



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONEXIDAD EN JAULAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
M A T E M Á T I C O
P R E S E N T A :
DIEGO ANTONIO GONZÁLEZ MORENO



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS
DR. JUAN JOSÉ MONTELLANO GALLETEROS

2004





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Conexidad en Jaulas

realizado por Diego Antonio González Moreno

con número de cuenta 09758209-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de Tesis
Propietario

Dr. Juan José Montellano Ballesteros

Propietario

Dr. Javier Bracho Carpizo

Propietario

Dr. Francisco Larrión Riveroll

Suplente

M. en C. Mika Olsen

Suplente

Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo

Antonio B
Bracho
Riveroll
Mika Olsen
Garañán

Consejo Departamental de Matemáticas.

JAG

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

CONSEJO DEPARTAMENTAL

MATEMÁTICAS

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recapcional.

NOMBRE: Diego Antonio Gonzalez
Morano

FECHA: 20/05/2004

FIRMA: DA

a Blanca, a Alfonso, a Pablo

Agradecimientos

Pocas veces en mi vida he dado las gracias de verdad, las que se dicen con el corazón a flor de piel y la conciencia a todo lo que da.

Agradezco a Víctor Neumann Lara por sus enseñanzas, consejos y regaños.

A mi madre quien siempre se preocupó por mis estudios, que tanto me apoyó, me animó, y esperó con gran ilusión esta tesis.

A mi padre y a Pablo que, de una forma tan singular, me apoyaron.

De manera muy especial agradezco a mis compadres y amigos de toda la vida Camilo, Edgar, Mariano y Fernando, por compartir las experiencias de la edad.

Al buen Pollo por su humor y nuestras aventuras en Xilitla y Europa.

A mi amiga Betzabé, por esas divertidas estudiadas.

A Aurélie a pesar del tiempo y la distancia.

Mientras realizaba mi tesis conocí a gente que me ayudó mucho, por eso quiero agradecer a Amanda, Mika, Mukuy.

A Juancho por su apoyo, confianza y ayudarme a concluir este trabajo.

A Roli y Luis por sus consejos.

A Rojo y Krusty por su amistad.

A Gonzalo y Norza por esas horas rockanroleras.

A Gabriel que se nos fue antes de tiempo.

Finalmente quiero dar las gracias a todos mis sinodales por el tiempo invertido en la revisión de esta tesis y sus correcciones.

Contenido

Prólogo	1
Introducción	3
Definiciones Básicas	5
1 Propiedades de las Jaulas	9
1.1 Existencia de las $(k; g)$ -jaulas	9
1.2 Algunas cotas de las $(k; g)$ -jaulas	12
1.3 $(k; 3)$ -jaulas y $(k; 4)$ -jaulas	13
1.4 Algunas $(3; g)$ -jaulas son únicas	14
1.5 Monotonía de las Jaulas	19
1.6 Diámetro de una $(k; g)$ -jaula	23
2 Un poco sobre los conjuntos de corte	26
2.1 Subgráfica especial	26
2.2 Diámetro de los conjuntos de corte	29
3 Ciclos separadores y conexidad de las jaulas	38
3.1 Ciclos no separadores	38
3.2 Conexidad de las jaulas	46

4 Superconexidad y casi 4-conexidad	48
4.1 Preliminares	48
4.2 Superconexidad y casi 4-conexidad.....	60
Bibliografía	67

Prólogo

“Los cronopios y famas decidieron visitar un día Las Islas Canarias. Al llegar, el cronopio se convirtió en un canario universal y el fama en el eterno vendedor de jaulas. “

Julio Cortazar

Después de nacer ¿qué puede ser más natural que morir? Entonces, si la muerte es algo tan natural como respirar o amar, por qué uno no puede dejar de sentirse triste cuando alguien muere. Dicen algunos hombres viejos y entendidos que la vida dura muchos años, pero que nunca son suficientes. Víctor nunca iba a vivir los años suficientes.

Es difícil explicar por qué me gustan las matemáticas, en especial por qué me gusta la Teoría de Gráficas. Supongo que es algo que tengo desde que nací, pero ese amor innato que sentía tuvo que ser puesto a flote por mi maestro Víctor Neumann Lara. Mi amor a las matemáticas y la persona que soy no puede ser explicada sin la presencia de Víctor, gracias a él y a sus conocimientos pude fijar mi interés y fascinación en esta rama de las matemáticas.

Las matemáticas son las encargadas de darle la vuelta a mi reloj y además de parecerme divertidas e interesantes las siento profundamente bellas; cómo no maravillarse con la Topología y todas las curiosidades que hay en su entorno, o la vertiginosa Teoría de los Números Transfinitos y por supuesto con la excitante Teoría de Gráficas, la cual, a pesar de su juventud es rica en resultados teóricos y aplicaciones a problemas del mundo real.

Después de llevar la materia de Teoría de las Gráficas y gracias al placer que sentía al trabajar con las gráficas decidí pedirle a Víctor la dirección de mi tesis de licenciatura. Ante este hecho y al conocer que sentía especial atracción por el tema de conexidad en

las gráficas, Víctor decidió darme a leer un artículo sobre la conexidad en jaulas (gráficas regulares con cuello dado y orden mínimo). Después de su lectura quedé encantado con el tema y fue así que iniciamos la tesis.

El tiempo dedicado a este trabajo fue muy gratificante para mí, tanto por la participación en el seminario de Teoría de Gráficas, como por las numerosas entrevistas que tuve con Víctor en las que se me abrían y aclaraban nuevos e interesantes nociones y conceptos, y finalmente las agradables reuniones con Juancho hasta la conclusión del mismo.

El trabajo de tesis que se presenta a continuación es principalmente el resultado de consultar y estudiar algunos artículos que existen sobre el tema de jaulas.

Sólo deseo que este trabajo pueda contribuir en algo, aunque sea en $\varepsilon > 0$, al crecimiento de la Teoría de las Gráficas.

Introducción

Una $(k; g)$ -jaula es una gráfica k -regular con cuello g de orden mínimo. La primera vez que aparece el concepto de $(k; g)$ -jaula de manera formal fue en un artículo de Tutte intitulado *A Family of Cubical Graphs* [17]; a raíz de este artículo Sachs y Erdős, en la década de los sesenta, demostraron en [7] que para cualquier pareja de enteros $k \geq 2$ y $g \geq 3$ existe una $(k; g)$ -jaula, dando una cota superior para el orden de la misma. Posteriormente al trabajo de Erdős y Sachs sobre jaulas, han aparecido diversos artículos sobre el tema, los cuales incluyen interesantes problemas abiertos [6, 9, 11, 12].

Un primer problema que se plantea es determinar el orden de las $(k; g)$ -jaulas para k y g dados. El problema en general es bastante complejo y los resultados obtenidos hasta la fecha dejan un espacio muy grande entre las cotas inferiores y superiores.

Otro problema, el cual ha sido considerado recientemente, es la conexidad en las jaulas, y es precisamente el tema de esta tesis. El objeto de esta tesis es presentar algunos resultados recientes sobre la conexidad de las jaulas, en particular algunos expuestos en [6, 9, 11, 12], así como otros resultados y referencias relacionadas con el tema.

En el primer capítulo se demuestra la existencia de las jaulas, la monotonía estrictamente creciente del orden con respecto al cuello (con k fijo) y se presentan algunas cotas relativas al orden y al diámetro de las mismas. También se considera en detalle las $(k; 3)$ -jaulas, las $(k; 4)$ -jaulas y la gráfica de Petersen, que es la única $(3; 5)$ -jaula.

En el segundo capítulo se introducen conceptos y resultados auxiliares que serán herramientas fundamentales en el estudio de la conexidad de las jaulas. Dichos resultados se usan para obtener información sobre el diámetro de los conjuntos de corte de las jaulas.

En el tercer capítulo se demuestra que cada jaula contiene un cuello que no separa a la gráfica. Huang y Muyabi [11] conjeturan que ningún cuello es separador y probaron su conjetura cuando el cuello tiene longitud par. En este capítulo se presenta dicha demostración. Finalmente se demuestra el teorema principal de esta tesis, a saber, que todas las $(k; g)$ -jaulas con $k \geq 3$ y $g \geq 3$ son 3-conexas [6]. Este resultado está dirigido a probar la conjetura de Fu, Huang y Rodger [9], la cual plantea que toda $(k; g)$ -jaula es k -conexa.

El cuarto capítulo está dedicado a la superconexidad (se dice que una jaula cúbica es superconexa si todo conjunto de corte mínimo es vecindad de un vértice) y a la casi 4-conexidad de las jaulas cúbicas (una jaula cúbica es casi 4-conexa si es superconexa y la remoción de todo conjunto de corte mínimo deja exactamente dos componentes conexas); en este capítulo se demuestra que toda jaula cúbica de cuello al menos 4 es superconexa y toda jaula cúbica de cuello al menos 5 es casi 4-conexa. A este respecto es importante mencionar que Marcote, Pelayo y Balbuena [12] conjeturan que toda $(k; g)$ -jaula es k -superconexa y casi $k + 1$ -conexa, es decir, que la remoción de cualquier conjunto de corte mínimo deja sólo dos componentes conexas.

Definiciones Básicas

Una gráfica G es un par ordenado $(V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío de elementos llamados vértices y $E(G)$ es un conjunto finito de pares no ordenados de elementos de $V(G)$ llamados aristas. Una arista $\{x, y\}$ de G será denotada como xy .

Una gráfica G se dice *simple* si en $E(G)$ todos los pares no ordenados son distintos y cada par está formado por dos elementos distintos de $V(G)$. En el presente trabajo consideraremos únicamente gráficas simples.

El *orden* de una gráfica es el número de sus vértices y el *tamaño* el número de sus aristas.

Dada una gráfica G , una *subgráfica* de G es una gráfica H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Cuando $V(H) = V(G)$ a H se le llama *subgráfica generadora* de G .

Dada una gráfica G y una subgráfica H de G , un par de vértices x, y de H se dice que son *adyacentes*, o *vecinos*, en H si la arista xy pertenece a $E(H)$. El conjunto de vértices de H que son vecinos a un vértice x se denomina *vecindad de x en H* y se le denota como $N_H(x)$. Al cardinal $|N_H(x)|$ se le llama *valencia*, o *grado*, de x en H y se le denota como $val_H(x)$. A un vértice de valencia 0 se le denomina *punto* o *vértice aislado*. $\Delta(H)$ y $\delta(H)$ denotan respectivamente a la máxima y mínima valencia en H entre los vértices de H . Si todos los vértices de H tienen la misma valencia k se dice que H es *k -regular*. Si $k = 3$, H se denomina gráfica *cúbica*. A un conjunto de vértices de H tal que ningún par de ellos sea adyacente se llama *independiente*. Así mismo, a un conjunto de aristas de H tal que son ajenas 2 a 2 se le denomina igualmente *independiente*.

Un camino W en una gráfica H es una sucesión finita de vértices y aristas de H de manera alternada $W = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$ en la cual la arista $a_i = v_{i-1}v_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. A un camino se le denomina *trayectoria* si todos sus vértices son distintos y se le llama *xy-trayectoria* si es una trayectoria y $v_0 = x$ y $v_n = y$. Un *ciclo* es un camino en el que todos sus vértices son distintos salvo el primero y el último. Una trayectoria $(v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$ será denotada como $v_0v_1, \dots, v_{n-1}v_n$.

La *longitud de una trayectoria* $T = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$ es n , al igual que la *longitud de un ciclo* $C = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_n, v_n)$. La *distancia* entre dos vértices x, y de H es la mínima longitud de todas las *xy-trayectorias* en H y se denota como $d_H(x, y)$. Si entre dos vértices x, y de H no existen *xy-trayectorias*, entonces $d_H(x, y) = \infty$. Una *xy-geodésica* en H es una *xy-trayectoria* de longitud mínima. La máxima de las distancias entre las parejas de vértices de H es llamada el diámetro de H y se le denota como $\text{diam}(H)$. La distancia entre una arista x, y y un vértice z se define como $\min\{d_H(x, z), d_H(y, z)\}$, y la distancia entre un vértice x y un subconjunto $S \subseteq V(H)$ se denota como $d_H(S, x)$ y se define como $\min\{d(x, y) | y \in S\}$.

Un ciclo de longitud n es llamado *n-ciclo*, y si $n = 3$ también es llamado triángulo. El mínimo de las longitudes de los ciclos en H es llamado el *cuello* de H y se le denota como $c(H)$. A los $c(H)$ -ciclos de H se les llama *cuellos*.

Dado $S \subseteq V(H)$, $N_H(S)$ denotará el conjunto de vértices en $V(H) - S$ que son vecinos de algún vértice en S . La subgráfica M de H tal que $V(M) = S$ y $E(M)$ es el conjunto de aristas de H contenidas en S se le denomina *subgráfica inducida* y se le denota como $H[S]$. Si M es una subgráfica de H , $N_M(S) = V(M) \cap N_H(S)$. $H - S$ denota a

la subgráfica de H resultante de eliminar de H los vértices de S y las aristas de H que contengan algún elemento de S . Si $S = \{x\}$, escribimos $H - x$ en lugar de $H - \{x\}$. Dado $A \subseteq E(H)$, $H - A$ denota la subgráfica de H resultante de eliminar de H las aristas de A . Si $A = \{a\}$, escribimos $H - a$ en lugar de $H - \{a\}$. Dado A un conjunto de pares no ordenados de $V(H)$, $H + A$ denota la gráfica resultante de añadir a H las aristas definidas por los pares en A . Si $A = \{a\}$, escribimos $H + a$ en lugar de $H + \{a\}$. Dadas dos gráficas G' y G'' , $G' \cup G''$ denota a la gráfica G tal que $V(G) = V(G') \cup V(G'')$ y $E(G) = E(G') \cup E(G'')$.

La subgráfica H se dice que es *conexa* si para todo par de vértices x y y de H existe una xy -trayectoria en H . Las componentes conexas de H son las subgráficas conexas maximales de H . Si para algún $S \subseteq V(H)$, $H - S$ tiene más componentes conexas que H , se dice que S es un *conjunto de corte*, o *separador* de H . Igualmente si M es una subgráfica de H tal que $V(M)$ es un conjunto separador, decimos que M *separa a* H . Si $S = \{x\}$ es un conjunto separador, decimos que x es un *vértice de corte*. Un conjunto de corte se le llama *trivial* si es la vecindad de un vértice. Al cardinal mínimo de un conjunto de corte de la subgráfica H se le denomina la *conexidad* de H y a la gráfica H se le llama *k-conexa*. A los conjuntos de corte de H de cardinal mínimo se les denomina *cortes mínimos*.

Dos gráficas son *isomorfas* si existe una biyección entre sus vértices de manera tal que dos vértices cualesquiera de una de ellas sean adyacentes si y sólo si las imágenes correspondientes son adyacentes en la otra gráfica.

Una *gráfica completa* es aquella en la que cada uno de los vértices es adyacente a todos los demás. Si G es completa y tiene n vértices escribimos $G = K_n$.

