

01162



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

“APLICACIONES DE LA TRANSFORMACION DE
SCHWARZ-CHRISTOFFEL EN INGENIERIA”

TESIS

PRESENTADA POR:

FRANCISCO ORDUÑA BUSTAMANTE

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA
(HIDRAULICA)

DIRIGIDA POR:

DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE



CIUDAD UNIVERSITARIA

2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS:

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por la oportunidad que me brindó de volver a sus aulas.

A la Dirección General de Estudios de Posgrado, por el apoyo brindado.

Al Dr. Gabriel Echávez Aldape, por su impulso constante y su conversación siempre amena y reconfortante.

Al Dr. Moisés Berezowsky, quién ayudó a encontrar algunas de las pistas para dilucidar este tema.

A mis compañeros.

A José Luis Ayala, Edgar Gallardo y Carlos Villarreal, presentes siempre y cuya amistad perdura.

A Rocío Solar, que me trajo desde N.Y. varios ejemplares de la bibliografía, y... por extensión a Rocío Rangel.

A los compañeros de DC Ingeniería, por su comprensión.

A todos aquellos que no se mencionan, pero que son un ejemplo constante.

Antes o voo da ave, que passa e não deixa rasto

...

A ave passa e esquece,...

*A recordação é uma traição à natureza,
Porque a natureza de ontem não é natureza.
O que foi não é nada, e lembrar é não ver.*

Alberto Caeiro
Heterónimo de Fernando Pessoa

CONTENIDO.

-RESUMEN.

-OBJETIVOS.

1.- INTRODUCCIÓN.

- 1.1.- Antecedentes.
- 1.2.- Flujo Potencial.
- 1.3.- Superposición.
- 1.4.- Aplicaciones.

2.- LA TRANSFORMACIÓN CONFORME.

- 2.1.- Funciones de Variable Compleja.
- 2.2.- Funciones Analíticas.
- 2.3.- Transformaciones Conformes.
- 2.4.- Puntos Críticos.
- 2.5.- La Transformación Bilineal.
- 2.6.- Aplicaciones.

3.- APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES.

- 3.1.- Antecedentes.
- 3.1.- Proyecciones Cartográficas.
- 3.2.- La Proyección Estereográfica.

4.- LA TRANSFORMACIÓN DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL.

- 4.1.- Breviario Histórico.
- 4.2.- El Principio de Reflexión de Schwarz.
- 4.3.- La Fórmula de Schwarz- Cristoffel.
- 4.4.- Ejemplos de Aplicación.

5.- APLICACIONES.

- 5.1.- Métodos Numéricos.
- 5.2.- Ejemplos Ilustrativos.
- 5.3.- Aplicaciones a la Mecánica de Fluidos.
- 5.4.- Aplicaciones Complementarias.

6.- COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES.

-APÉNDICE I

-APÉNDICE II

-Referencias

RESUMEN.

Se presenta una exposición elemental de las funciones de variable compleja y de su utilización en la solución de problemas físicos que pueden asociarse a la ecuación de Laplace. El enfoque del trabajo es hacia la obtención de potenciales complejos a partir de la técnica de transformación conforme y particularmente de la Transformación de Schwarz-Christoffel, que permite la obtención de soluciones en regiones poligonales pero que presenta dificultades prácticas, que actualmente se superan mediante la aplicación de métodos numéricos. En el campo de la Mecánica de Fluidos, la ecuación de Laplace permite representar el flujo de un fluido ideal (no viscoso), donde la rotación de las partículas es pequeña.

OBJETIVOS.

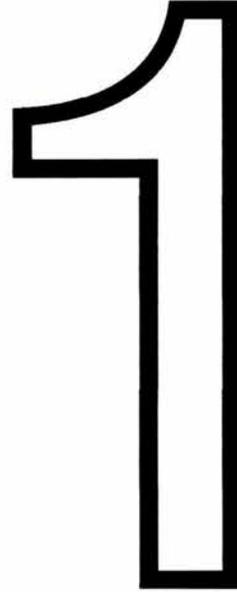
Se revisan algunos conceptos útiles para la solución de la ecuación de Laplace y a su aplicación al análisis del flujo potencial y se pretende alcanzar, como objetivos generales, los siguientes:

a) Presentar al proyectista de ingeniería una herramienta de análisis para el flujo bidimensional, en forma práctica.

b) Presentar la transformación conforme como una herramienta que permite resolver, problemas del ingeniero de proyecto, o que aporta una primera aproximación al análisis de problemas particulares.

c) Hacer patente la simplicidad de representaciones geométricas, a partir de funciones analíticas y de la transformación conforme, que puede ser útil en campos de diseño, incluso ajenos a la ingeniería.

INTRODUCCION



En este primer capítulo, se ubica la técnica del flujo potencial entre los métodos analíticos de los que dispone el ingeniero para modelar problemas físicos. Particularmente, se muestra la posibilidad de representar el flujo de un fluido perfecto (no viscoso) mediante la ecuación de Laplace.

1.1- Antecedentes.

Para garantizar la seguridad y el correcto funcionamiento de las obras de ingeniería ante las diferentes condiciones de operación a que son sometidas durante su vida útil, es indispensable la elaboración de modelos que permitan evaluar las diferentes variables de interés durante la operación de la obra en proyecto.

En forma breve, puede decirse que en la actualidad, las herramientas de modelación de las que dispone el ingeniero son:

- a) Modelos matemáticos (o analíticos).
- b) Modelos numéricos.
- c) Modelos físicos.

Los primeros son los más económicos y elegantes, pero presentan la desventaja de que no son versátiles ante la amplia gama de problemas reales que se presentan en el campo de la ingeniería. En problemas donde las variables de interés pueden representarse como una ecuación diferencial, o un conjunto de ellas que operan dentro de un dominio de análisis, las opciones de solución matemática suelen ser escasas y aplicables únicamente a casos donde el dominio de análisis tiene una forma geométrica regular (ej. Circular, rectangular, etc.).

Los modelos numéricos han tenido un desarrollo muy importante en los últimos años, gracias a las novedosas tecnologías disponibles en los equipos de cómputo.

Actualmente es muy común el uso de modelos basados en los métodos de diferencias finitas, volúmenes finitos, elementos finitos, elementos de contorno, etc. Los cuales permiten evaluar las variables de interés, en dominios delimitados por fronteras sumamente complicadas. La obtención de resultados mediante este tipo de modelos, es competitiva económicamente con el uso de modelos matemáticos, dada su versatilidad y disponibilidad de programas a bajo costo.

Los modelos físicos a escala, son importantes en la etapa de análisis de dispositivos para manejo de fluidos, tales como válvulas, compuertas, vertedores, bombas, etc., y en general, donde requiere modelarse el flujo en 3 dimensiones, teniendo ésta, como la única opción de modelado confiable. La construcción de un modelo físico, puede considerarse la opción más costosa, sin embargo se justifica en obras de gran magnitud, y también es útil en problemas más cotidianos, si es posible representar un efecto particular del flujo como un salto hidráulico, rápida de un vertedor o una descarga a un cuerpo de agua, etc. construyendo un modelo casero (Echávez [1996], Vergara [1993]).

Nunca debe perderse de vista, que las diferentes opciones de modelación pueden complementarse unas con otras, y que son siempre herramientas al servicio del ingeniero de proyecto.

La transformación conforme, es un método de modelación matemática que se deriva de algunas propiedades de las funciones analíticas de variable compleja, y permite solucionar de manera elegante y práctica algunos casos de flujo perfecto bidimensional.

1.2.- Flujo Potencial.

Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos, al tratar el flujo potencial, estaremos hablando de un flujo incompresible no viscoso. De manera estricta no es posible encontrar en la naturaleza un flujo de este tipo; sin embargo su estudio es una herramienta importante, dado que para flujos con altos números de Reynolds (especialmente en flujos externos), los efectos viscosos quedan confinados a capas límite anexas a las superficies sólidas y a regiones desprendidas y estelas. El flujo fuera de la capa límite es irrotacional y, para los fines comunes de la ingeniería hidráulica, incompresible.

En los flujos internos, las capas límite crecen desde las paredes y al encontrarse, desaparece el núcleo no viscoso. Aún así, la teoría no viscosa es aplicable a conductos cortos, como toberas, orificios y obras de toma. Inclusive puede emplearse en conductos cerrados con flujo totalmente turbulento, ya que en este caso, la distribución de velocidades es casi uniforme a todo lo ancho del conducto, a excepción de la zona cercana a las paredes. Para este caso y algunos otros, la consideración de no viscosidad es aplicable siempre y cuando la interacción de las zonas viscosas y no viscosas se modele adecuadamente (White [1979]).

Las ecuaciones fundamentales para el flujo no viscoso son las siguientes:

Ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (2.1)$$

Donde ∇ es el operador diferencial dado por:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.2)$$

y \bar{v} es el vector de velocidades.

Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p + (\rho \cdot g) \quad (2.3)$$

donde p es el valor de la presión (escalar), ρ es la densidad del fluido que es constante dada la consideración de incompresibilidad, g es la aceleración de la gravedad, que en general puede aceptarse como un vector en la dirección $-z$, y $\frac{d\bar{v}}{dt}$ es la aceleración total de la partícula fluida.

La característica principal del flujo potencial, es que la velocidad en cualquier punto del flujo puede expresarse de la forma:

$$\bar{v} = -\nabla \phi \quad (2.4)$$

donde ϕ es una función escalar conocida como potencial y $\nabla \phi$ representa por definición el gradiente de ϕ , que es un vector coincidente con la línea de máximo incremento del potencial. El vector velocidad adopta el signo negativo, debido a que tiene el sentido de máximo descenso de ϕ . Las componentes de la velocidad en cualquier punto estarán definidas por las componentes del vector $-\nabla \phi$, a saber:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.5)$$

Aplicando el principio de continuidad (2.1) a la representación potencial del vector velocidad (2.4), se llega a la ecuación de Laplace que es:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.6)$$

En la que el signo negativo del gradiente del potencial se hace innecesario, dado que la ecuación está igualada con cero. Para hallar soluciones particulares de la ecuación de Laplace para un problema determinado, es necesario definir como condiciones de contorno: 1) La geometría del dominio, entrada, salida y fronteras sólidas; 2) Las velocidades del flujo aguas arriba, aguas abajo o en alguna sección del flujo; 3) Se considera que las velocidades perpendiculares a las fronteras sólidas son nulas, pero que la velocidad tangencial a éstas no lo es, por lo que se considera que las fronteras sólidas coinciden con líneas de corriente ψ . Una solución de la ecuación de Laplace, puede visualizarse como una red de flujo, en la que las líneas equipotenciales $\phi = cte$ representan líneas de igual energía potencial, al igual que lo son las curvas de nivel en una montaña; La otra componente de la red de flujo, son las líneas de corriente $\psi = cte$. que son siempre

perpendiculares a las equipotenciales y van en la dirección del flujo. Las líneas de corriente satisfacen también la ecuación de Laplace.

De las definiciones anteriores, la ecuación de la cantidad de movimiento puede escribirse de la forma:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} + gz = \text{constante} \quad (2.7)$$

que es la ecuación de Bernoulli para flujo no permanente, sin embargo, en los problemas que se tratan en el presente trabajo, se considera que el término dependiente del tiempo es nulo.

En general se conocen varias funciones que satisfacen la ecuación de Laplace en un plano, ya que los problemas tridimensionales se resuelven solamente para casos axisimétricos, partiendo de las soluciones en el plano y haciéndolas girar alrededor del eje de simetría. En la mayor parte de los casos, las soluciones tridimensionales obtenidas no satisfacen la ecuación de Laplace, pero son una aproximación adecuada.

1.3.- Superposición.

Para obtener la solución particular de la ecuación de Laplace en un problema, se parte de funciones que de antemano se sabe satisfacen la ecuación en un plano, y partiendo del hecho de que el laplaciano es un operador lineal, la suma de dos soluciones son también una solución.

Como casos prácticos, se mencionan a continuación tres soluciones elementales para flujos contenidos en el plano:

- 1.- Corriente Uniforme.
- 2.- Fuentes o Sumideros.
- 3.- Vórtices o Torbellinos (el flujo presenta una singularidad donde es rotacional).

Si se considera un flujo uniforme con velocidad constante U_{∞} , en el que las rectas que representan las líneas de corriente forman un ángulo α con la dirección positiva del eje x , la función potencial y de corriente tienen la forma:

$$\varphi = U_{\infty} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \quad (2.8)$$

$$\psi = U_{\infty} (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \quad (2.9)$$

La solución de una fuente o un sumidero, considera que desde el origen del sistema de referencia, está emanando un caudal $Q = \text{const.} = v_r (2\pi r) = 2\pi m$ en el caso de la fuente, donde las

líneas de corriente son radiales y las equipotenciales son circunferencias concéntricas en el origen. En el caso del sumidero, la velocidad del flujo es radial hacia el origen, y en este el caudal se "infiltra" o desaparece. Para este caso, es más sencillo manejar coordenadas polares:

$$\varphi = m \ln r \quad (2.10)$$

$$\psi = m\theta \quad (2.11)$$

donde $m = r v_{\text{fuente}}$ (2.12)

El torbellino bidimensional es una solución algebraicamente semejante a la anterior, en donde los papeles de las líneas equipotenciales y de corriente se intercambian representando un flujo circulatorio puro, con una velocidad tangencial que disminuye como $1/r$. Tiene también una singularidad en el origen, donde φ y ψ no están definidas.

$$\varphi = K\theta \quad (2.13)$$

$$\psi = -K \ln r \quad (2.14)$$

La intensidad del torbellino K , tiene las mismas dimensiones que la intensidad m de la fuente.

1.4.- Aplicaciones.

