00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Reforzamientos de la Condición de Weierstrass y Conjugación en Control Óptimo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

P r e s e n t a :

Gerardo Sánchez Licea

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Javier Fernando Rosenblueth Laguette

MEXICO, D.F. MAYO, 2004

A mis padres

A Javier F Rosenblueth

Reforzamientos de la Condición de Weierstrass y Conjugación en Control Óptimo

Gerardo Sánchez Licea

Contenido

Prefacio

En la teoría clásica de cálculo de variaciones, los teoremas de suficiencia para mínimos locales requieren que el "extremo" de interés sea *no singular.* En el caso de mínimos locales fuertes, las condiciones suficientes clásicas incluyen además la *condición reforzada de Weierstrass.* En la primera parte de esta tesis se presentan tres enfoques diferentes de suficiencia en los que se *refuerza* la condición necesaria de Weierstrass de manera distinta a como se refuerza en la teoría clásica.

Como punto de partida puede uno preguntarse por qué las condiciones de suficiencia clásicas requieren que el extremo de interés sea no singular. Con el propósito de responder a esta pregunta es necesario analizar con detalle las demostraciones de suficiencia clásicas. En particular, Hestenes [12] proporciona una demostración de suficiencia para el problema isoperimétrico de Bolza en donde prueba que si una trayectoria "suave" x_0 no singular satisface la ecuación de Euler, la condición reforzada clásica de Weierstrass, y su segunda variación es positiva sobre el conjunto de variaciones admisibles no nulas, entonces x_0 es un mínimo fuerte estricto. Al estudiar con detalle esta demostración, uno puede observar que la hipótesis de no singularidad del extremo x_0 junto con la suposición de que x_0 satisfaga la condición de Legendre (implicada por la condición necesaria de Weierstrass) son suficientes para que x_0 satisfaga una condición de no negatividad sobre la función exceso de Weierstrass. No es difícil notar que si x_0 satisface esta nueva condición junto con la ecuación de Euler, así como la positividad de la segunda variación, entonces x_0 sigue siendo un mínimo fuerte estricto.

Aparentemente, hemos ganado dos cosas: primero, hemos removido la condición de no singularidad; segundo, hemos debilitado la condición reforzada clásica de Weierstrass. Sin embargo, no es difícil demostrar que este nuevo reforzamiento de la condición necesaria de Weierstrass implica no singularidad del extremo x_0. De esta manera, con la motivación de remover la condición de no singularidad en las condiciones clásicas de suficiencia, hemos debilitado la condición reforzada clásica de Weierstrass. Este "relajamiento" responde al objetivo principal de introducir condiciones de suficiencia puesto que proporciona una nueva condición que puede, en general, facilitar la verificación de la condición reforzada clásica de Weierstrass.

En el segundo enfoque, con el propósito de llenar parcialmente la laguna que existe entre las condiciones necesarias y suficientes para la optimalidad, proporcionamos una nueva demostración de suficiencia fuerte. Las hipótesis de este nuevo resultado presentan dos cambios fundamentales. Primero, se debilita aún más la condición reforzada clásica de Weierstrass, de forma que la evaluación sobre la función exceso de Weierstrass se hace a lo largo de la trayectoria de interés, de la misma manera como se realiza al aplicar la condición necesaria correspondiente. Segundo, como era de esperarse, algunas de nuestras hipótesis originales tuvieron que reforzarse. Esto nos llevó a imponer algunas hipótesis de uniformidad en las funciones que delimitan el problema. Este nuevo resultado de suficiencia, nuevamente, presenta ventajas claras sobre los resultados clásicos de suficiencia ya que, en general, las hipótesis de uniformidad suelen ser más fáciles de verificar que la condición reforzada clásica de Weierstrass. Además, cuando el conjunto de admisibilidad está relativamente acotado con respecto al conjunto donde pertenecen las derivadas, nuestras condiciones de uniformidad se satisfacen automáticamente de manera que, en estos casos, las condiciones necesarias y suficientes son más parecidas entre si de lo que lo son en la teoría clásica.

En el tercer enfoque se presenta un resultado de suficiencia basado en un "método de expansión". Nuevamente, la evaluación de la función exceso de Weierstrass a lo largo de una trayectoria x_0 se hace sobre puntos de la forma $(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u)$ y no sobre puntos $(t, x, \dot{x}, u)$ con $(t, x, \dot{x})$ en una vecindad débil de x_0 y (t, x, u) admisible. Si una trayectoria x_0 satisface esta nueva condición reforzada de Weierstrass y su primera variación es no negativa sobre el conjunto de variaciones admisibles, entonces x_0 es un mínimo global. Por lo tanto, este resultado es una herramienta que sirve para verificar si una trayectoria es óptima sin necesidad de que sea suave, no singular, o posea una segunda variación positiva. Por consiguiente, este resultado puede responder a problemas en los que la teoría clásica no es aplicable. Por otro lado, este enfoque presenta ventajas claras sobre otros que, en ciertos casos, pueden responder a problemas singulares. Por ejemplo, Ewing [9] utiliza un método que consiste en introducir un *término de penalidad* y, por medio de las propiedades de los ejemplos particulares, puede determinar la optimalidad. Sin embargo, como él mismo afirma, su método no representa una panacea para atacar ejemplos particulares.

La segunda parte de esta tesis está enfocada a responder algunas preguntas cruciales relacionadas con condiciones necesarias de segundo orden para problemas más generales que el de cálculo de variaciones. Específicamente, nos interesa generalizar la teoría de Jacobi, en términos de una noción "adecuada" de *puntos conjugados* a ciertos problemas de control óptimo. El problema que analizaremos es el problema de Lagrange de puntos fijos donde los conjuntos a los que pertenecen los estados y los controles son subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{R}^m$ respectivamente y las dinámicas son no lineales.

Para el problema de puntos fijos en cálculo de variaciones se sabe bien que si x_0 es un extremo no singular, entonces no existen puntos conjugados a t_0 en el intervalo abierto (t_0, t_1). La no existencia de tales puntos es una condición necesaria de segundo orden. Recientemente ha habido un interés por extender el concepto de puntos conjugados a problemas de control óptimo. En particular, para ciertos problemas que involucran restricciones con igualdades en los controles, la definición de puntos conjugados dada en [26] generaliza el resultado clásico de cálculo de variaciones en el sentido de que, si se reducen a este caso, ambas nociones coinciden. Por otro lado, en [14] y [27] se publicó un enfoque totalmente distinto aplicable incluso al caso singular. Esta nueva teoría ha permitido resolver problemas no considerados hasta ahora ni siquiera en cálculo de variaciones, ya que la condición de Jacobi resulta, en términos de esta nueva noción de conjugación, válida aun para extremos singulares.

Este nuevo enfoque, sin embargo, presenta dos características poco deseables. No debemos olvidar que el objetivo principal de introducir una caracterización de la condición de segundo orden es obtener una manera más sencilla de verificarla. Contrario a dicho objetivo, se pueden plantear fácilmente ejemplos para los que es más sencillo verificar la negatividad de la segunda variación que probar la existencia de dichos puntos conjugados. Por otro lado, se sabe que si la segunda variación es no negativa entonces los conjuntos definidos en [14] y [27] son vacíos en el intervalo abierto, pero aún sigue abierta la pregunta de si el recíproco se satisface o no.

Generalizando el enfoque que se presenta en [2] y [3] para el problema básico de cálculo de variaciones, en este trabajo introducimos ciertos conjuntos de puntos, aplicables al problema de control óptimo, para los que la no negatividad de la segunda variación sobre el conjunto de variaciones admisibles es *equivalente* a la no existencia de dichos puntos. Más aún, estos nuevos conjuntos contienen, respectivamente, a los conjuntos definidos en [14] y [27]. Por último, demostramos que nunca es más fácil encontrar variaciones negativas, o que los conjuntos de [14] y [27] son no vacíos, que verificar la pertenencia a dichos conjuntos.

Con la idea de ilustrar este hecho, se presentan dos ejemplos en los que se puede verificar trivialmente la existencia de puntos conjugados en el sentido de estas nuevas definiciones mientras que, detectar si los conjuntos proporcionados en [14] y [27] son no vacíos, se convierte en una tarea desesperanzadora.

1 Reforzamientos de la Condición de Weierstrass

1 Introducción

Para el problema de puntos fijos en cálculo de variaciones, la teoría de la condición de Jacobi depende de la hipótesis de que el extremo de interés satisfaga la condición reforzada de Legendre y, por lo tanto, sea *no singular*. En este caso, la condición de Jacobi se vuelve una condición necesaria para la optimalidad, y los teoremas clásicos de suficiencia incluyen la condición reforzada de Jacobi. Por otro lado, si el extremo es singular, la teoría de Jacobi no es aplicable.

Recientemente ha surgido un interés por generalizar la condición de Jacobi para extremos singulares. Ciertos conjuntos de "puntos conjugados generalizados" se introdujeron en [2, 3, 14, 19, 27] e, independientemente de hipótesis de no singularidad, la no existencia de tales puntos se ha establecido como una condición necesaria para mínimos locales. Estas nuevas nociones de conjugación han aparecido como un intento por generalizar la teoría de Jacobi a ciertas clases de problemas de control óptimo, pero también han llevado a nuevos resultados en la teoría clásica de cálculo de variaciones.

Por otro lado, como explica claramente Ewing [9], existe una laguna entre el conjunto de las condiciones necesarias de Euler, Weierstrass y Legendre, y las hipótesis de cualquiera de los teoremas clásicos de suficiencia. Ewing dedica una sección entera (ver [9, Sección 3.7]) a problemas en los que la condición "reforzada de Legendre" no se satisface. En dicha sección muestra cómo se puede llenar parcialmente la laguna entre las condiciones necesarias y suficientes por medio de una técnica discutida en [8] basada en agregar un *término de penalidad*. Este procedimiento se ilustra por medio de tres ejemplos donde la trayectoria examinada es singular, de manera que la condición reforzada de Jacobi no es aplicable, pero uno puede establecer directamente por medio de las propiedades de los ejemplos particulares la existencia de un "campo de extremos" que implica suficiencia. Sin embargo, esta técnica no es necesariamente aplicable en general. Ewing afirma que "aunque el uso del término de penalidad proporciona un avance en la teoría, no corresponde a una panacea para atacar ejemplos particulares. ¡De hecho no hay panaceas!".

Los teoremas generales de inmersión o campos de la teoría de ecuaciones diferenciales son una parte fundamental en las demostraciones usuales de suficiencia. Las condiciones reforzadas de Legendre y Jacobi implican la existencia de un "campo de Mayer" que contiene al extremo de interés. Mcshane [15] introdujo un enfoque totalmente distinto que establece condiciones suficientes para un mínimo relativo débil, sin hacer uso de campos o "métodos de expansión". Este enfoque fue modificado posteriormente por Hestenes [12], con el que obtuvo un teorema de suficiencia para un mínimo relativo fuerte en el problema isoperimétrico de Bolza. Puesto que la teoría de campos de Mayer no se puede aplicar a un problema isoperimétrico sin transformarlo en un problema de Lagrange, la demostración dada en [12] ilustra cómo este método se puede utilizar en casos en los que no necesariamente existen campos de Mayer. Este método también se puede extender a problemas variacionales más generales. Por ejemplo, Rosenblueth [16] lo utilizó para establecer suficiencia en sistemas que involucran retardos en los estados, y en [18] lo utilizó para cierto tipo de problemas de control óptimo. Esta técnica no sólo evita el uso de la teoría de campos sino también de la teoría de "conjugación", ya que se basa explícitamente en la positividad de la segunda variación sobre el conjunto de variaciones admisibles en lugar de la condición reforzada de Jacobi. La condición reforzada de Legendre, por otro lado, también juega un papel crucial en la demostración dada en [12] para mínimos fuertes.

Recientemente, Clarke y Zeidan [7], y Loewen [13], introdujeron dos enfoques de suficiencia sin utilizar el método de campos. En [7] se demuestra que si el extremo de interés satisface las condiciones reforzadas de Legendre y Jacobi, entonces la existencia de una solución simétrica de la "desigualdad de la matriz de Riccati" asociada al problema induce una solución explícita de la desigualdad de Hamilton-Jacobi. El enfoque dado en [13] se basa en argumentos de convexidad local. En particular, ambas técnicas unifican el tratamiento de mínimos locales débiles y fuertes.

Todas las demostraciones de suficiencia que hemos mencionado requieren, como una hipótesis fundamental, la condición reforzada de Legendre. Al menos desde el punto de vista de la teoría clásica, la laguna mencionada anteriormente parece seguir abierta. Por otro lado, para mínimos locales fuertes, la condición reforzada de Weierstrass juega también un papel fundamental en el conjunto de condiciones suficientes clásicas. El propósito principal de este capítulo consiste en mostrar cómo, para teoremas de suficiencia, se pueden reemplazar ambas condiciones por otras que se obtienen al modificar, al menos desde tres puntos de vista diferentes, la manera en la que la condición necesaria de Weierstrass se refuerza usualmente.

El primer enfoque se basa en la demostración dada por Hestenes, utilizando el concepto de una "sucesión convergente direccional", que es una generalización de la noción usual para vectores en espacios de dimensión finita. Para el segundo enfoque mostramos cómo, bajo ciertas hipótesis de continuidad uniforme en las funciones que delimitan el problema, la condición reforzada de Weierstrass clásica se puede reemplazar por una que, en general, puede resultar más fácil de verificar. Por último, el tercer enfoque se basa en un método de expansión que proporciona suficiencia para mínimos locales o, incluso, globales, y no requiere de hipótesis de no singularidad del extremo admisible.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 planteamos el problema básico de cálculo de variaciones junto con las condiciones clásicas de optimalidad. En la Sección 3 introducimos el concepto de sucesiones convergentes direccionales y demostramos ciertas propiedades fundamentales de dichas sucesiones. Las Secciones 4, 5 y 6 incluyen los tres puntos de vista mencionados anteriormente y, a través de varios ejemplos, ilustramos en la Sección 7 la utilidad de los nuevos teoremas de suficiencia que se obtuvieron en este trabajo.

2 Planteamiento del problema y condiciones clásicas de optimalidad

Con la idea de situar claramente los resultados principales de este capítulo, presentaremos en esta sección un breve resumen de las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad en cálculo de variaciones. Un estudio detallado de estos resultados se puede encontrar, por ejemplo, en [6, 9, 11, 12].

Supongamos que tenemos dados un intervalo $T := [t_0, t_1]$ en $\mathbf{R}$, dos puntos ξ_0, ξ_1 en $\mathbf{R}^n$, un conjunto abierto relativo A en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, y una función L que mapea $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$, $(t, x, \dot{x}) \mapsto L(t, x, \dot{x})$. Denotemos por X el espacio vectorial de todas las funciones C^1 a trozos o seccionalmente suaves que mapean T a $\mathbf{R}^n$, definamos

$$X(A) := \{x \in X \mid (t, x(t), \dot{x}(t)) \in A \ (t \in T)\},$$
$$X_e(A) := \{x \in X(A) \mid x(t_0) = \xi_0, \ x(t_1) = \xi_1\},$$

y consideremos la funcional $I: X \to \mathbf{R}$ definida por

$$I(x) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \quad (x \in X).$$

El problema que nos interesa llamado *el problema clásico de puntos fijos en cálculo de variaciones*, que denotaremos por $\mathrm{P}(A)$ es el de minimizar I sobre $X_e(A)$.

Los elementos de X son llamados *arcos* o *trayectorias*, y una trayectoria x *resuelve* $\mathrm{P}(A)$ si pertenece a

$$S(A) := \{x \in X_e(A) \mid I(x) \leq I(y) \text{ para toda } y \in X_e(A)\}.$$

Para mínimos locales, consideremos las siguientes normas en X:

$$\|x\|_0 := \sup\{|x(t)| : t \in T\} \quad (\textit{norma fuerte}),$$

$$\|x\|_1 := \|x\|_0 + \|\dot{x}\|_0 \quad (\textit{norma débil}).$$

Decimos que $x \in X_e(A)$ es un *mínimo fuerte* de P(A) si x es un mínimo local de I sobre $X_e(A)$ con respecto a la norma fuerte en X, i.e., si existe $\epsilon > 0$ tal que $I(x) \leq I(y)$ para toda $y \in X_e(A) \cap N_0(x;\epsilon)$, donde

$$N_0(x;\epsilon) = \{y \in X : \|x-y\|_0 < \epsilon\}.$$

Un *mínimo débil* de P(A) corresponde a reemplazar $N_0(x;\epsilon)$ por

$$N_1(x;\epsilon) = \{y \in X : \|x-y\|_1 < \epsilon\}$$

en la definición anterior. Nótese que si, para toda $x \in X$ y $\epsilon > 0$, definimos

$$T_0(x;\epsilon) := \{(t,y) \in T \times \mathbf{R}^n : |x(t) - y| < \epsilon\},$$

$$T_1(x;\epsilon) := \{(t,y,v) \in T_0(x;\epsilon) \times \mathbf{R}^n : |\dot{x}(t) - v| < \epsilon\},$$

entonces x es un mínimo fuerte de P$(A) \Leftrightarrow x \in S((T_0(x;\epsilon) \times \mathbf{R}^n) \cap A)$ para alguna $\epsilon > 0$. Análogamente, x es un mínimo débil de P$(A) \Leftrightarrow x \in S(T_1(x;\epsilon) \cap A)$ para alguna $\epsilon > 0$.

Para cualquier $x \in X$ usaremos la notación $(\tilde{x}(t))$ para representar $(t, x(t), \dot{x}(t))$ $(t \in T)$. La función $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ denotará el producto interno usual en $\mathbf{R}^n$. Supondremos que L es continua en A y que para toda $t \in T$ la función $L(t,\cdot,\cdot)$ es $C^2(A)$.