Una gráfica es *bipartita* si el conjunto de sus vértices se puede partir en dos subconjuntos cada uno independiente. La *gráfica bipartita completa* $K_{n,m}$ tiene $n + m$ vértices, un conjunto independiente de orden n , otro de orden m y mn aristas.

Un árbol es una gráfica conexa sin ciclos.

Además de ésta terminología básica, a lo largo de la tesis iremos introduciendo algunos otros conceptos según lo vayamos necesitando.

Capítulo 1

Propiedades de las Jaulas

1.1 Existencia de las $(k; g)$ -jaulas

Dados dos enteros k y g con $k \geq 2$ y $g \geq 3$, una $(k; g)$ -gráfica es una gráfica k -regular con cuello g . Una $(k; g)$ -jaula es una $(k; g)$ -gráfica con el menor número posible de vértices. Sea $f(k; g)$ el entero más pequeño tal que existe una $(k; g)$ -gráfica con $f(k; g)$ vértices.

No es difícil ver que las $(2; g)$ -jaulas son los g -ciclos y por tanto $f(2; g) = g$, pero el hecho de que para cada par de enteros $k, g \geq 3$ el número $f(k; g)$ existe, no es trivial y fue mostrado por Erdős y Sachs [7] en el siguiente resultado.

Teorema 1.1 *Para todo par de enteros $k, g \geq 3$, el número $f(k; g)$ existe y*

$$f(k; g) \leq (k-1) + \sum_{i=1}^{g-1} (k-1)^i + \sum_{i=1}^{g-2} (k-1)^i.$$

Demostración. Sea $p = (k-1) + \sum_{i=1}^{g-1} (k-1)^i + \sum_{i=1}^{g-2} (k-1)^i$. Obsérvese que $p \geq g$. Sea S el conjunto de las gráficas H de orden p tales que $c(H) = g$ y $\Delta(H) \leq k$. Este conjunto es no vacío, pues la gráfica que consta de un g -ciclo y $p - g$ puntos aislados pertenece a S .

Para cada $H \in S$ definamos

$$M(H) = \{v \in V(H) \mid \text{val}_H(v) < k\}$$

y sea $m(H)$ la distancia máxima entre los vértices de $M(H)$.

Sea S_1 el conjunto de todas las gráficas de S con el mayor número posible de aristas y S_2 el conjunto de todas las gráficas H de S_1 para las cuales $|M(H)|$ es máximo. De entre todas las gráficas de S_2 escojamos una gráfica G tal que $m(G)$ es máximo.

Probaremos que $M(G) = \emptyset$, con lo cual habremos demostrado el Teorema.

Sean $u, v \in M(G)$ tales que $d_G(u, v) = m(G)$. Obsérvese que $M(G)$ puede tener un sólo vértice, con lo cual $u = v$ y $m(G) = 0$. Supongamos que $m(G) \geq g - 1 \geq 2$. Al agregar la aristas uv a G , obtenemos una nueva gráfica G' de orden p , $c(G') = g$ y $\Delta(G') \leq k$. Por lo tanto $G' \in S$, y G' tiene más aristas que G , lo cual es una contradicción. Así que $d_G(u, v) = m(G) \leq g - 2$.

Denotemos por W el conjunto de todos los vértices w de G tales que $d_G(u, w) \leq g - 2$ ó $d_G(v, w) \leq g - 1$. Es claro que $u, v \in W$. El número de vértices distintos a u que están a distancia a lo más $g - 2$ de u no puede ser mayor a

$$\sum_{i=1}^{g-2} (k-1)^i,$$

y el número de vértices distintos a v que están a distancia a lo más $g - 1$ de v no puede exceder a

$$\sum_{i=1}^{g-1} (k-1)^i.$$

Entonces, como $d_G(u, v) \leq g - 2$, se sigue que

$$|W| \leq \sum_{i=1}^{g-1} (k-1)^i + \sum_{i=1}^{g-2} (k-1)^i = p - (k-1) < p.$$

Por tanto sabemos que existe un vértice $w_1 \in V(G) - W$ donde $d_G(u, w_1) \geq g - 1$ y $d_G(v, w_1) \geq g$.

Como $d_G(u, w_1) > m(G)$ y $u \in M(G)$ tenemos que $w_1 \notin M(G)$ y $\text{val}_G(w_1) = k \geq 3$. Por lo tanto existe una arista e incidente a w_1 cuya supresión no modifica el cuello. Supongamos que $e = w_1w_2$. Como $d_G(v, w_2) \geq d_G(v, w_1) - d_G(w_1, w_2) \geq g - 1 > m(G)$, entonces $w_2 \notin M(G)$ y $\text{val}_G(w_2) = k \geq 3$.

Sea $G_1 = (G + uw_1) - w_1w_2$. Es fácil ver que $G_1 \in S$, más aún $G_1 \in S_1$; además el conjunto $M(G_1)$ contiene a w_2 y a todos los vértices de $M(G)$ con la posible excepción de u . Por la manera en que G fue escogida tenemos que $|M(G_1)| \leq |M(G)|$, así que $u \notin M(G_1)$ y $|M(G_1)| = |M(G)|$. Por lo tanto $\text{val}_{G_1}(u) = k$ y $G_1 \in S_2$.

Probaremos ahora que $|M(G_1)| \geq 2$, de donde se sigue claramente que $v, w_2 \in M(G_1)$.

Si $M(G_1) = \{w_2\}$, entonces $M(G) = \{u\}$ y $u = v$. Como $\text{val}_{G_1}(u) = k$, entonces $\text{val}_G(u) = k - 1$ y por tanto G tiene un vértice de valencia $k - 1$ y $p - 1$ vértices de valencia k . Entonces $k - 1$ y $p - 1$ son pares pero p es múltiplo de $(k - 1)$ lo cual es una contradicción. Así $v, w_2 \in M(G_1)$ y por tanto $d_{G_1}(v, w_2) \leq m(G_1) \leq m(G) \leq g - 2$.

Sea P una vw_2 -geodésica en G_1 . Si P estuviera contenida en G tendría longitud al menos $g - 1$ lo cual es imposible. Se sigue entonces que P no está contenida en G y por lo tanto contiene la arista uw_1 . Entonces P contiene una vu -trayectoria contenida en G de longitud al menos $m(G)$ o una vw_1 -trayectoria contenida en G de longitud al menos $g > m(G)$. En ambos casos tenemos que la longitud de P es mayor a $m(G_1)$, lo cual es una contradicción. \square

1.2 Algunas cotas de las $(k;g)$ -jaulas

El Teorema 1.1 nos da un cota superior de $f(k; g)$, a saber,

$$f_1(k; g) = (k-1) + \sum_{i=1}^{g-1} (k-1)^i + \sum_{i=1}^{g-2} (k-1)^i.$$

En cuanto a las cotas inferiores de $f(k; g)$ tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2 *Dados $k, g \geq 3$ se tiene que $f_0(k; g) \leq f(k; g)$, donde*

$$f_0(k; g) := \begin{cases} \frac{k(k-1)^n - 2}{k-2} & \text{si } g = 2n + 1 \\ \frac{2(k-1)^n - 2}{k-2} & \text{si } g = 2n. \end{cases}$$

Demostración. Sea G una $(k; g)$ -jaula con $k, g \geq 3$.

Caso 1. $g = 2n + 1$.

Sea $u \in V(G)$. No es difícil ver que el conjunto de aquellos vértices que distan de u en a lo más n induce un árbol en G , así que

$$\begin{aligned} |V(G)| &= f(k; g) \geq 1 + k + k(k-1) + k(k-1)^2 + \dots + k(k-1)^{n-1} \\ &= 1 + k \sum_{i=0}^{n-1} (k-1)^i = \frac{k(k-1)^n - 2}{k-2} = f_0(k; g). \end{aligned}$$

Caso 2. $g = 2n$.

Sea $\alpha \in A(G)$. El conjunto de los vértices que distan de α en a lo más $n-1$ induce un árbol en G , así que

$$\begin{aligned} |V(G)| &= f(k; g) \geq 2(1 + (k-1) + (k-1)^2 + \dots + (k-1)^{n-1}) \\ &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} (k-1)^i = \frac{2(k-1)^n - 2}{k-2} = f_0(k; g). \end{aligned}$$

□

Por lo visto anteriormente se tiene que $f_0(k; g) \leq f(k; g) \leq f_1(k; g)$. En la tabla siguiente se dan algunos valores de estas funciones para $k = 3$.

$(3; g) - \text{jaula}$	$f_0(3; g)$	$f(3; g)$	$f_1(3; g)$
(3; 3)	4	4	9
(3; 4)	6	6	18
(3; 5)	10	10	35
(3; 6)	14	14	68
(3; 7)	22	24	133
(3; 8)	30	30	262
(3; 9)	46	58	766
(3; 10)	62	70	1032
(3; 11)	94	112	2057
(3; 12)	126	126	4106

1.3 $(k; 3)$ -jaulas y $(k; 4)$ -jaulas

El problema de determinar, para $k \geq 2$ y $g \geq 3$, el orden mínimo $f(k; g)$ de una gráfica k -regular con cuello g , es en general bastante complicado. Los casos simples son los siguientes:

1. Las $(2; g)$ -jaulas son los ciclos de longitud g , así que $f(2; g) = g$.
2. La única $f(k; 3)$ -jaula es K_{k+1} , luego $f(k; 3) = k + 1$.
3. $f(k; 4) = 2k$ y la única $(k; 4)$ -jaula es la gráfica bipartita $K_{k,k}$, como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 1.1 Para $k \geq 2$ tenemos que $f(k, 4) = 2k$ y la única $(k; 4)$ -jaula es $K_{k,k}$.

Demostración. Supongamos que G es una $(k, 4)$ -jaula. Sea $u_1 \in V(G)$ y denotemos por v_1, v_2, \dots, v_k el conjunto de vértices de G que son adyacentes a u_1 . Como $g \geq 4$ sabemos que G no tiene triángulos y por lo tanto el conjunto v_1, v_2, \dots, v_k es un conjunto independiente, es decir, que v_1 no es adyacente a ninguno de los vértices v_i con $2 \leq i \leq k$. Entonces G contiene al menos $k - 1$ vértices adicionales, adyacentes a v_1 , a los que llamaremos u_2, u_3, \dots, u_k . Se sigue así que $f(k; 4) \geq 2k$ y claramente u_1, u_2, \dots, u_k es un conjunto independiente. Por tanto la gráfica G contiene dos conjuntos independientes ajenos, cada uno de orden k , cada vértice tiene valencia k y tiene orden al menos $2k$. Como $K_{k,k}$ es una $(k; 4)$ -gráfica de orden $2k$, G tiene orden a lo más $2k$ y el resultado se sigue. \square

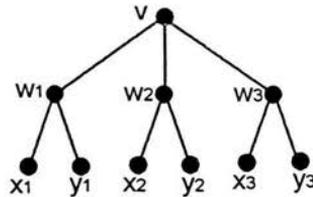
1.4 Algunas $(3; g)$ -jaulas son únicas

Por el Teorema 1.2 sabemos que $f(3; 5) \geq 10$. Es fácil ver que la gráfica de Petersen es una gráfica 3-regular, con cuello 5 y 10 vértices, esto es, la gráfica de Petersen es una $(3; 5)$ -jaula. Para ver que es la única, veamos que cualquier otra $(3; 5)$ -jaula es isomorfa a la gráfica de Petersen.

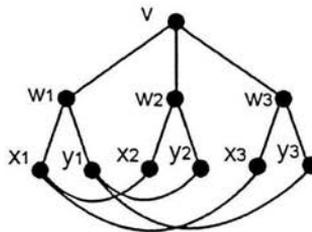
Teorema 1.3 *La gráfica de Petersen es la única $(3; 5)$ -jaula.*

Demostración. Sea G una $(3; 5)$ -jaula, sea $v \in V(G)$ y w_1, w_2, w_3 los tres vecinos de v . Como el cuello de G es 5, w_i no puede ser adyacente a w_j para $i, j = 1, 2, 3$. Para $i = 1, 2, 3$, sean x_i y y_i los vértices adyacentes a w_i (distintos a v). Es claro que todos estos

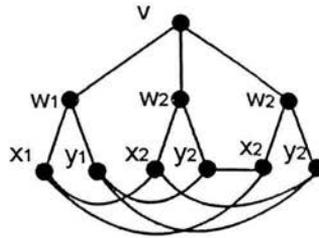
vértices son distintos entre si y cada uno de ellos sólo es adyacente a uno de los vértices w_i .



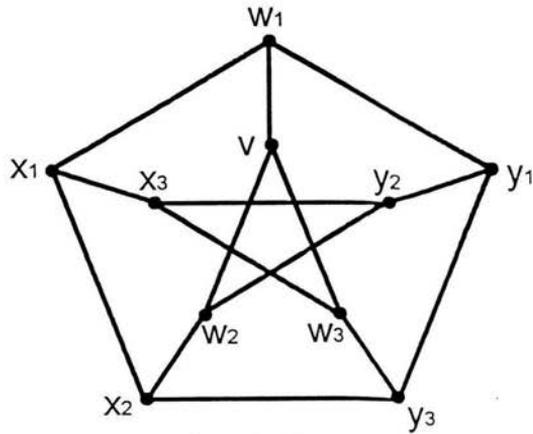
Como la gráfica G es 3-regular, con 10 vértices y cuello 5, el vértice x_1 tiene que ser adyacente a uno de los vértices x_2 y y_2 y a uno de los vértices x_3 y y_3 . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que x_1 es adyacente a x_2 y x_3 . Eso obliga que y_1 sea adyacente a y_2 y a y_3



lo cual implica que las aristas x_2y_3 y y_2x_3 están en G .



No es difícil ver que la gráfica resultante es isomorfa a la gráfica de Petersen,

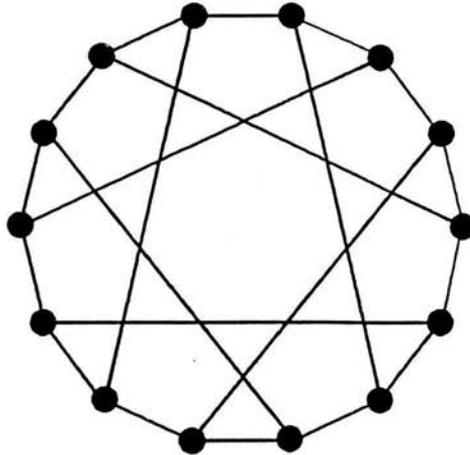


Gráfica de Petersen

por lo tanto, la gráfica de Petersen es la única $(3; 5)$ -jaula.

□

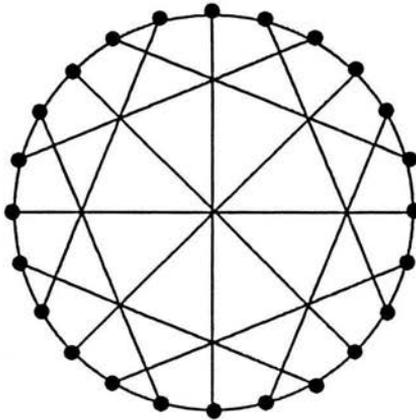
De manera similar se puede probar que la gráfica de Heawood es la única $(3; 6)$ -jaula.