Los ejemplos que se presentan, fueron desarrollados en un programa de cómputo que corre bajo ambiente Java de Internet, es decir, es un programa que está al servicio de los usuarios de internet en la página <http://www.mecaps.cict.fr/> en la sección de Visualización Numérica y el proceso de los datos se desarrolla en un servidor. La principal ventaja de este programa, es que está desarrollado de manera didáctica para el aprendizaje de los flujos perfectos y la transformación conforme.

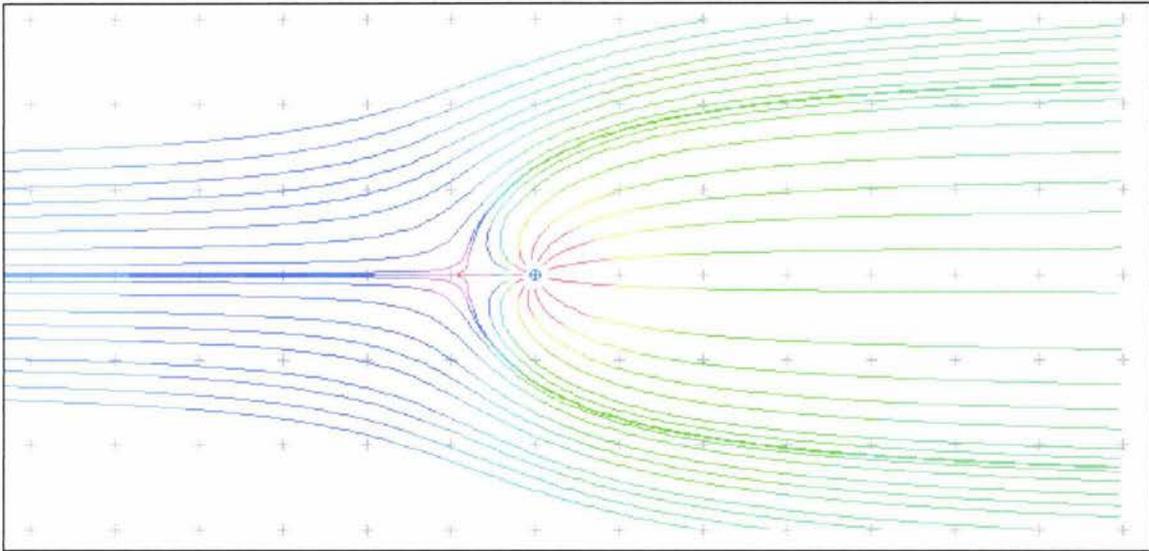


Figura 1.1. Cuerpo seminfinito de rankine: formado por la superposición de un flujo uniforme y una fuente.

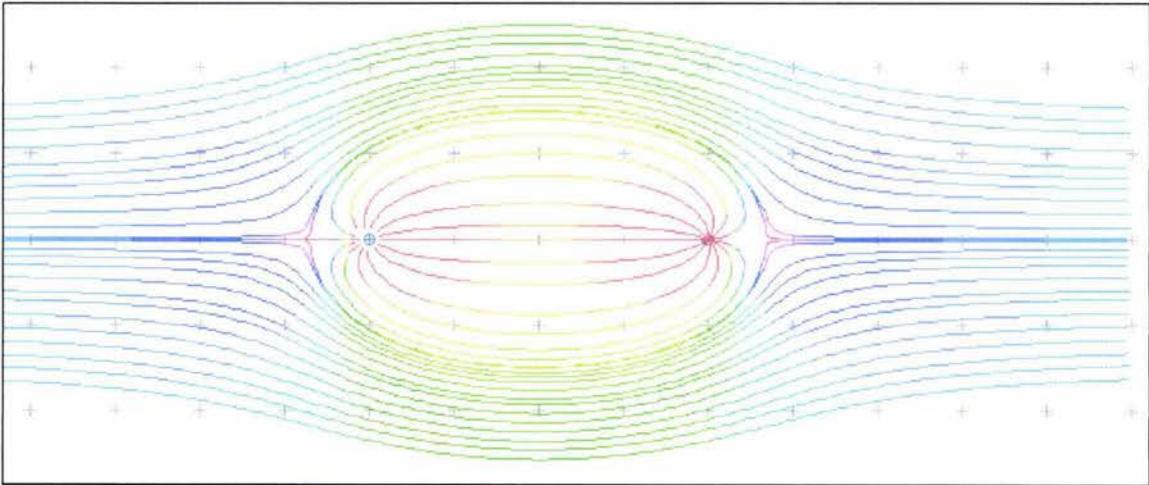


Figura 1.2. Óvalo de Rankine: Flujo formado por la superposición de un Flujo Uniforme, una Fuente y un Sumidero alineados.

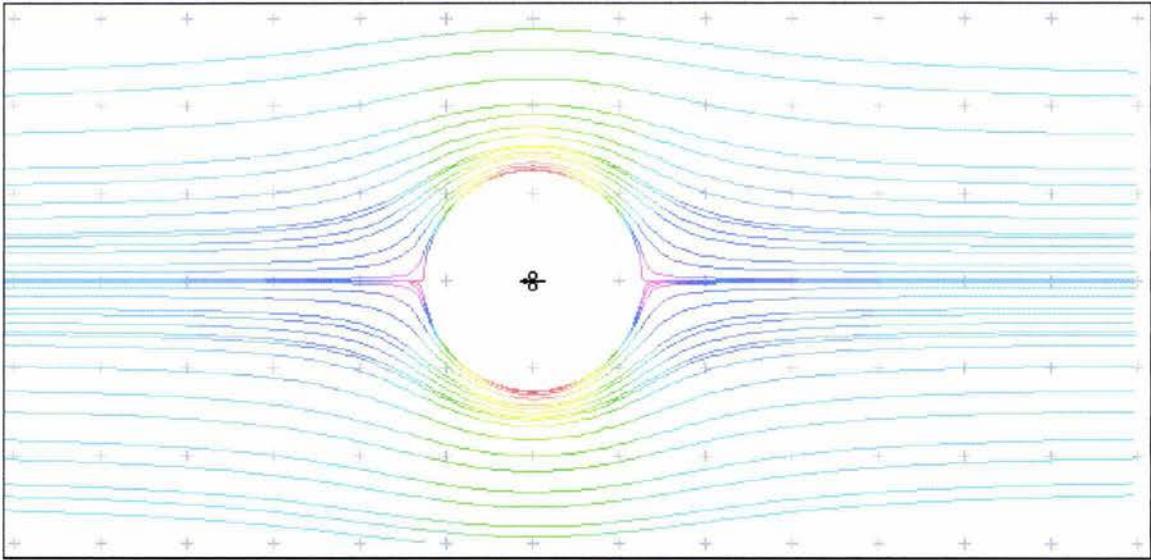


Figura 1.3. flujo alrededor de un cilindro: superposición de un flujo uniforme y un doblete.

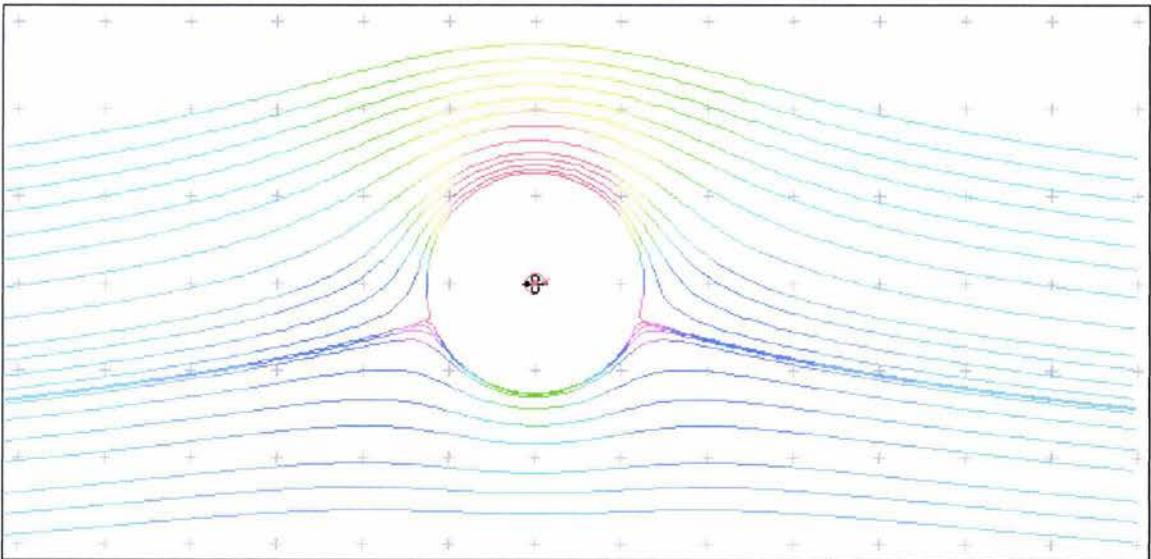


Figura 1.4. Cilindro con Circulación: formado por la superposición de un flujo uniforme, un doblete y un torbellino.

LA TRANSFORMACIÓN CONFORME



Se describen algunos conceptos fundamentales de las funciones con variables complejas, como la derivabilidad, y la descripción del comportamiento de algunas funciones de uso frecuente.

En el capítulo precedente se revisó el campo de aplicación del Flujo Potencial, donde las variables de interés, como la velocidad, pueden obtenerse a partir de una función escalar ϕ , conocida como potencial, que satisface la ecuación de Laplace. En el presente capítulo se hará uso de la teoría de las variables complejas para hacer patente su utilidad en la solución de problemas físicos que pueden asociarse a una función potencial ϕ .

Profundizar en el tema de las variables complejas no es un objetivo del presente trabajo, sin embargo, es necesario seguir un camino adecuado sobre este campo de las matemáticas, para entender la transformación de Schwarz-Christoffel.

2.1 Funciones de Variable Compleja.

Se conoce la asociación que una función de variable real hace entre dos conjuntos de números reales. La expresión $y = f(x)$ indica que, para el conjunto de valores que puede adoptar la variable x , es posible asignar correspondientes valores de y . Esta relación se expresa frecuentemente mediante una expresión algebraica.

De esta manera, el dominio de la función, que es el conjunto de valores que puede adoptar x , está dado por $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, y $f(x)$ asocia de manera biunívoca los elementos del dominio con los elementos del contradominio o imagen de la función, y que se denotan como $\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\}$.

Si se representa el dominio de la función $f(x)$ como una línea recta, que se asocia al conjunto de los números reales, entre los cuales, la variable x puede tomar algunos valores, y se hace lo mismo para la variable y , puede hacerse una representación gráfica como la siguiente:

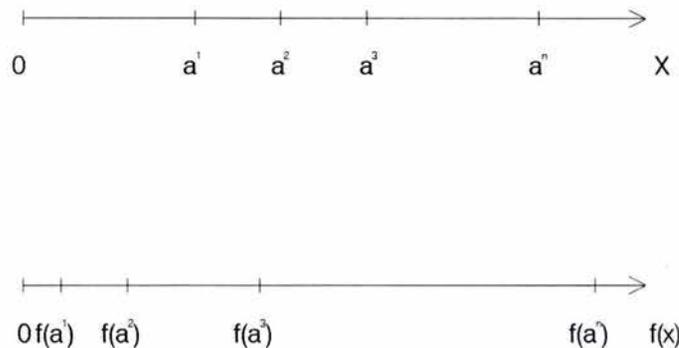


Figura 2.1 Representación de una función real de variable real.

De esta manera se observa que, para un cierto valor real a_j de x en el dominio de la función, existe un solo valor $f(a_j)$ que puede representarse en el eje Y , y que es conocido como imagen de a_j .

Se acostumbra representar las funciones reales de variable real en un plano cartesiano, donde las funciones continuas son representadas por una curva en dicho plano. Sin embargo, para los fines de este trabajo, la representación de la figura 2.1 es suficiente, ya que nos acerca al objetivo de hacer una analogía entre las funciones de variables reales, con las funciones de variables complejas.

Un número complejo se define con una expresión de la forma:

$$z = x + iy$$

Donde x y y son números reales, siendo x la parte real de z , $x = \text{Re}(z)$ y y es la parte imaginaria de z , $y = \text{Im}(z)$. Cuando $x = 0$ y $y \neq 0$, se dice que z es un número imaginario puro.

La unidad imaginaria se define como:

$$i^2 = -1$$

Y las potencias enteras de i adoptan valores que se repiten de manera cíclica, lo que proporciona un comportamiento peculiar a las funciones de variables complejas. Dicho comportamiento cíclico, repite el valor de la potencia de i , cuando se incrementa, o decrementa en 4 unidades, su exponente entero. Como ejemplo se presentan algunas de las potencias enteras de i , a partir de las cuales se puede obtener cualquier otra.

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

Aplicando la propiedad cíclica de las potencias enteras de i , puede verificarse que $i^0 = 1$, que es una potencia homóloga con $i^4 = 1$ y se ve que $i^{-1} = -i$, que tiene correspondencia con i^3 .

Un número complejo puede ser representado como un vector en un sistema coordenado bidimensional, que se denomina plano complejo, o plano de Argand. La parte real de z se grafica en el eje horizontal, y la imaginaria en el eje vertical. Se ilustra lo anterior en la figura 2.2.