Para toda $x \in X$ definamos la *primera variación de I a lo largo de x* por

$$I'(x;y) := \int_{t_0}^{t_1} (\langle L_x(\tilde{x}(t)), y(t)\rangle + \langle L_{\dot{x}}(\tilde{x}(t)), \dot{y}(t)\rangle) dt \qquad (y \in X)$$

y la *segunda variación de I a lo largo de x* por

$$I''(x;y) := \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t, y(t), \dot{y}(t)) dt \qquad (y \in X)$$

donde, para toda $(t, y, \dot{y}) \in T \times \mathbf{R}^{2n}$,

$$2\Omega(t,y,\dot{y}) := \langle y, L_{xx}(\tilde{x}(t))y\rangle + 2\langle y, L_{x\dot{x}}(\tilde{x}(t))\dot{y}\rangle + \langle \dot{y}, L_{\dot{x}\dot{x}}(\tilde{x}(t))\dot{y}\rangle.$$

Definamos el conjunto de *variaciones admisibles* como

$$Y := \{y \in X \mid y(t_0) = y(t_1) = 0\}$$

y consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
E :=& \{x \in X \mid I'(x;y) = 0 \text{ para toda } y \in Y\},\\
H :=& \{x \in X \mid I''(x;y) \geq 0 \text{ para toda } y \in Y\},\\
\mathcal{L} :=& \{x \in X \mid L_{\dot{x}\dot{x}}(\tilde{x}(t)) \geq 0 \text{ para toda } t \in T\},\\
W(A) :=& \{x \in X(A) \mid \mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}(t), u) \geq 0 \text{ para toda } (t,u) \in T \times \mathbf{R}^n\\
& \qquad \text{con } (t, x(t), u) \in A\}
\end{aligned}$$

donde la "función exceso" de Weierstrass $\mathcal{E}: T \times \mathbf{R}^{3n} \to \mathbf{R}$ está definida por

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) := L(t, x, u) - L(t, x, \dot{x}) - \langle u - \dot{x}, L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \rangle.$$

A los elementos de $E \cap C^1$ se les llama *extremos*, a los de $\mathcal{L}$ se dice que satisfacen *la condición de Legendre*, y a los de $W(A)$ que satisfacen la *condición de Weierstrass.*

El siguiente teorema proporciona condiciones necesarias para cualquier trayectoria que resuelve $\mathrm{P}(A)$ donde A es cualquier conjunto abierto relativo de $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

2.1 Teorema: *Si x resuelve $\mathrm{P}(A)$ entonces x pertenece a E, H, $\mathcal{L}$ y $W(A)$.*

Se pueden obtener condiciones necesarias para un mínimo débil o fuerte reemplazando A por $T_1(x; \epsilon) \cap A$ o $(T_0(x; \epsilon) \times \mathbf{R}^n) \cap A$ respectivamente. En particular, si x es un mínimo débil de $\mathrm{P}(A)$ entonces, para alguna $\epsilon > 0$, $x \in E \cap H \cap \mathcal{L} \cap W(T_1(x; \epsilon) \cap A)$. Por otro lado, si x es un mínimo fuerte de $\mathrm{P}(A)$ entonces $x \in E \cap H \cap \mathcal{L} \cap W(A)$ ya que, para cualquier $\epsilon > 0$, $x \in W((T_0(x; \epsilon) \times \mathbf{R}^n) \cap A) \Leftrightarrow x \in W(A)$.

Al reforzar ligeramente a los conjuntos que se definieron para las condiciones necesarias obtenemos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
H' &:= \{x \in X \mid I''(x; y) > 0 \text{ para toda } y \in Y \setminus \{0\}\}, \\
\mathcal{L}' &:= \{x \in X \mid L_{\dot{x}\dot{x}}(\tilde{x}(t)) > 0 \text{ para toda } t \in T\}, \\
W(A; \epsilon) &:= \{x_0 \in X(A) \mid \mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) \geq 0 \text{ para toda } (t, x, \dot{x}, u) \in T \times \mathbf{R}^{3n} \\
&\qquad\qquad \text{con } (t, x, \dot{x}) \in T_1(x_0; \epsilon) \text{ y } (t, x, u) \in A\}.
\end{aligned}$$

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para mínimos locales. En [12] se puede encontrar una demostración directa que no usa campos de Mayer, la teoría de Hamilton-Jacobi, ecuaciones de Riccati, o puntos conjugados.

2.2 Teorema: *Sea $x \in X_e(A) \cap C^1$. Entonces*
a. *$x \in E \cap H' \cap \mathcal{L}' \Rightarrow x$ es un mínimo débil estricto de $\mathrm{P}(A)$.*
b. *$x \in E \cap H' \cap \mathcal{L}' \cap W(A; \epsilon)$ para alguna $\epsilon > 0 \Rightarrow x$ es un mínimo fuerte estricto de $\mathrm{P}(A)$.*

Puesto que las condiciones necesarias y suficientes clásicas no se expresan usualmente en términos de variaciones sino en términos de las ecuaciones de Euler y Jacobi, concluiremos esta introducción resumiendo estas caracterizaciones y enunciando las condiciones clásicas para la optimalidad.

2.3 Proposición: *Sea $x \in X(A)$. Entonces $x \in E \Leftrightarrow$ existe $c \in \mathbf{R}^n$ tal que*

$$L_{\dot{x}}(\tilde{x}(t)) = \int_{t_0}^{t} L_x(\tilde{x}(s))ds + c \qquad (t \in T).$$

La ecuación anterior es la forma integral de la *ecuación de Euler*

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(\tilde{x}(t)) = L_x(\tilde{x}(t)) \qquad (t \in T).$$

Si $\dot{x}$ tiene una discontinuidad, la derivada d/dt se interpreta como una derivada izquierda o derecha. Esta ecuación se cumple aun cuando x no tiene segunda derivada. Es importante, observar que si $x \in E$ entonces x satisface la ecuación de Euler, sin embargo, el recíproco no necesariamente se cumple. De hecho, si definimos $L(t, x, \dot{x}) = (\dot{x}^2 - x^2)/2$, $T = [0, 2\pi]$, entonces $x_0(t) := \operatorname{sen} t$ si $t \in [0, \pi]$, y $x_0(t) := 0$ si $t \in [\pi, 2\pi]$ satisface la ecuación de Euler, pero $x_0 \notin E$ puesto que no hay constante $c \in \mathbf{R}$ que satisfaga $\dot{x}_0(t) = \int_0^t -x_0(s)ds + c$ para toda $t \in T$. Para el recíproco nótese que, si x satisface la ecuación de Euler, entonces $x \in E$ si la función $t \mapsto L_{\dot{x}}(\tilde{x}(t))$ $(t \in T)$ pertenece a X.

2.4 Definición: Dada $x \in X$, un punto $s \in (t_0, t_1]$ se dice *conjugado a t_0 en x* si existe $y \in X$ con $y \not\equiv 0$ en (t_0, s) tal que $y(t_0) = y(s) = 0$ y y satisface la ecuación de Euler para el integrando Ω, i.e.,

$$\frac{d}{dt}\left[L_{\dot{x}x}(\tilde{x}(t))y(t) + L_{\dot{x}\dot{x}}(\tilde{x}(t))\dot{y}(t)\right] = L_{xx}(\tilde{x}(t))y(t) + L_{x\dot{x}}(\tilde{x}(t))\dot{y}(t) \qquad (t \in [t_0, s]).$$

Esta última ecuación se conoce como la *ecuación de Jacobi.*

Consideremos ahora el siguiente conjunto:

$$J := \{x \in X \mid s \in (t_0, t_1) \Rightarrow s \text{ no es conjugado a } t_0 \text{ en } x\}.$$

Se dice que los elementos de J satisfacen la *condición de Jacobi.* Los resultados clásicos que muestran que esta condición es necesaria para la optimalidad se establecen usualmente en términos de extremos no singulares. Una trayectoria x se llama *no singular* si $|L_{\dot{x}\dot{x}}(\tilde{x}(t))| \neq 0$ para toda $t \in T$. Nótese que $x \in \mathcal{L}' \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}$ es no singular. El resultado principal que relaciona la condición de Jacobi con la no negatividad de la segunda variación afirma que, si $x \in X(A) \cap E \cap C^1$ es no singular, entonces $x \in H \Leftrightarrow x \in \mathcal{L} \cap J$. Este resultado, combinado con el Teorema 2.1, implica las siguientes condiciones necesarias de optimalidad.

2.5 Teorema: *Si $x \in S(A)$ entonces $x \in E \cap H \cap \mathcal{L} \cap W(A)$. Si además $x \in C^1$ es no singular entonces $x \in J$.*

Para la suficiencia, definamos

$$J' := \{x \in X \mid s \in (t_0, t_1] \Rightarrow s \text{ no es conjugado a } t_0 \text{ en } x\}.$$

Se sabe bien que, si $x \in X(A) \cap E \cap C^1$ es no singular, entonces $x \in H' \Leftrightarrow x \in \mathcal{L} \cap J'$. Combinando este resultado con el Teorema 2.2 obtenemos el conjunto clásico de condiciones suficientes.

2.6 Teorema: *Sea $x \in X_e(A) \cap C^1$. Entonces*
a. *$x \in E \cap J' \cap \mathcal{L}' \Rightarrow x$ es un mínimo débil estricto de* $\mathrm{P}(A)$.
b. *$x \in E \cap J' \cap \mathcal{L}' \cap W(A;\epsilon)$ para alguna $\epsilon > 0 \Rightarrow x$ es un mínimo fuerte estricto de* $\mathrm{P}(A)$.

3 Resultados auxiliares

En esta sección introducimos la noción de una *sucesión convergente direccional* en la clase de todas las funciones absolutamente continuas que mapean T a $\mathbf{R}^n$. Basados en este concepto, demostraremos algunos resultados que juegan un papel fundamental en los teoremas de suficiencia dados en la Sección 4.

3.1 Definiciones: Denotamos por X' la clase de todas las funciones absolutamente continuas que mapean T a $\mathbf{R}^n$, y por X'' la subclase de X' de todos los arcos con derivadas c.s. en $L^2(T;\mathbf{R}^n)$. Consideramos dos normas en X':

$$\|x\|_0 := \sup\{|x(t)| : t \in T\}, \qquad \|x\|_1 := |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t_1} |\dot{x}(t)|dt.$$

Definamos

$$D(y) := \varphi(y(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\dot{y}(t))dt \qquad (y \in X')$$

donde $\varphi(c) := (1 + |c|^2)^{1/2} - 1$ para toda $c \in \mathbf{R}^n$. Obsérvese que las siguientes relaciones se cumplen:

$$\varphi(c) \le \frac{|c|^2}{2}, \qquad \varphi(c) \le |c|, \qquad \varphi(c)(2 + \varphi(c)) = |c|^2 \qquad (c \in \mathbf{R}^n).$$

3.2 Lema: *Sean* $\{x_q\} \subset X'$, $x_0 \in X'$. *Entonces son equivalentes:*

a. $\lim \|x_q - x_0\|_1 = 0$.

b. $\lim D(x_q - x_0) = 0$.

Además, estas relaciones implican:

c. $\lim \|x_q - x_0\|_0 = 0$.

d. *Si* $w_q(t) := [1 + \frac{1}{2}\varphi(\dot{x}_q(t) - \dot{x}_0(t))]^{1/2}$ *entonces*

$$\lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} (w_q^2(t) - 1)dt = \lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} (w_q(t) - 1)dt = \lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} |w_q(t) - 1|^2 dt = 0.$$

e. *La sucesión $\{x_q\}$ puede reemplazarse por una subsucesión (nuevamente denotada por $\{x_q\}$) tal que*

$$\lim_{q\to\infty} \dot{x}_q(t) = \dot{x}_0(t) \quad \textit{casi uniformemente en } T$$

y en consecuencia tal que

$$\lim_{q\to\infty} w_q(t) = 1 \quad \textit{casi uniformemente en } T.$$

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b): Claramente $D(y) \leq \|y\|_1$ $(y \in X')$.

(b) $\Rightarrow$ (a): El resultado se satisface si se demuestra la existencia de $k > 0$ tal que

$$\|y\|_1^2 \leq kD(y)(1 + D(y)) \qquad (y \in X').$$

Para demostrarlo, sea $y \in X'$ y definamos $w(t) := [1 + \frac{1}{2}\varphi(\dot{y}(t))]^{1/2}$. Obsérvese que

$$\int_{t_0}^{t_1} 2w^2(t)dt = 2(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\dot{y}(t))dt = 2(t_1 - t_0) + D(y) - \varphi(y(t_0))$$

y

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{|\dot{y}(t)|^2}{2w^2(t)}dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\dot{y}(t)|^2}{2 + \varphi(\dot{y}(t))}dt = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\dot{y}(t))dt = D(y) - \varphi(y(t_0)).$$

Además

$$|y(t_0)|^2 = \varphi(y(t_0))(2 + \varphi(y(t_0))) \quad \text{y} \quad \varphi(y(t_0)) \leq D(y)$$

y, por la desigualdad de Schwarz,

$$\left|\int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(t)|dt\right|^2 = \left|\int_{t_0}^{t_1} \frac{|\dot{y}(t)|}{w(t)}w(t)dt\right|^2 \leq \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\dot{y}(t)|^2}{w^2(t)}dt \int_{t_0}^{t_1} w^2(t)dt.$$

De estas relaciones se tiene que

$$\begin{aligned}
\|y\|_1^2 &\leq 2|y(t_0)|^2 + 2\left|\int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(t)|dt\right|^2 \\
&\leq 2\varphi(y(t_0))[2 + \varphi(y(t_0))] + 2[D(y) - \varphi(y(t_0))][2t_1 - 2t_0 + D(y) - \varphi(y(t_0))] \\
&= 2D(y)(2t_1 - 2t_0 + D(y)) + 4\varphi(y(t_0))[1 + \varphi(y(t_0)) - D(y) - t_1 + t_0] \\
&\leq 2D(y)(2 + 2t_1 - 2t_0 + D(y))
\end{aligned}$$

y la desigualdad requerida se cumple con, por ejemplo, $k = 4(1 + t_1 - t_0)$.

Supongamos ahora que (a) o (b) se cumple.

(c): Claramente $\|x_q - x_0\|_0 \leq \|x_q - x_0\|_1$.

(d): Puesto que $w_q^2(t) \geq w_q(t) \geq 1$ c.s., se tiene que

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_1} (w_q(t) - 1)dt \leq \int_{t_0}^{t_1} (w_q^2(t) - 1)dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\dot{x}_q(t) - \dot{x}_0(t))dt \leq D(x_q - x_0).$$

El resultado se satisface en vista de estas desigualdades y el hecho de que

$$\int_{t_0}^{t_1} |w_q(t) - 1|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} (w_q^2(t) - 1)dt - 2\int_{t_0}^{t_1} (w_q(t) - 1)dt$$

(e): Por (a), alguna subsucesión de $\{\dot{x}_q\}$ converge puntualmente c.s. a $\dot{x}_0$. Por el teorema de Egoroff, esta converge a $\dot{x}_0$ casi uniformemente en T. ∎

3.3 Definición: Sean $x_0 \in X'$ y $\{x_q\}$ una sucesión en X' tales que $x_q \neq x_0$ $(q \in \mathbf{N})$. Entonces $d_q := (2D(x_q - x_0))^{1/2} > 0$. Sean

$$w_q(t) := [1 + \tfrac{1}{2}\varphi(\dot{x}_q(t) - \dot{x}_0(t))]^{1/2} \quad (t \in T)\,(c.s.) \quad \text{y} \quad y_q(t) := \frac{x_q(t) - x_0(t)}{d_q} \quad (t \in T).$$

Decimos que $\{x_q\}$ *converge a x_0 en la dirección y_0* si

a. $\lim D(x_q - x_0) = 0$.

b. $\lim w_q(t) = 1$ casi uniformemente en T.

c. $y_0 \in X''$, $\lim y_q(t_0) = y_0(t_0)$, y $\{\dot{y}_q/w_q\}$ converge débilmente en $L^2(T; \mathbf{R}^n)$ a $\dot{y}_0$, i.e.,

$$\lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \left\langle g(t), \frac{\dot{y}_q(t)}{w_q(t)} \right\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle g(t), \dot{y}_0(t) \rangle dt \tag{3.1}$$

para toda función $g \in L^2(T; \mathbf{R}^n)$.

3.4 Lema: *Sean $x_0 \in X'$, $\{x_q\}$ una sucesión en X' con $x_q \neq x_0$ $(q \in \mathbf{N})$, y supongamos que* $\lim D(x_q - x_0) = 0$. *Entonces existen $y_0 \in X''$ y una subsucesión de $\{x_q\}$ que converge a x_0 en la dirección y_0.*

Demostración: Observemos primero que, si w_q y y_q están dadas como en la Definición 3.3, se tiene que

$$\frac{|y_q(t_0)|^2}{c_q^2} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\dot{y}_q(t)|^2}{w_q^2(t)} dt = 1 \tag{3.2}$$

donde $c_q := [1 + \frac{1}{2}\varphi(x_q(t_0) - x_0(t_0))]^{1/2}$. Claramente, $c_q \to 1$, $q \to \infty$. De (3.2), existen una subsucesión de $\{y_q\}$ (que no renombramos), un vector a y una función u_0 en $L^2(T; \mathbf{R}^n)$ tales que $\lim y_q(t_0) = a$ y $\{\dot{y}_q/w_q\}$ converge débilmente en $L^2(T; \mathbf{R}^n)$ a u_0. Definamos

$$y_0(t) := a + \int_{t_0}^{t} u_0(s)ds \qquad (t \in T).$$

La subsucesión correspondiente $\{x_q\}$ modificada de manera que $\lim w_q(t) = 1$ casi uniformemente en T, converge a x_0 en la dirección y_0. ∎

3.5 Lema: *Supongamos que $\{x_q\}$ converge a x_0 en la dirección y_0, y sean w_q y y_q como en la Definición 3.3. Entonces se cumplen:*

a. *Para cualquier función g integrable y acotada en T,*

$$\lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \langle g(t), \dot{y}_q(t)\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle g(t), \dot{y}_0(t)\rangle dt.$$

b. *Si $S \subset T$ es medible y $\lim w_q(t) = 1$ uniformemente en S, entonces para cualquier función $g \in L^2(S; \mathbf{R}^n)$,*

$$\lim_{q\to\infty} \int_S \langle g(t), \dot{y}_q(t)\rangle dt = \int_S \langle g(t), \dot{y}_0(t)\rangle dt.$$

c. $\lim \|y_q - y_0\|_0 = 0$.

d. *Si $r_q, r: T \to \mathbf{R}^n$ son funciones continuas tales que $r_q(t) \to r(t)$ uniformemente en T, entonces*

$$\lim_{q\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} \langle r_q(t), \dot{y}_q(t)\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle r(t), \dot{y}_0(t)\rangle dt.$$

e. *Supongamos que $S \subset T$ es medible, $w_q(t) \to 1$ uniformemente en S, R_q, R son formas cuadráticas con R_q medible y R continua en S, $R_q(t) \to R(t)$ uniformemente en S, y $R(t) \geq 0$ $(t \in S)$. Entonces*

$$\liminf_{q\to\infty} \int_S R_q(t; \dot{y}_q(t))dt \geq \int_S R(t; \dot{y}_0(t))dt.$$

Demostración:

(a): Sea $g \in L^\infty(T; \mathbf{R}^n)$ y notemos que, para toda $q \in \mathbf{N}$,

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle g(t), \dot{y}_q(t)\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle g(t), \frac{\dot{y}_q(t)}{w_q(t)}\right\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle g(t)(w_q(t) - 1), \frac{\dot{y}_q(t)}{w_q(t)}\right\rangle dt.$$

Por la desigualdad de Schwarz junto con (3.2),

$$\left|\int_{t_0}^{t_1}\left\langle g(t)(w_q(t)-1), \frac{\dot{y}_q(t)}{w_q(t)}\right\rangle dt\right|^2 \leq \int_{t_0}^{t_1} |g(t)|^2(w_q(t)-1)^2 dt$$

y entonces, por 3.2d y como g es acotada, tenemos que

$$\lim_{q\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\left\langle g(t)(w_q(t)-1), \frac{\dot{y}_q(t)}{w_q(t)}\right\rangle dt = 0.$$

De esta manera, el resultado se satisface por (3.1).

