UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES "ACATLAN"

TEORIA DE JUEGOS COOPERATIVOS. UNA APLICACION EN EL SEGURO DE VIDA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN ACTUARIA

P R E S E N T A

JOSE PRIMITIVO SOLIS FRANCO

ASESOR: MAT. JORGE LUIS SUAREZ MADARIAGA

MAYO DE 2004

Cuando se cumple alguna meta y hacemos un balance para identificar los factores que intervienen para que esto suceda, nos encontramos con que son muchos que seguramente no resaltamos todos. Sin embargo, creo que lo más importante son las personas que están presentes en esos momentos significativos de nuestras vidas.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, por el apoyo incondicional que siempre me han brindado y que me han permitido compartirles mis alegrías y preocupaciones. A ellos debo haber cumplido esta meta.

A mis hermanos Octavio, Lety, Gil, Marco y Samuel, quienes siempre están dispuestos a escuchar y a dar una palabra de aliento que hace recobrar el animo para continuar.

A Lupita que ha complementado mis deseos de hacer las cosas, que me impulsa a redoblar esfuerzos para afrontar las responsabilidades.

A César por su amistad, con quien durante los años de universidad compartimos ilusiones.

A mi asesor, Jorge Luis, por su apoyo y sus consejos para la elaboración del presente trabajo.

A Sergio por darme la oportunidad de aprender y ayudarme a confiar en mi mismo.

A Edith y Jaime con quienes compartimos la ilusión de seguir creciendo en el plano profesional.

Gracias a Dios.

INTRODUCCION

La teoría de juegos es una colección de modelos matemáticos para estudiar situaciones de conflicto y/o cooperación. Intenta resumir esos elementos que son comunes en muchos encuentros de conflicto y/o cooperativos y analizarlos matemáticamente. Su objetivo es explicar, o proveer una guía normativa del comportamiento racional de confrontaciones individuales con decisiones estratégicas en interacción social. La teoría de juegos está interesada en el comportamiento estratégico óptimo, situaciones de equilibrio, resultados estables, convenios, formación de coaliciones, asignaciones equitativas y conceptos similares relacionados para resolver diferencias de grupo. La prevalecencia de competición en muchas actividades humanas ha hecho de la teoría de juegos un modelo fundamental de planteamiento en diversas áreas como son economía, ciencia política e investigación de operaciones.

Con el presente trabajo se pretende mostrar la relación que existe entre la teoría de juegos cooperativos y el cálculo actuarial a través del planteamiento y la solución de un problema especifico de anualidades contingentes (en particular, de un seguro dotal puro), que sugiere la distribución del pago de la prima, que representa la contratación del beneficio, entre las personas que conforman el grupo de interés.

Este trabajo esta integrado por cuatro capítulos muy específicos. En el primer capítulo se exponen los conceptos básicos de la teoría de juegos, iniciando por dar algunas definiciones de 'juego', continuando con la representación de un juego en su forma extensiva y su forma normal apoyado de ejemplos especificos para cada caso, definiendo también las estrategias y el valor de un juego, hasta llegar al Teorema Fundamental de la Teoría de Juegos. El propósito de este capítulo es que teniendo claros los conceptos básicos de la teoría de juegos, se tengan los elementos necesarios para analizar, plantear y sugerir cursos de acción a seguir con respecto a problemas de carácter competitivo.

Teniendo claros los conceptos de la teoría de juegos, en el segundo capitulo se aborda la teoria de juegos cooperativos, donde las coaliciones son el concepto principal de este tema. Se hablará de la función caracteristica de un juego, las imputaciones, estrategias equivalentes, dominio de imputaciones y el Valor Shapley de un juego, conceptos muy especificos y suficientes para entender el objetivo de este capitulo, el cual es mostrar que en este tipo de juegos cooperativos los jugadores tienen completa libertad de comunicarse con el propósito de que uniéndose lleguen a formar acuerdos de los cuales todos resulten beneficiados.

En el tercer capítulo, dado que no es el propósito de este trabajo, sólo se expondrán los conceptos elementales del Cálculo Actuarial, haciendo énfasis en la exposición de los status de vidas conjuntas, que será finalmente en un problema de este tipo en el cual se centra la aplicación de la teoría de juegos cooperativos que es el tema principal de esta tesis. Además se explicará brevemente lo qué es una anualidad cierta desde el punto de vista financiero y anualidad contingente desde el punto de vista actuarial.

En el cuarto capítulo se hace el planteamiento de un problema específico para un grupo de tres personas que contratan una anualidad contingente, y cuyo propósito es determinar qué cantidad de la prima corresponde pagar a cada una de ellas. Es aquí donde se aplica la teoría de juegos cooperativos, ya que el problema es planteado como un juego cooperativo y mediante el cálculo del valor Shapley se proporciona una alternativa para conocer qué cantidad debe pagar cada uno de los integrantes del status por concepto de prima, a la vez considerados también como los jugadores.

1. INTRODUCCION A LA TEORIA DE JUEGOS

1.1 Nociones Generales

La idea general de un juego es aquella con la cual estamos familiarizados en el contexto de juegos de salón. Comenzando por un punto dado hay una secuencia de jugadas personales, en cada una de las cuales uno de los jugadores escoge de entre varias posibilidades; entremezcladas entre esas puede estar la suerte, jugadas tales como arrojar un dado o barajar un paquete de cartas.

Algunos ejemplos de este tipo de juegos son el ajedrez, en el cual no hay jugadas casuales (excepto por determinar quien jugará primero); y la ruleta, la cual es completamente un juego de azar en la cual la habilidad no toma parte. De hecho, en el juego de ajedrez cada jugador conoce cada jugada que ha sido realizada hasta ahora. Mientras que, en algunos juegos, un jugador es incapaz de determinar cuál de las jugadas fue realmente hecha, o por un jugador oponente, o por azar. El resultado de esto es que, cuando un jugador hace un movimiento, él no conoce la posición exacta del juego, y debe hacer su movimiento recordando que hay varias posibles posiciones reales.

Finalmente al terminar el juego, hay normalmente algún pago a los jugadores (en forma de dinero, prestigio o satisfacción) el cual depende del desarrollo del juego. Podemos pensar que ésta es una función que asigna un pago a cada "posición terminal" del juego.

1.2 Forma Extensiva de un juego

Por consiguiente, en este contexto, la idea general de un juego registra tres elementos: (1) jugadas alternadas, las cuales pueden ser jugadas personales o de azar, (2) una posible falta de conocimiento, y (3) una función de pago.

La forma más convencional de representar un juego en forma extensiva es usar un "árbol de juego".

Se define un *árbol topológico o árbol de juego* como una colección finita de nodos, llamados vértices, conectados por líneas, llamadas arcos, para formar una figura conectada que no incluye curvas cerradas. De aquí se sigue que, dados cualesquiera dos vértices A y B, hay una secuencia única de arcos y nodos uniendo A y B.

De esto obtenemos

Definición. Sea Γ un árbol de juego con un vértice distinguido A. Decimos que un vértice C sigue al vértice B si la secuencia de arcos que une A con C pasa a través de

B. Decimos que C sigue a B *inmediatamente* si C sigue de B y, además, hay un arco que une B con C. Un vértice X se dice que es terminal si ningún vértice sigue a X.

Definición. Por un juego *n-personal en forma extensiva* se entiende

i) un árbol de un juego Γ con un vértice distinguido A llamado el punto inicial de Γ;

ii) una función, llamada la *función de pago*, la cual asigna un n-vector a cada vértice final de Γ;

iii) una partición de los vértices no terminales de Γ en n+1 conjuntos $S_0, S_1, \ldots, S_n$, llamada *conjunto del jugador*;

iv) una distribución de probabilidad, definida en cada vértice de S_0, entre los seguidores inmediatos de este vértice;

v) para cada $i = 1,\ldots,n$, una subpartición de S_i en subconjuntos S_i^j, llamada *conjunto de información*, tal que dos vértices en el mismo conjunto de información tiene el mismo número de seguidores inmediatos y ningún vértice puede seguir a otro vértice en el mismo conjunto de información;

vi) para cada conjunto de información S_i^j, un conjunto índice I_i^j, junto con un mapeo 1-1 de el conjunto I_i^j sobre el conjunto de inmediatos seguidores de cada vértice de S_i^j.

Los elementos de un juego se interpretan de la siguiente manera: la condición *i)* expresa que hay un punto inicial; *ii)* da una función de pago; *iii)* divide las jugadas en jugadas de azar (S_0) y jugadas personales las cuales corresponden a los n jugadores $(S_1,\ldots,S_n)$; *iv)* define un esquema de azar en cada jugada posible, *v)* divide una jugada del jugador en "conjuntos de información": él conoce en cuál conjunto de información se encuentra, pero no en cuál vértice del conjunto de información.

La forma extensiva es equivalente a la exacta traslación de las reglas en los términos técnicos de un sistema formal diseñado para representar todos los juegos. Si el árbol del juego reproduce fielmente cada posible estado, junto con las posibles decisiones provenientes de él, y cada posible resultado, se dice que representa el juego en forma extensiva.

Ejemplo. En el juego del *par de monedas*, el jugador A escoge "cara" (C) o "cruz" (X). El jugador B, no conociendo la elección del jugador A, también escoge "cara" o "cruz". Si los dos escogen lo mismo, entonces el jugador B gana un peso del jugador A; de otro modo, el jugador A gana un peso del jugador B. En la siguiente figura se representa el juego del par de monedas en forma extensiva mediante un árbol de juego.

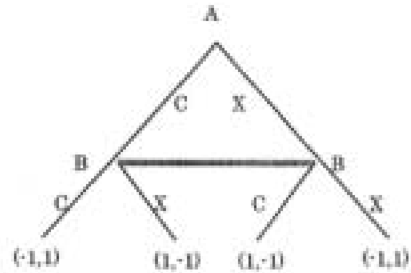

Fig. 1.1

En el árbol del juego, los vectores en los vértices terminales representan la función de pago: la letra junto a los otros vértices denotan el jugador al cual le corresponde jugar. El área sombreada encierra jugadas en el mismo conjunto de información.

Definición. Se dice que el jugador i tiene información perfecta en Γ si cada uno de sus conjuntos de información consiste de un solo elemento. Se dice que el juego Γ tiene información perfecta si cada jugador tiene información perfecta en Γ.

Por ejemplo, el juego de ajedrez tiene información perfecta, mientras que el juego de póker no.

Estrategias

El significado intuitivo de una estrategia es aquel de un plan para jugar un juego. Se puede pensar de un jugador como diciéndose a sí mismo "si tal o cual cosa pasa, actuaré de tal o cual manera". Así se tiene

Definición. Por una estrategia para un jugador i se entiende una función la cual asigna, a cada subconjunto de información S_i^j del jugador i, uno de los arcos que sigue un vértice representativo de S_i^j.

En general, estamos acostumbrados a la idea de que un jugador decide su jugada en un juego sólo unas cuantas veces con anticipación, y muy frecuentemente debe hacerlo en el momento. En la práctica esto debe ser así, para un juego tal como ajedrez o póker donde el número de posibles jugadas es tan grande que ninguno puede planear cada contingencia con mucha anticipación. Desde un punto de vista puramente teórico, sin embargo, podemos pasar por alto esta limitante, y asumir que, aún antes de empezar el juego, cada jugador tiene ya decidido que hará en cada caso. Así, estamos realmente asumiendo que cada jugador escoge su estrategia antes de empezar el juego.

En realidad lo que nos interesa, y lo que le interesa a cada jugador, es decidir cuál de sus estrategias es mejor, desde el punto de vista de maximizar su participación en el pago (es decir, el jugador *i* quiere maximizar el componente *i-ésimo* de la función de pago). Sin embargo, mientras sólo conozcan probabilisticamente lo que resultará de los posibles movimientos, será natural tomar la esperanza matemática de la función de pago, dado que los jugadores están usando una *n-ada* de estrategias dada.

Se llama estrategia del jugador al conjunto de reglas que especifican cuál de las alternativas disponibles debería tomar en cada jugada. Una estrategia se denomina **estrategia pura** si representa la elección del participante en una determinada etapa de un curso único, es decir, es el establecimiento anticipado de la elección a efectuar en un estado determinado.

Usando el árbol del juego podemos construir la tabla de estrategias puras del juego para los jugadores del juego del par de monedas.

Estrategias puras del jugador **A**		Estrategias puras del jugador **B**	
A-C	Elegir cara	B-C	Elegir cara
A-X	Elegir cruz	B-X	Elegir cruz

Dado que las estrategias puras son un resumen del árbol del juego, cualquier error al trazar el árbol se reflejará igualmente en la tabla de estrategias puras siendo incorrecta y los análisis basados en la tabla serán erróneos.

1.3 Forma Normal

Dadas las reglas de cualquier juego ahora somos capaces *en principio* de dibujar la forma extensiva y listar las estrategias puras. Por supuesto que para cualquier juego realista (tal como ajedrez) esto probablemente es una imposible y ardua tarea, pero esto no importa si estamos tratando de entender las ideas fundamentales.

Con una lista comprensible de estrategias puras en mano, cualquier jugada particular completa del juego puede ser representada como una combinación de una estrategia pura de cada lista del jugador.