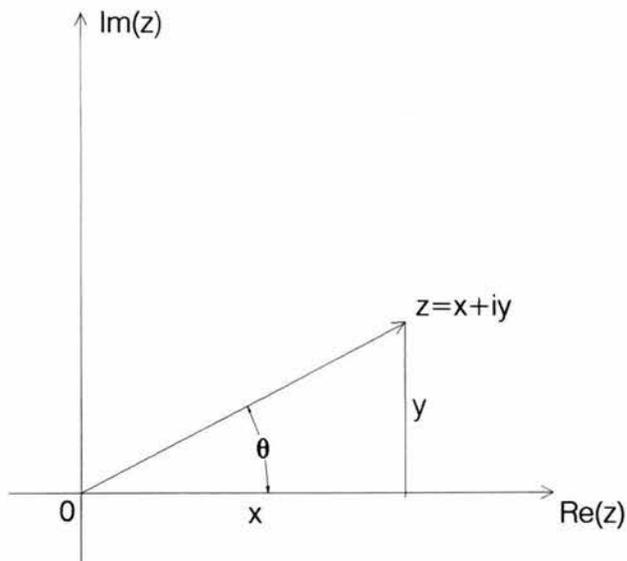


Figura 2.2. Representación de z en el plano complejo o plano de Argand.

Si r es la magnitud de z , dada por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \equiv |z| ; \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

θ es el ángulo que el vector z forma con la horizontal. El número complejo z , puede escribirse también en forma polar, es decir:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Al ángulo θ se le conoce como argumento de z , y se dice que $\theta = \arg(z)$.

La tercera forma de representar de forma algebraica a un número complejo, es:

$$z = r e^{i\theta}$$

En síntesis:

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r e^{i\theta}$$

Con la finalidad de no abundar demasiado en los detalles del álgebra, y comportamiento de las funciones más usuales de variables complejas, se incluye el Apéndice 1 al final de este trabajo.

Tal como se indicó al inicio de la sección (2.1), una función real de variable real $y = f(a_j)$, permite obtener la imagen del punto $x = a_j$ y dicha función, puede representarse como puntos ubicados en el eje X, y sus imágenes correspondientes en el eje Y.

En el caso de las funciones de variable compleja, la situación es menos sencilla, ya que una función de la forma $w = f(z)$, indica que para ciertos valores de z en el plano Z, es posible obtener su imagen en el plano W, esto es, la función $w = f(z)$, define una transformación de los puntos del plano Z hacia su imagen en el plano W.

Por ejemplo, la función definida por $w = \bar{z}$, donde w es el conjugado de z , transporta o transforma, los puntos del semiplano superior del plano Z, en los puntos del semiplano inferior de W.

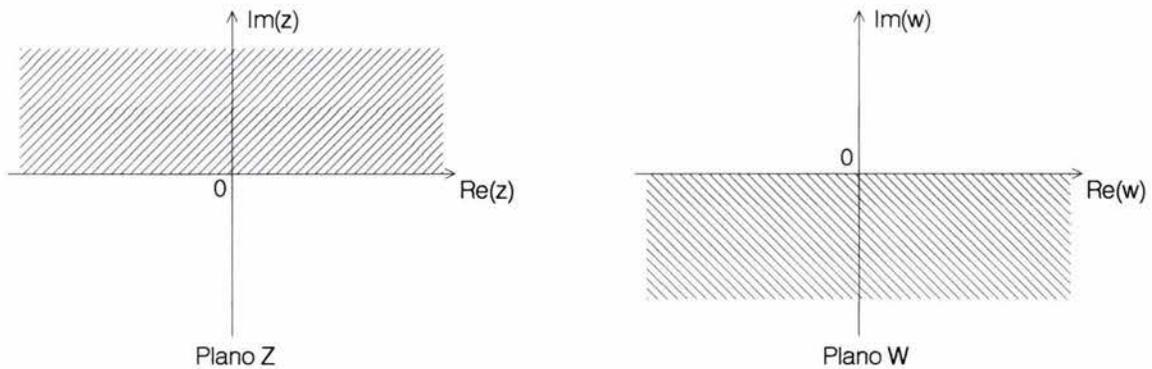


Figura 2.3. Transformación del semiplano superior en Z, definida por la función $w = \bar{z}$.

2.2 Funciones analíticas.

En esta sección se estudia el concepto de derivación de funciones complejas, y se resaltan algunas condiciones importantes que cumplen aquellas funciones que tienen derivada, llegándose a las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Dada una función compleja de variable compleja $f(z)$, definida en una región R que contiene al punto z_0 , la derivada de $f(z)$ en $z = z_0$, se define como:

$$\frac{df(z_0)}{dz} = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Cuando dicho límite existe, se dice que $f(z)$ es derivable en z_0 .

Alternativamente, considerando $\Delta z = z - z_0$, la ecuación anterior puede escribirse de la forma:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Una función continua de variables complejas, no será necesariamente derivable (o diferenciable). En este sentido, una condición necesaria que cumplen las funciones derivables es que, el valor de la derivada $f'(z_0)$ será el mismo, independientemente de la dirección que se adopte para evaluar el límite.

Para ilustrar lo anterior, se muestra en la figura 2.4, el plano Z que es el dominio de la función $f(z)$, y el plano W , que es la imagen de Z . Si en el límite $z \rightarrow z_0$, se cumple que el valor Δz estará acotado por un valor δ , es decir, $|z - z_0| < \delta$, y $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ estará acotado igualmente por el valor ε , para todo $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeño) y $\delta > 0$. De este modo, si las funciones derivables cumplen con la condición descrita anteriormente, se entiende que una función de este tipo define una transformación del plano Z hacia el plano W , donde cada segmento de recta con longitud $\Delta z \rightarrow 0$ sufre un escalamiento (y tal vez un giro) antes de llegar al segmento $\Delta f(z)$ tal que $\Delta f(z) = f'(z)\Delta z$

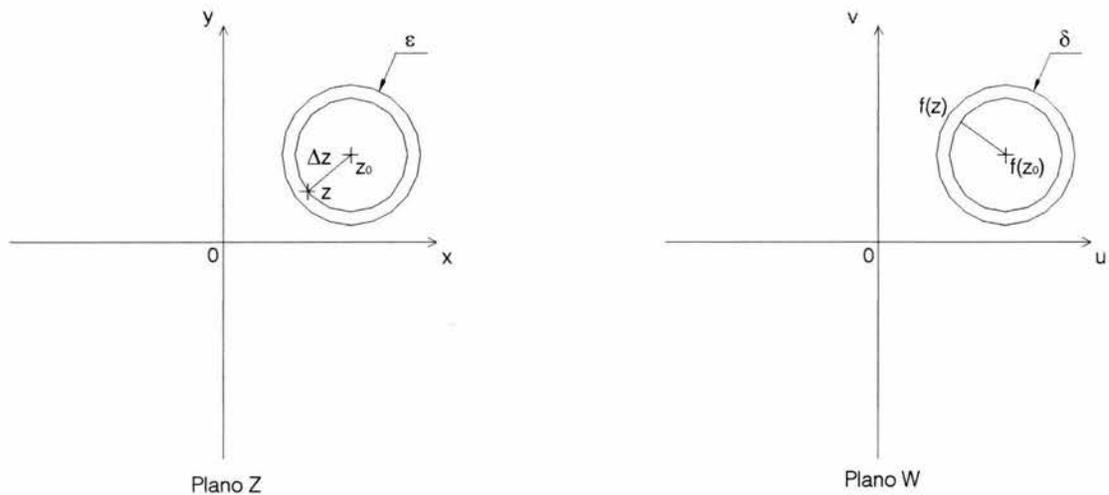


Figura 2.4. Inmediaciones de z_0 y $f(z_0)$.

Las partes real e imaginaria de $f(z)$ se escriben como $f(z) = u + iv$, donde tanto u como v , son funciones de x y y , es decir que puede escribirse $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Lo anterior puede sintetizarse entendiéndose que finalmente $f(z)$ es una función de dos variables, x y y .

Para definir la derivada de $f(z)$, es necesario seguir dos caminos diferentes, a saber: a) Obtener la derivada de $f(z)$ en la dirección x , esto es, hacer $\Delta z = \Delta x$ y b) Obtener la derivada de $f(z)$ en la dirección y , haciendo $\Delta z = i\Delta y$.

a)

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right]$$

que, aprovechando el concepto de derivada parcial puede escribirse como:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

b)

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \right]$$

que equivale a:

$$f'(z) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

por lo que igualando las dos expresiones que permiten la evaluación de $f'(z)$ y separando las partes real e imaginaria, es posible escribir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

que se conocen como ecuaciones o condiciones de Cauchy-Riemann, y es necesaria su satisfacción para saber si una función de variables complejas es derivable.

A diferencia del cálculo de variable real, la derivabilidad de una función compleja no se restringe al cumplimiento de las condiciones de continuidad y suavidad de la curva, sino que es necesario satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann.

Por otra parte, una de las consecuencias del cumplimiento de las ecuaciones de Cauchy-Riemann es que, en la representación gráfica de la función de variable compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, las curvas de nivel de u , es decir las curvas $u(x, y) = c_1$, son ortogonales a las curvas de nivel $v(x, y) = c_2$, para c_1 y c_2 constantes, en todos los puntos donde $f'(z)$ existe y es diferente de cero.

Conocido el hecho de que $f'(z)$ existe en todos aquellos puntos donde se satisface el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de Cauchy-Riemann, surge la necesidad de abundar el concepto de derivabilidad en un punto a la derivabilidad en una región. Para ello se plantea la definición siguiente:

Se dice que una función $f(z)$ es analítica en un punto z_0 , si $f(z)$ es derivable en una vecindad de z_0 . La función $f(z)$ es analítica en la región, si es analítica en todos y cada uno de los puntos de la región.

Como ejemplo puede mencionarse que $f(z) = e^z$ es analítica en todo el plano Z , mientras que $f(z) = \bar{z}$ no es analítica en ningún punto de Z . $f(z) = 1/z$ es analítica para todo $z \neq 0$.

2.3 Transformación Conforme.

Algunos problemas de la mecánica de fluidos, electrostática, conducción de calor, y otros campos de la física pueden reducirse a la solución de la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Definida cierta región D del plano Z . La función escalar $\phi(x, y)$ debe satisfacer ciertas condiciones de frontera dadas en el contorno C de la región D .

El estudio de las variables complejas ofrece un recurso importantísimo para la solución de la ecuación de Laplace, ya que las funciones analíticas la satisfacen. En la función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tanto $u(x, y)$ como $v(x, y)$ cumplen las condiciones impuestas a la función $\phi(x, y)$ por la ecuación, es decir, cualquier función de este tipo al sustituirse en el lugar de $\phi(x, y)$ en la ecuación de Laplace, la satisfará.

Dada la diversa naturaleza de los problemas que pueden analizarse resolviendo la ecuación de Laplace, surge inmediatamente el problema de las complicadas geometrías que puede adoptar el contorno C del dominio D donde se analiza el problema.

El método de la transformación conforme sugiere: representar la geometría del dominio del problema en un plano complejo; Conocida la solución de un problema de la misma naturaleza en un dominio más simple (ej. círculo unitario), es posible transportar la solución de esta región última hacia el dominio del problema de interés, mediante un conjunto de transformaciones conformes tales que, lleven la geometría del círculo unitario hacia el contorno de análisis C .

La idea anterior tiene su base formal en el teorema de Riemann.

Teorema de Riemann.

Sea D una región simplemente conexa del plano Z . Existe una función univalente $f(z)$ tal que $w = f(z)$ transforma la región D en el disco $|w| < 1$.

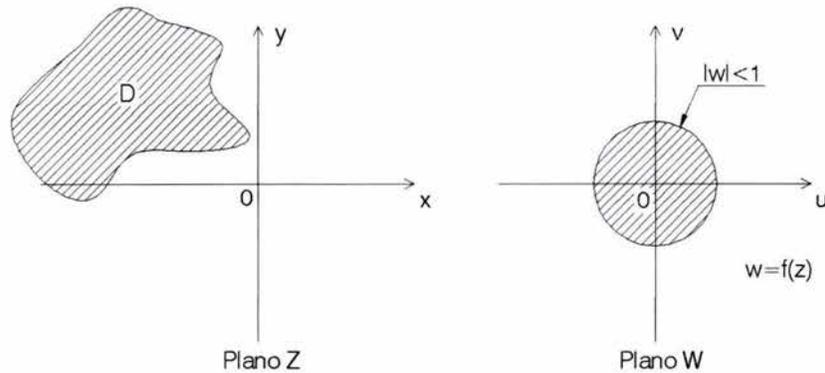
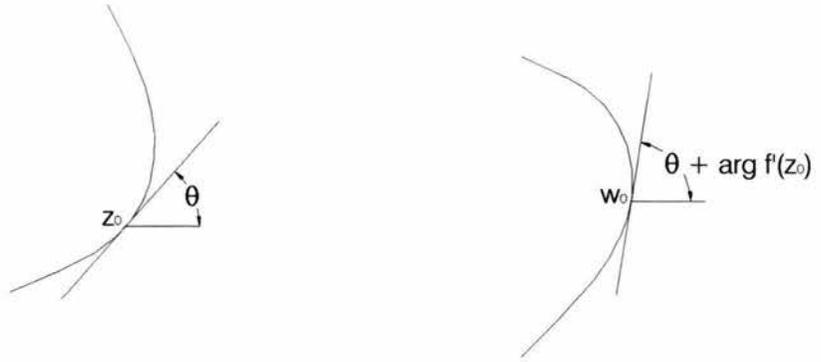


Figura 2.5.

El teorema de Riemann no especifica nada acerca del comportamiento de $f(z)$ en el contorno de la región en estudio D , pero sí proporciona la base para el método de la transformación conforme que, lamentablemente, es de aplicación sencilla únicamente en casos de geometrías simples de la región D . Para geometrías exóticas, el problema fundamental consiste en encontrar la transformación $f(z)$.

Un agravante de lo expuesto en el párrafo anterior, es que, para la aplicación del método de la transformación conforme, no es suficiente conocer la transformación $f(z)$, sino que también, se hace necesaria la obtención de la transformación inversa $F(w)$, donde $z = F(w)$.

