene la forma:*

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - U(\phi(\mathbf{x}, t)) \quad (5.1)$$

con $\phi = [\phi_i(\mathbf{x}, t); i = 1, \dots, N]$ un conjunto de N campos escalares acoplados en D dimensiones espaciales más una dimensión temporal, y $U(\phi(\mathbf{x}, t))$ un potencial positivo definido.

Demostración Una solución estática $\phi(\mathbf{x})$ obedece

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial U}{\partial \phi}(\mathbf{x}) \quad (5.2)$$

donde ∇^2 es el Laplaciano en D dimensiones. Esta ecuación claramente corresponde a la condición extrema $\delta W = 0$ para el funcional de energía estática

$$W[\phi] \equiv \int d^D x \left[\frac{1}{2} \nabla_i \phi \cdot \nabla_i \phi + U(\phi(\mathbf{x})) \right] \equiv V_1[\phi] + V_2[\phi] \quad (5.3)$$

donde los funcionales V_1 y V_2 corresponden a los dos términos que se encuentran en el lado derecho de la ecuación. Nótese que no solo W sino también V_1 y V_2 son no negativos. Ahora, sea $\phi_1(\mathbf{x})$ una solución estática. Considérese la familia uniparamétrica de configuraciones

$$\phi_\lambda = \phi_1(\lambda \mathbf{x}). \quad (5.4)$$

Es fácil checar que

$$W[\phi_\lambda] = V_1[\phi_\lambda] + V_2[\phi_\lambda] = \lambda^{2-D} V_1[\phi_1] + \lambda^{-D} V_2[\phi_1]. \quad (5.5)$$

Como $\phi_1(\mathbf{x})$ es un extremo de $W[\phi]$, debe en particular hacer que $W[\phi_\lambda]$ sea estacionario con respecto a variaciones en λ ; esto es,

$$\frac{d}{d\lambda} W[\phi_\lambda] = 0 \quad \text{cuando } \lambda = 1. \quad (5.6)$$

Derivando (5.5) usando (5.6) obtenemos

$$(2 - D)V_1[\phi_1] = DV_2[\phi_1]. \quad (5.7)$$

Como V_1 y V_2 son no negativos (5.7) no puede satisfacerse para $D \geq 3$ a menos que $V_1[\phi_1] = V_2[\phi_1] = 0$. Esto significa que $\phi_1(\mathbf{x})$ tiene que ser independiente del espacio e igual a uno de los ceros de $U[\phi]$. Esto es solo la solución trivial y el teorema excluye soluciones no triviales dependientes del espacio. **q.e.d.**

Para el caso $D = 2$, la ecuación (5.7) nos dice que $V_2[\phi_1] = 0$. El ejemplo más simple de una solución de este tipo es el modelo no lineal $O(3)$ [47, 48, 49] relevante en la descripción de la mecánica estadística de un ferromagneto isotrópico.

Estamos interesados en la siguiente pregunta: ¿Se extiende el resultado a la posible existencia de soluciones estáticas de un sistema en un espacio-tiempo curvo en tres dimensiones espaciales y una temporal?. Construiremos un modelo simple y buscaremos soluciones solitónicas numéricamente.

5.2 El modelo

Considérese el caso mas simple en un espacio-tiempo curvo. Un campo escalar cuya ecuación de movimiento es:

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (5.8)$$

Si el potencial se mantiene igual a cero la ec. (5.8) es la ecuación de Laplace, cuyas soluciones sólo toman un valor máximo o mínimo en las fronteras espaciales. Si resolvemos la ecuación de Laplace en un espacio con una frontera conexa o en un espacio compacto, la solución en cada punto del espacio tendrá necesariamente el mismo valor que en la frontera (i.e. una solución trivial).

Así que vamos a introducir un potencial $V = (\phi^2 - 1)^2$ en analogía con el caso en 1 + 1 dimensiones. Más aún, consideramos el universo espacialmente compacto más simple, el universo estático de Einstein:

$$ds^2 = -dt^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.9)$$

La ecuación (5.8) en el espacio-tiempo correspondiente a (5.9) toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2 \cot \chi \frac{\partial \phi}{\partial \chi} + \sin^2 \chi \cot \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \sin^2 \chi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \sin^2 \chi \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 2(\phi^2 - 1)2\phi. \quad (5.10)$$

Estamos interesados en soluciones estáticas y con simetría esférica así que tenemos

$$\frac{d^2 \phi}{d\chi^2} + 2 \cot \chi \frac{d\phi}{d\chi} - 4\phi(\phi^2 - 1) = 0 \quad (5.11)$$

ésta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. La ecuación (5.11) puede separarse en 2 ecuaciones ordinarias de primer orden. Sea:

$$x_1 = \phi \quad x_2 = \frac{d\phi}{d\chi} \quad (5.12)$$

así, (5.11) puede escribirse como el siguiente sistema:

$$x_2 = \frac{dx_1}{d\chi} \quad (5.13)$$

$$\frac{dx_2}{d\chi} + 2x_2 \cot \chi - 4x_1(x_1^2 - 1) = 0. \quad (5.14)$$

Estas ecuaciones pueden integrarse usando el método Runge-Kutta [50].

Notemos que la ecuación (5.11) es singular en $\chi = 0$ y $\chi = \pi$, así que usamos las siguientes condiciones iniciales:

$$\phi(0) = \phi_a^0 \quad \frac{d\phi(0)}{d\chi} = \dot{\phi}_a^0 = 0 \quad (5.15)$$

$$\phi(\pi) = \phi_b^0 \quad \frac{d\phi(\pi)}{d\chi} = \dot{\phi}_b^0 = 0 \quad (5.16)$$

Así que tenemos una ecuación diferencial (5.11) con condiciones de frontera en los dos puntos de frontera. Puede resolverse usando un método de "disparo a un punto intermedio", con ϕ_a^0 y ϕ_b^0 como parámetro de disparo. La idea principal de este método es la siguiente:

Hacemos una integración desde $\chi = 0$ hasta $\chi = \frac{\pi}{2}$ obteniendo $\phi_a(\frac{\pi}{2})$. También integramos desde $\chi = \pi$ hasta $\chi = \frac{\pi}{2}$ obteniendo $\phi_b(\frac{\pi}{2})$. Ahora, construimos la siguiente función:

$$F(\phi_a, \phi_b) = \left[\phi_a \left(\frac{\pi}{2} \right) - \phi_b \left(\frac{\pi}{2} \right), \dot{\phi}_a \left(\frac{\pi}{2} \right) - \dot{\phi}_b \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (5.17)$$

La primera integración nos permite evaluar F obteniendo en general $F(\phi_a^0, \phi_b^0) \neq 0$ (figura 5.1). Estamos interesados en los ceros de esa función, ya que en esos puntos las soluciones de la integración hacen que ϕ y $\dot{\phi}$ peguen suavemente. Usamos el método de Newton-Raphson para encontrar los ceros de la función [50], y el resultado se muestra en la figura 5.2.

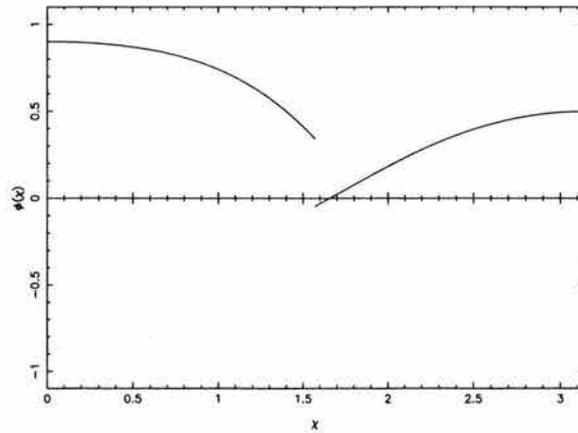


Fig. 5.1: Integración para los valores iniciales ϕ_a^0 y ϕ_b^0 . Obviamente $\phi_a(\frac{\pi}{2}) \neq \phi_b(\frac{\pi}{2})$ y $\dot{\phi}_a(\frac{\pi}{2}) \neq \dot{\phi}_b(\frac{\pi}{2})$.

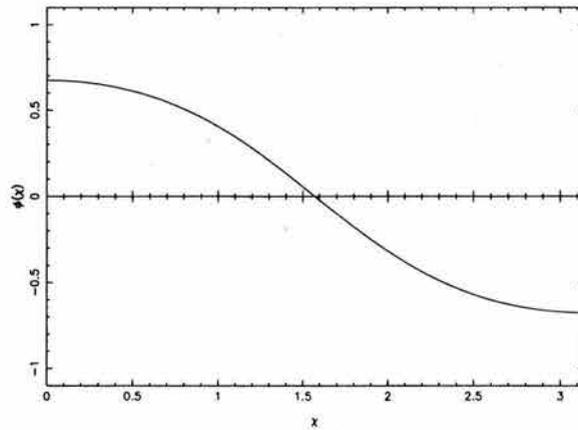


Fig. 5.2: Integración después de aplicar el método de Newton-Raphson. Podemos ver que $\phi_a(\frac{\pi}{2}) = \phi_b(\frac{\pi}{2})$ y $\dot{\phi}_a(\frac{\pi}{2}) = \dot{\phi}_b(\frac{\pi}{2})$. Esta es una solución de la ecuación de movimiento 5.11.

En resumen, hemos mostrado que el teorema que restringe la existencia de soluciones solitónicas de sistemas basados en un campo escalar en $3+1$ o más dimensiones espacio-temporales planas sería falso si se extendiera al caso de un espacio-tiempo curvo. Lo hemos hecho explícitamente construyendo una solución solitónica de un modelo simple basado en un campo escalar en el universo estático de Einstein. Esta es otra indicación* de que la interacción entre la física de espacio-tiempos curvos y la física de solitones nos permite encontrar fenómenos mucho más ricos que los que podemos encontrar en cada uno de estos campos por separado.

Vemos que el resultado en espacio-tiempos planos no se extiende a espacio-tiempos curvos, lo que abre la posibilidad a encontrar soluciones solitónicas de este tipo que juegen algún papel en situaciones físicas. Asimismo, además de que este capítulo nos sirvió para empezar a desarrollar códigos numéricos aplicados a problemas físicos, nos mostró el poder que dichos métodos representan en estas situaciones.

De esta manera, concluimos este capítulo introductorio a las aplicaciones físicas. En el siguiente capítulo, presentaremos algunos resultados relacionados con agujeros negros con pelo escalar, los cuales sirvieron en parte para motivar los resultados de los demás capítulos de esta segunda parte.

*El ejemplo mas ampliamente conocido de este fenómeno aparece en la consideración de la teoría de Einstein-Yang-Mills donde se han encontrado soluciones solitónicas a pesar de que se sabe de que no existen dichas soluciones en la teoría de Yang-Mills en espacio-tiempo de Minkowski [51].

Capítulo 6

Sobre agujeros negros con pelo escalar en espacio-tiempos asintóticamente anti de-Sitter

6.1 Introducción

Es bien conocido que para espacio-tiempos en los que no haya materia (vacío) o en los que la materia sea un campo electro-magnético, la cantidad de soluciones a las ecuaciones de Einstein que sean agujeros negros estacionarios es muy pequeña. Dichas soluciones están completamente caracterizadas por tres parámetros (M_{ADM} = masa ADM, J = momento angular y Q = carga eléctrica) las cuales están asociadas con leyes de conservación generales definidas en infinito asintótico. Esto significa que es suficiente “medir” dichos parámetros a distancias muy grandes del agujero negro para poder determinar, de manera infinitamente precisa, el tipo de agujero negro estacionario presente. Este hecho llevó a mucha gente a sugerir que la introducción de diferentes tipos de materia no producirían otros tipos de agujeros negros estacionarios (*i.e.* agujeros negros estacionarios que no solo requieran los valores de las cantidades conservadas definidas en infinito asintótico para su completa especificación). A esta idea se le conoce como la conjetura de no-pelo.

La falsedad de la conjetura de no-pelo para agujeros negros estacionarios difícilmente es puesta en duda en estos días ya que la lista de contraejemplos cada vez es más grande: Einstein-Yang-Mills [52, 53, 54], Einstein-Skyrme [55, 56, 57, 58], Einstein-Yang-Mills-dilaton [59], Einstein-Yang-Mills-Higgs [60], y Einstein-non-abelian-Procca [60]. Incluso la postura de algunas subcomunidades que consideraban la idea de que una versión modificada que se aplica solo a agujeros negros estables, pudiera seguir siendo válida, ha quedado sobrepasada debido al hecho de que para algunos de los ejemplos anteriores hay afirmaciones en la literatura de que existen soluciones estables no triviales.

Un lugar en el que parecía haber esperanza de que subsistiera una forma restringida de la conje-

tura era en el terreno de campos escalares. En este contexto se tienen los teoremas originales de no pelo de Bekenstein [61] referentes al caso de campos escalares mínimamente acoplados con potenciales convexos, otros teoremas tratan con el caso de campos mínimamente acoplados con potenciales arbitrarios obtenidos en [62] y [63]. La llamada solución de agujero negro de Bronnikov-Melnikov-Bocharova-Bekenstein (BMBB) [61, 64] que corresponde a un agujero negro extremo simétricamente esférico con un campo escalar conformemente acoplado a la gravedad parecía representar un ejemplo discreto de pelo escalar, puesto que en [65] se demostró que no hay otras soluciones de agujero negro estáticas y esféricamente simétricas en esta teoría. Posteriormente, en un análisis llevado a cabo en [66] se demostró que esta configuración, que presenta una divergencia del campo escalar en el horizonte, no puede ser considerada como una solución de agujero negro regular debido a que el tensor de energía momento está mal definido en el horizonte. Finalmente el trabajo [67] demostró que si se pide que el campo escalar esté acotado en la región estática entonces, no hay soluciones.

Para casos más generales de acoplamiento no mínimo existen resultados [68] que muestran que bajo la suposición de que cierto “factor conforme” no se anule o diverga, no existen soluciones de agujero negro no triviales. Después, hay un resultado en [69] que no utiliza dicha suposición, y que considera la existencia de soluciones de agujero negro estáticas y esféricamente simétricas en teorías en las que el signo de la constante de acoplamiento no mínimo es negativo (el único caso no cubierto por los teoremas). Ahí se muestra que bajo ciertas suposiciones sobre la forma del flujo de energía-momento, no existen soluciones no triviales. En [70] se argumenta que estas suposiciones no son completamente justificables y se dan evidencia numérica en contra de la existencia de dichos agujeros negros que no dependen de dichas suposiciones.

Es por lo tanto un poco inesperado el hecho de que soluciones de agujero negro con pelo hayan sido encontradas tanto en teorías con campos escalares acoplados mínimamente [71] como no mínimamente [72] simplemente considerando condiciones de frontera asintóticamente anti de-Sitter en lugar de asintóticamente planas. Más aún, estos artículos indican que, bajo ciertas condiciones, estas nuevas soluciones son estables.

El propósito de este capítulo es analizar la situación en el caso asintóticamente anti de-Sitter, usando los resultados existentes para el caso asintóticamente plano, discutir los puntos donde las diferencias son relevantes y dar una explicación simple de algunas de las características de las nuevas soluciones así como señalar algunas conjeturas sorprendentes que pueden inferirse directamente de lo que se aprendió. El método utilizado en esta parte es una generalización de uno que fue exitosamente empleado para derivar una caracterización general de agujeros negros con pelo en un amplio rango de teorías [73].

6.2 Pelo escalar y condiciones asintóticas

Restringiremos nuestra atención al caso mínimamente acoplado ya que no se requieren de acoplamientos no-mínimos más complicados para la aparición de pelo. Entonces consideraremos una teoría dada por la

siguiente acción:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\frac{1}{16\pi} (R - 2\Lambda) - 1/2(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (6.1)$$

donde ϕ es un campo escalar y V su potencial, R es el escalar de curvatura, y Λ es la constante cosmológica verdadera (con esto nos referimos a que el mínimo del potencial escalar ha sido elegido tal que coincide con 0, y cualquier contribución distinta de cero ha sido absorbida en Λ). Ahora pondremos atención en agujeros negros regulares estáticos y con simetría esférica cuyo exterior parametrizamos como

$$ds^2 = -e^{-2\delta} \mu dt^2 + \mu^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.2)$$

donde μ y δ son funciones de r . Nótese que δ puede interpretarse con un corrimiento al rojo adicional, aparte del que puede inferirse de la geometría de las hipersuperficies estáticas (i.e. aquellas que son normales al campo de Killing). La condición para que exista un horizonte regular en r_H es que μ se anule ahí. Se acostumbra parametrizar μ de la siguiente forma

$$\mu(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r} + \lambda r^2 \quad (6.3)$$

donde el comportamiento asintótico se controla por el parámetro λ (i.e $\lambda = 0$ para el caso asintóticamente plano, $\lambda > 0$ para el caso asintóticamente anti de-Sitter, y $\lambda < 0$ para el caso asintóticamente de-Sitter). Las ecuaciones de Einstein en este caso son

$$\mu' = 8\pi r T^t_t + \frac{1-\mu}{r}, \quad \delta' = \frac{4\pi r}{\mu} (T^t_t - T^r_r), \quad (6.4)$$

donde la prima significa derivada con respecto a r . La ecuación para el campo escalar puede escribirse como;

$$\mu\phi'' + [(1/r)(\mu + 1) + 4\pi r(T^t_t + T^r_r)]\phi' - \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (6.5)$$

Debemos señalar que las formulas anteriores se refieren al tensor "total" de energía momento $T_{\mu\nu}$ que está relacionado con el tensor de energía momento del campo escalar $T_{\mu\nu}(\phi)$ como $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(\phi) - g_{\mu\nu}\Lambda/(8\pi)$.

El análisis de esta situación se basa en el estudio de la componente r de la ecuación de conservación del tensor de energía momento $T^{\mu}_{r;\mu} = 0$, la cual, usando las ecuaciones de Einstein puede ser escrita como [73]:

$$e^{\delta} (e^{-\delta} T^r_r)' = \frac{1}{2\mu r} [(T^t_t - T^r_r) + \mu(2T - 3(T^t_t + T^r_r))], \quad (6.6)$$

con T la traza del tensor de energía momento.