(b): Escogemos q_0 tal que $q \geq q_0 \Rightarrow w_q(t) \leq 2$ en S. Entonces (b) se cumple cuando $g \in L^2(S;\mathbf{R}^n)$.

(c): Claramente y_q converge puntualmente a y_0 ya que $y_q(t_0) \to y_0(t_0)$ y, por (a),

$$\lim_{q\to\infty}\int_{t_0}^{t} \dot{y}_q(s)ds = \int_{t_0}^{t} \dot{y}_0(s)ds \qquad (t \in T).$$

Para probar que esta convergencia es uniforme observamos que, dado $S \subset T$ medible, tenemos por (3.2) que

$$\left|\int_S \dot{y}_q(t)dt\right|^2 \leq \int_S \frac{|\dot{y}_q(t)|^2}{w_q^2(t)}dt \int_S w_q^2(t)dt \leq \int_S w_q^2(t)dt = m(S) + \int_S (w_q^2(t)-1)dt \tag{3.3}$$

donde $m(S)$ denota la medida de Lebesgue de S. Dada $\epsilon > 0$, sea $q_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$q \geq q_0 \;\Rightarrow\; \int_{t_0}^{t_1}(w_q^2(t)-1)dt < \frac{\epsilon}{2}$$

y sea $\delta \in (0, \epsilon/2)$ tal que, para toda $q < q_0$,

$$m(S) < \delta \;\Rightarrow\; \left|\int_S \dot{y}_q(t)dt\right| < \sqrt{\epsilon}.$$

Tenemos entonces que $m(S) < \delta \Rightarrow |\int_S \dot{y}_q(t)dt| < \sqrt{\epsilon}$ para toda $q \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, la sucesión de integrales $\{\int_S \dot{y}_q(t)dt\}$, y en consecuencia también la sucesión de funciones $\{y_q\}$, son equi-absolutamente continuas en T. La convergencia $y_q(t) \to y_0(t)$ es por lo tanto uniforme en T.

(d): Por (3.3) y 3.2d, existe $M > 0$ tal que

$$\left|\int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}_q(t)|dt\right|^2 \leq \int_{t_0}^{t_1} w_q^2(t)dt \leq M \qquad (q \in \mathbf{N}).$$

Puesto que $r_q(t) \to r(t)$ uniformemente en T,

$$\lim_{q\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\langle r_q(t)-r(t),\dot y_q(t)\rangle dt = 0.$$

Por (a),

$$\lim_{q\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\langle r_q(t),\dot y_q(t)\rangle dt = \lim_{q\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\langle r(t),\dot y_q(t)\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1}\langle r(t),\dot y_0(t)\rangle dt.$$

(e): Escogemos q_0 suficientemente grande de forma que, para toda $q \geq q_0$ y para toda $t \in S$,

$$[R_q^{ij}(t)-R^{ij}(t)]^2 w_q^4(t) \leq 1 \qquad (i,j=1,\ldots,n).$$

En consecuencia

$$M_q := \sup\left[\sum_{i,j=1}^{n}[R_q^{ij}(t)-R^{ij}(t)]^2 w_q^4(t)\right]^{1/2}$$

es finito para toda $q \geq q_0$. Usando la desigualdad de Schwarz tenemos que, para toda $t \in S$ y para toda $q \geq q_0$,

$$|R_q(t;\dot y_q(t)) - R(t;\dot y_q(t))| \leq M_q\frac{|\dot y_q(t)|^2}{w_q^2(t)}.$$

Puesto que $R_q^{ij}(t) \to R^{ij}(t)$ y $w_q(t) \to 1$, ambos uniformemente en S, se tiene que $M_q \to 0$. Por lo tanto, por (3.2),

$$\liminf_{q\to\infty}\int_S R_q(t;\dot y_q(t))dt = \liminf_{q\to\infty}\int_S R(t;\dot y_q(t))dt.$$

Pero

$$R(t;\dot y_q(t)) = R(t;\dot y_0(t)) + 2\langle \dot y_q(t)-\dot y_0(t), R(t)\dot y_0(t)\rangle + R(t;\dot y_q(t)-\dot y_0(t)).$$

Por (b),

$$\lim_{q\to\infty}\int_S\langle R(t)\dot y_0(t),\dot y_q(t)-\dot y_0(t)\rangle dt = 0.$$

En consecuencia

$$\liminf_{q\to\infty}\int_S R_q(t;\dot y_q(t))dt \geq \int_S R(t;\dot y_0(t))dt + \liminf_{q\to\infty}\int_S R(t;\dot y_q(t)-\dot y_0(t))dt.$$

Puesto que el último término es no negativo, el resultado se cumple. ∎

4 Reforzamiento de la condición de Weierstrass: primer enfoque

En esta y en las siguientes dos secciones demostraremos algunos teoremas de suficiencia. En cada uno de ellos una de las hipótesis fundamentales se refiere a un nuevo reforzamiento de la condición necesaria de Weierstrass. En los tres casos las condiciones de suficiencia que se presentan pueden resultar, como se mencionó en la introducción, más fáciles de verificar que las condiciones conocidas en la literatura.

El primer teorema que presentamos se obtiene como resultado de notar que la demostración proporcionada por Hestenes [12] sigue siendo válida si, en lugar de suponer las condiciones reforzadas de Legendre y Weierstrass usuales, uno impone una condición de no negatividad a $\mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}(t))$ para toda $t \in T$ y toda $x \in X_e(A) \cap N_0(x_0; \epsilon)$ sobre la trayectoria de interés x_0. Este enfoque de suficiencia tiene una ventaja clara sobre el enfoque clásico puesto que la evaluación de la función exceso se hace sobre $(t, x(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}(t))$ en lugar de $(t, x, \dot{x}, u)$ con (t, x, u) admisible y $(t, x, \dot{x})$ en una vecindad débil de x_0.

Para cualesquiera $h, \epsilon > 0$ consideremos el conjunto

$$G(A; h, \epsilon) := \{x_0 \in X_e(A) \mid \mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}(t)) \geq h\varphi(\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)) \quad \text{para toda } t \in T \text{ y } x \in X_e(A) \cap N_0(x_0; \epsilon)\}$$

donde (ver Sección 3), para toda $c \in \mathbf{R}^n$, $\varphi(c) = (1 + |c|^2)^{1/2} - 1$.

4.1 Teorema: *Sea $x_0 \in X_e(A) \cap C^1$. Si existen $h, \epsilon > 0$ tales que x_0 pertenece a E, H' y $G(A; h, \epsilon)$, entonces x_0 es un mínimo fuerte estricto de* $\mathrm{P}(A)$.

Demostración: A lo largo de la demostración modificaremos la definición de X y la reemplazaremos por la clase de todas las funciones absolutamente continuas que mapean T a $\mathbf{R}^n$. El espacio Y de variaciones admisibles será el espacio de todos los arcos $y \in X$ con derivadas $\dot{y}$ c.s. en $L^2(T; \mathbf{R}^n)$ que satisfacen $y(t_0) = y(t_1) = 0$. Asimismo, trabajaremos con la norma fuerte en X:

$$\|x\| := \|x\|_0 = \sup\{|x(t)| : t \in T\} \qquad (x \in X).$$

De este modo, estamos suponiendo que $x_0 \in X_e(A)$ es de clase C^1 y pertenece a E, H' y $G(A; h, \epsilon)$. El teorema quedará demostrado si probamos la existencia de $\rho, \delta > 0$ tales que, para toda $x \in X_e(A)$ con $\|x - x_0\| < \rho$,

$$I(x) \geq I(x_0) + \delta D(x - x_0) \tag{4.1}$$

donde (ver Sección 3), para toda $y \in X$, $D(y) = \varphi(y(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(\dot{y}(t))dt$.

Observamos primero que, para toda $x \in X(A)$,

$$I(x) = I(x_0) + I'(x_0; x - x_0) + K(x_0; x) + \mathcal{E}^*(x_0; x) \tag{4.2}$$

donde

$$\mathcal{E}^*(x_0; x) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}(t))dt,$$

$$K(x_0; x) = \int_{t_0}^{t_1} \{M(t, x(t)) + \langle \dot{x}(t) - \dot{x}_0(t), N(t, x(t))\rangle\}dt,$$

$\mathcal{E}$ es la función exceso de Weierstrass, y M y N están definidas por

$$M(t, y) := L(t, y, \dot{x}_0(t)) - L(\tilde{x}_0(t)) - \langle y - x_0(t), L_x(\tilde{x}_0(t))\rangle,$$

$$N(t, y) := L_{\dot{x}}(t, y, \dot{x}_0(t)) - L_{\dot{x}}(\tilde{x}_0(t)).$$

Por el teorema de Taylor existe $\mu > 0$ tal que, para toda $(t, y) \in T_0(x_0; \mu)$,

$$M(t, y) = \frac{1}{2}\langle y - x_0(t), P(t, y)(y - x_0(t))\rangle, \qquad N(t, y) = Q(t, y)(y - x_0(t)) \tag{4.3}$$

donde

$$P(t, y) := 2\int_0^1 (1 - \lambda)L_{xx}(t, x_0(t) + \lambda(y - x_0(t)), \dot{x}_0(t))d\lambda,$$

$$Q(t, y) := \int_0^1 L_{\dot{x}x}(t, x_0(t) + \lambda(y - x_0(t)), \dot{x}_0(t))d\lambda.$$

También, como se demostrará después, existen $\delta, \alpha > 0$ tales que

$$\mathcal{E}^*(x_0; x) \geq hD(x - x_0), \qquad |K(x_0; x)| \leq \alpha\|x - x_0\|[1 + D(x - x_0)] \tag{4.4}$$

para toda $x \in X_e(A)$ con $\|x - x_0\| < \delta$. De hecho, dada $x \in X_e(A)$ con $\|x - x_0\| < \epsilon$,

$$\mathcal{E}^*(x_0; x) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}(t))dt \geq h\int_{t_0}^{t_1} \varphi(\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t))dt = hD(x - x_0).$$

Por otro lado, por (4.3), podemos escoger $\alpha' > 0$ tal que, para toda $x \in X_e(A)$ con $\|x - x_0\| < \mu$ y $t \in T$,

$$|M(t, x(t)) + \langle \dot{x}(t) - \dot{x}_0(t), N(t, x(t))\rangle| \leq \alpha' |x(t) - x_0(t)|(1 + |\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)|^2)^{1/2}.$$

Definiendo $\alpha := \max\{\alpha', \alpha'(t_1 - t_0)\}$ se tiene que

$$|K(x_0; x)| \leq \alpha' \|x - x_0\| \int_{t_0}^{t_1} [1 + \varphi(\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t))]dt \leq \alpha \|x - x_0\| [1 + D(x - x_0)]$$

y por lo tanto (4.4) se cumple con $\delta = \min\{\epsilon, \mu\}$.

Supongamos que la desigualdad (4.1) no se satisface. Entonces, para toda $q \in \mathbf{N}$, existe $x_q \in X_e(A)$ tal que

$$\|x_q - x_0\| < \delta_q, \qquad I(x_q) - I(x_0) < \frac{D(x_q - x_0)}{q} \tag{4.5}$$

donde $\delta_q = \min\{\delta, 1/q\}$. Nuestro objetivo es probar que $x_0 \notin H'$.

Claramente $x_q \neq x_0$ ($q \in \mathbf{N}$). Como $x \in E$, por (4.2) y (4.4),

$$I(x_q) - I(x_0) = K(x_0; x_q) + \mathcal{E}^*(x_0; x_q) \geq -\alpha \|x_q - x_0\| + D(x_q - x_0)(h - \alpha \|x_q - x_0\|)$$

y entonces, por (4.5),

$$D(x_q - x_0)\left(h - \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{q}\right) < \frac{\alpha}{q} \qquad (q \in \mathbf{N}).$$

En consecuencia $\lim D(x_q - x_0) = 0$. Por el Lema 3.4, existen una subsucesión (nuevamente denotada por $\{x_q\}$) y $y_0 \in X''$ tales que $\{x_q\}$ converge a x_0 en la dirección y_0.

Afirmamos que $y_0 \in Y$, $I''(x_0; y_0) \leq 0$, y $y_0 \not\equiv 0$ en T. Para demostrarlo, definamos

$$d_q := (2D(x_q - x_0))^{1/2}, \qquad y_q(t) := \frac{x_q(t) - x_0(t)}{d_q} \quad (t \in T).$$

En vista del Lema 3.5c y el hecho de que $y_q(t_0) = y_q(t_1) = 0$ ($q \in \mathbf{N}$), se tiene que $y_0 \in Y$. Ahora, por (4.3) y el Lema 3.5c,

$$\lim_{q \to \infty} \frac{M(t, x_q(t))}{d_q^2} = \lim_{q \to \infty} \frac{1}{2} \langle y_q(t), P(t, x_q(t)) y_q(t)\rangle = \frac{1}{2} \langle y_0(t), L_{xx}(\tilde{x}_0(t)) y_0(t)\rangle$$

$$\lim_{q \to \infty} \frac{N(t, x_q(t))}{d_q} = \lim_{q \to \infty} Q(t, x_q(t)) y_q(t) = L_{\dot{x}x}(\tilde{x}_0(t)) y_0(t)$$

ambos uniformemente en T. Junto con el Lema 3.5d esto implica que

$$\lim_{q\to\infty}\frac{K(x_0;x_q)}{d_q^2}=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\{\langle y_0(t),L_{xx}(\tilde{x}_0(t))y_0(t)\rangle+2\langle\dot{y}_0(t),L_{\dot{x}x}(\tilde{x}_0(t))y_0(t)\rangle\}dt. \tag{4.6}$$

Por otro lado, por (4.2) y (4.5),

$$0\geq\liminf_{q\to\infty}\frac{I(x_q)-I(x_0)}{d_q^2}\geq\lim_{q\to\infty}\frac{K(x_0;x_q)}{d_q^2}+\liminf_{q\to\infty}\frac{\mathcal{E}^*(x_0;x_q)}{d_q^2} \tag{4.7}$$

y entonces la desigualdad $I''(x_0;y_0)\leq 0$ se cumplirá si mostramos que

$$\liminf_{q\to\infty}\frac{\mathcal{E}^*(x_0;x_q)}{d_q^2}\geq\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\langle\dot{y}_0(t),L_{\dot{x}\dot{x}}(\tilde{x}_0(t))\dot{y}_0(t)\rangle dt. \tag{4.8}$$

Con la idea de probar esta desigualdad, sea $S\subset T$ medible y supongamos que $\{\dot{x}_q(t)\}$ converge uniformemente a $\dot{x}_0(t)$ en S. Por el teorema de Taylor existe q_0 en $\mathbf{N}$ tal que, para toda $q\geq q_0$ y para toda $t\in S$,

$$\frac{1}{d_q^2}\mathcal{E}(t,x_q(t),\dot{x}_0(t),\dot{x}_q(t))=\frac{1}{2}\langle\dot{y}_q(t),R_q(t)\dot{y}_q(t)\rangle$$

donde

$$R_q(t):=2\int_0^1(1-\lambda)L_{\dot{x}\dot{x}}(t,x_q(t),\dot{x}_0(t)+\lambda[\dot{x}_q(t)-\dot{x}_0(t)])d\lambda.$$

Claramente, $\lim R_q(t)=R(t):=L_{\dot{x}\dot{x}}(\tilde{x}_0(t))$ uniformemente en S. También, puesto que $x_0\in C^1\cap H'$ y L es $C^2(A)$ con respecto a x y $\dot{x}$, tenemos que $x_0\in\mathcal{L}$ (para una demostración detallada ver, por ejemplo, [14]). Por el Lema 3.5e,

$$\liminf_{q\to\infty}\int_S\langle\dot{y}_q(t),R_q(t)\dot{y}_q(t)\rangle dt\geq\int_S\langle\dot{y}_0(t),R(t)\dot{y}_0(t)\rangle dt$$

y entonces, puesto que x_0 pertenece a $G(A;h,\epsilon)$,

$$\liminf_{q\to\infty}\frac{\mathcal{E}^*(x_0;x_q)}{d_q^2}\geq\frac{1}{2}\int_S\langle\dot{y}_0(t),L_{\dot{x}\dot{x}}(\tilde{x}_0(t))\dot{y}_0(t)\rangle dt.$$

Como S se puede escoger de forma que difiera de T por un conjunto de medida arbitraria, esta desigualdad se cumple cuando $S=T$ y, por lo tanto, (4.8) se cumple. Falta demostrar que $y_0\not\equiv 0$ en T. Pero, en vista de (4.7) y la primera relación de (4.4), tenemos que

$$\lim_{q\to\infty}\frac{K(x_0;x_q)}{d_q^2}+\frac{h}{2}\leq 0.$$

Por (4.6), la suposición $y_0 \equiv 0$ en T contradice la positividad de h. Concluimos que $x_0 \notin H'$ y la demostración está completa. ▮

4.2 Nota: Se pueden obtener fácilmente condiciones suficientes para mínimos locales débiles por medio del teorema anterior. Para ver esto nótese que, si en lugar de la hipótesis $G(A; h, \epsilon)$, imponemos la condición $G(T_1(x_0; \epsilon) \cap A; h, \epsilon)$ en el Teorema 4.1, entonces x_0 será un mínimo fuerte estricto de $\mathrm{P}(T_1(x_0; \epsilon) \cap A)$. En otras palabras, para alguna $\delta > 0$, $I(x_0) < I(x)$ para toda $x \neq x_0$ con $x \in X_e(T_1(x_0; \epsilon) \cap A)$ y $\|x - x_0\|_0 < \delta$. Tomando $\mu := \min\{\epsilon, \delta\}$, tenemos que $I(x_0) < I(x)$ para toda $x \neq x_0$ con $x \in X_e(A)$ y $\|x - x_0\|_1 < \mu$. Esto implica que x_0 es un mínimo débil estricto de $\mathrm{P}(A)$.