Si se nombra C^* a la imagen del contorno C de una región que se somete a la transformación $f(z)$, y se considera un punto z_0 que pertenece a C , puede demostrarse que si $f'(z_0) \neq 0$, la imagen de z_0 en el plano W pertenece al contorno C^* y que el ángulo de inclinación θ que forma con la recta tangente a C en el punto z_0 se verá incrementado en la imagen $\arg f'(z_0)$, así que el ángulo de inclinación de la recta tangente en w_0 será $\theta + \arg f'(z_0)$, tal como se muestra en la figura 2.6.



$$\arg dw = \arg dz + \arg f'(z_0)$$

Figura 2.6. Ilustración de la transformación de la inclinación de una recta tangente a C , ante la transformación $w = f(z)$.

Una consecuencia inmediata de la propiedad geométrica expuesta anteriormente es que, para cualquier punto donde $f'(z) \neq 0$, las transformaciones analíticas preservan los ángulos. De hecho, si dos curvas se intersecan en z_0 , puesto que cada curva gira exactamente $\arg f'(z_0)$, el ángulo de intersección de las tangentes a las curvas en z_0 se conserva. A las transformaciones que presentan esta propiedad, se les conoce como *conformes*.

Teorema.

Dada la función $f(z)$, analítica y no constante¹ dentro de un dominio D del plano complejo Z . Para cada punto $z \in D$ donde $f'(z) \neq 0$, $f(z)$ define una transformación conforme, esto es, preserva el ángulo que forman dos arcos diferenciables.

Adicionalmente a la conservación de los ángulos, una transformación conforme tiene la propiedad de escalar las distancias en las inmediaciones de z_0 de acuerdo al factor $|f'(z_0)|$. De hecho, suponiendo que z está cerca de z_0 , y que w_0 es la imagen de z_0 , entonces la ecuación

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

¹ La expresión "no constante" se usa para denotar que $f'(z) \neq 0$ en toda la región D .

implica que $|w - w_0| \rightarrow |f'(z_0)| |z - z_0|$ cuando $z \rightarrow z_0$

Ejemplo 2.1

Sea D , una región rectangular del plano Z , con fronteras en $x=0$, $y=0$, $x=2$ y $y=1$. La imagen de D bajo la transformación $w = (1+i)z + (1+2i)$ está dada por la región D' , en el plano W con fronteras en $u+v=3$, $u-v=-1$, $u+v=7$ y $u-v=-3$.

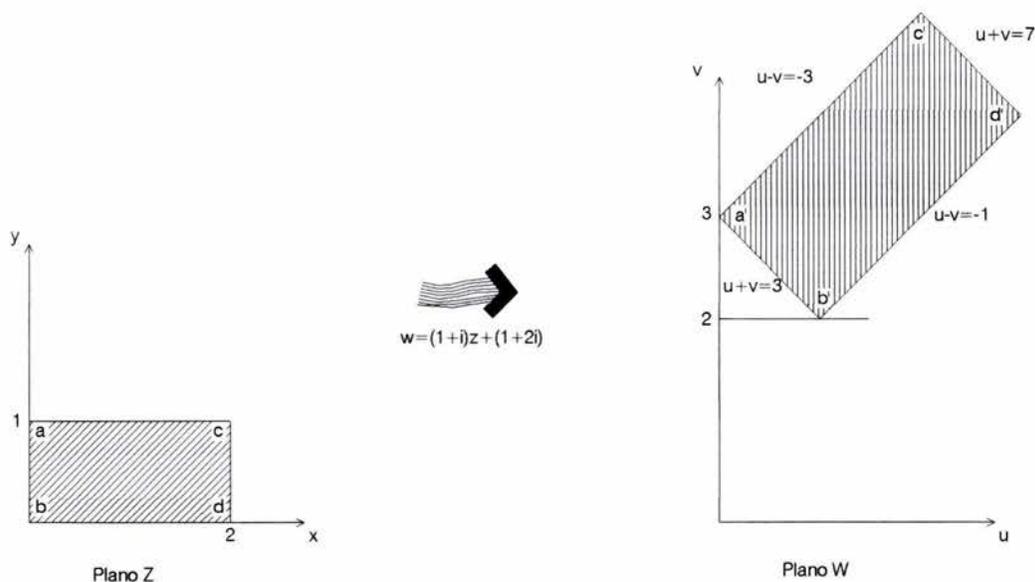


Figura 2.7. Ilustración del ejemplo 2.1.

En la figura 2.7 que muestra el rectángulo D y su imagen D' en el plano W , se observa que la región original D , se traslada tanto como $(1+2i)$ y gira $\pi/4$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj y se escala en $\sqrt{2}$.

Ejemplo 2.2

Sea D una región triangular con fronteras en $x=1$, $y=1$ y $x+y=1$. La imagen de D bajo la transformación $w = z^2$ está dada por el triángulo curvilíneo $a'b'c'$ mostrado en la figura 2.8.

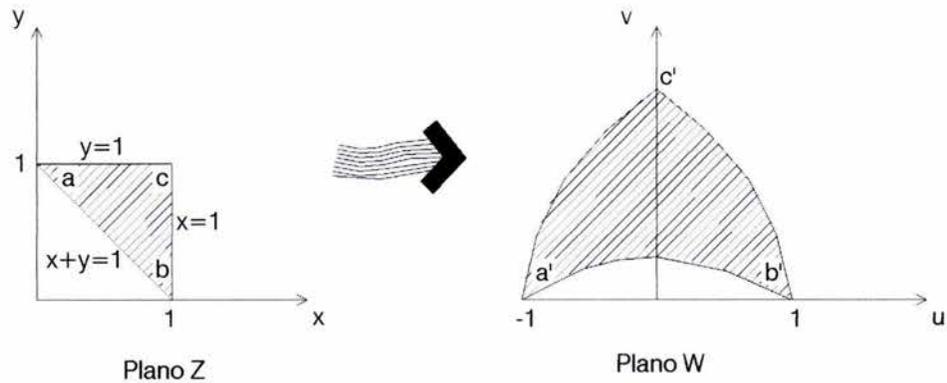


Figura 2.8. Ilustración del ejemplo 2.2.

En este ejemplo, $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. La línea $x=1$ se transforma en $u = 1 - y^2$, $v = 2y$, o lo que es lo mismo $u = 1 - \frac{v^2}{4}$ y de manera semejante lo es para el resto de los lados del triángulo. Dado que $f'(z) = 2z$ y el punto $z = 0$ está fuera de D , el mapeo es conforme sobre toda la región. Las imágenes de los puntos a, b, c , están dadas por los puntos a', b', c' , respectivamente.

2.4. Puntos Críticos.

Donde $f'(z_0) = 0$, la transformación analítica $f(z)$ deja de ser conforme. A los puntos que presentan esta característica se les conoce como *puntos críticos* de f . Si se obtienen n derivadas de $f(z)$, de manera que sean nulas hasta $f^{(n-1)}(z) = 0$, y siendo la primera no nula $f^{(n)}(z) \neq 0$; es decir, si la función $f(z)$ tiene derivadas no nulas hasta la derivada n -ésima $f^{(n)}(z) \neq 0$, la representación de $\delta(w) = w - w_0$ en series de Taylor es:

$$\delta w = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (\delta z)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z_0) (\delta z)^{n+1} + \dots$$

donde $f^{(n)}(z_0)$ denota la n -ésima derivada de $f(z)$ en $z = z_0$. Entonces, como $\delta(z) \rightarrow 0$

$$\arg(\delta w) \rightarrow n \arg(\delta z) + \arg(f^{(n)}(z_0))$$

Esta ecuación, que es una expresión más general que $\theta + \arg f'(z_0)$, indica que el ángulo entre dos elementos de línea

en el punto z_0 se incrementa o multiplica por el factor n , de esta manera puede establecerse el siguiente:

Teorema.

Considérese $f(z)$ analítica y no continua en un dominio D del plano Z . Supóngase $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ y $z_0 \in D$. Entonces la transformación $f(z)$ incrementa n veces el ángulo entre dos arcos diferenciables que se intersecan en z_0 .

Ejemplo 2.3

Sea D la región triangular determinada por $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$. La imagen de D bajo la transformación $w = z^2$ está dada por un triángulo curvilíneo $a'b'c'$ mostrado en la figura 2.9.

En este ejemplo la transformación $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, está dada por.

$$f(z) = z^2$$

$$f(z) = (x + iy)^2$$

$$f(z) = x^2 + 2ixy - y^2$$

agrupando las partes real e imaginaria de $f(z)$ puede escribirse

$$f(z) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

Por lo que, a simple vista, es posible determinar que las partes real e imaginaria de $f(z)$ son:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \qquad v(x, y) = 2xy$$

Las líneas $x = 0$; $y = 0$, se transforman en $v = 0$ con $u \leq 0$; $v = 0$ con $u \geq 0$ respectivamente, y la recta $x + y = 1$ se transforma en $\frac{1}{2}(1 - u^2)$. La transformación $f(z) = z^2$ no es conforme en $z = 0$ porque la segunda derivada, es la primera que no es nula, de aquí, el ángulo en b (que vale $\frac{\pi}{2}$ en el plano Z) debe multiplicarse por 2, lo cual, se verifica.

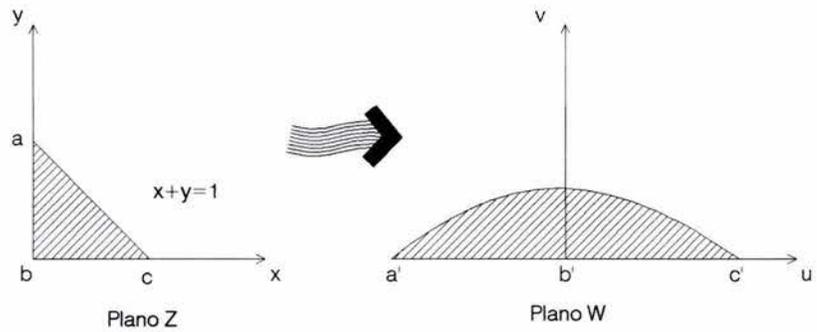


Figura 2.9. Ilustración del ejemplo 2.3.

El conocimiento de los puntos críticos es importante para determinar en qué casos $f(z)$ tiene inversa. La transformación inversa de $f(z)$ es aquella que permite expresar z en términos de w ; Es una expresión de la forma $z = F(w)$.

Una función $f(z)$ se conoce como univalente en un dominio D , si toma solamente un valor en D . Las funciones univalentes proporcionan transformaciones uno a uno de D hacia $f(D)$, y su función inversa es univalente en $f(D)$.

Cuando se trata de obtener una función inversa en las inmediaciones del punto z_0 , y z_0 no es un punto crítico, entonces $w - w_0$ está dado aproximadamente por $f'(z)(z - z_0)$. Es posible, en este caso, que para todo valor de w , exista un único valor de z , esto es, $f(z)$ es localmente invertible. Sin embargo, si z_0 es un punto crítico, y la primera derivada no nula en z_0 es $f^{(n)}(z_0)$, entonces $w - w_0$ está dada aproximadamente por: $f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n / n!$. Así, es natural esperar que para cada w existen n diferentes valores de z ; esto es, la transformación inversa $F(w)$ no es univalente en la región transformada, y se dice que tiene un punto de ramificación de orden n .

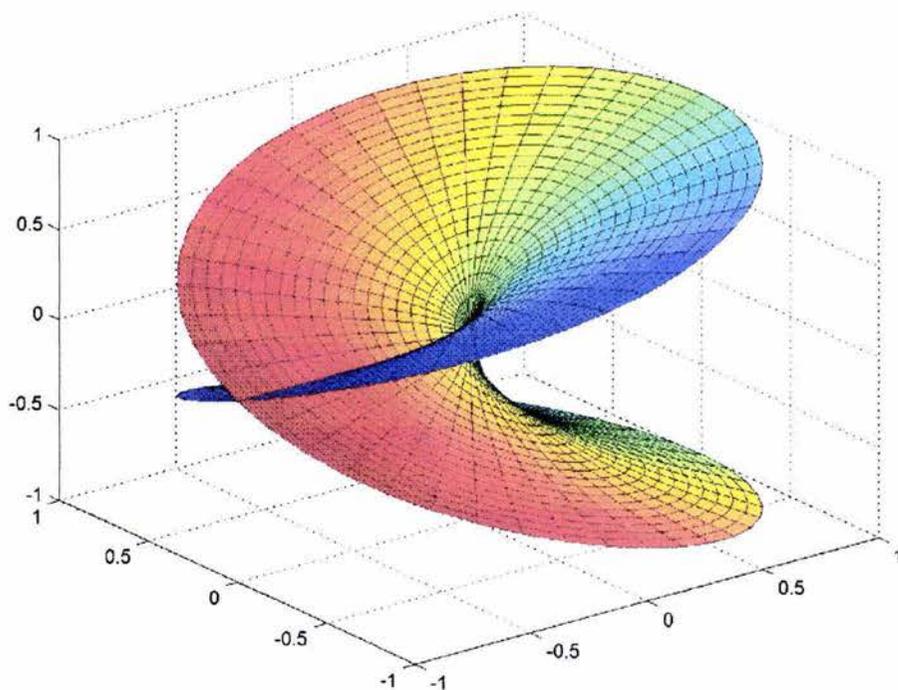


Figura 2.10. Superficie de Riemann para $f(z) = z^{1/2}$

La expresión $w = z^{1/n}$ representa una transformación uno a uno desde el plano Z hasta una superficie de n hojas en el plano W . Si un número complejo $w \neq 0$, es dado sin especificar la hoja de la superficie donde se encuentra, existen entonces n posibles valores de z para el solo valor w ; es decir, $w = z^{1/n}$ tiene una inversa con n posibles valores. Sin embargo, cuando se consideran completas las superficies en Z , y en W con todas sus hojas, $w = z^n$ tiene una función inversa univalente.