El tensor de energía momento del campo escalar por sí mismo satisface:

$$e^{\delta} (e^{-\delta} T(\phi)^r_r)' = \frac{1}{2\mu r} [(1 + r^2(-\Lambda))(T(\phi)^t_t - T(\phi)^r_r) + \mu(2T(\phi) - 3(T(\phi)^t_t + T(\phi)^r_r))] \quad (6.7)$$

Ahora podemos revisar las razones por las que no hay campo escalar no trivial en el exterior de dichos agujeros negros en el caso asintóticamente plano con $\Lambda = 0$. Primero la regularidad en el horizonte requiere

que las componentes mezcladas $T(\phi)_{\nu}^{\mu}$ deben ser acotadas en el horizonte ya que el escalar $T(\phi)_{\nu}^{\mu}T(\phi)^{\nu}_{\mu}$ es en este caso una suma de términos no negativos. Ahora notamos que el hecho de que μ se anule en el horizonte indica que en el horizonte $T(\phi)_{\tau}^r = T(\phi)_{\tau}^t$ lo cual es negativo definido debido a la Condición de Energía Débil (CED) la cual se satisface en particular por los campos escalares mínimamente acoplados (de hecho, en nuestro caso tenemos $T(\phi)_{\tau}^r = 1/2\mu(\phi')^2 - V$ y $T(\phi)_{\tau}^t = T(\phi)_{\theta}^{\theta} = T(\phi)_{\varphi}^{\varphi} = -1/2\mu(\phi')^2 - V$). Por lo tanto, de la CED se sigue que $(T_{\tau}^t - T_{\tau}^r) < 0$ y en la situación que estamos analizando la combinación $2T(\phi) - 3(T(\phi)_{\tau}^t + T(\phi)_{\tau}^r) = -2[\mu(\phi')^2 + V] < 0$, con lo que el lado derecho de la ec. (6.7) es no-positivo, y entonces $e^{-\delta}T_{\tau}^r(\phi)$ es una función decreciente de r . Es entonces imposible para esta función aproximarse a cero como es requerido si se quiere tener un comportamiento asintóticamente plano, la condición de frontera que es relevante en este caso. El punto es que si ahora consideramos condiciones de frontera asintóticamente anti de-Sitter, y una constante cosmológica negativa dos aspectos de la discusión anterior permanecen iguales: $e^{-\delta}T(\phi)_{\tau}^r$ es negativa definida en el horizonte, y es una función decreciente de r . Entonces la razón tras la posibilidad de encontrar agujeros negros con pelo escalar en este caso es el hecho de que en el caso anti de-Sitter se puede permitir que $T(\phi)_{\tau}^r$ vaya a un valor constante finito (y negativo) en infinito lo que resulta en una constante cosmológica efectiva que difiere de la constante cosmológica real de la teoría. De hecho podemos replantear el resultado del análisis anterior para el caso asintóticamente anti de-Sitter de la siguiente manera:

Teorema 6.2.1 *No existen soluciones no triviales de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos en el caso asintóticamente anti de-Sitter en las que el comportamiento asintótico corresponda al espacio-tiempo anti de-Sitter con la constante cosmológica verdadera.*

En otras palabras, la región asintóticamente anti de-Sitter corresponde a aquella en la que la constante cosmológica efectiva es:

$$\Lambda_{eff} = \Lambda + 8\pi V(\phi_{\infty}) \quad (6.8)$$

Esta es de hecho la diferencia entre el caso asintóticamente plano con $\Lambda = 0$ vs. el caso asintóticamente anti de-Sitter con $\Lambda \neq 0$, i.e. el hecho de que en el primero requerimos que V tienda a 0 en infinito, mientras que en el segundo cualquier valor asintótico de V diferente de cero puede absorberse en la constante cosmológica efectiva. El teorema anterior asegura que dicho valor asintótico es diferente de cero y que dicha absorción no puede evitarse. Nótese que para un agujero negro no trivial $V(\phi_{\infty}) > V(\phi_{r_H}) \geq 0$, entonces $\Lambda_{eff} > \Lambda$ y el comportamiento asintótico del espacio-tiempo es menos “tipo anti de-Sitter” de lo que se hubiera esperado por el valor de la constante cosmológica real.

Más aún, como uno está interesado en situaciones en las que el campo escalar converge a un valor finito en infinito podemos analizar la ecuación del campo escalar y ver que una condición necesaria para dicho comportamiento es que el campo vaya a un extremo del potencial en infinito. Entonces nuestro resultado general, que $T(\phi)_{\tau}^r$ debe ser una función decreciente, junto con el hecho de que en este régimen coincide con V , sugiere que el extremo de V debe de ser alcanzado por abajo en infinito, y entonces que

dicho extremo debe de ser un máximo. De hecho, suponiendo que el campo escalar converge a un límite finito ϕ_∞ en infinito, y que en ese punto el potencial toma un valor finito, escribimos la solución asintótica como $\phi = \phi_\infty + f(r)$, con $f \rightarrow 0$ en ∞ . La forma asintótica de la ecuación del campo escalar es

$$\lambda r^2 f'' + 4\lambda r f' - \frac{\partial V}{\partial \phi}|_{\phi_\infty} - \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}|_{\phi_\infty} f = 0 \quad (6.9)$$

De aquí vemos que $\frac{\partial V}{\partial \phi}|_{\phi_\infty} = 0$. La solución de esta ecuación que tiende a cero en infinito es de la forma $f = 1/r^\beta$ con $\beta > 0$. Substituyendo en la ec. (6.9) concluimos que

$$\beta = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}|_{\phi_\infty}}. \quad (6.10)$$

Por otro lado, de las ecuaciones de Einstein tenemos que $m' \sim r^4 f'^2$ así que la convergencia de m requiere que $\Re(\beta) > 3/2$ (donde $\Re(\beta)$ significa la parte real de β) y por lo tanto el tipo de comportamientos oscilantes sugeridos en [71] no pueden ocurrir.

Si $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}|_{\phi_\infty} > 0$ una de las raíces en (6.10) implica que ϕ diverja, requiriendo un ajuste fino para evitar dicha divergencia. Entonces, aunque no es posible descartar una solución en este caso, vamos a considerar el caso en el que el campo escalar tiende a un máximo local en infinito, i.e. $0 > \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}|_{\phi_\infty} > -\frac{9}{4}\lambda$; que son de hecho los casos en los que las soluciones han sido encontradas.

Hay varios puntos interesantes que surgen de este análisis: Primero notemos que podemos escoger la constante cosmológica tal que la constante cosmológica efectiva sea cero, llevándonos a agujeros negros con pelo escalar en el contexto asintóticamente plano! (el precio que se paga es introducir una constante cosmológica ajustada). Es importante notar que esta predicción ha sido confirmada en [1]. El siguiente punto está relacionado con el hecho de la estabilidad. Esto, como se mencionó anteriormente ha sido considerado como una importante esperanza para salvar algo de la conjetura de no pelo. El punto es que en estas teorías los agujeros negros de Schwarzschild-anti de-Sitter son también soluciones triviales, y entonces, uno podría esperar que si, como indica la evidencia disponible (ver [71]), las nuevas soluciones de agujeros negros no triviales son estables, parecería haber una clara violación de la versión débil de la conjetura de no pelo (i.e. la versión que se ocupa únicamente de agujeros negros estables). El primer asunto que viene a la mente es el referente al significado de estabilidad en el contexto asintóticamente anti de-Sitter. Normalmente, a lo que uno se refiere por estabilidad en principio, es lo siguiente: Dados datos iniciales correspondientes a la configuración en cuestión, ¿Existen pequeñas perturbaciones a ésta, que crecen sin una cota superior con la evolución en el tiempo?. El punto es que, como el espacio-tiempo de anti de-Sitter no es globalmente hiperbólico (i.e. no tiene hipersuperficies de Cauchy) no se tiene en principio una formulación de valores iniciales bien puesta que nos permita investigar esa pregunta así que no hay una posible respuesta con sentido, por lo que la pregunta no tiene sentido. La única forma de evitar este problema parece ser fijar las “condiciones de frontera en infinito” a través del tiempo que dure la evolución para obtener un problema de valores iniciales bien puesto. Entonces el asunto de la estabilidad se relaciona a situaciones en las que consideramos pequeñas perturbaciones como en la discusión anterior

pero manteniendo entre otras cosas el valor del campo escalar fijo en infinito. Es en este sentido que las nuevas soluciones de agujero negro podrían ser estables. Supondremos de aquí en adelante que dicha estabilidad se verifica para esas soluciones. Ahora preguntémosnos si dicha estabilidad es sorprendente o no. La primera cosa que notamos es que, como se menciona anteriormente, en infinito el campo escalar está en un máximo local del potencial, y entonces, la estabilidad está íntimamente ligada con el hecho de que estamos lidiando con un problema de evolución con condiciones de frontera fijas en infinito, de otra forma la intuición nos dice que bajo pequeñas perturbaciones el campo tendería a rodar por el potencial.

Lo que yace detrás de la estabilidad de las nuevas configuraciones estables de alguna manera debe de ser entonces, que representan las configuraciones de “masa mínima” (ver [74] y las referencias ahí para una definición formal de masa en este contexto y la comparación con definiciones alternativas) entre aquellas que tienen un área* de agujero negro y un valor del campo escalar fijo en infinito. Suponiendo que este sea el caso, la siguiente conjetura surge naturalmente: Para situaciones en las que el agujero negro no trivial es estable, la solución trivial con las mismas condiciones de frontera i.e. la solución estándar de Schwarzschild anti de-Sitter con las mismas condiciones de frontera (con el campo escalar tomando el valor en la cima del potencial a lo largo de todo el espacio-tiempo) debería de ser inestable puesto que ya no corresponden al mínimo de la masa a área fija pues este papel lo ha tomado la configuración no trivial. En particular podemos considerar la situación en la que se ha hecho ajuste fino para que la constante cosmológica efectiva sea igual a cero, y por lo tanto, la solución simple de Schwarzschild debería ser inestable. Esta situación es análoga al caso de la solución cargada magnéticamente de Reissner-Nordstrom que es estable en la teoría de Einstein Maxwell, pero inestable en la teoría de Einstein Yang Mills [76].

Finalmente, notemos que en [71], fueron encontradas soluciones no triviales tanto estables como inestables. ¿Que es lo que yace detrás de las diferencias en estas situaciones?. Es natural suponer que tiene que ver con un cambio en el signo de la diferencia de masas entre las dos soluciones con la misma área del horizonte y el mismo valor asintótico del campo escalar. Notemos que en la situación que estamos analizando dicha diferencia puede tener cualquier signo dependiendo de los detalles del potencial escalar. De hecho comparemos la masa del agujero negro estático no trivial de radio r_H $M_2(r_H)$, con la masa del correspondiente agujero negro de Schwarzschild anti de-Sitter del mismo radio $M_1(r_H)$. Por radio del agujero negro nos referimos a $r_H = \sqrt{A/4\pi}$ donde A es el área del horizonte. Y por masa nos referimos a la masa Hamiltoniana como está definida en [74], la cual puede ser evaluada en esta situación simplemente como $M = \lim_{r \rightarrow \infty} m(r)$.

En el segundo caso la solución se obtiene haciendo que $\phi \equiv \phi_\infty$, $\delta \equiv 0$ y $\mu(r) = 1 - 2M_1/r + \lambda r^2$ con M_1 la correspondiente masa del agujero negro de radio r_H así que

$$M_1(r_H) = \frac{r_H}{2}(1 + \lambda r_H^2) \quad (6.11)$$

En el caso de agujero negro no trivial la masa se obtiene de la ecuación para m' que se obtiene de las ecuaciones (6.4) y (6.3);

*Estamos suponiendo una generalización de las ideas presentadas en [75].

$$m' = -4\pi r^2 T_t^t + (3/2)\lambda r^2 = (r^2/2)[(3\lambda + \Lambda) + 8\pi V(\phi) + 4\pi\mu(\phi')^2] \quad (6.12)$$

Primero, veamos que el requerimiento de que $m' \rightarrow 0$ en ∞ implica que

$$\lambda = -(1/3)[\Lambda + 8\pi V(\phi_\infty)] = -1/3\Lambda_{eff}. \quad (6.13)$$

Para que μ se anule en el horizonte se requiere que $m(r_H) = r_H/2(1 + \lambda r_H^2) = M_1(r_H)$, así que usando la ec. (6.13) podemos escribir la masa del agujero negro no trivial como:

$$M_2 = m(r_H) + 4\pi \int_{r_H}^{\infty} r^2 [V(\phi) - V(\phi_\infty) + (1/2)\mu(\phi')^2] dr \quad (6.14)$$

Entonces el signo de $M_2 - M_1$ depende de la integral que puede tener cualquier signo dependiendo de los detalles del potencial y del radio del horizonte. Nótese que ésto contrasta con la situación que surge en la teoría de Einstein Yang Mills y sus agujeros negros con pelo en el contexto asintóticamente plano, donde la masa del agujero negro no trivial es

$$M_2 = m(r_H) + 4\pi \int_{r_H}^{\infty} r^2 [(1/r^2)V(w) + (1/2)\mu(w')^2] dr \quad (6.15)$$

donde w parametriza el campo de Yang Mills (como en [52, 53, 54]) y el término $V(w) = (1/2)(1 - w^2)^2$ que surge de la autointeracción de los campos no abelianos juega el papel de un potencial efectivo – y no negativo – en esta situación). Es claro que en este caso la masa del agujero negro con pelo es mayor a la de la solución de Schwarzschild con el mismo valor del área del horizonte.

Finalmente hay que hacer una observación sobre la conjetura de no pelo y la naturaleza del contraejemplo obtenido en [71]. El entendimiento estándar es que se dice que hay agujeros negros con pelo, si dentro de cierta teoría, las condiciones de frontera y las cargas en infinito no son suficientes para especificar de manera única una solución estacionaria de agujero negro. Si uno toma la posición (no defendida en este trabajo, pero aparentemente sí por los autores de [71]) de que sólo se consideran agujeros negros estables en este contexto, entonces para poder decir que se ha encontrado pelo no es suficiente mostrar que las nuevas soluciones son estables, sino que se tiene que asegurar que la solución trivial también permanece estable. De hecho usando el resultado del análisis de [77], fácilmente podemos probar que para ciertos valores de los parámetros la solución de Schwarzschild anti de-Sitter será inestable, y entonces el punto sobre la violación de la versión débil de la conjetura de no pelo en el terreno de campos escalares es discutible.

Consideremos ahora la estabilidad de Schwarzschild anti de-Sitter y veamos si como lo sugiere nuestra discusión anterior hay situaciones en que es inestable. Las perturbaciones alrededor del agujero negro de Schwarzschild anti de-Sitter con $\phi \equiv \phi_\infty$ están descritas por:

$$\begin{aligned} \mu(t, r) &= \mu_0(r) + \epsilon\mu_1(t, r) \\ \delta(t, r) &= \epsilon\delta_1(t, r) \\ \phi(t, r) &= \phi_\infty + \epsilon\phi_1(t, r) \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= -\epsilon\phi_1(t, r)\alpha^2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

con $\alpha^2 = -\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}|_{\phi_\infty}$ y $\mu_0(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \lambda r^2$. La ecuación para el campo escalar perturbada a primer orden es:

$$\ddot{\phi}_1 = \mu_0 \left[\mu_0 \phi_1'' + \left(\frac{2}{r} \mu_0 + \mu_0' \right) \phi_1' + \alpha^2 \phi_1 \right] \quad (6.17)$$

y las ecuaciones de Einstein perturbadas a primer orden se satisfacen idénticamente con $\delta_1 = 0$ y $\mu_1 = 0$.

La ecuación (6.17) puede ser escrita como $\ddot{\phi}_1 = -A\phi_1$ donde $A = -D^a D_a + V$ y D_a es la derivada covariante asociada con la métrica espacial auxiliar

$${}^{(3)}ds^2 = dx^2 + r(x)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (6.18)$$

con

$$x(r) = \int_{r_H}^r dr' \left(1 - \frac{2m}{r'} + \lambda r'^2 \right)^{-1}. \quad (6.19)$$

Nótese que cuando $r \rightarrow \infty$, x converge a una constante finita que denotamos por c . De esta manera podemos escribir:

$$D^a D_a = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\mu_0(x)}{r(x)} \frac{d}{dx}. \quad (6.20)$$

Como se menciona en [77], si ψ es un vector del espacio de Hilbert L^2 con producto interior

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^c r^2 \psi_1 \psi_2 \sin\theta dx d\theta d\varphi \quad (6.21)$$

tal que $\langle \psi, A\psi \rangle < 0$ entonces, la configuración es inestable.

Si elegimos $\psi = \frac{P(x)}{r(x)^n}$ con $P(x)$ cualquier polinomio (de orden finito) y $n \geq 1$ obtenemos un elemento con norma finita de L^2 . Si por ejemplo tomamos $n = 1$ entonces

$$\langle \psi, A\psi \rangle = -4\pi \int_0^c dx P(x) \left[\frac{d^2 P(x)}{dx^2} + \mu_0 P(x) \left(\alpha^2 - \frac{2M}{r^3} - 2\lambda \right) \right] \quad (6.22)$$

entonces, si $\alpha^2 > \frac{2M}{r_H^3} + 2\lambda$, y tomamos P como cualquier polinomio en x que sea positivo definido y que tenga una segunda derivada positiva definida en el intervalo $(0, c)$, entonces $\langle \psi, A\psi \rangle \leq 0$ mostrando que la configuración es inestable.

Hemos analizado cuidadosamente las razones que se encuentran detrás de la posibilidad de obtener pelo escalar en el caso asintóticamente anti de-Sitter comparándolas con la situación en el caso asintóticamente plano. También discutimos el asunto de la estabilidad y encontramos una explicación muy sencilla que apunta a la posible inestabilidad dentro de estas teorías y condiciones de frontera de la solución usual de Schwarzschild anti de-Sitter. Aquí hemos trabajado con el caso mínimamente acoplado, pero su extensión al caso no mínimamente acoplado es trivial si podemos realizar una transformación conforme (i.e. si se puede mostrar que el factor conforme requerido no se anula en ningún lugar), en los casos no triviales esto es mucho más difícil ya que se pierde el control que da la CED (los acoples no mínimos abren la posibilidad de violaciones de todas las condiciones de energía) sobre los signos de varios términos en la ec. (6.7).

Este capítulo nos va a servir como base para los tres capítulos siguientes. Como se mencionó en la introducción, de los resultados presentados aquí, se motivaron estudios de agujeros negros con pelo

y solitones escalares en espacio-tiempos asintóticamente planos [1], estudio que nos sirvió de base para desarrollar el capítulo 7. Por otro lado, el tipo de potenciales estudiados en estas teorías y sus respectivas soluciones nos permitieron desarrollar los capítulos 8 y 9.

Capítulo 7

Evolución dinámica de solitones escalares auto-gravitantes inestables

7.1 Introducción

Haciendo uso de la demostración de no-pelo introducida en el capítulo anterior, es trivial mostrar que tampoco pueden existir soluciones solitónicas escalares en teorías de campos escalares minimamente acopladas a la gravedad con un potencial positivo definido. Por otro lado, de igual forma que se mostró que es posible encontrar soluciones de agujeros negros estacionarios con pelo escalar haciendo uso de potenciales que no sean positivos definidos (y que por lo tanto no satisfacen las condiciones del teorema) también es trivial mostrar que pueden existir las equivalentes soluciones solitónicas con dichos potenciales no positivos. Mas aún, como se mencionó que se puede predecir la existencia de agujeros negros con pelo escalar asintóticamente planos ajustando el valor de la constante cosmológica, es directo predecir la existencia de soluciones solitónicas asintóticamente planas.