Gráfica de Heawood

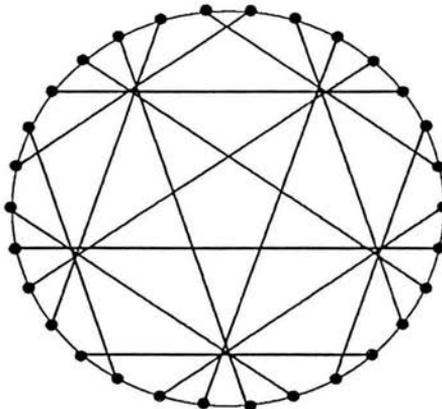
A continuación presentamos algunos resultados más, de los cuales omitimos su demostración, al respecto de la unicidad de algunas $(3; g)$ -jaulas.

Teorema 1. 4 [13] *La única $(3; 7)$ -jaula es la gráfica de McGee.*



Gráfica de McGee

Teorema 1. 5 [13] *La única $(3; 8)$ -jaula es la gráfica de Tutte.*



Gráfica de Tutte

La unicidad de las $(3; g)$ -jaulas se rompe cuando $g = 9$, como se ve en el siguiente

Teorema.

Teorema 1.6 [2] *Existen exactamente 18 distintas $(3; 9)$ -jaulas.*

1.5 Monotonía de las Jaulas

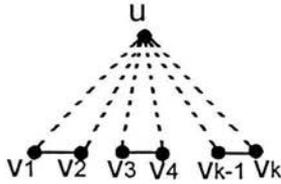
Teorema 1.7 [9] *Para toda $k \geq 3$ y para todo par de enteros g_1, g_2 con $3 \leq g_1 < g_2$ tenemos que $f(k; g_1) < f(k; g_2)$.*

Demostración. Es claro que sólo necesitamos demostrar que $f(k; g) < f(k; g + 1)$.

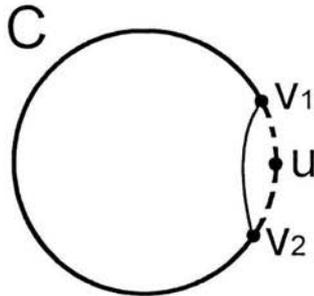
Sea G una $(k; g + 1)$ -jaula.

Caso 1. k es par.

Sea C un ciclo de longitud $g + 1$ en G que contenga a las aristas uv_1 y uv_2 . Sea $N_G(u) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ los vecinos de u , y sea $E' = \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{k-1}v_k\}$. Obsérvese que como $g + 1 \geq 4$, entonces no hay triángulos en G y por lo tanto $N_G(u)$ es un conjunto independiente de G , así $E' \cap E(G) = \emptyset$. Sea $G' = (G - u) + E'$.



Vamos a mostrar que en G' hay al menos un ciclo de longitud g y que no podemos tener ciclos de longitud menor. Es fácil ver que G' tiene el ciclo $C' = (C - u) + v_1v_2$ que tiene longitud g .

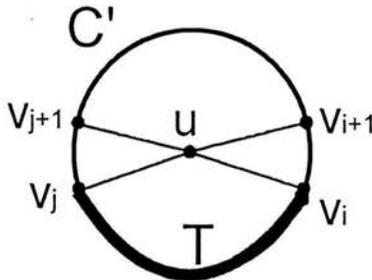


Ahora falta ver que no podemos tener un ciclo de longitud menor.

Sea C' un ciclo en G' . Si $E' \cap E(C') = \emptyset$, entonces C' es un ciclo en G y por lo tanto tiene longitud al menos $g + 1$. Supongamos que $E' \cap E(C') \neq \emptyset$.

Como las aristas de E' están alternadas en C' , entonces existe una trayectoria T en C' totalmente contenida en G que va de v_i a v_j para alguna $i = 1, \dots, k$ y $j = 1, \dots, k$.

Entonces $T \cup \{v_i u, v_j u\}$ forma un ciclo contenido en G que tiene longitud al menos $g + 1$, así que C' tiene longitud al menos g , pues contiene a T y al menos a una arista en E' .

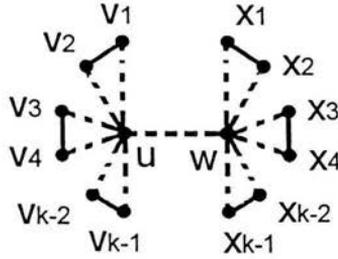


Así, G' es una $(k; g)$ -gráfica, y por tanto $f(k; g) \leq |V(G')| < |V(G)| = f(k; g + 1)$.

Caso 2. k es impar.

Sea C un ciclo de longitud $g + 1$ en G que contenga a las aristas uv_1 y uv_2 , y sea $N_G(u) = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, w\}$. Como C es un cuello entonces C es un ciclo inducido en G y por lo tanto $w \notin V(C)$. Sea $N_G(w) = \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, u\}$. Como $g + 1 \geq 4$, entonces $N_G(u)$ y $N_G(w)$ son conjuntos independientes y $N_G(u) \cap N_G(w) = \emptyset$, pues sino tendríamos un ciclo de longitud 3 en la gráfica G .

Sea $E' = \{v_1 v_2, v_3 v_4, \dots, v_{k-2} v_{k-1}, x_1 x_2, x_3 x_4, \dots, x_{k-2} x_{k-1}\}$.

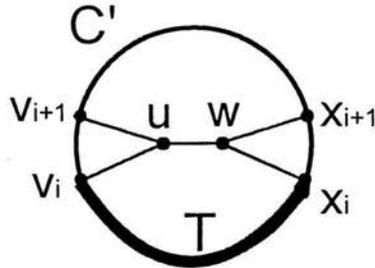


Obsérvese que $E' \cap E(G) = \emptyset$ y que E' es un conjunto independiente de aristas. Sea $G' = (G - \{u, w\}) + E'$.

Veamos que en G' hay al menos un ciclo de longitud g y que no podemos tener ningún ciclo de una longitud menor.

Es claro que el ciclo $(C - u) + v_1v_2$ es un ciclo en G' de longitud g . Sea C' un ciclo en G' . Si $E(C') \cap E' = \emptyset$, entonces C es un ciclo en G y por lo tanto tiene longitud al menos $g + 1$.

Supongamos que $E(C') \cap E' \neq \emptyset$. Si en la intersección sólo hay aristas definidas por los vecinos de u , o sólo hay aristas definidas por los vecinos de w , de manera análoga al **Caso 1** se muestra que C' tiene longitud al menos g . Si en la intersección hay aristas de los dos tipos, existe una trayectoria T en C' entre un vecino v_i de u y un vecino x_j de w , tal que $E' \cap E(T) = \emptyset$. Esta trayectoria junto con las aristas uv_i, uw, wx_j forma un ciclo en G que tiene longitud al menos $g + 1$. Entonces el ciclo C' tiene longitud al menos g , pues contiene a T y al menos a dos aristas en E' .



Así vemos que G' es una $(k;g)$ -gráfica y entonces $f(k;g) \leq |V(G')| < |V(G)| = f(k;g+1)$. □

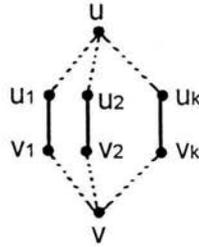
1.6 Diámetro de una $(k;g)$ -jaula

Teorema 1.8 Sea G una $(k;g)$ -jaula con $g \geq 3$. Entonces $\text{diam}(G) \leq g$.

Demostración. Supongamos que $\text{diam}(G) > g$. Entonces existen $u, v \in V(G)$ tal que $d_G(u, v) \geq g + 1 \geq 4$. Sean $N_G(u) = \{u_1, \dots, u_k\}$ y $N_G(v) = \{v_1, \dots, v_k\}$ los vecinos de u y v respectivamente. Como $g \geq 3$ tenemos que $N_G(u) \cap N_G(v) = \emptyset$, pues si no tendríamos que la distancia entre u y v sería 2, lo cual es una contradicción. Además, como $d_G(u, v) \geq g + 1$, tenemos que para cada $i, j \leq k$, $d_G(u_i, v_j) \geq g - 1 \geq 2$.

Sea $E' = \{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_kv_k\}$. Claramente $E' \cap E(G) = \emptyset$.

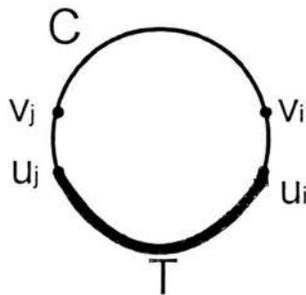
Sea $G' = (G - \{u, v\}) + E'$. Esta nueva gráfica es k -regular y como $|V(G')| < |V(G)|$, vemos entonces que para llegar a una contradicción con el Teorema 1.7 sólo resta mostrar que $c(G') \geq c(G)$. Obsérvese que por construcción el conjunto E' es independiente.



Sea C un ciclo en G' . Si $E(C) \cap E' = \emptyset$, entonces C es un ciclo contenido en G , y como G es una $(k;g)$ -jaula entonces la longitud de C es al menos g . Si $E(C) \cap E' \neq \emptyset$ tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Existe una $u_i u_j$ -trayectoria T en C contenida en $G - \{u, v\}$.

Obsérvese que en este caso al menos hay dos aristas de E' en C , y dado que u_i y u_j son adyacentes a u en G , la longitud de T es al menos $g - 2$. Por tanto la longitud de C es al menos $(g - 2) + 2 = g$.



Caso 2. Existe una $v_i v_j$ -trayectoria en C contenida en $G - \{u, v\}$.

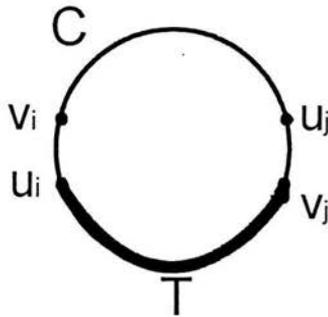
Este caso es análogo al caso anterior.

Caso 3. Existe una $u_i v_j$ -trayectoria T en C contenida en $G - \{u, v\}$ (i y j no necesariamente distintos).

En este caso la longitud de T es al menos $g - 1$, pues

$$d_{G-\{u,v\}}(u_i, v_j) \geq d_G(u_i, v_j) \geq g - 1.$$

Luego entonces la longitud de C es al menos $(g - 1) + 1 = g$.



Por lo visto en los casos anteriores se sigue que G' es una $(k; g')$ -gráfica con $g' \geq g$ contradiciendo el hecho que $g' < g$. □

Capítulo 2

Un poco sobre los conjuntos de corte

2.1 Subgráfica especial

Definición 2.1 Sea G una $(k; g)$ -jaula, H una subgráfica inducida de G y $B = \{v \in H \mid \text{val}_H(v) = k - 1\}$. Diremos que H es una subgráfica especial de G si

- i) $\delta(H) = k - 1$.
- ii) $d_H(x, y) \geq \lceil \frac{g}{4} \rceil - 1$ para todo $x, y \in B$.
- iii) Existe una permutación σ de B tal que para cada $x, y \in B$

$$D_\sigma(x, y) := d_H(x, y) + d_H(\sigma(x), \sigma(y)) + 2 \geq g.$$

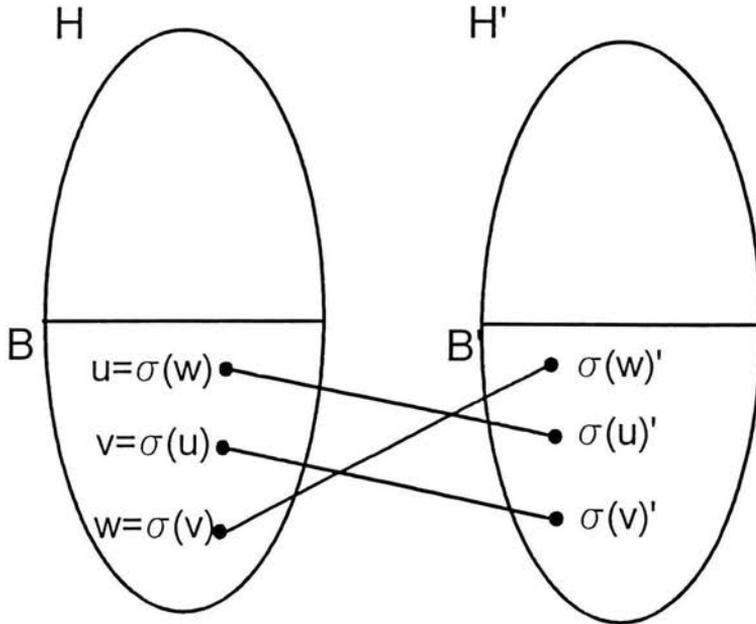
Lema 2.1 Si G es una $(k; g)$ -jaula y H es una subgráfica especial de G , entonces

$$|V(H)| \geq \frac{|V(G)|}{2}.$$

Demostración. Sea G una $(k; g)$ -jaula y H una subgráfica especial de G . Sea H' una copia isomorfa de H tal que $V(H) \cap V(H') = \emptyset$, y B' la copia de B en H' . Para todo vértice x en H , sea x' su copia en H' . Formemos una nueva gráfica de la siguiente manera:

$$G' = (H \cup H') + \{x\sigma(x)' \mid x \in V(B) \text{ y } \sigma(x)' \in V(B')\}.$$

Obsérvese que G' es una gráfica regular de grado k y además $|V(G')| = 2|V(H)|$.



Ahora veremos que G' no tiene ciclos de longitud menor a g .

Sea C un ciclo en G' . Si C está contenido en H o en H' , entonces C es un ciclo en G y por lo tanto tiene longitud al menos g . Si este no es el caso, C usa un número par de aristas del tipo $x\sigma(x)'$.

Si C usa exactamente dos aristas $u\sigma(u)'$ y $v\sigma(v)'$ entre H y H' , donde $u, v \in B \subseteq V(H)$, entonces C tiene longitud al menos

$$d_H(u, v) + d_{H'}(\sigma(u)', \sigma(v)') + 2 = d_H(u, v) + d_H(\sigma(u)', \sigma(v)') + 2 = D_\sigma(u, v) \geq g$$

ya que H es subgráfica especial.

Supongamos que C usa al menos cuatro aristas entre H y H' . Entonces C tiene longitud al menos $4 \left(\lceil \frac{g}{4} \rceil - 1 \right) + 4 = 4 \lceil \frac{g}{4} \rceil \geq g$ pues la distancia entre dos vértices de B en H es al menos $\lceil \frac{g}{4} \rceil - 1$.

Entonces G' tiene cuello al menos g y es regular de grado k . Por tanto, dado que G es una $(k; g)$ -jaula y por el Teorema 1.7, tenemos que $|V(G')| \geq |V(G)|$, y como $|V(G')| = 2|V(H)|$, se sigue el resultado. \square

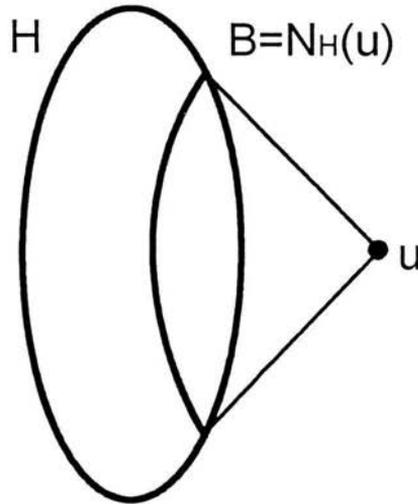
A partir del Lema 2.1 es fácil demostrar lo siguiente.