A la región en W que considera las n hojas (o ramas) de la función $w = z^{1/n}$ se le llama superficie de Riemann. Cada rama abarca la totalidad de la región compleja, excepto el origen, es decir el conjunto $\{C\} - 0$. Además de las funciones de la forma $w = z^{1/n}$, existen otras funciones que presentan el efecto de ramificación, por ejemplo la superficie de Riemann de la función $w = e^z$ presenta un número infinito de ramas, por lo que es importante tenerlo en cuenta cuando se maneja la función inversa, que es la función logaritmo, que presenta comportamiento univalente con una rama de la superficie de Riemann, siempre y cuando se evalúe sobre una franja infinita de altura 2π , como por ejemplo $-\pi \leq y \leq \pi$. Es decir la franja infinita citada se transforma hacia una rama que se extiende por todo $\{C\} - 0$, y es claro ver

que existen una infinidad de franjas semejantes hacia $y +$ y hacia $y -$ (ver Churchill R.V. [1970], Cohn H. [1967], Spiegel [1991], Wunsch A. D. [1979]).

En las figuras 2.10 y 2.11, se ilustran la idea de las superficies de Riemann para dos casos diferentes.

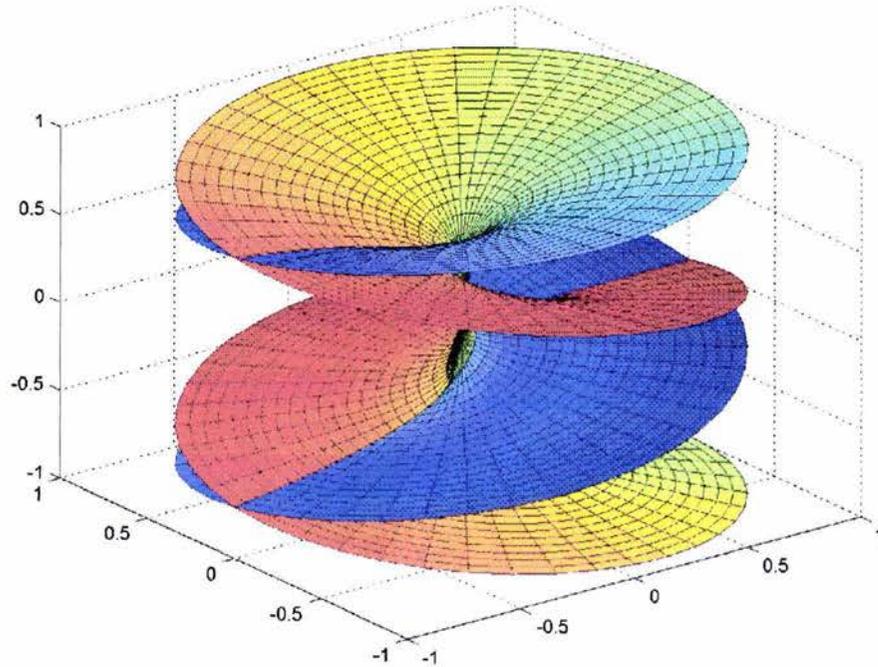


Figura 2.11. Superficie de Riemann para $f(z) = z^{1/4}$

2.5. La Transformación Bilineal.

Una transformación de la forma:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad ad - bc \neq 0 \quad (5)$$

se conoce como transformación bilineal, fraccional lineal o de Möebius; a, b, c y d son constantes complejas, y z representa la variable compleja. La condición $ad - bc \neq 0$ es necesaria para evitar que w se convierta en una constante.

El primer caso a revisar de esta transformación, es cuando $c = 0$ y $d = 1$, de esta manera la transformación queda:

$$w = az + b$$

Si de inicio se desprecia el efecto de b y se escribe $z = re^{i\theta}$, $a = |a|e^{i\alpha}$, se obtiene $w = r|a|e^{i(\theta+\alpha)}$. Lo cual significa que todas las distancias al origen de cualquier punto en Z se multiplican por un factor $|a|$, y además, giran un ángulo α alrededor del origen. La consideración de la constante b , inducirá un efecto de traslación de todos los puntos del dominio, la traslación tendrá evidentemente, el valor de b . Las transformaciones que caen dentro de este primer caso analizado, transforman círculos en círculos.

Como segundo caso, se revisa el comportamiento de una transformación bilineal de la forma

$$w = \frac{1}{z}$$

Escribiendo $z = re^{i\theta}$, se tiene:

$$w = \frac{e^{-i\theta}}{r}$$

Que transforma el exterior de una circunferencia unitaria, en el interior de la misma, y viceversa. La circunferencia unitaria $|z| = 1$ se transporta hacia W como una circunferencia igual, $|w| = 1$ pero descrita en sentido contrario, ya que $\arg(w) = -\arg(z)$. Las transformaciones de este segundo caso, transportan círculos a círculos.

Volviendo a la expresión original de la transformación bilineal, puede ésta escribirse en la forma:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}$$

De este modo, se muestra que la transformación bilineal es equivalente a la aplicación sucesiva de las siguientes tres transformaciones:

$$\text{I.- } z_1 = cz + d$$

$$\text{II.- } z_2 = \frac{1}{z_1}$$

$$\text{III.- } w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} z_2$$

Las transformaciones I y III son semejantes y corresponden a las del 1er caso analizado, mientras que la II corresponde a una del segundo caso. Dado que los dos casos de las transformaciones bilineales analizados transportan circunferencias a circunferencias, se entiende que lo mismo hace el caso general de la transformación bilineal. Aquellas circunferencias del plano W que corresponden con circunferencias que pasan por el punto $z = -(d/c)$ (cuya imagen es $w = \infty$) degeneran en líneas rectas.

La transformación bilineal es una función analítica de la forma $w = f(z)$, para todos los valores de z , excepto para $z = -(d/c)$; Y la derivada

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{ad - bd}{(cz + d)^2}$$

es no nula en cualquier punto del plano finito Z , ($z \neq \infty$), a excepción tal vez de $z = -(d/c)$. Sin embargo, las excepciones en $z = \infty$ y $z = -(d/c)$, son solo aparentes. Dada la ec. (8), la transformación (7) preserva el ángulo entre dos arcos diferenciables que se intersecan en el origen, siendo que este último, se transforma en $w = \infty$.

Según Nehari [1952], cuando se tiene definida una relación lineal entre z y w , que puede escribirse $w = f(z)$, y z_1, z_2, z_3 , y z_4 son puntos del plano Z , la expresión:

$$\frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

Es la *relación transversal (cross ratio)* de los puntos z_1, z_2, z_3 , y z_4 , y dicha relación transversal permanece invariable ante la transformación lineal $w = f(z)$, o lo que es lo mismo:

$$\frac{(w_1 - w_4)(w_3 - w_2)}{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)} = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

2.6. Aplicaciones.

Una expresión más general que aquella que define la transformación bilineal, es la función racional de 2º grado, cuya forma es:

$$f(z) = \frac{az^2 + bz + c}{a'z^2 + b'z + c'}$$

donde a , b , c , a' , b' y c' son constantes complejas. Una expresión de este tipo, que tiene aplicaciones en el campo de la aerodinámica, es la transformación:

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

Que se conoce como transformación de Jowkovsky

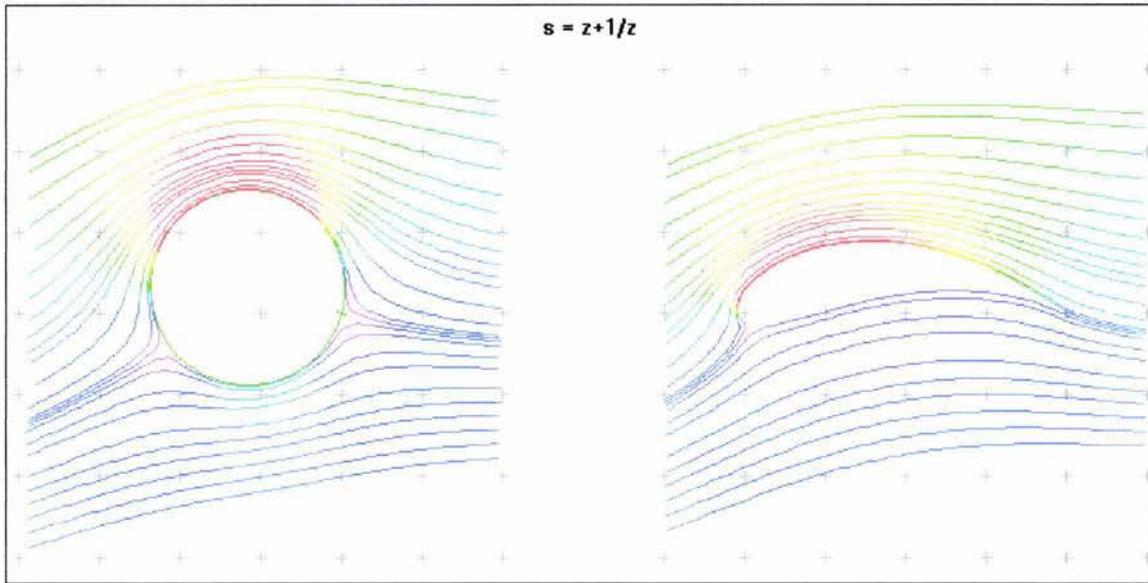


Figura 2.12. Flujo alrededor de un perfil Joukowski: flujo uniforme y círculo con circulación (doblete con torbellino) centrado en $(-0.2, 0.2)$. Transformación $S=f(z)=a(z+b/z)$; $a=1$; $b=1$. La traslación del origen del círculo respecto a la dirección positiva de "x" determina la curvatura del perfil, y siguiendo el sentido positivo en "y", el espesor. El ángulo del flujo uniforme, determina la incidencia del perfil.

Si se considera una circunferencia que tiene su centro sobre el eje real, que pasa por $z = 1$, y contiene en su interior a $z = -1$; dado que la derivada de w es nula en $z = 1$, aquí, se encuentra un punto crítico de la transformación, y los ángulos que se ubican en la proximidad a $z = 1$, se duplican.

Particularmente, en el punto A, el ángulo medido sobre el contorno C que vale π , se transforma en 2π en la imagen A'.

Si en el plano Z, la circunferencia C se traslada en dirección vertical, permaneciendo $z = -1$ como un punto interior de la circunferencia y A, en el contorno C. Si el centro se ubica en el semiplano superior de Z entonces, la curva C' presentará un vértice en A'. De este modo, cambiando apropiadamente el diámetro y la ubicación de C, es posible obtener varias formas parecidas a C', que recuerda la sección transversal de las alas de los aviones. A estos perfiles se les conoce como perfiles Jowkovsky

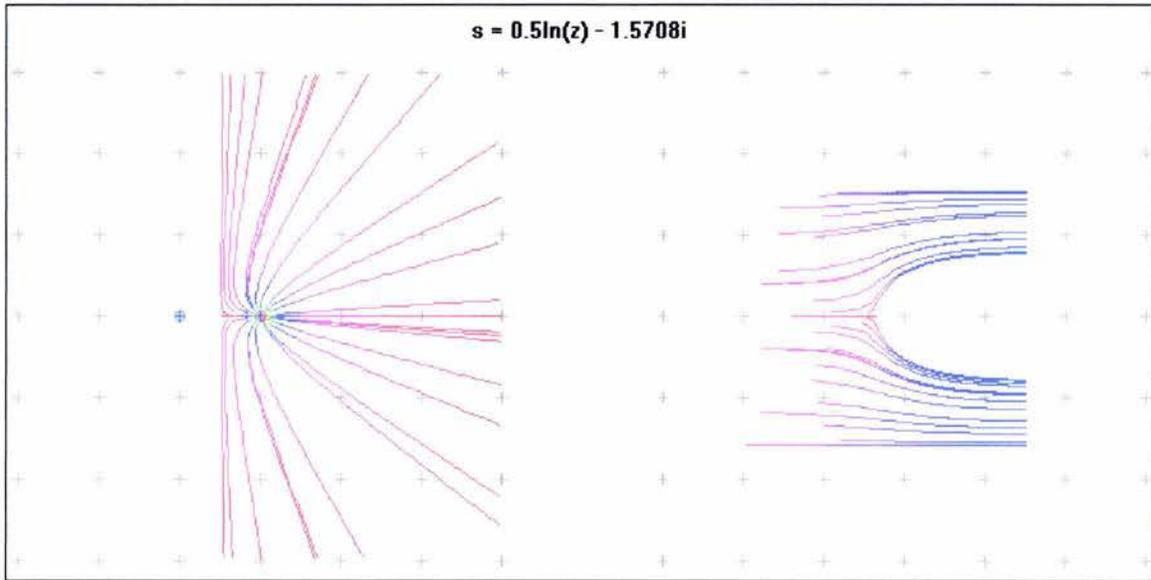


Figura 2.13. Medio cuerpo de Rankine entre dos paredes paralelas: Dos fuentes de la misma intensidad en el plano z , una en el origen y la otra en $(-1,0)$. Transformación $S=f(z)=a\ln(z)-ib$; $a=1/2$; $b=1/2$.