Así, para el ejemplo del par de monedas, a partir de la tabla de estrategias puras, observamos que la elección de la estrategia

A-C y B-C dan como resultado el juego $C \rightarrow C$,
A-X y B-C dan como resultado el juego $X \rightarrow C$,
A-C y B-X dan como resultado el juego $C \rightarrow X$,
A-X y B-X dan como resultado el juego $X \rightarrow X$,

Esta propiedad de estrategias puras conduce a otra representación del juego llamada la *forma normal*. Esta es una versión reducida del juego, representada por una matriz en la cual se listan de todas las características solo la elección para cada jugador de sus estrategias puras. Listamos las estrategias puras del jugador A como renglones y las del jugador B como columnas. Entonces dado que una estrategia pura del jugador A y una del jugador B determinan una jugada, y por lo tanto únicamente determinan un resultado, podemos listar los resultados que se obtienen de la *i-ésima* estrategia pura del jugador A y la *j-ésima* estrategia pura del jugador B en la posición (i,j); esto es, poner una A en la posición (i,j) si gana A o B si pierde. De esta forma, para el caso del juego del par de monedas, obtenemos

		B	
		C	X
A	C	B	A
	X	A	B

Suponiendo ahora que hemos encontrado para cualquier juego, a partir de la forma extensiva, alguna regla que nos lleva a la construcción de la tabla anterior, la cual refleja para cada jugador la elección de su estrategia pura, el resultado es determinado. A partir de esto, podemos entonces definir la forma normal.

La **forma normal** de un juego es otro juego, *equivalente* al juego original, jugado de la siguiente manera: Conciente de la regla (por ejemplo, conociendo la tabla anterior), cada jugador selecciona una estrategia pura sin conocer lo que los otros jugadores escogen. Usando la regla conocida, el resultado del juego es entonces determinado.

Naturalmente muchos aspectos del juego original se pierden al pasar a la forma normal. Por ejemplo, la forma normal de un juego es por definición un juego de información imperfecta, mientras que el juego original bien puede tener información perfecta. Sin embargo, la forma normal es equivalente al juego original en el sentido de que las consecuencias de la elección de cada estrategia se conservan. Este es un aspecto vital si queremos saber quien gana y cómo.

Introducimos un incentivo monetario en el juego del *par de monedas* y especificamos el resultado por la regla "el perdedor paga al ganador un peso". Si introducimos solo los pagos del primer jugador A (dado que los pagos correspondientes para B son justamente los negativos) la forma normal del *par de monedas* se convierte en una matriz dada en la tabla de abajo, y se le llama **matriz de juego**.

		B	
		C	X
A	C	-1	1
	X	1	-1

Pagos para el jugador A

En una matriz de juego es convencional que los pagos sean para el jugador de los renglones.

Leyendo de izquierda a derecha en la Fig. 1.1 de la página 5, los puntos terminales representan uno de dos posibles resultados: A gana o B gana. En general a tal juego se conoce como un juego de **ganar o perder**.

Podemos notar que la suma de los pagos para los jugadores en cada estado terminal es cero. Por lo tanto tal juego es llamado un **juego de suma cero**. Esta definición se aplica igual para los juegos de varios jugadores, pero en el caso de dos jugadores si el juego es de suma cero significa que lo que un jugador gana el otro lo pierde.

Consideremos el siguiente juego:

A escoge un número *(s)* del conjunto $\{-1,0,1\}$, y entonces B sin conocer la elección de A hace lo mismo y escoge un número *(t)*. Después de que las elecciones son reveladas B paga a A $s(t-s) + t(t+s)$.

La función $P(s,t) = s(t-s) + t(t+s)$, determina el pago para A. Podemos fácilmente construir la matriz de pagos dada en la tabla siguiente.

				B			
			I $t=-1$	II $t=0$	III $t=1$	min renglón	
	I	$s=-1$	2	-1	-2	-2	
A	II	$s=0$	1	0	1	0 ←	Max de min renglón (Maximin puro)
	III	$s=1$	-2	-1	2	-2	
	max columna		2	0	2		
				↑ Min de max columna (Mínimax puro)			

A desea obtener el mayor pago posible. De manera que, analizando las diferentes opciones, si A selecciona $s = -1$ el jugador B buscando maximizar su ganancia seleccionará $t = 1$, entonces A pierde 2; en todo caso, a lo menos que B puede aspirar es ganar 1, entonces escogería $t = 0$. En caso contrario, si B escoge $t = -1$ pierde 2.

De igual forma sucede si A selecciona $s = 1$, ya que B seleccionará $t = -1$ y A pierde 2, o bien, B escogería $t=0$ y A pierde 1. En caso de que B escoja $t = 1$, A gana 2.

Si A selecciona $s = 0$ lo peor que puede pasar es que no gane ni pierda nada, puesto que si el jugador B decide escoger $t = 0$ no puede tener un peor pago que 0. En este caso, para cualquier otra elección de t, B pierde 1.

Si ambos jugadores juegan de esta manera, ninguno tiene que lamentar después de conocer la selección del oponente, porque ambos notan que, dada la selección del oponente, lo peor sería hacer una elección que los llevara a perder.

Desde el punto de vista de ambos jugadores, cada uno debe seleccionar su mejor estrategia, de la cual se espera ocurra lo peor. En esta lógica, entonces la selección de estrategias conduce a un mismo pago, ya que la mejor estrategia para A es $s = 0$ y para el jugador B es $t = 0$, siendo el pago igual a 0. Cuando esto ocurre, se dice que tal valor es un **punto silla**.

En general, para una matriz de juego sea g_{ij} que denota el pago para cada par de estrategias en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$. Definimos

$$\text{MAXIMIN puro} = \max_{1 \le i \le m} \; \min_{1 \le j \le n} \; g_{ij}$$

$$\text{MINIMAX puro} = \min_{1 \le j \le n} \; \max_{1 \le i \le m} \; g_{ij}$$

Entonces , para el ejemplo dado

MAXIMIN puro = MINIMAX puro

Tal como se mencionó anteriormente, a la posición de este valor (el punto i,j para el cual la igualdad se cumple) se le denomina **punto silla**, siendo éste el valor del juego, y el par de estrategias puras conducen a las estrategias puras **optimas**. Si el valor del juego es cero, se dice que el juego es justo ya que no favorece a ningún participante. Un juego que posee punto silla se dice que es **estrictamente determinado** (lo que significa que tiene solución en estrategias puras). Si existen varios puntos silla en una matriz de juego, el valor de ellos es el mismo, lo cual justifica que este número es el valor del juego.

Toda solución de un juego estrictamente determinado consiste de tres cosas:
1) una estrategia pura óptima para el jugador A
2) una estrategia pura óptima para el jugador B
3) el valor del juego.

1.4. Estrategias mixtas

No todas las matrices de juegos tienen punto silla. Dada la matriz de pagos R vs. P

		P				
		I	II	III	min renglón	
	I	-3	-3	2	-3	
R	II	-1	3	-2	-2	← Max de min renglón (Maximin puro)
	III	3	-1	-2	-2	
	IV	2	2	-3	-3	
max columna		3	3	2		
				↑ Min de max columna (Mínimax puro)		

podemos notar que, tiene un MAXIMIN puro = -2 y un MINIMAX puro = 2, por consiguiente no tiene punto silla. En términos de estrategias puras no tiene solución. Esto se expresa diciendo que, en términos de estrategias puras, el juego tiene un valor mínimo de -2 y un valor máximo de 2. Lo más que podemos decir es que siempre tenemos

$$\text{MAXIMIN puro} \leq \text{MINIMAX puro}$$

En general si A tiene m estrategias puras, una estrategia mixta para A consiste de una m-ada $(x_i,\ldots,x_m), 0 \leq x_i \leq 1, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, donde x_i denota la probabilidad de que A seleccione la i-ésima estrategia pura. De manera similar si B tiene n estrategias puras entonces $(y_j,\ldots,y_n), 0 \leq y_j \leq 1, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, donde y_i es una estrategia mixta para B.

Si A usa su estrategia mixta $\mathbf{x} = (x_i,\ldots,x_m)$ y B usa $\mathbf{y} = (y_j,\ldots,y_n)$ en un juego con matriz de pagos g_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$, el pago esperado para A estará dado por

$$P(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i g_{ij} y_j \,.$$

Una estrategia pura es ahora un tipo especial de estrategias mixtas. Por ejemplo la i-ésima estrategia pura de A es $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, donde el 1 ocurre en la i-ésima posición.

Supongamos que B indica con anticipación que jugará su estrategia $\mathbf{y}_0$. Entonces A, buscando maximizar el pago, obviamente escogerá $\mathbf{x}_0$ tal que

$$P(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=\max_{\mathbf{x}\in X}P(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)$$

donde X denota el conjunto de todas las estrategias mixtas de A. Bajo esas circunstancias lo mejor que B puede hacer es elegir $\mathbf{y}_0$ tal que

$$\max_{\mathbf{x}\in X}P(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)=\min_{\mathbf{y}\in Y}\quad\max_{\mathbf{x}\in X}P(\mathbf{x},\mathbf{y})=\bar{v}(=\text{MINIMAX})$$

donde Y denota el conjunto de todas las estrategias mixtas de B. Es decir, B escogería su estrategia mixta con la cual logre minimizar la ganancia de A. Así $\bar{v}$ es lo más que B puede esperar perder bajo esas condiciones.

Ahora se invierte la situación y suponemos que A indica que jugará su estrategia $\mathbf{x}_0$; dado que B obviamente escogerá $\mathbf{y}_0$ tal que

$$P(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=\min_{\mathbf{y}\in Y}P(\mathbf{x}_0,\mathbf{y})$$

lo mejor que A puede hacer es indicar $\mathbf{x}_0$ tal que

$$\min_{\mathbf{y}\in Y}P(\mathbf{x}_0,\mathbf{y})=\max_{\mathbf{x}\in Y}\quad\min_{\mathbf{y}\in Y}P(\mathbf{x},\mathbf{y})=\underline{v}(=\text{MAXIMIN})$$

Aquí $\underline{v}$ es lo menos que A puede esperar ganar bajo esas condiciones. Es decir, escogerá la estrategia mixta que le permita maximizar la pérdida de B.

Esto es cierto, como se vio anteriormente con estrategias puras, que $\underline{v}\le\bar{v}$. Para cualquier matriz de juego

$$\text{MAXIMIN}=\text{MINIMAX}=v$$

Cualquier juego finito de 2 personas de suma cero tiene una solución que consiste de :

- Una estrategia mixta óptima de A la cual le asegure una ganancia esperada de al menos $\underline{v}$.
- Una estrategia mixta óptima de B la cual le asegure una pérdida esperada de a lo más $\bar{v}$.
- El valor del juego: v.

Si creemos conocer una solución para una matriz de juego es muy fácil checar si en realidad es una solución. Por ejemplo una solución para la matriz del juego R vs. P es:

Estrategia óptima de R : $(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2})$

Estrategia óptima de P : $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$

Valor del juego : $-\frac{1}{2}$

Podemos checar esto. Primero calculamos la ganancia esperada de R cuando usa la estrategia mixta $(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2})$ comparándola contra cada una de las estrategias puras de P. Si el valor del juego es $-\frac{1}{2}$ deberíamos encontrar que en cada caso su pago es al menos $-\frac{1}{2}$, y de hecho este es el caso. El punto aquí es que si R gana al menos $-\frac{1}{2}$ contra cada estrategia pura de P ninguna estrategia mixta empleada por P puede mejorar esta situación. En segundo lugar debemos calcular la ganancia esperada de P cuando usa su estrategia mixta $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ contra cada una de las estrategias puras de R. De nuevo encontramos que en cada caso las pérdidas de P son a lo más de $-\frac{1}{2}$. De esta manera ninguna estrategia mixta empleada por R puede mejorar su propia situación, y así el valor del juego es realmente $-\frac{1}{2}$.

Estos cálculos pueden presentarse agregando un renglón y una columna auxiliares en la matriz del juego, las cuales representen las estrategias mixtas correspondientes de P y R.

			P			
			¼	¼	½	
			I	II	III	pérdidas de P
	½	I	-3	-3	2	-½
R	0	II	-1	3	-2	-½
	0	III	3	-1	-2	-½
	½	IV	2	2	-3	-½
ganancias de R			-½	-½	-½	

El primer valor en el renglón de las ganancias de R se calcula de la siguiente manera: $\frac{1}{2}(-3)+0(-1)+0(3)+\frac{1}{2}(2)=-\frac{1}{2}$, el cual representa la ganancia esperada para R al jugar contra la estrategia pura PI. De la misma forma se pueden calcular los siguientes valores al emplear la misma estrategia mixta contra las estrategias puras PII y PIII, obteniendo el mismo valor $-\frac{1}{2}$.

Asimismo, para calcular las pérdidas esperadas de P, el primer valor se obtiene de $\frac{1}{4}(-3)+\frac{1}{4}(-3)+\frac{1}{2}(2)=-\frac{1}{2}$, que representa la pérdida esperada de P al jugar contra la estrategia RI. El mismo valor de $-\frac{1}{2}$ se obtiene al jugar esta estrategia mixta contra las estrategias puras RII, RIII y RIV.

Notamos que el valor obtenido en cada una de las combinaciones, tanto para R como para P es el mismo: $-\frac{1}{2}$. Esto significa, una ganancia para R de al menos $-\frac{1}{2}$ y una pérdida para P de a lo más $-\frac{1}{2}$. En este ejemplo, el valor del juego es $-\frac{1}{2}$, siempre y cuando se juegue con la combinación de estrategias mixtas $R(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2})$ y $P(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$.

Dada cualquier combinación de estrategias mixtas, también podemos obtener el valor del juego partiendo de que el pago esperado se obtiene de la expresión

$$P(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i g_{ij} y_j$$

En el caso de las estrategias mixtas del ejemplo anterior, al sustituir en esta expresión obtenemos

$$P(\mathbf{x},\mathbf{y})=\left(\tfrac{1}{2},0,0,\tfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}-3 & -3 & 2\\ -1 & 3 & -2\\ 3 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\right)=[\ \left(\tfrac{1}{2}\right)(-3)+0(-1)+0(3)+\left(\tfrac{1}{2}\right)(2),$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)(-3)+0(3)+0(-1)+\left(\tfrac{1}{2}\right)(2),\left(\tfrac{1}{2}\right)(2)+0(-2)+0(-2)+\left(\tfrac{1}{2}\right)(3)\ ]\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right)\ \left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\right)=\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)=\ -\tfrac{1}{2}$$

1.5 Dominio de Estrategias

Considérese la siguiente matriz de juegos

		B		
		I	II	III
	I	1	-1	2
A	II	-1	1	3
	III	-3	-2	4

El jugador B desea maximizar su pago y observa que BIII no es una buena estrategia comparada con BI, dado que 1<2, -1<3, -3<4. Cualquier estrategia que A elija, BI es preferible sobre BIII. Esto nos lleva a decir que BI *domina* a BIII. Recordemos que para el jugador B los valores negativos representan sus ganancias.

