UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE GRUPOS FINITOS NO ABELIANOS CON TODOS SUS SUBGRUPOS NORMALES PROPIOS ABELIANOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

REYNA MARÍA PÉREZ TISCAREÑO

DIRECTOR DE TESIS
DR. JUAN MORALES RODRÍGUEZ

MEXICO, D.F. 2004

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Reyna María Pérez Tiscareño
FECHA: 18-Junio-04
FIRMA:

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Sobre grupos finitos no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos

realizado por Reyna María Pérez Tiscareño

con número de cuenta 9711611-6, quien cubrió los créditos de la carrera de:

Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Juan Morales Rodríguez	Juan Morales
Propietario	Dra. Bertha María Tomé Arreola	Bertha Tomé
Propietario	Dr. Hugo Arizmendi Peimbert	Hugo Arizmendi P.
Suplente	Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía	Hugo A. Rincón M.
Suplente	Dra. María del Carmen Gómez Laveaga	

Consejo Departamental de Matemáticas

A Bravo

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

AGRADECIMIENTOS.

A Dios.

Con amor a mi papá y mamá, ya que ellos son mis amigos inseparables que siempre me han impulsado y apoyado en todos los proyectos que he realizado a lo largo de toda mi vida.

A mis hermanos que siempre han estado a mi lado para darme ánimo.

Quiero expresar con mucho cariño mi sincero agradecimiento al Dr. Juan Morales Rodríguez, por su paciencia y ayuda brindada al realizar este trabajo. También agradezco a quienes con sus críticas y sugerencias enriquecieron este trabajo. En particular a los profesores Hugo Rincón, Hugo Arizmendi, Bertha Tomé y María del Carmen Gómez.

Por último quiero agradecer a aquellos que me auxiliaron para que el presente trabajo llegara a su fin, en especial a Rocío Leonel y a Sergio Hernández.

Índice General

Introducción

En este trabajo, siguiendo a J. Morales en [4] estudiaremos la clase de grupos finitos no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos. Se darán caracterizaciones de esta clase distinguiendo los casos cuando los grupos tengan al menos dos subgrupos normales maximales y cuando sólo tengan un subgrupo normal maximal. En el primer caso, esta clase coincide con la clase de grupos finitos no abelianos con todos sus subgrupos propios abelianos y que tienen al menos dos subgrupos normales maximales.

Haremos notar que si un grupo finito tiene todos sus subgrupos propios abelianos, entonces es soluble y que existen grupos finitos solubles con todos sus subgrupos normales propios abelianos con subgrupos propios no abelianos. También daremos un ejemplo de un grupo finito no soluble, no simple con todos sus subgrupos normales propios abelianos y que tiene subgrupos propios no abelianos.

Notación

$\mathbb{Z}$	Números enteros
$\mathbb{Z}_p$	Números enteros módulo p
(a,b)	Máximo común divisor de a y b
$x \equiv y (\operatorname{mod} n)$	$x - y$ es divisible por n
$M_n(F)$	Matrices de $n \times n$ con coeficientes en el campo F
$B \subseteq A$	B es un subconjunto de A
$B \subset A$	B es un subconjunto propio de A
$A \cap B$	Intersección de A y B
$A \cup B$	Unión de A y B
$A \times B$	Producto cartesiano de los conjuntos A y B
1	Elemento identidad del grupo G
$H \leq G$	H es un subgrupo del grupo G
$H < G$	H es un subgrupo propio de G
$H \lhd G$	H es un subgrupo normal propio de G
$H \trianglelefteq G$	H es un subgrupo normal de G
$H \ntrianglelefteq G$	H no es un subgrupo normal de G
$\lvert G\rvert$	Orden de G
$[G:H]$	Indice de H en G
xH	Clase lateral izquierda de H
G/H	Grupo cociente de G en H
$G \cong H$	G es isomorfo a H
$\langle X\rangle$	Subgrupo generado por X
$\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$	Subgrupo generado por $\{x_1, \cdots, x_n\}$
H car G	H es un subgrupo característico de G
$[x,y]$	Conmutador de x,y ($[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$)

$[A, B]$	Subgrupo generado por $\{[a, b] \mid a \in A, b \in B\}$
G'	Subgrupo derivado de $G = [G, G]$
$G^{(k+1)}$	Subgrupo derivado de G^k
$Z(G)$	Centro de G
G_x	Estabilizador de x bajo la acción de G
$C_G(x)$	Centralizador de x en G
$N_G(H)$	Normalizador de H en G
$G_1 \times \cdots \times G_n$	Producto directo de los grupos $G_1, \cdots, G_n$
$N \rtimes H, N \rtimes_\varphi H$	Producto semidirecto de N por H
$\varphi(G)$	Imagen de G bajo φ
$Aut(G)$	Grupo de Automorfismos de G
S_n	Grupo simétrico de n elementos
A_n	Grupo alternante de n elementos
D_{2n}	Grupo dihedrico de orden $2n$
$GL(n, F)$	Grupo general lineal
$SL(n, F)$	Grupo especial lineal
$PSL(n, F)$	Grupo proyectivo lineal especial
I	Matriz identidad
id	Función identidad
$M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$	Suma directa de $F-$espacios vectoriales $M_1, \cdots, M_n$
$GL(V)$	Grupo de las transformaciones lineales invertibles del $F-$espacio vectorial V.
$GL(n, F)$	Grupo de las matrices invertibles de tamaño $n \times n$, con entradas en el campo F.

Capítulo 1

Preliminares

Definición 1.1 *Sea X un conjunto. Una operación binaria sobre X es una función de $X \times X$ en X .*

Definición 1.2 *Un grupo es un conjunto no vacío G, con una operación binaria sobre G, usualmente escrita como multiplicación, que satisface a), b) y c)*

a) $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$ con $g_1, g_2, g_3 \in G$,

b) Existe $1 \in G$ tal que $g1 = 1g = g$, para todo $g \in G$,

c) Para toda $g \in G$ existe g^{-1} tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$.

Definición 1.3 *Se dice que un grupo G es conmutativo o abeliano si $ab = ba$ para toda $a, b \in G$. Si $a, b \in G$ y $ab = ba$ se dice que a y b conmutan.*

Definición 1.4 *Si G es un grupo, se dice que H es un subgrupo de G, si H es un subconjunto de G que con la operación binaria de G restringida a H resulta ser un grupo.*

Notación: Si H es un subgrupo de un grupo G, se escribe como $H \leq G$.

Definición 1.5 *Sea G un grupo, $H \leq G$. Se dice que H es un subgrupo normal de G si $gHg^{-1} \subseteq H$ para todo $g \in H$ y se denota por $H \trianglelefteq G$.*

Definición 1.6 *Sea G un grupo, $x \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ se define x^n inductivamente:*

$$x^0 = 1; \qquad x^n = x^{n-1}x.$$

Definición 1.7 *Sea G un grupo, $X \subsetneq G$. Se define el grupo generado por X como el subgrupo de G más pequeño que contiene a X y se denota por $\langle X \rangle$.*

Definición 1.8 Si *G es un grupo y $G = \langle \{x\} \rangle$, para alguna $x \in G$, se dice que G es cíclico.*

Notación: $\langle \{x\} \rangle = \langle x \rangle$

Definición 1.9 *Sea G un grupo. Se define el orden de G como el número de elementos del grupo G y lo denotamos como $|G|$.*

Definición 1.10 *Sea G un grupo, $x \in G$. El orden de x se define como el orden de $\langle x \rangle$ y se denota $o(x)$.*

Definición 1.11 *Si S y T son subconjuntos no vacíos de un grupo G, el conjunto $\{st \mid s \in S, t \in T\}$ se denota como ST.*

Si $T = \{t\}$. En lugar de $S\{t\}$ se escribe St.

Si G es un grupo, $H, K \leq G$, no siempre se cumple que HK es un subgrupo de G, el siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que HK sea un subgrupo de G.

Teorema 1.12 *Sean H, K subgrupos de un grupo G. Entonces HK es un subgrupo de G si y solo si $HK = KH$.*

Definición 1.13 *Si $S \leq G$ y $t \in G$ el conjunto St se le conoce como la clase lateral derecha de S en G, con representante t.*

Análogamente al conjunto tS se le conoce como la clase lateral izquierda de S en G representada por t.

Teorema 1.14 *Si $H \leq G$, entonces $Ha = Hb$ si y sólo si $ab^{-1} \in H$. Análogamente, $aH = bH$ si y sólo si $b^{-1}a \in H$.*

Teorema 1.15 *Si $H \leq G$, el número de clases laterales derechas de H en G coincide con el número de clases laterales izquierdas de H en G.*

Definición 1.16 *Si $H \leq G$, el índice de H en G, denotado por $[G : H]$, es el número de clases laterales izquierdas (o derechas) de H en G.*

Teorema 1.17 *(Lagrange) Si G un grupo y $H \leq G$, $|G| = [G : H]\,|H|$. Si G es finito $|H|$ divide a $|G|$.*

Teorema 1.18 *Si G es un grupo finito de orden p con p un primo, G es cíclico.*

Teorema 1.19 *Si $N \lhd G$, entonces las clases laterales izquierdas (derechas) de N en G con la operación binaria $aNbN = abN$ forman un grupo, denotado por G/N, de orden $[G : H]$.*

Definición 1.20 *Sean G y H grupos. Una función $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo si para todo $a, b \in G$, $f(ab) = f(a)f(b)$.Un monomorfismo es un homomorfismo inyectivo y un isomorfismo es un homomorfismo biyectivo. Decimos que G es isomorfo a H y lo denotamos por $G \cong H$, si existe un isomorfismo $f : G \rightarrow H$.*

Definición 1.21 *Sean G, H grupos, $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo, se define:*

Núcleo de $f = \{a \in G \mid f(a) = 1\}$

Imagen de $f = \{h \in H \mid h = f(a)$ para alguna $a \in G\}$

Se denota al Núcleo de f como $ker(f)$ y a la Imagen de f como $Im(f)$.

Teorema 1.22 *$f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos f es inyectivo si y sólo si $ker(f) = \{1\}$.*

Definición 1.23 *Un automorfismo de un grupo G es un isomorfismo $\varphi : G \to G$. Un subgrupo H de G es llamado caracteristico en G, si $\varphi(H) = H$ para todo automorfismo de G.*

Los automorfismos de un grupo G con la operación composición de automorfimos es un grupo, denotado por $Aut(G)$.

Teorema 1.24 *Si p es un primo, $Aut(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$.*

Teorema 1.25 *(Teoremas de Isomorfismo)*

1.- Si G y H son grupos y $f : G \to H$ un homomorfismo con núcleo K, K es un subgrupo normal de G y $G/K \cong \mathrm{Im}(f)$.

2.-Sean N y T subgrupos de G. Si N es normal en G, $N \cap T$ es normal en T y $T/(N \cap T) \cong NT/N$

3.-Sea G un grupo, $K \leq H \leq G$, K y H subgrupos normales de G. Entonces H/K es un subgrupo normal de G/K y $(G/K)/(H/K) \cong G/H$.

Teorema 1.26 *Si G es un grupo cíclico de orden n, G es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.*

Teorema 1.27 *$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{mn}$ si y sólo si $(n, m) = 1$.*

Teorema 1.28 *Si G es un grupo finito de orden p con p un primo, G es cíclico*

Definición 1.29 *Sea X un conjunto, una permutación de X es una función biyectiva de X en X.*

Definición 1.30 *El conjunto de permutaciones de X con la composición de funciones forma un grupo simétrico el cual se denota por S_X, si X tiene n elementos este grupo se denota por S_n.*

Definición 1.31 *Si* $\alpha \in S_n$ *y* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *entonces* α *fija a* i *si* $\alpha(i) = i$ *y* α *mueve a* i *si* $\alpha(i) \neq i$.

Definición 1.32 *Se dice que* $\alpha \in S_n$ *es un ciclo de tamaño* r *si existen* $i_1, i_2, \cdots, i_r \in \{1, 2, \cdots, n\} = J_n$ *diferentes tal que:*

1) α *fija a los elementos de* J_n *diferentes a* $i_1, i_2, \cdots, i_r$,

2) $\alpha(i_1) = i_2$, $\alpha(i_2) = i_3, \cdots$, $\alpha(i_{r-1}) = i_r$, $\alpha(i_r) = i_1$.