Recientemente, esta nueva familia de agujeros negros con pelo escalar (AN) y sus respectivos solitones (escalares) fueron encontrados dentro de la teoría de Einstein-Higgs con un potencial de campo escalar con signo no definido $V(\phi)$ [1]. Estas configuraciones son interesantes en muchos aspectos. Por un lado, constituyen un ejemplo que obstaculiza la extensión de teoremas de no pelo para potenciales que violan la condición de energía débil (CED) y por lo tanto invalida la aplicación de los teoremas de no pelo escalar [62, 63, 78]. Por otro lado, pueden ser útiles para probar algunas de las predicciones del reciente formalismo de horizontes aislados [79]. De hecho, se puede mostrar que estas configuraciones son inestables con respecto a perturbaciones lineales radiales, y por lo tanto pueden ser vistas como *estados ligados* de agujero negro sin pelo y escalares (cf. [80] en el contexto de AN con color). El análisis de perturbaciones más simple, de cualquier forma, no nos da ninguna respuesta definitiva acerca del destino final de estas configuraciones. No obstante, un análisis heurístico basado en argumentos energéticos provee

algunas pistas acerca de su destino. Presumiblemente, el AN de Schwarzschild constituye la cota mínima de energía-masa (el “estado base”) de las posibles configuraciones de AN con condiciones de frontera fijas, que corresponden a área del horizonte A_h fija y asintóticamente planas. Entonces, entre todas las configuraciones de AN que hay en la teoría, el AN de Schwarzschild es el energéticamente preferido.

El objetivo de este capítulo es realizar la evolución numérica completamente no lineal de los solitones de campo escalar, preparando el camino para un futuro análisis de los agujeros negros con pelo escalar. La filosofía de nuestro análisis es similar a la de Straumman y Zhou para el caso de “solitones con color” (solitones en la teoría de Einstein-Yang-Mills) [81]. Las condiciones iniciales corresponden a solitones escalares inestables en un espacio-tiempo globalmente regular. Dos diferentes tipos de perturbaciones iniciales serán consideradas y como veremos con detalle las evoluciones del sistema son significativamente distintas.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 7.2 derivamos el sistema de ecuaciones de evolución y constricciones. La sección 7.3 describe las condiciones iniciales correspondientes a la solución estática con una pequeña perturbación. Discutimos las condiciones de foliación que usamos para las simulaciones en la sección 7.4. La sección 7.5 describe las técnicas numéricas. En la sección 7.6 mostramos los resultados numéricos para los dos tipos de perturbaciones mencionados anteriormente. En el apéndice B discutimos las propiedades de hiperbolicidad del sistema de ecuaciones de evolución.

7.2 Ecuaciones de campo

Consideraremos un modelo de campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad y con un potencial de auto-interacción no trivial. El modelo está descrito por el Lagrangiano (se usaran unidades en las que $G = c = 1$):

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - V(\phi) \right]. \quad (7.1)$$

Escogemos el siguiente potencial asimétrico para el campo escalar que produce las soluciones asintóticamente planas que deseamos:

$$V(\phi) = \frac{\sigma}{4} (\phi - a)^2 \left[(\phi - a)^2 - \frac{4(\eta_1 + \eta_2)}{3} (\phi - a) + 2\eta_1 \eta_2 \right], \quad (7.2)$$

con σ , η_1 , η_2 y a parámetros constantes. Para esta clase de potenciales se puede mostrar fácilmente que, si $\eta_1 > 2\eta_2 > 0$, $\phi = a$ corresponde al mínimo local, $\phi = a + \eta_1$ al mínimo global y $\phi = a + \eta_2$ al máximo local. La característica clave de este potencial para que las soluciones estáticas y asintóticamente planas existan es que el mínimo local en $\phi = a$ también es un cero de $V(\phi)$ [1]. El factor σ en frente del potencial fija la escala, así que uno siempre puede tomar $\sigma = 1$ y solo re-escalar todo para una σ diferente. Para las simulaciones discutidas aquí se tomarán los siguientes valores de los parámetros: $\sigma = 1$, $\eta_1 = 0.5$, $\eta_2 = 0.1$ y $a = 0$ (véase la figura 7.1).

Las ecuaciones de campo que se obtienen del Lagrangiano (7.1) son las ecuaciones de campo de

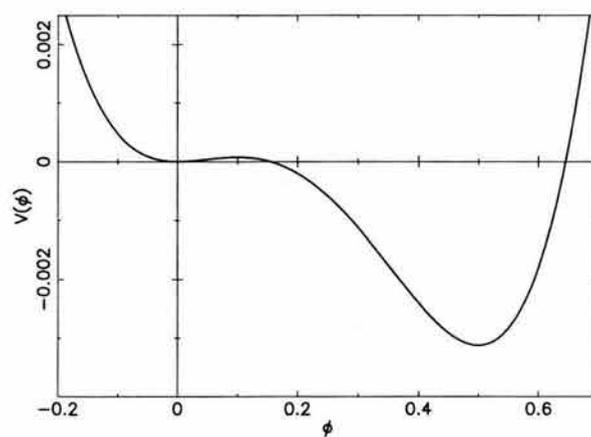


Fig. 7.1: Potencial escalar $V(\phi)$ correspondiente a la ec. (7.2) con parámetros $\sigma = 1$, $\eta_1 = 0.5$, $\eta_2 = 0.1$ y $a = 0$.

Einstein y la ecuación de Klein-Gordon (KG):

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad \square\phi = \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi}, \quad (7.3)$$

El tensor de energía-momento para el campo escalar es

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi + V(\phi) \right]. \quad (7.4)$$

Para realizar el análisis numérico del problema en consideración usaremos la formulación 3+1 basada en las ecuaciones ADM estándar [4, 5]. Además, escojemos que el vector de corrimiento sea cero. Como se explicó en detalle en el capítulo 1, las ecuaciones de evolución para la 3-métrica (γ_{ij}) y la curvatura extrínseca (K_{ij}) son

$$\partial_t\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}, \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= -\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j\alpha + \alpha(R_{ij} + KK_{ij} \\ &\quad - 2K_{il}K_j^l - 8\pi M_{ij}), \end{aligned} \quad (7.6)$$

y las constricciones Hamiltoniana y de momento son

$$\mathcal{H} := R + K^2 - K_{ij}K^{ij} - 16\pi\rho = 0, \quad (7.7)$$

$$\mathcal{M}_i := \mathcal{D}_l(K^l_i - K\delta^l_i) - 8\pi J_i = 0, \quad (7.8)$$

con α la función de lapso, \mathcal{D}_i y R_{ij} la derivada covariante y el tensor de Ricci asociados con γ_{ij} , $R := \text{tr}R_{ij}$, $K := \text{tr}K_{ij}$, y donde las fuentes de materia están definidas en términos del tensor de energía-momento como

$$\rho = n_\mu n_\nu T^{\mu\nu}, \quad (7.9)$$

$$J_i = -n_\mu T_i^\mu, \quad (7.10)$$

$$S_{ij} = T_{ij}, \quad (7.11)$$

$$M_{ij} = S_{ij} + \frac{1}{2}\gamma_{ij}(\rho - S), \quad (7.12)$$

con n^μ el vector unitario normal a las hipersuperficies espaciales.

Nos enfocaremos a la dinámica de un espacio-tiempo con simetría esférica descrito por la métrica

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + A dr^2 + B r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (7.13)$$

La simetría esférica implica que todas las funciones dinámicas dependen solo de r y t .

Para escribir las ecuaciones de evolución comenzamos definiendo las variables

$$D_A := \partial_r \ln A, \quad (7.14)$$

$$D_B := \partial_r \ln B, \quad (7.15)$$

$$D_\alpha := \partial_r \ln \alpha. \quad (7.16)$$

Trabajaremos con las componente mixtas de la curvatura extrínseca $K_A := K_r^r$, $K_B := K_\theta^\theta = K_\phi^\phi$, y con las variables de materia $J_A := J_r$, $M_A := M_r^r$ y $M_B := M_\theta^\theta = M_\phi^\phi$. También introduciremos las variables extras

$$\tilde{D} := D_A - 2D_B, \quad (7.17)$$

$$K := \text{tr}K \equiv K_A + 2K_B, \quad (7.18)$$

y las usaremos en lugar de D_A y K_A .

Las ecuaciones de evolución para $\{A, B, \tilde{D}, D_B, K, K_B\}$ pueden obtenerse directamente de las ecuaciones ADM. Sin embargo, para que el sistema de evolución sea hiperbólico (véase el apéndice B) quitaremos los términos proporcionales a $\partial_r D_B$ y $\partial_r K_B$ de las ecuaciones de evolución ADM para K y \tilde{D} , respectivamente, usando las constricciones.

Las coordenadas esféricas pueden ser problemáticas en el origen. Para regularizar la singularidad de coordenadas se utilizará el esquema de regularización descrito en la en la referencia [82] (capítulo 2) y se introducirá la variable auxiliar

$$\lambda := \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{B} \right). \quad (7.19)$$

la cual es promovida a variable dinámica independiente y se evoluciona explícitamente en el tiempo.

Como hemos usado la constricción de momento para modificar la ecuación de evolución de \tilde{D} , para regularizar las ecuaciones se necesita reemplazar esta variable por

$$U := \tilde{D} - \frac{4B\lambda}{A}. \quad (7.20)$$

El conjunto final de variables dinámicas es entonces

$$\{A, B, \lambda, U, D_B, K, K_B\}, \quad (7.21)$$

y sus ecuaciones de evolución (regularizadas) son

$$\partial_t A = 2\alpha A (2K_B - K), \quad (7.22)$$

$$\partial_t B = -2\alpha B K_B, \quad (7.23)$$

$$\partial_t \lambda = \frac{2\alpha A}{B} \left[\partial_r K_B + 4\pi J_A - \frac{D_B}{2} (K - 3K_B) \right], \quad (7.24)$$

$$\partial_t U = -2\partial_r(\alpha K) + 4\alpha D_B (K - 3K_B) + 8\alpha \left[D_\alpha K_B + \frac{\lambda B}{A} (3K_B - K) - 4\pi J_A \right], \quad (7.25)$$

$$\partial_t D_B = -2\partial_r(\alpha K_B), \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K = & \alpha \left[-\frac{\partial_r D_\alpha}{A} - 4K K_B + 6K_B^2 + K^2 + \frac{D_\alpha}{2A} \left(U + \frac{4\lambda B}{A} \right) - \frac{D_\alpha^2}{A} - \frac{2D_\alpha}{Ar} \right. \\ & \left. - 8\pi (M_A + 2M_B - 2\rho) \right], \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = & \alpha \left[-\frac{\partial_r D_B}{2A} - \frac{D_\alpha D_B}{2A} + \frac{D_B}{4A} \left(U + \frac{4\lambda B}{A} \right) + K K_B - 8\pi M_B \right] \\ & + \frac{\alpha}{Ar} \left[\frac{U}{2} + \frac{2\lambda B}{A} - D_B - \lambda - D_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Se puede comprobar fácilmente que estas ecuaciones forman un sistema fuertemente hiperbólico (ver apéndice B).

En términos de estas nuevas variables, las constricciones Hamiltoniana y de momento toman la siguiente forma

$$0 = \mathcal{H} := \partial_r D_B - \frac{1}{r} \left(U - \lambda - D_B + \frac{4\lambda B}{A} \right) - AK_B (2K - 3K_B) - D_B \left(\frac{D_B}{4} + \frac{U}{2} + \frac{2\lambda B}{A} \right) + 8\pi A\rho, \quad (7.29)$$

$$0 = \mathcal{M} := \partial_r K_B - (K - 3K_B) \left[\frac{D_B}{2} + \frac{1}{r} \right] + 4\pi J_A, \quad (7.30)$$

y las variables de materia son

$$\rho = \frac{1}{2A} \left[\frac{\Pi^2}{B^2} + \xi^2 \right] + V, \quad (7.31)$$

$$J_A = -\frac{\xi \Pi}{A^{1/2} B}, \quad (7.32)$$

$$M_A = \frac{\xi^2}{A} + V, \quad (7.33)$$

$$M_B = V. \quad (7.34)$$

Finalmente, la ecuación de KG puede escribirse de la siguiente forma

$$\partial_t \phi = \frac{\alpha \Pi}{B\sqrt{A}}, \quad (7.35)$$

$$\partial_t \xi = \partial_r \left(\frac{\alpha \Pi}{B\sqrt{A}} \right), \quad (7.36)$$

$$\partial_t \Pi = -\alpha B\sqrt{A} \partial_\phi V + \frac{1}{r^2} \partial_r \left(\frac{\alpha B r^2 \xi}{\sqrt{A}} \right), \quad (7.37)$$

donde se introducen las variables

$$\xi := \partial_r \phi, \quad \Pi := \frac{B\sqrt{A}}{\alpha} \partial_t \phi. \quad (7.38)$$

Para propósitos numéricos, la ecuación de evolución para Π se transforma en la siguiente ecuación equivalente:

$$\partial_t \Pi = -\alpha B\sqrt{A} \partial_\phi V + 3 \frac{d}{dr^3} \left(\frac{\alpha B r^2 \xi}{\sqrt{A}} \right). \quad (7.39)$$

El último término en el lado derecho de esta ecuación incluye una primer derivada con respecto a r^3 . La razón detrás de esta transformación está relacionada a la regularización cerca del origen del factor $1/r^2$ en la ecuación original.

Nuestro sistema final de ecuaciones de evolución es entonces (7.22)-(7.28), (7.35), (7.36), y (7.39).

7.3 Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales usadas para estudiar la evolución son las soluciones de solitones estáticos calculados en la ref. [1], más una pequeña perturbación Gaussiana en Π . Estrictamente hablando, las condiciones

iniciales puramente estáticas tendrían una evolución trivial (es decir no habrá ninguna evolución en las variables). Sin embargo, como las configuraciones son inestables, los errores de redondeo son suficientes para detonar la evolución. No obstante, como los errores numéricos se hacen mas pequeños cuando la resolución se aumenta, es mejor incluir una perturbación finita que sirva como “detonador”.

7.3.1 Solitón estático

Como se mencionó arriba, consideraremos pequeñas perturbaciones al solitón estático encontrado en la ref. [1]. El solitón estático se obtiene tomando

$$B = 1, \quad D_B = K_B = K = 0, \quad (7.40)$$

$$\Pi = 0. \quad (7.41)$$

y resolviendo el conjunto de ecuaciones

$$\partial_r A = A \left[\frac{1-A}{r} + 8\pi A r \left(\frac{\xi^2}{2A} + V \right) \right], \quad (7.42)$$

$$\partial_r \xi = -\xi \left(D_\alpha + \frac{2}{r} - \frac{D_A}{2} \right) + A \partial_\phi V, \quad (7.43)$$

$$\partial_r \alpha = -\frac{\alpha}{2r} [1 - A - 4\pi r^2 (\xi^2 - 2AV)], \quad (7.44)$$

$$\partial_r \phi = \xi, \quad (7.45)$$

para A , α y ϕ . La primera de estas ecuaciones se obtiene de la constricción Hamiltoniana (7.29), la segunda de la ecuación de KG (7.37) y la última es la definición de ξ . La tercera ecuación es la combinación de ecuación de evolución para K_B , ec. (7.28), y de la constricción Hamiltoniana. Las ecuaciones anteriores se resuelven bajo las siguientes condiciones de frontera

$$\alpha(r=0) = \alpha_0, \quad A(r=0) = 1, \quad (7.46)$$

$$\phi(r=0) = \phi_0, \quad \xi(r=0) = 0. \quad (7.47)$$

El valor ϕ_0 se utiliza como el parámetro que garantice que el campo escalar vaya asintóticamente al mínimo local $V = 0$ del potencial, garantizando así el comportamiento asintóticamente plano. El valor α_0 , por otro lado, es completamente arbitrario. La razón es que α aparece solo en dos de las ecuaciones (en una de ellas a través de la combinación $D_\alpha = \partial_r \alpha / \alpha$) y estas dos ecuaciones son lineales en α . En la práctica se toma $\alpha_0 = 1$, se resuelve el sistema de ecuaciones, y posteriormente se re-escala el lapso para asegurar que su comportamiento asintótico es 1. El código numérico que usamos para resolver estos datos iniciales tiene una precisión a cuarto orden, en contraste con nuestro código de evolución el cual únicamente tiene precisión a segundo orden (véase la sec. 7.6).

Para los valores particulares de los parámetros del potencial usados aquí, la solución solitónica estática se muestra en las figuras 7.2 a la 7.4. En todas las gráficas la malla numérica se extiende hasta $r = 100$ y la coordenada radial se muestra en escala logarítmica. El valor que encontramos para ϕ_0 es

$$\phi_0 = 0.40594250807 \pm (2 \times 10^{-11}). \quad (7.48)$$

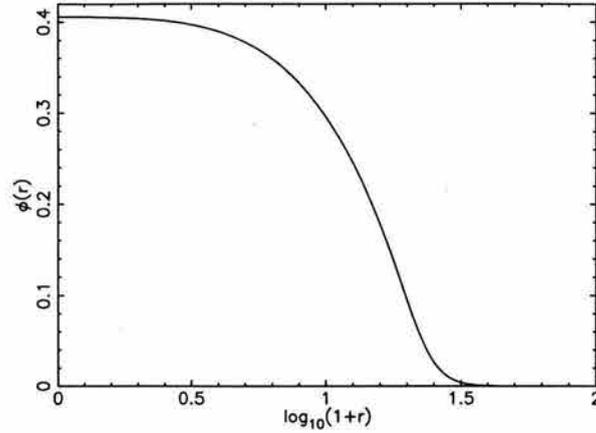


Fig. 7.2: Campo escalar ϕ para la configuración estática (la coordenada radial se muestra en escala logarítmica).

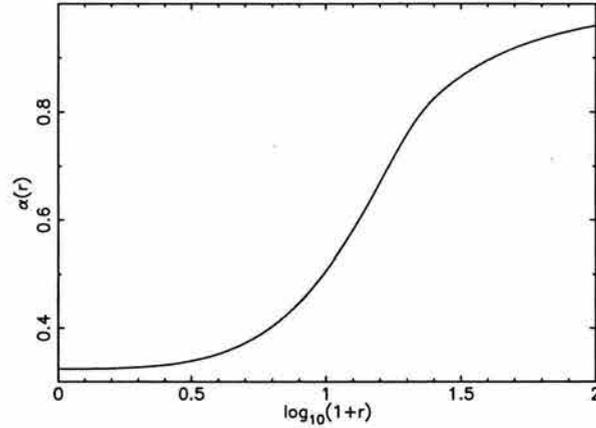


Fig. 7.3: Igual que la figura 7.2 para la función de lapso α .

La incertidumbre en la décimo primer cifra significativa se estima tomando la diferencia de los resultados obtenidos con las mallas mas finas con $\Delta r = 0.025$ y $\Delta r = 0.0125$. También es importante mencionar que habiendo fijado los parámetros del potencial, esta solución estática es única, contrariamente a lo que ocurre para los agujeros negros con pelo donde la familia de soluciones estáticas está parametrizada por el radio del horizonte [1].