En general, para un juego de 2 personas de suma cero en forma normal, sean ***X*** y ***Y*** que denotan los conjuntos de estrategias (puras o mixtas) para A y B respectivamente. Supóngase que si A escoge $x\in X$ y B $y\in Y$, el pago para A es $P(x,y)$.

Para el jugador A decimos que $x_1\in X$ **domina** a $x_2\in X$ si $P(x_1,y)\geq P(x_2,y)$ para todo $y\in Y$.

Para el jugador B decimos que $y_1\in Y$ **domina** a $y_2\in Y$ si $P(x,y_1)\leq P(x,y_2)$ para todo $x\in X$.

Se dice que el dominio de estrategias es estricto si la desigualdad se cumple estrictamente en cualquier sentido, para cualquier selección de estrategias del oponente.

Concentrémonos primero en el caso más simple, en el cual una estrategia pura domina a otra estrategia pura. En el presente ejemplo, BI domina estrictamente a BIII, lo cual sugiere que BIII no parece ser una estrategia óptima para B. Así desde el punto de vista de B el juego efectivamente se reduce a

		B	
		I	II
	I	1	-1
A	II	-1	1
	III	-3	-2

Asimismo, A puede hacer lo que el otro jugador, es decir, puede observar que dado que 1>-3, -1>-2 entonces AI (o incluso AII) domina a AIII. Esto reduce el juego a

		B	
		I	II
A	I	1	-1
	II	-1	1

Sin embargo, como podemos ver, si ambos jugadores escogen cada una de sus estrategias con probabilidad $\frac{1}{2}$, el valor del juego es cero.

En este punto podemos concluir que una solución para el juego original 3 X 3 probablemente es

Estrategia óptima de A : $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$
Estrategia óptima de B : $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$
Valor del juego : 0

La solución del juego reducido nos lleva a una solución del juego original. Además se puede ver que si toda dominación encontrada es una estricta dominación, no se perderán estrategias óptimas, es decir, toda solución del juego original se derivará de una solución del juego reducido. En este ejemplo en particular, dado que el juego reducido tiene una solución única y cada dominio de estrategias es estricto, se sigue que la solución encontrada para el juego 3 X 3 es la única solución.

Se ha mencionado que todo juego finito de 2 personas de información perfecta poseerá un punto silla en su forma matricial. Sin embargo, no significa que todas las matrices con punto silla correspondan a juegos de información perfecta. Las matrices de juegos de información perfecta están caracterizadas por una propiedad adicional. Esta es, que la matriz puede ser reducida a un solo elemento borrando sucesivamente renglones y columnas por dominio de estrategias. De este modo la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

la cual tiene un punto silla en la esquina superior izquierda (MAXIMIN = MINIMAX = 2), no corresponde a un juego de información perfecta dado que ninguna reducción por dominio de estrategias es posible.

Es útil introducir alguna notación para dominación. Si la k-ésima estrategia pura de A domina a su l-ésima estrategia pura $(k \neq l)$ escribimos $\mathrm{A}(k) \geq \mathrm{A}(l)$ y $\mathrm{A}(k) > \mathrm{A}(l)$ si la dominación es estricta. De manera similar si $\mathrm{B}(k)$ domina a $\mathrm{B}(l)$ escribimos $\mathrm{B}(k) \geq \mathrm{B}(l)$ y $\mathrm{B}(k) > \mathrm{B}(l)$ si la dominación es estricta. De acuerdo con la definición de dominación dada al principio, esto significa, que si la matriz de pagos es (g_{ij}) $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$

$$\begin{array}{lll} \mathrm{A}(k) \geq \mathrm{A}(l) & \text{si} \quad g_{kj} \geq g_{lj} & \text{para } j = 1,2,\ldots,n, \\ \mathrm{A}(k) > \mathrm{A}(l) & \text{si} \quad g_{kj} > g_{lj} & \text{para } j = 1,2,\ldots,n, \\ & & \\ \mathrm{B}(k) \geq \mathrm{B}(l) & \text{si} \quad g_{ik} \leq g_{il} & \text{para } i = 1,2,\ldots,m, \\ \mathrm{B}(k) > \mathrm{B}(l) & \text{si} \quad g_{ik} < g_{il} & \text{para } i = 1,2,\ldots,m, \end{array}$$

Nótese que las desigualdades para B son inversas puesto que está tratando de minimizar el pago (para A).

Una estrategia pura además puede ser dominada por una estrategia mixta (y viceversa, pero esto no es de utilidad dado que estamos tratando de reducir el tamaño de la matriz, lo cual significa eliminar estrategias puras según estas correspondan a renglones o columnas). Entonces es posible encontrar estrategias mixtas que lleven a la eliminación de estrategias puras. Por ejemplo, dada la siguiente matriz de juego

		B		
		I	II	III
	I	1	1	1
A	II	1	2	0
	III	1	0	2

Podemos observar que esta matriz tiene un punto silla en la esquina superior izquierda (posición $g_{1,1}$). De esto podemos deducir que la solución del juego, de hecho la más sencilla es

Estrategia óptima de A : $\mathbf{(1,0,0)}$
Estrategia óptima de B : $\mathbf{(1,0,0)}$
Valor del juego : 1

Pero también podemos hacer el análisis e identificación de estrategias mixtas que nos permitan eliminar estrategias puras y recudir el juego buscando alguna solución alterna.

Así, la estrategia AI esta dominada (aunque no estrictamente) por la estrategia mixta $(\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Esto es $\frac{1}{2}$ AII+$\frac{1}{2}$ AIII $\geq$ AI. Sustituyendo obtenemos

$$\tfrac{1}{2}(1,2,0)+\tfrac{1}{2}(1,0,2)\geq(1,1,1)$$
$$\tfrac{1}{2}(1)+\tfrac{1}{2}(1)\geq 1,\quad \tfrac{1}{2}(2)+\tfrac{1}{2}(0)\geq 1,\quad \tfrac{1}{2}(0)+\tfrac{1}{2}(2)\geq 1$$

De hecho, $\frac{1}{2}$ AII+$\frac{1}{2}$ AIII es equivalente a AI. Esto nos lleva a reducir el juego a

		B		
		I	II	III
A	II	1	2	0
	III	1	0	2

De manera similar, para el jugador B observamos que la estrategia mixta $(\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ BII+$\frac{1}{2}$ BIII es equivalente a BI. Entonces podemos reducir el juego a

		B	
		II	III
A	II	2	0
	III	0	2

Lo cual nos lleva a la solución

Estrategia óptima de A : $(\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Estrategia óptima de B : $(\mathbf{0}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Valor del juego : 1

Sin embargo, dado que las estrategias mixtas que se han empleado no son estrictamente dominantes, aún no hemos encontrado todas las soluciones posibles.

Este ejemplo nos muestra que un juego con un punto silla puede tener una variedad de soluciones por medio de estrategias mixtas. Incluso, fácilmente podemos revisar que la solución más general para esta matriz de juego es

Estrategia óptima de A : $(\lambda, \frac{1}{2}(1-\lambda), \frac{1}{2}(1-\lambda))$
Estrategia óptima de B : $(\mu, \frac{1}{2}(1-\mu), \frac{1}{2}(1-\mu))$
Valor del juego : 1

donde $0 \leq \lambda \leq 1$ y $0 \leq \mu \leq 1$.

En general, encontrar una estrategia mixta que domine a una estrategia pura no es particularmente fácil. Encontrarse con una matriz de juego relativamente pequeña que no tiene dominio de estrategias puras (y no tiene punto silla) es frecuente pasar algún tiempo buscando un dominio de estrategias mixtas.

2. TEORIA DE JUEGOS COOPERATIVOS

Un juego cooperativo es un juego en el cual los jugadores tienen completa libertad de comunicarse con el propósito de que uniéndose lleguen a formar acuerdos. Estos acuerdos pueden ser de dos tipos: para coordinar estrategias o para compartir pagos.

Uno podría aventurarse a creer que este elemento de acuerdo entre los jugadores de un juego cooperativo podría simplificar el análisis, (por supuesto que si hay un acuerdo perfecto entre todos los jugadores el análisis es trivial). Sin embargo, en general este no es el caso y los acuerdos parciales llegan a complicar el problema.

Compartir pagos no siempre es posible, ya que estos pueden ser en unidades no transferibles, tales como *años en prisión*. Una alternativa en esta situación es incluir la posibilidad de pagos fraccionados en unidades transferibles tal como dinero.

En el caso de los juegos cooperativos el interés principal está en conocer cuáles coaliciones pueden formarse. En un juego de n personas, existen muchas posibles coaliciones, lo cual significa que si una coalición se forma, los diferentes miembros de la coalición deben lograr algún tipo de equilibrio o estabilidad.

Podemos entender el significado de esta estabilidad de mejor manera mediante un ejemplo. Consideremos un juego de tres personas: los jugadores 1, 2 y 3 se encuentran con el problema de formar una coalición. Si dos de ellos, cualesquiera, logran formar una coalición, entonces el tercer jugador deberá pagar a cada uno de ellos una unidad ($1). Si ninguna coalición de dos jugadores se forma, entonces no existe pago para ninguno. Sin considerar que exista alguna relación personal entre los tres jugadores, cualquiera de las coaliciones de dos personas puede formarse y no hay manera de distinguir entre ellas. Por consiguiente los tres pagos (-2, 1, 1), (1, -2, 1) y (1, 1, -2) correspondientes a esas tres coaliciones parecen ser un resultado natural y pueden ser consideradas de alguna manera como una solución del juego. El pago (0, 0, 0) el cual es el promedio de esos tres pagos puede también ser considerada una solución del juego.

Supongamos que el juego es modificado ligeramente, de manera que si se forma la coalición {2,3}, el jugador 1 debe pagar $1.1 al jugador 2 y $0.9 al jugador 3. Esto parece ser mejor desde el punto de vista del jugador 2, ya que puede ganar más en esta forma. Sin embargo, un análisis más detallado nos muestra que no es así. De hecho, parece que ahora la coalición {2, 3} es casi imposible que se forme (a menos que exista alguna dificultad que complique la comunicación entre los jugadores 1 y 3) ya que tanto a 1 como a 3 les favorece la coalición {1, 3}. Por consiguiente, ahora el jugador 2 está en una peor posición que antes: sin embargo, el jugador 2 puede remediar esto proporcionando al jugador tres una facción del pago de $0.1 (suponiendo que esto está permitido). Esto reduce el juego al juego anterior.

Este ejemplo resalta dos puntos importantes, primero, la importancia de los pagos fraccionados y, segundo, la necesidad de lograr una estabilidad entre los diferentes pagos en una solución.

Ahora, si asumimos que los pagos son expresados en términos monetarios, las coaliciones que se formen buscarán maximizar su pago conjunto mediante la coordinación de estrategias.

Sea Γ un juego cooperativo de n personas con un conjunto de jugadores $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Cualquier subconjunto no vacío $S \subseteq I$ es llamado una **coalición**. Existe la posibilidad de coaliciones de una sola persona $\{i\}$, $i \in I$, y por conveniencia, la coalición de ninguna persona $\varnothing$ es permitida. El conjunto de todos los subconjuntos de I, es decir, el conjunto de todas las posibles coaliciones es denotado por $\mathcal{P}(I)$.

2.1 Función Característica de un juego

Definición. Por la *función característica* de un juego Γ de n personas entendemos una función $v : \mathcal{P}(I) \to \mathbf{R}$ de valor real, definida en los subconjuntos de I, la cual asigna a cada $S \subseteq I$ el valor maximin (para S) del juego de dos personas jugado entre S e $I \setminus S$, asumiendo que estas dos coaliciones se forman.

Así $v(S)$ es el monto de utilidad máximo que los miembros de S pueden obtener del juego al coordinar sus estrategias, sin importar lo que el resto de los jugadores puedan hacer. De esta definición, se sigue que

$$v(\varnothing) = 0$$

De igual manera se puede decir que:

"La peor situación posible que puede enfrentar la coalición S es que el resto de los jugadores formen una coalición opuesta $I \setminus S$ la cual proceda a minimizar la ganancia conjunta de S".

Ahora si S y T son dos coaliciones disjuntas, esta claro que ellos al coordinar estrategias pueden lograr al menos tanto como permaneciendo separados. De aquí se tiene la propiedad de *superaditividad*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \qquad \text{para } S, T \subseteq I \text{ y } S \cap T = \varnothing \tag{2.1}$$

La forma más débil de superaditividad es la aditividad, esto es

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T) \qquad \text{para } S, T \subseteq I \text{ y } S \cap T = \varnothing \tag{2.2}$$

Definición. Un juego cooperativo con una función característica aditiva es llamado inesencial. En otro caso es esencial.

Teorema 2.1 Un juego cooperativo finito de n personas Γ es inesencial sí y solo sí

$$\sum_{i\in I} v(\{i\}) = v(I) \tag{2.3}$$

Demostración. Por la definición anterior, la expresión (2.2) implica (2.3). Ahora, por la propiedad de superaditividad (2.1) tenemos

$$v(S\cup T) + v(I\setminus(S\cup T)) \leq v(I) \tag{2.4}$$

De (2.3)

$$v(I) = \sum_{i\in I} v(\{i\}) = \sum_{i\in S} v(\{i\}) + \sum_{i\in T} v(\{i\}) + \sum_{i\in I\setminus(S\cup T)} v(\{i\})$$

$$= v(S) + v(T) + v(I\setminus(S\cup T)$$

Sustituyendo en (2.4)

$$v(S\cup T) + v(I\setminus(S\cup T)) \leq v(S) + v(T) + v(I\setminus(S\cup T)) \tag{2.5}$$

Despejando obtenemos la expresión (2.2)

$$v(S\cup T) = v(S) + v(T)$$

lo cual significa que el juego es inesencial.