Corolario 2.1 *Toda $(k; g)$ -jaula es 2-conexa.*

Demostración. Supongamos que u es un vértice de corte en una $(k; g)$ -jaula y que H es una componente mínima de $G - u$. Claramente $\delta(H) = k - 1$ y los vértices en H que son vecinos de u son los únicos que tienen grado $k - 1$ en H , y como G tiene cuello g , entonces la distancia en H entre cualesquiera dos vecinos de u es al menos $g - 2 \geq \lceil \frac{g}{4} \rceil - 1$. Sea σ la permutación identidad en $N_H(u)$. Entonces, para $x, y \in N_H(u)$, tenemos que

$$D_\sigma(x, y) = d_H(x, y) + d_H(\sigma(x), \sigma(y)) + 2 = 2d_H(x, y) + 2 \geq 2(g - 2) + 2 = 2g - 2 \geq g.$$

Así, H es una subgráfica especial, que por el Lema 2.1 cumple que $|V(H)| \geq \frac{|V(G)|}{2}$ lo cual contradice que H es una componente mínima.



□

2.2 Diámetro de los conjuntos de corte

Lema 2.2 Si G es una gráfica con cuello $g \geq 3$, S un subconjunto de $V(G)$ tal que $\text{diam}(G[S]) = d < g - 2$, y H una subgráfica de G con $V(H) \cap S = \emptyset$, entonces todo vértice en $N_H(S)$ tiene exactamente un vecino en S .

Además, para todo $u, v \in N_H(S)$, $d_H(u, v) \geq g - d - 2$, alcanzando la igualdad sólo si u y v son vecinos de un par de vértices a distancia d en $G[S]$.

Demostración. Dado que $\text{diam}(G[S]) < g - 2$, se sigue que no existe $u \in N_H(S)$ con más de un vecino en S , pues de otra forma habría un ciclo de longitud menor a g en G .

Ahora sean $u, v \in N_H(S)$ y u', v' sus respectivos vecinos en $G[S]$.

Las aristas $u'u$ y $v'v$ junto con una uv -geodésica en H y una $u'v'$ -geodésica en $G[S]$ forma un ciclo, el cual tiene longitud al menos g . Entonces

$$d_H(u, v) + d_{G[S]}(u', v') + 2 \geq g$$

y por tanto

$$d_H(u, v) \geq g - d_{G[S]}(u', v') - 2.$$

Como $d_{G[S]}(u', v') \leq d$, entonces

$$d_H(u, v) \geq g - d - 2$$

y la igualdad sólo es posible si $d_{G[S]}(u', v') = d$. □

Corolario 2.2 *Sea G una $(k; g)$ -jaula y S un conjunto de corte de G con $\text{diam}(G[S]) < g - 2$. Si H es una componente mínima de $G - S$, entonces $N_H(S)$ contiene un par de vértices u, v tales que $d_H(u, v) < \lceil \frac{g}{2} \rceil - 1$.*

Demostración. Como $\text{diam}(G[S]) < g - 2$, por el Lema 2.2 tenemos que todo vértice de $N_H(S)$ tiene exactamente un vecino en S , y así, en H todos los vértices de $N_H(S)$ tienen valencia $k - 1$, mientras que todos los otros vértices en H tienen valencia k .

Ahora supongamos que $d_H(u, v) \geq \lceil \frac{g}{2} \rceil - 1$ para todo par de vértices u, v en $N_H(S)$. Claramente esto implica que para todo par de vértices $u, v \in N_H(S)$, $d_H(u, v) \geq \lceil \frac{g}{4} \rceil - 1$.

Sea σ la permutación identidad en $N_H(S)$ y $u, v \in N_H(S)$.

Como $d_H(u, v) \geq \lceil \frac{g}{2} \rceil - 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} D_\sigma(u, v) &= d_H(u, v) + d_H(\sigma(u), \sigma(v)) + 2 \\ &= 2d_H(u, v) + 2 \\ &\geq 2 \left(\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1 \right) + 2 \\ &= 2 \lceil \frac{g}{2} \rceil \geq g. \end{aligned}$$

Así H es una subgráfica especial que, por el Lema 2.1, satisface que $|V(H)| \geq \frac{|V(G)|}{2}$, contradiciendo el que H es una componente mínima de $G - S$. \square

Teorema 2.1 [11] *Si G es una $(k; g)$ -jaula con $k, g \geq 3$, y S es un conjunto de corte de G , entonces $\text{diam}(G[S]) \geq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$. Más aún, si sólo un par de vértices de S están a distancia $\text{diam}(G[S])$, entonces la desigualdad es estricta.*

Demostración. En el caso $g = 3$ y $g = 4$, G es isomorfa a K_{k+1} y a $K_{k,k}$ respectivamente. En ambos casos no es difícil ver que el resultado se cumple. Supongamos pues que $g \geq 5$.

Sea S un conjunto de corte y H una componente mínima de $G - S$. Nótese que como G es 2-conexa (Corolario 2.1), S tiene al menos 2 vecinos en H , esto es $|N_H(S)| \geq 2$.

Supongamos $\text{diam}(G[S]) \leq \lceil \frac{g}{2} \rceil - 1$. Esto implica que todo par de vértices en $N_H(S)$ están a distancia al menos $g - (\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1) - 2 = \lceil \frac{g}{2} \rceil - 1$ en H , pero como $\text{diam}(G[S]) < g - 2$, por el Corolario 2.2 tenemos que existen $u, v \in N_H(S)$ tales que $d_H(u, v) < \lceil \frac{g}{2} \rceil - 1$ lo cual es una contradicción. Por tanto $\text{diam}(G[S]) \geq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$.

Ahora supongamos que $\text{diam}(G[S]) = \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$ y que u, v es el único par de vértices de S a distancia $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor$. Aquí es importante hacer notar lo siguiente:

- i) Por el Lema 2.2 cada vértice en $N_H(S)$ tiene exactamente un vecino en S , de donde se sigue que $\delta(H) = k - 1$ y $N_H(S) = \{x \in H \mid \text{val}_H(x) = k - 1\}$.
- ii) Como $\text{diam}(G[S]) \geq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$, se sigue que para toda pareja $\{x, y\} \subseteq N_H(S)$ se cumple que $d_H(x, y) \geq g - \lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 2 = \lceil \frac{g}{2} \rceil - 2$. Además, dado que para cualquier pareja $\{z, w\} \subseteq S$ diferente de $\{u, v\}$ se tiene que $d_{G[S]}(z, w) \leq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 1$, entonces para toda pareja $\{x, y\} \subseteq N_H(S)$ que no cumpla que x es adyacente a u y y es adyacente a v , tenemos que $d_H(x, y) \geq \lceil \frac{g}{2} \rceil - 1$.
- iii) Por el Corolario 2.2 existen $u_1, v_1 \in N_H(S)$ tales que $d_H(u_1, v_1) < \lceil \frac{g}{2} \rceil - 1$, que por ii) implica, sin pérdida de generalidad, que $u_1 \in N_H(u)$ y $v_1 \in N_H(v)$. Además, como $d_H(u_1, v_1) \geq g - \lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 2 = \lceil \frac{g}{2} \rceil - 2$ entonces $d_H(u_1, v_1) = \lceil \frac{g}{2} \rceil - 2$.

Sean $N_H(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$, $N_H(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ y supongamos que $r \geq s$.

Caso 1. $r \geq 2$.

En este caso probaremos que H es una subgráfica especial de G , lo cual por el Lema 2.1 sería contradictorio con la elección de H .

Dado que $\lceil \frac{g}{2} \rceil - 2 \geq \lceil \frac{g}{4} \rceil - 1$, por i) y ii) se sigue que para probar que H es una subgráfica especial sólo resta mostrar una permutación σ de $N_H(S)$ tal que para cada $x, y \in N_H(S)$, $D_\sigma(x, y) \geq g$. Sea σ la permutación de $N_H(S)$ definida como sigue:

$$\sigma(u_i) = u_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, r \text{ módulo } r,$$

y

$$\sigma(w) = w \text{ para toda } w \in N_H(S) - N_H(u).$$

Sean $x, y \in N_H(S)$ y supongamos que

$$D_\sigma(x, y) = d_H(x, y) + d_H(\sigma(x), \sigma(y)) + 2 < g.$$

Si $d_H(x, y) < \frac{g-2}{2}$, se sigue por ii) que $x \in N_H(u)$ y $y \in N_H(v)$ por lo que para alguna $i \leq r$ y alguna $j \leq s$

$$D_\sigma(x, y) = d_H(u_i, v_j) + d_H(u_{i+1}, v_j) + 2 \geq d_H(u_i, u_{i+1}) + 2,$$

pero u_i y u_{i+1} deben estar a distancia al menos $g - 2$ en H , pues ambos son vecinos de u , por tanto $D_\sigma(x, y) \geq g$, lo cual es una contradicción.

En el caso en que $d_H(\sigma(x), \sigma(y)) < \frac{g-2}{2}$ se llega a una contradicción de manera análoga.

Caso 2. $r = s = 1$ y u_1 es adyacente a v_1 .

En este caso $N_H(S) - \{u_1, v_1\} \neq \emptyset$, pues si no tendríamos que $\{u_1, v_1\}$ sería un conjunto de corte de G que induce una subgráfica de diámetro $1 < \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$.

Sea $w \in N_H(S) - \{u_1, v_1\}$. Considerando la arista $u_1 v_1$, una wu_1 -geodésica en H y una wv_1 -geodésica en H tendríamos un ciclo en G , por lo que

$$d_H(w, u_1) + d_H(w, v_1) + 1 \geq g$$

de donde podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $d_H(w, v_1) \geq \lceil \frac{g-1}{2} \rceil$. Ahora probaremos que H es una subgráfica especial de G , lo cual nos llevará a una contradicción. De igual manera que en el **Caso 1**, para probar que H es una subgráfica especial sólo resta mostrar una permutación σ de $N_H(S)$ tal que $D_\sigma(x, y) \geq g$ para todo $x, y \in N_H(S)$.

Sea σ definida como sigue:

$$\sigma(u_1) = w, \sigma(w) = u_1$$

y

$$\sigma(z) = z \text{ para toda } z \in N(S) - \{u_1, w\}.$$

Sean $x, y \in N_H(S)$ y supongamos que

$$D_\sigma(x, y) = d_H(x, y) + d_H(\sigma(x), \sigma(y)) + 2 < g.$$

Si $d_H(x, y) < \frac{g-2}{2}$, se sigue por ii) que $x = u_1$ y $y = v_1$ por lo que

$$D_\sigma(x, y) = d_H(u_1, v_1) + d_H(w, v_1) + 2.$$

Como $d_H(w, v_1) \geq \lceil \frac{g-1}{2} \rceil$ y por iii) tenemos que

$$D_\sigma(x, y) \geq \left\lceil \frac{g}{2} \right\rceil - 2 + \left\lceil \frac{g-1}{2} \right\rceil + 2 = g$$

lo cual es una contradicción.

En el caso en que $d_H(\sigma(x), \sigma(y)) < \frac{g-2}{2}$ se llega a una contradicción de forma similar.

Caso 3. $r = s = 1$ y u_1 no es adyacente a v_1 .

Primero obsérvese que como $d_H(u_1, v_1) = \lceil \frac{g}{2} \rceil - 2 \geq 2$, entonces $g \geq 7$. En este caso vamos a probar que $H - u_1$ es una subgráfica especial de G , con lo que obtendremos una contradicción.

Por ii) vemos como la distancia en H entre dos vértices de $N_H(S)$ es al menos $\lceil \frac{g}{2} \rceil - 2 \geq 2$, por lo que $N_H(S)$ es un conjunto independiente y u_1 no tiene vecinos en $N_H(S)$. Entonces, por i), se sigue que $B = (N_H(S) - \{u_1\}) \cup N_H(u_1)$ es el conjunto de vértices de $H - u_1$ de valencia $k - 1$ en $H - u_1$, mientras que todos los demás vértices de $H - u_1$ tienen valencia k .

Sean $x, y \in B$ y supongamos que $d_{H-u_1}(x, y) < \lceil \frac{g}{4} \rceil - 1$. Claramente $d_{H-u_1}(x, y) \geq d_H(x, y)$, por lo que $d_H(x, y) < \lceil \frac{g}{4} \rceil - 1$. Por ii) x y y no pueden estar en $N_H(S)$ y como para todo par $x, y \in N_H(u)$ se tiene que $d_{H-u_1}(x, y) \geq g - 2$, entonces, sin pérdida de generalidad, $x \in N_H(S)$ y $y \in N_H(u_1)$. Así,

$$d_H(x, u_1) \leq d_H(x, y) + 1 \leq d_{H-u_1}(x, y) + 1 < \lceil \frac{g}{4} \rceil,$$

contradiendo ii).

Por lo tanto para todo par $x, y \in B$ tenemos que $d_{H-u_1}(x, y) \geq \lceil \frac{g}{4} \rceil - 1$, así que para probar que $H - u_1$ es una subgráfica especial de G sólo resta mostrar una permutación σ de B tal que para toda $x, y \in B$, $D_\sigma(x, y) \geq g$.

Sea $N_H(u) = \{z_1, z_2, \dots, z_{k-1}\}$ y sea σ la permutación de B definida como:

$$\sigma(z_i) = z_{i+1} \text{ para } i = 1, \dots, k-1 \text{ módulo } k-1$$

y

$$\sigma(w) = w \text{ para } w \in B - N_H(u_1).$$

Sean $x, y \in B$ y supongamos que

$$D_\sigma(x, y) = d_{H-u_1}(x, y) + d_{H-u_1}(\sigma(x), \sigma(y)) + 2 < g.$$

Si $d_{H-u_1}(x, y) < \frac{g-2}{2}$ entonces $d_H(x, y) < \frac{g-2}{2}$. Por ii) x y y no pueden estar en $N_H(S)$ y claramente no pueden ser ambos vecinos de u_1 , por lo que, sin pérdida de generalidad, $x \in N_H(S) - \{u_1\}$ y $y \in N_H(u_1)$. Entonces, para alguna $i \leq k-1$, $y = z_i$ y así

$$\begin{aligned} D_\sigma(x, y) &= d_{H-u_1}(x, z_i) + d_{H-u_1}(x, z_{i+1}) + 2 \\ &\geq d_{H-u_1}(z_i, z_{i+1}) + 2 \\ &\geq g - 2 + 2 = g, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

En el caso en que $d_{H-u_1}(\sigma(x), \sigma(y)) < \frac{g-2}{2}$ se llega a una contradicción de forma análoga. □

El teorema anterior nos permite hacer las siguientes observaciones relacionadas con los conjuntos de corte.