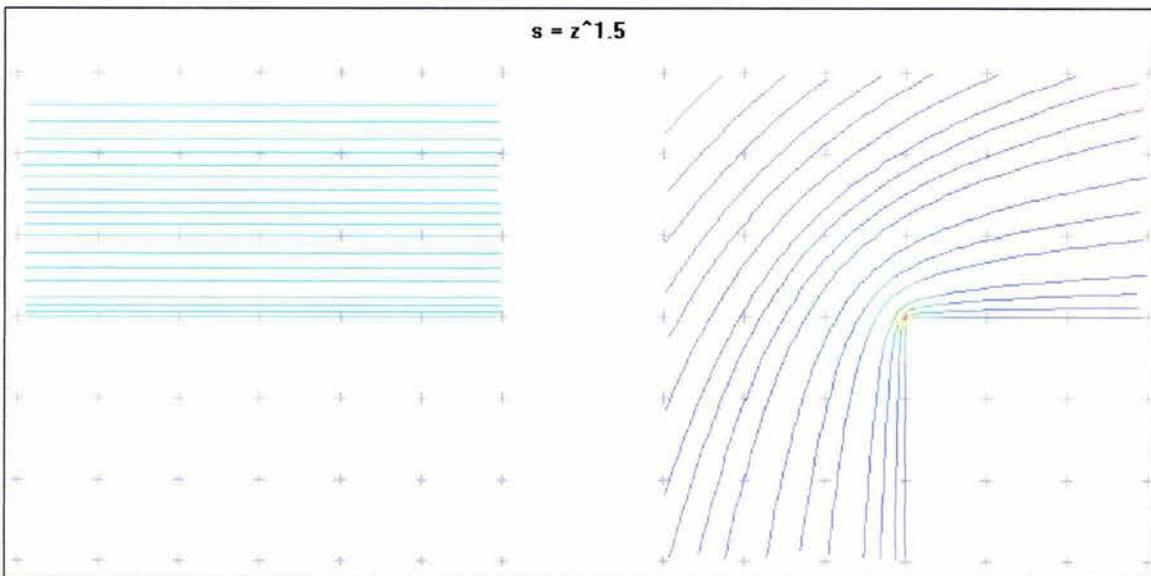


Figura 2.14. Flujo exterior a un ángulo recto: flujo uniforme en el semiplano superior de z . Transformación $S=f(z)=az^b$; $a=1$; $b=1.5$ El valor de b define el ángulo de deflexión del flujo en la frontera y el valor de a define la amplitud del dominio.

APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES

3

*...como los cartógrafos en el pasado,
exploramos ahora todo un
nuevo mundo.*

Steven G. Krantz

En este capítulo se muestran algunas aplicaciones prácticas de las técnicas de mapeos o transformaciones conformes, en disciplinas como la medicina y la geografía. Se describe una técnica de transformación discreta basada en relaciones y proyecciones de esferas o burbujas, apartándose por momentos de los conceptos de las funciones con variables complejas.

3.1.- Antecedentes.

Entre las aplicaciones clásicas de las técnicas de mapeo, se encuentra la elaboración de cartas geográficas mediante diversas proyecciones que presentan en ocasiones, la propiedad de conformidad, existen también algunas proyecciones cartográficas que llevan a mapeos que son no conformes. Se describirán las aplicaciones actuales de una técnica discreta para obtención de mapeos conformes. Dicha técnica fue propuesta por William Thurston de la Universidad de California, y que se basa en un teorema fundamental demostrado en 1970 por el matemático ruso E.M. Andreev, este teorema no es de fácil demostración, ya que se fundamenta en el trabajo sobre la geometría hiperbólica.

La implementación práctica de las técnicas discretas de mapeo conforme, se ha hecho posibles gracias a un programa de cómputo desarrollado por Ken Stephenson en la Universidad de Tennessee.

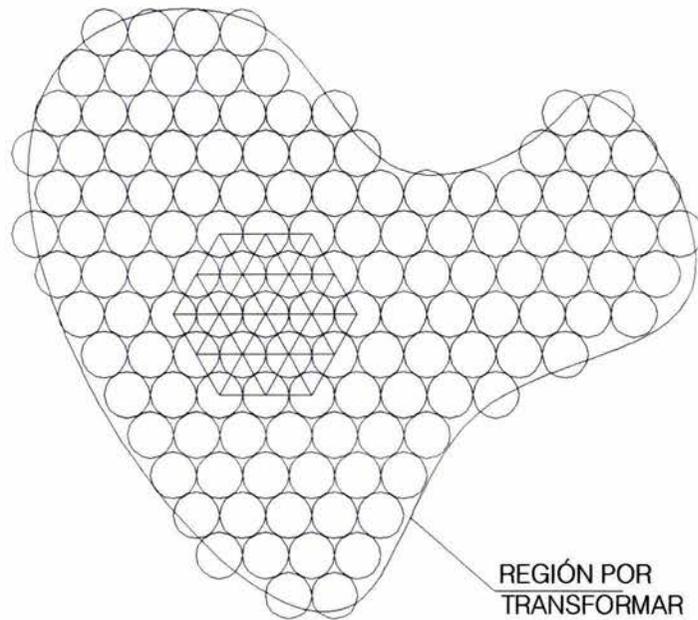


Figura 3.1. Concepción de la transformación discreta de una región mediante un conjunto de círculos de igual radio con tangencias exhaustivas. Nótese el patrón hexagonal de las tangencias de las circunferencias.

La técnica discreta se basa en el escalamiento de pequeñas circunferencias que llenan el área que se pretende transformar o mapear. Si se parte de una cierta región simplemente conexa (sin huecos, y donde la frontera no se interseca a sí misma), ésta puede rellenarse con un conjunto de circunferencias de radio constante; Al llenar el área original, no es necesario satisfacer condiciones muy rigurosas en las fronteras, tal vez, simplemente observar que los centros de todas las circunferencias queden dentro de la región por

transformar. Puesto que los círculos que rellenan la región son de igual tamaño y son todos tangentes entre sí, el patrón de tangencias tiene forma hexagonal, obsérvese la figura 3.1.

En el artículo de Krantz [1999] aparece la figura 3.2, donde se observa igualmente el patrón de tangencias hexagonal en el conjunto de circunferencias que discretizan la región por transformar, se ve también que el mapeo de dicho patrón se mejora cuando la discretización es con circunferencias más pequeñas. La región de destino es de forma circular.

En la misma figura 3.2, se observa que en la región por transformar, está resaltado un punto que sirve como base de la transformación, en el mapa circular ese punto queda representado en el centro. Es importante tener en cuenta que en la región original el punto de base se selecciona al azar, ya que una vez lograda la transformación de la región, pueden obtenerse con cierta facilidad todos los mapeos conformes modificando el punto de base, de esta manera, es posible seleccionar un punto que requiera particular atención, ya que también el factor de escala es grande en relación al factor que se logra cerca del perímetro del mapa. No debe perderse de vista que, aunque el centro del mapa puede corresponder a cualquier punto en la región de origen, todos los mapeos que se logran, son conformes, es decir conservan los ángulos. A esta propiedad de poder obtener varios mapeos conformes a partir de uno de ellos, todo en una región circular, se llama *automorfismo*.

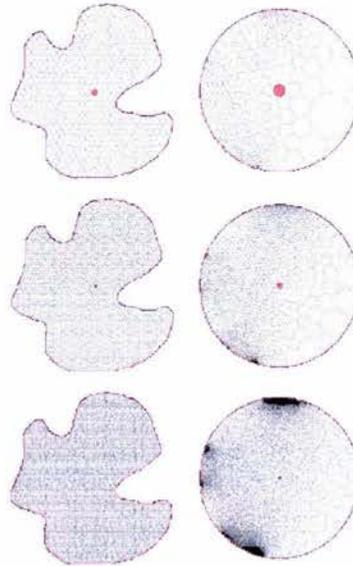


Figura 3.2. Mapeo discreto de una región, con diferentes tamaños de las circunferencias. Con menores tamaños, se logran transformaciones más precisas, tal como puede observarse si se mira el patrón de tangencias en la región transformada, donde los ángulos de intersección conservan su valor.

El método discreto de transformación conforme propuesto por Thurston y programado por Stephenson, es de naturaleza iterativa, ya que es necesario variar recurrentemente las dimensiones de las circunferencias de la región transformada, para cumplir con la condición de tangencia que es necesaria.

Las posibles utilidades prácticas de los mapas circulares que se muestran en la figura 3.2, no son difíciles de entender, si se reflexiona un poco acerca de la utilidad cotidiana en el uso de mapas. Los mapas permiten dar una idea de ubicación en base a las relaciones de posición de unos puntos o lugares del plano, respecto a otros. La idea de ubicación se basa siempre en relacionar distancias y posiciones. Otro uso común de los mapas, es la determinación de la dirección en la que debe desplazarse una persona o nave para ir de un lugar a otro. De manera semejante pueden ser usados los mapas circulares de la figura 3.2.

La conservación de las formas circulares bajo la transformación, permite mantener inalteradas las formas de los objetos pequeños que se someten a la transformación, mientras que su tamaño cambia, es decir, sufren un escalamiento, como consecuencia, los objetos grandes sufren cambios de forma, debido a que el factor de escala cambia de un punto a otro, pero los ángulos que puedan medirse en el contorno del objeto se conservan. Esa es la propiedad de conformidad.

Cuando es posible obtener una transformación que lleve las circunferencias de la región original a elipses en la región transformada, se dice que la transformación es cuasi conforme; no conserva ni las formas ni el escalamiento uniforme de los objetos que mapea.

Un caso práctico de uso de una transformación no conforme, permite la construcción de mapas cartográficos donde el factor de escala de las áreas de las regiones que se están mapeando se conserva constante sobre todo el mapa. Una transformación de ese tipo, es la proyección equivalente o equiárea, útil en la práctica geográfica. El mejor ejemplo de este tipo de mapeos, es la proyección cilíndrica equivalente, la cual permite una representación equiárea de la superficie terrestre, con la ventaja de que mantiene los meridianos y los paralelos como líneas rectas perpendiculares. Para conservar la escala de áreas, los paralelos que se alejan del ecuador, deben dibujarse cada vez más próximos entre ellos. Es esa deformación en la representación, la que permite el escalamiento de las áreas. Es así como cualquier área en el mapa, no solo está correctamente representada, sino que guarda proporción respecto a la de cualquier otra región del mapa.

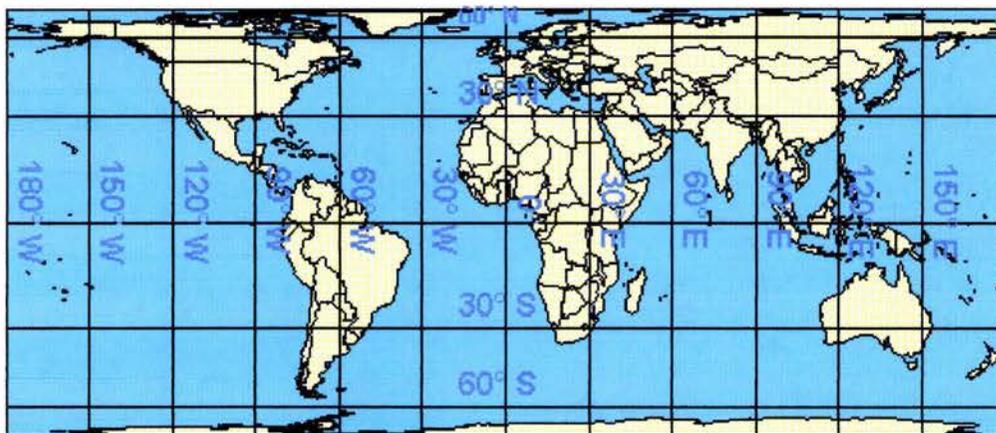


Figura 3.3. Proyección equivalente o equiárea. Conserva constante la escala de áreas en todo el mapa, permite comparar las áreas de diversas regiones, pero distorsiona las formas, principalmente en zonas alejadas del ecuador.

En geografía, las representaciones equivalentes o equiáreas, son especialmente útiles cuando se analizan fenómenos que pueden asociarse directamente al área de una región, por ejemplo:

$$\frac{\text{POBLACIÓN}}{\text{ÁREA}}$$

$$\frac{\text{PRODUCCIÓN}}{\text{ÁREA}}$$

La descripción de las proyecciones equiáreas, permite no solamente ilustrar la aplicación de una transformación que no es conforme, sino que también permite hacer observaciones desde un punto de vista más general acerca de las propiedades de una transformación, o mapeo, a saber:

1) Las proyecciones cartográficas son transformaciones geométricas que pueden calificarse de acuerdo a la propiedad de conformidad.

2) Las proyecciones cartográficas son transformaciones o mapeos que parten de una superficie curva, como la terrestre, hacia regiones contenidas en un plano.

Por último, permite hacer la siguiente pregunta ¿Es posible definir una transformación conforme a partir de una región 2D contenida en una superficie curva, hacia una región contenida en un plano?

Sí, a una pregunta planteada en otros términos y bajo otras necesidades específicas, respondió el cartógrafo flamenco, G. Kremer (1512-1594), mejor conocido como Mercator.

Mercator se dio a la tarea de construir cartas de navegación, que permitieran a los marinos trazar rutas en el plano, como líneas rectas que conservaran el mismo rumbo (loxodrómicas). En la época, la generalidad de las cartas de navegación estaban trazadas en base a relaciones de distancias que, empíricamente, estimaban los marinos entre un punto y otro. Dichas cartas se basaban

también en las de Ptolomeo quién desarrolló un conjunto de mapas basados en la proyección cónica, ideada por él mismo.

Los árabes se encargaron de conservar las cartas de Ptolomeo, que permanecieron ocultas para los europeos por más de 1000 años.

La idea de la proyección cilíndrica de Mercator no es original del siglo XVI, su uso ya se había planteado desde Hiparco, quién manejó ese tipo de representación, y el más importante antecesor de las cartas de Ptolomeo, Marino de Tiro, quién desarrolló sus cartas mediante una proyección cilíndrica.

Posteriormente, C.F. Gauss y L. Kruger idearon el sistema de cilindros transversales según meridianos, conocido también como sistema de bandas meridianas. Este sistema con algunas modificaciones es conocido como la proyección transversal universal de Mercator (UTM) y fue recomendada para su uso por la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica en Bélgica en 1951, y es la que se emplea actualmente y de manera general en México.