Definición 1.33 *Se dice que* $\alpha \in S_n$ *es una transposición, si* α *es un ciclo de tamaño* 2.

Teorema 1.34 *Si* $n \geq 2$, *entonces todo* $\alpha \in S_n$ *se puede expresar como un producto de transposiciones.*

Definición 1.35 *Una permutación* $\alpha \in S_n$ *es par, si se expresa como un producto de un número par de transposiciones.*

Teorema 1.36 *El subconjunto de* S_n *que consiste de todas las permutaciones pares, es un subgrupo de* S_n *llamado el grupo alternante de* n *elementos y es denotado por* A_n.

Definición 1.37 *Sea* G *un grupo. Si* $a, b \in G$ *el conmutador de* a *y* b *denotado por* $[a, b]$, *es* $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$

Definición 1.38 *Sean* H, K *subgrupos de un grupo* G. *Se define* $[H, K]$ *como*

$$[H, K] = \langle \{[h, k] \mid h \in H, k \in K\} \rangle$$

Definición 1.39 *El subgrupo derivado de* G *denotado por* G', *es:*

$$G' = [G, G]$$

Teorema 1.40 *Si* G *es un grupo* N $\leq$ G. *Entonces* N $\lhd G$ *y* G/N *es abeliano si y solo si* $G' \leq N$.

Teorema 1.41 *Si G es un grupo abeliano finito y d es un divisor del orden de G, entonces G tiene un subgrupo de orden d.*

Teorema 1.42 *Si G es un grupo abeliano, todo subgrupo de G es normal.*

Teorema 1.43 *Si G es un grupo cíclico finito y d un divisor del orden de G, entonces G tiene un único subgrupo de orden d.*

Teorema 1.44 *Si G es un grupo, tal que sólo tiene como subgrupos a $\{1\}$ y G, G es cíclico de orden primo.*

Teorema 1.45 *Si G es un grupo y $H, K \leq G$ finitos, se tiene que*

$$|HK| = (|H|\,|K|)/\,|H \cap K|\,.$$

Teorema 1.46 *Si $H \leq G$ y $[G : H] = n$, existe un homomorfismo $\varphi : G \to S_n$ con $ker(\varphi) \leq H$.*

Definición 1.47 *Sea G un grupo, $x, y \in G$. Se dice que x y y son conjugados en G si existe $g \in G$ tal que $y = gxg^{-1}$.*

Definición 1.48 *El centro de un grupo G, denotado por $Z(G)$, es el subgrupo*

$$\{a \in G \mid ag = ga \text{ para todo } g \in G\}\,.$$

Definición 1.49 *Sea G un grupo, $H \leq G$. El centralizador de H en G es el subgrupo*

$$C_G(H) = \{x \in G \mid xh = hx \text{ para cada } h \in H\}\,.$$

Teorema 1.50 *Si $a \in G$, el número de conjugados de a en G es igual al índice del $C_G(\langle a \rangle)$ en G.*

Observación. Como $C_G(\langle a\rangle) = \{x \in G \mid xa = ax\}$; denotamos $C_G(\langle a\rangle)$ como $C_G(a)$.

Definición 1.51 *Sea G un grupo, $H \leq G$. El normalizador de H en G, denotado por $N_G(H)$, es el subgrupo*

$$N_G(H) = \left\{a \in G \mid aHa^{-1} = H\right\}.$$

Definición 1.52 *Sean H, K subgrupos de un grupo G. H y K son conjugados en G si existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} = K$.*

Teorema 1.53 *Sea G un grupo y $H < G$ finito. Entonces H tiene exactamente $[G : N_G(H)]$ conjugados en G.*

Teorema 1.54 *(Cauchy) Si G un grupo finito, p un primo que divide al orden de G, entonces G tiene un elemento de orden p.*

Definición 1.55 *Si p es un primo y G un grupo, se dice que G un $p-$grupo si cada elemento tiene orden una potencia de p.*

Definición 1.56 *Sea G un grupo finito y p un divisor primo de $\mid G \mid$ denotamos por $\mid G \mid_p$ a la mayor potencia de p que divide $\mid G \mid$, esto es $\mid G \mid_p = p^n$ donde $n \in N$ es tal que p^n divide $\mid G \mid$ pero p^{n+1} ya no lo divide.*

Definición 1.57 *Si p es un primo, un $p-$subgrupo de Sylow de un grupo finito G, es un subgrupo de G de orden $\mid G \mid_p$.*

Teorema 1.58 *(Teoremas de Sylow). Sea G un grupo finito y p un primo*

a) *G tiene al menos un $p-$subgrupo de Sylow.*

b) *Si H y K son $p-$subgrupos de Sylow de G, existe $a \in G$ tal que $K = aHa^{-1}$.*

c) *Todo $p-$subgrupo de G esta contenido en un $p-$subgrupo de Sylow de G.*

d) *Si r es el número de $p-$subgrupos de Sylow de G y P es un $p-$subgrupo de Sylow de G, $r \equiv 1 \pmod p$ y $r \mid |G|$, es más $r \mid [G : P]$.*

Teorema 1.59 *Si G es un grupo de orden 12 y G no es isomorfo a A_4, entonces G contiene un elemento de orden 6; además, G tiene un 3−subgrupo de Sylow normal, lo que implica que G tiene exactamente dos elementos de orden 3.*

Demostración: Si P es un 3−subgrupo de Sylow de G, entonces $|P| = 3$ y por lo tanto $P =< b >$, para algún b de orden 3. Dado que $[G : P] = 4$, existe un homomorfismo $\psi : G \to S_4$ cuyo núcleo K es un subgrupo de P (1.46); como $|P| = 3$, entonces $K = 1$ o $K = P$. Si $K = 1$, entonces ψ es inyectivo y por lo tanto G es isomorfo a un subgrupo de S_4 de orden 12 y como el único subgrupo de orden 12 de S_4 es A_4, entonces, $G \cong A_4$, lo que contradice la hipótesis del lema. Por lo tanto $K = P$ y $P \lhd G$, esto prueba que P es el único 3−subgrupo de Sylow y esto implica que los únicos elementos en G de orden 3 son b y b^2. Ahora $[G : C_G(b)]$ es el número de conjugados de b. Dado que todo conjugado de b tiene orden 3, $[G : C_G(b)] \leq 2$ y $|C_G(b)| = 6$ o 12; en cada caso, $C_G(b)$ contiene un elemento a de orden 2 y como a conmuta con b, y b es de orden 3, ab tiene orden 6. ■

Teorema 1.60 *Si G es un grupo no abeliano de orden 12 y no es isomorfo a A_4, entonces G es generado por dos elementos a y b que cumplen (1) ó (2)*

(1) $a^6 = b^2 = 1$ y $bab^{-1} = a^{-1}$,

(2) $a^6 = 1$ y $b^2 = a^3 = (ab)^2$.

Si se cumple (1) G es isomorfo al grupo dihedrico D_{12}.

Si se cumple (2) al grupo G se le conoce como el grupo T.

Demostración: Sea G un grupo no abeliano de orden 12 no isomorfo a A_4.

Sea K un 3−subgrupo de Sylow de G. Por el teorema anterior K es normal en G, K es cíclico de orden 3, $K = \langle k \rangle$.

Sea P un 2− subgrupo de Sylow de G, como el orden de P es 4 se tiene que $P \cong Z_4$ ó $P = \{1, x, y, xy\}$, donde los elementos x, y y xy tienen orden 2.

$G = KP$ porque KP es de orden 12.

Supongase $P = \{1, x, y, xy\}$.

No todo elemento de P conmuta con k, porque G no es abeliano.(Si se supone que x, y, xy conmutan con k, se obtiene que $P \subset C_G(K)$ y $K \subset C_G(K)$, esto implica que $G = PK \subset C_G(K)$, entonces $K \subset Z(G)$. Analogamente $P \subset Z(G)$, por lo tanto $G = KP \subset Z(G)$ y se tiene que $G = Z(G)$, lo cual es una contradicción).

Supongase que x no conmuta con k, entonces $xkx^{-1} = k^2 = k^{-1}$.

Si y no conmuta con k entonces, yx conmuta con k. En efecto, $yky = k^{-1}$ por lo tanto se tiene que $xkx = yky$, $y^{-1}xk = kyx^{-1}$, $(yx)k = k(yx)$.

Sea $1 \neq z \in P$, que conmuta con k, $a = zk$ es un elemento de orden 6;
$xax = xzkx = z(xkx) = z^{-1}k^{-1} = (zk)^{-1} = a^{-1}$. Se ha visto que

$$G = \langle a, x \mid a^6 = 1, xax^{-1} = a^{-1} \rangle \cong D_{12}.$$

Comentario: D_{12} tiene un subgrupo isomorfo a S_3, generado por x y k.

Supongase, $P =< x >\cong \mathbb{Z}_4$.

x y k no conmutan, ya que si lo hicieran se tendría que $G =< x, k >$ sería abeliano.

x^2 conmuta con k, pues

$$x^2kx^{-2} = x(xkx^{-1})x^{-1} = xk^{-1}x^{-1} = (xkx)^{-1} = (k^{-1})^{-1} = k.$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
a &= x^2k \text{ es de orden 6,} \\
a^3 &= (x^2k)^3 = x^6k^3 = x^2, \\
(ax)^2 &= axax = kx^3kx^3 = (kx^{-1})kx^{-1} = (x^{-1}k^{-1})kx^{-1} = x^{-1}(k^{-1}k)x^{-1} = x^{-2} = x^2.
\end{aligned}$$

Entonces $\quad G = \langle a, x \mid a^6 = 1, a^3 = x^2 = (ax)^2 \rangle \cong T$. ■

En el ejemplo 3.5 se muestra un grupo de orden 12 que cumple con la condición (2)

Definición 1.61 *Una serie normal de un grupo G, es una serie de subgrupos $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_r = 1$, con $G_i \trianglelefteq G$ para toda i.*

Definición 1.62 *Se dice que una serie normal $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_r = 1$ de un grupo G es una serie central si , para cada i, G_i/G_{i+1} esta contenida en el centro de G/G_{i+1}.*

Definición 1.63 *Un grupo G es nilpotente si tiene una serie central.*

Teorema 1.64 *Si G es un grupo finito, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) G es nilpotente,

2) El normalizador de cualquier subgrupo propio H de G crece, es decir, $H < N_G(H)$,

3) Todo subgrupo de Sylow de G es normal en G.

Teorema 1.65 *Si G es un $p-$grupo finito con p un primo, entonces G es nilpotente. En particular todo subgrupo maximal de G es normal en G.*

Definición 1.66 *El subgrupo de Frattini de un grupo G finito, denotado por $\phi(G)$, es la intersección de todos los subgrupos maximales del grupo finito G.*

Definición 1.67 *Un grupo G es abeliano elemental si y sólo si $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$.*

Teorema 1.68 *Si G es un p-grupo, p primo, $N \triangleleft G$ y G/N es abeliano elemental, entonces $\phi(G) < N$.*

Definición 1.69 *Un grupo G es simple, si los únicos subgrupos normales de G son 1 y G.*

Teorema 1.70 *Si $n \geq 2$, entonces $PSL(n, F)$ es simple, no abeliano excepto cuando $n = 2$ y $|F| = 2$ ó 3.*

Definición 1.71 *Sea* $G^{(0)} = G, G^{(i+1)} = (G^{(i)})' =$ *el subgrupo conmutador de* $G^{(i)}$*. La serie derivada de* G *es la serie:*

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \cdots$$

Definición 1.72 *Un grupo* G *es soluble, si la serie derivada de* G *termina en la identidad.*

Teorema 1.73 *Si* G *es un grupo nilpotente,* G *es soluble.*

Corolario 1.74 *Si* p *es un número primo, todo* p*-grupo finito es soluble.*

Teorema 1.75 *Si* G *es soluble y* $N \lhd G$*, entonces* G/N *es soluble.*

Teorema 1.76 *Un grupo simple soluble tiene orden primo.*

Teorema 1.77 *Si* $N \unlhd G$*,* N *y* G/N *son solubles, entonces* G *es soluble.*

Definición 1.78 *Un grupo* G *es supersoluble si tiene una serie normal*

$$G = A_0 \geq A_1 \geq \cdots \geq A_n = < 1 >$$

tal que A_i/A_{i+1} *es cíclico para* $i = 0, 1, \cdots, (n-1)$.