4.3 Nota: En [12] se demuestra que, si x_0 es una trayectoria no singular en $W(A; \epsilon)$ para alguna $\epsilon > 0$, entonces existen $\delta, h > 0$ tales que $\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) \geq h\varphi(u - \dot{x})$ para toda $(t, x, \dot{x}, u) \in T \times \mathbf{R}^{3n}$ con $(t, x, \dot{x}) \in T_1(x_0; \delta)$ y $(t, x, u) \in A$. De esta manera el teorema de suficiencia clásico (Teorema 2.2) es un corolario del Teorema 4.1.

5 Reforzamiento de la condición de Weierstrass: segundo enfoque

En la sección anterior debilitamos la condición reforzada de Weierstrass clásica al imponer no negatividad de la función exceso sobre $(t, x(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}(t))$ en lugar de $(t, x, \dot{x}, u)$ con (t, x, u) admisible y $(t, x, \dot{x})$ en una vecindad débil de x_0. El segundo enfoque que presentamos modifica la condición clásica de suficiencia suponiendo ciertas hipótesis de continuidad uniforme en las funciones que delimitan el problema.

De ahora en adelante supondremos que L es continua en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, y que para toda $t \in T$ la función $L(t, \cdot, \cdot)$ es C^2 en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Definamos, para toda $h > 0$,

$$S(A; h) := \{x_0 \in X_e(A) \mid \mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u) \geq h\varphi(u - \dot{x}_0(t)) \text{ para toda } (t, u) \in T \times \mathbf{R}^n \text{ con } (t, x_0(t), u) \in A\}.$$

5.1 Teorema: *Supongamos que $x_0 \in X_e(A) \cap C^1$ y $L_{\dot{x}\dot{x}}$ es uniformemente continua. Si*

a. *$x_0 \in E \cap H' \cap S(A; h)$ para alguna $h > 0$;*

b. *Para toda $\eta > 0$ existe $\mu > 0$ tal que, para toda $x \in X_e(A)$ con $\|x - x_0\| < \mu$,*

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} \{\mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}(t)) - \mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}(t))\} dt \right| < \eta,$$

entonces x_0 es un mínimo fuerte estricto de $\mathrm{P}(A)$.

Demostración: Procedamos como en los primeros pasos de la demostración del Teorema 4.1. Queremos probar la existencia de $\rho, \delta > 0$ tales que, para toda $x \in X_e(A)$ con $\|x - x_0\| < \rho$,

$$I(x) \geq I(x_0) + \delta D(x - x_0).$$

La demostración consiste en mostrar que, si suponemos lo contrario, i.e., para toda $\rho, \delta > 0$ existe $x \in X_e(A)$ con $\|x - x_0\| < \rho$ tal que $I(x) < I(x_0) + \delta D(x - x_0)$, entonces $x_0 \notin H'$.

Como en la Sección 4 tenemos que, para toda $x \in X(A)$,

$$I(x) = I(x_0) + I'(x_0; x - x_0) + K(x_0; x) + \mathcal{E}^*(x_0; x)$$

donde

$$\mathcal{E}^*(x_0; x) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}(t))dt,$$

$$K(x_0; x) = \int_{t_0}^{t_1} \{M(t, x(t)) + \langle \dot{x}(t) - \dot{x}_0(t), N(t, x(t))\rangle\}dt.$$

Por el teorema de Taylor, existe $\mu > 0$ tal que, para toda $(t, y) \in T_0(x_0; \mu)$,

$$M(t, y) = \frac{1}{2}\langle y - x_0(t), P(t, y)(y - x_0(t))\rangle, \qquad N(t, y) = Q(t, y)(y - x_0(t))$$

donde

$$P(t, y) := 2\int_0^1 (1 - \lambda)L_{xx}(t, x_0(t) + \lambda(y - x_0(t)), \dot{x}_0(t))d\lambda,$$

$$Q(t, y) := \int_0^1 L_{\dot{x}x}(t, x_0(t) + \lambda(y - x_0(t)), \dot{x}_0(t))d\lambda.$$

Ahora, como $x_0 \in S(A; h)$, tenemos que

$$\mathcal{G}(x_0; x) := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}(t))dt \geq hD(x - x_0) \qquad (x \in X_e(A)). \tag{5.1}$$

También, como se hizo en la Sección 4, podemos escoger $\alpha > 0$ tal que, para toda $x \in X_e(A)$ con $\|x - x_0\| < \mu$

$$|K(x_0; x)| \leq \alpha\|x - x_0\|[1 + D(x - x_0)]. \tag{5.2}$$

Además, para toda $q \in \mathbf{N}$ existe $0 < \delta_q < \min\{\mu, 1/q\}$, tal que

$$\|x - x_0\| < \delta_q \qquad \Rightarrow \qquad |\mathcal{E}^*(x_0; x) - \mathcal{G}(x_0; x)| < \frac{\alpha}{q}. \tag{5.3}$$

Por la hipótesis de reducción al absurdo mencionada anteriormente, para toda $q \in \mathbf{N}$ existe $x_q \in X_e(A)$ tal que

$$\|x_q - x_0\| < \delta_q, \qquad I(x_q) - I(x_0) < \frac{D(x_q - x_0)}{q}. \tag{5.4}$$

Queremos demostrar que $x_0 \notin H'$. Claramente $x_q \neq x_0$ $(q \in \mathbf{N})$. Por (4.2), y (5.1)-(5.3),

$$\begin{aligned} I(x_q) - I(x_0) &= K(x_0; x_q) + \mathcal{E}^*(x_0; x_q) \\ &\geq K(x_0; x_q) + \mathcal{G}(x_0; x_q) - \frac{\alpha}{q} \\ &\geq -\alpha\|x_q - x_0\| + D(x_q - x_0)(h - \alpha\|x_q - x_0\|) - \frac{\alpha}{q} \end{aligned}$$

y entonces, por (5.4),

$$D(x_q - x_0)\left(h - \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{q}\right) < \frac{2\alpha}{q} \quad (q \in \mathbf{N}).$$

En consecuencia $\lim D(x_q - x_0) = 0$. Por el Lema 3.4, existen una subsucesión (nuevamente denotada por $\{x_q\}$) y $y_0 \in X''$ tales que $\{x_q\}$ converge a x_0 en la dirección y_0.

Afirmamos que $y_0 \in Y \setminus \{0\}$ y $I''(x_0; y_0) \leq 0$. Para demostrarlo, definamos

$$d_q := (2D(x_q - x_0))^{1/2}, \qquad y_q(t) := \frac{x_q(t) - x_0(t)}{d_q} \quad (t \in T).$$

Puesto que y_q converge puntualmente a y_0 (ver Lema 3.5c) y $y_q(t_0) = y_q(t_1) = 0$, tenemos que $y_0 \in Y$. Por (4.3) y el Lema 3.5c, se tiene que

$$\lim_{q\to\infty} \frac{M(t, x_q(t))}{d_q^2} = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{2}\langle y_q(t), P(t, x_q(t))y_q(t)\rangle = \frac{1}{2}\langle y_0(t), L_{xx}(\tilde{x}_0(t))y_0(t)\rangle$$

$$\lim_{q\to\infty} \frac{N(t, x_q(t))}{d_q} = \lim_{q\to\infty} Q(t, x_q(t))y_q(t) = L_{\dot{x}x}(\tilde{x}_0(t))y_0(t)$$

ambos uniformemente en T. Junto con el Lema 3.5d, esto implica que

$$\lim_{q\to\infty} \frac{K(x_0; x_q)}{d_q^2} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \{\langle y_0(t), L_{xx}(\tilde{x}_0(t))y_0(t)\rangle + 2\langle \dot{y}_0(t), L_{\dot{x}x}(\tilde{x}_0(t))y_0(t)\rangle\}dt. \tag{5.5}$$

Por otro lado, por (4.2) y (5.4), tenemos que

$$0 \geq \liminf_{q\to\infty} \frac{I(x_q) - I(x_0)}{d_q^2} \geq \lim_{q\to\infty} \frac{K(x_0; x_q)}{d_q^2} + \liminf_{q\to\infty} \frac{\mathcal{E}^*(x_0; x_q)}{d_q^2} \tag{5.6}$$

y entonces la desigualdad $I''(x_0; y_0) \leq 0$ se cumplirá si mostramos que

$$\liminf_{q\to\infty} \frac{\mathcal{E}^*(x_0; x_q)}{d_q^2} \geq \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{y}_0(t), L_{\dot{x}\dot{x}}(\tilde{x}_0(t))\dot{y}_0(t)\rangle dt. \tag{5.7}$$

Para demostrarlo, sea $\Gamma \subset T$ medible y notemos que, por el teorema de Taylor (recordamos que $L_{\dot{x}\dot{x}}$ está definida en todo el espacio $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$) para casi toda $t \in \Gamma$, se tiene que

$$\frac{1}{d_q^2}\mathcal{E}(t, x_q(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}_q(t)) = \frac{1}{2}\langle \dot{y}_q(t), R_q(t)\dot{y}_q(t)\rangle$$

donde

$$R_q(t) := 2\int_0^1 (1 - \lambda)L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_q(t), \dot{x}_0(t) + \lambda[\dot{x}_q(t) - \dot{x}_0(t)])d\lambda.$$

Sea

$$S_q(t) := 2\int_0^1 (1-\lambda)L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t) + \lambda[\dot{x}_q(t) - \dot{x}_0(t)])d\lambda$$

y notamos que, para casi toda $t \in \Gamma$

$$\frac{1}{d_q^2}\mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}_q(t)) = \frac{1}{2}\langle \dot{y}_q(t), S_q(t)\dot{y}_q(t)\rangle.$$

Sea $\beta > 0$. Puesto que $L_{\dot{x}\dot{x}}$ es uniformemente continua y $x_q(t) \to x_0(t)$ uniformemente en T, existe $q_0 \in \mathbf{N}$ tal que, para toda $q \geq q_0$ y para casi toda $t \in \Gamma$,

$$\|R_q(t) - S_q(t)\|_{\mathcal{L}} \leq \beta$$

donde $\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup\{|Tx| : |x| \leq 1\}$ denota la norma usual en el espacio de todos los operadores lineales $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Por la desigualdad de Schwarz, el Lema 3.2d, y notando que

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{|\dot{y}_q(t)|^2}{w_q^2(t)}dt = 1,$$

tenemos

$$\left|\int_\Gamma \langle \dot{y}_q(t), (R_q(t) - S_q(t))\dot{y}_q(t)\rangle dt\right| \leq \beta\Big(\int_\Gamma \frac{|\dot{y}_q(t)|^2}{w_q^2(t)}dt \int_\Gamma w_q^2(t)dt\Big)^{1/2} < \beta\sigma$$

para alguna $\sigma > 0$ (independiente de β) y toda $q \geq q_0$. De esta manera,

$$\liminf_{q\to\infty} \int_\Gamma \langle \dot{y}_q(t), R_q(t)\dot{y}_q(t)\rangle dt = \liminf_{q\to\infty} \int_\Gamma \langle \dot{y}_q(t), S_q(t)\dot{y}_q(t)\rangle dt. \tag{5.8}$$

Ahora, sea $S \subset T$ medible y supongamos que $\{\dot{x}_q(t)\}$ converge uniformemente a $\dot{x}_0(t)$ en S. Claramente, $\lim R_q(t) = R(t) := L_{\dot{x}\dot{x}}(\tilde{x}_0(t))$ uniformemente en S. Por (5.8), el Lema 3.5e, y puesto que $x_0 \in S(A; h)$

$$\liminf_{q\to\infty} \frac{\mathcal{E}^*(x_0; x_q)}{d_q^2} \geq \frac{1}{2}\int_S \langle R(t)\dot{y}_0(t), \dot{y}_0(t)\rangle dt.$$

Como S se puede escoger de manera que difiera de T por un conjunto de medida arbitraria, esta desigualdad se cumple cuando $S = T$ y esto establece (5.7). Falta demostrar que $y_0 \not\equiv 0$ en T. Pero en vista de (5.1), (5.6) y (5.8), tenemos que

$$0 \geq \lim_{q\to\infty} \frac{K(x_0; x_q)}{d_q^2} + \liminf_{q\to\infty} \frac{\mathcal{G}(x_0; x_q)}{d_q^2} \geq \lim_{q\to\infty} \frac{K(x_0; x_q)}{d_q^2} + \frac{h}{2}.$$

Por (5.5), la suposición $y_0 \equiv 0$ en T contradice la positividad de h. En consecuencia $x_0 \notin H'$ y la demostración está completa. ▮

5.2 Nota: Es fácil verificar que si A está acotado con respecto al conjunto al que pertenecen las derivadas, entonces la hipótesis de continuidad uniforme de $L_{\dot{x}\dot{x}}$ no es necesaria y, además, la condición (b) del Teorema 5.1 se satisface. De esta manera, obtenemos el siguiente resultado.

5.3 Corolario: *Sea $x_0 \in X_e(A) \cap C^1$ y supongamos que A está acotado con respecto a $\dot{x}$. Si, para alguna $h > 0$, $x_0 \in E \cap H' \cap S(A; h)$, entonces x_0 es un mínimo fuerte estricto de* $\mathrm{P}(A)$.

6 Reforzamiento de la condición de Weierstrass: tercer enfoque

Consideramos ahora un resultado de suficiencia basado en un "método de expansión" para el que no se requiere que el arco de interés sea suave, no singular, o posea una segunda variación positiva.

Un enfoque similar, basado en minimizar funciones convexas (suponiendo, por ejemplo, que $L(t,x,\dot{x})$ es convexa con respecto a $(x,\dot{x})$ en $(x_0(t),\dot{x}_0(t))$ para cada $t \in T$) se puede encontrar en, por ejemplo, [9, 11, 25]. El teorema siguiente, sin embargo, muestra explícitamente cómo esta técnica se puede utilizar para reforzar la condición necesaria de Weierstrass y hacerla suficiente para la optimalidad así como, a través de una simple modificación del dominio donde se satisface, asegurar la existencia de un mínimo local o global. Más aún, el resultado sigue siendo válido para cualquier subconjunto $A \subset T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ (donde las funciones que aparecen estén bien definidas) sin ningún requerimiento de que éste sea abierto o convexo.

Para toda $(t,x,\dot{x},v,u) \in T \times \mathbf{R}^{4n}$ definamos

$$\mathcal{K}(t,x,\dot{x},v,u) := L(t,x,u) - L(t,v,u) + \langle v - x, L_x(t,x,\dot{x})\rangle$$

y consideremos el conjunto

$$R(A) := \{x_0 \in X(A) \mid \mathcal{E}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t),u) \geq \mathcal{K}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t),x,u) \quad \text{para toda } (t,x,u) \in A\}.$$

6.1 Teorema: *Si $x_0 \in X_e(A) \cap R(A)$ y $I'(x_0;y) \geq 0$ para toda $y \in Y$, entonces x_0 resuelve* $\mathrm{P}(A)$.

Demostración: Sea $x \in X_e(A)$. Como $x_0 \in R(A)$ tenemos que

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_1} \{\mathcal{E}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t),\dot{x}(t)) - \mathcal{K}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t),x(t),\dot{x}(t))\}dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_1} \{\mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \dot{x}(t)) - L(t, x_0(t), \dot{x}(t)) + L(\tilde{x}(t)) \\
&\qquad\qquad - \langle x(t) - x_0(t), L_x(\tilde{x}_0(t))\rangle\}dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \{L(\tilde{x}(t)) - L(\tilde{x}_0(t)) - \langle x(t) - x_0(t), L_x(\tilde{x}_0(t))\rangle \\
&\qquad\qquad - \langle \dot{x}(t) - \dot{x}_0(t), L_{\dot{x}}(\tilde{x}_0(t))\rangle\}dt \\
&= I(x) - I(x_0) - I'(x_0; x - x_0).
\end{aligned}
$$

Pero $x - x_0 \in Y$ y, por lo tanto, $I'(x_0; x - x_0) \geq 0$. Concluimos que $I(x_0) \leq I(x)$. ∎

6.2 Nota: Se pueden obtener condiciones suficientes para un mínimo fuerte o débil por medio del teorema anterior reemplazando A por $T_1(x_0; \epsilon) \cap A$ o $(T_0(x_0; \epsilon) \times \mathbf{R}^n) \cap A$ respectivamente.

7 Ejemplos

En esta sección se proporcionan algunos ejemplos simples que ilustran la utilidad de los teoremas de suficiencia dados en las Secciones 4, 5 y 6. En todos los ejemplos que siguen, al menos que se especifique algo distinto, $A = T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Empecemos con dos problemas para los que uno puede inmediatamente verificar la condición $G(A; h, \epsilon)$ para cierto extremo, pero puede ser mucho más complicado demostrar que este pertenece a $W(A; \epsilon)$.

7.1 Ejemplo: Minimizar $I(x) = \int_{-1}^{1}\{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)} - x^2(t) - 2tx(t)\dot{x}(t) - 1\}dt$ sujeto a $x(-1) = x(1) = 0$.