Observación. 1 *Una trayectoria separadora de una gráfica G es una trayectoria inducida P tal que $G - V(P)$ no es conexa. Entonces, por el Teorema 2.1, una trayectoria separadora de una $(k; g)$ -jaula tiene al menos longitud $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor + 1$.*

Observación. 2 *Una estrella de corte es un conjunto de corte que contiene un vértice adyacente a todos los otros vértices que están en el conjunto de corte. Como una estrella de corte induce una subgráfica de diámetro a lo mas dos, entonces si G es una $(k; g)$ -jaula*

con $k \geq 3$ y $g \geq 6$, la remoción de un vértice $v \in V(G)$ y cualquier subconjunto de los vecinos de v deja a G conexa.

Capítulo 3

Ciclos separadores y conexidad de las jaulas

3.1 Ciclos no separadores

El Teorema 2.1 nos permite probar el siguiente resultado relacionado con los g -ciclos, o cuellos, en las $(k; g)$ -jaulas.

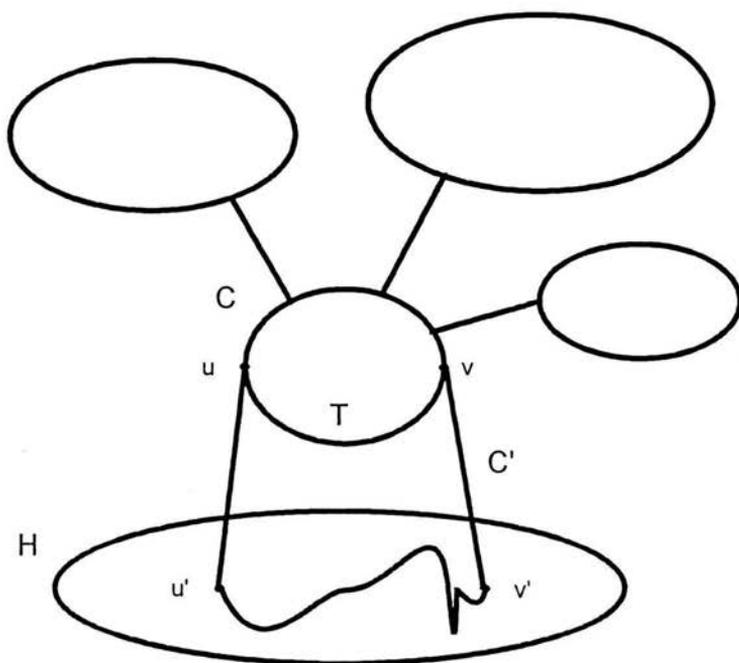
Teorema 3.1 [11] *Para $g \geq 5$, toda $(k; g)$ -jaula contiene un g -ciclo no separador.*

Demostración. De entre todos los g -ciclos separadores de G tomemos un ciclo C tal que minimiza el orden de las componentes mínimas en $G - V(C)$, y sea H una componente mínima en $G - V(C)$. Obsérvese que como C es un cuello, entonces $\text{diam}(C) = \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$, lo cual implica que la distancia entre dos vértices de $N_H(C)$ es al menos $g - \lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 2 = \lceil \frac{g}{2} \rceil - 2$; y por el Lema 2.2 sabemos que cualquier vértice en $N_H(C)$ tiene un sólo vecino en C . Además, del Corolario 2.2 tenemos que existen $u', v' \in N_H(C)$ tales que $d_H(u', v') \leq \lceil \frac{g}{2} \rceil - 2$, por lo que $d_H(u', v') = \lceil \frac{g}{2} \rceil$.

Sean u, v los vecinos de u' y v' en C y sea C' el ciclo formado por la trayectoria mínima T en C de u a v , las aristas uu', vv' y una $u'v'$ -geodésica en H . El ciclo C' tiene longitud a lo mas $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor + \lceil \frac{g}{2} \rceil - 2 + 2 = g$ y como G es una $(k; g)$ -jaula tenemos que C' tiene longitud exactamente g .

Veremos ahora que C' no es un g -ciclo separador. Supongamos lo contrario, esto es, supongamos que $G - V(C')$ no es conexas. Como T es una trayectoria inducida de longitud

a lo más $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor$, T no es separadora (Observación 2.1). Por tanto cualquier componente en $G - V(C)$ tiene al menos un vecino en $C - V(T)$. Consecuentemente la gráfica disconexa $G - V(C')$ tiene una componente que contiene a $C - V(T)$ y a las componentes conexas distintas de H de $G - V(C)$.



Entonces las componentes conexas restantes de $G - V(C')$ tienen menos vértices que H , lo cual es una contradicción. \square

A continuación demostraremos que si g es par entonces cualquier g -ciclo en una $(k; g)$ -jaula no desconecta a la gráfica, pero para poder hacerlo es necesario introducir el concepto de vértice antipodal y probar un lema.

Dado un ciclo C de longitud par y un vértice $u \in V(C)$, existe un único vértice $v \in V(C)$ tal que $d_C(u, v) = \frac{g}{2}$. Llamamos a v el *vértice antipodal* de u y al conjunto $\{u, v\}$ un *par antipodal* en C .

Lema 3.1 *Sea C un ciclo de longitud par $g \geq 6$, y sean $\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_n, v_n\}$ n pares antipodales en C , no necesariamente distintos. Entonces existe una lista ciclica de n vértices que consta de un elemento del par antipodal $\{u_i, v_i\}$ para cada $i = 1, \dots, n$, tal que cualesquiera dos vértices consecutivos en la lista son iguales o no adyacentes en C .*

Demostración. Primero supongamos que todos los pares antipodales son distintos. Asumamos sin pérdida de generalidad que éstos $2n$ vértices aparecen a lo largo de C en el orden $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$. Si $n = 1$ escogemos cualquier vértice de $\{u_1, v_1\}$. Si $n = 2$, entonces, como $g \geq 6$, tenemos que u_2 no puede ser adyacente a u_1 y a v_1 simultáneamente, entonces seleccionamos a u_2 y a un vértice de $\{u_1, v_1\}$ que no sea adyacente a u_2 . Para $n \geq 3$ tenemos que la lista $u_1, u_3, \dots, u_{2\lceil n/2 \rceil - 1}, v_{2\lceil n/2 \rceil}, v_{2\lceil n/2 \rceil - 2}, \dots, v_2$ cumple con lo requerido.

Si no todos los pares antipodales son distintos, borramos las copias extras obteniendo n' pares antipodales distintos, obtenemos una lista l como en el caso anterior, y encontramos la lista buscada sustituyendo en l cada vértice x por la sucesión x_1, \dots, x_t con $x = x_i$ para cada $i \leq t$ y t igual al número de veces que la pareja antipodal asociada a x aparece en los n pares antipodales originales. \square

Teorema 3.2 [11] *Sea $k \geq 5$ y g un par mayor que 2. Entonces todo g -ciclo en una $(k; g)$ -jaula G no desconecta a la gráfica.*

Demostración. Para $g = 4$, la única $(k; g)$ -jaula es $K_{k,k}$ (Proposición 1.1), la cual claramente cumple el Teorema, por lo que podemos suponer que $g \geq 6$.

Sea G una $(k; g)$ -jaula, C un cuello de G y supongamos que $G - V(C)$ no es conexa. Sea H una componente mínima en $G - V(C)$. Como $\text{diam}(C) = \frac{g}{2}$, por el Lema 2.2 sabemos que todo vértice w en $N_H(C)$ tiene un único vecino w' en C por lo que es claro que $\delta(H) = k - 1$ y $N_H(C)$ es el conjunto de vértices de H de valencia $k - 1$. Además, para cada pareja $x, y \in N_H(C)$, una xy -geodésica en H junto con una $x'y'$ -geodésica en C y las aristas xx', yy' forma un ciclo en G de longitud al menos g . Entonces

$$d_H(x, y) + d_C(x', y') + 2 \geq g$$

por lo que

$$d_H(x, y) \geq g - d_C(x', y') - 2. \quad (*)$$

Como $d_C(x', y') \leq \frac{g}{2}$, tenemos entonces que para todo $x, y \in N_H(C)$

$$d_H(x, y) \geq \frac{g}{2} - 2 \geq \left\lfloor \frac{g}{4} \right\rfloor - 1.$$

Por tanto, si podemos mostrar una permutación σ de $N_H(C)$ tal que $D_\sigma(x, y) \geq g$ para todos los pares $\{x, y\}$ en $N_H(C)$, habremos probado que H es una subgráfica especial y podremos concluir por el Lema 2.1 que $|V(H)| \geq \frac{|V(G)|}{2}$ obteniendo una contradicción.

Para poder mostrar dicha permutación necesitamos lo siguiente:

Llamaremos a un par de vértices $\{x, y\} \subseteq N_H(C)$ un *par malo* si $d_H(x, y) = \frac{g}{2} - 2$. Se puede ver que si $\{x, y\}$ es un par malo, entonces $\{x', y'\}$ es un par antipodal en C . Claramente un par $\{x, y\}$ en $N_H(C)$ que no es un par malo satisface $d_H(x, y) \geq \frac{g}{2} - 1$.

Ahora supongamos que $\{x, y\}$ y $\{x, z\}$ son dos pares malos distintos. Entonces y' y z' son vértices antipodales de x' en C y como la longitud de C es par $y' = z'$. Así, la unión de una xy -geodésica y una xz -geodésica en H contienen una yz -trayectoria de longitud a lo más $g - 4$. Agregando las aristas yy', zz' tenemos un ciclo de longitud menor a g , lo cual es imposible. Así que pares malos distintos son disjuntos. Obsérvese también que por el Corolario 2.2 existe al menos un par de vértices a distancia $\frac{g}{2} - 2$ en $N_H(C)$, por tanto hay al menos un par malo.

Sean $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \dots, \{x_m, y_m\}$ los m pares malos distintos en $N_H(C)$, y correspondientemente $\{x'_1, y'_1\}, \{x'_2, y'_2\}, \dots, \{x'_m, y'_m\}$ sus m pares antipodales en C .

Caso 1. $m = 1$.

Sea $\{x_1, y_1\}$ el único par malo. Si no hay otros vértices en C distintos a x'_1 y y'_1 que tengan vecinos en H , entonces una $x'_1y'_1$ -geodésica es una trayectoria separadora de longitud $\frac{g}{2}$ que contradice el Teorema 2.1. Por tanto existe $w \in N_H(C) - \{x_1, y_1\}$ tal que w' es su vecino en C y es distinto a x'_1 y y'_1 . Como $g \geq 6$, w' sólo puede ser adyacente a x'_1 ó y'_1 en C . Sin pérdida de generalidad supongamos que w' no es adyacente a x'_1 . Esto implica que $d_C(w', y'_1) \leq \frac{g}{2} - 2$ y por (*) tenemos que

$$\begin{aligned} d_H(w, y_1) &\geq g - d_C(w', y'_1) - 2 \\ &\geq g - \left(\frac{g}{2} - 2\right) - 2 = \frac{g}{2}. \end{aligned}$$

Sea σ la permutación de $N_H(C)$ definida como sigue:

$$\sigma(x_1) = w, \sigma(w) = x_1$$

y

$$\sigma(z) = z \text{ para toda } z \in N_H(C) - \{x_1, w\}.$$

Sean $x, y \in N_H(C)$ y supongamos que

$$D_\sigma(x, y) = d_H(x, y) + d_H(\sigma(x), \sigma(y)) + 2 < g.$$

Si $d_H(x, y) < \frac{g-2}{2}$, se sigue $x = x_1$ y $y = y_1$ por lo que

$$\begin{aligned} D_\sigma(x, y) &= d_H(x_1, y_1) + d_H(w, y_1) + 2 \\ &\geq \left(\frac{g}{2} - 2\right) + \frac{g}{2} + 2 = g, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

En el caso en que $d_H(\sigma(x), \sigma(y)) < \frac{g-2}{2}$ se llega a una contradicción de forma análoga.

Caso 2. $m \geq 2$.

Por el Lema 3.2 sabemos que hay una lista cíclica de m vértices que consta de un vértice de cada par antipodal $\{x'_i, y'_i\}$ para cada $i = 1, \dots, m$, tal que cualesquiera dos vértices consecutivos en la lista son iguales o no adyacentes en C . Renombrando, si es necesario, podemos asumir que x'_1, x'_2, \dots, x'_m es la lista cíclica deseada. Definimos una permutación σ de $N_H(C)$ de la siguiente manera:

Sea $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ para $i = 1, \dots, m$, donde los índices son tomados módulo m ,

y

$$\sigma(z) = z \text{ para } z \in N_H(C) - \{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

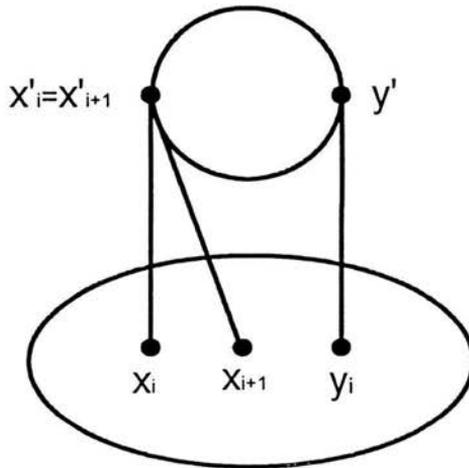
Sean $x, y \in N_H(C)$ y supongamos que

$$D_\sigma(x, y) = d_H(x, y) + d_H(\sigma(x), \sigma(y)) + 2 < g.$$

Si $d_H(x, y) < \frac{g-2}{2}$, se sigue que $\{x, y\}$ es un par malo. Esto es $x = x_i$ y $y = y_i$ para alguna $i = 1, \dots, m$ por lo que

$$D_\sigma(x, y) = d_H(x_i, y_i) + d_H(x_{i+1}, y_i) + 2.$$

Si $x'_i = x'_{i+1}$ tenemos que $d_H(x_i, x_{i+1}) \geq g - 2$ ya que una $x_i x_{i+1}$ -geodésica junto con las aristas $x_i x'_i$ y $x_{i+1} x'_i$ forman un ciclo de longitud al menos g .

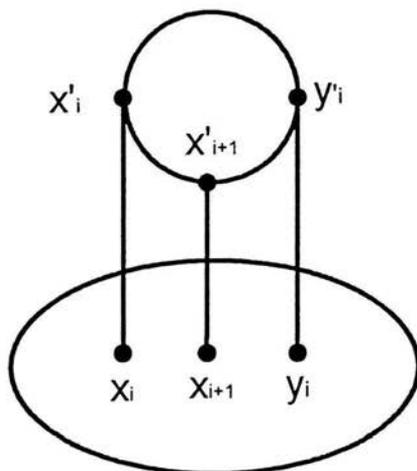


Por tanto

$$\begin{aligned} D_\sigma(x, y) &= d_H(x_i, y_i) + d_H(x_{i+1}, y) + 2 \\ &\geq d(x_i, x_{i+1}) + 2 \geq (g - 2) + 2 = g. \end{aligned}$$

Si $x'_i \neq x'_{i+1}$, entonces x_i y x_{i+1} no son adyacentes en C , que implica que

$$d_C(x'_{i+1}, y'_i) \leq \frac{g}{2} - 2,$$



y por (*) (página 40), tenemos que

$$\begin{aligned} d_H(x_{i+1}, y_i) &\geq g - d_C(x'_{i+1}, y'_i) + 2 \\ &\geq g - \left(\frac{g}{2} - 2\right) + 2 = \frac{g}{2}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} D_\sigma(x, y) &= d_H(x_i, y_i) + d_H(x_{i+1}, y_i) + 2 \\ &\geq \left(\frac{g}{2} - 2\right) + \left(\frac{g}{2}\right) + 2 = g \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

En el caso en que $d_H(\sigma(x), \sigma(y)) < \frac{g-2}{2}$ se llega a una contradicción de forma análoga. □

3.2 Conexidad de las jaulas

Utilizando el Teorema 2.1 del capítulo anterior podemos demostrar la 3-conexidad de las $(k; g)$ -jaulas cuando $k \geq 3$.