Teorema 1.79 *Si* M *es un subgrupo normal y cíclico de* G *y* G/M *es supersoluble,* G *es supersoluble.*

Teorema 1.80 *(P. Hall) Si* G *es un grupo soluble y* $|G| = mn$ *con* $(m,n) = 1$*,* G *tiene un subgrupo* T *de orden* m *y si* R *es otro subgrupo de* G *de orden* m*, entonces* R *y* T *son conjugados.*

Teorema 1.81 *Todo subgrupo maximal de un grupo finito supersoluble es de índice primo.*

Teorema 1.82 *Sea p un número primo, si p divide al orden de un grupo supersoluble finito G, entonces G tiene al menos un subgrupo de índice p.*

Demostración: Podemos suponer que $|G| = p^n m$ con $p \nmid m$.

Como G es supersoluble, G es soluble. Por el Teorema de Hall, G tiene un subgrupo S de orden m. Sea M un subgrupo maximal de G que contenga a S, como $|G| = [G : S]\,|S|$, $p^n = [G : S] = [G : M]\ [M : S]$ y como M es un subgrupo maximal, $[G : M] = p$. ∎

Teorema 1.83 *Sea G un grupo finito supersoluble de orden n, y sea m un divisor de n, entonces G contiene al menos un subgrupo de orden m.*

Demostración: Inducción sobre el orden de G. Sea p un divisor primo de n/m, entonces $n = mhp$ con h entero, es decir, $p \mid |G|$, utilizando el teorema anterior, tenemos que G tiene un subgrupo M de índice p, por lo que M tiene orden mh, además M es supersoluble (por ser subgrupo de G que es supersoluble), de orden menor a $|G|$, entonces por hipótesis de inducción M contiene un subgrupo H de orden m, y H también es un subgrupo de G de orden M . ∎

Definición 1.84 *Un subgrupo H de un grupo finito G es llamado un subgrupo de Hall si $|H|$ y $[G : H]$ son primos relativos.*

Definición 1.85 *Si H y K son grupos $H \times K$, con la operación*

$$(h, k)(h', k') = (hh', kk')$$

es un grupo, llamado el producto directo de H y K.

Definición 1.86 *Sean N y H grupos, sea φ un homomorfismo de H en $Aut(N)$. Definimos una operación binaria en $N \times H$ como $(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\varphi(h_1)(n_2), h_1h_2)$. $N \times H$ con la operación binaria definida anteriormente es un grupo; el elemento identidad es $(1, 1)$ y el inverso de (n, h) es $(\varphi(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$, este grupo es llamado el producto semidirecto de N por H correspondiente a φ, y se denota por $N \rtimes_\varphi H$.*

Observación. Sean N y H grupos. Si $\varphi : H \to Aut(N)$ es el homomorfismo trivial, entonces $N \rtimes_\varphi H$ es el producto directo de N y H.

El siguiente teorema caracteriza a los grupos de orden pq con p y q números primos.

Teorema 1.87 *Sean p y q números primos con $p > q$. Se tiene que:*

(i) Si G es un grupo de orden pq, G tiene un subgrupo normal de orden p y este subgrupo es el único subgrupo de G de orden p,

(ii) Si $q \nmid (p-1)$ y G es un grupo de orden pq, G es cíclico,

(iii) Si $q \mid (p-1)$, existe un grupo no abeliano de orden pq,

(iv) Si $q \mid (p-1)$, G y G_1 son grupos no abelianos de orden pq, entonces G es isomorfo a G_1 y $G = \langle a, b \mid a^p = b^q = 1, bab^{-1} = a^r, r^q \equiv 1(\operatorname{mod} p), r \not\equiv 1(\operatorname{mod} p)\rangle$.

Demostración: *(i) Sea P un subgrupo de G tal que $|P| = p$. Existe un homomorfismo $\varphi : G \to S_{[G:P]}$ tal que $1 \leq \ker(\varphi) \leq P$.*

Si $ker(\varphi) = \langle 1\rangle$, se tiene que $pq \mid q!$, esto implica que $p \mid (q-1)!$ y entonces $p \mid (q-i)$ para alguna i, $1 \leq i \leq (q-1)$, por lo que se concluye que $p \leq q - i < q$,que es una contradicción. Por lo tanto $\ker(\varphi) = P$ y $P \trianglelefteq G$.

Si P_1 es un subgrupo de G de orden p, se tiene que PP_1 es un subgrupo de G y utilizando el Teorema de Lagrange, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(p^2/(|P \cap P_1|))m = pq$, esto implica que $pm = q\,|P \cap P_1|$.

Si $P_1 \neq P$, entonces $pm = q$ y esto es una contradicción, por lo tanto se concluye que $P_1 = P$.

(ii) Sea $P = \langle a \rangle$ el único subgrupo de orden p de G y $Q = \langle b \rangle$ un subgrupo de G de orden q.

Se tiene que $bab^{-1} = a^r$ con $r^q \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$. Si $r \not\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, entonces $\overline{r}$ es un elemento de orden q en $\mathbb{Z}_p - \{0\}$ y se tiene que $q \mid (p-1)$, lo que es una contradicción, por lo tanto $r \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ y $bab^{-1} = a^r = a$, esto implica que $ba = ab$ y $o(ab) = pq$. Se concluye que G es un grupo cíclico.

(iii) Sea Q un grupo de orden q y P un grupo de orden p. Como $Aut(P) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$ y $q \mid (p-1)$, existe sólo un subgrupo de $Aut(P)$ de orden q. Sea $\check{S}$ el subgrupo de $Aut(P)$ de orden q, $f : Q \to \check{S}$ un isomorfismo, $\alpha : \check{S} \to Aut(P)$ la inclusión. Se tiene que $\alpha \circ f : Q \to Aut(P)$ es un monomorfismo, y se construye $P \rtimes_{\alpha \circ f} Q$ que es un grupo no abeliano de orden pq.

(iv) Sean G y G_1 grupos no abelianos de orden pq, P, P_1 los subgrupos de orden p de G y G_1 respectivamente y Q, Q_1 subgrupos de orden q de G y G_1 respectivamente.

Si $P = \langle a \rangle$, $Q = \langle b \rangle$, $a^p = b^q = 1$, $bab^{-1} = a^r$, $r^q \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, $r \not\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$,
$G = \langle a, b \mid a^p = b^q = 1, bab^{-1} = a^r, r^q \equiv 1(\mathrm{mod}\, p), r \not\equiv 1(\mathrm{mod}\, p) \rangle$.

Si $P_1 = \langle \alpha \rangle$, $Q_1 = \langle \beta \rangle$, $\alpha^p = \beta^q = 1$, $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^s$, $s^q \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, $s \not\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$,
$G_1 = \left\langle \alpha, \beta \mid \alpha^p = \beta^q = 1, \beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^s, s^q \equiv 1(\mathrm{mod}\, p), s \not\equiv 1(\mathrm{mod}\, p) \right\rangle$.

Si H es el grupo multiplicativo de $\mathbb{Z}_p$; $\overline{r}, \overline{s} \in H$, $o(\overline{r}) = o(\overline{s}) = q$. Como H tiene sólo un subgrupo de orden q, $\overline{s} = \overline{r}^t$, $q \nmid t$; como $s \equiv r^t(\mathrm{mod}\, p)$, $a^{r^t} = a^s$.

Se tiene que $c = b^t$ genera a Q , $cac^{-1} = b^t a b^{-t} = a^{r^t} = a^s$, $c^q = 1$, $a^p = 1$.

$$\begin{aligned} G &= \left\langle a, c \mid a^p = c^q = 1, cac^{-1} = a^s, s^q \equiv 1(\mathrm{mod}\, p), s \not\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, p) \right\rangle, \\ G_1 &= \left\langle \alpha, \beta \mid \alpha^p = \beta^q = 1, \beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^s, s^q \equiv 1(\mathrm{mod}\, p), s \not\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, p) \right\rangle \end{aligned}$$

entonces, G y G_1 son isomorfos. ■

Observación. En la demostración del teorema anterior no se utilizan los teoremas de Sylow.

Capítulo 2

Grupos finitos solubles no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos

En este capítulo se estudiarán los grupos finitos no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos y se darán caracterizaciones de tales grupos.

2.1 Grupos finitos solubles no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos y con al menos dos subgrupos normales maximales.

Los grupos no abelianos de orden p^3 con p primo, son solubles,tienen todos sus subgrupos propios abelianos y tienen al menos dos subgrupos normales maximales.

El siguiente teorema caracteriza a los grupos finitos solubles no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos con al menos dos subgrupos normales maximales.

Teorema 2.1 *Sea G un grupo finito soluble. Las siguientes condiciones a) y b) son equivalentes:*

a) *a.1* *G no es abeliano,*

a.2 *Cada subgrupo normal propio de G es abeliano,*

a.3 *G tiene al menos dos subgrupos normales maximales.*

b) *b.1* *G es un p-grupo,*

b.2 *$G/Z(G)$ es abeliano elemental de orden p^2,*

b.3 $\phi(G) = Z(G)$.

Demostración: a) implica b)

Sean M y N subgrupos normales maximales distintos de G.

(1) $G/M \cap N$ es abeliano.

Esta afirmación se cumple , ya que G/M y G/N son simples y solubles (por 1.75), por lo tanto son cíclicos de orden primo (por 1.76) y en consecuencia son abelianos, lo que implica que $G' \subset M$ y $G' \subset N$ (por (1.40) $\Rightarrow$), por lo tanto $G' \subset M \cap N$ y $G/M \cap N$ es abeliano (1.40 $\Leftarrow$)

(2) $G/M \cap N$ es abeliano de orden pq (p, q primos).

Se tiene que $[G:M]=p$ y $[G:N]=q$ (p,q primos), además

$$[G:M\cap N]=[G:M][M:M\cap N],$$

y utilizando uno de los teoremas de isomorfismos y que M y N son subgrupos normales maximales distintos,se tiene que $(M/M\cap N)\cong(MN/N)\cong G/N$ y por lo tanto

$$[G:M\cap N]=[G:M][G:N]=pq.$$

$$(3)\quad \langle 1\rangle\neq M\cap N\subset Z(G).$$

En efecto $M\subset C_G(M\cap N)$ ya que $(M\cap N)\subset M$ y como M es un subgrupo normal de G, por a.2 se tiene que M es abeliano. Análogamente $N\subset C_G(M\cap N)$ y por lo tanto $G=MN\subset C_G(M\cap N)$, entonces $M\cap N\subset Z(G)$.

Además se tiene que $<1>\neq M\cap N$ ya que si $M\cap N=<1>$, entonces $(G/M\cap N)=G$ pero esto es una contradicción , ya que por afirmación 2, $G/M\cap N$ es abeliano y G no es abeliano por hipótesis a.1.

$$(4)\quad G/M\cap N \text{ es abeliano elemental de orden } p^2.$$

En la afirmación 2 vimos que $G/M\cap N$ es abeliano de orden pq con p y q primos. Si q fuera diferente de p, entonces $G/M\cap N$ sería cíclico y como $M\cap N\subset Z(G)$, G resultaría abeliano lo que es una contradicción. por lo tanto $p=q$ y $G/M\cap N$ es de orden p^2; como los únicos grupos de orden p^2 son $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_{p^2}$, entonces $G/M\cap N$ es necesariamente isomorfo a $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$ ya que de otra forma, G resultaría abeliano.

$$(5)\quad G \text{ es un } p-\text{grupo}.$$

Como $\mid G \mid = [G : M \cap N] \mid M \cap N \mid$ y $[G : M \cap N] = p^2$ (afirmación 4), basta probar que $M \cap N$ es de orden una potencia de p. Supongamos que $q \mid\mid M \cap N$, con q un primo diferente a p, como $< 1 > \neq M \cap N < Z(G)$ (por afirmación 3), se tiene que $M \cap N = (M \cap N)_{p'} \times (M \cap N)_p$; $H = (M \cap N)_{p'}$ es de índice una potencia de p en G ($[G : H] = [G : M \cap N][(M \cap N) : H]$), y su orden es primo relativo con p, por lo tanto es un p'-subgrupo de Hall de G. Sea K un $p-$ subgrupo de Sylow de G. Se tiene que $G = HK$. Como $H < Z(G)$ entonces tanto H como K son subgrupos normales propios de G y por consiguiente abelianos, de donde se sigue que $G = HK = H \times K$ es abeliano, pero por la hipotesis a.1, G no es abeliano, por lo que tenemos una contradicción. Por lo tanto $M \cap N$ es de orden una potencia de p y G es un p-grupo.

$$(6) \quad M \cap N = Z(G)$$

En efecto, ya que G es un p-grupo no abeliano entonces $Z(G) \neq G$ y por lo tanto $[G : Z(G)] = p^s$ con $s \geqslant 2$; como $M \cap N < Z(G)$, sólo falta demostrar que $Z(G) < M \cap N$.