Aquí $L(t, x, \dot{x}) = \sqrt{1+\dot{x}^2} - x^2 - 2tx\dot{x} - 1$, $T = [-1, 1]$, $\xi_0 = \xi_1 = 0$.

Sea $x_0 \equiv 0$. Observemos primero que, para cualquier $(t, x, \dot{x}) \in A$,

$$L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} - 2tx \quad \text{y} \quad L_x(t, x, \dot{x}) = -2t\dot{x} - 2x$$

y, por lo tanto, $x_0 \in E$. Ahora, definiendo $\varphi(c) := \sqrt{1+c^2} - 1$ $(c \in \mathbf{R})$, se tiene que

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) = \varphi(u) - \varphi(\dot{x}) - (u - \dot{x})\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$$

y, por lo tanto, $\mathcal{E}(t, x, \dot{x}_0(t), u) = \varphi(u)$, lo que prueba que $x_0 \in G(A; h, \epsilon)$ para cualquier $\epsilon > 0$ y $h = 1$. Finalmente, notemos que

$$I''(x_0; y) = \int_{-1}^{1}\{\dot{y}^2(t) - 4ty(t)\dot{y}(t) - 2y^2(t)\}dt = \int_{-1}^{1}\dot{y}^2(t)dt$$

lo que implica que $x_0 \in H'$. Por el Teorema 4.1, x_0 es un mínimo fuerte estricto de $\mathrm{P}(A)$.

7.2 Ejemplo: Minimizar
$I(x) = \int_{-1}^{1}\{\cosh(\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t)) - \dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) + \cosh(x_1(t) + x_2(t))\}dt$ sujeto a $x(-1) = x(1) = 0$.

En este caso, $L(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \cosh(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - \dot{x}_1\dot{x}_2 + \cosh(x_1 + x_2)$, $T = [-1, 1]$, $\xi_0 = \xi_1 = 0$ y $A = T \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$.

Sea $x_0 \equiv 0$. Obsérvese que, para cualquier $(t, x, \dot{x}) \in A$,

$$L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = (\operatorname{senh}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - \dot{x}_2, \operatorname{senh}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - \dot{x}_1); \ L_x = (\operatorname{senh}(x_1 + x_2), \operatorname{senh}(x_1 + x_2))$$

y por lo tanto $x_0 \in E$. Como

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) &= \cosh(u_1 + u_2) - u_1u_2 - \cosh(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \dot{x}_1\dot{x}_2 \\ &\quad - (u_1 - \dot{x}_1)(\operatorname{senh}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - \dot{x}_2) - (u_2 - \dot{x}_2)(\operatorname{senh}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - \dot{x}_1),\end{aligned}$$

tenemos que

$$\mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u) = \cosh(u_1 + u_2) - u_1u_2 - 1 \geq \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} = \frac{1}{2}|u|^2 \geq \varphi(u)$$

lo que muestra que $x_0 \in G(A; h, \epsilon)$ para cualquier $\epsilon > 0$ y $h = 1$. Finalmente, es fácil verificar que $x_0 \in H'$ y así, por el Teorema 4.1, x_0 es un mínimo fuerte estricto de P(A).

7.3 Ejemplo: Minimizar $I(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - \dot{x}^3(t)\}dt$ sujeto a $x(0) = x(1) = 0$.

Aquí $L(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 - \dot{x}^3$, $T = [0, 1]$, $\xi_0 = \xi_1 = 0$.

Tenemos que $L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 2\dot{x} - 3\dot{x}^2$ y entonces $x_0 \equiv 0$ pertenece a E. Ahora,

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) = u^2 - u^3 - 2u\dot{x} + 3u\dot{x}^2 + \dot{x}^2 - 2\dot{x}^3$$

y por lo tanto $\mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u) = u^2(1 - u)$. También, $I''(x_0; y) = 2\int_0^1 \dot{y}^2(t)dt$ y en consecuencia $x_0 \in H'$.

Consideremos diferentes elecciones de A. Si, por ejemplo, $A = T \times \mathbf{R} \times (-\infty, 1 - h)$ para alguna $h > 0$ entonces claramente $x_0 \in G(A; h, \epsilon)$ para cualquier $\epsilon > 0$ y el Teorema 4.1 es aplicable. Si la restricción a $\dot{x}$ es $(-\infty, 1)$ en lugar de $(-\infty, 1 - h)$, entonces x_0 no pertenece a $W(A; \epsilon)$ ya que

$$\lim_{u \to 1} \mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) = -2\dot{x}(1 - \dot{x})^2$$

y entonces, dado $(t, x, \dot{x}) \in T_1(x_0; \epsilon)$ con $\dot{x} > 0$, siempre podemos encontrar $u < 1$ tal que $\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) < 0$. Finalmente, si $A = T \times \mathbf{R} \times (-\infty, 1]$ entonces $\mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u) \geq 0$ para cualquier $(t, u) \in T \times (-\infty, 1]$ y, por el Teorema 6.1, x_0 resuelve P(A).

7.4 Ejemplo: Minimizar $I(x) = \int_{-1}^1 \{\dot{x}^2(t) + \operatorname{sen} x(t) \operatorname{sen} \dot{x}(t)\}dt$ sujeto a $x(-1) = x(1) = 0$.

Aquí $L(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^2 + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \dot{x}$, $T = [-1,1]$, $\xi_0 = \xi_1 = 0$, y $A = T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Es fácil ver que $L_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = 2 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \dot{x}$ es uniformemente continua en A. Como $x_0 \equiv 0$ satisface la ecuación de Euler

$$\frac{d}{dt}\big(2\dot{x}(t) + \operatorname{sen} x(t)\, \cos \dot{x}(t)\big) = \cos x(t) \operatorname{sen} \dot{x}(t),$$

este pertenece a E. La función $\mathcal{E}$ de Weierstrass para L está dada por

$$\mathcal{E}(t,x,\dot{x},u) = u^2 + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} u - \dot{x}^2 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \dot{x} - (u - \dot{x})(2\dot{x} + \operatorname{sen} x\, \cos \dot{x})$$

y entonces $\mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u) = u^2$. En consecuencia $x_0 \in S(A;1)$. Además,

$$|\mathcal{E}^*(x_0;x) - \mathcal{G}(x_0;x)| = \left| \int_{-1}^{1} \{\operatorname{sen} x(t) \operatorname{sen} \dot{x}(t) - \dot{x}(t) \operatorname{sen} x(t)\} dt \right| \leq \int_{-1}^{1} |\operatorname{sen} x(t)| dt$$

y por lo tanto la condición (b) del Teorema 5.1 se cumple. Finalmente, como $I''(x_0;y) = 2\int_{-1}^{1} \dot{y}^2(t)dt$, tenemos que $x_0 \in H'$. Por el Teorema 5.1, x_0 es un mínimo fuerte estricto de P(A).

7.5 Ejemplo: Minimizar $I(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) - 4x(t)\dot{x}^3(t) + 2t\dot{x}^4(t)\}dt$ sujeto a $x(0) = x(1) = 0$ y $\dot{x}(t) \in O$ (c.s. en $[0,1]$) con O un subconjunto abierto y acotado de $\mathbf{R}$ que contiene al punto 0.

Aquí $L(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^2 - 4x\dot{x}^3 + 2t\dot{x}^4$, $T = [0,1]$, $\xi_0 = \xi_1 = 0$, y $A = T \times \mathbf{R} \times O$.

La ecuación de Euler

$$\frac{d}{dt}\big(2\dot{x}(t) - 12x(t)\dot{x}^2(t) + 8t\dot{x}^3(t)\big) = -4\dot{x}^3(t)$$

es satisfecha por el arco $x_0 \equiv 0$ y en consecuencia $x_0 \in E$. Ahora, como

$$\mathcal{E}(t,x,\dot{x},u) = u^2 - 4xu^3 + 2tu^4 + \dot{x}^2 - 8x\dot{x}^3 + 6t\dot{x}^4 - 2u\dot{x} + 12ux\dot{x}^2 - 8tu\dot{x}^3,$$

tenemos que $\mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u) = u^2 + 2tu^4$, y entonces $x_0 \in S(A;1)$. Además, $I''(x_0;y) = 2\int_0^1 \dot{y}^2(t)dt$ y, por lo tanto, $x_0 \in H'$. Por el Corolario 5.3, x_0 es un mínimo fuerte estricto de P(A). Hacemos notar que, para este ejemplo, la conclusión anterior no se cumple si A es no acotado (ver [12]).

En la introducción mencionamos que Ewing [9] dedica una sección entera a problemas para los que la condición reforzada de Legendre no se cumple. Agregando un término de penalidad se ilustra por medio de tres ejemplos en los que todo extremo es singular un poco de la "práctica que uno debe tener para poder emplear este método". Por medio de una simple aplicación del Teorema 6.1, resolveremos uno de estos ejemplos (los otros dos se resuelven de una manera aún más simple).

7.6 Ejemplo: Minimizar $I(x) = \int_0^1 \{t^2\dot{x}(t) + x^2(t)\}dt$ sujeto a $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Aquí $L(t, x, \dot{x}) = t^2\dot{x} + x^2$, $T = [0, 1]$, $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 1$.

Como la ecuación de Euler está dada por $2t = 2x(t)$, $x_0(t) := t$ $(t \in T)$ es el único extremo admisible. Por su singularidad, los teoremas de suficiencia clásicos no son aplicables. En [9], Ewing primero agrega el término de penalidad $k^2(\dot{x} - 1)^2$ y así obtiene una integral

$$I_k(x) = \int_0^1 \{L(t, x(t), \dot{x}(t)) + k^2(\dot{x}(t) - 1)^2\}dt$$

cuya ecuación de Euler es $k^2\ddot{x}(t) - x(t) = -t$. Si $k \neq 0$, la solución general es

$$x_k(t) = a\exp(t/k) + b\exp(-t/k) + t$$

y, con $b = a = \alpha/2$, uno obtiene la familia uniparamétrica $x_k(t) = \alpha\cosh(t/k) + t$ que genera un campo sobre la banda infinita $\{(t, x) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ siempre que $k \neq 0$. Como, para el integrando de I_k, x_0 satisface la condición reforzada de Legendre para toda $(t, x, \dot{x})$ con $t \in T$ y $x, \dot{x} \in \mathbf{R}$, una aplicación de un teorema de suficiencia en términos de campos implica la desigualdad $I_k(x_0) < I_k(x)$ si $x \neq x_0$ es admisible y $k \neq 0$. Haciendo $k \to 0$, vemos que $I(x_0) \leq I(x)$ para cualquier x admisible distinto de x_0.

Probemos cómo inmediatamente se llega a la misma conclusión por medio de la aplicación del Teorema 6.1. Tenemos que $\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) = 0$ y $\mathcal{K}(t, x, \dot{x}, v, u) = -(x - v)^2$. En consecuencia $x_0 \in X_e(A) \cap E \cap R(A)$ y, por el Teorema 6.1, x_0 es un mínimo global de P(A).

7.7 Ejemplo: Minimizar $I(x) = \int_0^\pi x^2(t)[1 - \dot{x}^2(t)]dt$ sujeto a $x(0) = x(\pi) = 0$.

Aquí $L(t, x, \dot{x}) = x^2(1 - \dot{x}^2)$, $T = [0, \pi]$, $\xi_0 = \xi_1 = 0$.

Sea $x_0 \equiv 0$. Tenemos que $x_0 \in X_e(A)$ y, como

$$L_x(t, x, \dot{x}) = 2x(1 - \dot{x}^2) \quad \text{y} \quad L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = -2x^2\dot{x},$$

x_0 satisface la ecuación de Euler. Notemos que $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = -2x^2$ y por lo tanto x_0 es singular. Ahora, $\mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), u) = 0$ y $\mathcal{K}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), x, u) = x^2(u^2 - 1)$. Si restringimos $u \in (-1, 1)$, concluimos del Teorema 6.1 que x_0 es un mínimo local débil de P(A).

Nótese que, para este problema, $\mathcal{E}(t,x,\dot{x},u) = x^2(2u\dot{x} - \dot{x}^2 - u^2)$ de tal forma que $x_0 \in W(T_1(x_0;\epsilon))$ para cualquier $\epsilon > 0$. Sin embargo, la condición reforzada $x_0 \in W(T_1(x_0;\epsilon);\epsilon)$ no se cumple para ninguna $\epsilon > 0$ ya que, en particular, $\mathcal{E}(t,x,0,u) = -x^2u^2 < 0$ para cualesquiera $x, u > 0$. Para este ejemplo uno puede probar fácilmente que x_0 no es un mínimo fuerte. En efecto, si definimos $x_n(t) := n^{-1/2}\mathrm{sen}\, nt$ ($n \in \mathbf{N}$, $t \in T$), entonces

$$\begin{aligned} I(x_n) &= \frac{1}{n}\int_0^\pi \mathrm{sen}^2\, nt\,(1 - n\cos^2 nt)\,dt \\ &= \frac{1}{n}\int_0^\pi \mathrm{sen}^2\, nt\, dt - \frac{1}{4}\int_0^\pi \mathrm{sen}^2\, 2nt\, dt \\ &= \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

y por lo tanto $I(x_n) < 0 = I(x_0)$ para cualquier $n > 4$. Claramente, dado $\rho > 0$, existe n suficientemente grande tal que $x_n \in X_e(A) \cap N_0(x_0;\rho)$.

7.8 Ejemplo: Minimizar $I(x) = \int_{-1}^1 \{t^2\dot{x}^2(t) + 12x^2(t)\}dt$ sujeto a $x(-1) = -1$ y $x(1) = 1$.

Aquí $L(t,x,\dot{x}) = t^2\dot{x}^2 + 12x^2$, $T = [-1,1]$, $\xi_0 = -1$, $\xi_1 = 1$.

Sea $x_0(t) := t^3$ ($t \in T$). Tenemos que $x_0 \in X_e(A)$ y, como

$$L_x(t,x,\dot{x}) = 24x \quad \text{y} \quad L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = 2t^2\dot{x},$$

la ecuación de Euler está dada por

$$t^2\ddot{x}(t) + 2t\dot{x}(t) - 12x(t) = 0 \qquad (t \in T)$$

y por lo tanto x_0 la satisface. Puesto que $L_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = 2t^2$, cualquier trayectoria es singular. Ahora, $\mathcal{E}(t,x,\dot{x},u) = t^2(u-\dot{x})^2$ y $\mathcal{K}(t,x,\dot{x},v,u) = -12(x-v)^2$. Por el Teorema 6.1, x_0 resuelve P(A).

7.9 Ejemplo: Minimizar $I(x) = \int_0^1 \{\dot{x}^2(t) + x(t)\dot{x}(t) + x^2(t)\}dt$ sujeto a $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Aquí $L(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^2 + x\dot{x} + x^2$, $T = [0,1]$, $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 1$.

Tenemos que

$$L_x(t,x,\dot{x}) = 2x + \dot{x} \quad \text{y} \quad L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = 2\dot{x} + x,$$

de manera que la ecuación de Euler está dada por $\ddot{x}(t) = x(t)$. Sea

$$x_0(t) := (e^2 - 1)^{-1}(e^{t+1} - e^{1-t}) \qquad (t \in T)$$

y observemos que x_0 es C^1 y pertenece a $X_e(A) \cap E$. Puesto que $L_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = 2$ y $\mathcal{E}(t,x,\dot{x},u) = (\dot{x}-u)^2$ tenemos también que $x_0 \in \mathcal{L}' \cap W(A;\epsilon)$ para cualquier $\epsilon > 0$. Además es fácil ver que $x_0 \in H'$ y, por lo tanto, por el Teorema 2.2(b), x_0 es un mínimo local fuerte. Sin embargo, aplicando el Teorema 6.1, podemos concluir que este es también un mínimo global. De hecho, se tiene que

$$\mathcal{K}(t,x,\dot{x},v,u) = -(x-v)^2 - (x-v)(\dot{x}-u)$$

y, por lo tanto,

$$\mathcal{E}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t),u) - \mathcal{K}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t),x,u) = a^2(t) + b^2(t) + a(t)b(t) \geq 0$$

donde $a(t) = \dot{x}_0(t) - u$ y $b(t) = x_0(t) - x$. Por el Teorema 6.1, x_0 resuelve P(A).

7.10 Ejemplo: Minimizar $I(x) = \int_0^2 \{\dot{x}^4(t) - 6\dot{x}^2(t)\}dt$ sujeto a $x(0) = x(2) = 0$.
Aquí $L(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^4 - 6\dot{x}^2$, $T = [0,2]$, $\xi_0 = \xi_1 = 0$.
Como $L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = 4\dot{x}^3 - 12\dot{x}$ y $L_x \equiv 0$, la trayectoria

$$x_0(t) := \begin{cases} \sqrt{3}t & \text{si } t \in [0,1] \\ \sqrt{3}(2-t) & \text{si } t \in [1,2] \end{cases}$$

pertenece a E y, claramente, $x_0 \in X_e(A)$. Ahora, la función exceso está dada por

$$\mathcal{E}(t,x,\dot{x},u) = u^4 - 6u^2 + 3\dot{x}^4 - 4u\dot{x}^3 - 6\dot{x}^2 + 12u\dot{x},$$

de manera que $\mathcal{E}(t,x_0(t),\dot{x}_0(t),u) = (u^2-3)^2$. Como $L(t,x,\dot{x})$ no depende de x, $\mathcal{K} \equiv 0$, y entonces $x_0 \in R(A)$. Por el Teorema 6.1, x_0 resuelve P(A).

2 Conjugación en Control Óptimo

1 Introducción

La teoría de conjugación ha jugado un papel fundamental en la caracterización de condiciones de segundo orden para problemas en cálculo de variaciones. En particular, para el problema de puntos fijos se sabe bien que, si H denota el conjunto de trayectorias cuya segunda variación es no negativa sobre el conjunto de variaciones admisibles y x es un extremo no singular, entonces $x \in H$ si y solo si x satisface la condición de Legendre y *no hay puntos conjugados a* t_0 *con respecto a* x *en* (t_0, t_1), el intervalo abierto de tiempo (condición necesaria de Jacobi).