Teorema 3.3 [6] *Si $k \geq 3$ y G es una $(k; g)$ -jaula, entonces G es 3-conexa.*

Demostración. Como las únicas $(k; g)$ -jaulas con $g = 3$ y $g = 4$ son K_{k+1} y $K_{k,k}$ respectivamente, y cada una de estas gráficas es 3-conexa, podemos suponer que $g \geq 5$.

Supongamos que G tiene un conjunto de corte de cardinalidad 2. De entre todos los conjuntos de corte, escojamos $S = \{u, v\}$ que minimice la cardinalidad de una componente mínima de $G - S$. Sea H una componente mínima de $G - S$.

Claramente $|H| > 1$, pues $k \geq 3$, más aún $|N_H(u)| \geq 2$ y $|N_H(v)| \geq 2$ pues si no tendríamos que $(N_H(u) \cup v)$ ó $(N_H(v) \cup u)$ sería un conjunto de corte de cardinalidad 2 que deja una componente de cardinalidad menor a H .

Sea $N_H(u) = \{u_1, \dots, u_r\}$ y $N_H(v) = \{v_1, \dots, v_s\}$, donde $r, s \geq 2$. Como $\{u, v\}$ es un conjunto de corte de G y $r, s \geq 2$, una uv -geodésica que pase por H es una trayectoria separadora de G y por tanto (Observación 2.1) sabemos que dicha trayectoria va a tener al menos longitud $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor + 1$, que para $g \geq 5$ es al menos 3. Esto implica que $N_H(u) \cap N_H(v) = \emptyset$ y que $d_H(u_i, v_j) \geq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 1$ para toda i, j . Más aún, la distancia en H entre dos vecinos distintos de u o dos vecinos distintos de v es al menos $g - 2$.

Es fácil de ver que los vértices de $N_H(S)$ son los únicos vértices en H que tienen grado $k - 1$, y que todos los demás vértices en H tienen grado k en H . Ahora veremos que H es una subgráfica especial obteniendo así, por el Lema 2.1, una contradicción.

Como $d_H(x, y) \geq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor - 1 \geq \lfloor \frac{g}{4} \rfloor - 1$ para todo $x, y \in N_H(S)$, vemos que para probar que H es una subgráfica especial sólo nos hace falta encontrar una permutación σ de $N_H(S)$ que haga que $D_\sigma(x, y) \geq g$ para toda $x, y \in N_H(S)$.

Sea σ una permutación de $N_H(S)$ definida como sigue:

$$\sigma(u_i) = u_{i+1} \text{ para } i = 1, \dots, r \text{ módulo } r,$$

y

$$\sigma(v_j) = v_j \text{ para } j = 1, \dots, s.$$

Sean $x, y \in N_H(S)$. Si x y y son vecinos de u ó x y y son vecinos de v , entonces $\sigma(x)$ y $\sigma(y)$ también son vecinos de u ó son vecinos de v y entonces

$$D_\sigma(x, y) \geq 2(g - 2) + 2 = 2g - 2 \geq g.$$

Supongamos pues que $x = u_i$ y que $y = v_j$ para alguna i, j . Entonces

$$D_\sigma(x, y) = d_H(u_i, v_j) + d_H(u_{i+1}, v_j) + 2 \geq d_H(u_i, u_{i+1}) + 2 \geq g - 2 + 2 = g.$$

□

Capítulo 4

Superconexidad y casi 4-conexidad

Definición 4.1 Una gráfica G es llamada *superconexa* si la conexidad de G es $\delta(G)$ y cualquier conjunto de corte mínimo es trivial.

Definición 4.2 Una $(3; g)$ -jaula G es *casi 4-conexa* si G es superconexa y para cada conjunto de corte mínimo S , $G - S$ tiene exactamente dos componentes conexas.

El objetivo de este Capítulo es probar los siguientes dos teoremas.

Teorema 4.1 Para $g \geq 4$, toda $(3; g)$ -jaula es superconexa.

Teorema 4.2 Para $g \geq 5$, toda $(3; g)$ -jaula es casi 4-conexa.

Para esto utilizaremos el siguiente resultado, del cual omitimos su demostración.

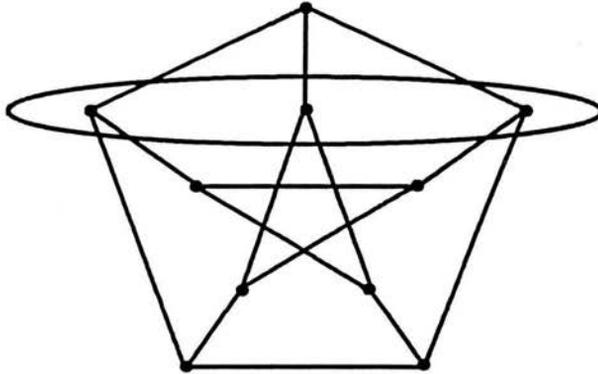
Teorema 4.3 [8] Sea G una gráfica conexa con $\delta(G) \geq 3$, cuyo g y diámetro D . Entonces G es superconexa si $D \leq 2 \lfloor \frac{g-3}{2} \rfloor$.

Además, antes de pasar a las pruebas de los teoremas 4.1 y 4.2, necesitaremos exponer algunas consideraciones y demostrar algunos lemas preliminares.

4.1 Preliminares

Primeramente obsérvese que en los casos en que $g = 3$ y $g = 4$, las únicas $(3; g)$ -jaulas son K_4 y $K_{3,3}$ respectivamente. Ciertamente K_4 no tiene conjuntos de corte, y es fácil ver que $K_{3,3}$ es superconexa pero no casi 4-conexa.

En el caso en que $g = 5$, la gráfica de Petersen es la única $(3; 5)$ -jaula (Teorema 1.3) y tiene diámetro 2. Entonces por el Teorema 4.3 podemos concluir que es superconexa. También es fácil ver que es casi 4-conexa.



Gráfica de Petersen

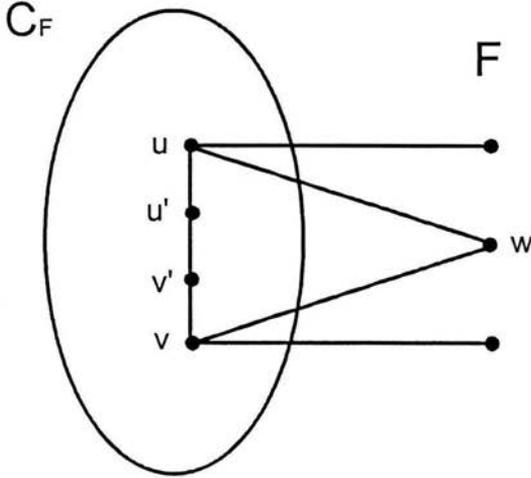
En lo que queda de esta sección, sea G una $(3; g)$ -jaula, con $g \geq 6$, que no sea superconexa y sea F el conjunto de todos los conjuntos de corte mínimos de G no triviales. Por el Teorema 3.3 es claro que todo elemento de F tiene cardinalidad 3.

Para toda $F \in F$, sea C_F una componente mínima en $G - F$.

Lema 4.1 *Para toda $F \in F$, $|V(C_F)| \geq g$.*

Demostración. Sea $F \in F$. Es claro que $|V(C_F)| \geq 2$ pues F es no trivial. Si C_F contiene un ciclo el resultado se sigue. Si C_F es acíclica, entonces existen $u, v \in V(C_F)$ tal que $|N_{C_F}(u)| = |N_{C_F}(v)| = 1$, por tanto existe un vértice $w \in F$ tal que $w \in N(u) \cap N(v)$, ya que $|F| = 3$. Esto implica que una uv -geodésica en C_F tiene longitud al menos $g - 2$, lo cual quiere decir que $|V(C_F)| \geq g - 1$. Pero si $|V(C_F)| = g - 1$ tenemos que C_F es una

uv -trayectoria de longitud $g - 2 \geq 4$, y entonces existen en C_F dos vértices u' y v' distintos a u y v con un vecino en F en común, formando un ciclo en G de longitud menor a g , lo cual es una contradicción.



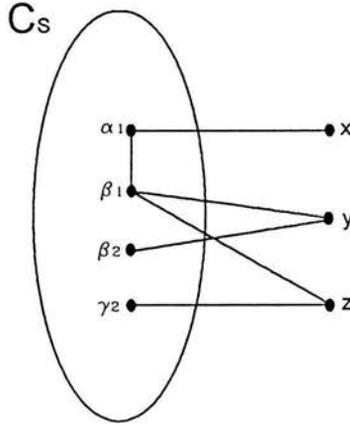
□

Sea $S = \{x, y, z\} \in F$ tal que $|V(C_S)| \leq |V(C_F)|$ para toda $F \in F$. Sea $G_1 = (G - S) - C_S$, $X = N_{C_S}(x)$, $Y = N_{C_S}(y)$ y $Z = N_{C_S}(z)$.

Lema 4.2 $|X| = |Y| = |Z| = 2$, G_1 es una gráfica conexa y $2|V(C_S)| \leq |V(G)| - 6$.

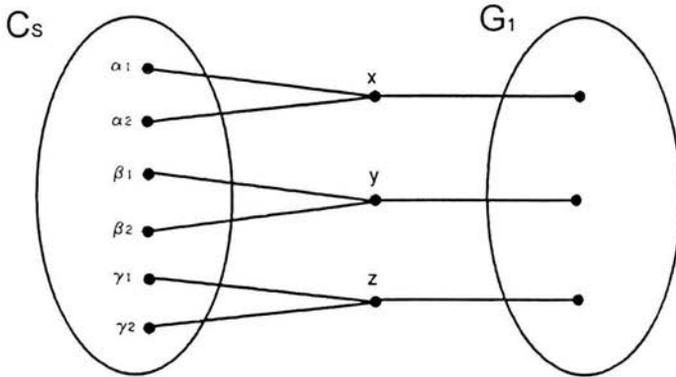
Demostración. Supongamos que $X = \{\alpha_1\}$ y sea $F = \{\alpha_1, y, z\}$. Es claro que F es un conjunto de corte tal que $G - F$ tiene una componente de menor orden que C_S , por lo que F es un conjunto de corte trivial. Sea $\beta_1 \in V(G)$ tal que $F = N_G(\beta_1)$. Obsérvese que $\beta_1 \neq x$, pues si no $\text{diam}(G[S]) = 2$, contradiciendo el Teorema 2.1. Como consecuencia vemos entonces que $\beta_1 \in V(C_S)$. Supongamos que $Y = \{\beta_1\}$ y consideremos el conjunto $F' = \{\alpha_1, \beta_1, z\}$. Es fácil ver que F' es un conjunto de corte mínimo que induce una

subgráfica con diámetro 2, lo que contradice el Teorema 2.1. Entonces podemos asumir que $|Y| = 2$. De manera análoga vemos que $|Z| = 2$. Así entonces sea $Y = \{\beta_1, \beta_2\}$ y $Z = \{\beta_1, \gamma_2\}$. Obsérvese que como $g \geq 6$, $\beta_2 \neq \gamma_2$.



Sea $F'' = \{\alpha_1, \beta_2, \gamma_2\}$. Vemos que F'' es un conjunto de corte mínimo pues $N(\beta_1) = \{\alpha_1, y, z\}$ y $|V(C_S)| \geq g \geq 6$ (Lema 4.1). Más aún, F'' es no trivial pues $\alpha_1\beta_1y\beta_2$ es una trayectoria en G de longitud 3 y por tanto $d_{C_S}(\alpha_1, \beta_2) \geq g - 3 \geq 3$. Entonces $F'' \in F$ y $|V(C_{F''})| < |V(C_S)|$ lo cual es una contradicción. Así $|X| = |Y| = |Z| = 2$.

De este hecho vemos que $|N_{G_1}(S)| = 3$, por lo que G_1 tiene que ser conexa pues G es 3-conexa.



Ahora bien, dado que G es cúbica, $|V(G)|$ es par, por lo que $|V(G_1)| = |V(C_S)| + m$ con m impar. Probaremos que $m \geq 3$ de donde se sigue que

$$|V(G)| = |V(C_S)| + |V(G_1)| + 3 \geq 2|V(C_S)| + 6,$$

y así concluiremos la demostración de este lema.

Supongamos que $m = 1$ y sea $N_{G_1}(x) = \{u\}$. Claramente $H = \{u, y, z\}$ es un conjunto de corte, el cual no puede ser trivial pues de otra manera, si $N_G(v) = \{u, y, z\}$ para alguna $v \in V(G)$, tendríamos que $\{x, v\}$ sería un conjunto de corte. Así pues, $|V(C_H)| = |V(C_S)|$ por lo que, utilizando los mismos argumentos vistos para probar que $|Y| = |Z| = 2$, podemos concluir que $|N_{C_H}(y)| = |N_{C_H}(z)| = 2$, lo cual es una contradicción. \square

En lo que sigue sea $X = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $Y = \{\beta_1, \beta_2\}$, y $Z = \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Además sea

$$L = \min\{d_{C_S}(X, Y), d_{C_S}(X, Z), d_{C_S}(Y, Z)\}.$$

Lema 4.3 Si $g \geq 8$, entonces $L \geq 1$.

Demostración. Supongamos que $L = 0$ y $g \geq 8$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $d_{C_S}(X, Y) = 0$ y $\alpha_1 = \beta_1$. Esto implica que

$$d_{C_S}(\alpha_1, \beta_2) \geq g - 2$$

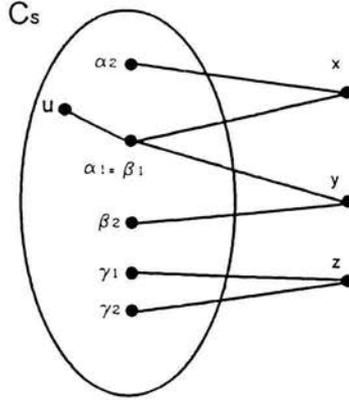
y

$$d_{C_S}(\alpha_2, \beta_2) \geq g - 4.$$

Además, obsérvese que $\alpha_1 \neq \gamma_i$, para $i = 1, 2$, pues S es un conjunto de corte no trivial; y también vemos que cualquier $\beta_2\gamma_i$ -trayectoria en C_S no puede contener al vértice α_1 , pues $\text{val}_{C_S}(\alpha_1) = 1$.