Al tratar con juegos de dos personas, generalmente se omite la forma extensiva y se trabaja solo con la forma normal. Esto es porque la forma normal nos permite estudiar estrategias mixtas con mayor facilidad, las cuales son la esencia de tales juegos. Ahora, la esencia de los juegos de n personas no es el azar; más bien, es la formación de coaliciones. Así, en este apartado se aborda, no la forma normal, sino la función característica. De hecho la función característica nos muestra las capacidades de las diferentes coaliciones.

Definición. Por un juego de n personas en su forma de función característica entenderemos una función v de valor real, definida en los subconjuntos de I, la cual satisface las condiciones de *superaditividad* y *aditividad* arriba mencionadas.

Como se mencionó anteriormente, el monto $v(S)$ es el valor maximin del juego jugado entre S e $I\setminus S$. Suponiendo que la forma normal del juego es de suma constante (es decir, la suma de los pagos para todos los jugadores es siempre la misma), entonces el juego entre S e $I\setminus S$ es estrictamente determinado

Así tenemos

$$v(S)+v(I\setminus S)=v(I)$$

Esto conduce a la siguiente definición

Definición. Un juego en forma de función característica se dice que es de suma constante si, para todo $S\subseteq I$,

$$v(S)+v(I\setminus S)=v(I) \tag{2.6}$$

A esta propiedad se le denomina *complementariedad.*

Un juego podría ser de suma constante en su forma de función característica sin ser de suma constante en su forma normal. (Esto es igualmente posible para el juego de suma constante en su forma normal sin ser de suma constante en su forma de función característica, aunque esto no pasa con juegos finitos).

2.2. Imputaciones

El simple aspecto de juegos cooperativos los cuales se han abordado hasta el momento es el problema de estimar el poder relativo de las coaliciones. A diferencia de esto, aunque posiblemente influenciado por ello es la cuestión de los pagos que los jugadores en forma individual finalmente reciben. Los juegos no cooperativos son juegos estratégicos en el sentido que un resultado surge como consecuencia de las acciones de los mismos jugadores, y esto determina sus pagos. En cambio, el resultado de un juego cooperativo es una distribución del pago total disponible entre varios miembros de la coalición, el cual surge como resultado del acuerdo entre los jugadores, más que como consecuencia predeterminada de la selección de sus estrategias. Una posible distribución de un pago disponible se le llama **imputación**.

En un juego cooperativo de n personas Γ podemos representar una imputación por un vector $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, donde x_i denota el monto recibido por el jugador i. Las imputaciones que puedan surgir como resultado de la formación de una coalición obviamente no son arbitrarias, así consideremos las condiciones razonables a imponer para cualquier imputación.

En primer lugar ningún miembro de una coalición aceptará recibir menos de lo que obtendría individualmente actuando independiente de los otros jugadores. Por esta razón requerimos establecer la *racionalidad individual*

$$x_i \geq v(\{i\}) \qquad \text{para todo } i\in I \tag{2.7}$$

En segundo lugar

$$\sum_{i\in I} x_i = v(I) \tag{2.8}$$

pero si

$$\sum_{i\in I} x_i < v(I)$$

entonces cada jugador pudo haber formado su ganancia sin pérdida para los otros. Por ejemplo, si la diferencia fuera distribuida equitativamente cada uno pudo haber ganado el monto

$$\left(\frac{1}{n}\right)\left[v(I)-\sum_{i\in I} x_i\right]$$

Por otra parte, ya que $v(I)$ representa lo más que los jugadores pueden obtener del juego al formar la gran coalición I, es imposible que

$$\sum_{i\in I} x_i > v(I)$$

Por lo tanto para establecer la condición de *racionalidad colectiva* requerimos que la condición (2.8) sea cumpla para cualquier imputación.

Notamos que (2.8) se satisface automáticamente para juegos de suma constante. Sin embargo, en un juego que no es de suma constante pareceria que (2.8) se cumpliria necesariamente solo si la gran coalición I se formara, es decir, que los jugadores lleguen por completo a un acuerdo.

El argumento principal para la racionalidad colectiva es un intento de extender la suposición de racionalidad individual a grupos de jugadores; sin embargo, la noción de racionalidad ni es un postulado del modelo ni parece ser una consecuencia lógica de racionalidad individual. Si aceptamos el razonamiento que conduce a (2.8) ¿por qué aplicaríamos el argumento solo a la coalición I y no igualmente a cada coalición S? Es decir, no impondríamos también la condición

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \qquad \text{para todo } S \subseteq I \tag{2.9}$$

Resulta que hay buenas razones para no hacer esto, básicamente porque (2.9) es una condición demasiado fuerte. Las imputaciones que satisfacen (2.9) son aquellas que ninguna coalición cualquiera pueda oponerse. Ciertamente una coalición realmente formada esta en una posición de asegurar para si misma al menos $v(S)$. Si dos coaliciones S e $I\setminus S$ están negociando sobre posibles imputaciones es absolutamente posible que ellos considerarán al menos una imputación $\mathbf{x}$ con la propiedad

$$\sum_{i\in T} x_i < v(T)$$

para alguna otra coalición T.

Otra razón para rechazar (2.9) es que si Γ es un juego esencial de suma constante no hay imputaciones que satisfagan (2.9).

En este sentido, podemos definir un juego cooperativo, o más bien una clase restringida de juegos cooperativos.

Definición. Un juego cooperativo clásico Γ es una colección

$$< I, v, X >$$

en la cual I denota el conjunto de jugadores, v es una función $v : \mathcal{P}(I) \to \mathbf{R}$ la cual satisface $v(\varnothing) = 0$ y es superaditiva, y X denota un conjunto de imputaciones que satisfacen (2.7) y (2.8).

Teorema 2.2 Un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ es una imputación en un juego cooperativo clásico de n personas $< I, v, X >$ sí y solo sí existen números a_i, $i \in I$, tales que

$$x_i = v(\{i\}) + a_i \tag{2.10}$$

$$a_i \geq 0,$$

y

$$\sum_{i \in I} a_i = v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\}) \tag{2.11}$$

Demostración. Asumimos primero que a_i existe. Entonces dado que $a_i \geq 0$, (2.10) da (2.7).

Despejando (2.10) tenemos

$$a_i = x_i - v(\{i\}),$$

y sustituyendo en (2.11) tenemos

$$\sum_{i \in I} (x_i - v(\{i\})) = v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\}),$$

esto es

$$\sum_{i \in I} x_i = v(I),$$

lo cual es la expresión (2.8). Dado que $\mathbf{x}$ satisface (2.7) y (2.8) es una imputación.

Supongamos por otro lado que $\mathbf{x}$ es una imputación, y ponemos

$$a_i = x_i - v(\{i\}), \tag{2.12}$$

De (2.7) tenemos $a_i \geq 0 \quad (i \in I)$, así que solo falta verificar (2.11). Sumando (2.12) sobre $i \in I$ obtenemos

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \in I} v(\{i\}),$$

de lo cual aplicando (2.8) se produce (2.11)

$$\sum_{i \in I} a_i = v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\})$$

Teorema 2.3 Cualquier juego inesencial tiene la única imputación

$$\mathbf{x} = \left(v(\{1\}), v(\{2\}), \dots, v(\{n\})\right) \tag{2.13}$$

Por otro lado cualquier juego esencial con al menos dos jugadores posee infinidad de imputaciones.

Demostración. Usando el teorema previo, escribimos la imputación en la forma

$$\left(v(\{1\}) + a_1, \dots, v(\{n\}) + a_n\right)$$

Si el juego es inesencial, de (2.3) tenemos

$$\sum_{i \in I} v(\{i\}) = v(I)$$

sustituyendo en (2.11) obtenemos

$$\sum_{i \in I} a_i = 0 .$$

No obstante, dado que $a_i \geq 0$ esta última ecuación implica $a_i = 0$ para cada $i \in I$.
Alternativamente, si el juego es esencial entonces

$$\sum_{i \in I} a_i = v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\}) > 0,$$

y este numero positivo puede ser escrito como una suma de $a_i \geq 0$ en infinidad de formas.

2.3. Estrategias equivalentes

Tomando en cuenta que cualquier conclusión de nuestra teoría debería ser invariable bajo un cambio de escala de utilidad o si cada jugador esta pagando una prima independiente del resultado del juego, tenemos la siguiente

Definición. Dos juegos cooperativos de n personas con funciones características v y v' definidas sobre el mismo conjunto de jugadores son **estratégicamente equivalentes** si existen $k > 0$ y números $c_i, i \in I$, tales que

$$v'(S) = kv(S) + \sum_{i \in S} c_i \quad \text{para todo } S \subseteq I \tag{2.14}$$

Teorema 2.4 Una estrategia equivalente es una relación de equivalencia.

Demostración. Escribimos $v \sim v'$ para denotar la relación de estrategia equivalente. Para probar el teorema solo es necesario verificar las tres propiedades definidas de una relación de equivalencia.

(i) *Reflexividad:* $v \sim v'$. En la expresión (2.14) ponemos k = 1 y $c_i = 0$, para $i \in I$

(ii) *Simetría:* Si $v \sim v'$, entonces $v' \sim v$. Suponiendo que (2.14) es valida, entonces resolviendo para $v(S)$ obtenemos

$$v(S) = \frac{1}{k} v'(S) + \sum_{i \in S} (-\frac{c_i}{k})$$

Si ahora establecemos $k' = 1/k$, $c_i' = -c_i / k$ obtenemos

$$v(S) = k' v'(S) + \sum_{i \in S} c_i' \qquad (k' > 0).$$

esto es, $v' \sim v$.

(iii) *Transitividad:* Si $v \sim v'$ y $v' \sim v''$, entonces $v \sim v''$. Dado que $v' \sim v''$ tenemos

$$v''(S) = k' v'(S) + \sum_{i \in S} c_i' \qquad (k' > 0).$$

Sustituyendo para $v'(S)$ en (2.14) obtenemos

$$v''(S) = kk' v(S) + \sum_{i \in S} (c_i' + k' c_i) \ ,$$

y estableciendo $k''=kk'$, $c_i''=c_i'+k'c_i$ obtenemos

$$v''(S)=k''v(S)+\sum_{i\in S}c_i'' \qquad (k'>0).$$

esto es $v \sim v''$.

Un resultado básico sobre relaciones de equivalencia es que cualquier relación de equivalencia sobre algún conjunto $\mathbb{S}$ induce a una partición del conjunto dentro de clases disjuntas, cuya unión es $\mathbb{S}$, de tal modo que cualesquiera dos elementos equivalentes de $\mathbb{S}$ están en la misma clase. Esas clases son llamadas **clases equivalentes.** Así, el teorema 2.4 implica que el conjunto de funciones características, para un conjunto fijo de jugadores I, puede ser subdividido únicamente en clases disjuntas de estrategias equivalentes.

Además, la relación de estrategias equivalentes entre los juegos (y sus funciones características) induce a una equivalencia entre imputaciones, puesto que si $v \sim v'$ entonces

$$v'(S)=kv(S)+\sum_{i\in S}c_i \qquad (k'>0).$$

y si $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ es una imputación bajo la función característica v, entonces consideramos el vector $\mathbf{x}'=(x_1',\dots,x_n')$, donde

$$x_i'=kx_i+c_i$$

tenemos, de (2.7),

$$x_i'=kx_i+c_i\geq kv(\{i\})+c_i=v'(\{i\}),$$

esto es, la condición de racionalidad individual se satisface. Igualmente, de (2.8),

$$\sum_{i\in I}x_i'=\sum_{i\in I}(kx_i+c_i)=k\sum_{i\in I}x_i+\sum_{i\in I}c_i=kv(I)+\sum_{i\in I}c_i=v'(I)$$

De manera que la condición de racionalidad colectiva también se satisface. Por lo tanto x' es una imputación bajo la función característica v'. Decimos que $\mathbf{x}'$ **corresponde** a $\mathbf{x}$ bajo la estrategia equivalente $v'\sim v$.

La idea de estrategia equivalente simplifica gratamente el estudio de los juegos cooperativos dado que, para cada I fijo, es solo necesario estudiar un juego de cada clase.

Definición. Un juego cooperativo con un conjunto de jugadores I es llamado un juego de suma cero si su función característica es exactamente igual a cero.

Teorema 2.5 Cualquier juego cooperativo inesencial es estratégicamente equivalente a un juego de suma cero.

Demostración. Un juego es inesencial si su función característica es aditiva, esto es

$$v(S)=\sum_{i\in I} v(\{i\}) \qquad \text{para todo } S\subseteq I\,.$$

Definido v' por

$$v'(S)=v(S)-\sum_{i\in S} v(\{i\}) \qquad \text{para todo } S\subseteq I$$

Sustituyendo tenemos

$$v'(S)=\sum_{i\in S} v(\{i\})-\sum_{i\in S} v(\{i\})=0$$

entonces $v\sim v'$ dado que podemos tomar $k=1$ y $c_i=-v(\{i\})$en (2.14), no obstante v'es exactamente cero.

Definición. Un juego cooperativo con la función característica v esta en forma reducida 0,1 si

$$v(\{i\})=0 \quad (i\in I),v(I)=1$$

Teorema 2.6. Todo juego cooperativo esencial es estratégicamente equivalente a un juego en forma reducida 0,1.

Demostración. Sea v la función característica de un juego cooperativo esencial.