La proyección de Mercator, es un ejemplo de transformación conforme desde una superficie curva hacia una plana, pero el hecho de que las loxodrómicas (líneas de rumbo constante) puedan representarse como líneas rectas en una carta obtenida con la proyección de Mercator, no es una propiedad común de los mapeos conformes. Debe observarse también, que las cartas hechas en base a la proyección de Mercator mantienen la propiedad de conformidad, pero tienen el gran inconveniente de que, a medida que se representan regiones más alejadas del ecuador, el factor de escala lineal hace que la representación de las regiones sea muy grande, así que las regiones polares quedan fuertemente distorsionadas.

En realidad, la obtención de mapeos conformes a partir de superficies curvas, es posible aún para casos de curvaturas grandes. Steven G. Krantz [1999], muestra en su artículo algunos mapeos realizados por Monica Hurdal de la Universidad de Florida. Para dichos mapeos se emplea el programa de cómputo desarrollado por Kenneth Stephenson, que ya fue mencionado antes.

Las aplicaciones de Hurdal son interesantes, ya que la geometría de la corteza cerebral, es sumamente complicada, presenta curvaturas sumamente grandes y además, la cantidad de datos precisos a partir de los cuales sería posible generar un modelo fiel de la superficie, son limitados.

La motivación para llevar a cabo estos mapeos discretos, es que los neurólogos requieren un método para la ubicación de áreas funcionales y regiones que pueden ser origen de trastornos o dolencias sobre la intrincada superficie del cerebro. Es claro que, representar la superficie del cerebro en modelos tridimensionales

(3D), es mucho menos práctico y de mayor dificultad de difusión que en el caso de mapas bidimensionales (2D).

El área y la forma de la corteza cerebral, difiere de un individuo a otro, sin embargo y a pesar de este inconveniente, es posible hacer comparaciones de las regiones funcionales de la corteza mediante los mapas planos.

La técnica de mapeo discreto, permite llevar a cabo otras representaciones además de la ya mencionada sobre una región plana circular. Es posible generar mapas de la misma forma pero con geometría hiperbólica, que se explicará en párrafos posteriores pero que de entrada, permite representar con un factor de escala mayor, las zonas que se mapean hacia la proximidad del centro del mapa circular. Otra representación posible, es un mapa 3D, realizado sobre la superficie de una esfera. Ver la figura 3.4.

En general, los mapeos de la corteza cerebral, son una aplicación sumamente práctica y actual de las transformaciones conformes.



Figura 3.4. Tres mapas del cerebelo, las dos primeras corresponden a representaciones automórficas, es decir, la segunda puede generarse a partir de la primera y viceversa, de este modo es posible seleccionar un punto del mapa y llevarlo a la parte central, donde es posible visualizarlo con mayor tamaño, como si se tratara de una lente. La 3ª imagen, corresponde al mapa del cerebelo sobre la superficie de una esfera.

El método propuesto por Thurston, consiste como ya se dijo antes, en la discretización de la región de origen, con un conjunto de circunferencias de igual radio, cuyas tangencias son exhaustivas, formando una retícula hexagonal si se unen mediante líneas rectas los puntos de tangencia.

Posteriormente, las líneas que forman el patrón hexagonal se proyectan hacia la superficie de una esfera, la región queda proyectada sobre el hemisferio sur de la esfera, si suponemos que ésta es tangente sobre su polo sur al plano donde está contenida la región por transformar.

La imagen de la retícula contenida en el hemisferio inferior de la esfera, se proyecta nuevamente hacia el plano, pero ahora eligiendo el foco de la proyección como un punto cualquiera sobre la superficie del hemisferio norte de la esfera.

El problema fundamental del proceso de transformación ocurre durante la realización de esta segunda proyección, ya que desde el nuevo punto de vista, es necesario encontrar los nuevos radios de las circunferencias del conjunto discreto que representa a la región. Este último proceso se lleva a cabo de manera iterativa, y su resultado, puede ilustrarse con la figura 3.5.

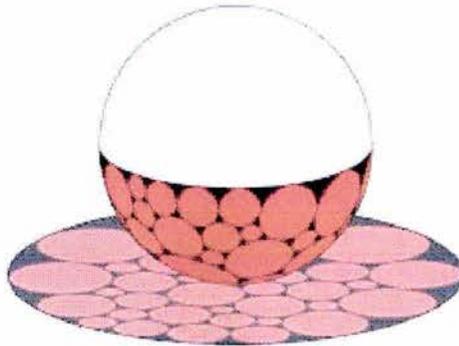


Figura 3.5. Segunda proyección, desde la esfera hacia el plano. Es durante este proceso de proyección que es necesario garantizar nuevamente la tangencia del conjunto de circunferencias, variando su radio.

El problema de proyección de la figura 3.5 está simplificado, ya que, en realidad es necesario hallar la tangencia de un conjunto de pequeñas esferas o "burbujas" cuyo centro coincide con los "nudos" o proyecciones de los círculos sobre la superficie de la esfera. El problema es interesante, ya que el patrón de tangencias es exhaustivo, todas las esferas ubicadas en el interior de la malla, tienen 6 puntos de tangencia con el resto de las burbujas. El número de puntos de tangencia es menor en el caso de las burbujas cercanas al contorno, pero debe mantenerse el número de puntos de tangencia que tenía cada circunferencia desde que se realizó la discretización.

Para abundar acerca del tema de la geometría hiperbólica, que tiene que ver con las representaciones que se han mencionado en párrafos anteriores, se toma una explicación de Richard Courant [1996] y Herbert Robbins.

Hay un axioma de la geometría euclidiana cuya "veracidad", es decir, cuya correspondencia con datos empíricos acerca de hebras extendidas o rayos de luz, de ninguna manera es obvia: este es el famoso postulado de la paralela única, en el cual se afirma que por cualquier punto que no esté en una recta dada, puede trazarse una y sólo una recta paralela a la línea dada. El rasgo distintivo importante de este axioma es que hace una aseveración acerca de toda la extensión de una línea recta, concibiendo que se prolonga indefinidamente en ambas direcciones, pues aseverar que dos

rectas son paralelas equivale a decir que nunca se intersecan, sin importar cuanto puedan prolongarse. Hay muchas rectas que pasan por un punto y que no se intersecan con una recta dada dentro de cualquier distancia finita fija, sin importar cuan grande sea esta distancia. Como la máxima longitud posible de una regla o una hebra reales, o incluso de un rayo de luz visible por medio de un telescopio, es ciertamente finita, y como dentro de cualquier círculo finito hay una infinidad de rectas que pasan por un punto dado y no se intersecan con una recta dada dentro del círculo, se sigue que este axioma jamás podrá verificarse por medio de experimentación.

Todos los otros axiomas de la geometría euclidiana tienen un carácter finito en el sentido de que se refieren a porciones finitas de recta y a figuras planas de extensión finita. El hecho de que el axioma de las paralelas no sea verificable experimentalmente plantea la cuestión de si es independiente de los otros axiomas: ¿sería posible eliminarlo como axioma y demostrarlo en términos de los otros axiomas euclidianos si fuera una consecuencia lógica necesaria de ellos?. Durante siglos los matemáticos trataron de encontrar tal demostración, a causa de la sensación, muy difundida entre los estudiantes de geometría, de que el postulado de las paralelas es de un carácter esencialmente diferente al de los otros, careciendo de esa especie de verosimilitud convincente que un axioma de geometría debe tener. Uno de los primeros intentos de esta naturaleza se debe a Proclo (siglo IV D.C.), un comentarista de Euclides, quién trató de prescindir de la necesidad de un postulado especial de las paralelas, definiendo la paralela a una recta dada con el lugar geométrico de todos los puntos que están a determinada distancia fija de la recta. Al introducir esta definición, Proclo cometió el error de no percatarse de que la dificultad solo había sido trasladada a otro contexto: sería entonces necesario demostrar que el lugar geométrico de tales puntos es en efecto una línea recta; como Proclo no hizo una demostración de esta última aseveración, habría tenido que aceptarla como un postulado en lugar del axioma de las paralelas y no se habría ganado nada: es fácil ver que ambos son equivalentes. El jesuita Saccheri (1667-1733) y Lambert (1728-1777) más tarde trataron de demostrar el postulado de las paralelas por el método indirecto de suponer lo contrario y obtener de este modo consecuencias absurdas. Sus conclusiones, lejos de ser disparatadas, realmente equivalían a teoremas de geometría no euclidiana desarrollados posteriormente. Si las hubieran considerado como enunciados consistentes es sí mismos y no como resultados absurdos, habrían sido los descubridores de la geometría no euclidiana.

En esa época, cualquier sistema geométrico que no concordara completamente con el de Euclides era considerado un absurdo obvio. Kant, el filósofo más influyente de ese período, formuló esta actitud en la afirmación de que los axiomas de Euclides son inherentes a la mente humana y por lo tanto tienen una validez objetiva para el espacio "real". Esta creencia en los axiomas de la geometría euclidiana como verdades inalterables que pertenecen a los dominios de la intuición pura fue uno de los pilares básicos de la filosofía de Kant. Pero al pasar el tiempo, ni los viejos hábitos de

pensamiento ni la autoridad filosófica pudieron suprimir la convicción de que la lista interminable de fracasos en la búsqueda de una demostración del postulado de las paralelas se debía a que éste es realmente independiente de los otros postulados, y no a alguna falta de ingenuidad. (De manera muy parecida, el no lograr demostrar que la ecuación general de quinto grado puede resolverse por radicales llevó a la sospecha, después verificada, de que tal solución es imposible.). El húngaro Bolyai (1802-1860) y el ruso Lobachevsky (1793-1856) resolvieron la cuestión del axioma de las paralelas construyendo con todo detalle una geometría en la que éste no se cumple. Cuando el joven y entusiasta genio Bolyai dio a revisar su trabajo a Gauss, el "príncipe de los matemáticos", para el reconocimiento que tan vehementemente esperaba, se le informó que el mismo Gauss se le había anticipado y que no había publicado sus resultados porque le causaba pavor el escándalo publicitario.

¿Qué significa la independencia del postulado de las paralelas? Simplemente que es posible construir un sistema consistente de enunciados "geométricos" acerca de puntos, rectas, etc., mediante deducciones a partir de un conjunto de axiomas en el que el postulado de las paralelas es reemplazado por un postulado opuesto; tal sistema es llamado geometría no euclidiana. Requirió el coraje intelectual de Gauss, Bolyai y Lobachevsky para darse cuenta de que tal geometría, basado en un sistema no euclidiano de axiomas, puede ser perfectamente consistente.

Para mostrar la consistencia de la nueva geometría no es suficiente deducir una gran cantidad de teoremas no euclidianos, como lo hicieron Bolyai y Lobachevsky. En vez de eso, hemos aprendido a construir "modelos" de tal geometría que satisfacen todos los axiomas de Euclides excepto el postulado de las paralelas, siendo el más simple de tales modelos el que dio Félix Klein, cuyo trabajo en este campo fue estimulado por las ideas del geómetra inglés Cayley (1821-1895). En este modelo, puede trazarse una infinidad de "líneas rectas paralelas" a una recta dada que pasen por un punto externo. Tal geometría es llamada geometría de Bolyai-Lobachevsky o "hiperbólica", por las razones que se verán más adelante.

El modelo de Klein se construye considerando primero objetos de la geometría euclidiana ordinaria y después renombrando algunos de estos objetos y las relaciones entre ellos de manera que surge una geometría no euclidiana. Esto debe ser, tan consistente como la geometría euclidiana original, pues se nos presenta, vista desde otras perspectivas y descrita con otras palabras, como un cuerpo de hechos de geometría euclidiana ordinaria.

Si sometemos el plano a una transformación proyectiva sobre otro plano, o más bien sobre sí mismo (haciendo coincidir después el plano imagen con el plano original), entonces, en general, un círculo y su interior serán transformados en una sección cónica. Sin embargo puede mostrarse fácilmente (la demostración se omite aquí) que existe una infinidad de transformaciones proyectivas del

plano sobre sí mismo tales que un círculo dado más su interior, se transforma en sí mismo; bajo tales transformaciones, puntos del interior o de la frontera en general cambian a otras posiciones, pero permanecen en el interior o en la frontera del círculo. (De hecho puede moverse el centro del círculo a cualquier otro punto interior.) Consideremos el conjunto de todas esas transformaciones; ciertamente, no dejarán invariantes las formas de las figuras, y por lo tanto no son desplazamientos rígidos en el sentido usual; pero ahora se da el paso decisivo de llamarlos “desplazamientos no euclidianos” en la geometría que será construida. Por medio de estos desplazamientos podemos definir congruencia: dos figuras se llaman congruentes si existe un desplazamiento no euclidiano que transforma la una en otra.

El modelo de Klein de la geometría hiperbólica es el siguiente: “El plano” consta sólo de los puntos interiores del círculo; los puntos fuera de él no son considerados. Cada punto dentro del círculo se denomina “punto no euclidiano”, cada cuerda del círculo se denomina una “línea recta” no euclidiana, “desplazamiento” y “congruencia” se definen como antes, unir “puntos” y encontrar la intersección de “líneas rectas” en el sentido no euclidiano, siguen siendo lo mismo que en la geometría euclidiana. Es sencillo mostrar que el nuevo sistema satisface todos los postulados de la geometría euclidiana, con la excepción del postulado de las paralelas. Se muestra que el postulado de las paralelas no se cumple en el nuevo sistema, a partir de que por cualquier “punto” que no esté en una “línea recta” pueden trazarse infinitas de “líneas rectas” que no tengan ningún punto en común con la “recta” dada. La primera “línea recta” es una cuerda euclidiana del círculo, mientras que la segunda “línea recta” puede ser cualquiera de las cuerdas que pasan por el “punto” dado y que no se intersecan con la primera “recta” dentro del círculo. Este modelo sencillo es suficiente para resolver la cuestión fundamental que hizo surgir a la geometría no euclidiana: prueba que el postulado de las paralelas no puede deducirse de los otros axiomas de la geometría euclidiana, ya que si así fuera, sería un teorema verdadero en la geometría del modelo de Klein, y hemos visto que no lo es.