Consideremos una $\beta_2\gamma_1$ -geodésica en C_S . Entonces $x\alpha_1y\beta_2 \dots \gamma_1z$ es una trayectoria P cuya remoción separa a G , y su longitud es $4 + d_{C_S}(\beta_2, \gamma_1)$. Por el Teorema 2.1 vemos que $4 + d_{C_S}(\beta_2, \gamma_1) \geq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor + 1 \geq 5$, por lo que $d_{C_S}(\beta_2, \gamma_1) \geq 1$. De manera similar se deduce que $d_{C_S}(\beta_2, \gamma_2) \geq 1$.

Sea $N_{C_S}(\alpha_1) = \{u\}$.



Es claro que $u \notin \{\alpha_2, \beta_2\}$. Más aún, $u \notin \{\gamma_1, \gamma_2\}$ pues si no la subgráfica inducida por el conjunto de corte $\{x, \alpha_1, u, z, y\}$ tendría diámetro 3, contradiciendo al Teorema 2.1. Sea $\Omega = \{u, \alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2\}$ y consideremos la subgráfica $C'_S = C_S - \alpha_1$. C'_S es conexa ya que $val_{C'_S}(\alpha_1) = 1$, y obsérvese que para todo $v \in V(C'_S) - \Omega$, $val_{C'_S}(v) = 3$, mientras que para todo $w \in \Omega$, $val_{C'_S}(w) = 2$. Además

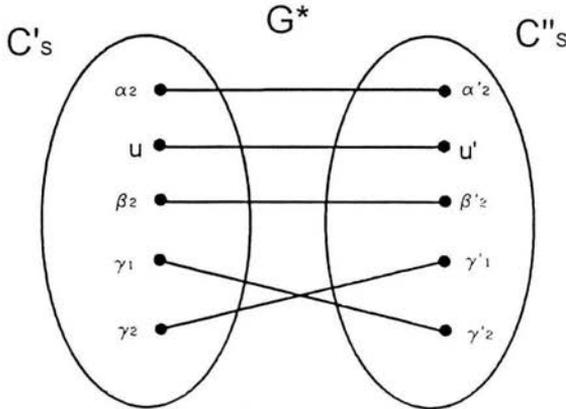
- i) $d_{C'_S}(\gamma_1, \gamma_2) \geq g - 2$, pues la trayectoria $\gamma_1 z \gamma_2$ está contenida en $G - E(C'_S)$.
- ii) Para cada par de vértices $w_1, w_2 \in \Omega - \{\gamma_1, \gamma_2\}$, $d_{C'_S}(w_1, w_2) \geq g - 4$, ya que $d_{G-E(C'_S)}(w_1, w_2) \leq 4$.
- iii) Para cualquier par de vértices $w_1, w_2 \in \Omega - \{\gamma_1, \gamma_2\}$,

$$d_{C'_S}(w_1, \gamma_1) + d_{C'_S}(w_2, \gamma_2) \geq g - 6,$$

pues la unión de una $w_1\gamma_1$ -trayectoria en C'_S , junto con una $w_2\gamma_2$ -trayectoria en C'_S , mas una w_1w_2 -trayectoria en $G - E(C'_S)$ de longitud a lo más 4 (ver ii)), y la trayectoria $\gamma_1z\gamma_2$ contiene un ciclo en G .

Ahora construyamos una gráfica G^* de la siguiente manera:

Sea C''_S una copia de C'_S tal que $V(C''_S) \cap V(C'_S) = \emptyset$, y para cada $w \in C'_S$ sea w' su copia en C''_S . Sea $V(G^*) = V(C'_S) \cup V(C''_S)$ y $E(G^*) = E(C'_S) \cup E(C''_S) \cup E^+$, donde $E^+ = \{uw', \alpha_2\alpha'_2, \beta_2\beta'_2, \gamma_1\gamma'_1, \gamma_2\gamma'_2\}$.



G^* es una gráfica 3-regular, conexa y como $|V(G^*)| = 2(|V(C'_S)| - 1)$, por el Lema 4.2 se sigue que $|V(G^*)| < |V(G)|$. Así pues, es suficiente mostrar que $c(G^*) \geq c(G)$ para obtener una contradicción.

Sea C un ciclo en G^* . Si $E(C) \cap E^+ = \emptyset$, entonces C es un ciclo en G y la longitud de C es al menos g . Supongamos entonces que $E(C) \cap E^+ \neq \emptyset$.

Caso 1. $\{\gamma_1\gamma'_2, \gamma_2\gamma'_1\} = E(C) \cap E^+$.

En este caso C contiene una $\gamma_1\gamma_2$ -trayectoria en C'_S , y por i), $d_{C'_S}(\gamma_1, \gamma_2) \geq g - 2$, por lo que C tiene longitud al menos $g - 2 + 2 = g$.

Caso 2. $\{\gamma_1\gamma'_2, ww'\} = E(C) \cap E^+$, donde $w \in \Omega - \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Vemos que C contiene una γ_1w -trayectoria en C'_S y una γ'_2w' -trayectoria en C''_S , y como

$$d_{C'_S}(w, \gamma_1) + d_{C''_S}(w', \gamma'_2) = d_{C'_S}(w, \gamma_1) + d_{C'_S}(w, \gamma_2),$$

por la desigualdad del triángulo y i) tenemos que

$$d_{C'_S}(w, \gamma_1) + d_{C'_S}(w, \gamma_2) \geq d_{C'_S}(\gamma_1, \gamma_2) \geq g - 2.$$

Por lo tanto la longitud de C es al menos $g - 2 + 2 = g$. El mismo razonamiento es utilizado si $\{\gamma_2\gamma'_1, ww'\} = E(C) \cap E^+$.

Caso 3. $\{w_1w'_1, w_2w'_2\} = E(C) \cap E^+$ con $w_1, w_2 \in \Omega - \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

En este caso C contiene una w_1w_2 -trayectoria en C'_S y una $w'_1w'_2$ -trayectoria en C''_S .

Como

$$d_{C'_S}(w_1, w_2) + d_{C''_S}(w'_1, w'_2) = 2d_{C'_S}(w_1, w_2),$$

por ii) vemos que la longitud de C es al menos $2(g - 4) + 2 > g$.

Caso 4. $\{\alpha_2\alpha'_2, uu', \beta_2\beta'_2\} = \{w_1w'_1, w_2w'_2, w_3w'_3\} \subseteq E(C)$.

En este caso C contiene una w_iw_j -trayectoria y una $w'_jw'_r$ -trayectoria con $\{i, j, r\} = \{1, 2, 3\}$. Con argumentos análogos que en el **Caso 3** vemos que la longitud de C es al menos $2(g - 4) + 4 > g$.

Caso 5. $\{\gamma_1\gamma'_2, \gamma_2\gamma'_1, w_1w'_1, w_2w'_2\} \subseteq E(C)$ con $w_1, w_2 \in \Omega - \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

En este caso tenemos dos posibilidades:

- a) El ciclo C contiene una $\gamma_1\gamma_2$ -trayectoria en C'_S o una $\gamma'_1\gamma'_2$ -trayectoria en C''_S .
- b) El ciclo C contiene una $w_1\gamma_i$ -trayectoria y una $w_2\gamma_j$ -trayectoria en C'_S , con $i \neq j$,
 $i, j \leq 2$.

Si sucede a), entonces C tiene longitud al menos

$$d_{C'_S}(\gamma_1, \gamma_2) + 4 \geq g - 2 + 4 > g.$$

Si ocurre b), C debe contener también una $w'_1\gamma'_i$ -trayectoria y una $w'_2\gamma'_j$ -trayectoria en C'_S . Por lo tanto la longitud de C es al menos

$$\begin{aligned} & 4 + d_{C'_S}(w_1, \gamma_i) + d_{C'_S}(w_2, \gamma_j) + d_{C''_S}(w'_1, \gamma'_i) + d_{C''_S}(w'_2, \gamma'_j) \\ &= 4 + 2(d_{C'_S}(w_1, \gamma_i) + d_{C'_S}(w_2, \gamma_j)) \end{aligned}$$

que por iii) implica que la longitud de C es al menos

$$4 + 2(g - 6) = 2g - 8 \geq g.$$

□

Lema 4.4 $L \leq \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor - 3$.

Demostración. Supongamos que $L \geq \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor - 2$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $d_{C_S}(X, Y) = L$. Consideremos la subgrafica $C'_S = G[V(C_S) \cup \{x, y\}]$. C'_S es claramente conexa y además

- i) $d_{C'_S}(\gamma_1, \gamma_2) \geq g - 2$ pues la trayectoria $\gamma_1 z \gamma_2$ está contenida en $G - E(C'_S)$.
- ii) $d_{C'_S}(x, y) = L + 2$ pues $d_{C_S}(X, Y) = L$.

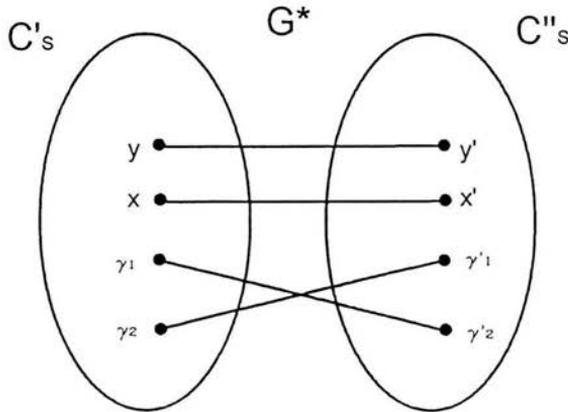
iii) $d_{C'_S}(\gamma_i, x), d_{C'_S}(\gamma_i, y) \geq L + 1$, para $i = 1, 2$.

Sea $\Omega = \{x, y, \gamma_1, \gamma_2\} \subseteq V(C'_S)$. Obsérvese que para todo $v \in V(C'_S) - \Omega$, $val_{C'_S}(v) = 3$ y para todo $w \in \Omega$, $val_{C'_S}(w) = 2$.

Sea C''_S una copia de C'_S tal que $V(C''_S) \cap V(C'_S) = \emptyset$ y para todo $w \in V(C'_S)$ sea w' su copia en $V(C''_S)$. Sea G^* la gráfica donde $V(G^*) = V(C'_S) \cup V(C''_S)$ y $E(G^*) = E(C'_S) \cup E(C''_S) \cup E^+$ siendo $E^+ = \{xx', yy', \gamma_1\gamma'_2, \gamma_2\gamma'_1\}$.

Obsérvese que $|V(G^*)| = 2|V(C'_S)| + 4 < |V(G)|$ (Lema 4.2).

G^* es una gráfica 3-regular, conexa y como $|V(G^*)| < |V(G)|$, es suficiente mostrar que $c(G^*) \geq c(G)$ para obtener una contradicción.



Sea C un ciclo en G^* . Si $E(C) \cap E^+ = \emptyset$, entonces C es un ciclo en G y la longitud de C es al menos g . Supongamos que $E(C) \cap E^+ \neq \emptyset$.

Caso 1. $|E(C) \cap E^+| = 2$.

Si $\gamma_1\gamma'_2$ y $\gamma_2\gamma'_1$ están en C , entonces C contiene una $\gamma_1\gamma_2$ -trayectoria en C'_S , y por i) vemos que $d_{C'_S}(\gamma_1, \gamma_2) \geq g - 2$. Así, el ciclo C tiene longitud al menos $g - 2 + 2 = g$.

Si xx' y yy' están en C , entonces contiene una xy -trayectoria en C'_S y una $x'y'$ -trayectoria en C''_S . Por lo tanto, por ii), la longitud de C es al menos

$$\begin{aligned} d_{C'_S}(x, y) + d_{C''_S}(x', y') + 2 &= 2d_{C'_S}(x, y) + 2 \\ &\geq 2(L + 2) + 2 \\ &\geq 2 \left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor + 2 \geq g. \end{aligned}$$

Finalmente, si xx' (ó yy') y $\gamma_1\gamma'_2$ (ó $\gamma_2\gamma'_1$) están en C , entonces C tiene longitud al menos

$$\begin{aligned} &d_{C'_S}(x, \gamma_1) + d_{C''_S}(x', \gamma'_2) + 2 \\ &= d_{C'_S}(x, \gamma_1) + d_{C'_S}(x, \gamma_2) + 2 \\ &\geq d_{C'_S}(\gamma_1, \gamma_2) + 2 \\ &\geq (g - 2) + 2 = g. \end{aligned}$$

Caso 2. $|E(C) \cap E^+| = 4$, es decir, $\{xx', yy', \gamma_1\gamma'_2, \gamma_2\gamma'_1\} \subseteq E(C)$.

En este caso existen dos posibilidades:

- C contiene una $\gamma_1\gamma_2$ -trayectoria en C'_S .
- C contiene una $x\gamma_i$ -trayectoria y una $y\gamma_j$ -trayectoria en C'_S con $i \neq j$, $i, j \leq 2$.

Si ocurre a), entonces C tiene longitud al menos

$$d_{C'_S}(\gamma_1, \gamma_2) + 4 \geq (g - 2) + 4 > g.$$

Si sucede b), la longitud de C es al menos

$$d_{C'_s}(x, \gamma_i) + d_{C'_s}(y, \gamma_j) + 4$$

que por iii) implica que C tiene longitud al menos

$$2(L + 1) + 4 \geq 2 \left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor - 2 + 4 \geq g.$$

□

4.2 Superconexidad y casi 4-conexidad

Teorema 4.1 [12] *Toda $(3; g)$ -jaula con $g \geq 4$ es superconexa.*

Demostración. Como se vio al inicio de la sección anterior, para $g = 4$ y $g = 5$ el resultado es cierto.

Para $g = 6$, la única $(3; 6)$ -jaula es la gráfica de Heawood. Si no fuera superconexa, por el Lema 4.3 tendríamos que $L \leq -1$, lo cual es una contradicción.

Para $g = 7$, la única $(3; 7)$ -jaula es la gráfica de McGee (Teorema 1.4). No es difícil ver que esta gráfica tiene diámetro 4, lo cual por el Teorema 4.3 implica que es superconexa.

En el caso en que $g = 8$, la única $(3; 8)$ -jaula es la gráfica de Tutte (Teorema 1.5). Si no fuera superconexa tendríamos que

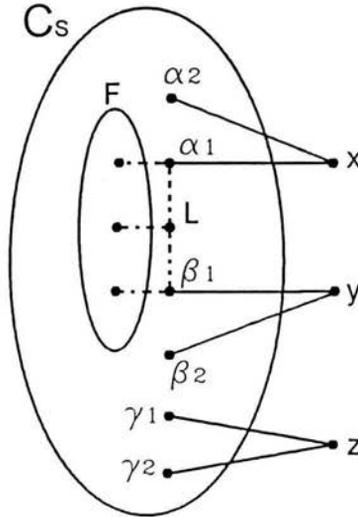
$$1 \leq L \leq \left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor - 3 = 0,$$

lo cual es una contradicción.