Como $Z(G)/M \cap N \lneqq G/M \cap N$ entonces por la afirmación 4 se tiene que $\mid Z(G)/M \cap N \mid = p$ ó $\mid Z(G)/M \cap N \mid = 1$, si $\mid Z(G)/M \cap N \mid = p$, entonces $\mid Z(G) \mid = p$, y esto es una contradicción ya que $< 1 > \neq M \cap N$. Por lo tanto se tiene que como

$$p^2 = [G : M \cap N] = [G : Z(G)][Z(G) : M \cap N]$$

entonces $[G : Z(G)] = p^2$ y $Z(G) = M \cap N$.

(7) $G/Z(G)$ es abeliano elemental de orden p^2.

Se sigue de las afirmaciones 6 y 4.

$$(8) \quad Z(G) \subset \phi(G).$$

Como G es un $p-$grupo, cada subgrupo maximal de G es normal en G (1.65). Pero de la Afirmación 6, resulta que si M y N son subgrupos maximales direrentes de G, entonces $M \cap N = Z(G)$, por lo que podemos concluir que cada subgrupo maximal de G contiene a $Z(G)$, y de la definición de subgrupo de Fratinni obtenemos que $Z(G) \subset \phi(G)$.

(9) $\phi(G) \subset Z(G)$.

Como $G/Z(G)$ es abeliano elemental entonces se sigue de 1.68 que $\phi(G) \subset Z(G)$.

(10) $\phi(G) = Z(G)$.

Esto se sigue de las afirmaciones 8 y 9 .

Por último concluimos, a partir de las afirmaciones 5, 7 y 10 que a) implica b)

b) implica a)

De b.2 se sigue que G no es abeliano. Además G tiene al menos dos subgrupos maximales ya que de otra forma G resultaría cíclico y por lo tanto abeliano. Siendo G un $p-$grupo, cada subgrupo maximal de G es normal (1.68), por lo tanto G tiene al menos dos subgrupos normales maximales.

Entonces, para demostrar que vale a) solo nos resta demostrar que cada subgrupo normal propio de G es abeliano , pero para obtener esto, es suficiente demostrar que cada subgrupo maximal es abeliano . Sea M un subgrupo maximal de G; por b.3 se tiene que $Z(G) = \phi(G) \subset M$ y como M es maximal $[G : M] = p$, entonces utilizando b.2,

$$p^2 = [G : Z(G)] = [G : M][M : Z(G)],$$

de donde se sigue que $\mid M/Z(G) \mid = p$ y por lo tanto M es abeliano ■

2.2 Grupos finitos solubles no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos y con un único subgrupo normal maximal.

A_4 es un grupo no abeliano soluble con todos sus subgrupos normales propios abelianos y sólo tiene un subgrupo normal maximal.

Para dar una caracterización de los grupos finitos solubles no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos y que tienen un solo subgrupo normal maximal, utilizaremos el Teorema de Maschke el cual se estudiará a continuación.

Definición 2.2 *Si G es un grupo y F un campo, una $F-$representación de G es un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ donde V es un $F-$espacio vectorial de dimensión finita.*

Definición 2.3 *Si G es un grupo, F un campo, V un $F-$espacio vectorial de dimensión finita igual a n y $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ es un homomorfismo, se dice que φ es una $F-$representación de G sobre V de grado n.*

Recordemos la siguiente definición:

Definición 2.4 *Sea F un campo, V un $F-$espacio vectorial y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Si W es un subespacio de V que cumple que $T(W) \subseteq W$, decimos que W es un subespacio de V $T-$invariante.*

Definición 2.5 *Sea F un campo, G un grupo, V un $F-$espacio vectorial, φ una $F-$ representación de G sobre V. Un subespacio $\varphi-$invariante de V es un subespacio W de V tal que $\varphi(g)(W) \subseteq W$ para toda $g \in G$.*

Si W es un subespacio $\varphi-$invariante de V, entonces φ induce $F-$representaciones de G en los espacios vectoriales W y V/W. Estas representaciones son llamadas constituyentes de F.

Definición 2.6 *Sea G un grupo, F un campo, V un $F-$espacio vectorial de dimensión finita y φ una $F-$representación de G sobre V.*

1. φ es $F-$irreducible si 0, V son los únicos subespacios $\varphi-$invariantes de V,

2. φ es $F-$reducible si no es $F-$irreducible,

3. φ es completamente reducible si $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$, donde cada V_i es un subespacio de $V, \varphi-$invariante y $F-$irreducible.

Observación. Si F es un campo y V un $F-$espacio vectorial de dimensión n, como $GL(V) \cong GL(n, F)$, podemos considerar las $F-$representaciones de G, como homomorfismos de G en $GL(n, F)$.

Recordemos los siguientes teoremas (1) y (2) de álgebra lineal.

(1) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal sobre un $F-$espacio vectorial V, donde F es un campo,y sean β y β' bases ordenadas de V. Sea Q la matriz de cambio de coordenadas que cambia las $\beta' - coordenadas$ en $\beta -coordenadas$.Entonces:

$$[T]_{\beta'} = Q^{-1} [T]_{\beta} Q.$$

(2) Sea V un $F-$espacio vectorial de dimensión n, y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Supongamos que W es un subespacio vectorial de V, $T-$invariante, de dimensión k. Entonces para cada base β de V que extienda a una base de W, $[T]_{\beta}$ tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

donde A es una matriz de $k \times k$, 0 es la matriz cero de $(n - k) \times k$ y B es una matriz de $k \times (n - k)$.

El siguiente lema lo usaremos en la demostración del teorema de Maschke.

Lema 2.7 *Sea F es un campo, G es un grupo y V un $F-$espacio vectorial de dimensión n. Se tiene que:*

a) Una $F-$representación lineal φ de G es $\varphi-$reducible si y sólo si existe una matriz invertible S

con entradas en F tal que $S^{-1}\varphi(g)S = \begin{pmatrix} \Pi(g) & \zeta(g) \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix}$ donde Π y β son constituyentes de F,

b) Una $F-$ representación lineal φ de G es completamente reducible si y sólo si existe una matriz

invertible S con entradas en F tal que $S^{-1}\varphi(g)S = \begin{pmatrix} \varphi_1(g)\ddots & 0 \\ 0 & \varphi_n(g) \end{pmatrix}$ para toda $g \in G$, donde cada φ_i es φ_i-irreducible.

Demostración: a) Supongase que φ es una $F-$representación reducible de G. Existe W subespacio propio no trivial de V $\varphi-$invariante. Entonces usando el teo.(2), existe una base β para V tal que para toda $g \in G$, $[\varphi(g)]_\beta$ tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \Pi(g) & \zeta(g) \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix}$$

y utilizando teo. 1, tenemos lo que queríamos demostrar. (La otra implicación es inmediata).

b) Es inmediato de la definición de $F-$ representación de G completamente reducible y de los teoremas (1) y (2). ■

Teorema 2.8 *(Maschke) Sea G un grupo y F un campo.Si la característica de F no divide al orden de G, toda $F-$ representación de G es completamente reducible.*

Demostración: Sea φ una F-representación de G sobre un espacio vectorial de dimensión n, la demostración se hará por inducción sobre n.

Si $n = 1$, entonces φ es $\varphi-$irreducible y se cumple el teorema. Supongamos que $n > 1$. Si φ es $F-$irreducible, se termina la prueba, si φ es $F-$reducible,

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} \Pi(g) & \zeta(g) \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix}, \text{ para toda } g \in G.$$

Como φ es un homomorfismo $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ para cada g, $h \in G$, entonces:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Pi(gh) & \zeta(gh) \\ 0 & \beta(gh) \end{pmatrix} &= \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \begin{pmatrix} \Pi(g) & \zeta(g) \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi(h) & \zeta(h) \\ 0 & \beta(h) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Pi(g)\Pi(h) & \Pi(g)\zeta(h) + \zeta(g)\beta(h) \\ 0 & \beta(g)\beta(h) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\zeta(gh) = \Pi(g)\zeta(h) + \zeta(g)\beta(h)$ para $g, h \in G$.

$\zeta(gh)\beta(h^{-1}) = \Pi(g)\zeta(h)\beta(h^{-1}) + \zeta(g)\beta(h)\beta(h^{-1}) = \Pi(g)\zeta(h)\beta(h^{-1}) + \zeta(g)$.

$$\begin{aligned} \zeta(gh)\beta((gh)^{-1})\beta(g) &= \zeta(gh)\beta(h^{-1}g^{-1})\beta(g) \\ &= \zeta(gh)\beta(h^{-1}g^{-1}g) \\ &= \zeta(gh)\beta(h^{-1}) \\ &= \Pi(g)\zeta(h)\beta(h^{-1}) + \zeta(g). \end{aligned}$$

De $\quad \zeta(gh)\beta((gh)^{-1})\beta(g) = \Pi(g)\zeta(h)\beta(h^{-1}) + \zeta(g) \quad$ se tiene:

$$\sum_{h \in G} \left(\zeta(gh)\beta((gh)^{-1})\beta(g)\right) = \sum_{h \in G} \left(\Pi(g)\zeta(h)\beta(h^{-1}) + \zeta(g)\right),$$

y como $\sum_{h\in G}(\Pi(g)\zeta(h)\beta(h^{-1})+\zeta(g))=\sum_{h\in G}\Pi(g)\zeta(h)\beta(h^{-1})+\sum_{h\in G}\zeta(g)$,

$$\left(\sum_{h\in G}\zeta(gh)\beta((gh)^{-1})\right)\beta(g)=\Pi(g)\left(\sum_{G}\zeta(h)\beta(h^{-1})\right)+|G|\,\zeta(g),$$

$$\frac{1}{|G|}\left(\sum_{h\in G}\zeta(gh)\beta((gh)^{-1})\right)\beta(g)=\frac{\Pi(g)}{|G|}\left(\sum_{G}\zeta(h)\beta(h^{-1})\right)+\zeta(g)$$

Si definimos $M=\frac{1}{|G|}\sum_G\zeta(gh)\beta((gh)^{-1})$ se tiene que:

$$M\beta(g)=\Pi(g)M+\zeta(g) \text{ para cada } g\in G$$

Sea $S=\begin{pmatrix} I & M \\ 0 & I\end{pmatrix}$, donde I denota la matriz identidad. Entonces para $g\in G$

$$\begin{aligned}\varphi(g)S &= \begin{pmatrix}\Pi(g) & \zeta(g)\\ 0 & \beta(g)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & M\\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Pi(g) & \Pi(g)M+\zeta(g)\\ 0 & \beta(g)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\Pi(g) & M\beta(g)\\ 0 & \beta(g)\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}\Pi(g) & 0\\ 0 & \beta(g)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

De esta igualdad se obtiene que :

$$S^{-1}\varphi(g)S=\begin{pmatrix}\Pi(g) & 0\\ 0 & \beta(g)\end{pmatrix} \text{ para } g\in G$$

Por hipótesis de inducción Π y β son completamente reducibles, entonces φ es completamente reducible. ∎

Observación. El teorema de Maschke se puede enunciar también de la siguiente manera.

Teorema 2.9 *Sea G un grupo finito y F un campo tal que la característica de F no divida al orden de G. Sea V un $F-$espacio vectorial de dimensión finita y $\varphi : G \to GL(V)$ un homomorfismo de G en el grupo lineal de V. Si $W \subset V$ es un subespacio propio de V $\varphi-$invariante, entonces existe $U \subset V$ subespacio de V $\varphi-$invariante tal que $V = W \oplus U$.*

A continuación se darán dos caracterizaciones de los grupos finitos solubles no abelianos con un sólo subgrupo normal maximal y todos sus subgrupos normales propios abelianos.