7.3.2 Perturbando al solitón

Para perturbar el solitón estático se añade una pequeña Gaussiana a la derivada temporal del campo escalar

$$\Pi = \epsilon e^{-r^2/s^2} \quad \epsilon \ll 1, \quad (7.49)$$

y seguimos tomando $B = 1$, $D_B = K = 0$ (nótese que ahora es inconsistente pedir que $K_B = 0$). También se mantienen las condiciones $\partial_t \Pi = \partial_t K = 0$. El nuevo conjunto ecuaciones de datos iniciales que se

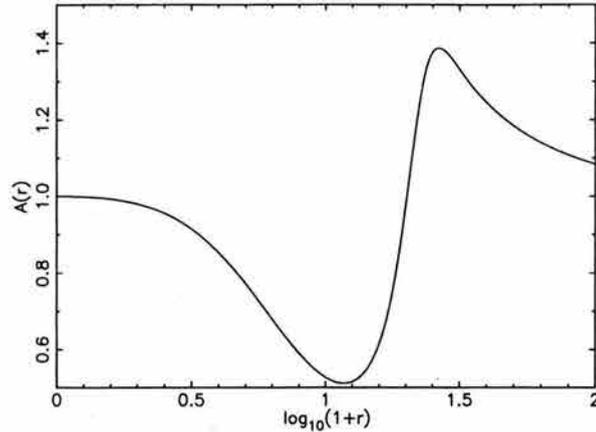


Fig. 7.4: Igual que la figura 7.2 para la función métrica A .

deben resolver es

$$\partial_r A = A \left[\frac{1-A}{r} + 3ArK_B^2 + 8\pi Ar \left(\frac{\Pi^2 + \xi^2}{2A} + V \right) \right], \quad (7.50)$$

$$\partial_r \xi = -\xi \left(D_\alpha + \frac{2}{r} - \frac{D_A}{2} \right) + A \partial_\phi V, \quad (7.51)$$

$$\partial_r^2 \alpha = \partial_r \alpha \left(\frac{D_A}{2} - \frac{2}{r} \right) + \alpha A \left[6K_B^2 + 8\pi \left(\frac{\Pi^2}{A} - V \right) \right], \quad (7.52)$$

$$\partial_r \phi = \xi, \quad (7.53)$$

$$\partial_r K_B = 4\pi \frac{\xi \Pi}{A^{1/2}} - 3 \frac{K_B}{r}, \quad (7.54)$$

donde la última ecuación viene del hecho que la constricción de momento ya no es trivial. Nótese también que ahora tenemos una ecuación de segundo orden para el lapso α . Esto se debe a que ya no es válida la condición $\partial_t K_B = 0$, que es reemplazada por la condición $\partial_t K = 0$. En el caso estático ambas condiciones son equivalentes, así que uno puede resolver la ecuación de primer orden $\partial_t K_B = 0$ por ser más simple, pero en el caso perturbado esto ya no es válido.

Los datos obtenidos de esta manera son consistentes con las constricciones pero no son estáticos, y se reducirán al solitón estático cuando $\epsilon = 0$. Para los casos discutidos aquí, hemos tomado los siguientes valores para la Gaussiana $\epsilon = \pm 0.002$ y $s = 10.0$. No mostramos las gráficas para los valores iniciales de ϕ , α y A , ya que son muy similares a los del solitón estático.

7.3.3 Masa

Para encontrar la masa de las configuraciones es importante notar que, como el campo escalar decae muy rápidamente con r , en la región asintótica tendremos esencialmente la métrica de Schwarzschild. Si reparametrizamos la métrica radial A como

$$A(r) = \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1}, \quad (7.55)$$

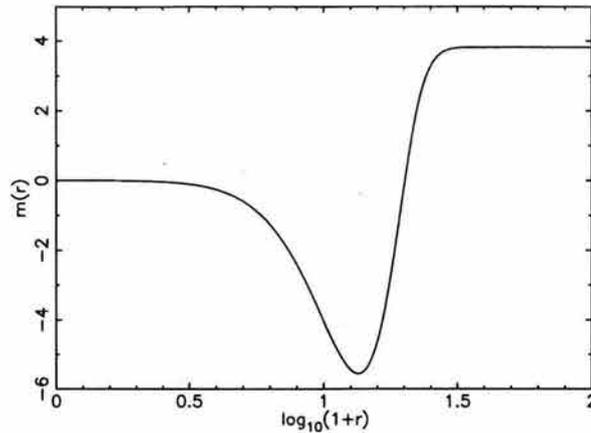


Fig. 7.5: Igual que la figura 7.2 para la función de masa $m(r)$.

entonces la masa de la configuración puede obtenerse de

$$M = \lim_{r \rightarrow \infty} m(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2} \left(1 - \frac{1}{A} \right). \quad (7.56)$$

En la práctica, no hay necesidad de alejarse tanto, ya que en la región donde el campo escalar es prácticamente cero esta expresión converge muy rápidamente a un valor límite. La función de masa $m(r)$ para la configuración estática se muestra en la figura 7.5. El valor al que tiende para r grandes resulta ser

$$M = 3.82719754567 \pm (2 \times 10^{-11}), \quad (7.57)$$

donde otra vez la barra de error se estima comparando los resultados de las simulaciones con $\Delta r = 0.025$ y $\Delta r = 0.0125$.

Para la configuración estática se puede mostrar, usando la constricción Hamiltoniana, que la masa dada por (7.56) también puede ser calculada como la integral de la densidad de energía ρ asociada con el campo escalar:

$$M = 4\pi \int_0^{\infty} \rho r^2 dr. \quad (7.58)$$

Sin embargo, esto solo es válido para los datos iniciales estáticos, ya que para configuraciones no estáticas aparecerán términos de curvatura extrínseca en esta expresión. Usando esta integral encontramos el siguiente valor para la masa del solitón estático (integramos solo hasta la frontera de la malla, pero como ρ tiende a cero rápidamente, el valor de la integral deja de cambiar en la última cifra decimal mucho antes que alcancemos la frontera)

$$M = 3.827197 \pm (2 \times 10^{-6}). \quad (7.59)$$

El error en este valor es considerablemente mayor, lo cual no es sorprendente debido a que la integración numérica fue hecha usando la regla de los trapecios de segundo orden. A pesar de esto, este valor coincide con el resultado anterior hasta 7 cifras significativas.

Para las configuraciones en las que se introdujo una perturbación, el valor de M calculado con (7.56) resulta ser extremadamente cercano al valor para el solitón estático, diferenciándose en un 0.1%:

$$M_{\text{perturbada}} = 3.8308619778 \pm (8 \times 10^{-10}). \quad (7.60)$$

Hay que notar que la masa es la misma para las dos perturbaciones, lo cual no es sorprendente ya que ρ depende solo de Π^2 .

7.4 Condiciones de foliación

Hasta ahora hemos supuesto que el vector de corrimiento es cero. Ahora necesitamos especificar la condición de foliación, esto es, la forma en la que vamos a determinar la función de lapso α durante la evolución. Una elección comunes la llamada foliación polar, que en el caso en el que el vector de corrimiento es cero es equivalente a las coordenadas de área (o radiales) durante la evolución. Esto consiste en imponer $B(t, r) = 1$, lo que implica que $K_B(t, r) = 0$, y entonces $K = K_A$. De la ecuación de evolución para K_B se puede encontrar una ecuación diferencial ordinaria en r para el lapso que puede ser resuelta a cada paso de tiempo. El principal problema que tiene esta elección es que la foliación radial-polar no penetra horizontes de AN, ya que dentro del horizonte es imposible mantener las áreas de las esferas fijas sin un vector de corrimiento distinto de cero.

Como estamos interesados en buscar horizontes de AN durante la evolución, decidimos usar coordenadas que penetren horizontes en lugar de las coordenadas anteriores. De hecho, se usaron dos diferentes tipos de condiciones de foliación, llamadas, foliación armónica y foliación maximal (véase abajo), cada una adaptada a la situación física que resulta de una perturbación dada. La elección adecuada, por supuesto, solo se sabe a posteriori, así que en la práctica se hacen una serie de corridas en cada caso con la foliación armónica para ganar algo de experiencia acerca del comportamiento dinámico del sistema.

La foliación armónica es una condición bien conocida que relaciona la función de lapso con los elementos de volumen espacial: $\alpha = f(x^i) \gamma^{1/2}$, con γ el determinante de la métrica espacial y $f(x^i)$ una función arbitraria independiente del tiempo. Esta condición de foliación es de hecho equivalente al requerimiento de que la coordenada temporal t satisfaga la ecuación de onda $\square t = 0$, i.e. t es una función armónica. La condición armónica también puede ser escrita como una ecuación de evolución para el lapso con la siguiente forma

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 K, \quad (7.61)$$

la cual es un caso particular de la familia de condiciones de foliación de Bona-Masso [13].

Se puede mostrar que la foliación armónica evita las “singularidades de enfocamiento” [14, 15] (aquellas para las que los elementos de volumen espacial se anulan a una velocidad acotada): el lapso colapsa a cero a la misma velocidad que los elementos de volumen. La evasión de singularidades de la foliación armónica, sin embargo, es solo marginal en el sentido de las hipersuperficies se aproximan arbitrariamente

cerca de la singularidad después de un tiempo finito. Por esta razón la foliación armónica usualmente no se utiliza para evoluciones de agujeros de negros donde lo que uno quiere es evitar la singularidad.

Para evoluciones de agujeros negros, elecciones diferentes a la armónica suelen ser mejores. En particular, la foliación maximal, definida por $K = \partial_t K = 0$, ha sido la herramienta estándar para evolucionar agujeros negros debido a sus propiedades que evitan singularidades fuertemente (véase e.g. [83]). La foliación maximal nos conduce a la siguiente ecuación elíptica para el lapso

$$\nabla^2 \alpha = \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S)] , \quad (7.62)$$

En nuestro caso, hemos escogido datos iniciales que tienen precisamente la propiedad de que $K = \partial_t K = 0$ (aún en el caso perturbado). Más aún, como mostraremos más adelante, una perturbación particular al solitón escalar conduce a la formación de un AN, así que la elección natural es la foliación maximal.

En simetría esférica, la condición de foliación maximal se reduce a la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para la función de lapso α

$$\partial_r^2 \alpha + \partial_r \alpha \left(\frac{2}{r} + D_B - \frac{D_A}{2} \right) = \alpha A [6K_B^2 + 4\pi(\rho + S_A + 2S_B)] . \quad (7.63)$$

Esta ecuación se resuelve imponiendo las siguientes condiciones de frontera

$$\partial_r \alpha \Big|_{r=0} = 0 , \quad \partial_r \alpha \Big|_{r=r_b} = (1 - \alpha)/r , \quad (7.64)$$

con r_b la posición de la frontera exterior. La primera condición es solo la condición de regularidad en el origen, y la segunda es una condición de Robin para la frontera exterior que garantiza que el lapso de comporte asintóticamente como $1 + k/r$ (con k constante).

Ahora, aunque la condición maximal está bien adaptada al caso en el que la configuración colapsa a un agujero negro, para la configuración que “explosa” (i.e. una pared de dominio que viaja hacia afuera), la condición de foliación armónica está mucho mejor adaptada (7.61). Esto es porque, como se mostrará en la sec. 7.6 más adelante, en ese caso el espacio-tiempo dentro de la pared de dominio que viaja hacia afuera se comporta de una manera similar a un espacio-tiempo anti de Sitter, mientras el campo escalar se mueve hacia el verdadero mínimo del potencial. Este comportamiento, producirá una singularidad tipo big-crunch en un tiempo propio finito, a la cual la foliación maximal responde haciendo colapsar el lapso extremadamente rápido en toda la hipersuperficie, congelando completamente la evolución [2, 84]. La foliación armónica, por otro lado, hace que el lapso colapse más lentamente, permitiendo una evolución mucho más larga. Como se mencionó arriba, esta foliación permite a las hipersuperficies moverse arbitrariamente cerca de la singularidad.

7.5 Metodología numérica

Para la integración en el tiempo el código utiliza un esquema iterativo de Crank-Nicholson con 3 iteraciones (ver e.g. [85]). Las derivadas se representan por diferencias finitas centradas a segundo orden sobre la

malla radial. Entonces se espera que la evolución numérica sea precisa a segundo orden tanto en Δr como en Δt . Por último, tomamos $\Delta t = \Delta r/4$ para asegurar que se satisface la condición de estabilidad de Courant-Friedrichs-Levy la cual establece que $c\Delta t \leq \Delta r$. Esta condición tiene una interpretación geométrica muy clara. Establece que el dominio de dependencia numérico, $2\Delta r$, debe de ser mas grande que el dominio de dependencia físico $2c\Delta t$. Si esto no fuera cierto, sería imposible que la solución numérica converja a la solución exacta cuando se refina la malla, ya que siempre habría información faltante que viene desde afuera del dominio de dependencia numérico.

7.5.1 Condiciones de frontera

De las ecuaciones de evolución (7.22), (7.23) y (7.35) es claro que las funciones métricas A y B y el campo escalar ϕ evolucionan solo a través de términos fuentes y pueden actualizarse en cada punto de la malla numérica hasta la frontera. Las ecuaciones de evolución para las otras variables, sin embargo, contienen derivadas espaciales así que necesitamos una condición de frontera. Para estas variables usamos una condición de frontera de ondas salientes (Sommerfeld). Esto es, suponemos que cerca de la frontera todas las variables dinámicas se comportan como ondas esféricas:

$$h(r, t) = \frac{u(r - vt)}{r}, \quad (7.65)$$

donde v es la velocidad de la onda. En la práctica, usamos la forma diferencial de la condición de frontera (7.65)

$$\partial_t h + v\partial_r h + v\frac{h}{r} = 0. \quad (7.66)$$

También suponemos que la frontera se encuentra lo suficientemente lejos del origen para que la velocidad de la onda sea esencialmente uno (α y A casi valen 1). Entonces en realidad usamos

$$\partial_t h = -\partial_r h - \frac{h}{r}. \quad (7.67)$$

Usamos diferencias finitas para la ecuación anterior (consistentes a segundo orden tanto en el espacio como en el tiempo) y la aplicamos a $\{\lambda, U, D_B, K, K_E, \xi, \Pi\}$. Cuando usamos la foliación armónica también aplicamos la condición a D_α y evolucionamos α en cada punto hasta la frontera.

Es importante mencionar que las condiciones de frontera que acabamos de describir no son compatibles con las constricciones. Entonces es de esperarse una pequeña violación a las constricciones en las fronteras, que posteriormente se propagará hacia dentro. Checamos que ésto no tiene impacto en los resultados presentados moviendo la frontera externa a diferentes distancias y comparando los resultados. Por supuesto que es posible implementar condiciones de frontera que preserven las constricciones, y son mucho más deseables, pero no son necesarias para los resultados presentados aquí.

7.5.2 Horizonte aparente

Durante la evolución buscamos horizontes aparentes como indicadores de la formación de un agujero negro. Por supuesto, el horizonte aparente va a coincidir con el horizontes de eventos solo si el espacio-

tiempo alcanza un estado estacionario a grandes tiempos. Pero si un horizonte aparente está presente, existe la garantía de que afuera de él existe un horizonte de eventos siempre que la conjetura de la censura cósmica y la condición de energía nula se satisfagan [86, 87]. Los horizontes aparentes tienen la ventaja de que su definición es local en el sentido de que pueden localizarse en las hipersuperficies espaciales. Por otro lado, los horizontes de eventos, están definidos globalmente y solo pueden localizarse una vez que toda la evolución del espacio-tiempo se conoce (o al menos, una vez que la evolución se conoce hasta que el espacio-tiempo es esencialmente estacionario). En nuestro caso, la condición de energía nula es independiente de $V(\phi)$, y por lo tanto se satisface ya que para un vector nulo ℓ^μ tenemos $T_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = (\ell^\mu\nabla_\mu\phi)^2 \geq 0$. Más aún, cuando el horizonte aparente se forma en nuestras simulaciones el campo escalar está en la región en la que el potencial es positivo, así que se puede garantizar que existe afuera de él un horizonte de eventos.

Un horizonte aparente (HA) se define como la superficie más externa marginalmente atrapada [86], ésto es, una superficie dos-dimensional cerrada para la cual la expansión de las geodésicas nulas que viajan hacia afuera es cero. En términos de cantidades 3+1, la expansión H de una congruencia de rayos nulos moviéndose en la dirección normal hacia afuera a una superficie dada toma la forma [88]

$$H = \mathcal{D}_i s^i + K_{ij} s^i s^j - K, \quad (7.68)$$

con s^i el vector normal unitario que apunta hacia afuera de la superficie. Un HA es la superficie cerrada mas externa tal que $H = 0$ en toda la superficie.

En simetría esférica, esta expresión se reduce a una forma simple

$$H = \frac{1}{A^{1/2}} \left(\frac{2}{r} + D_B \right) - 2K_B. \quad (7.69)$$

En el código evaluamos esta expresión sobre toda la malla numérica buscando los lugares donde se vuelva negativa (hay que notar que para Minkowski simplemente tenemos $H = 2/r > 0$). Si H cambia de signo, el lugar más externo donde eso suceda es identificado como el HA.

Una vez que un horizonte aparente es localizado en $r = r_{HA}$, su área está dada por:

$$A_{HA} = 4\pi r_{HA}^2 B_{HA} \quad (7.70)$$

donde B_{HA} es la función métrica B evaluada en $r = r_{HA}$. También podemos asociar una masa a este HA a través de la fórmula

$$M_{HA} = \sqrt{A_{HA}/(16\pi)} = \frac{r_{HA}\sqrt{B_{HA}}}{2}. \quad (7.71)$$

7.6 Resultados de las simulaciones numéricas

Como se mencionó anteriormente, las perturbaciones correspondientes a $\epsilon = 0.002$ y $\epsilon = -0.002$ producen evoluciones muy diferentes, así que vamos a considerar cada caso por separado.

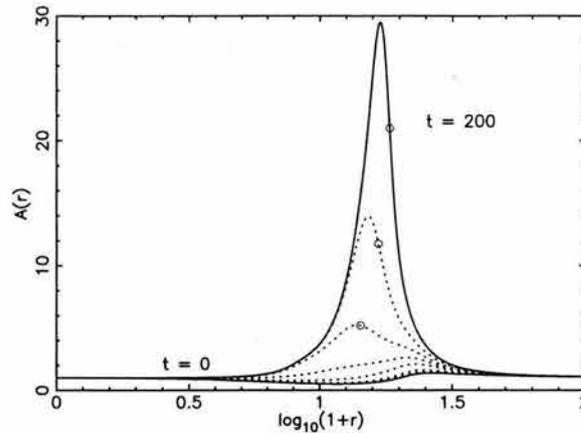


Fig. 7.6: Evolución de la función métrica A para la perturbación con $\epsilon = -0.002$. Nótese como después de un tiempo la función métrica crece indicando que las hipersuperficies se están estirando. Los círculos muestran la ubicación del horizonte aparente.

7.6.1 Colapso a un agujero negro

Primero consideraremos la configuración perturbada correspondiente a $\epsilon = -0.002$. En este caso usaremos la foliación maximal para determinar el lapso. Hemos hecho simulaciones numéricas usando cuatro diferentes resoluciones de la malla, $\Delta r = (0.1, 0.05, 0.025, 0.0125)$. En todos los casos la malla numérica se extiende hasta $r = 100$.