Se han llevado a cabo varios intentos por generalizar este resultado a problemas de control óptimo. En particular, en 1988, Zeidan y Zezza [26] consideraron una clase de problemas con un punto fijo y restricciones con igualdades en el control. Su noción de "puntos conjugados" generaliza la noción clásica en el sentido de que, si un proceso óptimo satisface la condición reforzada de Legendre o de Clebsch correspondiente (y por lo tanto es no singular) junto con ciertas condiciones de normalidad (siempre satisfechas en el contexto de cálculo de variaciones) entonces no hay puntos conjugados a t_0 con respecto a dicho proceso en (t_0, t_1).

Un enfoque completamente distinto se introdujo en 1994 por Loewen y Zheng [14], aplicable a ciertos problemas de control óptimo (que incluyen aquellos de [26]) con un punto fijo e involucrando restricciones con igualdades y desigualdades en el control. En [14] se define un conjunto de "puntos conjugados generalizados" que cuando es no vacío en el intervalo abierto de tiempo implica la existencia de una variación admisible cuya segunda variación (con respecto al Hamiltoniano) es negativa. Para cualquier proceso admisible (x, u) y p función continua, denotemos este conjunto por $C_1(x, u, p)$. La "condición generalizada de Jacobi" se obtiene por medio de una aplicación de condiciones necesarias de segundo orden para estos problemas: si (x, u) es una solución "normal", entonces existe p tal que la segunda variación con respecto al Hamiltoniano en (x, u, p) es no negativa sobre el conjunto de variaciones admisibles y, por lo tanto, $C_1(x, u, p) \cap (t_0, t_1)$ es vacío.

Esta noción de conjugación no generaliza la noción clásica como se hace en [26] puesto que la no existencia de tales puntos en (t_0, t_1) es necesaria para la optimalidad aun cuando el proceso de interés es singular. Sin embargo, si el problema considerado en [14] se reduce al problema de puntos fijos en cálculo de variaciones y el extremo de interés es no singular, entonces el conjunto clásico de puntos conjugados en el intervalo abierto está *contenido* en el de puntos conjugados generalizados. De esta manera esta nueva noción "extiende" aquella de conjugación no solamente para problemas de control óptimo sino también en la teoría clásica de cálculo de variaciones. Algunos ejemplos dados en [14] ilustran la utilidad de este conjunto: estos tratan con procesos singulares, de tal forma que ni la teoría clásica de Jacobi ni aquella dada en [26] pueden detectar la no optimalidad, mientras que este hecho se obtiene probando la existencia de puntos conjugados generalizados.

Para la clase de problemas de control óptimo considerados en [14], el punto inicial está fijo y se requiere una hipótesis de convexidad en el conjunto de controles. Para problemas en donde ambos puntos varían y el conjunto de controles no es necesariamente convexo, Zeidan [27] introdujo en 1996 un nuevo conjunto de puntos conjugados generalizados que contiene a $C_1(x,u,p)$ y que denotamos por $C_2(x,u,p)$. Ahí se muestra que una condición necesaria para la optimalidad, para "extremos normales", es nuevamente la no existencia de tales puntos en (t_0,t_1). Como en [14], este resultado es consecuencia de la no negatividad de la segunda variación sobre el conjunto de variaciones admisibles bajo hipótesis de "normalidad".

Aunque la teoría anterior parece ser exitosa para ciertas clases de problemas de control óptimo, estos conjuntos de "puntos conjugados extendidos" presentan dos características poco deseables. Primero, la existencia de tales puntos se establece meramente como una condición suficiente para la existencia de variaciones cuya segunda variación es negativa. En otras palabras, no está claro si hay problemas para los que estos conjuntos son vacíos con respecto a un "extremo normal" pero la segunda variación es negativa a lo largo de una variación admisible (implicando la no optimalidad del extremo). Segundo, no debemos olvidar que el objetivo principal de introducir una caracterización de la condición de segundo orden es obtener una manera más simple de verificarla. Sin embargo, aun para problemas simples en cálculo de variaciones, uno puede encontrar fácilmente ejemplos para los que, verificar si estos conjuntos son no vacíos se convierte en una tarea mucho más difícil que verificar la existencia de una variación admisible negativa. En consecuencia, al utilizar las teorías de Loewen y Zheng, o Zeidan, uno puede perder el objetivo principal de introducir una caracterización de la condición necesaria de segundo orden.

Con el propósito de resolver estos dos problemas, Berlanga y Rosenblueth introdujeron en [2] un tercer conjunto de puntos $R(x)$ aplicable al problema de puntos fijos en cálculo de variaciones. Este conjunto es tal que, para cualquier trayectoria, $x \in H$ si y solo si $R(x)$ es vacío. Además, este conjunto tiene la propiedad de que, si existe una variación admisible

y cuya segunda variación es negativa, entonces y satisface las condiciones que definen los elementos de $R(x)$. En otras palabras, nunca es más difícil checar que $R(x)$ es no vacío que probar directamente que $x \notin H$. Además, con respecto a los conjuntos definidos en [14] y [27], Rosenblueth en [19] estableció las relaciones $C_1(x) \subset C_2(x) \subset R(x)$ (implicando, en particular, que las condiciones $C_1(x) = \emptyset$ y $C_2(x) = \emptyset$ son necesarias para la optimalidad en el intervalo semi-abierto $(t_0, t_1]$). También en [19] se generalizó este conjunto para ciertos problemas lineales de control óptimo. Nuevamente, con la idea de simplificar las condiciones que definen a los elementos de $R(x)$, Berlanga y Rosenblueth introdujeron en [3] un nuevo conjunto $S(x)$ el cual contiene a $R(x)$ y satisface $x \in H \Leftrightarrow S(x) = \emptyset$. Es notable que, verificar la pertenencia a $S(x)$ resulta aún más simple que con respecto a $R(x)$.

En este capítulo generalizamos el conjunto $R(x)$ para el problema de Lagrange de control óptimo con puntos fijos y dinámicas no lineales y lo denotamos por $R_1(x, u, p)$. La segunda variación a lo largo de (x, u) sobre el conjunto de variaciones admisibles (y, v) la denotaremos por $J_p((x, u); (y, v))$. La no existencia de puntos conjugados en $R_1(x, u, p)$ es equivalente a la no negatividad de $J_p((x, u); (y, v))$ sobre el conjunto de variaciones admisibles sin requerir que el proceso (x, u) sea un "extremo normal". Además, $R_1(x, u, p)$ tiene la propiedad de contener a $C_1(x, u, p)$. Análogamente, introducimos un conjunto $R_2(x, u, p)$ que contiene tanto a $R_1(x, u, p)$ como a $C_2(x, u, p)$ y que tiene la propiedad de que si (x, u) es un "extremo normal", entonces la no existencia de puntos conjugados en $R_2(x, u, p)$ es equivalente a la no negatividad de $J_p((x, u); (y, v))$ sobre el conjunto de variaciones admisibles. Por último, definimos un tercer conjunto $S(x, u, p)$ como la extensión natural del conjunto $S(x)$ al problema de control. Nuevamente, si (x, u) es un "extremo normal", la no existencia de puntos conjugados en $S(x, u, p)$ es equivalente a la no negatividad de $J_p((x, u); (y, v))$ sobre el conjunto de variaciones admisibles. Bajo ciertas hipótesis de "normalidad" obtenemos la relación $S(x, u, p) \subset R_2(x, u, p)$ y, si para toda $t \in [t_0, t_1]$ la matriz $f_u(t, x(t), u(t))$ (donde f es la dinámica del problema) es de rango completo, entonces $R_2(x, u, p) = S(x, u, p)$. Es importante mencionar que, en general, resulta más fácil verificar la pertenencia a $S(x, u, p)$ que a los otros conjuntos de puntos conjugados.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 planteamos el problema de Lagrange de control óptimo con puntos fijos. Los conjuntos a los que pertenecen los estados y los controles son subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{R}^m$ respectivamente y las dinámicas son no lineales. Asimismo, presentamos las condiciones necesarias clásicas de primer y segundo orden para la optimalidad. En la Sección 3 introducimos nuevas definiciones de puntos conjugados y llevamos a cabo una comparación detallada con las definiciones dadas en [14] y [27], todas ellas para un problema común. En la Sección 4, a través de dos ejemplos, ilustramos la utilidad de estos nuevos conjuntos de puntos conjugados. En particular, probamos la no optimalidad de un extremo a través de los resultados de la Sección 3 y hacemos ver cómo, al tratar de utilizar las teorías dadas en [14] y [27], uno puede encontrarse con un tarea desesperanzadora.

2 Planteamiento del problema

Supongamos que tenemos dados un intervalo $T := [t_0, t_1]$ en $\mathbf{R}$, dos puntos ξ_0, ξ_1 en $\mathbf{R}^n$, un conjunto $\mathcal{A}$ en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, y funciones L y f que mapean $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ a $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^n$ respectivamente, $(t, x, u) \mapsto L(t, x, u)$, $(t, x, u) \mapsto f(t, x, u)$.

Denotemos por X el espacio vectorial de todas las funciones C^1 a trozos o seccionalmente suaves que mapean T a $\mathbf{R}^n$, por $\mathcal{U}$ el espacio vectorial de todas las funciones seccionalmente continuas que mapean T a $\mathbf{R}^m$, sean $Z := X \times \mathcal{U}$,

$$D := \{(x, u) \in Z \mid \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \ (t \in T)\},$$

$$Z_e(\mathcal{A}) := \{(x, u) \in D \mid x(t_0) = \xi_0, \ x(t_1) = \xi_1, \ (t, x(t), u(t)) \in \mathcal{A} \ (t \in T)\},$$

y consideremos la funcional $I \colon Z \to \mathbf{R}$ dada por

$$I(x, u) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt \qquad ((x, u) \in Z).$$

El problema que consideraremos, denotado por (P), es el de minimizar I sobre $Z_e(\mathcal{A})$.

2.1 Definiciones: Los elementos de Z son llamados *procesos* y decimos que $(x, u) \in Z_e(\mathcal{A})$ *resuelve* (P) si $I(x, u) \leq I(y, v)$ para todo $(y, v) \in Z_e(\mathcal{A})$.

- Dado un proceso (x, u), usaremos la notación $(\tilde{x}(t))$ para representar a $(t, x(t), u(t))$.

- Para toda (t, x, u, p, λ) en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, definamos el *Hamiltoniano* del problema (P) como

$$H(t, x, u, p, \lambda) := \langle p, f(t, x, u)\rangle - \lambda L(t, x, u).$$

- Dado $(x, u) \in Z$, sea

$$D(x, u) := \{(y, v) \in Z \mid \dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t) \ (t \in T)\}$$

donde $A(t) := f_x(\tilde{x}(t))$ y $B(t) := f_u(\tilde{x}(t))$ $(t \in T)$, y definamos

$$Y(x, u) := \{(y, v) \in D(x, u) \mid y(t_0) = y(t_1) = 0\}$$

el cual llamamos el conjunto de *variaciones admisibles a lo largo de* (x, u).

- Decimos que $(x, u) \in Z$ es *normal a* (P) *en* T si las ecuaciones

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t), \quad B^*(t)z(t) = 0 \qquad (t \in T)$$

('*' denota transpuesta) solamente tienen la solución $z \equiv 0$.

- Para todo $(x, u) \in Z$ sea

$$M(x,u) := \{(\lambda_0, p) \in \mathbf{R} \times X \mid \lambda_0 \geq 0, \ \lambda_0 + |p| \neq 0, \ \dot{p}(t) = -H_x^*(t, x(t), u(t), p(t), \lambda_0) \\ \text{y } H_u(t, x(t), u(t), p(t), \lambda_0) = 0 \ (t \in T)\}$$

y consideremos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{E} := \{(x, u, p) \in Z \times X \mid (1, p) \in M(x, u)\}$$
$$\mathcal{H} := \{(x, u, p) \in Z \times X \mid J_p((x, u); (y, v)) \geq 0 \text{ para toda } (y, v) \in Y(x, u)\}$$

donde

$$J_p((x, u); (y, v)) = \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega_p(t, y(t), v(t))dt \qquad ((y, v) \in Z)$$

y, para toda $(t, y, v) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$2\Omega_p(t, y, v) := -[\langle y, H_{xx}(\tilde{x}(t), p(t), 1)y\rangle + 2\langle y, H_{xu}(\tilde{x}(t), p(t), 1)v\rangle \\ + \langle v, H_{uu}(\tilde{x}(t), p(t), 1)v\rangle].$$

Las definiciones anteriores nos permiten enunciar de manera sucinta condiciones de primer y segundo orden para el problema (P). Las hipótesis bajo las cuales dichas condiciones se satisfacen varían de un autor a otro, pero nos basaremos en [26] donde se puede encontrar la demostración del siguiente resultado.

2.2 Teorema: *Supongamos que $\mathcal{A}$ es abierto, para toda $t \in T$ las funciones $f(t, \cdot, \cdot)$ y $L(t, \cdot, \cdot)$ son de clase $C^2(\mathcal{A})$ y, para toda $(x, u) \in X \times \mathcal{U}$, las funciones f, L y sus derivadas parciales de segundo orden en (x, u) son seccionalmente continuas en t. Si (x, u) resuelve* (P) *entonces $M(x, u) \neq \emptyset$. Si además (x, u) es normal a* (P) *en T, entonces existe una única $p \in X$ tal que $(x, u, p) \in \mathcal{E}$. Además, $(x, u, p) \in \mathcal{H}$.*

3 Puntos conjugados

En esta sección definiremos ciertos conjuntos relacionados con el problema planteado en la sección anterior que de alguna manera, como explicamos en la introducción, generalizan el concepto clásico de puntos conjugados.

Para poder definir dichos conjuntos, resulta conveniente comenzar con la siguiente notación. Para cualquier $s \in [t_0, t_1)$ sean $T_s := [s, t_1]$, X_s el espacio de funciones seccionalmente suaves que mapean T_s a $\mathbf{R}^n$, y $\mathcal{U}_s$ el espacio de funciones seccionalmente continuas que mapean T_s a $\mathbf{R}^m$. Consideremos el conjunto

$$Y_s(x,u) := \{(y,v) \in X_s \times \mathcal{U}_s \mid \dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t) \ (t \in T_s),\ y(s) = y(t_1) = 0\}.$$

Dados $(x,u,p) \in Z \times X$ y $(y,v) \in Y_s(x,u)$, sean $\rho: T_s \to \mathbf{R}^m$ y $\sigma: T_s \to \mathbf{R}^n$ dadas por

$$\rho(t) := -H_{ux}(t)y(t) - H_{uu}(t)v(t), \qquad \sigma(t) := -H_{xx}(t)y(t) - H_{xu}(t)v(t)$$

donde $H(t)$ denota $H(t, x(t), u(t), p(t), 1)$.

Dado un proceso (x,u), consideremos el sistema lineal

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t) \quad (t \in T), \qquad y(t_0) = 0$$

donde $A(t) = f_x(\tilde{x}(t))$, $B(t) = f_u(\tilde{x}(t))$ $(t \in T)$, y sea $\Phi(t) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ que satisfaga

$$\dot{\Phi}(t) = -\Phi(t)A(t) \quad (t \in T), \qquad \Phi(t_1) = I$$

de manera que cualquier solución del sistema lineal con $(y,v) \in Z$ se puede expresar como

$$y(t) = \Phi^{-1}(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau.$$

La Definición 3.1 se debe a Loewen y Zheng y el Teorema 3.2 se demuestra en [14]. El conjunto $R_1(x,u,p)$ dado en la Definición 3.3, se introduce por primera vez en este trabajo, y es una extensión natural del conjunto $R(x)$ definido en [2] para el problema de control óptimo que estamos estudiando. El Teorema 3.4 es crucial en tanto que el nuevo conjunto definido en 3.3 contiene al de Loewen y Zheng y, más aún, caracteriza la no negatividad de la segunda variación.

3.1 Definición: Para cualquier $(x,u,p) \in Z \times X$ sea $C_1(x,u,p)$ el conjunto de puntos $s \in [t_0,t_1)$ para los que existen $(y,v) \in Y_s(x,u)$ y $q \in X_s$ tales que, si $\lambda(t) := B^*(t)q(t) - \rho(t)$ $(t \in T_s)$, entonces

i. $\dot{q}(t) + A^*(t)q(t) = \sigma(t)$ $(t \in T_s)$.

ii. $q(s) \neq 0$.

iii. $\langle v(t), \lambda(t)\rangle \geq 0$ $(t \in T_s)$.

y (a) o (b) se cumple, donde

a. $\langle v(t), \lambda(t)\rangle > 0$ en un conjunto de medida positiva.

b. Existe $(z,w) \in Y(x,u)$ tal que

i. $\langle z(s), q(s)\rangle > 0$.

ii. $\langle w(t), \lambda(t)\rangle \geq 0$ $(t \in T_s)$.

3.2 Teorema: *Sea* $(x,u,p) \in \mathcal{E}$. *Entonces* $(x,u,p) \in \mathcal{H} \Rightarrow C_1(x,u,p) \cap (t_0,t_1) = \emptyset$.

3.3 Definición: Para cualquier $(x,u,p) \in Z \times X$ sea $R_1(x,u,p)$ el conjunto de puntos $s \in [t_0,t_1)$ para los que existe $(y,v) \in Y_s(x,u)$ tal que

i. $\int_s^{t_1}\{\langle y(t), \sigma(t)\rangle + \langle v(t), \rho(t)\rangle\}dt \leq 0$.

ii. Existe $(z,w) \in Y(x,u)$ tal que $\gamma := \int_s^{t_1}\{\langle z(t), \sigma(t)\rangle + \langle w(t), \rho(t)\rangle\}dt \neq 0$.

3.4 Teorema: *Sea* $(x,u,p) \in Z \times X$. *Entonces lo siguiente se cumple:*

a. $C_1(x,u,p) \subset R_1(x,u,p)$.

b. $(x,u,p) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow R_1(x,u,p) = \emptyset$.