Teorema 2.10 *Si G es un grupo finito soluble, entonces las siguientes condiciones a), b) y c) son equivalentes:*

a) *a.1* *G no es abeliano,*

a.2 *Cada subgrupo normal propio de G es abeliano,*

a.3 *G tiene sólo un subgrupo normal maximal.*

b) *b.1* *G es producto semidirecto de un $p' -$ grupo abeliano M, no trivial que coincide con G, con un p-grupo cíclico H* (p un primo),

b.2 *$H^P \leq Z(G)$ y $N = MH^P = M \times H^P$ es el único subgrupo normal maximal.*

c) *c.1* *G es producto semidirecto de un $p' -$ grupo abeliano M con un p-grupo cíclico H* (p un primo),

c.2 *Si h es un generador de H, h induce en M un automorfismo de orden p que no deja fijo ningún elemento distinto de la identidad de $M_{p_i}/\ M_{p^i}^{p_i}$*

$(i = 1, 2, \cdots, s)$ *con* $|M| = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_s^{t_s}$ *y* M_{p_i} *es la* p_i *componente primaria de* M.

Demostración: a) implica b):

Sea N el único subgrupo normal maximal de G, entonces:

$$(1) \quad [G:N] = p, \text{con } p \text{ un primo.}$$

$$(2) \quad G/G' \text{es un } p-\text{grupo.}$$

La afirmación (2), se cumple ya que, G/G' es abeliano (1.40), si existiera un primo q tal que, q divide al orden de G/G', entonces G/G' tiene un subgrupo normal (1.42), T/G'de índice q (porque como $q/ \mid G/G' \mid$, entonces existe $k \in Z$ tal que $\mid G/G' \mid= qk$, entonces por 1.41 , G/G' tiene un subgrupo T/G', de orden k, y por lo tanto $[G/G' : T/G'] = q$).

Ahora como $(T/G') \lhd (G/G')$, utilizando el teorema de correspondencia obtenemos que $T \lhd G$ y $[G:T] = q$, por lo tanto T es normal maximal en G y por lo tanto $T = N$ (Por hipótesis a.3), lo cual implica que $p = q$.

(3) De la definición de p' – *subgrupo* de Hall, G' es un $p'-$subgrupo de Hall de G (y por lo tanto, siendo normal es el único $p'-$subgrupo de Hall de G, (1.80)). Este resultado se cumple ya que, por ser G' característico en G, entonces $G' \lhd G$ y utilizando la hipótesis a.2), obtenemos que G' es abeliano.

(3.1) G' tiene un solo p' – *subgrupo* de Hall M, el cuál es caracteristico en G'.

G' tiene un solo $p'-$subgrupo de Hall, ya que por ser G' abeliano, M es normal en G' (1.80). Tenemos que si $m \in M$ y el $ord(m) = t$,entonces p no divide a t. Sea $\varphi \in Aut(G')$, como

$$1 = \varphi(1) = \varphi(m^t) = (\varphi(m))^t,$$

el orden de $\varphi(m)$ es t, por lo tanto p nodivide al orden de $\varphi(m)$ y se tiene que $\varphi(m)$ pertenece a M.□

Como M es característico en G' y G' es característico en G, entonces M es característico en G, de esto se sigue que M es normal en G. Como G/G' y G'/M son $p-$grupos, se tiene que G/M es un $p-$grupo y por lo tanto M es un $p'-$subgrupo de Hall de G además, G/M es un $p-$grupo con un único subgrupo maximal, pues de lo contrario, G tendría al menos dos subgrupos normales maximales lo que contradice la hipótesis a.3, por lo tanto G/M es cíclico y $G' \subset M$; pero $M \subset G'$ por lo tanto $G' = M$ y G' es el único $p'-$subgrupo de Hall de G.

$$(4) \quad G = G'H, \text{donde } H \text{ es un } p-\text{subgrupo de Sylow de } G.$$

$$(5) \quad H \text{ es un } p-\text{grupo cíclico.}$$

En efecto, como G/G' es cíclico(ya que G/M es cíclico) y utilizando un teorema de isomorfismo y (4)

$$G/G' = ((G'H)/G') \cong (H/G' \cap H) = H,$$

por lo tanto b.1 se cumple.

$$(6) \quad H^p < Z(G).$$

En efecto, como $H =< h >$ con $h \in H$, H^p centraliza a H, además como $[G : N] = p$ (1) , entonces $H^p < N$ y como $G' < N$ (ya que N es el único subgrupo normal maximal), entonces H^p centraliza a G' ya que N es abeliano y como $G = G'H$, entonces H^p centraliza a G, esto es $H^p < Z(G)$.

$$(7) \quad N = G'H^p = G' \times H^p.$$

En efecto, como G' y H^p son normales en G, entonces $G'H^p$ es normal en G, y utilizando (4) obtenemos:

$$\left|\frac{G}{G'H^p}\right| = \left|\frac{G'H}{G'H^p}\right| = \frac{|G'H|}{|G'H^p|} = \frac{|G'|}{|G'|}\frac{|H|}{|H^p|} = \frac{|H|}{|H^p|} = \left|\frac{H}{H^p}\right|,$$

y como H es cíclico, $\left|\frac{H}{H^p}\right| = p$, por lo tanto $[G : G'H^p] = p$, como $G/H^p < N$ y se cumple (1), entonces $N = G'H^p = G' \times H^p$. Con lo que demostramos que a) implica b).■

b) implica a):

De b.1 se sigue que G no es abeliano. Sea R normal en G, se tiene que $R < N = M \times H^p$ ya que N es el único subgrupo normal maximal y como $N = M \times H^p$ es abeliano, entonces R es abeliano■

a) implica c):

Como a) implica b.1), y b.1) enuncia exactamente lo mismo que c.1), se tiene que a) implica c.1). Por lo tanto solo basta verificar que a) implica c.2).

Sea h un generador de H. Entonces en virtud de que $[G : N] = p$ se tiene que $H^p \subset N$ y ya que N es abelliano y $M \subset N$, h^p induce la identidad en M, por lo tanto h induce en M un automorfismo de orden p.

Sea M_{p_i} la p_i-componente primaria de M. Como M_{p_i} es característico en M y $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$ característico en M_{p_i} y en M, se tiene que h deja invariante a M_{p_i} y a $M_{p_i}^{p_i}$, por lo tanto h induce un automorfismo en $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$. Sólo basta demostrar que h no deja fijo ningún elemento diferente de la identidad de $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$, supongamos que h deja fijo a $bM_{p_i}^{p_i}$ con $b \in M_{p_i} - M_{p_i}^{p_i}$, $hbh^{-1}M_{p_i}^{p_i} = bM_{p_i}^{p_i}$ de donde se sigue que $b^{-1}hbh^{-1} \in M_{p_i}^{p_i}$. Como h deja fijo en el p_i grupo abeliano elemental $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$, al subgrupo $\langle bM_{p_i}^{p_i}\rangle$ y p_i no divide a p, se tiene en virtud del Teorema de Maschke que h deja fijo a un complemento $T/M_{p_i}^{p_i}$ de $\langle bM_{p_i}^{p_i}\rangle$ en $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$, lo que implica que T es normalizado por

$\langle h \rangle = H$.

$$L = M_{p_1} \times ... \times M_{p_{i-1}} \times T \times M_{p_{i+1}} \times ... \times M_{p_s}$$

es normalizado por K y $K = LH$ es un subgrupo de índice p_i en G, por lo tanto K es un subgrupo maximal de G.

Como $b^{-1}hbh^{-1} \in M_{p_i}^{p_i} \subset T$, se tiene que $b^{-1}hb \in Th$, lo que implica que b normaliza a K y como $b \notin K$ se tiene que $K \subset N_G(H) = G$, ya que K es maximal y $K \neq N_G(H)$, por lo tanto, K es un subgrupo normal maximal de G donde $[G : K] = p_i$, con $p_i \neq p$. Esto contradice la hipótesis de que G sólo tiene un subgrupo normal maximal, de esto podemos concluir que h no deja fijo ningún elemento diferente de la identidad de $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$, lo cual prueba c.2).

c) implica a):

Como M es abeliano, entonces M es soluble, además G/M es soluble ya que

$$G/M = (MH/M) \cong (H/M \cap H) = H \text{ y } H \text{ es soluble (1.74).}$$

Dado que G/M y M son solubles ,entonces G es soluble (1.77).

Afirmación. H^p centraliza a M.

Demostración. $C_G(M) = \{g \in G \mid gm = mg, \text{ para toda} m \in M\}$, como h induce en M un automorfismo, llamemoslo f, de orden p y $f(m) = hmh^{-1}$, donde $m \in M$, entonces $f^p(m) = h^p m h^{-p} = m$ y por lo tanto $h^p m = mh^p$, para toda $m \in M$, lo cuál implica que $H^p \subset C_G(M)$, es decir $H^p < Z(M)$.□

Como se cumple la afirmación anterior, entonces $H^p \lhd G = MH$, y por lo tanto $N = MH^p = M \times H^p$ es un subgrupo normal abeliano de G (N es abeliano porque H^p es ciclico y por lo tanto abeliano, además M es abeliano por hipótesis). N es maximal en G, ya que $|G/N| = |(MH)/(MH^p)| = (|M|\,|H|)/(|M|\,|H^p|) = p$. Si demostramos que N es el único subgrupo normal maximal de G, se tendrá que cada subgrupo normal propio de G es abeliano.

Supongamos que G tiene un subgrupo normal maximal de G, $S \neq N$. Como G es soluble y S es soluble, entonces G/S es soluble, además G/S es simple, de esto se sigue $[G : S]$ es un primo. Si $[G : S] = p$, entonces S contiene a todos los p'−elementos de G, entonces $M \subset S$, de aquí que $S/M \leq G/M$ y por lo tanto, utilizando el teorema de Lagrange, $[G/M : S/M] = [G : S] = p$; pero como $G/M \cong H$ es cíclico, G/M sólo tiene un subgrupo de índice p (1.43). Y como

$$[G/M : N/M] = [G : N] = [G : MH^p] = [MH : MH^p] = |(MH)/(MH^p)| = |H/H^p| = p,$$

se tiene que $S/M = N/M$ y $N = S$, contradiciendo la hipótesis, por lo tanto $[G : S] = p_i$ con $p_i \neq p$.

Como S es normal en G y G/S es de orden p_i, S contiene todos los subgrupos de Sylow de G con excepción de M_{p_i}; además se tiene que $[M_{p_i} : (M_{p_i} \cap S)] = p_i$ ya que utilizando uno de los teoremas de isomorfismo $G/S = (M_{p_i}S)/S \cong M_{p_i}/(M_{p_i} \cap S)$ y por lo tanto $M_{p_i}^{p_i} \subset M_{p_i} \cap S$ ya que $M_{p_i}/(M_{p_i} \cap S)$ es cíclico de orden p_i. Como $H < S$ (porque como H es un p−grupo cíclico, H es parte de algún grupo de Sylow, diferente de M_{p_i}, ya que $p \neq p_i$ y S contiene a todos los subgrupos de Sy low de G con excepción de M_{p_i}), $h \in S$ ($H = < h >$) y ya que S es normal en G, entonces $[M_{p_i}, h] \subset S$ (porque si $r \in [M_{p_i}, h]$, $r = mhm^{-1}h^{-1}$, para alguna $m \in M_{p_i}$, ahora como $S \lhd G$ y $h \in S$, $mhm^{-1} \in S$, por lo tanto $r \in S$), observemos que M_{p_i} car M, esto debido a que la imagen de un subgrupo de Sylow, K bajo cualquier automorfismo, es un subgrupo de Sylow cuyo orden coincide con el orden de K, ahora como M_{p_i} car $M \lhd G$, se tiene que M_{p_i} es normal en G, entonces $[M_{p_i}, h] \subset (M_{p_i} \cap S)$. Si M_{p_i} es cíclico se tiene $\left[M_{p_i} : M_{p_i}^{p_i}\right] = p_i$ y como $[M_{p_i} : (M_{p_i} \cap S)] = p_i$,y
$\left[M_{p_i} : M_{p_i}^{p_i}\right] = [M_{p_i} : (M_{p_i} \cap S)]\left[(M_{p_i} \cap S) : M_{p_i}^{p_i}\right]$, se tiene que $(M_{p_i} \cap S) \subset M_{p_i}^{p_i}$, pero $M_{p_i}^{p_i} \subset (M_{p_i} \cap S)$, entonces $M_{p_i}^{p_i} = (M_{p_i} \cap S)$ y por lo tanto $[M_{p_i}, h] \subset M_{p_i}^{p_i}$.

h induce el automorfismo f, en $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$, el cual se define de la siguiente manera, sea $m \in M_{p_i}$, $f(mM_{p_i}^{p_i}) = hmh^{-1}M_{p_i}^{p_i}$, este automorfismo esta bien definido, ya que $hmh^{-1}M_{p_i}^{p_i} \in M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$ $(M_{p_i} \lhd G)$ y si consideramos $mM_{p_i}^{p_i}, m_1M_{p_i}^{p_i} \in M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$ tales que $mm^{-1} \in M_{p_i}^{p_i}$, entonces $hmh^{-1}hm_1^{-1}h^{-1} = hmm_1^{-1}h^{-1} \in M_{p_i}^{p_i}$, ya que $M_{p_i}^{p_i}\mathrm{car}M_{p_i} \lhd G$, lo que implica que $f(mM_{p_i}^{p_i}) = f(m_1M_{p_i}^{p_i})$. Como $[M_{p_i}, h] \subset M_{p_i}^{p_i}$ y $m \in M_{p_i}$, entonces $mhm^{-1}h^{-1} \in M_{p_i}^{p_i}$, por lo tanto $mM_{p_i}^{p_i} = hmh^{-1}M_{p_i}^{p_i} = f(mM_{p_i}^{p_i})$, es decir, h induce el automorfismo idéntico en $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$, lo que es un absurdo.