Las figuras 7.6 y 7.7 muestran la evolución de las funciones métricas A y B . En todas las gráficas las líneas sólidas corresponden a las configuraciones inicial y final, y las líneas punteadas a pasos intermedios (la separación temporal entre estas líneas es $\Delta t = 25$). Al principio, hay pequeñas oscilaciones alrededor del valor inicial, pero después la función métrica radial comienza a crecer como ocurre de manera característica en espacio-tiempos con AN. La figura 7.8 muestra el comportamiento de la función de lapso. Otra vez, vemos el colapso característico del lapso indicativo de que nos estamos acercando a una singularidad.

La evolución correspondiente del campo escalar puede verse en la figura 7.9. Nótese como el campo escalar se mueve hacia el mínimo local en $\phi = 0$ en toda la hipersuperficie. A tiempos grandes, la evolución de las regiones interiores se congela debido al colapso del lapso. Para esos tiempos, el campo escalar tiene valores por debajo de 0.1 en todas partes, lo que implica que estamos en la región donde el potencial es positivo.

El hecho de que las hipersuperficies se estiren y que el lapso colapse son indicativos de la presencia de un AN, pero no son suficientes para probar que efectivamente se encuentra ahí, así que buscamos la aparición de un HA. La figura 7.10 muestra la masa asociada con los HA's encontrados durante la simulación. De la figura uno puede ver que un HA aparece a $t \sim 115$. La masa asociada con este horizonte crece levemente mientras el campo escalar termina dentro del horizonte aparente. Por consistencia, esta

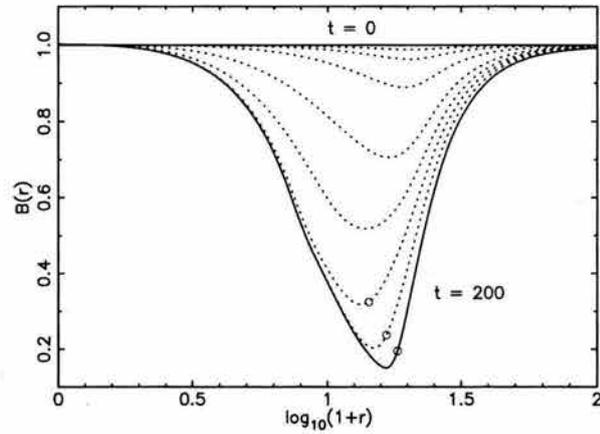


Fig. 7.7: Evolución de la función métrica B para la perturbación con $\epsilon = -0.002$. Los círculos muestran la ubicación del horizonte aparente.

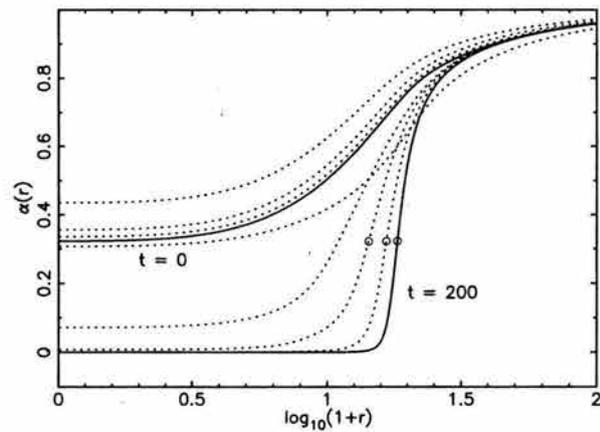


Fig. 7.8: Evolución de la función de lapso α para la perturbación con $\epsilon = -0.002$. Nótese el colapso del lapso a tiempos grandes, indicativo del acercamiento a una singularidad. Los círculos muestran la ubicación del horizonte aparente.

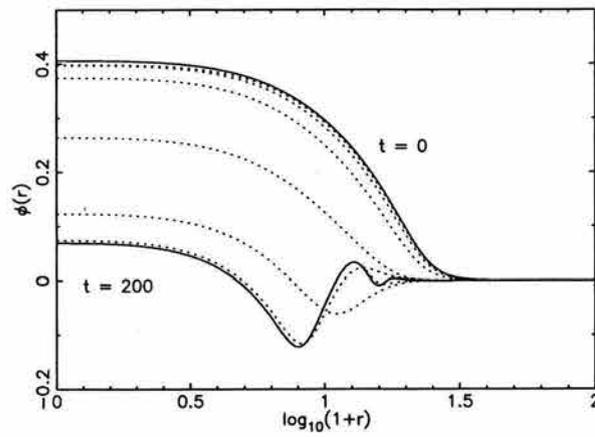


Fig. 7.9: Evolución del campo escalar ϕ para la perturbación con $\epsilon = -0.002$. A tiempos grandes el campo escalar tiene valores por debajo de 0.1 en todas partes, lo que implica que estamos en la región en la que el potencial es positivo.

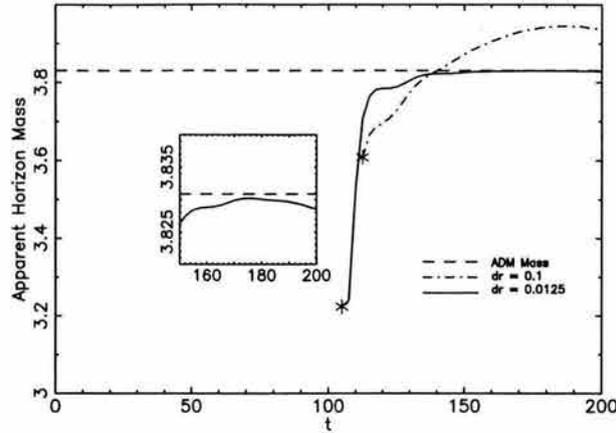


Fig. 7.10: Masa del horizonte aparente para la perturbación con $\epsilon = -0.002$. El HA aparece a $t \sim 115$. La línea troncada indica la masa ADM inicial del espacio-tiempo, y las líneas sólida y troncada-punteada indican la masa del horizonte para las resoluciones más alta y más baja respectivamente. Los asteriscos marcan la aparición del horizonte aparente.

masa debería siempre mantenerse por debajo de la masa ADM inicial del espacio-tiempo. De la figura vemos que para baja resolución el error numérico causa que la masa del horizonte eventualmente se vuelva más grande que la masa ADM. Sin embargo, a mayores resoluciones, la masa del horizonte se mantiene por debajo de la masa ADM a lo largo de toda la evolución (véase el recuadro de la fig. 7.10). La pequeña diferencia entre la masa del horizonte y la masa ADM indica que una pequeña cantidad de campo escalar ha sido radiado.

Una prueba crucial de la validez de nuestro código es el comportamiento de las constricciones. Analíticamente, las constricciones deben de ser idénticamente cero, pero los errores numéricos hacen que para nuestras simulaciones las constricciones tengan valores finitos. Aún así, dichos valores deben converger a cero cuando la resolución se aumenta. La figura 7.11 muestra el logaritmo de la raíz cuadrada promedio de la restricción Hamiltoniana sobre la malla numérica como función del tiempo para las cuatro resoluciones usadas en nuestras simulaciones $\Delta r = (0.1, 0.05, 0.025, 0.0125)$. Como se esperaba, la restricción Hamiltoniana converge a cero a segundo orden en Δr .

7.6.2 Explosión

Ahora se considerará la configuración perturbada correspondiente a $\epsilon = +0.002$. Para este caso se usará la foliación armónica para determinar el lapso y las mismas resoluciones para la malla, pero extenderemos la malla numérica hasta $r = 500$.

Las figuras 7.12 y 7.13 muestran la evolución de las funciones métricas A y B para este caso (ahora las líneas están separadas en el tiempo por $\Delta t = 75$). Es evidente que la evolución dinámica es completamente diferente al caso descrito en la sección anterior. En primer lugar, no hay indicación de que las

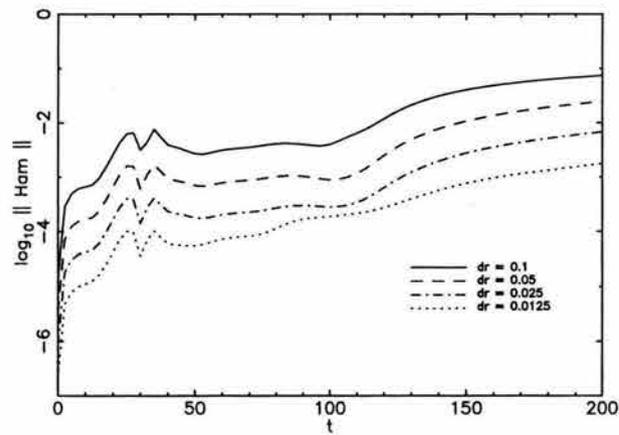


Fig. 7.11: Logaritmo de la raíz cuadrada media de la constricción Hamiltoniana como función del tiempo para la perturbación con $\epsilon = -0.002$, para cuatro resoluciones diferentes.

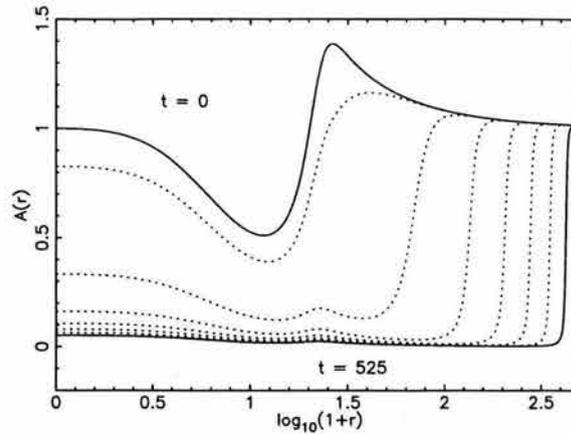


Fig. 7.12: Evolución de la función métrica A para la perturbación con $\epsilon = +0.002$.

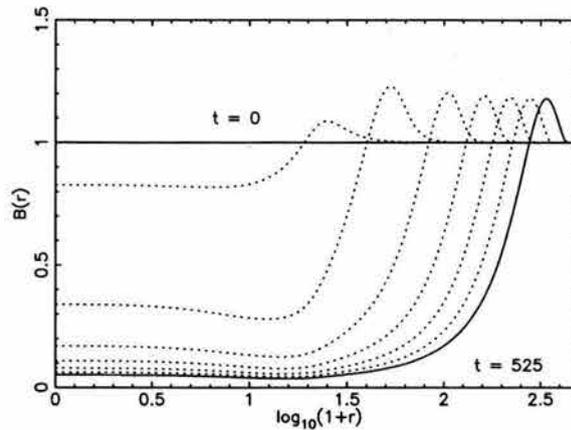


Fig. 7.13: Igual que la figura 7.12 para la función métrica B .

hipersuperficies se estiren. Más aún, en la evolución de la métrica radial A es claro que hay una pared moviéndose hacia afuera. La pared se mueve esencialmente a velocidad constante, aún cuando esto no es evidente en la gráfica logarítmica (esta velocidad es aproximadamente 1 en nuestras unidades, lo que coincide con la velocidad de la luz en las regiones exteriores). Dentro de esta pared la componente de la métrica radial está colapsando a cero. La componente de la métrica angular también está colapsando a cero en esta región, pero no tan rápidamente.

La evolución de la función de lapso se muestra en la fig. 7.14. Otra vez, la presencia de una pared que se mueve hacia afuera es evidente. Dentro de la pared el lapso está colapsando a cero, indicando que nos estamos acercando a una singularidad. sin embargo, en este caso no encontramos horizonte aparente durante la evolución.

La evolución del campo escalar puede verse en la fig. 7.15. En contraste con los resultados de la sección previa, en este caso el campo escalar se está moviendo hacia el verdadero mínimo del potencial

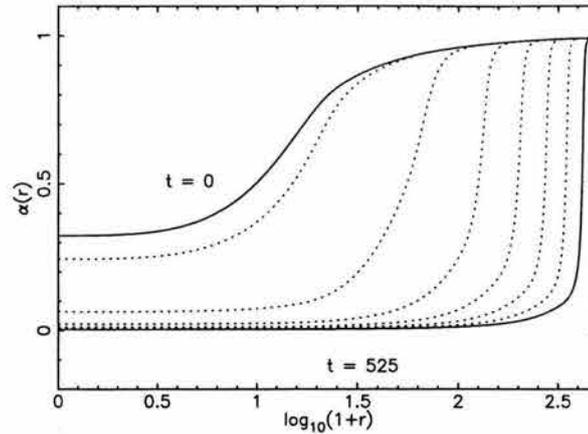


Fig. 7.14: Igual que la figura 7.12 para la función de lapso α .

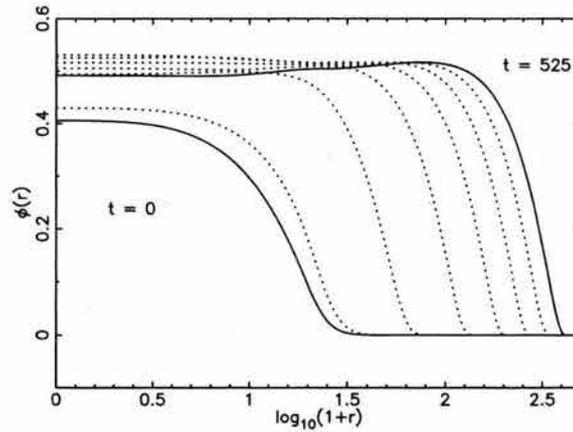


Fig. 7.15: Evolución del campo escalar ϕ para la perturbación con $\epsilon = +0.002$. Ahora, el campo escalar se mueve hacia el verdadero mínimo del potencial en $\phi = 0.5$ en todos lados.

en $\phi = 0.5$. Como este mínimo corresponde a un valor negativo del potencial, el interior de la pared se asemeja a un espacio-tiempo de anti de Sitter, excepto por el hecho de que el campo escalar no es uniforme. Aún así, uno esperaría la formación en esta región de una singularidad tipo big-crunch en un tiempo propio finito visto por observadores comoviles [2, 84]. Sin embargo, debido a las propiedades para evitar singularidades que posee la foliación armónica, esta singularidad será alcanzada después de un tiempo coordenado infinito.

Finalmente, la figura 7.16 muestra la evolución del logaritmo de la raíz cuadrada media de la constricción Hamiltoniana para las mismas cuatro resoluciones. La convergencia a segundo orden es nuevamente evidente.

La simulación parece indicar que la perturbación ha detonado una transición de fase global desde el falso vacío en el exterior al verdadero vacío en el interior. Esta transición de fase se propaga a través de una pared de dominio que siempre se mueve hacia afuera, lo que implica que el espacio-tiempo nunca

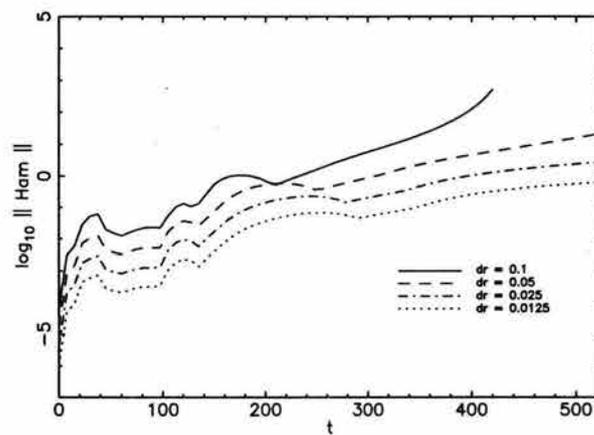


Fig. 7.16: Logaritmo de la raíz cuadrada media de la constricción Hamiltoniana como función del tiempo para la perturbación con $\epsilon = +0.002$, para cuatro resoluciones diferentes.

alcanzará un estado estacionario.

Así, en este capítulo se consideró la evolución dinámica de solitones escalares estáticos auto-gravitantes. Estas configuraciones solitónicas aparecen para el potencial de auto interacción $V(\phi)$ que tiene un mínimo local para el cual $V = 0$, y un mínimo global tal que $V < 0$. Esto permite soluciones estáticas, asintóticamente planas para las cuales el campo escalar interpola entre los dos mínimos. En [1] se mostró que las configuraciones estáticas son inestables, y hemos estudiado su respuesta a dos diferentes tipos de perturbaciones que difieren entre sí por el signo de la perturbación.

En un caso se encuentra que la configuración cede ante un colapso gravitacional, mientras el campo escalar se mueve hacia el mínimo local del potencial en todos lados. Una cantidad de campo escalar se radia, y el espacio-tiempo llega a ser un AN estacionario de Schwarzschild.

Para la otra perturbación el campo escalar “explota”, provocando una transición de fase global que se propaga a través de una pared de dominio que se mueve hacia afuera. Esta pared separa una región interior donde el campo escalar se mueve hacia el verdadero mínimo del potencial (el verdadero vacío), y la región externa con el campo escalar en el mínimo local. Como el mínimo verdadero tiene $V < 0$, la región interior se comporta en una manera similar a un espacio-tiempo anti de Sitter, y debe producir una singularidad tipo big-crunch en un tiempo propio finito medido por los observadores comoviles. El espacio-tiempo en este caso no alcanza un estado estacionario, ya que la pared de dominio siempre se mueve hacia afuera.

Capítulo 8

La conjetura de la censura cósmica: ¿Se viola genéricamente?

8.1 Introducción

Una de las conjeturas más famosas de la física gravitacional y tal vez de toda la física es la llamada *conjetura de la censura cósmica* (CCC) [89]. La formulación física de esta conjetura establece que, para datos iniciales razonablemente físicos, el espacio-tiempo no puede evolucionar hacia una singularidad desnuda. Esto es, si una singularidad se forma, ésta estará cubierta por un horizonte de eventos (*i.e.* estará contenida dentro de un agujero negro), indicando que los observadores lejanos no estarán influenciados por ella. La importancia de esta conjetura reside en el hecho de que su validez prevendrá el completo colapso del poder predictivo de las leyes físicas (una singularidad desnuda eventualmente influenciará al resto del espacio-tiempo), para los observadores asintóticos (entre los cuales nos encontramos nosotros). Por otro lado, los teoremas de singularidades predicen la formación de singularidades a partir de ciertos datos iniciales regulares cuando se satisfacen las condiciones de energía apropiadas. Sin embargo, hasta ahora, y a pesar de los esfuerzos de muchos relativistas, no ha sido posible probar que dichas singularidades estarán siempre contenidas dentro de un agujero negro (la conjetura se resiste a ser promovida al rango de teorema).

La mayoría de la materia razonable que sufre colapso gravitacional termina en la formación de agujeros negros con un dominio de comunicación con el exterior completamente regular, un hecho que provee un fuerte soporte a la evidencia de la validez de la CCC. Por otro lado, existen sin duda “contra-ejemplos” que claramente violan la CCC. Sin embargo, éstos no son genéricos en el sentido de que las condiciones iniciales que conducen a la formación de singularidades desnudas tienen que ser ajustadas finamente [8]. Como se piensa que es físicamente imposible preparar un sistema con dichas condiciones iniciales tan precisas, estos contra-ejemplos se consideran algo artificiales, y hoy en día se considera que la CCC sólo

se aplica al caso genérico.