Demostración:

(a): Sea $s \in C_1(x,u,p)$ y sean $(y,v) \in Y_s(x,u)$ y $q \in X_s$ definidas como en 3.1. La condición 3.3(i) es una consecuencia de 3.1(iii) puesto que

$$\begin{aligned}
&\int_s^{t_1}\{\langle y(t), \sigma(t)\rangle + \langle v(t), \rho(t)\rangle\}dt \\
&\qquad = \int_s^{t_1}\{\langle y(t), \dot{q}(t) + A^*(t)q(t)\rangle + \langle v(t), B^*(t)q(t) - \lambda(t)\rangle\}dt \\
&\qquad = \int_s^{t_1}\{\langle y(t), \dot{q}(t)\rangle + \langle A(t)y(t) + B(t)v(t), q(t)\rangle - \langle v(t), \lambda(t)\rangle\}dt \\
&\qquad = -\int_s^{t_1}\langle v(t), \lambda(t)\rangle dt \leq 0.
\end{aligned}$$

Si 3.1(a) se cumple, entonces la desigualdad en 3.3(i) es estricta y, claramente, se tiene $s \in R_1(x,u,p)$. Si 3.1(b) se cumple, entonces existe $(z,w) \in Y(x,u)$ tal que $\langle z(s), q(s)\rangle > 0$ y $\langle w(t), \lambda(t)\rangle \geq 0$ $(t \in T_s)$. Por lo tanto,

$$\gamma = \int_s^{t_1} \{\langle z(t), \sigma(t)\rangle + \langle w(t), \rho(t)\rangle\}dt = -\langle z(s), q(s)\rangle - \int_s^{t_1} \langle w(t), \lambda(t)\rangle dt < 0.$$

(b) "$\Rightarrow$": Supongamos que existe $s \in R_1(x,u,p)$. Sean (y,v) y (z,w) como en 3.3. Nótese que, como $\gamma \neq 0$, $(y,v) \not\equiv (0,0)$. Definamos

$$(\zeta(t), \eta(t)) := \begin{cases} (0,0) & t \in [t_0, s] \\ (y(t), v(t)) & t \in (s, t_1] \end{cases}$$

y observemos que, por 3.3(i),

$$J_p((x,u);(\zeta,\eta)) = \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega_p(t, \zeta(t), \eta(t))dt = \int_s^{t_1} \{\langle y(t), \sigma(t)\rangle + \langle v(t), \rho(t)\rangle\}dt \ \leq \ 0.$$

Definamos $k := J_p((x,u);(z,w))$ y $\alpha := -(\gamma + k/2\gamma)$. Entonces $(y_\alpha, v_\alpha) := (z + \alpha\zeta, w + \alpha\eta)$ pertenece a $Y(x,u)$ y

$$\begin{aligned} J_p((x,u);(y_\alpha, v_\alpha)) &= \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega_p(t, y_\alpha(t), v_\alpha(t))dt \\ &= k + \alpha^2 J_p((x,u);(\zeta,\eta)) + 2\alpha \int_s^{t_1} \{\langle z(t), \sigma(t)\rangle + \langle w(t), \rho(t)\rangle\}dt \\ &\leq k + 2\alpha\gamma = -2\gamma^2 < 0. \end{aligned}$$

(b) "$\Leftarrow$": Supongamos que $(x,u,p) \notin \mathcal{H}$. Sea $(y,v) \in Y(x,u)$ tal que $J_p((x,u);(y,v)) < 0$ y sea $(z,w) \equiv (y,v)$. Entonces $t_0 \in R_1(x,u,p)$. ∎

Como se mencionó en la introducción, Zeidan propuso en [27] un conjunto que, en el caso normal, generaliza el conjunto definido en [14]. Lo generaliza en el sentido de que lo contiene y es aplicable a problemas más generales. Veamos cómo está definido para nuestro problema (P) y qué propiedades tiene con respecto al conjunto definido en 3.1. El Teorema 3.6 se demuestra en [27].

3.5 Definición: Para cualquier $(x,u,p) \in Z \times X$ sea $C_2(x,u,p)$ el conjunto de puntos $s \in [t_0, t_1)$ para los que existen $(y,v) \in Y_s(x,u)$ y $q \in X_s$ tales que, si $\lambda(t) := B^*(t)q(t) - \rho(t)$ $(t \in T_s)$, entonces

i. $\dot{q}(t) + A^*(t)q(t) = \sigma(t)$ $(t \in T_s)$.

ii. $\langle v(t), \lambda(t)\rangle \geq 0$ $(t \in T_s)$.

iii. Si la desigualdad en (ii) es igualdad para toda $t \in T_s$ entonces, para cualquier $\alpha \in \mathbf{R}^n$ que satisfaga $\lambda(t) = B^*(t)\Phi^*(t)\alpha$ $(t \in T_s)$, existe $w: [t_0, s] \to \mathbf{R}^m$ seccionalmente continua con $\langle z(s), \Phi^*(s)\alpha - q(s)\rangle < 0$ donde z es la solución de $\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)w(t)$, $z(t_0) = 0$.

3.6 Teorema: *Sea $(x, u, p) \in Z \times X$. Entonces lo siguiente se cumple:*

a. $C_1(x, u, p) \subset C_2(x, u, p)$.

b. *Si $(x, u, p) \in \mathcal{E}$ y (x, u) es normal a* (P) *en T, entonces $(x, u, p) \in \mathcal{H} \Rightarrow C_2(x, u, p) \cap (t_0, t_1) = \emptyset$.*

Así como definimos un nuevo conjunto que caracteriza las condiciones de segundo orden y que contiene al conjunto propuesto en [14] para el problema (P), introduzcamos ahora un conjunto que satisface lo anterior con respecto al conjunto definido en [27]. En ambos casos, verificar la pertenencia a estos nuevos conjuntos resulta más sencillo que con respecto a los anteriores.

3.7 Definición: Para cualquier $(x, u, p) \in Z \times X$ sea $R_2(x, u, p)$ el conjunto de puntos $s \in [t_0, t_1)$ para los que existe $(y, v) \in Y_s(x, u)$ tal que

i. $\int_s^{t_1} \{\langle y(t), \sigma(t)\rangle + \langle v(t), \rho(t)\rangle\} dt \leq 0$.

ii. Si existe $q \in X_s$ tal que $\dot{q}(t) + A^*(t)q(t) = \sigma(t)$, $B^*(t)q(t) = \rho(t)$ $(t \in T_s)$, entonces existe $w: [t_0, s] \to \mathbf{R}^m$ seccionalmente continua con $\langle z(s), q(s)\rangle \neq 0$ donde z es la solución de $\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)w(t)$, $z(t_0) = 0$.

3.8 Teorema: *Sea $(x, u, p) \in Z \times X$. Entonces lo siguiente se cumple:*

a. $R_1(x, u, p) \subset R_2(x, u, p)$ *y* $C_2(x, u, p) \subset R_2(x, u, p)$.

b. *Si $(x, u, p) \in \mathcal{E}$ y (x, u) es normal a* (P) *en T, entonces $(x, u, p) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow R_2(x, u, p) = \emptyset$.*

Demostración:

(a): Sea $s \in R_1(x, u, p)$ y sean (y, v) y (z, w) como en 3.3. Supongamos que existe $q \in X_s$ tal que $\dot{q}(t) + A^*(t)q(t) = \sigma(t)$, $B^*(t)q(t) = \rho(t)$ $(t \in T_s)$ (si esta no existe entonces $s \in R_2(x, u, p)$). El resultado claramente se cumple puesto que $\langle z(s), q(s)\rangle = -\gamma \neq 0$.

Sea $s \in C_2(x, u, p)$ y sean $(y, v) \in Y_s(x, u)$ y $q \in X_s$ como en 3.5. Como en la demostración de 3.4(a), la condición 3.7(i) es una consecuencia de 3.5(ii). Supongamos ahora que existe $q_1 \in X_s$ tal que $\dot{q}_1(t) + A^*(t)q_1(t) = \sigma(t)$, $B^*(t)q_1(t) = \rho(t)$ $(t \in T_s)$. Notamos primero que

$$0 = \int_s^{t_1} \{\langle y(t), \sigma(t)\rangle + \langle v(t), \rho(t)\rangle\} dt = -\int_s^{t_1} \langle v(t), \lambda(t)\rangle dt \leq 0$$

y entonces la desigualdad en 3.5(ii) es igualdad para toda $t \in T_s$. Ahora, sea $r \equiv q - q_1$ y observamos que, como $\dot{r}(t) + A^*(t)r(t) = 0$ tenemos que $r(t) = \Phi^*(t)r(t_1)$ $(t \in T_s)$. En consecuencia $\lambda(t) = B^*(t)\Phi^*(t)r(t_1)$ y, por 3.5(iii), existe $w: [t_0, s] \to \mathbf{R}^m$ seccionalmente continua tal que, si z es la solución de $\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)w(t)$, $z(t_0) = 0$, entonces

$$\langle z(s), q_1(s)\rangle = -\langle z(s), \Phi^*(s)r(t_1) - q(s)\rangle > 0.$$

Esto muestra que $s \in R_2(x, u, p)$.

(b) "$\Rightarrow$": Supongamos que existe $s \in R_2(x, u, p)$. Sea $(y, v) \in Y_s(x, u)$ como en 3.7. Claramente, $(y, v) \not\equiv (0, 0)$. Sea

$$(\zeta(t), \eta(t)) := \begin{cases} (0,0) & t \in [t_0, s] \\ (y(t), v(t)) & t \in (s, t_1] \end{cases}$$

y obsérvese que, por 3.7(i),

$$J_p((x, u); (\zeta, \eta)) = \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega_p(t, \zeta(t), \eta(t))dt = \int_s^{t_1} \{\langle y(t), \sigma(t)\rangle + \langle v(t), \rho(t)\rangle\}dt \ \leq \ 0.$$

Si el valor de la integral en 3.7(i) es negativo, contradecimos la hipótesis de que $(x, u, p) \in \mathcal{H}$ puesto que $(\zeta, \eta) \in Y(x, u)$ y $J_p((x, u); (\zeta, \eta)) < 0$. Si ésta se anula, entonces (ζ, η) resuelve el "problema accesorio" (PA) de minimizar $J_p((x, u); \cdot)$ sobre $Y(x, u)$. Como (x, u) es normal a (P) en T, entonces lo es (ζ, η) para (PA). En consecuencia existe $q_1 \in X$ tal que, para toda $t \in T$,

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) + A^*(t)q_1(t) &= - H_{xx}(\tilde{x}(t), p(t), 1)\zeta(t) - H_{xu}(\tilde{x}(t), p(t), 1)\eta(t) \\ B^*(t)q_1(t) &= - H_{ux}(\tilde{x}(t), p(t), 1)\zeta(t) - H_{uu}(\tilde{x}(t), p(t), 1)\eta(t). \end{aligned}$$

Sea q la restricción de q_1 a $[s, t_1]$. Por 3.7(ii), existe $w: [t_0, s] \to \mathbf{R}^m$ seccionalmente continua con $\langle z(s), q(s)\rangle \neq 0$ donde z es la solución de $\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)w(t)$, $z(t_0) = 0$. Esto implica, en particular, que $s > t_0$. Ahora, como $\dot{q}_1(t) + A^*(t)q_1(t) = 0$ $(t \in [t_0, s])$, se tiene que $q_1(s) = \Phi^*(s)\Phi^{*-1}(t)q_1(t)$ $(t \in [t_0, s])$, y entonces

$$0 \neq \langle z(s), q(s)\rangle = \int_{t_0}^{s} \langle \Phi^{-1}(s)\Phi(\tau)B(\tau)w(\tau), q_1(s)\rangle d\tau = \int_{t_0}^{s} \langle w(\tau), B^*(\tau)q_1(\tau)\rangle d\tau.$$

Pero $B^*(t)q_1(t) = 0$ para toda $t \in [t_0, s]$ y llegamos a una contradicción.

(b) "$\Leftarrow$": Supongamos que $(x, u, p) \notin \mathcal{H}$. Sea $(y, v) \in Y(x, u)$ tal que $J_p((x, u); (y, v)) < 0$. Claramente, la condición 3.7(ii) no se aplica puesto que, de otra manera, la integral en (i) se anularía. De esta manera $t_0 \in R_2(x, u, p)$. ∎

El conjunto $S(x,u,p)$ dado en la Definición 3.9 corresponde a una extensión natural del conjunto $S(x)$ definido en [3] para el problema (P). Como se verá en el Teorema 3.10, la no existencia de puntos conjugados en $S(x,u,p)$ también caracteriza la condición de segundo orden dada en términos de variaciones. Por otro lado, el conjunto $S(x,u,p)$ por su naturaleza tiene la propiedad de ser más verificable que los conjuntos $C_1(x,u,p)$, $R_1(x,u,p)$, $C_2(x,u,p)$ y $R_2(x,u,p)$. En el Teorema 3.11 se demuestra que, si para toda $t\in T$ la matriz $B(t)$ es de rango completo, entonces los conjuntos $R_2(x,u,p)$ y $S(x,u,p)$ coinciden.

3.9 Definición: Para cualquier $(x,u,p)\in Z\times X$ sea $S(x,u,p)$ el conjunto de puntos $s\in[t_0,t_1)$ para los que existe $(y,v)\in Y_s(x,u)$ tal que

i. $\int_s^{t_1}\{\langle y(t),\sigma(t)\rangle+\langle v(t),\rho(t)\rangle\}dt\le 0$.

ii. Si existe $q\in X_s$ tal que $\dot q(t)+A^*(t)q(t)=\sigma(t)$, $B^*(t)q(t)=\rho(t)$ $(t\in T_s)$, entonces $s>t_0$ y $H_{uu}(\tilde x(s),p(s),1)v(s)\neq 0$.

3.10 Teorema: *Supongamos que* $(x,u,p)\in\mathcal{E}$ *con* (x,u) *normal a* (P) *en* T *y* u *continua. Entonces* $(x,u,p)\in\mathcal{H}\Leftrightarrow S(x,u,p)=\emptyset$.

Demostración:

"$\Rightarrow$": Supongamos que existe $s\in S(x,u,p)$. Sea $(y,v)\in Y_s(x,u)$ como en 3.9. Claramente, $(y,v)\not\equiv(0,0)$. Sea

$$(\zeta(t),\eta(t)):=\begin{cases}(0,0) & t\in[t_0,s)\\ (y(t),v(t)) & t\in[s,t_1]\end{cases}$$

y observamos que, por (i),

$$J_p((x,u);(\zeta,\eta))=\int_{t_0}^{t_1}2\Omega_p(t,\zeta(t),\eta(t))dt=\int_s^{t_1}\{\langle y(t),\sigma(t)\rangle+\langle v(t),\rho(t)\rangle\}dt\ \le\ 0.$$

Si el valor de la integral en 3.9(i) es negativo, contradecimos la hipótesis de que $(x,u,p)\in\mathcal{H}$ ya que $(\zeta,\eta)\in Y(x,u)$ y $J_p((x,u);(\zeta,\eta))<0$. Si ésta se anula, entonces (ζ,η) resuelve el problema accesorio (PA) de minimizar $J_p((x,u);\cdot)$ sobre $Y(x,u)$. Puesto que (x,u) es normal a (P) en T, entonces lo es (ζ,η) para (PA). En consecuencia existe $q_1\in X$ tal que, para toda $t\in T$,

$$\begin{aligned}\dot q_1(t)+A^*(t)q_1(t)&=-H_{xx}(\tilde x(t),p(t),1)\zeta(t)-H_{xu}(\tilde x(t),p(t),1)\eta(t)\\ B^*(t)q_1(t)&=-H_{ux}(\tilde x(t),p(t),1)\zeta(t)-H_{uu}(\tilde x(t),p(t),1)\eta(t).\end{aligned}$$

Sea q la restricción de q_1 a $[s,t_1]$. Por (ii), $s>t_0$ y $H_{uu}(\tilde x(s),p(s),1)v(s)\neq 0$. Pero, como q_1 y B son continuas,

$$0=B^*(s-)q_1(s-)=B^*(s)q(s)=-H_{uu}(\tilde x(s),p(s),1)v(s)$$

y llegamos a una contradicción.

"$\Leftarrow$": Supongamos que $(x,u,p) \notin \mathcal{H}$. Sea $(y,v) \in Y(x,u)$ tal que $J_p((x,u);(y,v)) < 0$. Claramente, la condición (ii) no se aplica puesto que, de otra manera, la integral en (i) se anularía. De esta manera $t_0 \in S(x,u,p)$. ∎

3.11 Teorema: *Sea $(x,u,p) \in Z \times X$. Entonces lo siguiente se cumple:*

a. *Si (x,u) es normal a* (P) *en cualquier intervalo $[t_0,s]$ con $s \in (t_0,t_1]$ entonces $S(x,u,p) \subset R_2(x,u,p)$.*

b. *Si $B(t) = f_u(t,x(t),u(t))$ $(t \in T)$ es de rango completo, entonces $S(x,u,p) = R_2(x,u,p)$.*

Demostración:

(a): Sea $s \in S(x,u,p)$ y sea $(y,v) \in Y_s(x,u)$ tal que

$$\int_s^{t_1} \{\langle y(t),\sigma(t)\rangle + \langle v(t),\rho(t)\rangle\}dt \leq 0$$

de manera que 3.7(i) se satisface. Supongamos que existe $q \in X_s$ tal que $\dot{q}(t)+A^*(t)q(t) = \sigma(t)$, $B^*(t)q(t) = \rho(t)$ $(t \in T_s)$. Por 3.9(ii), $s > t_0$ y $H_{uu}(\tilde{x}(s),p(s),1)v(s) \neq 0$. Como (x,u) es normal a (P) en el intervalo $[t_0,s]$, el sistema

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)w(t), \qquad z(t_0) = 0, \qquad t \in [t_0,s]$$

es controlable en $t = s$. Por lo tanto, existen $w\colon [t_0,s] \to \mathbf{R}^m$ y $z\colon [t_0,s] \to \mathbf{R}^n$ que satisfacen dicho sistema con $z(s) = B(s)B^*(s)q(s)$. De esta manera, puesto que

$$B^*(s)q(s) = \rho(s) = -H_{uu}(\tilde{x}(s),p(s),1)v(s) \neq 0$$

tenemos

$$0 \neq |B^*(s)q(s)|^2 = \langle B^*(s)q(s), B^*(s)q(s)\rangle = \langle q(s), B(s)B^*(s)q(s)\rangle = \langle q(s), z(s)\rangle.$$

Por lo tanto, 3.7(ii) se satisface y $s \in R_2(x,u,p)$.