Si M_{p_i} no es cíclico, $(M_{p_i} \cap S)/M_{p_i}^{p_i}$ es un p_i- grupo abeliano elemental, además como $M_{p_i} \lhd G$ y $S \lhd G$, entonces $(M_{p_i} \cap S) \lhd G$ y utilizando el teorema de la correspondencia $((M_{p_i} \cap S)/M_{p_i}^{p_i}) \lhd (G/M_{p_i}^{p_i})$, ahora como
$hmh^{-1}M_{p_i}^{p_i} = hM_{p_i}^{p_i}mM_{p_i}^{p_i}h^{-1}M_{p_i}^{p_i} \in (M_{p_i} \cap S)/M_{p_i}^{p_i}$ (porque$((M_{p_i} \cap S)/M_{p_i}^{p_i}) \lhd (G/M_{p_i}^{p_i}))$ entonces $(M_{p_i} \cap S)/M_{p_i}^{p_i}$ es dejado invariante por el automorfismo inducido por h. Por lo tanto h deja invariante un subgrupo propio del grupo abeliano elemental $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$.

Si $\varphi : H \longrightarrow Aut(M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i})$ es el homomorfismo tal que $\varphi(h)(xM_{p_i}^{p_i}) = (h^{-1}xh)M_{p_i}^{p_i}$, como $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$ es abeliano elemental, $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$ es un $\mathbb{Z}_{p_i}-$espacio vectorial, y ya que $GL(M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}) = Aut(M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i})$, y $\varphi(h^s)((M_{p_i} \cap S)/M_{p_i}^{p_i}) \subset (M_{p_i} \cap S)/M_{p_i}^{p_i}$, entonces por el teorema de Maschke (como $p_i \nmid |H|$), existe un complemento $T/M_{p_i}^{p_i}$ de $(M_{p_i} \cap S)/M_{p_i}^{p_i}$ en $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$ tal que $\varphi(h)(T/M_{p_i}^{p_i}) \subset T/M_{p_i}^{p_i}$ por lo tanto, $[T, h] \subset T$, pero
$[T, h] \subset [M_{p_i}, h] \subset M_{p_i} \cap S$ y por lo tanto $[T, h] \subset T \cap (M_{p_i} \cap S) = M_{p_i}^{p_i}$.

Sea $t \in T$,como $[T, h] \subset M_{p_i}^{p_i}$, entonces $tht^{-1}h^{-1} \in M_{p_i}^{p_i}$ y por lo tanto
$tM_{p_i}^{p_i} = hth^{-1}M_{p_i}^{p_i} = f(tM_{p_i}^{p_i})$, es decir, h induce el automorfismo idéntico en $T/M_{p_i}^{p_i}$, lo que es un absurdo, ya que por hipótesis tenemos que h no deja fijo ningún elemento $\neq 1$ de $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$, por lo tanto G tiene sólo un subgrupo normal maximal. ∎

El siguiente corolario da una caracterización de los grupos solubles no abelianos con todos sus subgrupos normales propios cíclicos y con sólo un subgrupo normal maximal.

Corolario 2.11 *Sea G un grupo finito soluble. Las siguientes condiciones son equiva-*

lentes:

a) a.1 G no es abeliano,

a.2 Todo subgrupo normal propio de G es cíclico,

a.3 G tiene sólo un subgrupo normal maximal.

b) b.1 G es producto semidirecto de un p'−grupo cíclico M con un p−grupo cíclico H (p, primo),

b.2 Si h es un generador de H, h induce en M un automorfismo de orden p que no deja fijo a ningún elemento $\neq 1$ de $M_{p_i}/M_{p_i}^{p_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$ donde $|M| = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_s^{t_s}$ y M_{p_i} es la p_i−componente primaria de M.

Demostración: Que b) implica a) : es inmediato de la demostración del teorema anterior.(c) implica a)) y en virtud del enunciado del teorema anterior se obtiene que a) implica b). ∎

Corolario 2.12 *Sea G un grupo finito soluble no abeliano tal que todo subgrupo normal propio G es cíclico y G tiene solo un subgrupo normal maximal, si $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s}$ con $p_1 > p_2 > ... > p_s$ (p_i - primo), él único subgrupo normal maximal N de G es de orden $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s - 1}$.*

Demostración: G es supersoluble ya que G/N es de orden primo y N es cíclico (1.79). Dado que un grupo supersoluble tiene subgrupos de todos los ordenes posibles(1.83), entonces G tiene un subgrupo R de índice p_s en G y como p_s es el menor de los primos que dividen a $|G|$, R es normal en G (cfr. [8] , XI . 12.5, pág. 190) y ya que $[G : R] = p_s$ entonces R es el único subgrupo normal maximal de G, esto es $R = N$. Utilizando el teorema de Lagrange, se concluye que $|N| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s - 1}$. ∎

Observación. Si en el corolario anterior sólo se pide que todo subgrupo normal sea abeliano (no necesariamente cíclico), entonces no es necesariamente cierto que si

$|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s}$ con $p_1 > p_2 > ... > p_s$, el único subgrupo normal maximal N de G es de orden $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s - 1}$.

Ejemplo 2.13 *A_4 tiene todos sus subgrupos normales abelianos $|A_4| = 3 \cdot 2^2$ y el único subgrupo normal maximal es de orden* 4.

Sin embargo si sólo se pide que todo subgrupo normal propio de G sea abeliano, pero se impone la condición de que el grupo G sea supersoluble, entonces también es cierto que si $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s}$ con $p_1 > p_2 > ... > p_s$ (p_i-primo), el único subgrupo normal maximal N de G es de orden $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s - 1}$.

Capítulo 3

Grupos finitos no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos

En esta sección se darán ejemplos de Grupos finitos no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos, con algún subgrupo no abeliano de donde concluimos que la clase de los grupos no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos, contiene propiamente a la clase de los grupos no abelianos con todos sus subgrupos propios abelianos.

3.1 Ejemplos de grupos solubles no abelianos tal que todo subgrupo normal propio es abeliano,con algún subgrupo no abeliano

Ejemplo 3.1 *Sean H y M grupos de orden 2 y 15 respectivamente.*

$H = \langle h \rangle$, $M = \langle a, b \mid a^3 = 1, b^5 = 1, bab^{-1} = a \rangle$.

Considerese $\varphi(h) : M \to M$ homomorfismo tal que $\varphi(h)(a) = a^2$ y $\varphi(h)(b) = b^4$.

$\varphi(h)$ es un automorfismo. Solo es necesario probar que $\varphi(h)$ es inyectivo:

Supongase que $\varphi(h)(a^i b^j) = 1$, $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 5$

$ha^ib^jh^{-1} = ha^ih^{-1}hb^jh^{-1} = a^{2i}b^{4j} = 1$, *entonces* $a^{2i}b^{4j} = 1$, $3 \mid 2i$ *y* $5 \mid 4j$, *por lo tanto* $3 \mid i$ *y* $5 \mid j$, *entonces* $a^ib^j = 1$.

Sea $\psi : H \to Aut(M)$ el homomorfismo que extiende a φ.

Haremos ver que $G = M \rtimes_{\psi} H$ *es un grupo no abeliano con todos sus subgrupos normales propios abelianos y con un subgrupo no abeliano.*

Como ψ es no trivial G no es abeliano.

M es un $2'-$*grupo* abeliano, H es un 2-grupo cíclico.

h induce en M un automorfismo de orden 2 :

$a^h = hah^{-1}, b^h = hbh^{-1}$,

$(a^h)^2 = h^2ah^{-2} = a$; $(b^h)^2 = h^2bh^{-2} = b$.

El automorfismo inducido por h en M no deja fijo a ningún elemento diferente de la identidad en $\langle a \rangle$ y $\langle b \rangle$, ya que si $(a^i)^h = a^i$, se tiene que $a^i = ha^ih^{-1} = a^{2i}$, entonces $a^i = 1$. Analogamente si $b^j = (b^j)^h$, para alguna $0 \leq j \leq 4, b^j = hb^jh^{-1} = b^{4j}$, entonces $b^{4j-j} = 1$, es decir $b^{3j} = 1$, por lo tanto $5 \mid 3j$, $5 \mid j$ y $j = 0$.

Del teorema 2.10 tenemos que G es un grupo soluble no abeliano tal que todo subgrupo normal propio de G es abeliano y G tiene solamente un subgrupo maximal.

Como $a^3 = 1, h^2 = 1, hah^{-1} = a^2 = a^{-1}$, $\langle a, h\rangle \cong S_3$, *es un subgrupo no abeliano de* G.

Ejemplo 3.2 *Sean* H, K, L *grupos de orden* p_1, p_2, q *respectivamente, con* p_1, p_2 *y* q *primos diferentes,* $p_1 \equiv 1(\operatorname{mod} q)$ *y* $p_2 \equiv 1(\operatorname{mod} q)$.

Sea $H = \langle a\rangle$, $K = \langle b\rangle$, $L = \langle c\rangle$.

Considerese $\varphi : L \longrightarrow Aut(H \times K)$ *el homomorfismo tal que* $\varphi(c)((a^i, b^j)) = (a^{ir}, b^{js})$, $i, j \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} r^q &\equiv 1 \operatorname{mod} p_1,\ 1 < r \leq p_1 - 1;\ r \not\equiv 1(\operatorname{mod} p_1), \\ s^q &\equiv 1 \operatorname{mod} p_2,\ 1 < s \leq p_2 - 1;\ r \not\equiv 1(\operatorname{mod} p_2). \end{aligned}$$

A continuación se demostrará que $\varphi(c)$ *es un automorfismo.*

$\varphi(c)$ *es un homomorfismo porque:*

$$\begin{aligned} \varphi(c)((a^i, b^j)(a^u, b^v)) &= \varphi(c)((a^{i+u}, b^{j+v})) = (a^{(i+u)r}, b^{(j+v)s}) = (a^{ir+ur}, b^{js+vs}) \\ &= (a^{ir}, b^{js})(a^{ur}, b^{vs}) = \varphi(c)((a^i, b^j))\varphi(c)((a^u, b^v)). \end{aligned}$$

$\varphi(c)$ *es inyectivo:*

Supongamos que $\varphi(c)((a^i, b^j)) = (1, 1)$, *como*
$\varphi(c)((a^i, b^j)) = (a^{ir}, b^{js}) = (1, 1)$, *entonces* $a^{ir} = 1$, $b^{js} = 1$, *esto implica que* $p_1 \mid ir$ *y* $p_2 \mid js$.

Como $1 \leq r \leq p_1 - 1$, *entonces* $p_1 \mid i$ *y como* $0 \leq i \leq p_1 - 1$, *entonces* $i = 0$. *Análogamente* $j = 0$ *y podemos concluir que* $(a^i, b^j) = (1, 1)$.