Consideremos el sistema de n+1 ecuaciones.

$$v'(\{i\})=kv(\{i\})+c_i=0 \quad (1\leq i\leq n), \tag{2.15}$$

$$v'(I)=kv(I)+\sum_{i\in I} c_i=1, \tag{2.16}$$

con las n+1 incógnitas $c_1,\ldots,c_n,k$. Aplicando suma a la ecuación (2.15) obtenemos

$$k\sum_{i\in I} v(\{i\})+\sum_{i\in I} c_i=0$$

Restando a (2.16) obtenemos

$$kv(I)+\sum_{i\in I} c_i-\left(k\sum_{i\in I} v(\{i\})+\sum_{i\in I} c_i\right)=1$$

$$k\left(v(I) - \sum v(\{i\}) \right) = 1$$

Dado que el juego es esencial tenemos

$$v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\}) > 0$$

Por lo tanto

$$k = \frac{1}{v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\})} > 0$$

Sustituyendo en la ecuación (2.15) obtenemos

$$\frac{1}{v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\})} (v(\{i\})) + c_i = 0$$

$$c_i = \frac{-v(\{i\})}{v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\})}$$

De esta manera las incógnitas $c_1, \dots, c_n, k$ están determinadas únicamente por las ecuaciones (2.15) y (2.16), $v \sim v'$, y v'esta en forma reducida 0,1.

Para la forma reducida 0,1 las condiciones (2.7) y (2.8) sobre imputaciones se convierten en

$$x_i \geq 0 \; (i \in I), \quad \sum_{i \in I} x_i = 1$$

respectivamente.

Para $n = 2$ cualquier juego de suma constante es inesencial y por consiguiente equivalente a un juego de suma cero: para suponer que hay un juego esencial de suma constante para dos jugadores, por el teorema 2.6 podemos reducir este juego a la forma reducida 0,1. La función característica es entonces

$$v(\varnothing) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0, \quad v(\{1,2\}) = 1$$

Ahora es fácil ver que si un juego es de suma constante entonces cualquier juego estratégicamente equivalente es también de suma constante. Por lo tanto v tiene la propiedad de complementariedad, esto es

$$v(\{2\}) = v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 1 - 0 = 1$$

lo cual es una contradicción. Por consiguiente puede no ser un juego esencial de 2 personas de suma constante.

Cualquier juego cooperativo de dos personas de suma no constante es estratégicamente equivalente a un juego en su forma reducida 0,1 con

$$v(\varnothing)=v(\{1\})=v(\{2\})=0 \quad v(\{1,2\})=1$$

Por consecuencia hay equivalencia solo en un juego como tal y esto puede ser resumido como sigue: los jugadores tienen una unidad para compartir entre ambos suponiendo que pueden lograr en común acuerdo, de otra manera cada uno recibiría nada.

En el caso de un juego de suma constante de tres personas podemos tener un juego inesencial, equivalente a un juego de suma cero, o el único en forma reducida 0,1

$$\begin{aligned} &v(\varnothing)=v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0\,, \\ &v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=1 \\ &v(\{1,2,3\})=1 \end{aligned} \tag{2.17}$$

para un juego esencial. Para $v(\{i\})=0, i\in I$, y $v(I)=1$ derivado de la definición de la forma reducida 0,1. Los valores restantes de v están determinados por complementariedad, por ejemplo

$$v(\{1,2\})=v(\{1,2,3,\})-v(\{3\})=1-0=1$$

Para un juego de tres personas de suma no constante en forma reducida 0,1 tenemos

$$\begin{aligned} &v(\varnothing)=v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0\,, \\ &v(\{1,2\})=\alpha,\ v(\{1,3\})=\beta,\ v(\{2,3\})=\gamma \\ &v(\{1,2,3\})=1 \end{aligned}$$

donde α,β,γ son números arbitrarios en $[0,1]$. Así, las clases de estrategias equivalentes de tale juegos son correspondientes 1 a 1 con los puntos (α,β,γ) de la unidad cúbica.

2.4. Dominio de imputaciones

Idealmente el resultado final de un juego cooperativo sería llegar a una única imputación a través de un procedimiento conducido por jugadores totalmente motivados por un deseo de maximizar su utilidad individual. Pero considerando el juego de 3 personas de suma constante cuya función característica esta dada en (2.17): podemos resumir este juego como sigue: si dos o más jugadores pueden llegar a un arreglo ellos comparten una unidad, de otro modo cada uno de ellos no obtiene nada.

Suponiendo que {1,2} forman una coalición acordando dividir las ganancias equitativamente. Esto conduce a la imputación $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$. Pero el juego es simétrico: no hay una razón particular para formar la coalición {1,2}. Las coaliciones {1,3}, {2,3} son exactamente lo mismo. Esto conduce al conjunto de imputaciones

$$\left\{\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0\right),\left(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}\right),\left(0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\right\},$$

cualquiera de los cuales es un posible resultado por lo que en este caso interesa.

Puesto que en general no podemos distinguir una sola imputación como la solución obvia de un juego cooperativo, empezamos haciendo la siguiente pregunta: *¿Cuáles imputaciones pueden ser claramente descartadas?*

Sea $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ dos imputaciones en un clásico juego cooperativo $<I,v,X>$. Primero precisamos la idea que la coalición S prefiere $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Definición. $\mathbf{x}$ domina a $\mathbf{y}$ a través de una coalición S, denotada por $\mathbf{x}\,\varepsilon_S\,\mathbf{y}$, si

$$\sum_{i\in I} x_i \leq v(S) \tag{2.18}$$

y

$$x_i > y_i \text{ para toda } i\in S \tag{2.19}$$

A la condición (2.18) se le denomina la condición de **efectividad**. Esto significa que la coalición S es realmente capaz de obtener lo que la imputación $\mathbf{x}$ le proporciona colectivamente. La segunda condición, (2.19), especifica que los miembros de S unánimemente prefieren $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ y por ello es llamada la condición de **preferibilidad**.

Definición. Decimos que $\mathbf{x}$ domina a $\mathbf{y}$ si existe una coalición S no vacía tal que $\mathbf{x}\,\varepsilon_S\,\mathbf{y}$.

Denotamos la relación de dominación por $\mathbf{x}\,\varepsilon\,\mathbf{y}$. Dominio de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{y}$ significa que hay *"fuerzas"* (S) en *"sociedad"* (I) las cuales prefieren $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Nótese que ε_S es transitivo pero ε no. Por ejemplo, si

$$v(\{1,2\})=v(\{2,3,\})=v(\{1,3\})=v(\{1,2,3\})=100$$

y

$$\mathbf{x} = (50,\ 50,\ 0)$$
$$\mathbf{y} = (0,\ 60,\ 40)$$
$$\mathbf{z} = (15,\ 0,\ 85)$$

entonces

$$\mathbf{x}\ \varepsilon_{\{1,2\}}\ \mathbf{z}\varepsilon_{\{1,3\}}\ \mathbf{y}\ \varepsilon_{\{2,3\}}\ \mathbf{x}$$

así que

$$\mathbf{x}\ \varepsilon\ \mathbf{z}\varepsilon\ \mathbf{y}\ \varepsilon\ \mathbf{x}$$

En cualquier juego no puede ocurrir la dominación por la coalición de una sola persona $S = \{i\}$ o por la gran coalición $S = I$. No obstante si $S = \{i\}$ y $\mathbf{x}\ \varepsilon\ _S\mathbf{y}$ entonces $y_i < x_i \leq v(\{i\})$. Pero en este caso $\mathbf{y}$ no es una imputación dado que la condición de racionalidad individual (2.7) se viola. Si $S = I$ y $\mathbf{x}\ \varepsilon\ _I\mathbf{y}$ entonces $x_i > y_i$ para toda $i \in I$ así que

$$\sum_{i \in I} x_i > \sum_{i \in I} y_i = v(I)$$

Así $\mathbf{x}$ no puede ser una imputación dado que no cumple con la condición de racionalidad colectiva (2.8).

El siguiente teorema muestra que la relación de dominación a través de una coalición, y por lo tanto la relación general de dominación, se mantiene bajo estrategias equivalentes.

Teorema 2.7 Si $v \sim v'$ y las imputaciones $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$ corresponden respectivamente a las imputaciones $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ bajo esta equivalencia de estrategias, entonces $\mathbf{x}\ \varepsilon\ _S\mathbf{y}$ implica $\mathbf{x}'\ \varepsilon\ _S\mathbf{y}'$

Demostración. Dado que $v \sim v'$ ponemos

$$v'(S) = kv(S) + \sum_{i \in S} c_i \qquad (k > 0, S \subseteq I)$$

Ahora $\mathbf{x}\ \varepsilon\ _S\mathbf{y}$ significa

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S) \text{ y } x_i > y_i \quad (i \in S)$$

Si $\mathbf{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$ corresponde a $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ entonces $x_i' = kx_i + c_i \quad (i \in I)$. Similarmente $y_i' = ky_i + c_i \quad (i \in I)$. Por lo que

$$\sum_{i\in S} x_i' = \sum_{i\in S}(kx_i + c_i) = k\sum_{i\in S} x_i + \sum_{i\in S} c_i$$
$$\leq kv(S) + \sum_{i\in S} c_i = v'(S),$$

y

$$x_i' = kx_i + c_i > ky_i + c_i = y_i' \quad (i \in S)$$

De aquí $\mathbf{x}' \,\varepsilon_{S}\, \mathbf{y}'$ como se requería.

El acercamiento que estamos en estos momentos adoptando es buscar la solución de un juego cooperativo dentro del conjunto de imputaciones. Por consiguiente, será la estructura del conjunto de imputaciones bajo la relación de dominación la que determine las características del juego.

Definición. Dos juegos cooperativos clásicos $< I, v, X >< I, v', X' >$ son isomorfos si existe una función $f : X \to X'$, la cual es uno a uno, tal que para cada par de imputaciones $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$

$$\mathbf{x} \,\varepsilon\, \mathbf{y} \text{ si y solo si } f(\mathbf{x}) \,\varepsilon\, f(\mathbf{y})$$

Sencillamente un isomorfismo es una relación de equivalencia, y en efecto dos juegos son isomorfos si sus conjuntos de imputaciones tienen la misma estructura de dominación. El teorema 2.7 muestra que si dos juegos son estratégicamente equivalentes entonces son isomorfos.

Definición. El conjunto de todas las imputaciones no dominadas en un juego cooperativo se le conoce como el núcleo.

Teorema 2.8 Una imputación $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ está en el núcleo de un clásico juego cooperativo con función característica v si y solo si

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \quad \text{para todo } S \subseteq I \tag{2.20}$$

Demostración. Primero supongamos que $\mathbf{x}$ no esta en el núcleo. Entonces $\mathbf{x}$ es dominado por algún $\mathbf{y}$, tal que para alguna coalición S, $y_i > x_i$ para toda $i \in S$. De aquí

$$\sum_{i\in S} x_i < \sum_{i\in S} y_i \leq v(S),$$

lo cual viola (2.20).

Si por otro lado (2.20) es falso, entonces para alguna coalición S

$$\sum_{i\in S} x_i < v(S)$$

Nótese que $S \neq \{i\}$ o I, de otra manera las condiciones de racionalidad individual o colectiva sobre la imputación $\mathbf{x}$ podrían no cumplirse.

De lo hasta ahora mencionado en cuanto a estrategias equivalentes es suficiente considerar juegos en la forma reducida 0,1. Para esos juegos v es una función monótona creciente con respecto al conjunto de inclusión. De aquí, usando (2.8),

$$\sum_{i\notin S} x_i = v(I) - \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) - \sum_{i\in S} x_i > 0$$

Ahora escogemos $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{|S|}\left(v(S) - \sum_{i\in S} x_i\right)$$

y definimos $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ como

$$y_i = \begin{cases} x_i + \varepsilon & \text{, si } \quad i \in S, \\ \dfrac{1}{|I \setminus \mathbf{S}|}\left(\sum_{i\notin S} x_i - |S|\,\varepsilon\right) & \text{, si } \quad i \notin S \end{cases}$$

Es rutina verificar que $\mathbf{y}$ es una imputación, y que $\mathbf{y}\ \varepsilon_{\,S}\,\mathbf{x}$. Por lo tanto $\mathbf{x}$ no esta en el núcleo y la demostración se completa.

Nótese que la condición (2.20) la que caracteriza aquellas imputaciones $\mathbf{x}$ las cuales están en el núcleo es exactamente la condición (2.9) discutida anteriormente.

2.5. Valor Shapley de un juego

En este espacio se presentan los conceptos básicos de la solución de juegos cooperativos mediante el valor Shapley. El punto de partida es la idea que la evaluación de un jugador sobre un clásico juego cooperativo podría ser un número real $\phi_i(v)$, donde i denota el jugador y v es la función característica del juego. El número $\phi_i(v)$ es la i-esima evaluación del jugador en el sentido que representa un *'pago razonable'* para el jugador i, tomando en cuenta que la particular fortaleza o debilidad del jugador es reflejada por la función característica.

Esto no significa evidentemente cuál función de la función característica debiéramos escoger; ciertamente cualquier definición arbitraria estaría sujeta a discusión. Un procedimiento alternativo, uno de poder extremo y persuasivo que es utilizado comúnmente en matemáticas pero menos conocido en ciencias sociales, es especificar la función según ciertas propiedades que uno cree debería tener, esto es, axiomáticamente. Esta fue la aproximación adoptada por Shapley: él listó tres condiciones aparentemente débiles y fue en ese entonces capaz de demostrar que estas únicamente determinan un vector

$$\Phi(v) = (\phi_1(v), \ldots, \phi_n(v))$$

denominando la función $\phi_i(v)$ el **valor** del juego para el i-ésimo jugador.

La simetría es ciertamente una de las principales características de "imparcialidad"; los jugadores que tienen las mismas fortalezas y debilidades deberían recibir pagos iguales.