Recientemente, sin embargo, Hertog, Horowitz y Maeda (HHM) [2], reportaron haber encontrado un contra-ejemplo genérico a la CCC. Con ese fin, ellos construyen un conjunto abierto de datos iniciales dentro de un sistema de Einstein-Higgs en espacio-tiempos asintóticamente anti de-Sitter (AdS), con simetría esférica, con un potencial escalar $V(\phi)$ que no es positivo semi-definido. En este capítulo, nosotros re-analizamos la situación y mostramos que los argumentos de HHM tienen un agujero lógico, el cual describimos de manera general. Aún más, argumentaremos que aunque a estas alturas nuestro análisis no prueba o desaprueba el ejemplo construido en [2], la evidencia numérica existente apunta hacia la realización del agujero lógico en lugar de la formación de una singularidad desnuda o tipo Big Crunch [90].

8.2 Descripción

La situación considerada en la referencia [2] corresponde a un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad con un Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right]. \quad (8.1)$$

(empleando unidades en que $G = c = 1$).

El campo escalar tiene un potencial tipo sombrero mexicano asimétrico con el mínimo verdadero en $\phi = \phi_a$ con $V(\phi_a) = -a$, y un mínimo local en $\phi = \phi_b$ con $V(\phi_b) = -b$ ($a > b > 0$). La idea es construir datos iniciales que van a evolucionar hacia una singularidad de tipo cosmológica en la región central, mientras que se tiene una masa que es muy pequeña para permitir la formación de un agujero negro lo suficientemente grande para cubrir la singularidad. Para construir estos datos iniciales se necesita dar en la 3-variedad la 3-métrica h_{ab} , la curvatura extrínseca K_{ab} , el campo escalar ϕ y su derivada temporal, todos sujetos a las constricciones Hamiltoniana y de momento. La estrategia para construir el ejemplo que de HHM que conduce a una singularidad desnuda es el siguiente:

Uno considera la variedad \mathbb{R}^3 y construye unos datos iniciales con simetría esférica con $K_{ab} = 0$ y $\partial_t \phi = 0$. La tres métrica puede escribirse como

$$h_{ab} dx^a dx^b = A(r) dr^2 + B(r) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (8.2)$$

Para encontrar la función métrica $A(r)$ se necesita solo considerar la constricción Hamiltoniana, que usando la siguiente re-parametrización,

$$A \equiv \left(1 - \frac{2m(r)}{r} - \frac{\Lambda_{\text{eff}} r^2}{3} \right)^{-1}, \quad (8.3)$$

puede escribirse como

$$m' = 4\pi r^2 \left[\frac{1}{2A} \phi'^2 + V(\phi) + b \right]. \quad (8.4)$$

En el caso de interés queremos considerar una configuración de campo que interpole de la región central con $\phi = \phi_a$ a una región exterior con $\phi = \phi_b$. Después escogemos una constante cosmológica efectiva $\Lambda_{\text{eff}} = -8\pi b$, asegurando la convergencia de $M = \lim_{r \rightarrow \infty} m(r)$ (debido a que asintóticamente $\phi \sim \phi_b + Cr^{-3/2-|\epsilon|}$). Dada la configuración del campo escalar podemos resolver para $m(r)$ de la constricción Hamiltoniana anterior [2]. Los datos iniciales están completamente especificados por $\phi(r)$.

Ahora uno busca una clase de configuraciones que interpolen entre ϕ_a y ϕ_b para $r < R_0$ y se mantengan en ϕ_b para $r > R_1$ ($R_0 < R_1$), con R_0 escalándose más o menos linealmente con R_1 dentro de la clase, y con una masa total que también se escala linealmente con R_1 . El argumento iría entonces de la siguiente forma: En el dominio de dependencia correspondiente a la región con $r < R_0$ tendremos una solución cosmológica correspondiente a un espacio-tiempo de anti de-Sitter con un campo escalar oscilando en el mínimo del potencial, lo cual se sabe que conduce a una singularidad en un tiempo propio finito visto por los observadores comóviles. Más aún, podemos asegurar que hay puntos en la superficie inicial para los cuales todas las curvas dirigidas hacia el futuro causales llegarán a la singularidad.

Ahora supongamos que la evolución de los datos iniciales produce un agujero negro que cubre la singularidad. El agujero negro eventualmente llegará a un estado estacionario que debe corresponder a un espacio-tiempo de Schwarzschild anti de-Sitter (SAdS) con constante cosmológica que corresponde al valor asintótico del potencial $\Lambda_{\text{eff}} = -8\pi b$, y cuya masa no puede exceder la masa disponible en la configuración inicial. Esto limita el área de este agujero negro final y, dado el hecho de que el área del horizonte de eventos es una cantidad que no decrece, ésto acota el área de la región que puede ser encerrada por cualquier horizonte que pueda estar presente en la hiper-superficie inicial. La masa ha sido arreglada para escalarse con R_1 lo que implica que la cota en el área se escala como $R_1^{1/3}$ (al menos para agujeros negros SAdS suficientemente grandes). Para que la singularidad sea cubierta por un horizonte de eventos, la superficie nula debe intersectar ya sea 1) la frontera del dominio de dependencia de la región de los datos iniciales con $r < R_0$ (*i.e.* la congruencia nula que viaja hacia adentro empezando en $r = R_0$ antes de la generación de la singularidad), o 2) la hiper-superficie inicial para $r > R_0$. En ambos casos se requeriría que el área del horizonte excediera su límite. Esto evitará que la singularidad sea cubierta por dicho horizonte, y por lo tanto la singularidad debe de ser desnuda.

El agujero lógico yace en la suposición de que el espacio-tiempo evolucionará a una configuración estacionaria. De hecho, es posible en principio que se presente el siguiente escenario alternativo: la región externa correspondiente al régimen asintótico de la solución SAdS con $\Lambda_{\text{eff}} = -8\pi b$ está continuamente contrayéndose (desde adentro) debido a una pared de dominio que se expande hacia afuera y que corresponde al campo escalar interpolando entre los dos mínimos. La región interna se vuelve un espacio-tiempo de SAdS con un agujero negro grande que cubre la singularidad y que, si se extendiera infinitamente hacia afuera, tendría una masa que excedería la masa inicial del espacio-tiempo, pero debemos reconocer que estamos tratando con dos nociones muy diferentes de masa correspondientes a dos diferentes valores de la constante cosmológica para los espacio-tiempos AdS inicial y final que se están

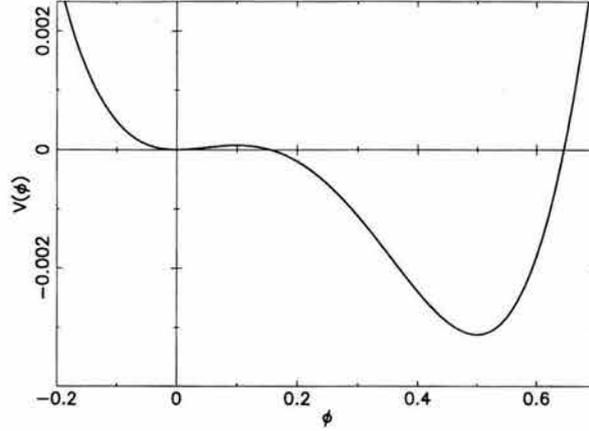


Fig. 8.1: Potencial escalar $V(\phi)$ que corresponde a la ec. (8.5).

considerando ($\Lambda^a = -8\pi a$ y $\Lambda^b = -8\pi b = \Lambda_{\text{eff}}$). Por supuesto, en realidad la región interior AdS nunca cubrirá todo el espacio-tiempo. La pared se comportaría como una solución tipo solitónica (como un “kink” “boosted” en un sistema de Sine-Gordon) tal que, dicho conjunto inicial siempre se mantendría moviéndose hacia afuera (en nuestro caso podría, por supuesto, cambiar su forma y no necesita ser un solitón). La aparente situación paradójica que permitiría la generación de un agujero negro lo suficientemente grande para tiempos muy grandes se explica debido a la gran cantidad de energía negativa la cual, comparada con la región AdS con constante cosmológica negativa Λ^b , tiene la gran región interna con constante cosmológica Λ_a .

8.3 Ejemplo numérico

Hemos realizado una simulación numérica de un sistema relacionado en el que el mínimo del potencial corresponde al cero de energía ($b = 0$), lo que reemplaza la región asintóticamente AdS por una región asintóticamente plana y hace la evolución numérica considerablemente más sencilla. Nuestro potencial tiene la forma (ver la fig. 8.1)

$$V = \frac{1}{4}\phi^2 \left(\phi^2 - \frac{4}{3}(\eta_1 + \eta_2)\phi + 2\eta_1\eta_2 \right), \quad (8.5)$$

con $\eta_1 = 0.5$ y $\eta_2 = 0.1$.

Para este potencial, hemos construido un solitón estático inestable como en la ref. [1]. Posteriormente perturbamos esta configuración inicial de la siguiente forma $\partial_t \phi(0, r) = \epsilon e^{-r^2}$ ($\epsilon \ll 1$). También especificamos $B(0, r) = 1$, y resolvemos la constricción Hamiltoniana para $A(0, r)$ y la constricción de momento para $K_{ab}(0, r)$. Dado que la configuración de solitón estático es inestable, la pequeña perturbación en el campo escalar es suficiente para detonar una evolución dinámica que se aleja de la configuración inicial. El signo de la ϵ se escoge para que la configuración “explote” en lugar de colapsar en un agujero negro [91], pues queremos simular una situación en la que el espacio-tiempo no llegue a un estado estacionario. La

dinámica del espacio-tiempo se obtiene resolviendo las ecuaciones 3+1 de evolución de Einstein completamente no lineales [4, 5] para el caso esféricamente simétrico (véase la ref. [91] para los detalles). Para la simulación considerada aquí hemos usado coordenadas espaciales Eulerianas (*i.e.* vector de corrimiento igual a cero) y foliación temporal armónica, la cual se debe acercar a la singularidad interior asintóticamente alcanzándola sólo después de un tiempo coordenado infinito [14, 15] (la función de lapso colapsa a cero mientras se aproxima a la singularidad).

La simulación numérica muestra que el campo escalar tiende a moverse al mínimo global del potencial en todos lados, con una “pared” de campo escalar moviéndose hacia afuera. El resultado de esto es que la región externa tipo Schwarzschild (donde $V(\phi) \sim 0$) es eventualmente alcanzada por la pared de campo escalar, convirtiéndose en un región interna tipo AdS (donde $V(\phi) < 0$). Entonces, la configuración final nunca alcanza un estado estacionario. Las figuras 8.2-8.4 muestran esta evolución secuencialmente desde la configuración inicial hasta el punto en el que la pared que se mueve alcanza la frontera exterior de la malla numérica (los estados inicial y “final” se muestran con líneas sólidas, y los estados intermedios con líneas punteadas). La evolución numérica eventualmente se congela cuando la función de lapso se vuelve cero en todas partes. Hemos buscado horizontes aparentes durante cada paso de tiempo en la evolución pero no encontramos ninguno. Nótese que el hecho de que no se forme un horizonte aparente no implica que un agujero negro no esté presente, ya que podría existir un horizonte de eventos sin que existiera un horizonte aparente. La presencia de un horizonte de eventos parece probable, ya que las líneas nulas que se encuentran fuera de la pared de campo escalar y que viajan hacia afuera deberían alcanzar infinito nulo, mientras que aquellas que se encuentran dentro deberían alcanzar a la singularidad. De cualquier forma, aunque exista dicho horizonte de eventos, el agujero negro no alcanzará un estado estacionario y eventualmente se tragará todo el espacio-tiempo.

Nuestra simulación muestra lo que probablemente sucederá en la situación SAdS. Entonces, nuestra conjetura es que el espacio-tiempo correspondiente no alcanzará una situación estacionaria. Enfatizamos que la simulación numérica para SAdS es considerablemente más difícil que para el caso asintóticamente plano por razones relacionadas con la estabilidad numérica en las regiones exteriores. Sin embargo actualmente se está trabajando en este problema de estabilidad y reportaremos los resultados en un futuro cercano.

En este capítulo concluimos que el contra-ejemplo genérico de la CCC propuesto por HHM no lo es después de todo. Por supuesto que todavía es posible que una singularidad tipo Big Crunch (como se demuestra en [90]) se forme en su configuración, pero la pregunta continua completamente abierta y según vemos las cosas la única forma de resolver esta pregunta es a través de simulaciones numéricas similares a la que realizamos aquí, pero adaptadas al comportamiento asintótico de SAdS del ejemplo de HHM.

La CCC parece resistirse en ambas direcciones (probar o desaprobar) a cambiar su naturaleza de conjetura.

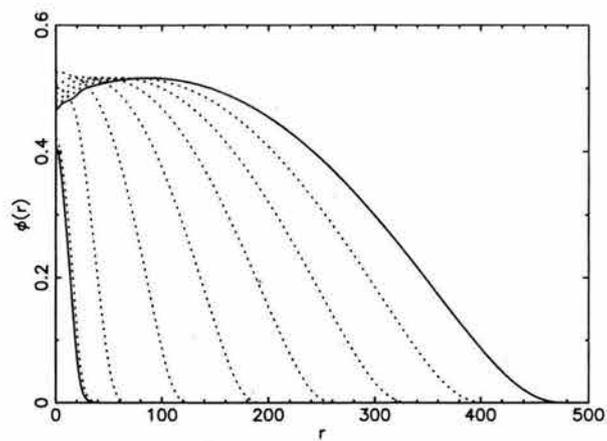


Fig. 8.2: Evolución del campo escalar ϕ . Nótese como el campo se está moviendo hacia el verdadero mínimo en $\phi = 0.5$ en todos lados.

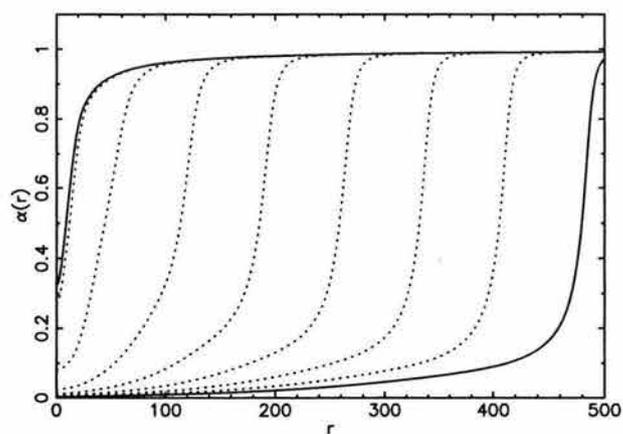


Fig. 8.3: Evolución de la función de lapso α . Nótese el colapso del lapso indicando que nos estamos acercando a una singularidad.

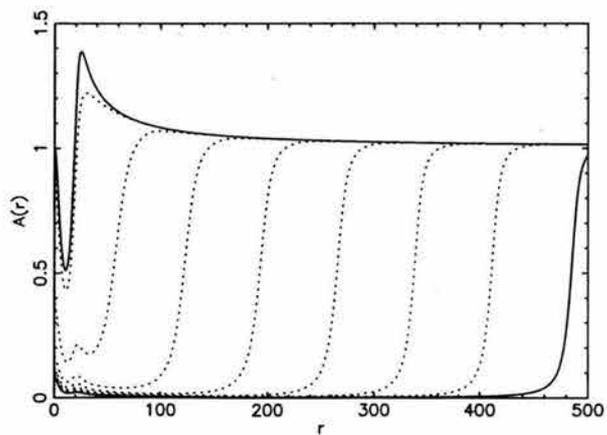


Fig. 8.4: Evolución de la función métrica radial A .

Capítulo 9

Un escenario unificado para modelar las componentes galácticas y cosmológicas de la materia oscura

9.1 Introducción

Es sabido desde hace tiempo que el movimiento de las estrellas y los gases alrededor del centro de la mayoría de las galaxias no puede ser explicado en términos del contenido de materia luminosa de las galaxias, al menos no dentro del contexto de la gravedad Newtoniana. Esto se debe a que las “curvas de rotación” de las galaxias espirales (lejos del centro galáctico) son planas mientras que el comportamiento esperado es un decaimiento kepleriano, y la atracción gravitacional total inferida, indica una cantidad de materia gravitacional que excede por casi un orden de magnitud la materia luminosa que se encuentra dentro de la galaxia. La creencia estándar es que en casi todas las galaxias existe una componente muy grande de materia no luminosa (materia oscura galáctica) que forma un halo alrededor de la galaxia y provee la atracción gravitacional adicional requerida para explicar las “curvas de rotación” en términos de la teoría gravitacional estándar.

Un segundo problema de materia oscura es el problema de la materia oscura cosmológica, que se basa en el hecho de que los datos acerca de la evolución cosmológica requieran que la densidad media del universo se encuentre tan cerca de la densidad crítica mientras que la materia ordinaria solo contribuye con una pequeña fracción de ella [92]. La evidencia a esto se obtiene de recientes observaciones de supernovas distantes tipo Ia [93], y de los últimos datos acerca de las anisotropías del fondo de radiación cósmica de microondas (CMB) [94], lo que está de acuerdo con la predicción de la inflación estándar de que $\Omega_{total} = 1$ [95]. Este último problema ha sido considerado como un asunto completamente separado y ha

sido llamado el *problema de la energía oscura*. La forma de resolver éste se ha basado en la introducción de un nuevo tipo de campo escalar llamado la “Quintaesencia”.

Estos dos problemas muestran dos comportamientos completamente distintos de la materia oscura: por un lado se requiere que la materia oscura galáctica tenga un carácter atractivo y por otro lado se requiere que la materia oscura cosmológica tenga un carácter repulsivo. Estos comportamientos tan distintos, han provocado que muchas personas prefieran tratarlos como dos problemas completamente separados.

Consideraremos brevemente la posibilidad de conectar los dos problemas a través de escenarios que puedan tratarlos simultáneamente. Con respecto al problema de la materia oscura galáctica se consideran usualmente dos tipos de modelos: El primero consiste en materia oscura exótica en forma de partículas que interactúan muy débilmente, mientras que el segundo consiste en configuraciones de campo clásicas. El primero goza de una amplia popularidad especialmente entre los astrónomos quienes acostumbran ver a las partículas como los constituyentes principales de casi todos los tipos de materia, mientras que muchos físicos están más atraídos por el segundo tipo debido al hecho de que el concepto de partícula es visto como secundario, y disponible sólo después de ciertas condiciones [96]. Sin embargo, sabemos que tanto los modelos de campos clásicos como los de partículas tienen como base un modelo de campos cuánticos, y que la descripción más apropiada ya sea de campos o de partículas depende de las circunstancias. De hecho partículas y campos clásicos representan dos límites clásicos distintos de un campo cuántico.