(b): Demostremos primero que $R_2(x,u,p) \subset S(x,u,p)$. Sea $s \in R_2(x,u,p)$ y sea $(y,v) \in Y_s(x,u)$ tal que

$$\int_s^{t_1} \{\langle y(t),\sigma(t)\rangle + \langle v(t),\rho(t)\rangle\}dt \leq 0$$

por lo que 3.9(i) se cumple. Si existe $q \in X_s$ tal que $\dot{q}(t)+A^*(t)q(t) = \sigma(t)$, $B^*(t)q(t) = \rho(t)$ $(t \in T_s)$ entonces existe $w\colon [t_0,s] \to \mathbf{R}^m$ seccionalmente continua con $\langle z(s),q(s)\rangle \neq 0$ donde z es la solución de $\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)w(t)$, $z(t_0) = 0$. Claramente $s > t_0$. Puesto que

$B(t)$ es de rango completo, para toda $t \in T$ existe $B^+(t)$ tal que $B(t)B^+(t) = I$. De esta manera

$$0 \neq \langle z(s), q(s)\rangle = \langle B(s)B^+(s)z(s), q(s)\rangle = \langle B^+(s)z(s), B^*(s)q(s)\rangle.$$

En consecuencia,

$$0 \neq B^*(s)q(s) = \rho(s) = -H_{uu}(\tilde{x}(s), p(s), 1)v(s).$$

Por lo tanto, 3.9(ii) se cumple y $s \in S(x, u, p)$.

Demostremos ahora que si $B(t)$ $(t \in T)$ es de rango completo, entonces (x, u) es normal a (P) en cualquier intervalo $[t_0, s]$ con $s \in (t_0, t_1]$. Mostremos que, para cualquier $s \in (t_0, t_1]$, el sistema

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \qquad y(t_0) = x_0, \qquad t \in [t_0, s]$$

es controlable en $t = s$. Sea $S\colon [t_0, s] \to \mathbf{R}^{n\times n}$ la matriz fundamental de este sistema, esto es, $\dot{S}(t) = A(t)S(t)$, $S(t_0) = I$. La solución del sistema está dada por

$$y^{x_0,u}(t) = S(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} S(t)S^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \qquad (t \in [t_0, s]).$$

Para cualquier $x_1 \in \mathbf{R}^n$, definamos el control $\hat{u}\colon [t_0, s] \to \mathbf{R}^m$ por

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{s - t_0}B^+(t)S(t)S^{-1}(s)(x_1 - S(s)x_0)$$

donde $B^+(t)$ satisface que $B(t)B^+(t) = I$, $t \in [t_0, s]$. Es fácil ver que $y^{x_0,\hat{u}}(s) = x_1$. ∎

3.12 Nota: Para el problema de puntos fijos en cálculo de variaciones (en este caso $f(t, x, u) = u$) para toda $x \in X$, denotemos por $C_1(x)$ al conjunto $C_1(x, u, p)$ donde $u \equiv \dot{x}$ y $p(t) = L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$. Análogamente con los otros conjuntos definidos anteriormente. Entonces tenemos

$$C_1(x) \subset C_2(x) \subset R_1(x) \subset R_2(x) = S(x).$$

4 Ejemplos

En los siguientes ejemplos demostraremos la no optimalidad de un extremo normal (x,u) al mostrar la existencia de puntos en $R_2(x,u,p)$ y en $S(x,u,p)$. Para estos ejemplos, determinar si los conjuntos $C_1(x,u,p)$ o $C_2(x,u,p)$ son no vacíos puede resultar extremadamente difícil. De hecho, en ambos casos, dicha pregunta queda abierta.

Denotemos por Y_s al conjunto de funciones seccionalmente suaves que mapean T_s a $\mathbf{R}^n$ y que satisfacen $y(s) = y(t_1) = 0$.

4.1 Ejemplo: Sean $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, y consideremos el problema de minimizar

$$I(x,u) = \frac{1}{2}\int_{-b/a}^{\pi-b/a} (at+b)\{u^2(t) - x^2(t)\}dt$$

sujeto a

a. $(x,u) \in X \times \mathcal{U}$.

b. $\dot{x}(t) = x^2(t) + u(t)$ $(t \in [-b/a, \pi - b/a])$.

c. $x(-b/a) = x(\pi - b/a) = 0$.

d. $(t, x(t), u(t)) \in [-b/a, \pi - b/a] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

En este caso, $T = [-b/a, \pi - b/a]$, $L(t,x,u) = \frac{1}{2}(at+b)(u^2 - x^2)$, $f(t,x,u) = x^2 + u$, $A(t) = 2x(t)$, $B(t) = 1$,

$$H(t,x,u,p,1) = px^2 + pu - \frac{1}{2}(at+b)(u^2 - x^2),$$

y las funciones ρ y σ están dadas por

$$\rho(t) = (at+b)v(t), \qquad \sigma(t) = -(2p(t) + (at+b))y(t) \quad (t \in T_s).$$

Nótese primero que, por 3.11(b), $R_2(0,0,0) = S(0,0,0)$. El conjunto $S(0,0,0)$ está dado por aquellos puntos $s \in [-b/a, \pi - b/a)$ para los que existe $y \in Y_s$ tal que

i. $\int_s^{\pi-b/a}(at+b)(\dot{y}^2(t) - y^2(t))dt \le 0$.

ii. Si $(at+b)\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + (at+b)y(t) = 0$ $(t \in [s, \pi - b/a])$, entonces $s > -b/a$ y $(as+b)\dot{y}(s) \neq 0$.

Definiendo $y(t) := \operatorname{sen}(t + b/a)$ $(t \in [-b/a, \pi - b/a])$, tenemos que $y \in Y_{-b/a}$ y

$$\int_{-b/a}^{\pi-b/a} (at+b)(\dot{y}^2(t) - y^2(t))dt = 0,$$

por lo que se cumple la condición (i) del conjunto $S(0,0,0)$. Como y no satisface la ecuación diferencial

$$(at+b)\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + (at+b)y(t) = 0 \quad (t \in [-b/a, \pi - b/a]),$$

la condición (ii) también se cumple. De esta manera $-b/a \in S(0,0,0)$. Además, puesto que $(x,u,p) \equiv (0,0,0) \in \mathcal{E}$ y $(x,u) \equiv (0,0)$ es normal a (P) en T, por los Teoremas 3.8 y 3.10 el extremo $(x,u) \equiv (0,0)$ no es una solución del problema (P).

Por otro lado, el conjunto $C_2(0,0,0)$ está dado por aquellos puntos $s \in [-b/a, \pi - b/a)$ para los que existen $y \in Y_s$ y $c \in \mathbf{R}$ tales que

i. $\dot{y}(t)[c - \int_s^t (a\tau + b)y(\tau)d\tau - (at+b)\dot{y}(t)] \geq 0$ $(t \in [s, \pi - b/a])$.

ii. Si la desigualdad en (i) es igualdad para toda $t \in [s, \pi - b/a]$ entonces, para cualquier $\alpha \in \mathbf{R}$ que satisface

$$c - \int_s^t (a\tau + b)y(\tau)d\tau - (at+b)\dot{y}(t) = \Phi^*(t)\alpha \qquad (t \in [s, \pi - b/a]),$$

existe $w\colon [-b/a, s] \to \mathbf{R}$ seccionalmente continua con $z(s)(\Phi^*(s)\alpha - c) < 0$ donde z es la solución de $\dot{z}(t) = w(t)$, $z(-b/a) = 0$.

Notemos primero que se excluyen todas las funciones $y \in Y_s$, con derivada no nula, que tienen esquinas o picos. En efecto, supongamos que para alguna $d \in \mathbf{R}$ y una $\epsilon > 0$ con $[d-\epsilon, d+\epsilon] \subset (s, \pi - b/a)$, $\dot{y}(t) > 0$ para $t \in [d-\epsilon, d]$ y $\dot{y}(t) < 0$ para $t \in [d, d+\epsilon]$. En este caso (i) implica que

$$c - \int_s^t (a\tau + b)y(\tau)d\tau \geq (at+b)\dot{y}(t) > 0 \quad (t \in [d-\epsilon, d]),$$

$$c - \int_s^t (a\tau + b)y(\tau)d\tau \leq (at+b)\dot{y}(t) < 0 \quad (t \in [d, d+\epsilon])$$

lo que es una contradicción. Si intentamos con la función $y \in Y_{-b/a}$ usada para mostrar que $S(0,0,0) \neq \emptyset$ que está definida por $y(t) = \operatorname{sen}(t + b/a)$ $(t \in [-b/a, \pi - b/a])$, para obtener (i) necesitamos una constante $c \in \mathbf{R}$ tal que

$$c \geq a \operatorname{sen}(t + b/a) \quad (t \in [-b/a, \pi/2 - b/a)),$$

$$c \leq a \operatorname{sen}(t + b/a) \quad (t \in (\pi/2 - b/a, \pi - b/a])$$

lo que tampoco es posible.

4.2 Ejemplo: Consideremos el problema de minimizar

$$I(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \{(\operatorname{sen}^2 t)u^2(t) - (\cos^2 t)x^2(t)\}dt$$

sujeto a

a. $(x,u) \in X \times \mathcal{U}$.

b. $\dot{x}(t) = \cos(x^2(t) + \pi/2) + \operatorname{sen} u(t) \quad (t \in [0,\pi])$.

c. $x(0) = x(\pi) = 0$.

d. $(t, x(t), u(t)) \in [0,\pi] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

En este caso, $T = [0,\pi]$, $L(t,x,u) = \frac{1}{2}(u^2 \operatorname{sen}^2 t - x^2 \cos^2 t)$, $f(t,x,u) = \cos(x^2 + \pi/2) + \operatorname{sen} u$, $A(t) = -2x(t)\operatorname{sen}(x^2(t) + \pi/2)$, $B(t) = \cos u(t)$, $t \in [0,\pi]$,

$$H(t,x,u,p,1) = p\cos(x^2 + \pi/2) + p \operatorname{sen} u - 1/2(u^2 \operatorname{sen}^2 t - x^2 \cos^2 t),$$

y las funciones ρ y σ están dadas por

$$\rho(t) = (p(t)\operatorname{sen} u(t) + \operatorname{sen}^2 t)v(t) \qquad (t \in T_s)$$

$$\sigma(t) = (2p(t)\operatorname{sen}(x^2(t) + \pi/2) + 4x^2(t)p(t)\cos(x^2(t) + \pi/2) - \cos^2 t)y(t) \qquad (t \in T_s).$$

Por 3.11(b), $R_2(0,0,0) = S(0,0,0)$. El conjunto $S(0,0,0)$ está dado por aquellos puntos $s \in [0,\pi)$ para los que existe $y \in Y_s$ tal que

i. $\int_s^{\pi} \{(\operatorname{sen}^2 t)\dot{y}^2(t) - (\cos^2 t)y^2(t)\}dt \leq 0$.

ii. Si $(\operatorname{sen}^2 t)\ddot{y}(t) + 2(\operatorname{sen} t \cos t)\dot{y}(t) + (\cos^2 t)y(t) = 0$ $(t \in [s,\pi])$, entonces $s > 0$ y $\dot{y}(s)\operatorname{sen}^2 s \neq 0$.

Sea $y(t) := \operatorname{sen} t$ $(t \in [0,\pi])$. Por lo tanto, $y \in Y_0$ y

$$\int_0^{\pi} \{(\operatorname{sen}^2 t)\dot{y}^2(t) - (\cos^2 t)y^2(t)\}dt = 0$$

de manera que (i) se satisface. Como y no satisface la ecuación diferencial

$$(\operatorname{sen}^2 t)\ddot{y}(t) + 2(\operatorname{sen} t \cos t)\dot{y}(t) + (\cos^2 t)y(t) = 0 \qquad (t \in [s,\pi]),$$

la condición (ii) también se cumple. Concluimos que $0 \in S(0,0,0)$. Puesto que $(x,u,p) \equiv (0,0,0) \in \mathcal{E}$ y $(x,u) \equiv (0,0)$ es normal a (P) en T, por los Teoremas 3.8 y 3.10 el extremo $(x,u) \equiv (0,0)$ no es una solución del problema (P).

Ahora, el conjunto $C_2(0,0,0)$ está dado por aquellos puntos $s \in [0,\pi)$ para los que existen $y \in Y_s$ y $c \in \mathbf{R}$ tales que

i. $\dot{y}(t)[c - \int_s^t (\cos^2 \tau) y(\tau) d\tau - (\operatorname{sen}^2 t)\dot{y}(t)] \geq 0$ $(t \in [s,\pi])$

ii. Si la desigualdad en (i) es igualdad para toda $t \in [s,\pi]$ entonces, para cualquier $\alpha \in \mathbf{R}$ que satisface

$$c - \int_s^t (\cos^2 \tau) y(\tau) d\tau - (\operatorname{sen}^2 t)\dot{y}(t) = \Phi^*(t)\alpha \quad (t \in [s,\pi]),$$

existe $w\colon [0,s] \to \mathbf{R}$ seccionalmente continua con $z(s)(\Phi^*(s)\alpha - c) < 0$ donde z es la solución de $\dot{z}(t) = w(t)$, $z(0) = 0$.

Como en el ejemplo anterior, es fácil ver que se excluyen todas las funciones $y \in Y_s$, con derivada no nula, que tienen esquinas o picos. Si intentamos con la función $y \in Y_0$ usada para mostrar que $S(0,0,0) \neq \emptyset$ que está definida por $y(t) = \operatorname{sen} t$ $(t \in [0,\pi])$, entonces para la condición (i) necesitamos una constante $c \in \mathbf{R}$ tal que

$$c \geq -1/3 \cos^3 t + (\operatorname{sen}^2 t) \cos t \quad (t \in [0,\pi/2)),$$

$$c \leq -1/3 \cos^3 t + (\operatorname{sen}^2 t) \cos t \quad (t \in (\pi/2,\pi]).$$

Sin embargo, si definimos

$$f(t) := -1/3 \cos^3 t + (\operatorname{sen}^2 t) \cos t \qquad (t \in [0,\pi]),$$

tenemos que $f(\pi/2) = 0$ y, para $\delta > 0$ suficientemente pequeña, se tiene que $f(\pi/2 - \delta) > 0$ y $f(\pi/2 + \delta) < 0$. Por lo tanto, no existe ninguna constante $c \in \mathbf{R}$ que satisfaga ambas desigualdades.

Referencias

[1] Alekseev VM, Tikhomirov VM, Fomin SV (1987) *Optimal Control*, Consultants Bureau, New York

[2] Berlanga R, Rosenblueth JF (2002) *Jacobi's Condition for Singular Extremals: An Extended Notion of Conjugate Points*, Applied Mathematics Letters, **15**: 453-458

[3] Berlanga R, Rosenblueth JF (aceptado) *Extended Conjugate Points in the Calculus of Variations*, IMA Journal of Mathematical Control and Information

[4] Bliss GA (1946) *Lectures on the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, Chicago

[5] Bolza O (1904) *Lectures on the Calculus of Variations*, University of Chicago Press (Reprinted by Chelsea Press (1961))

[6] Cesari L (1983) *Optimization–Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York

[7] Clarke FH, Zeidan V (1986) *Sufficiency and the Jacobi Condition in the Calculus of Variations*, Canadian Journal of Mathematics, **38**: 1199-1209

[8] Ewing GM (1937) *Sufficient Conditions for a Non-regular Problem in the Calculus of Variations*, Bulletin of the American Mathematical Society, **43**: 371-376

[9] Ewing GM (1985) *Calculus of Variations with Applications*, Dover Publications, New York

[10] Gelfand IM, Fomin SV (1963) *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, New Jersey

[11] Giaquinta M, Hildebrandt S (1996) *Calculus of Variations I. The Lagrangian Formalism*, Springer-Verlag, Berlin

[12] Hestenes MR (1966) *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons, New York

[13] Loewen PD (1990) *Second-order Sufficiency Criteria and Local Convexity for Equivalent Problems in the Calculus of Variations*, Journal of Mathematical Analysis & Applications, **146**: 512-522

[14] Loewen PD, Zheng H (1994) *Generalized Conjugate Points for Optimal Control Problems*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **22**: 771-791

[15] McShane EJ (1942) *Sufficient Conditions for a Weak Relative Minimum in the Problem of Bolza*, Transactions of the American Mathematical Society, **52:** 344-379

[16] Rosenblueth JF (1988) *Systems with Time Delay in the Calculus of Variations: a Variational Approach*, IMA Journal of Mathematical Control and Information, **5:** 125-145

[17] Rosenblueth JF (1996) *Jacobi's Condition for the Lagrange Problem with Linear Dynamics*, Memorias del XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Colima, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones **18**: 125-138

[18] Rosenblueth JF (1999) *Variational Conditions and Conjugate Points for the Fixed-endpoint Control Problem*, IMA Journal of Mathematical Control and Information, **16:** 147-163

[19] Rosenblueth JF (2002) *Conjugate Intervals for Singular Trajectories in the Calculus of Variations*, Memorias del XXXIV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México, Aportaciones Matemáticas **30**: 81-98

[20] Rosenblueth JF (2003) *Conjugate Intervals for the Linear Fixed-endpoint Control Problem*, Journal of Optimization Theory & Applications, **116**: 393-420

[21] Rosenblueth JF, Sánchez Licea G (aceptado) *Strengthening Weierstrass' Condition*, IMA Journal of Mathematical Control and Information

[22] Rosenblueth JF, Sánchez Licea G (aceptado) *A new sufficiency proof for strong minima in the calculus of variations*, Applied Mathematics Letters

[23] Sagan H (1969) *Introduction to the Calculus of Variations*, McGraw-Hill, New York

[24] Sánchez Licea Gerardo (2000) *Puntos Conjugados en Control Optimo*, Tesis Licenciatura, UNAM

[25] Troutman JL (1996) *Variational Calculus and Optimal Control, Optimization with Elementary Convexity*, Springer-Verlag, New York

[26] Zeidan V, Zezza P (1988) *The Conjugate Point Condition for Smooth Control Sets*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **32**: 572-589

[27] Zeidan V (1996) *Admissible Directions and Generalized Coupled Points for Optimal Control Problems*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **26**: 479-507