Definición. Cualquier permutación de jugadores $\pi : I \to I$ es llamada un **automorfismo** del clásico juego cooperativo $< I, v, X >$ si

$$v(\pi S) = v(S) \text{ para todo } S \subseteq I$$

La primera condición de Shapley puede ahora ser expresada como

Axioma de simetría. Para cualquier automorfismo π del juego $< I, v, X >$,

$$\phi_i(v) = \phi_{\pi i}(v) \text{ para toda } i \in I$$

No necesitamos suponer que $\Phi(v)$ es una imputación (aunque eventualmente sucede que este es el caso), de hecho es suficiente recurrir al

Axioma de efectividad $\sum_{i \in I} \phi_i(v) = v(I)$

Este axioma esta sujeto al mismo análisis hecho para la condición (2.8) sobre imputaciones. Refleja la suposición de que la gran coalición I se forme.

El axioma final esta basado en el hecho de que si v y w son funciones características de dos juegos con el mismo conjunto de jugadores I, entonces es fácil ver que $v + w$ definido por

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S) \text{ para todo } S \subseteq I$$

también es una función característica sobre I. Si el jugador $i \in I$ está participando en dos juegos simultáneos con funciones características v y w, los cuales podemos imaginar como un juego individual $v + w$, tendría una evaluación $\phi_i(v + w)$, y podría esperar que $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$.

Axioma de agregación. Si v y w son dos funciones características sobre I, entonces $\phi_i(v+w)=\phi_i(v)+\phi_i(w)$ para todo $i\in I$.

Si bien los primeros dos axiomas son completamente razonables, el tercer axioma es más difícil de aceptar.

Una formula explicita para el vector Shapley esta dada por

Teorema. El único vector $\mathbf{\Phi}(v)=(\phi_1(v),\ldots,\phi_n(v))$ que satisface los axiomas anteriores esta dado por

$$\phi_i(v)=\sum_{i\in S}\frac{(n-|S|)!\,(|S|-1)!}{n!}\left(v(S)-v(S\setminus\{i\})\right) \tag{2.21}$$

donde la suma es tomada sobre todas las coaliciones S que contienen a i.

Ejemplo. Para el juego simétrico de tres personas con

$$\begin{aligned}
&v(\varnothing)=v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0\,,\\
&v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=\alpha\\
&v(\{1,2,3\})=1
\end{aligned}$$

tenemos que $n=3$. Resolviendo para $i=1$, las coaliciones en las que puede participar son

$$\begin{array}{lcl}
v(S)=v(\{1,2,3\}) & \Rightarrow & v(S\setminus\{1\})=v(\{2,3\})\\
v(S)=v(\{1,2\}) & \Rightarrow & v(S\setminus\{1\})=v(\{2\})\\
v(S)=v(\{1,3\}) & \Rightarrow & v(S\setminus\{1\})=v(\{3\})\\
v(S)=v(\{1\}) & \Rightarrow & v(S\setminus\{1\})=v(\varnothing)
\end{array}$$

Sustituyendo en la expresión (2.21)

$$\phi_1=\frac{(3-|3|)!(|3|-1)!}{3!}\left[v(\{1,2,3\})-v(\{2,3\})\right]+\frac{(3-|2|)!(|2|-1)!}{3!}\left[v(\{1,2\})-v(\{2\})\right]+$$

$$\frac{(3-|2|)!(|2|-1)!}{3!}\left[v(\{1,3\})-v(\{3\})\right]+\frac{(3-|1|)!(|1|-1)!}{3!}\left[v(\{1\})-v(\varnothing)\right]$$

$$\phi_1 = \frac{0!2!}{3!}[1-\alpha]+\frac{1!1!}{3!}[\alpha-0]+\frac{1!1!}{3!}[\alpha-0]+\frac{2!0!}{3!}[0-0]=\frac{2}{6}-\frac{2}{6}\alpha+\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{6}\alpha+0$$

$$=\frac{1}{3}$$

De la misma manera se puede hacer el desarrollo para los jugadores 2 y 3, de lo cual finalmente obtenemos $\Phi=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, que en la visión de simetría perfecta del juego es el resultado deseado.

Supongamos que $i \in S$. La coalición $S\setminus\{i\}$ es capaz de ser formada en $(|S|-1)!$ maneras, y los $n-|S|$ jugadores no perteneciente a S pueden estar haciendo planes en $(n-|S|)!$ formas. Así, el número de formas en las que el jugador i puede asociar $S\setminus\{i\}$ es $(n-|S|)!\,(|S|-1)!$. Hay $n!$ formas en las cuales la gran coalición I puede formarse, y si asumimos que cada una de ellas es igualmente probable podemos interpretar

$$\frac{(n-|S|)!\,(|S|-1)!}{n!}$$

como la probabilidad que el jugador i entre en la coalición $S\setminus\{i\}$. Así el teorema demuestra que los axiomas de Shapley son equivalentes a la propuesta de que el jugador i recibiría el promedio de todas sus contribuciones para la coalición S que contiene a i.

3. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LOS STATUS DE VIDAS CONJUNTAS

3.1 Medición de la Mortalidad

El análisis sistemático de contingencias de vidas humanas forma el principal fundamento de trabajo de un Actuario. En la solución de problemas que involucran esas contingencias, el Actuario requiere de medidas cuantitativas de sus efectos; y, en problemas financieros, requiere también de un conjunto de principios por los cuales las mediciones pueden ser combinadas con funciones de interés para producir valores monetarios.

La Tabla de Mortalidad, considerada como la descripción del comportamiento de una población hipotética, compuesta por elementos de la misma edad, hasta la extinción total del grupo, es uno de los instrumentos de que el actuario hace uso para obtener valores de beneficios futuros que están sujetos a la supervivencia o a la muerte de las personas.

La notación para identificar los componentes de la tabla de mortalidad esta dada de la siguiente manera:

x representa cada una de las edades de la tabla

l_x representa el número de personas que están con vida a la edad exacta x

d_x denota el numero de personas que fallecen entre las edades x y $x+1$

q_x representa la probabilidad de que una persona de edad x no llegue con vida a la edad $x+1$

p_x representa la probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a la edad $x+1$

Derivado de estos conceptos, se observan relaciones entre columnas.

$l_x - l_{x+1} = d_x$ lo cual significa que la diferencia que existe en el número de sobrevivientes entre dos edades enteras consecutivas es el número de muertes que ocurren en el año

También se desprenden las siguientes expresiones:

$$l_x q_x = d_x$$

$$l_x p_x = l_{x+1}$$

Lo cual significa que $l_x q_x$ nos proporciona el número de personas que teniendo edad x no sobreviven a la edad $x+1$; y $l_x p_x$ nos da el número de personas que teniendo edad x sobreviven a la edad $x+1$.

Despejando de estas expresiones a q_x y p_x tenemos

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

y

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Sustituyendo $d_x = l_x - l_{x+1}$

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$q_x = 1 - p_x$$

$$q_x + p_x = 1$$

Esta última igualdad se explica de la siguiente manera: para una persona que está con vida en edad x, en el transcurso de un año únicamente pueden sucederle dos eventos: que siga con vida al llegar a la edad $x+1$ o bien, que muera antes de alcanzar esta edad. La existencia de estos dos únicos eventos se debe a que solo se están considerando salidas por muerte, por lo que la suma de sus probabilidades es igual a la unidad.

Los conceptos mencionados anteriormente están basados en intervalos de un año, pero el cálculo de probabilidades de supervivencia y muerte para una tabla de mortalidad de edades enteras se puede extender a periodos de más de un año. Así tenemos que la probabilidad de que una persona de edad x llegue a la edad $x+n$ es

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

La probabilidad de que x muera en el transcurso de los siguientes n años se denota por

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

3.2. Anualidades

En matemáticas financieras, la expresión anualidad se emplea para indicar un sistema de pago de sumas fijas, a intervalos iguales de tiempo. Se usa la palabra anualidad por costumbre que tiene su origen en las anualidades contingentes, en las que interviene la probabilidad anual de vida de las personas. Así, podemos decir que son anualidades los dividendos de acciones, los pagos periódicos de las compañías de seguros, y en forma más general, los sueldos y todo tipo de rentas son anualidades. De manera que la expresión anualidad puede ser cambiada por rentas, pagos periódicos, amortizaciones u otros, según sea el caso.

Una anualidad se puede definir como una sucesión de pagos periódicos iguales. Generalmente el tiempo que transcurre entre un pago y otro son iguales. Las anualidades se clasifican en: i) Anualidades Ciertas y ii) Anualidades Contingentes.

En el caso de las anualidades ciertas se conoce exactamente el número de pagos que se van a realizar. Con respecto a las anualidades contingentes, estas se caracterizan porque, teóricamente, está determinado el número máximo de pagos que se pueden hacer, pero no se tiene la certeza de efectuarlos todos.

Según la forma en que se estipule el pago de la renta o anualidad, se tienen las *anualidades vencidas* o *anualidades anticipadas*. Las vencidas son aquellas en las que el pago de la renta se hace al final del período de pago y en las anticipadas el pago se realiza al principio del periodo de pago. Existen distintos tipos de anualidades, las cuales presentan variantes en las formas de calcular sus valores dependiendo del número de pagos, el intervalo de tiempo en el que estos se realizan y la tasa de interés que se estipule.

Por lo tanto, con el propósito de presentar solo los elementos básicos de las anualidades ciertas, tomamos como base las más frecuentes, las cuales son las anualidades simples vencidas, cuyo periodo de pago coincide con el periodo de capitalización. En este caso, por lo general, la tasa de interés es una tasa de interés nominal anual. Derivado de esto se definen los siguientes elementos.

R es el pago periódico de una anualidad o renta
i es la tasa de interés (efectiva por periodo de capitalización)
n número de períodos de pago
S monto de una anualidad
A valor presente de una anualidad

Para calcular el **monto de la anualidad** se plantea que cada uno de los R pagos efectuados al final de cada periodo gana un interés compuesto hasta que llegue la fecha final, es decir, una vez que hayan transcurrido los n periodos. Cada pago efectuado capitaliza los intereses en cada uno de los períodos que le siguen. Así, el primer pago acumula durante $n-1$ periodos, el segundo $n-2$ periodos, y así sucesivamente hasta el último pago que no gana intereses, ya que su pago coincide con la fecha de término.

Los montos respectivos de los R pagos comenzando por el último serán R, $R(1+i)$, $R(1+i)^2$, ..., $R(1+i)^{n-1}$. Entonces el monto total S de la anualidad es igual a la suma de los montos producidos por las distintas rentas R, es decir

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-1}$$

Esta expresión forma una progresión geométrica de n términos, razón $(1+i)$ y primer término R. En este sentido, dada la formula de la progresión geométrica tenemos

$$S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Si el valor de cada pago R es de una unidad, el monto S será el monto de una anualidad de una unidad pagadera durante un periodo n y se expresa por $S_{\overline{n}|i}$. Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos

$$S = RS_{\overline{n}|i}$$

Por otro lado, el **valor presente** de una anualidad es aquella cantidad A, que durante la vigencia de la anualidad, más los interese compuestos será equivalente al monto de la anualidad. Esto es

$$A(1+i)^n = S$$

$$A(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$A = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n}$$

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Si el valor de cada pago R es de una unidad, el valor presente A es el valor presente de una anualidad de una unidad pagadera durante un periodo n y se expresa por $a_{\overline{n}|i}$. Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos

$$A = a_{\overline{n|}}$$

Como ya se mencionó anteriormente, las anualidades contingentes, además de tomar en cuenta el interés monetario, también toma en cuenta el aspecto de supervivencia de las personas.

En el presente trabajo, se aborda el caso específico de un seguro dotal puro que aún cuando no se trata propiamente de una anualidad, tiene las propiedades de contingencia y pagos a intervalos iguales de tiempo, por concepto de prima, durante un espacio de tiempo previamente especificado. Es decir, el contratante de un seguro dotal puro, especifica el periodo de tiempo por el cual desea la cobertura; de la misma manera especifica la suma asegurada y el intervalo de tiempo en el que realizará los pagos por concepto de prima. Este plan consiste en pagar al contratante la suma asegurada estipulada siempre y cuando éste sobreviva al final del periodo de la cobertura. De manera que, en este caso, se conoce el número máximo de pagos que se deben realizar por concepto de prima, pero no se tiene la certeza de realizarlos todos, ya que esto está sujeto a que el contratante se mantenga con vida durante el periodo por el cual se haya contratado la cobertura.

Para identificar la relación que existe entre un seguro dotal puro y las anualidades, primero se plantea el desarrollo de lo que es un seguro dotal puro y posteriormente, en específico, se explica brevemente lo que es una anualidad contingente temporal con pagos vencidos.

Dotal Puro

Supóngase que se reúnen l_x personas, todas de la misma edad x, las cuales hacen una aportación de la misma cantidad, de manera que, al invertirla a una tasa de interés i, sea suficiente para pagar $1.00 a cada una de las personas que sobrevivan a la edad $x+n$.

Para calcular la aportación que cada una de las l_x persona debe realizar, se toma en consideración que l_{x+n} estarán con vida en edad $x+n$, por lo que en esa edad se deberá pagar l_{x+n} pesos.

Sea ${}_nE_x$ la aportación de cada una de las l_x. Entonces $l_x({}_nE_x)$ será la cantidad total en el fondo, que invertida durante n años a la tasa de interés i debe ser igual a los l_{x+n} pesos que se deben pagar; es decir,

$$(l_x)({}_nE_x)(1+i)^n = l_{x+n}$$

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x(1+i)^n}$$

dado que $v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$, tenemos que

$$ {}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n $$

De esta manera, ${}_nE_x$ es la cantidad que x debe pagar, en una sola exhibición, por cada $1.00 que desea recibir si sobrevive n años y se le denomina como la Prima Neta Unica o Valor Presente de un seguro Dotal Puro a edad x durante n años. Su calculo está basado en dos hipótesis: la de mortalidad, determinada por el factor $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ observado en una tabla, y la de interés dado por v^n. Entonces, lo que v^n significa en matemáticas financieras, ${}_nE_x$ es su equivalente en el cálculo actuarial; es decir, ambos son factores de descuento, con la diferencia de que v^n solamente involucra interés, mientras que ${}_nE_x$ involucra interés v^n y supervivencia $\frac{l_{x+n}}{l_x}$.