Es bien sabido que las dos descripciones son análogas a las descripciones de posición y momento de la mecánica cuántica ordinaria ya que los dos operadores relevantes no conmutan. De hecho si consideramos un campo escalar $\hat{\phi}(x) = \sum_s \{a_s e^{-ik \cdot x} + a_s^\dagger e^{ik \cdot x}\}$ y $\hat{N} = \sum_r a_r^\dagger a_r$ el operador de número total para las correspondientes partículas, fácilmente vemos que no conmutan: $[\hat{N}, \hat{\phi}(x)] = \sum_r \{a_r^\dagger e^{ik \cdot x} - a_r e^{-ik \cdot x}\} \neq 0$. Entonces cuando se consideran el primer tipo de modelos, los astrónomos tienen que introducir no sólo la hipótesis explícita –y no evidente por sí misma– que tiene que ver con la evolución del gas de partículas de materia oscura, sino también, implícitamente una serie de suposiciones que se hacen de manera inadvertida relacionadas con el mecanismo a través del cual el campo detrás de la materia oscura se convirtió en el tipo de configuración incoherente que justifica la descripción de partículas.

Con respecto al segundo tipo de modelo, debemos señalar que la mayor dificultad que se ha tenido es la evidencia creciente de la presencia, en la mayoría de las galaxias, de agujeros negros centrales. Un modelo basado en campos debe por lo tanto, ser capaz de representar una configuración estática y estable de los campos, sin fuentes (para evitar aún más suposiciones sobre nuevos tipos de materia que representarían dichas fuentes, dado el hecho de que hay límites muy estrictos –asociados con pruebas al principio de equivalencia– en los acoplamientos de materia ordinaria con campos de largo alcance [97]) y deben de admitir agujeros negros en el centro de las galaxias para poder ser modelos viables de la materia oscura galáctica.

En la arena de campos escalares, se ha considerado que no se pueden obtener modelos con agujeros negros y configuraciones estáticas estables de campos escalares, debido a los teoremas de no pelo que aseguran la no existencia de dichas configuraciones [61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 98]. Aún las llamadas estrellas de bosones dejan de existir cuando se introducen agujeros negros [70].

Recientemente, como se discutió en el capítulo 6 fueron encontradas soluciones con pelo escalar en espacio-tiempos asintóticamente anti de-Sitter [71]. En un análisis reciente [99] propusimos la existencia de soluciones de este tipo en el régimen asintóticamente plano, las cuales fueron encontradas en [1]. Dichas soluciones escapan de los teoremas de no pelo debido al hecho de que las condiciones de energía consideradas en los teoremas no se satisfacen en los correspondientes modelos. En este capítulo consideramos la cuestión de que si dichos modelos pueden ser buenos candidatos para el tratamiento unificado de los problemas de materia oscura galáctica y cosmológica. En este punto debemos mencionar intentos previos para construir dichos escenarios unificados, que son genéricamente llamados modelos de “Cuartaesencia” [100, 101, 102, 103]. El primer tipo está basado en un modelo de fluido fenomenológico conocido como el “Gas de Chaplygin” el cual es capaz de exhibir bajo diferentes condiciones los tipos de ecuaciones de estado asociadas tanto con la energía oscura como con la materia oscura. El segundo tipo de modelos ejemplificado por los trabajos [104, 105, 106] trata con un campo taquiónico inspirado en teoría de cuerdas, también capaz de exhibir los dos diferentes tipos de ecuaciones de estado requeridas, pero que hasta donde sabemos, no han tratado con el importante hecho de que un agujero negro en el centro de la galaxia afectaría la existencia de las configuraciones de campo escalar estándar como se mencionó antes.

En la sec. 9.2 describimos el modelo y en el cap. 10 discutimos su viabilidad así como algunos de los aspectos que necesitan ser más explorados.

9.2 El modelo

Consideraremos un modelo de un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad y con un potencial que tenga las características genéricas mostradas en la fig. 9.1 *. El modelo esta basado en el siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - V(\phi) \right]. \quad (9.1)$$

Un ejemplo del tipo de potencial requerido está dado por:

$$V(\phi) = V_0((\phi - s)^2 - a)e^{-\beta\phi}, \quad (9.2)$$

con V_0 , a , s y β constantes.

* Como se explicará más adelante la característica de que tenga una región negativa servirá para obtener soluciones tipo agujero negro con pelo escalar, y el hecho de que esté conectada con otra región que tienda asintóticamente a cero sirve para poder reproducir el comportamiento cosmológico requerido por las observaciones.

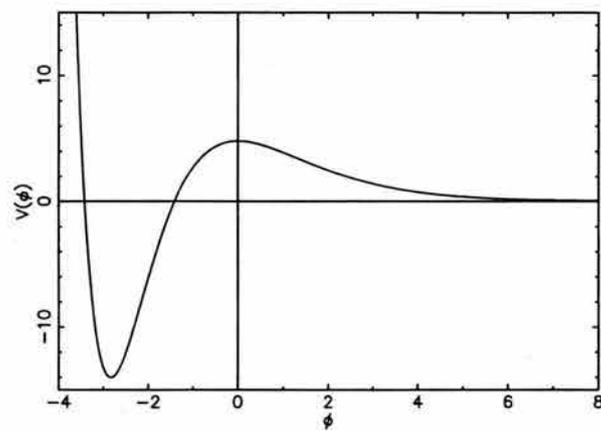


Fig. 9.1: Potencial 9.2 con $V_0 = a = \beta = 1$ y $s = -\frac{1+\sqrt{1+a\beta^2}}{\beta}$.

Las ecuaciones gravitacionales y para el campo escalar que se obtienen del Lagrangiano 9.1 pueden escribirse como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad \square\phi = \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi}, \quad (9.3)$$

donde

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi + V(\phi) \right]. \quad (9.4)$$

Cuando consideramos la materia oscura galáctica nos enfocamos en una métrica estática esféricamente simétrica parametrizada como

$$ds^2 = -e^{2\delta}\mu dt^2 + \mu^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (9.5)$$

donde $\mu(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}$.

Entonces las ecuaciones de Einstein toman la siguiente forma:

$$\partial_r m = 4\pi r^2 \left[\frac{\mu(\partial_r\phi)^2}{2} + V(\phi) \right], \quad \partial_r\delta = 4\pi r(\partial_r\phi)^2, \quad (9.6)$$

y la ecuación del campo escalar puede escribirse como

$$\partial_{rr}^2\phi = - \left[\frac{2}{r} + \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{m}{r^2} - 4\pi r V(\phi) \right\} \right] \partial_r\phi + \frac{1}{\mu} \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi}, \quad (9.7)$$

se sabe que este tipo de potenciales conducen, como ya se mencionó, a configuraciones de campo no triviales que contienen agujeros negros centrales en los casos asintóticamente plano y anti de-Sitter y nuestro análisis heurístico indica que dichas soluciones deben también existir en el caso asintóticamente de Sitter (cuando el valor asintótico del potencial es positivo). Más aún una solución similar puede esperarse cuando el campo escalar en infinito no esté exactamente en el falso vacío pero este suficientemente cerca, incluyendo la situación cuando en la región asintótica esté rodando lentamente hacia dicho valor.

Considerando el caso cosmológico debemos enfocarnos en un espacio-tiempo de Robertson Walker con $k = 0$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (9.8)$$

entonces las ecuaciones de Einstein toman la forma conocida

$$\left(\frac{\partial_t a}{a} \right)^2 = \frac{4\pi}{3} [(\partial_t\phi)^2 + 2V(\phi)], \quad \frac{\partial_t^2 a}{a} = -\frac{8\pi}{3} [(\partial_t\phi)^2 - V(\phi)]. \quad (9.9)$$

Entonces con respecto a esto podemos estar esencialmente en los modelos llamados quintaesencia basados en un campo escalar rodando hacia el mínimo del potencial (correspondiente a $\phi = +\infty$). Hay que recordar que en estos esquemas el campo escalar es espacialmente homogéneo y está evolucionando en el tiempo, rodando hacia el mínimo lentamente bajo la influencia combinada de la expansión cósmica y su propio potencial de interacción ya que el potencial puede ser considerado como una exponencial que decae como $V_{\text{Quintaesencia}} = V_0 e^{-\phi}$. El escenario *unificado* que estamos proponiendo es el siguiente: A tiempos lo suficientemente tempranos en la historia cósmica, cuando el universo era lo suficientemente caliente, el campo escalar estaría en su falso vacío $\phi = 0$ (como en los escenarios de rompimiento espontáneo

de simetría) y mientras el universo se enfría el campo escalar se empieza a mover hacia el mínimo del potencial. En aquellas regiones donde el campo empezó a moverse hacia los valores negativos (es decir en dirección del verdadero mínimo) tendremos la formación de solitones y eventualmente agujeros negros [91] que servirán para la formación de estructura temprana, creando la atracción para la materia bariónica después de su desacoplamiento de la radiación, y al día presente galaxias, mientras que en las regiones en las que el campo escalar empezó a moverse hacia valores positivos (es decir, hacia el mínimo local en $\phi = +\infty$) evolucionarán en regiones intergalácticas donde la expansión cósmica del tipo quinta esencia tomará lugar. La igualdad en ordenes de magnitud de las contribuciones a la densidad de energía total del universo en forma de “materia oscura” acumulada, y la “energía oscura” distribuida esencialmente de manera homogénea, sería un resultado de la simetría aproximada entre las fluctuaciones con valores positivos y negativos del campo escalar alrededor de su valor medio inicial $\phi = 0$.

Por último, hemos considerado la posibilidad de usar un modelo de un campo escalar para la materia oscura galáctica que sea consistente con la existencia de grandes agujeros negros en el centro de las galaxias, así como la componente de la energía oscura cosmológica del universo. El hecho de considerar modelos de campos como primer contexto puede respaldarse por las observaciones de que los campos magnéticos son componentes incuestionables (aunque de relativamente pequeños valores) del contenido de materia galáctica, y la única razón fundamental detrás de la diferencia en la forma en que son considerados parece ser un hecho de familiaridad, un criterio que difícilmente puede ser justificado cuando se trata sobre la naturaleza de la materia oscura. Hemos discutido que de hecho los modelos de campos deben de ser considerados superiores desde el punto de vista del número de hipótesis involucradas (en el espíritu de la navaja de Occam), comparados con los modelos estándares basados en gases de partículas que interactúan muy débilmente, debido al gran número de suposiciones no mencionadas que están involucradas en este último. Hemos visto que modelos con un solo campo escalar abren la posibilidad de ver a la materia oscura (la componente galáctica) y a la energía oscura (la componente cosmológica) dentro de un contexto unificado. La mayoría de los astrónomos tienden a ver estos dos problemas como asuntos completamente diferentes, y aplican criterios muy diferentes cuando los consideran. Sin embargo, también debemos señalar que las estimaciones de las contribuciones de ambos tipos de materia a la densidad media cósmica total son del mismo orden de magnitud, haciendo que un enfoque unificado sea más deseable. Más aun tendríamos al mismo tiempo un nuevo enfoque para entender el origen de los agujeros negros super masivos en el centro de las galaxias. Hay por supuesto varios asuntos que se deben de investigar, como la forma precisa del potencial del modelo que sería tomado en cuenta para las diferentes curvas de rotación en las diferentes galaxias, las correlaciones entre las curvas de rotación y los agujeros negros centrales [†], (debemos mencionar que la introducción de un acoplamiento no mínimo para el campo escalar ofrece esperanzas debido a estos últimos dos asuntos como ha sido discutido en un estudio de

[†]Esto puede verse por ejemplo en la relación de Tully Fisher junto con la correlación entre la masa del agujero negro central y la masa luminosa de la galaxia huésped discutida en [107]

dichas preguntas con un enfoque distinto [108, 109]) la interacción entre las configuraciones asociadas con diferentes galaxias, el comportamiento de estas soluciones bajo los efectos la expansión cósmica, y de hecho su evolución cósmica empezando desde las perturbaciones primordiales de la densidad. Debido a todas estas observaciones el escenario se ve muy prometedor en este estado inicial, sin embargo es claro que todas estas preguntas deben estudiarse en un futuro.

Capítulo 10

Discusión

A manera de conclusión presentamos una breve discusión sobre las ideas presentadas en esta tesis.

Los códigos numéricos en relatividad general han mostrado ser una herramienta muy poderosa para atacar problemas muy complicados en esta área. Estos problemas pueden ir desde situaciones con altos grados de simetría hasta aquellos en los que no existe prácticamente ninguna simetría. El trabajo desarrollado en esta tesis, se enfocó a situaciones en los que existe una simetría muy especial: simetría esférica. Esto, aunque reduce significativamente la cantidad de problemas que se pueden estudiar, nos facilita mucho el trabajo tanto de programación como de análisis. No hay que dejar de lado que aunque esta simplificación es muy grande, los problemas siguen siendo considerablemente difíciles de resolver.

En la primera parte de esta tesis se desarrollaron tres ideas principales: se presentó un algoritmo de regularización, un código en simetría esférica y además algunos conceptos relacionados con la elección de la función de lapso. En el capítulo 2 se mostró que la falta de regularidad de las variables geométricas en el origen es a menudo un problema para los códigos de evolución en simetría esférica en relatividad numérica, por lo que se construyó un algoritmo de regularización que se basa en la introducción de una variable auxiliar. Este capítulo permitió construir un código de evolución en simetría esférica regularizado. Esto fue el primer paso para poder trabajar mas adelante en problemas físicos interesantes que de otra forma nos hubiera sido imposible resolver. En realidad muchos de los análisis numéricos que aquí se realizaron, pueden ser implementados en situaciones más generales de manera directa, por ejemplo, en el caso de simetría axial. En ese caso el número de ecuaciones y la cantidad términos en cada una de ellas se vuelven significativamente mayores, pero las ideas para regularizar el eje (ya no es sólo el origen el que hay que regularizar) y de construir el código son las mismas.

En los últimos años se ha visto que una buena elección tanto de la función de lapso como del vector de corrimiento no solo resultan ser útiles para las evoluciones numéricas, sino que resultan ser la diferencia entre simulaciones duraderas y estables o simulaciones efímeras e inestables. Es por esto que en el capítulo 3 decidimos estudiar una versión modificada de la condición de foliación de Bona-Masso para

el lapso que tiene dos características importantes: 1) garantiza que si el espacio-tiempo es estático o estacionario, y se comienza la evolución en un sistema de coordenadas en el cual los coeficientes métricos sean independientes del tiempo, entonces permanecerán independientes del tiempo durante la evolución subsecuente, y 2) la condición modificada está naturalmente adaptada al uso del lapso densificado como variable fundamental. Por último en el capítulo 4 se estudió la hiperbolicidad de cierta familia de formulaciones de las ecuaciones de evolución de Einstein acopladas a la condición de foliación modificada de Bona-Masso. Estas condiciones de norma, pueden resultar muy útiles para simulaciones más complicadas que las presentadas en este tesis, por ejemplo, colisiones de agujeros negros.

De esta forma se concluye con la primera parte del trabajo y pasamos a discutir los aspectos de la segunda parte. Comenzamos la segunda parte con el capítulo 5 en el que trabajamos con el teorema de Derrick. Este teorema prohíbe la existencia de soluciones solitónicas en espacio-tiempos planos con 3 o más dimensiones espaciales. Uno podría pensar que este teorema se podría generalizar a espacio-tiempo curvos, y sin embargo en ese capítulo presentamos un estudio numérico en el que se encontró un ejemplo que muestra que dicha generalización no es posible. Además de que este capítulo nos sirvió como entrenamiento para utilizar los métodos numéricos, nos deja la puerta abierta para encontrar solitones en espacio-tiempos curvos que sean físicamente interesantes.

En el capítulo 6 se analizó cuidadosamente las razones que se encuentran detrás de la posibilidad de obtener pelo escalar en el caso asintóticamente anti de-Sitter comparándolas con la situación en el caso asintóticamente plano. También discutimos el asunto de la estabilidad y encontramos una explicación muy sencilla que apunta a la posible inestabilidad dentro de estas teorías y condiciones de frontera de la solución usual de Schwarzschild anti de-Sitter. Además de esto se predijo la existencia de soluciones tipo agujero negro con pelo escalar asintóticamente planos, hecho que fue corroborado posteriormente en [1]. Este capítulo sirvió como detonador de los tres capítulos que le siguen.

En el capítulo 7 tomamos los solitones de campo escalar asintóticamente planos encontrado en [1] y estudiamos la evolución dinámica de estas configuraciones ante pequeñas perturbaciones radiales. Las dos posibles evoluciones de dichas configuraciones tiene como desenlace o un agujero negro de Schwarzschild o una pared de dominio saliente. Los resultados obtenidos fueron, además de bastante interesantes desde el punto de vista físico, bastante robustos desde el punto de vista numérico. Este capítulo deja muchas preguntas interesantes abiertas, por ejemplo: ¿Como es la evolución de estas configuraciones ante perturbaciones que no sea radiales? y ¿Cual es el contenido de ondas gravitacionales emitido en el caso en el que no existe simetría esférica?. Pensamos que con todas las herramientas desarrolladas hasta el momento, en un futuro no muy lejano podamos investigar estas y otras preguntas igual de interesantes.

En el capítulo 8 nos enfocamos a presentar una pequeña discusión sobre la violación de la censura cósmica propuesta recientemente por [2]. El desarrollo de ese capítulo está enfocado a mostrar que existe un agujero lógico en el ejemplo propuesto en [2]. Además de que es claro de que dicho agujero existe, recientemente han salido nuevos argumentos que descartan dicho ejemplo de la violación de la censura

cósmica. Independientemente de todo esto, lo que es claro que terminaría por completo con la discusión sobre si se puede o no presentar la violación de la conjetura en dichas teorías, es realizar la simulación numérica correspondiente. Este es un trabajo (algo complicado) que valdrá la pena realizar en un futuro.

Por último en el capítulo 9 presentamos unas cuantas ideas sobre el problema de la materia oscura. Sugerimos un modelo que intenta unificar la materia oscura galáctica (causante de las curvas de rotación planas de las galaxias) con la materia oscura cosmológica (causante de la aceleración calculada a partir de las observaciones de supernovas). Claramente el modelo que estamos proponiendo esta en un fase muy temprana, y existen una gran cantidad de mejoras que hay que realizar y además hay una gran cantidad de pruebas que este debe de superar para poder comenzar a tomarlo como algo serio. Pero más allá de que esto, la idea de unificar estos dos aspectos de la materia oscura en un solo modelo, consistente por si mismo, no deja de ser bastante tentadora.

Como comentario final a este trabajo, es muy importante recalcar la utilidad de los métodos numéricos en la física de hoy en día. Sin estos, difícilmente se podrían entender una gran cantidad de fenómenos que ocurren a todos los niveles.

Apéndice A

Hiperbolicidad de la condición de foliación modificada de Bona-Masso

Cuando estudiamos la hiperbolicidad de la condición de foliación de BM en la sección 3.4 encontramos, sorprendentemente, que dos de los eigenvalores asociados con esta condición modificada son idénticos a los eigenvalores asociados con la condición estándar de BM encontrados en la ref. [15]. El análisis de la sección 3.4 fue hecho de manera covariante, lo que requirió la introducción de una ecuación de evolución para el shift que establece el hecho de que el shift tiene que ser paralelo a las hipersuperficies. La introducción de la ecuación para el shift hizo el análisis considerablemente más complicado y hace difícil ver porque los eigenvalores deben permanecer iguales. Aquí haremos un análisis simple en las coordenadas 3+1 para el caso particular de una dimensión espacial para tratar de entender porque las velocidades características no se modifican.