Para $g = 9$ existen 18 distintas $(3; 9)$ -jaulas (Teorema 1.5). Todas estas gráficas tienen diámetro 6 [2], que por el Teorema 4.3 implica que son superconexas.

En el caso en el que $g \geq 10$, supongamos que existe una $(3; g)$ -jaula G que no es superconexa. Al igual que en la sección anterior, sea $S = \{x, y, z\}$ un conjunto de corte mínimo no trivial de G , C_S una componente mínima de $G - S$, $X = N_{C_S}(x) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $Y = N_{C_S}(y) = \{\beta_1, \beta_2\}$ y $Z = N_{C_S}(z) = \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $d_{C_S}(X, Y) = d_{C_S}(\alpha_1, \beta_1) = L$. Por los Lemas 4.6 y 4.7 sabemos que $1 \leq L \leq \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor - 3$. Denotemos por P la única trayectoria de longitud L en C_S que une a α_1 con β_1 y consideremos el conjunto $F = N_{C_S}(V(P)) - V(P)$, el cual satisface que $|F| = |V(P)| = L + 1$.



Obsérvese que $\{\alpha_2, \beta_2\} \cap F = \emptyset$, pues, considerando la trayectoria P , no es difícil ver que

$$d_{C_S}(\alpha_2, F), d_{C_S}(\beta_2, F) \geq g - (L + 3) \geq g - \left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor = 1 + \left\lceil \frac{g-1}{2} \right\rceil \geq 1,$$

y además $\{\alpha_2, \beta_2\} \cap \{\gamma_1, \gamma_2\} = \emptyset$ pues $L \geq 1$.

Ahora veremos que $\{\gamma_1, \gamma_2\} \cap F = \emptyset$. Supongamos que $\gamma_1 \in F$. Entonces la subgráfica de G inducida por $H = V(P) \cup \{x, y, z, \gamma_1\}$ es un conjunto separador de diámetro a lo más $L + 3 \leq \lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor$ que por el Teorema 2.1 implica que $\text{diam}(G[H]) = \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$, pero entonces no es difícil ver que $\{x, y\}$ ó $\{z, y\}$ es la única pareja de vértices en $G[H]$ a distancia $\text{diam}(G[H])$ lo cual implica, por el Teorema 2.1 que $\text{diam}(G[H]) > \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$ lo cual es una contradicción. De manera análoga se ve que $\gamma_2 \notin F$.

Sea $\Omega = F \cup \{\alpha_2, \beta_2\} \cup \{\gamma_1, \gamma_2\}$. Nótese que $|V(P)| + |\Omega| = 2L + 6 \leq g - 1 < |V(C_S)|$ (Lema 4.1).

Consideremos ahora la subgráfica $C'_S = C_S - V(P)$. Obsérvese que $\text{val}_{C'_S}(v) = 3$ para toda $v \in V(C'_S) - \Omega$, y $\text{val}_{C'_S}(w) = 2$ para toda $w \in \Omega$. Además tenemos que

- i) $d_{C'_S}(\gamma_1, \gamma_2) \geq g - 2$ pues la trayectoria $\gamma_1 z \gamma_2$ está contenida en $G - E(C'_S)$.
- ii) $d_{C'_S}(w_1, w_2) \geq g - L - 4$, para todo par de vértices $w_1, w_2 \in F \cup \{\alpha_2, \beta_2\}$ pues para cada par de vértices $w_1, w_2 \in F \cup \{\alpha_2, \beta_2\}$, $d_{G-E(C'_S)}(w_1, w_2) \leq L + 4$.
- iii) Para cada par de vértices $w_1, w_2 \in F \cup \{\alpha_2, \beta_2\}$,

$$d_{C'_S}(w_1, \gamma_1) + d_{C'_S}(w_2, \gamma_2) \geq \begin{cases} g - L - 5 & \text{si } \{w_1, w_2\} \neq \{\alpha_2, \beta_2\}, \\ g - L - 6 & \text{si } \{w_1, w_2\} = \{\alpha_2, \beta_2\}; \end{cases}$$

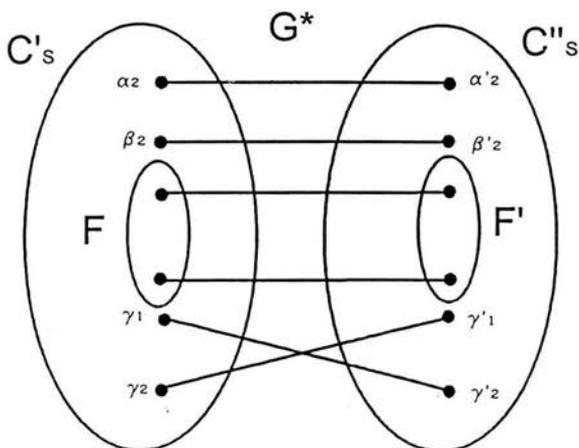
pues la unión de una $w_1 \gamma_2$ -geodésica en C'_S , más la trayectoria $\gamma_1 z \gamma_2$, más una $w_1 w_2$ -geodésica en $G - E(C'_S)$ (que tiene longitud a lo más $L + 3$ si $\{w_1, w_2\} \neq \{\alpha_2, \beta_2\}$ y a lo más $L + 4$ si $\{w_1, w_2\} = \{\alpha_2, \beta_2\}$) contiene un ciclo en G de longitud al menos g .

Sea C''_S una copia de C'_S tal que $V(C'_S) \cap V(C''_S) = \emptyset$ y para cada $v \in V(C'_S)$ sea v' su copia en C''_S . Sea G^* la gráfica definida como:

$$V(G^*) = V(C'_S) \cup V(C''_S) \text{ y } E(G^*) = E(C'_S) \cup E(C''_S) \cup E^+$$

donde

$$E^+ = \{\alpha_2\alpha'_2, \beta_2\beta'_2, \gamma_1\gamma'_1, \gamma_2\gamma'_1\} \cup \{uu' | u \in F\}.$$



Claramente G^* es una gráfica 3-regular, y como $|V(G^*)| = 2|V(C'_S)| < 2|V(C_S)|$, por el Lema 4.2 vemos que $|V(G^*)| < |V(G)|$. Así, si probamos que $c(G^*) \geq c(G) = g$ llegaremos a una contradicción, demostrando este Teorema.

Sea C un ciclo en G^* . Si $E(C) \cap E^+ = \emptyset$ entonces C está contenido en G por lo que C tiene longitud al menos g .

Supongamos que $E(C) \cap E^+ \neq \emptyset$.

Caso 1. $|E(C) \cap E^+| = 2$.

Si $\gamma_1\gamma'_2$ y $\gamma_2\gamma'_1$ están en C , entonces C contiene una $\gamma_1\gamma_2$ -trayectoria contenida en C'_S por lo que C tiene longitud al menos $d_{C'_S}(\gamma_1, \gamma_2) + 2$. Por i) se sigue que C tiene longitud al menos g .

Si $w_1w'_1$ y $w_2w'_2$ están en C , con $w_1, w_2 \in F \cup \{\alpha_2, \beta_2\}$, se sigue que la longitud de C es al menos

$$d_{C'_S}(w_1, w_2) + d_{C''_S}(w'_1, w'_2) + 2 = 2d_{C'_S}(w_1, w_2) + 2.$$

Esto implica, por ii), que C tiene longitud al menos

$$2(g - L - 4) + 2 \geq 2 \left\lceil \frac{g-1}{2} \right\rceil + 2 \geq g.$$

Finalmente, si $\gamma_i\gamma'_j$ y ww' están en C con $w \in F \cup \{\alpha_2, \beta_2\}$, vemos que la longitud de C es al menos

$$\begin{aligned} & d_{C'_S}(w, \gamma_i) + d_{C''_S}(w', \gamma'_j) + 2 \\ &= d_{C'_S}(w, \gamma_i) + d_{C'_S}(w, \gamma_j) + 2 \\ &\geq d_{C'_S}(\gamma_i, \gamma_j) + 2 \geq (g - 2) + 2 = g. \end{aligned}$$

Caso 2. $|E(C) \cap E^+| = 4$.

Si C contiene al menos tres aristas de la forma $w_iw'_i \in F \cup \{\alpha_2, \beta_2\}$, con $i = 1, 2, 3$, entonces C contiene una w_jw_q -trayectoria en C'_S y una $w'_qw'_r$ -trayectoria en C''_S con $\{j, q, r, \} = \{1, 2, 3\}$, Así entonces, de manera análoga al segundo subcaso del caso anterior

vemos que C tiene longitud al menos

$$2(g - L - 4) + 4 \geq 2 \left(\left\lceil \frac{g-1}{2} \right\rceil \right) + 4 \geq g.$$

Ahora supongamos que C contiene dos aristas de la forma $w_i w'_i$ con $w_i \in F \cup \{\alpha_2, \beta_2\}$ para $i = 1, 2$, y a las aristas $\gamma_1 \gamma'_2$ y $\gamma_2 \gamma'_1$. Aquí tenemos dos posibilidades:

- C contiene una $\gamma_1 \gamma_2$ -trayectoria en C'_S (o una $\gamma'_1 \gamma'_2$ -trayectoria en C''_S).
- C contiene una $\gamma_i w_1$ -trayectoria y una $\gamma_j w_2$ -trayectoria en C'_S con $i \neq j$, $i, j \leq 2$.

Si sucede a) entonces C tiene longitud al menos

$$4 + d_{C'_S}(\gamma_1, \gamma_2) \geq 4 + (g - 2) > g.$$

Si sucede b) entonces C debe contener también una $\gamma'_i w'_1$ -trayectoria y una $\gamma'_j w'_2$ -trayectoria en C''_S . Por lo tanto C tiene longitud al menos

$$\begin{aligned} & 4 + d_{C'_S}(w_1, \gamma_i) + d_{C'_S}(w_2, \gamma_j) + d_{C''_S}(w_1, \gamma_i) + 2d_{C''_S}(w_2, \gamma_j) \\ &= 4 + 2d_{C'_S}(w_1, \gamma_i) + 2d_{C'_S}(w_2, \gamma_j). \end{aligned}$$

Si $\{w_1, w_2\} \neq \{\alpha_2, \beta_2\}$, por iii), vemos que C tiene longitud al menos

$$4 + 2(g - L - 5) \geq 4 + 2 \left(g - \left\lceil \frac{g-1}{2} \right\rceil - 2 \right) \geq g.$$

Si $\{w_1, w_2\} = \{\alpha_2, \beta_2\}$ claramente $d_{C'_S}(w_1, \gamma_i) + d_{C'_S}(w_2, \gamma_j) \geq 2L$ y por iii) vemos entonces que C tiene longitud al menos

$$4 + 2\max\{2L, g - L - 6\}$$

y como $g \geq 10$ tenemos que

$$4 + 2\max\{2L, g - L - 6\} = \begin{cases} 4 + 4L \geq g, & \text{si } L \geq \lceil \frac{g-6}{3} \rceil, \\ 4 + 2(g - L - 6) \geq g, & \text{si } L < \lceil \frac{g-6}{3} \rceil. \end{cases}$$

Caso 3. $|E(C) \cap E^+| \geq 6$.

En este caso C contiene al menos tres aristas de la forma $w_i w'_i$ con $w_i \in F \cup \{\alpha_2, \beta_2\}$ para $i = 1, 2, 3$. Con argumentos análogos a los presentados en el primer subcaso del **Caso 2** vemos que C tiene longitud al menos g . \square

Teorema 4.2 [12] *Para $g \geq 5$, toda $(3; g)$ -jaula es casi 4-conexa.*

Demostración. Como se vió al inicio de la sección anterior, la gráfica de Petersen es casi 4-conexa, por lo que para $g = 5$ el resultado se sigue. Ahora sea G una $(3; g)$ -jaula con $g \geq 6$ y supongamos que no es casi 4-conexa. Por el Teorema 4.1 G es superconexa por lo que existe un vértice v tal que $N(v)$ es un conjunto de corte y $G - N(v)$ tiene al menos tres componentes conexas. Esto implica que $\{v\} \cup N(v)$ es una estrella de corte que por la Observación 2.2 es una contradicción. \square

Bibliografía

- [1] Aldred R., Ellingham M.N., Hemminger R.L. and Holton D.A., *Cycles in quasi 4-connected graphs*, Austral. J. Of Comb. 15 (1997), 37-46.
- [2] Brinkmann G., McKay B. and Saager C., *The smallest cubic graphs of girth nine.*, Combin. Probab. Comput. 4 (1995), 317-329.
- [3] Castañeda C., *Gráficas regulares con cuello dado*. Tesis de licenciatura. Fac. de Ciencias, UNAM (1984).
- [4] Chartrand G., Lesniak L., *Graphs and Digraphs*, Segunda Edición, The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics series (1979).
- [5] Chartran G. and Wilson R.J., *The Petersen Graph*. Graphs and Applications (1984) 69-99.
- [6] Daven M. and Rodger C., *(k;g)-cages are 3-connected*, Discrete Math. 199 (1999), 207-215.
- [7] Erdős P., Sachs H., *Reguläre Graphen gegebener Tailleweite mit minimaler Knotenzahl*. Wiss. Z. Univ. Halle, Math. Nat 12 (1963) 251-258.
- [8] Fábrega J. and Fiol M. A., *Maximally Connected Digraphs*, J. Graph Theory 13 (1989) 657-668.
- [9] Fu H., Huang K. and Rodger C., *Connectivity of Cages*, J. Graph Theory 24 (1997), 187-191.
- [10] Harary, F., *Graph Theory*, Addison-Wesley, (1969).

- [11] Jiang T. and Mubay D., *Connectivity and Separating Sets of Cages*, J. Graph Theory 29 (1998), 35-44.
- [12] Marcote X., Pelayo I., and Balbuena C., *Every Cubic Cage is quasi 4-connected*, Discrete Math., por aparecer.
- [13] Neumann Lara V., *Introducción a la Teoría de Gráficas*, IV Coloquio del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV (CONACYT-SEP), Taxco, Gro. Agosto de 1985.
- [14] O'keefe M. and Wong P.K., *A Smallest graph of girth 5 and valency 6*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 26, 145-149 (1979).
- [15] Robertson N., *The smallest graph or girth 5 and valency 4*, Bulletin of the American Mathematics Society 70 (1964).
- [16] Sachs H., *On regular graphs with given girth*, Theory of Graphs and its Applications (Proceedings Smoltenice 1963), Prague 1964, 91-97.
- [17] Tutte W.T., *A family of cubical graphs*, Proc. Cambridge Phil. Soc. (1947), 459-474.
- [18] Tutte W.T., *Connectivity in graphs*, Univ. Toronto Press (1966), Cap 8, 65-83.
- [19] Wegner G., *A Smallest graph of girth 5 and valency 5*, Journal of Combinatorial Theory (B) 14, 203-208 (1973).
- [20] Wong P.K., *Cages-A Survey*, J. Graph Theory 6 (1982), 1-22.
- [21] Wong P.K., *On the Uniqueness of the smallest graph of girth 5 and valency 6*, Journal of Graph Theory, Vol. 3 (1979) 407-409.