La expresión ${}_nE_x$ también puede ser expresada en términos de probabilidades, ya que

$$ {}_nE_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n \, {}_np_x $$

Anualidad temporal contingente con pagos vencidos

Una serie de pagos de $1, sujetos a la supervivencia de una persona de edad x, pagaderos al final de cada uno de los siguientes n años, se le conoce como anualidad vencida, temporal a n años, en edad x.

El valor presente de esta anualidad se representa por $a_{x:\overline{n|}}$ y puede ser calculado de la siguiente manera

$$ l_x \, a_{x:\overline{n|}} = vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots + v^{n-1} l_{x+n-1} + v^n l_{x+n} $$

lo cual significa que cada uno de los l_x pagará $a_{x:\overline{n|}}$ en edad x, de tal forma que la cantidad $l_x \, a_{x:\overline{n|}}$ sea suficiente para pagar $1 a cada uno de los l_{x+1} al final del primer año, $1 a cada uno de los l_{x+2} al final del segundo año, y así sucesivamente hasta pagar $1 a cada uno de los l_{x+n} al final del año n.

Despejando $a_{x:\overline{n|}}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
a_{x\overline{n}|} &= \frac{v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \cdots + v^{n-1} l_{x+n-1} + v^n l_{x+n}}{l_x} \\
&= v \frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2 \frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{n-1} \frac{l_{x+n-1}}{l_x} + v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} \\
&= v^1 \, {}_1p_x + v^2 \, {}_2p_x + \cdots + v^{n-1} \, {}_{n-1}p_x + v^n \, {}_np_x
\end{aligned}
$$

Como podemos ver, esta última expresión es una suma de Dotales Puros, por lo que $a_{x\overline{n}|}$ puede expresarse como

$$
\begin{aligned}
a_{x\overline{n}|} &= {}_1E_x + {}_2E_x + \cdots + {}_{n-1}E_x + {}_nE_x \\
&= \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x
\end{aligned}
$$

3.3. Status de vidas conjuntas

Considérese un grupo de m personas con edades $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Se dice que este grupo es de vida conjunta si su desaparición sucede al ocurrir la primera muerte. A este tipo de estatuas se les denota por $(x_1 x_2 \ldots x_m)$.

En aplicaciones prácticas, las personas que conforman un estatus de este tipo para la adquisición de una anualidad o un seguro en forma conjunta, están frecuentemente asociados por algún proyecto común, o tal vez relacionados por parentesco, y que a través de sus actividades mutuas pueden estar expuestos a muchos de los mismos riesgos de mortalidad. Sin embargo, para el desarrollo de la teoría general de vidas conjuntas, las probabilidades de supervivencia se asumen independientes.

No obstante que la mortalidad de vida individual es medida mediante estudios estadísticos, es impractico tratar de obtener tasas de mortalidad para vidas conjuntas por observación similar de grupos de vidas. Este recurso de hecho es innecesario, dado que las probabilidades de supervivencia conjunta pueden ser fácilmente calculadas de las tablas de mortalidad individual.

La probabilidad de que el estatus de vidas conjuntas $(x_1 x_2 \ldots x_m)$ sobreviva por n años se le denota por ${}_np_{x_1 x_2 \cdots x_m}$, y, dado que la supervivencia conjunta requiere de la supervivencia individual de cada uno de los integrantes, de aquí tenemos

$$
{}_np_{x_1 x_2 \cdots x_m} = {}_np_{x_1} \cdot {}_np_{x_2} \cdots {}_np_{x_m}
$$

Las otras probabilidades básicas se deducen en términos de ${}_np_{x_1 x_2 \cdots x_m}$.

La probabilidad de que el estatus de vidas conjuntas desaparezca en el transcurso de los siguientes n años es

$$ {}_nq_{x_1x_2\cdots x_m} = 1 - {}_np_{x_1} \cdot {}_np_{x_2} \cdots {}_np_{x_m} $$

De esta manera se pueden definir las funciones de anualidades y seguros para estatus de vidas conjuntas. Por ejemplo, si se considera una anualidad vitalicia vencida para la cual el pago de 1 se hace al final de cada año mientras $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ estén todos con vida, esto es, tantos años como el estatus $(x_1x_2\ldots x_m)$ sobreviva, el valor presente de este beneficio es denotado por $a_{x_1x_2\cdots x_m}$

$$ a_{x_1x_2\cdots x_m} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \, {}_tp_{x_1x_2\cdots x_m} $$

De manera análoga, podemos expresar que ${}_nE_{x_1x_2\cdots x_m}$ representa un seguro dotal puro para el estatus de vidas conjuntas $(x_1x_2\ldots x_m)$

$$ {}_nE_{x_1x_2\cdots x_m} = v^n \, {}_np_{x_1x_2\cdots x_m} $$

4. PROBLEMA ESPECIFICO: PLAN DE ANUALIDADES CONTINGENTES DE UN STATUS DE VIDAS CONJUNTAS Y LA DISTRIBUCIÓN DEL PAGO DE LA PRIMA POR MEDIO DEL CALCULO DEL VALOR SHAPLEY

Supongamos que tenemos tres personas de las siguientes edades 27, 30 y 32 cuyas edades identificaremos como *x*, *y*, *z*, respectivamente. Estas personas, cada una de manera independiente, adquiere un seguro dotal por un año, por el cual pagan una prima de E_x, E_y y E_z, respectivamente. Para el cálculo de estas primas, se consideran la tabla de mortalidad EM 62-67 a una tasa de interés del 5 %. Esta tabla se anexa al final del presente capitulo.

Así, de la tabla EM 62-67 con i= 5% obtenemos las probabilidades de supervivencia

$${}_1p_{27} = p_{27} = 0.997813$$

$${}_1p_{30} = p_{30} = 0.997605$$

$${}_1p_{32} = p_{32} = 0.997426$$

Aplicando la formula para el calculo del valor de la prima de un seguro dotal puro, obtenemos para cada uno

$${}_nE_x = (1+i)^{-n}\ {}_np_x = v^n\ {}_np_x$$

$${}_1E_{27} = E_{27} = (1+0.5)^{-1}\ {}_1p_{27} = (0.9523809)\,(0.997813) = 0.950298$$

$${}_1E_{30} = E_{30} = (1+0.5)^{-1}\ {}_1p_{30} = (0.9523809)\,(0.997605) = 0.9501$$

$${}_1E_{32} = E_{32} = (1+0.5)^{-1}\ {}_1p_{32} = (0.9523809)\,(0.997426) = 0.9476543$$

Consideremos ahora la posibilidad de sugerir a estas personas que formen una coalición para que, de manera conjunta, adquieran igualmente un seguro dotal por un año. En este caso, es evidente que ninguna de ellas aceptará formar parte de la coalición si esta no representa una mejor opción que la de adquirir el seguro de manera individual.

Para ello, podemos analizar este problema aplicando los conceptos de teoría de juegos cooperativos, buscando que al conformarse el estatus conjunto tenga algún beneficio para cada uno de los integrantes de la coalición y se vea reflejado al momento de pagar la prima. Esto lo podemos hacer, calculando para este "juego" el valor Shapley.

En consecuencia, es necesario calcular el valor de la prima para cada una de las posibles formas en que estas tres personas pueden unirse y formar grupos. Por lo tanto, asumiendo que las probabilidades de supervivencia son independientes al formarse el estatus conjunto, tenemos que

$$_{n}p_{xy} = {}_{n}p_{x}\ {}_{n}p_{y}$$

$$_{n}E_{xyz} = v^{n}\ {}_{n}p_{x}\ {}_{n}p_{y}\ {}_{n}p_{z}$$

$$E_{27:30} = (1+0.5)^{-1}\ p_{27}\ p_{30} = (0.9523809)\ (0.997813)\ (0.997605) = 0.948022$$

$$E_{27:32} = (1+0.5)^{-1}\ p_{27}\ p_{32} = (0.9523809)\ (0.997813)\ (0.997426) = 0.9478519$$

$$E_{30:32} = (1+0.5)^{-1}\ p_{30}\ p_{32} = (0.9523809)\ (0.997605)\ (0.997426) = 0.9476543$$

$$E_{27:30:32} = (1+0.5)^{-1}\ p_{27}\ p_{30}\ p_{32} = (0.9523809)(0.997813)(0.997605)(0.997426)=0.9455818$$

Si establecemos que la suma asegurada para cada persona es de \$10,000, entonces

$E_{x} = E_{27} = 9{,}502.98$
$E_{y} = E_{30} = 9{,}501.00$
$E_{z} = E_{32} = 9{,}499.29$

$E_{xy} = E_{27:30} = 18{,}960.44$
$E_{xz} = E_{27:32} = 18{,}957.03$ En estos casos la suma asegurada es de \$20,000
$E_{yz} = E_{30:32} = 18{,}953.08$

$E_{xyz} = E_{27:30:32} = 28{,}367.45$ En este caso la suma asegurada es de \$30,000

Puesto que no se trata de un problema en el que se busca maximizar alguna ganancia, sino que los integrantes de la coalición se vean beneficiados al momento de realizar el pago de la prima, una *imputación* para este "juego" sería $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tal que

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= E_{xyz} \\
x_1 &\le E_{x} \\
x_2 &\le E_{y} \\
x_3 &\le E_{z} \\
x_1 + x_2 &\le E_{xy}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
x_1 \quad + x_3 & \leq & E_{xz} \\
\quad x_2 + x_3 & \leq & E_{yz}
\end{array}
$$

esto significa que cada una de las personas, al formar cualquier coalición, espera pagar a lo más la prima que pagaría si contrata de manera individual.

El núcleo de este "juego" es el conjunto de todos los pagos que asigna la prima total de 28,367.45, mientras que satisfaga las condiciones de *racionalidad individual* y *racionalidad colectiva*, es decir

$$
\begin{array}{lcl}
x_1 + x_2 + x_3 & = & 28{,}367.45 \\
x_1 & \leq & 9{,}502.98 \\
\quad x_2 & \leq & 9{,}501.00 \\
\qquad x_3 & \leq & 9{,}499.29 \\
x_1 + x_2 & \leq & 18{,}960.44 \\
x_1 \quad + x_3 & \leq & 18{,}957.03 \\
\quad x_2 + x_3 & \leq & 18{,}953.08
\end{array}
$$

Para encontrar el pago óptimo para cada uno de los integrantes de la coalición, aplicamos el método de calculo del valor Shapley mediante la expresión (2.21), la cual nos permite encontrar el valor del "juego" para cada jugador.

$$\phi_i(v) = \sum_{i \in S} \frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\}))$$

Para el caso del *jugador* x, las coaliciones en las que puede participar son

$$
\begin{array}{lcl}
v(S) = v(\{x,y,z\}) = E_{xyz} & \Rightarrow & v(S \setminus \{x\}) = v(\{y,z\}) = E_{yz} \\
v(S) = v(\{x,y\}) \ = E_{xy} & \Rightarrow & v(S \setminus \{x\}) = v(\{y\}) \ = E_y \\
v(S) = v(\{x,z\}) \ = E_{xz} & \Rightarrow & v(S \setminus \{x\}) = v(\{z\}) \ = E_z \\
v(S) = v(\{x\}) \quad = E_x & \Rightarrow & v(S \setminus \{x\}) = v(\varnothing) \quad = 0
\end{array}
$$

Sustituyendo, tenemos

$$\phi_x = \frac{(3-|3|)!(|3|-1)!}{3!}\left[E_{xyz} - E_{yz}\right] + \frac{(3-|2|)!(|2|-1)!}{3!}\left[E_{xy} - E_y\right] +$$

$$\frac{(3-|2|)!(|2|-1)!}{3!}\left[E_{xz} - E_z\right] + \frac{(3-|1|)!(|1|-1)!}{3!}\left[E_x - 0\right]$$

$$\phi_x = \frac{0!2!}{3!}[28,367.45 - 18,953.08] + \frac{1!1!}{3!}[18,960.44 - 9,501.00] +$$

$$\frac{1!1!}{3!}[18,957.03 - 9,499.29] + \frac{2!0!}{3!}[9,502.98 - 0]$$

$$= \frac{2}{6}[9,414.37] + \frac{1}{6}[9,459.44] + \frac{1}{6}[9,457.74] + \frac{2}{6}[9,502.98]$$

$$\phi_x = 9,458.64$$

De manera similar, obtenemos los valores para los *jugadores* y y z,

Para el caso del *jugador* y, las coaliciones en las que puede participar son

$$\begin{array}{lll}
v(S) = v(\{x,y,z\}) = E_{xyz} & \Rightarrow & v(S \setminus \{y\}) = v(\{x,z\}) = E_{xz} \\
v(S) = v(\{x,y\}) \;\; = E_{xy} & \Rightarrow & v(S \setminus \{y\}) = v(\{x\}) \;\; = E_x \\
v(S) = v(\{y,z\}) \;\; = E_{yz} & \Rightarrow & v(S \setminus \{y\}) = v(\{z\}) \;\; = E_z \\
v(S) = v(\{y\}) \quad\; = E_y & \Rightarrow & v(S \setminus \{y\}) = v(\varnothing) \;\; = 0
\end{array}$$