Consideremos primero la condición de foliación estándar de BM en una dimensión espacial. La ecuación de evolución para el lapso tiene la forma

$$\partial_t \alpha = \beta \partial_x \alpha - \alpha^2 f K . \quad (\text{A.1})$$

Si ahora introducimos la cantidad de primer orden $A := \partial_x \alpha$, podemos reescribir esta ecuación como el sistema

$$\partial_t \alpha = \beta A - \alpha^2 f K , \quad (\text{A.2})$$

$$\partial_t A = \partial_x (\beta A - \alpha^2 f K) , \quad (\text{A.3})$$

con K la traza de la curvatura extrínseca. Por otro lado, de las ecuaciones ADM podemos encontrar la siguiente ecuación de evolución para K

$$\partial_t K \simeq \partial_x (\beta K - A/\gamma) , \quad (\text{A.4})$$

donde el símbolo \simeq denota igualdad hasta parte principal, y donde γ es el elemento coordenado de volumen uní-dimensional. Nótese que estamos considerando el shift β como una función prescrita del espacio y del tiempo.

La matriz Jacobiana asociada con las ecuaciones de evolución para (A, K) es entonces

$$M = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha^2 f \\ 1/\gamma & -\beta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Nótese que el signo global elegido aquí es el obtenido moviendo las derivadas espaciales la lado derecho de las ecuaciones, ya que este es el signo que necesitamos si queremos asociar los eigenvalores con las velocidades características. Los eigenvalores asociados son

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \alpha (f/\gamma)^{1/2}, \quad (\text{A.6})$$

con sus correspondientes eigenvectores

$$v_{\pm} = (\pm \alpha (f\gamma)^{1/2}, 1). \quad (\text{A.7})$$

Entonces vemos que las ecuaciones de evolución para el par (A, K) forman un sistema fuertemente hiperbólico siempre que $f > 0$.

Consideremos ahora la condición modificada de BM. La ecuación de evolución para el lapso es ahora

$$\partial_t \alpha = -\alpha f [\alpha K - \partial_x \beta - (\beta/2\gamma) \partial_x \gamma]. \quad (\text{A.8})$$

Nótese que esta ahora incluye una derivada espacial del elemento coordenado de volumen, que no puede ser considerada como fuente ya que por construcción la derivada temporal del lapso es proporcional a la derivada temporal del elemento de volumen. Si ahora definimos $G := \partial_x \gamma$, podemos reescribir las ecuaciones de evolución para α y γ como el sistema

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f K + \frac{\alpha f \beta}{2\gamma} G + \alpha f \partial_x \beta, \quad (\text{A.9})$$

$$\partial_t \gamma = -2\alpha \gamma K + \beta G + 2\gamma \partial_x \beta, \quad (\text{A.10})$$

$$\partial_t A \simeq \partial_x \left(-\alpha^2 f K + \frac{\alpha f \beta}{2\gamma} G \right), \quad (\text{A.11})$$

$$\partial_t G \simeq \partial_x (-2\alpha \gamma K + \beta G). \quad (\text{A.12})$$

Ahora vemos que la matriz Jacobiana asociada con el sistema (A, G, K) toma la forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha f \beta / 2\gamma & \alpha^2 f \\ 0 & -\beta & 2\alpha \gamma \\ 1/\gamma & 0 & -\beta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Se encuentra fácilmente que los eigenvalores de esta matriz son

$$\lambda_0 = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \alpha (f/\gamma)^{1/2}, \quad (\text{A.15})$$

con eigenvectores asociados

$$v_0 = (\beta^2\gamma, 2\alpha\gamma, \beta) , \quad (\text{A.16})$$

$$v_{\pm} = (\pm\alpha(f\gamma)^{1/2}, \pm 2\gamma^{3/2}/f^{1/2}, 1) . \quad (\text{A.17})$$

Podemos ver otra vez que dos de los eigenvalores correspondientes a la condición de foliación modificada de BM coinciden con los eigenvalores de la condición estándar de BM. Nótese que la matriz Jacobiana (A.13) tiene dos columnas que son múltiplos entre si (la columna dos puede ser obtenida de la columna uno multiplicándola por $2\gamma/\alpha f$). Esto significa que podemos definir una nueva variable $\Sigma := G - (2\gamma/\alpha f)A$ que evolucionará solo a través de términos de menor orden. Podemos ahora hacer un cambio de variables de (A, G, K) a (A, Σ, K) , reemplazando G por $\Sigma + (2\gamma/\alpha f)A$. Como Σ evoluciona solo a través de términos de menor orden, sus derivadas pueden ser tratadas como términos fuentes en el análisis de hiperbolicidad. Entonces es fácil ver que la matriz Jacobiana para el sistema reducido (A, K) es idéntica a la matriz Jacobiana asociada con la condición de foliación estándar de BM dada por la ec. (A.5).

La observación importante es que aunque la condición de foliación modificada de BM reemplaza la derivada de Lie de α con respecto al shift por la divergencia del shift, como esta divergencia incluye la derivada de Lie de γ , y las derivadas temporales de α y γ son múltiplos una de otra, al final recobramos precisamente las mismas velocidades características $-\beta \pm \alpha(f/\gamma)^{1/2}$.

Apéndice B

Hiperbolicidad del sistema de evolución del capítulo 7

Recientemente, la necesidad de tener un sistema de ecuaciones de evolución hiperbólico ha sido remarcada por muchos autores como una condición necesaria para tener un problema de valores iniciales de Cauchy bien puesto (y también para la estabilidad de la evolución numérica). Para cumplir con este requerimiento hemos reescrito las ecuaciones ADM junto con la condición de foliación armónica como un sistema de primer orden de la siguiente forma

$$\partial_t \vec{w} + \mathbb{M}^r \partial_r \vec{w} = \vec{S} , \quad (\text{B.1})$$

con \vec{w} un vector de variables a primer orden

$$\vec{w} := (D_B, K_B, D_\alpha, K, U, \lambda) , \quad (\text{B.2})$$

\mathbb{M}^r la matriz

$$\mathbb{M}^r = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha/2A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha/A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha A/B & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{B.3})$$

y \vec{S} términos fuente que no contienen derivadas (las variables $\{\alpha, A, B\}$ evolucionan solo a través de términos fuente y no necesitan ser consideradas para el análisis de hiperbolicidad).

Los eigenvalores de la matriz \mathbb{M}^r resultan ser

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{A}} , \quad (\text{B.4})$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{A}}, \quad (\text{B.5})$$

$$\lambda_{5,6} = 0, \quad (\text{B.6})$$

con eigenvectores correspondientes

$$\vec{e}_{1,2} = \left(\frac{B}{A}, \pm \frac{B}{2A^{3/2}}, 0, 0, 0, -1 \right), \quad (\text{B.7})$$

$$\vec{e}_{3,4} = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{A}}, 1, 0 \right), \quad (\text{B.8})$$

$$\vec{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0), \quad (\text{B.9})$$

$$\vec{e}_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1), \quad (\text{B.10})$$

Claramente, todos los eigenvalores son reales. También, la matriz de eigenvectores tiene determinante igual a $B^2/2A^3 > 0$, mostrando la independencia lineal de los eigenvectores. El sistema de ecuaciones es por lo tanto fuertemente hiperbólico.

El análisis anterior es válido para el caso de la foliación armónica. Para la foliación maximal el argumento es similar, excepto que en ese caso K ya no es una variable dinámica ($K = 0$), y el lapso se obtiene de una ecuación elíptica. El sistema de ecuaciones reducido para $\{D_B, K_B, U, \lambda\}$ sigue siendo fuertemente hiperbólico, y el sistema completo ahora tiene un sector elíptico y un sector hiperbólico.

Bibliografía

- [1] U. Nucamendi and M. Salgado, Phys. Rev. D **68**, 044026 (2003), gr-qc/0301062.
- [2] T. Hertog, G. T. Horowitz, and K. Maeda, Phys.Rev.Lett. **92**, 131101 (2004), gr-qc/0307102.
- [3] E. Seidel, Lecture Notes in Physics **179**, 244 (1997).
- [4] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, edited by L. Witten (John Wiley, New York, 1962), pp. 227–265.
- [5] J. York, in *Sources of Gravitational Radiation*, edited by L. Smarr (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1979).
- [6] J. M. Bardeen and T. Piran, Phys. Rep. **196**, 205 (1983).
- [7] M. W. Choptuik, Phys. Rev. D **44**, 3124 (1991).
- [8] M. W. Choptuik, Phys. Rev. Lett. **70**, 9 (1993).
- [9] A. Arbona and C. Bona, Comput. Phys. Commun. **118**, 229 (1999), gr-qc/9805084.
- [10] C. Bona and J. Massó, Phys. Rev. D **40**, 1022 (1989).
- [11] C. Bona and J. Massó, Phys. Rev. Lett. **68**, 1097 (1992).
- [12] C. Bona and J. Massó, International Journal of Modern Physics C: Physics and Computers **4**, 88 (1993).
- [13] C. Bona, J. Massó, E. Seidel, and J. Stela, Phys. Rev. Lett. **75**, 600 (1995), gr-qc/9412071.
- [14] C. Bona, J. Massó, E. Seidel, and J. Stela, Phys. Rev. D **56**, 3405 (1997), gr-qc/9709016.
- [15] M. Alcubierre, Class. Quantum Grav. **20**, 607 (2003), gr-qc/0210050.
- [16] A. Arbona, C. Bona, J. Massó, and J. Stela, Phys. Rev. D **60**, 104014 (1999), gr-qc/9902053.
- [17] M. Alcubierre *et al.*, Phys. Rev. D **64**, R61501 (2001), gr-qc/0104020.
- [18] M. Alcubierre *et al.*, Phys. Rev. D **67**, 084023 (2002), gr-qc/0206072.

- [19] O. Sarbach and M. Tiglio, Phys. Rev. D **66**, 064023 (2002), gr-qc/0205086.
- [20] L. Lindblom and M. A. Scheel, Phys. Rev. D **67**, 124005 (2003), gr-qc/0301120.
- [21] A. Anderson and J. W. York, Phys. Rev. Lett. **82**, 4384 (1999), gr-qc/9901021.
- [22] L. E. Kidder, M. A. Scheel, and S. A. Teukolsky, Phys. Rev. D **64**, 064017 (2001), gr-qc/0105031.
- [23] M. Alcubierre *et al.*, Phys. Rev. D **67**, 104021 (2003), gr-qc/0303086.
- [24] M. Alcubierre *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 271103 (2001), gr-qc/0012079.
- [25] D. Bernstein, Ph.D. thesis, University of Illinois Urbana-Champaign, 1993.
- [26] P. Anninos *et al.*, Phys. Rev. D **52**, 2059 (1995).
- [27] M. Alcubierre, Phys. Rev. D **55**, 5981 (1997), gr-qc/9609015.
- [28] S. Frittelli and O. Reula, Phys. Rev. Lett. **76**, 4667 (1996), gr-qc/9605005.
- [29] M. Alcubierre and B. Brügmann, Phys. Rev. D **63**, 104006 (2001), gr-qc/0008067.
- [30] H.-J. Yo, T. Baumgarte, and S. Shapiro, Phys. Rev. D **66**, 084026 (2002).
- [31] D. Garfinkle and C. Gundlach, Class. Quantum Grav. **16**, 4111 (1999), gr-qc/9908016.
- [32] P. R. Brady, J. D. E. Creighton, and K. S. Thorne, Phys. Rev. D **58**, 061501 (1998), gr-qc/9804057.
- [33] Y. Choquet-Bruhat and J. York, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **321**, 1089 (1995).
- [34] S. Frittelli and O. Reula, J. Math. Phys. **40**, 5143 (1999), gr-qc/9904048.
- [35] H. Friedrich, Class. Quantum Grav. **13**, 1451 (1996).
- [36] M. H. van Putten and D. Eardley, Phys. Rev. D **53**, 3056 (1996).
- [37] A. Abrahams, A. Anderson, Y. Choquet-Bruhat, and J. York, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie IIb **323**, 835 (1996).
- [38] A. Abrahams, A. Anderson, Y. Choquet-Bruhat, and J. York, Class. Quantum Grav. **14**, A9 (1997).
- [39] A. Anderson, Y. Choquet-Bruhat, and J. York, Topol. Meth. Nonlinear Anal. **10**, 353 (1997).
- [40] M. Alcubierre, B. Brügmann, M. Miller, and W.-M. Suen, Phys. Rev. D **60**, 064017 (1999), gr-qc/9903030.
- [41] H. O. Kreiss and J. Lorenz, *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations* (Academic Press, San Diego, 1989).
- [42] G. Calabrese, J. Pullin, O. Sarbach, and M. Tiglio, Phys. Rev. D **66**, 041501 (2002), gr-qc/0207018.

- [43] M. Alcubierre *et al.*, *Class. Quant. Grav* **20**, 3951 (2003), gr-qc/0303069.
- [44] A. C. Scott, F. Y. F. Chiu, and D. W. Mclaughlin, *Proc. I.E.E.E.* **61**, 1443 (1973).
- [45] A. Barone, F. Esposito, C. J. Magee, and A. C. Scott, *Riv. Nuovo Cim.* **1**, 227 (1971).
- [46] R. Rajaraman, *An introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory* (North-Holland Publishing Company, Netherlands, 1982).
- [47] A. A. Belavin and A. M. Polyakov, *JETP Lett.* **22**, 245 (1975).
- [48] T. H. R. Skyrme, *Proc. R. Soc. A* **262**, 233 (1961).
- [49] L. D. Faddeev, Leningrad Preprint MPI-PAE/16 (1974).
- [50] Burden and Faires, *Numerical Analysis* (PWS Publishing Company, Boston, USA, 1993).
- [51] R. Bartnik and J. McKinnon, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 141 (1988).
- [52] P. Bizon, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2844 (1990).
- [53] M. S. Volkov and D. V. Gal'tsov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **51**, 1171 (1990).
- [54] H. P. Kunzle and A. K. M. M. ul Alam, *J. Math. Phys.* **31**, 928 (1990).
- [55] P. Bizon and T. Chamj, *Phys. Lett. B* **297**, 55 (1992).
- [56] M. Heusler, S. Droz, and N. Straumann, *Phys. Lett. B* **268**, 371 (1991).
- [57] M. Heusler, S. Droz, and N. Straumann, *Phys. Lett. B* **271**, 61 (1991).
- [58] M. Heusler, S. Droz, and N. Straumann, *Phys. Lett. B* **258**, 21 (1992).
- [59] G. Lavrelashvili and D. Maison, *Nucl. Phys. B* **410**, 407 (1993).
- [60] B. R. Greene, S. D. Mathur, and C. M. O'Neill, *Phys. Rev. D* **47**, 2242 (1993).
- [61] J. D. Bekenstein, *Ann. Phys.* **82**, 535 (1974).
- [62] M. Heusler, *J. Math. Phys.* **33**, 3497 (1992).
- [63] D. Sudarsky, *Class. Quantum Grav.* **12**, 579 (1995).
- [64] N. Bocharova, K. Bronikov, and V. Melnikov, *Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Astron.* **6**, 706 (1970).
- [65] B. C. Xanthopoulos and T. Zannias, *J.Math.Phys.* **32**, 1875 (1991).
- [66] D. Sudarsky and T. Zannias, *Phys. Rev. D* **58**, 087502 (1998).
- [67] T. Zannias, *J. Math. Phys.* **36**, 6970 (1995).

- [68] A. Saa, *J. Math. Phys.* **37**, 2346 (1996).
- [69] A. E. Mayo and J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **54**, 5059 (1996).
- [70] I. Peña and D. Sudarsky, *Class. Quantum Grav.* **14**, 3131 (1997).
- [71] T. Torii, K. Maeda, and M. Narita, *Phys. Rev. D* **64**, (2001).
- [72] E. Wisttanley, *Found.Phys.* **33**, 111 (2003), gr-qc/0205092.
- [73] D. Núñez, H. Quevedo, and D. Sudarsky, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 571 (1996).
- [74] P. Chrùsciel and W. Simon, *J.Math.Phys.* **42**, 1779 (2001), gr-qc/0004032.
- [75] D. Sudarsky and R. Wald, *Phys. Rev. D.* **46**, 1453 (1992).
- [76] K. Lee and E. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1100 (1992).
- [77] R. Wald, *J. Math. Phys.* **33**, 1 (1992).
- [78] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **51**, R6608 (1995).
- [79] A. Ashtekar *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3564 (2000).
- [80] A. Ashtekar, A. Corichi, and D. Sudarsky, *Class. Quantum. Grav.* **18**, 919 (2001).
- [81] Z. hong Zhou and N. Straumann, *Nucl. Phys. B* **360**, 180 (1991).
- [82] M. Alcubierre and J. A. González, Accepted for publication in *Computer Physics Communications* (2004), gr-qc/0401113.
- [83] L. Smarr and J. York, *Phys. Rev. D* **17**, 2529 (1978).
- [84] M. Alcubierre, J. A. González, M. Salgado, and D. Sudarsky, (2004), gr-qc/0402045.
- [85] M. Alcubierre *et al.*, *Phys. Rev. D* **62**, 044034 (2000), gr-qc/0003071.
- [86] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973).
- [87] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, U.S.A., 1984).
- [88] J. York, in *Frontiers in Numerical Relativity*, edited by C. Evans, L. Finn, and D. Hobill (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989), pp. 89–109.
- [89] R. Penrose, in *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, edited by S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1979).
- [90] M. Dafermos, , gr-qc/0403033.

- [91] M. Alcubierre, J. A. González, and M. Salgado, Accepted for publication in *Phys. Rev. D* (2004), gr-qc/0403035.
- [92] E. Kolb and M. Turner, *The early universe* (Westview Press, USA, 1994).
- [93] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [94] C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003), astro-ph/0302207.
- [95] A. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [96] R. M. Wald, *Quantum fields in curved spacetime and black hole thermodynamics* (The University of Chicago Press, Chicago, U.S.A., 1994).
- [97] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics* (Cambridge University Press, GB, 1993).
- [98] I. Peña and D. Sudarsky, *Class. Quantum Grav.* **18**, 1461 (2001).
- [99] J. Gonzalez and D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **67**, 024038 (2003), gr-qc/0207069.
- [100] A. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier, *Phys. Lett. B* **511**, 265 (2001).
- [101] N. Bilić, G. B. Tupper, and R. Viollier, *Phys. Lett. B* **535**, 17 (2002).
- [102] M. Makler, S. Q. Oliveira, and I. Waga, *Phys. Lett. B* **535**, 1 (2003).
- [103] M. Makler, S. Q. Oliveira, and I. Waga, *Phys. Rev. D* **68**, 123521 (2003).
- [104] A. Sen, *J. High Energy Phys* **04**, 48 (2002).
- [105] G. W. Gibbons, *Phys. Lett. B* **537**, 1 (2002).
- [106] T. Padmanabhan and T. Choudhury, *Phys. Rev. D* **67**, 023515 (2003).
- [107] D. Richstone, *IAU Symposium* **184**, (1998).
- [108] U. Nucamendi, M. Salgado, and D. Sudarsky, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3037 (2000).
- [109] U. Nucamendi, M. Salgado, and D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **63**, 125016 (2001).