Como $\varphi(c)$ *es inyectivo y* $H \times K$ *es finito, entonces* $\varphi(c)$ *es sobre.*

Haremos ver que $G = (H \times K) \rtimes_\varphi L$ *es un grupo no abeliano con todos sus subgrupos normales propios abelianos y con un subgrupo no abeliano.*

Como φ *no es trivial,* G *es no abeliano.*

$H \times K$ *es un* $q'-$*grupo abeliano,* L *es un* $q-$*grupo cíclico.*

El generador de L induce en $H \times K$ un automorfismo de orden q :

$$\begin{aligned}
\varphi(c)((a^i, b^j)) &= (a^{ir}, b^{js}) \\
\varphi^2(c)((a^i, b^j)) &= \varphi(c)(a^{ir}, b^{js}) = (a^{ir^2}, b^{js^2}) \\
\varphi^q(c)((a^i, b^j)) &= \varphi^{q-1}(c)(a^{ir}, b^{js}) = (a^{ir^q}, b^{js^q}) \\
&= (a^{r^q}, 1)^i (1, b^{s^q})^j = (a, 1)^i (1, b)^j = (a^i, b^j).
\end{aligned}$$

Se concluye que $\varphi(c)$ es un automorfismo de orden q.

$\varphi(c)$ no deja fijo a ningún elemento de H y K distinto de la identidad:

Supongase que $\varphi(c)((a^i, 1)) = (a^i, 1)$, $0 < i \leq (p_1 - 1)$

$(a^{ir}, 1) = (a^i, 1)$, entonces $a^{ir} = a^i$, de aquí que $a^{ir-i} = 1$ y se tiene que $p_1 \mid (ir - i)$, $p_1 \mid i(r-1)$, $p_1 \mid i$, lo que implica que $i = 0$ y $(a^i, 1) = (1, 1)$.

Analogamente $\varphi(c)$ no deja fijo a ningún elemento de K distinto de la identidad.

Utilizando 2.10, tenemos que todo subgrupo normal propio de G es abeliano y G tiene solamente un subgrupo normal maximal.

Como H car $H \times K \lhd G$, entonces $H \lhd G$ y HL es un subgrupo de G no abeliano.

Ejemplo 3.3 *Si H, K son grupos cíclicos, $|H| = p^2$, $|K| = q$, p y q primos, $p^2 \equiv 1 \pmod q$, $q \mid (p-1)$.*

Existe r tal que

$$r^q \equiv 1 (\operatorname{mod} p^2), 1 < r \leq p^2 - 1 \text{ y } r \not\equiv 1 (\operatorname{mod} p^2).$$

$p \nmid r$ ya que si $p \mid r$, entonces $p^q \mid r^q$, esto implica que $p^2 \mid r^q$ y se tiene que $r^q \equiv 0 (\operatorname{mod} p^2)$. $H =< a >$, $K =< b >$ y $\varphi(b) : H \to H$, el homomorfismo tal que $\varphi(b)(a) = a^r$, donde

$\varphi(b)$ es un automorfismo de H.

Sólo es necesario probar que $\varphi(b)$ es inyectivo:

Si $\varphi(b)(a^i) = 1$, *entonces* $a^{ir} = 1$ *y se tiene que* $p^2 \mid ir$, *como* $p \nmid r$, *entonces* $p^2 \mid i$, *por lo tanto* $a^i = 1$

Sea $\varphi : K \to Aut(H)$ *el homomorfismo tal que* $\varphi(b)(a^j) = a^{rj}$.

$G = H \rtimes_\varphi K$ *es un grupo no abeliano de orden* p^2q .

Como $\varphi^q(b)(a) = a^{r^q} = a$ *se tiene que* $\varphi(b)$ *es un automorfismo de orden* q.

$\varphi(b)$ *no deja fijo ningún elemento de* H/H^p *distinto de la identidad ya que si se supone que* $\varphi(b)$ *deja fijo al elemento* $a^tH^p \in H/H^p$ *entonces*

$$a^tH^p = b(a^tH^p)b^{-1} = ba^tb^{-1}H^p = (\varphi(b)a^t)H^p = a^{rt}H^p.$$

Como $a^tH^p = a^{rt}H^p$, $a^{rt-t} \in H^p$, *lo que implica que* $a^{tr-t} = a^{jp}$, $tr - t \equiv jp$ $(modp^2)$, $tr - t \equiv jp \pmod p$, $tr - t \equiv 0 \pmod p$ *entonces,* $p \mid t(r-1)$ *y* $p \mid t$. *Se concluye que* $a^t \in H^p$.

Aplicando el teorema 2.10 podemos concluir que G es un grupo no abeliano que solo tiene un subgrupo normal maximal y todos sus subgrupos normales propios son abelianos.

Ejemplo 3.4 *Si al ejemplo anterior le pedimos además que* $r \not\equiv 1 \pmod p$, *entonces* G *tiene un subgrupo no abeliano.*

H^pK *es un subgrupo no abeliano de* G.

Como H^p *car* $H \lhd G$, *entonces* $H^p \lhd G$ *y por lo tanto* H^pK *es un subgrupo de* G, *además* H^pK *no es abeliano ya que si* H^pK *fuera abeliano se tendría que:*
$a^p = ba^pb^{-1} = a^{rp}$, *entonces* $a^{rp-p} = 1$ *y por lo tanto* $p^2 \mid (rp-p)$ *de aquí que* $p \mid (r-1)$, *lo que es una contradicción ya que* $p \nmid (r-1)$ $\square$

Si $p = 3$, $q = 2$ *y* $r = 8$, *se cumplen las condiciones impuestas en los ejemplos 3.3 y 3.4.*

3.2 Ejemplo de un grupo no soluble tal que todo subgrupo normal propio es abeliano,con algún subgrupo no abeliano

En esta sección se dará un ejemplo de un grupo no soluble, no simple tal que todo subgrupo normal propio es abeliano y tiene un subgrupo no abeliano.

Ejemplo 3.5 *El grupo SL(2,7) no es soluble, tiene todos sus subgrupos normales propios abelianos y tiene un subgrupo no abeliano.*

Sea $G = SL(2,7)$, *como* $PSL(2,7) = SL(2,7)/Z(SL(2,7))$ *es simple no abeliano, entonces* $SL(2,7)$ *no es soluble, ya que si* $SL(2,7)$ *fuera soluble se tendría que* $PSL(2,7)$ *sería soluble, lo cual es una contradicción, ya que todo grupo simple soluble tiene orden primo y* $PSL(2,7)$ *no es abeliano.*

Todo subgrupo normal propio de $SL(2,7)$ *es abeliano, ya que para probar que* $PSL(n,F)$, *con* $n \geq 2$ *es simple, excepto cuando* $n = 2$ *y* $|F| = 2$ *ó* $|F| = 3$, *se hace ver que si* $N \lhd SL(2,7)$ *entonces* $N \subseteq Z(SL(2,7))$ *y como* $Z(SL(2,7))$ *es abeliano, entonces se tiene que* N *es abeliano.*

Probaremos que $SL(2,7)$ *tiene un subgrupo no abeliano.*

Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in SL(2,7)$.

Se afirma que:

$A^4 = I, B^3 = I, ABA^{-1} = B^2, A^2B = BA^2$

En efecto:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I$$

$A^4 = A^2A^2 = (6I)^2 = 6^2I = I$

$$B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B^2;$$

Como $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \in Z(SL(2,7))$, *se tiene que* A^2 *conmuta con* B.

Si $H = \langle A \rangle, K = \langle B \rangle$, *se tiene que* $HK = KH$, *por lo tanto* $S = KH$ *es un subgrupo de* $SL(2,7)$ *de orden* 12 *y como* $AB = B^2A$, S *es no abeliano.*

Observaciones. Si $M \neq 1$ es un subgrupo propio de S, M es de orden $2, 3, 4$ ó 6.

$\langle A \rangle = H$ es de orden 4, $H^2 = \langle A^2 \rangle$ es de orden 2, $K = \langle B \rangle$ es de orden 3, $\langle BA^2 \rangle = KH^2$ es de orden 6.

Como H es un 2−subgrupo de Sylow de S y todos los 2−subgrupos de Sylow son conjugados, entonces todos los subgrupos de S de orden 4 son isomorfos a H.

Como $A^2 \in Z(S)$ es de orden 2, entonces A^2 es el único elemento de orden 2 ya que de otra forma se tendría un subgrupo de S de orden 4 no isomorfo a H.

Si S tuviera un subgrupo de orden 6 no isomorfo a $\langle BA^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_6$, se tendría que en S existiría un elemento de orden 2 que no estaría en el centro de S, lo que es un absurdo. Por lo tanto S no tiene subgrupos isomorfos a S_3.

Hemos probado que si $1 \subsetneqq M \subsetneqq S$, M es cíclico, es decir S es un grupo no abeliano con todos sus subgrupos cíclicos y por consiguiente abelianos.

S no es isomorfo a A_4 porque S tiene elementos de orden 6.

S no es isomorfo a D_{12} porque S tiene elementos de orden 4, por lo tanto S es isomorfo al grupo T.

$$T = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^6 = 1, \beta^2 = \alpha^3 = (\alpha\beta)^2 \rangle$$

Si $a = A^2B$ y $b = A$, mostraremos que $S = \langle a, b \mid a^6 = 1, b^2 = a^3 = (ab)^2 \rangle$.
$a^6 = (A^2B)^6 = A^{12}B^6 = I \cdot I = I$,
$a^3 = (A^2B)^3 = A^6B^3 = A^2 = b^2$,
$(ab)^2 = (ab)(ab) = (A^2BA)(A^2BA) = BA^3BA^3 = (BA^{-1})(BA^{-1})$,
Como $ABA^{-1} = B^{-1}$, se tiene que:
$(BA^{-1})(BA^{-1}) = (A^{-1}B^{-1})(BA^{-1}) = A^{-2} = A^3A^3 = A^6 = A^2 = b^2$.
Hemos probado que $a^6 = 1, a^3 = b^2, (ab)^2 = b^2$.
$\langle a, b \rangle \subseteq S$, $\langle a \rangle \lneqq \langle a, b \rangle$, ya que b es de orden 4, por lo tanto $\langle a, b \rangle = S$ y

$$S = \langle a, b \mid a^6 = 1, b^2 = a^3 = (ab)^2 \rangle.$$

En virtud de los ejemplos anteriores se tiene que la clase de los grupos finitos no abelianos con todos sus subgrupos propios abelianos, esta contenida propiamente en la clase de los grupos finitos, no simples, no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos.

En lo que sigue haremos ver que la clase de los grupos finitos no abelianos con todos sus subgrupos propios abelianos, esta contenida propiamente en la clase de los grupos finitos, solubles no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos.

El siguiente lema lo usaremos para hacer ver que si G es un grupo finito no abeliano con todos sus subgrupos propios abelianos, entonces G es soluble.

Lema 3.6 *Si G es un grupo finito de orden mayor a 1, con todos sus subgrupos propios abelianos, entonces existe un subgrupo normal A de G con $[G : A]$ un primo.*

Demostración: Si el lema fuera falso, existe al menos un grupo G diferente de la identidad tal que todo subgrupo propio de G es abeliano y G no tiene un subgrupo normal de índice un primo. De estos grupos, consideramos un grupo, de orden minimo. Este grupo G tiene las siguientes propiedades:

a) $G \neq 1$.

b) Todo subgrupo propio de G es abeliano.

c) No existe un subgrupo normal de índice primo en G .

d) Si X es un grupo con $1 < |X| < |G|$ y si todo subgrupo propio de X es abeliano, entonces X posee un subgrupo normal de índice primo.

Suponemos que existe $N \triangleleft G$ con $1 \subset N \subset G$. Entonces $1 < [G : N] < |G|$. Todo subgrupo propio de G/N tiene la forma S/N con S un subgrupo propio de G, S es un subgrupo abeliano de G (Por b)), por lo que S/N es también un grupo abeliano.

Como $1 < [G : N] < |G|$, y todo subgrupo propio de G/N es abeliano, utilizando d) tenemos que G/N tiene un subgrupo normal de índice un primo p, este grupo normal tiene la forma W/N con W normal en G, además utilizando uno de los teoremas de isomorfismo $[G : W] = [G/N : W/N] = p$, lo cual contradice c), por lo tanto no existen subgrupos normales propios de G, es decir,

(1) G es simple.