Sustituyendo, tenemos

$$\phi_y = \frac{(3-|3|)!(|3|-1)!}{3!}[E_{xyz} - E_{xz}] + \frac{(3-|2|)!(|2|-1)!}{3!}[E_{xy} - E_x] +$$

$$\frac{(3-|2|)!(|2|-1)!}{3!}[E_{yz} - E_z] + \frac{(3-|1|)!(|1|-1)!}{3!}[E_y - 0]$$

$$\phi_y = \frac{0!2!}{3!}[28,367.45 - 18,957.03] + \frac{1!1!}{3!}[18,960.44 - 9,502.98] +$$

$$\frac{1!1!}{3!}[18,953.08 - 9,499.29] + \frac{2!0!}{3!}[9,501.00 - 0]$$

$$= \frac{2}{6}[9,410.42] + \frac{1}{6}[9,457.46] + \frac{1}{6}[9,453.79] + \frac{2}{6}[9,501.00]$$

$$\phi_y = 9,455.68$$

Para el caso del *jugador* z, las coaliciones en las que puede participar son

$$
\begin{array}{llll}
v(S)=v(\{x,y,z\})=E_{xyz} & \Rightarrow & v(S\setminus\{z\})=v(\{x,y\})=E_{xy} \\
v(S)=v(\{x,z\})\ \ =E_{xz} & \Rightarrow & v(S\setminus\{z\})=v(\{x\})\ \ =E_{x} \\
v(S)=v(\{y,z\})\ \ =E_{yz} & \Rightarrow & v(S\setminus\{z\})=v(\{y\})\ \ =E_{y} \\
v(S)=v(\{z\})\ \ \ \ =E_{z}\Rightarrow & & v(S\setminus\{z\})=v(\varnothing)\ \ =0
\end{array}
$$

Sustituyendo, tenemos

$$
\phi_z=\frac{(3-|3|)!(|3|-1)!}{3!}\left[E_{xyz}-E_{xy}\right]+\frac{(3-|2|)!(|2|-1)!}{3!}\left[E_{xz}-E_{x}\right]+
$$

$$
\frac{(3-|2|)!(|2|-1)!}{3!}\left[E_{yz}-E_{y}\right]+\frac{(3-|1|)!(|1|-1)!}{3!}\left[E_{z}-0\right]
$$

$$
\phi_z=\frac{0!2!}{3!}[28{,}367.45-18{,}960.44]+\frac{1!1!}{3!}[18{,}957.03-9{,}502.98]+
$$

$$
\frac{1!1!}{3!}[18{,}953.08-9{,}501.00]+\frac{2!0!}{3!}[9{,}499.29-0]
$$

$$
=\frac{2}{6}[9{,}407.01]+\frac{1}{6}[9{,}454.05]+\frac{1}{6}[9{,}452.08]+\frac{2}{6}[9{,}499.29]
$$

$$
\phi_z=9{,}453.12
$$

De esta manera, el valor del juego es

$$
\mathbf{\Phi}=(9{,}458.64,\quad 9{,}455.68,\quad 9{,}453.12)
$$

lo cual, para cada uno de los integrantes de la coalición, representa un mejor pago comparado con el pago que tendrían que realizar al contratar de manera individual un seguro dotal por un año.

$$
\begin{aligned}
\phi_x&=9{,}458.64<9{,}502.98=E_x\\
\phi_y&=9{,}455.68<9{,}501.00=E_y\\
\phi_z&=9{,}453.12<9{,}499.29=E_z
\end{aligned}
$$

Existe un razonamiento alterno que nos lleva igualmente a obtener el cálculo del valor Shapley, Esto es, partiendo del núcleo del "juego" es factible encontrar los límites superior e inferior de las primas. Sabemos que

$$\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$$

lo cual implica que $x_1 + x_2 + x_3 \geq E_{xyz}$, de lo cual se desprende

$$x_1 \geq E_{xyz} - x_2 + x_3 = 28{,}367.45 - 18{,}953.08 = 9{,}414.37$$
$$x_2 \geq E_{xyz} - x_1 + x_3 = 28{,}367.45 - 18{,}957.03 = 9{,}410.42$$
$$x_3 \geq E_{xyz} - x_1 + x_2 = 28{,}367.45 - 18{,}960.44 = 9{,}407.01$$

Por lo tanto tenemos que

$$9{,}414.37 \leq x_1 \leq 9{,}502.98 \quad \text{para } x$$
$$9{,}410.42 \leq x_2 \leq 9{,}501.00 \quad \text{para } y$$
$$9{,}407.01 \leq x_3 \leq 9{,}499.29 \quad \text{para } z$$

Así, identificamos el rango en el que se encuentra el pago óptimo de la prima para cada uno de los integrantes de la coalición.

Ahora, supongamos que x decide iniciar el proceso de formación de una coalición "jugando" solo, en este caso pagaría $v(\{x\}) = E_x = 9{,}502.98$, si y se une para formar la coalición $(\{x,y\})$ la prima a pagar es de $v(\{x,y\}) = E_{xy} = 18{,}960.44$; si y retiene por completo los beneficios de su entrada a la coalición, entonces el pago de su prima sería $v(\{x,y\}) - v(\{x\}) = E_{xy} - E_x = 18{,}960.44 - 9{,}502.98 = 9{,}457.46$. Si z se integra para formar la coalición $(\{x,y,z\})$ y retiene los beneficios de su entrada al grupo, entonces pagaría una prima de $v(\{x,y,z\}) - v(\{x,y\}) = E_{xyz} - E_{xy} = 28{,}367.45 - 18{,}960.44 = 9{,}407.01$. De esta manera obtenemos el pago

$$(x_1, x_2, x_3) = (9{,}502.98, \quad 9{,}457.46, \quad 9{,}407.01)$$

Este pago depende del orden en que se da la formación de la gran coalición, beneficiando a los miembros que se van integrando posteriormente. Así que para encontrar un pago justo para cada integrante de la coalición, procedemos al cálculo de todas las permutaciones posibles. Los resultados que se obtienen son los siguientes.

$$(xyz) = (E_x, \quad E_{xy} - E_x, \quad E_{xyz} - E_{xy}) = (9{,}502.98, \quad 9{,}457.46, \quad 9{,}407.01)$$

$$(xzy) = (E_x, \quad E_{xyz} - E_{xz}, \quad E_{xz} - E_x) = (9{,}502.98, \quad 9{,}410.42, \quad 9{,}454.05)$$

$$(yxz) = (E_{xy} - E_y, \quad E_y, \quad E_{xyz} - E_{xy}) = (9{,}459.44, \quad 9{,}501.00, \quad 9{,}407.01)$$

$$(yzx) = (E_{xyz} - E_{yz}, \quad E_y, \quad E_{yz} - E_y) = (9{,}414.37, \quad 9{,}501.00, \quad 9{,}452.08)$$

$$(zxy)=\left(E_{xz}-E_{z},\quad E_{xyz}-E_{xz},\quad E_{z}\right) \;=\; (9{,}457.74,\quad 9{,}410.42,\quad 9{,}499.29)$$

$$(zyx)=\left(E_{xyz}-E_{yz},\quad E_{yz}-E_{z},\quad E_{z}\right) \;=\; (9{,}414.37,\quad 9{,}453.79,\quad 9{,}499.29)$$

Posteriormente, tomando el promedio de estas primas, tendremos la asignación final, con lo que habremos calculado el Valor Shapley del "juego", el cual es exactamente el mismo que obtuvimos anteriormente.

$$(x_1, x_2, x_3)=(9{,}458.64\,,\quad 9{,}455.68\,,\quad 9{,}453.12)$$

TABLA DE MORTALIDAD EXPERIENCIA MEXICANA 62-67

Edad x	l_x	d_x	q_x	p_x
15	1,000,000	1,781	0.001781	0.998219
16	998,219	1,796	0.001799	0.998201
17	996,423	1,812	0.001819	0.998181
18	994,611	1,831	0.001841	0.998159
19	992,780	1,853	0.001866	0.998134
20	990,927	1,876	0.001893	0.998107
21	989,051	1,902	0.001923	0.998077
22	987,149	1,932	0.001957	0.998043
23	985,217	1,965	0.001994	0.998006
24	983,252	2,001	0.002035	0.997965
25	981,251	2,041	0.002080	0.997920
26	979,210	2,087	0.002131	0.997869
27	977,123	2,137	0.002187	0.997813
28	974,986	2,193	0.002249	0.997751
29	972,793	2,255	0.002318	0.997682
30	970,538	2,324	0.002395	0.997605
31	968,214	2,401	0.002480	0.997520
32	965,813	2,486	0.002574	0.997426
33	963,327	2,581	0.002679	0.997321
34	960,746	2,685	0.002795	0.997205
35	958,061	2,800	0.002923	0.997077
36	955,261	2,929	0.003066	0.996934
37	952,332	3,070	0.003224	0.996776
38	949,262	3,227	0.003399	0.996601
39	946,035	3,400	0.003594	0.996406
40	942,635	3,590	0.003808	0.996192
41	939,045	3,801	0.004048	0.995952
42	935,244	4,035	0.004314	0.995686
43	931,209	4,291	0.004608	0.995392
44	926,918	4,573	0.004934	0.995066
45	922,345	4,884	0.005295	0.994705
46	917,461	5,226	0.005696	0.994304
47	912,235	5,602	0.006141	0.993859
48	906,633	6,015	0.006634	0.993366
49	900,618	6,466	0.007180	0.992820
50	894,152	6,962	0.007786	0.992214
51	887,190	7,503	0.008457	0.991543
52	879,687	8,094	0.009201	0.990799
53	871,593	8,739	0.010026	0.989974
54	862,854	9,440	0.010940	0.989060
55	853,414	10,202	0.011954	0.988046
56	843,212	11,026	0.013076	0.986924

57	832,186	11,917	0.014320	0.985680
58	820,269	12,876	0.015697	0.984303
59	807,393	13,906	0.017223	0.982777
60	793,487	15,006	0.018911	0.981089
61	778,481	16,179	0.020783	0.979217
62	762,302	17,422	0.022854	0.977146
63	744,880	18,731	0.025146	0.974854
64	726,149	20,101	0.027682	0.972318
65	706,048	21,526	0.030488	0.969512
66	684,522	22,993	0.033590	0.966410
67	661,529	24,489	0.037019	0.962981
68	637,040	25,997	0.040809	0.959191
69	611,043	27,494	0.044995	0.955005
70	583,549	28,955	0.049619	0.950381
71	554,594	30,346	0.054718	0.945282
72	524,248	31,635	0.060344	0.939656
73	492,613	32,781	0.066545	0.933455
74	459,832	33,741	0.073377	0.926623
75	426,091	34,468	0.080894	0.919106
76	391,623	34,918	0.089162	0.910838
77	356,705	35,045	0.098246	0.901754
78	321,660	34,809	0.108217	0.891783
79	286,851	34,178	0.119149	0.880851
80	252,673	33,129	0.131114	0.868886
81	219,544	31,658	0.144199	0.855801
82	187,886	29,777	0.158484	0.841516
83	158,109	27,519	0.174051	0.825949
84	130,590	24,940	0.190979	0.809021
85	105,650	22,118	0.209352	0.790648
86	83,532	19,149	0.229241	0.770759
87	64,383	16,142	0.250718	0.749282
88	48,241	13,210	0.273833	0.726167
89	35,031	10,462	0.298650	0.701350
90	24,569	7,990	0.325207	0.674793
91	16,579	5,860	0.353459	0.646541
92	10,719	4,110	0.383431	0.616569
93	6,609	2,743	0.415040	0.584960
94	3,866	1,733	0.448267	0.551733
95	2,133	1,030	0.482888	0.517112
96	1,103	572	0.518586	0.481414
97	531	295	0.555556	0.444444
98	236	140	0.593220	0.406780
99	96	96	1.000000	0.000000

CONCLUSIONES

La teoría de juegos cooperativos trata con competición, cooperación, conflictos, negociaciones, formación de coaliciones y asignación de utilidades. De ello surge la idea de llevar a cabo una aplicación enfocada a lo que tiene que ver con la principal área de estudio del Actuario, como son el área de seguros.

Es claro que pueden existir diferentes alternativas para proponer la distribución del pago de la prima entre un grupo de asegurados. Sin embargo, con el presente trabajo lo que se logró mostrar es que la aplicación de la teoría de juegos cooperativos nos proporciona una alternativa más para sugerir la distribución de este pago de la prima entre un grupo de personas que adquieren un seguro dotal puro. En particular, esta opción para la distribución del pago de la prima, lo que sugiere es distribuir equitativamente los beneficios obtenidos, al formarse el grupo, entre cada uno de sus integrantes, motivando con ello la formación de las coaliciones.

Así como en este trabajo se hace una asociación entre la teoría de juegos cooperativos y el cálculo actuarial, es muy posible que existan muchas otras aplicaciones en las que se involucren estas dos áreas de estudio. Es por ello que la formación del Actuario, hace posible su participación en diversas áreas que tengan que ver con situaciones de estrategia.

Espero que este trabajo aporte algunas ideas para el desarrollo de diversos análisis en los que se involucren situaciones de grupo, en las que sea posible abordarlas mediante modelos de teoría de juegos.

BIBLIOGRAFIA

Arriaga Parra, Mario y Sánchez Chibras, José Antonio. (1990), *Elementos de Calculo Actuarial.* Ediciones Acatlán.

Burger, Ewald. *Introduction to the Theory of Games.* Prentice Hall

De la Cueva, Benjamin. *Matemáticas Financieras.* Séptima Edición. Editorial Porrúa, S.A.

Jones, A. J. (1980). *Game Theory: Mathematical Models of Conflict.* John Wiley and Sons.

Jordan, C. W. (1975), *Textbook on Life Contingencies.* Second Edition. Society of Actuaries.

Luce, R. D. and Raiffa, H. (1957), *Games and Decisions. Introduction and Critical Survey,* Dover Publications, Inc. Wiley (New York).

Neumann, J. von and Morgenstern, O. (1944), *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press (Princeton, NJ).

Owen, Guillermo. (1982), *Game Theory.* 2nd Edition. Academic Press (San Diego).