Si G fuera abeliano, todo subgrupo de G debe ser un subgrupo normal, y por (1) G no debe tener subgrupos normales propios, entonces, $|G| = [G : 1]$ debe ser un primo, lo que contradice c), esta contradicción prueba que:

(2) G no es abeliano.

Como $Z(G)$ es normal en G y G es simple no abeliano, entonces

$$(3) \quad Z(G) = 1.$$

Sean U y V subgrupos maximales de G, $U \neq V$, $U \subset U \cup V$, $U < \langle U, V \rangle$ entonces $\langle U, V \rangle = G$.

Por b) U y V son abelianos, se tiene que $U \subset C_G(U \cap V)$, $V \subset C_G(U \cap V)$, $U \cup V \subset C_G(U \cap V)$, entonces $G = \langle U, V \rangle \subset C_G(U \cap V)$ entonces $U \cap V$ es centralizado por G

y se sigue que $U \cap V \subset Z(G) = 1$(Por (3)), esto prueba que:

(4) $U \cap V = 1$ para cualesquiera par de subgrupos maximales diferentes U y V de G.

Si $g \in G$ y $\{g\} = G$, entonces G debe ser abeliano y esto contradice (2). Entonces $\{g\} \subset G$ y como G es finito, existe un subgrupo maximal de G que contiene a g, es decir,

(5) Todo elemento de G esta contenido en un subgrupo maximal de G.

De (4) y (5) tenemos

(6) Todo elemento de G, diferente de la identidad pertenece a uno y sólo un subgrupo maximal de G

, esto también se puede expresar de la siguiente forma :

(6*) Los subgrupos maximales de G forman una partición de G.

Si U es un subgrupo maximal de G, como $U \subseteq N_G(U)$ tenemos que $N_G(U) = U$ ó $N_G(U) = G$. Si $N_G(U) = G$, entonces $U \lhd G$, y por (1) tenemos que $U = 1$, pero dado que $U = 1$ es un subgrupo maximal de G, entonces G tiene sólo dos subgrupos y en consecuencia G es cíclico de orden primo, contradiciendo (2). Entonces $N_G(U) = U$, y hemos demostrado

(7) Si U es un subgrupo maximal de G, entonces $U = N_G\,(U)$.

Si U es un subgrupo maximal de G, $g \in G$, $U^g = g^{-1}Ug$ también es un subgrupo maximal de G. Supongamos que U^* es una clase de subgrupos maximales de G que son conjugados en G. Como la conjugación es un isomorfismo, entonces todos los subgrupos en U^* son isomorfos y tienen el mismo orden, denotamos este orden por $o(U^*)$ y denotamos la cardinalidad de la clase U^* por $c(U^*)$, la cual es exactamente $[G : N_G(U)]$ para toda $U \in U^*$. De (6*) deducimos que el conjunto G es igual a la unión de todos los subgrupos maximales de G y si denotamos por M^* el conjunto de subgrupos maximales de G, se tiene de (6*) que:

$$|G| = 1 + \sum_{U \in M^*} [o(U) - 1],$$

Sumando sobre las clases U^* de subgrupos maximales conjugados y después sobre los elementos en estas clases, obtenemos:

$$|G| = 1 + \sum_{U^*} \sum_{X \in U^*} [o(X) - 1],$$

Pero $o(X) = o(U^*)$, para todo $X \in U^*$ y $c(U^*) = [G : N_G(X)]$ para toda $X \in U^*$, por lo que:

$$(8) \quad |G| = 1 + \sum_{U^*} c(U^*)\,[o(U) - 1].$$

Para todo subgrupo maximal $X \in U^*$ tenemos :

$$|G| = o(X)\,[G : X] = o(X)\,[G : N_G(X)]\,,$$

ya que por (7) $X = N_G(X)$, y además $o(X)\,[G : N_G(X)] = o(U^*)c(U^*)$.

Si j es el número de clases conjugadas de subgrupos maximales de G ((8) es una suma de j sumandos), entonces obtenemos:

$$|G| = 1 + \sum_j c(U^*)o(U) - c(U^*) = 1 + j\,|G| - \sum_{U^*} c(U^*)$$

, esto lo reescribimos como

$$(9) \quad [j-1] \;\; |G| + 1 = \sum_{U^*} c(U^*).$$

.

Recordamos que:

$c(U^*) = [G : N_G(X)]$, para todo subgrupo maximal X de G que pertenece a la clase U^* de subgrupos conjugados maximales, además X no es un subgrupo normal de G (Porque si X$\subsetneqq G$, X maximal y normal, G no sería simple), y como $|G| = o(U^*)\; c(U^*)$, entonces $c(U^*)$ es un divisor propio de $|G|$ entonces $c(U^*) \leq \frac{1}{2}\,|G|$. Combinando esto con 9) obtenemos $[j-1] \;\; |G| < [j-1] \;\; |G| + 1 = \sum_{U^*} \; c(U^*) \leq \frac{1}{2}j(|G|)$.

Dado que $|G|$ es un entero positivo, esto es equivalente con: $j - 1 < \frac{1}{2}j$ ó $\frac{1}{2}j < 1$, entonces $0 < j < 2$, de esto obtenemos

$$(10) \quad j = 1.$$

Esto significa primero que existe una y sólo una clase U^* de subgrupos maximales conjugados y por (9) $\sum_{U^*} \; c(U^*) = 1$, es decir $c(U^*) = 1$. Entonces existe uno y sólo un subgrupo maximal de G, con lo que se contradice (6*), por lo tanto existe un subgrupo no abeliano normal A con $[G : A]$ un primo ó $G = 1$. ■

Teorema 3.7 *Si G es un grupo finito no abeliano tal que cada subgrupo propio es abeliano, G es soluble y por lo tanto G pertenece a la clase de los grupos solubles no abelianos con todos sus subgrupos normales propios abelianos.*

Demostración: Por el Teorema anterior existe $M \lhd G$ tal que G/M es de orden primo por lo tanto M y G/M son solubles, por lo tanto G es soluble. ■

Sean C_1, C_2, C_3 las siguientes clases de grupos:

$C_1 =$ la clase de los grupos finitos con todos sus subgrupos propios abelianos,

$C_2 =$ la clase de los grupos finitos solubles con todos sus subgrupos normales propios abelianos,

$C_3 =$ la clase de los grupos finitos no simples con todos sus subgrupos normales propios abelianos.

En virtud del ejemplo 3.1 y del teorema anterior podemos concluir que C_1 esta contenida propiamente en C_2.

En virtud del ejemplo 3.5 y del teorema anterior podemos concluir que C_2 esta contenida propiamente en C_3.

Para terminar veremos un resultado de O.J Schmidt que generaliza el teorema 3.7.

Teorema 3.8 *(O.J Schmidt) Si todo subgrupo maximal de un grupo finito no nilpotente G es nilpotente, entonces G es soluble.*

Demostración: Supongase que existen grupos finitos no nilpotentes, no solubles, con todos sus subgrupos maximales nilpotentes. De entre estos grupos sea G de orden mínimo.

Observación: G tiene al menos 2 subgrupos maximales, ya que si G tiene sólo un subgrupo maximal M, $M \lneqq G$, existe $x \in G$ y $x \notin M$, $\langle x \rangle$ es un subgrupo de G que no esta contenido en M y como M es un subgrupo maximal $\langle x \rangle = G$, es decir, G es cíclico y esto implica que G es soluble, lo que es una contradicción ya que, estamos suponiendo que G no es soluble.

Si N es un subgrupo normal propio no trivial, $|N| < |G|$, N no es nilpotente, pero todo subgrupo maximal de N es nilpotente, por lo tanto N es soluble.

Como $N < S \lneqq G$, S maximal de G, entonces S/N es un subgrupo maximal de G/N y es nilpotente porque S es nilpotente, y dado que $|G/N| < |G|$ y todo subgrupo maximal de G/N es nilpotente, entonces G/N es soluble.

Dado que N y G/N son solubles, entonces G es soluble lo que es una contradicción, por lo que G no tiene subgrupos normales propios, es decir, G es simple.

Supongamos que todo par de subgrupos maximales distintos de G se intersectan en 1. Sea M algún subgrupo maximal, como $N_G(M) \lneqq G$ (porque $M \ntriangleleft G$) y $M \subseteq N_G(M)$, entonces $N_G(M) = M$ (ya que M es maximal).

Si $|G| = n$ y $|M| = m$, entonces M tiene n/m conjugados(por 1.53) y cada par de estos se intersectan trivialmente (porque la conjugación es un automorfismo , y entonces los conjugados de M también son maximales). Entonces los conjugados de M, tienen $(m-1)(\frac{n}{m}) = \frac{nm}{m} - \frac{n}{m} = n - \frac{n}{m}$,elementos no triviales. Como $m \geq 2$ (ya que si $m = |M| = 1$, entonces $M = \langle 1 \rangle$ y M es maximal, por lo que $|G| = p$, con p un primo, es decir G es un $p-$grupo finito y esto implica (por 1.74) que G es soluble, lo que es una contradicción), $\frac{n}{m} \leq \frac{n}{2}$ y por lo tanto (a) $n - \frac{n}{m} \geq \frac{n}{2} > \frac{n-1}{2}$, además es claro (b) $n - \frac{n}{m} \leq n-2 < n-1$(porque $\frac{n}{m} \geq 2$, ya que $\frac{n}{m}$, $n \neq m$ y como $m \mid n$ entonces $n = ma$, para alguna $a \in \mathbb{Z}$, tenemos que $a = \frac{n}{m}$, por lo que $a \geq 2$). Ahora de las desigualdades (a) y (b) tenemos que $\frac{n-1}{2} < n - \frac{n}{m} < n-1$.

Si todos los maximales de G fueran conjugados, dado que $n - \frac{n}{m} < n - 1$, entonces $n - \frac{n}{m} + 1 < n$ lo que es una contradicción ya que $n - \frac{n}{m} + 1 = n$, por lo tanto no todos los maximales son conjugados, por lo que existen M_1 y M_2 subgrupos maximales de G tales que no son conjugados, además la intersección de estos dos subgrupos no es trivial, ya que si fuera trivial dado que $\frac{n-1}{2} < n - \frac{n}{m} < n - 1$ y que cada elemento diferente de la identidad de G pertenece exactamente a un subgrupo maximal, $n-1$ es la suma de enteros que estan entre $\frac{n-1}{2}$ y $n - 1$ pero esto es imposible. Elegimos M_1 y M_2 subgrupos maximales distintosde G, cuya intersección I tiene orden máximo.

Sea $N = N_G(I)$, dado que M_1es nilpotente, $I \neq N_{M_1}(I)$ (1.64), además $I \subset N \cap M_1$ (ya que $I \subset M_1$ y $I \subset N$), I no puede ser normal en G, ya que G es un grupo simple, por lo que se tiene que $N_G(I) \lneq G$ y N esta contenido en un subgrupo maximal M. Entonces $I = M_1 \cap M_2 \lneq N_{M_1}(I) = M_1 \cap N_G(I) < M_1 \cap M$, reescribiendo lo anterior obtenemos que $I < M_1 \cap M$ y dado que M_1 y M son subgrupos maximales de G se contradice que I es de orden máximo, por lo que se concluye que G es soluble. ■

Bibliografía

[1] Alperin, J.L. y Rowen B.B., "Groups and Representations", Springer-Verlag, New York,1995.

[2] Baer R., "Topics in finite groups, minimal classes", Universita' degli studi di firenze, 1974/75.

[3] Feit, W., "Characters of finite groups", W.A. Benjamin, New York, 1967.

[4] Morales J., "Sui gruppi finiti non abeliani a sottogruppi normali propri abeliani",Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1983.

[5] Robinson, D., "A course in the Theory of Groups", 2a ed., Springer-Verlag, New York.

[6] Rotman, J.J., "A first course in abstract algebra",2a ed.,Prentice Hall, New Jersey, 2000.

[7] Rotman, J.J., "An Introduction to the Theory of Groups", 4a ed.,Springer-Verlag, New York,1995.

[8] Zappa G., "Fondamenti di teoria dei gruppi", volumen 2, Edizione Cremonese, Roma, 1969.