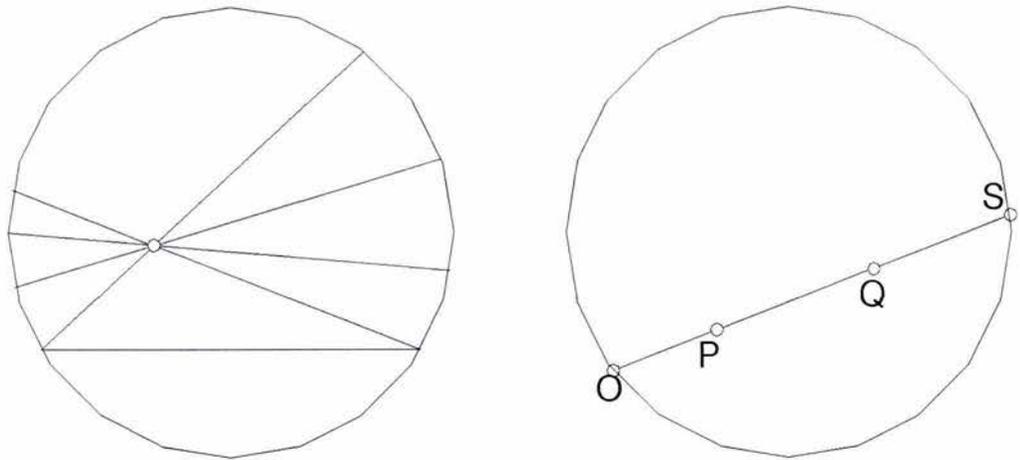


Figura 3.6. Geometría hiperbólica, según el modelo de Klein y esquema para la medición de distancias no euclidianas en el mismo modelo.

El modelo de Klein muestra que la geometría hiperbólica, vista como un sistema deductivo formal, es tan consistente como la geometría euclidiana clásica. Entonces surge la pregunta de cuál de las dos ha de preferirse como una descripción de la geometría del mundo físico. Como se ha visto, la experimentación nunca podrá decidir si hay una o infinidad de líneas rectas que pasen por un punto y sean paralelas a una recta. En la geometría euclidiana, sin embargo, la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° , mientras que puede mostrarse que en la geometría hiperbólica la suma es menor que 180° . Gauss por consiguiente llevó a cabo un experimento para resolver la cuestión: midió de manera muy precisa los ángulos de un triángulo formado por los picos de tres montañas muy distantes entre sí, y encontró que la suma de sus ángulos era 180° , dentro de los límites del error experimental; si el resultado hubiera sido notablemente menor que 180° , la consecuencia habría sido que la geometría hiperbólica habría sido preferible para describir la realidad física. Sin embargo, como se vio después, nada quedó establecido por ese experimento, pues para triángulos pequeños cuyos lados tienen sólo algunos kilómetros de longitud, la desviación de 180° de la geometría hiperbólica podría ser tan pequeña que pasaría desapercibida por los instrumentos de Gauss. Así, aunque el experimento no llegó a ninguna conclusión, mostró que las geometrías euclidiana e hiperbólica, que difieren mucho en lo "muy grande", coinciden por otra parte, para figuras relativamente pequeñas que son equivalentes experimentalmente. Por lo tanto, mientras se estén considerando sólo propiedades locales del espacio, la elección entre las dos geometrías tiene que hacerse solamente con base en la simplicidad y en lo práctico. Como es mucho más simple trabajar con el sistema euclidiano, se justifica su uso siempre que se estén

maneja distancias pequeñas (de algunos millones de kilómetros). No obstante, no debe esperarse que sirva para representar el universo como un todo, en sus aspectos más amplios. Esta situación es precisamente análoga a la que se da en física, donde los sistemas de Newton y Einstein dan los mismos resultados para distancias y velocidades pequeñas pero divergen cuando las magnitudes consideradas son muy grandes.

La importancia revolucionaria del descubrimiento de la geometría no euclidiana radica en que demolió la noción de que los axiomas de Euclides son el marco matemático inmutable al que deben ajustarse nuestros conocimientos experimentales de la realidad física.

Con lo que se ha visto hasta aquí, puede verse que es posible crear una "geometría" partiendo de un conjunto de axiomas consistentes acerca de "puntos", "líneas rectas", etc.; Si una geometría puede asemejarse al comportamiento físico de algún sistema, es conveniente echar mano de esa nueva geometría para describir el fenómeno físico de interés. Desde ese punto de vista puede analizarse la afirmación "la luz viaja en línea recta", pues si se considera como la definición física de "línea recta" entonces los axiomas de la geometría deben ser escogidos de manera que correspondan al comportamiento de los rayos de luz. Imaginando, siguiendo a Poincaré, un mundo compuesto por el interior del círculo C y tal que la velocidad de la luz en cualquier punto dentro del círculo sea igual a la distancia de ese punto desde la circunferencia. Puede demostrarse que los rayos de luz tomarán entonces la forma de arcos circulares perpendiculares en sus extremos a la circunferencia C. En un mundo así, las propiedades geométricas de "líneas rectas" (definidas como rayos de luz) diferirán de las propiedades euclidianas de las líneas rectas. En particular, el axioma de las paralelas no se cumplirá, ya que habrá una infinidad de líneas rectas que pasen por cualquier punto que no se interseque con una "línea recta" dada. De hecho, los "puntos" y las "líneas rectas" de este mundo tendrán exactamente las mismas propiedades geométricas que los "puntos" y "rectas" del modelo de Klein. En otras palabras, tendremos un modelo diferente de una geometría hiperbólica. Pero la geometría euclidiana también funcionará en este mundo; en lugar de ser "líneas rectas" no euclidianas, los rayos de luz serían círculos euclidianos perpendiculares a C. Así, vemos que diferentes sistemas de la geometría pueden describir la misma situación física, siempre y cuando los objetos físicos (en este caso, rayos de luz) estén correlacionados con conceptos diferentes de los dos sistemas:

Rayo de luz → "línea recta": → geometría hiperbólica

Rayo de luz → "círculo": → geometría euclidiana

Como el concepto de línea recta en la geometría euclidiana corresponde al comportamiento de un rayo de luz en un medio homogéneo, diríamos que la geometría de la región dentro de C es

hiperbólica, refiriéndonos sólo a que las propiedades físicas de los rayos de luz en este mundo corresponden a las propiedades de las “líneas rectas” de la geometría hiperbólica.

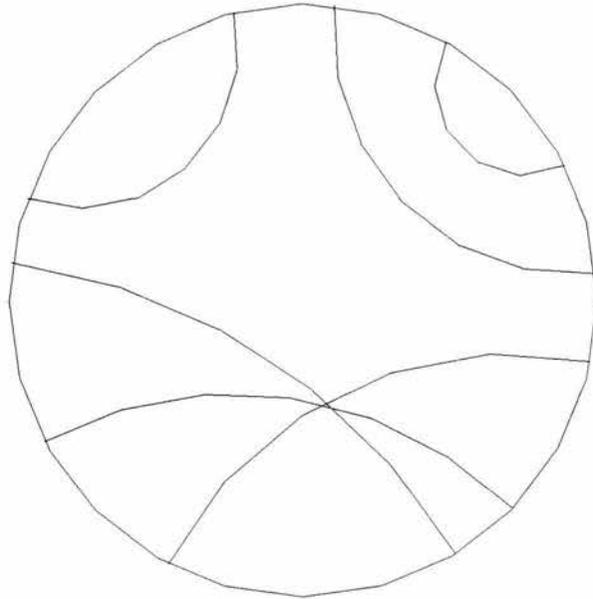


Figura 3.7. Modelo de geometría hiperbólica de Poincaré. En este caso, la “línea recta” se puede visualizar como un arco de circunferencia perpendicular a la circunferencia perimetral, que representa el infinito.

En la geometría euclidiana, al igual que en la geometría hiperbólica o de Bolyai-Lobachevsky, se hace la suposición táctica de que la recta es infinita (la longitud infinita de la recta está ligada esencialmente con el concepto y los axiomas de “estar entre”). Sin embargo, después de que la geometría hiperbólica había abierto el camino hacia la libertad en la construcción de geometrías, resultaba muy natural preguntar si podrían construirse geometrías no euclidianas diferentes, en las que una línea recta no fuera infinita, sino finita y cerrada. Por supuesto que en tales geometrías no sólo habrá de abandonarse el postulado de las paralelas sino también los axiomas de “estar entre”. Los avances modernos han mostrado la importancia de estas geometrías en el ámbito físico. Fueron consideradas por primera vez en el discurso inaugural que pronunció Riemann en 1851 al ser admitido como instructor sin salario en la Universidad de Gotinga. Pueden construirse geometrías con rectas finitas cerradas de una manera completamente consistente: imaginemos un mundo bidimensional que consta de la superficie S de una esfera, en la que definimos “línea recta” como círculo máximo de la esfera; éste sería el modo natural de describir el mundo de un navegante, ya que los arcos de los círculos máximos son las curvas de menor longitud entre dos puntos de una esfera y ésta es una propiedad característica de las líneas rectas en el plano. En un mundo así, cualesquiera dos “líneas rectas” se

intersecan, de manera que desde un punto externo no puede trazarse ninguna recta paralela a una "línea recta" dada (es decir, que no se interseque con ésta). La geometría de las "líneas rectas" en este mundo se llama geometría elíptica; en ella, la distancia entre dos puntos, se mide simplemente como la distancia sobre el arco más corto del círculo máximo que une a los puntos. Los ángulos se miden como en la geometría euclidiana. Generalmente se considera típico de una geometría elíptica que no haya en ella ninguna paralela a una recta dada.

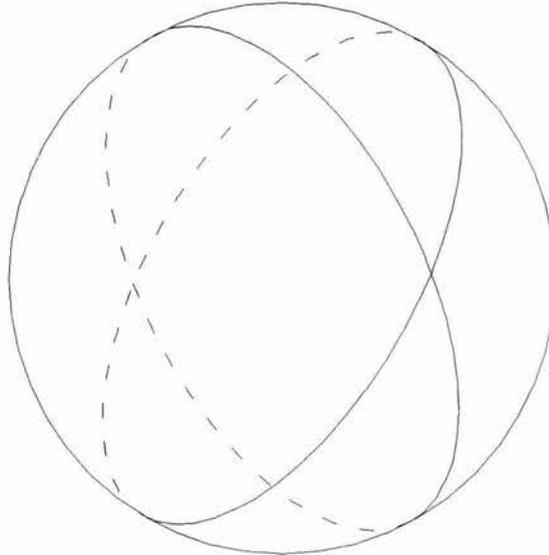
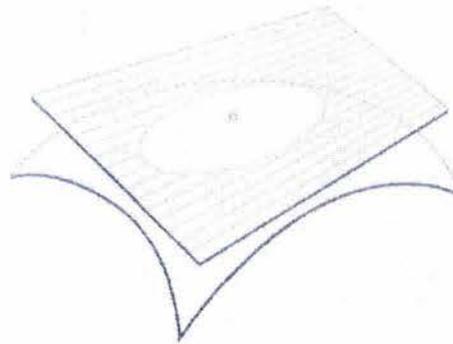
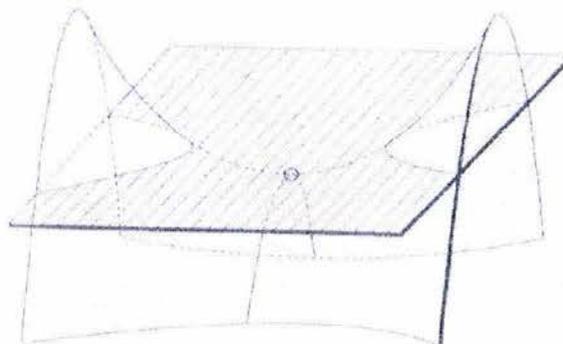


Figura 3.8. "Líneas rectas" sobre la geometría Riemanniana en la superficie de una esfera.

Siguiendo a Riemann, podemos generalizar esta geometría de la manera siguiente. Consideremos un mundo que consta de una superficie curva en el espacio, no necesariamente una esfera, y definamos la "línea recta" que une a cualesquiera dos puntos como la curva de la menor longitud, o "geodésica" que los une. Los puntos de la superficie pueden dividirse en dos clases: 1) Puntos en la vecindad de los cuales la superficie es como una esfera en el sentido de que ella queda completamente de un lado del plano tangente en el punto; 2) Puntos en la vecindad de los cuales la superficie tiene forma de silla de montar y está de ambos lados del plano tangente en el punto. Los puntos del primer tipo se llaman puntos elípticos de la superficie, pues si el plano tangente se mueve ligeramente paralelo a sí mismo, se interseca con la superficie en una curva elíptica; mientras que los puntos del segundo tipo se llaman hiperbólicos, pues si el plano tangente es movido ligeramente paralelo a sí mismo, se interseca con la superficie en una curva que parece una hipérbola. La geometría de las "líneas rectas" geodésicas en la vecindad de un punto de la superficie es elíptica o hiperbólica, según si el punto sea elíptico o hiperbólico. En este modelo de geometría no euclidiana los ángulos se miden con su valor euclidiano ordinario.



PUNTO ELÍPTICO



PUNTO HIPERBÓLICO

Figura 3.9. Representaciones de un punto elíptico, y un punto hiperbólico sobre una geometría Riemanniana.

Fue Riemann quién desarrolló esta idea, y quién consideró que una geometría del espacio era análoga a esta geometría de una superficie, en la que la "curvatura" del espacio puede cambiar el carácter de la geometría de un punto a otro. Las "líneas rectas" en una geometría riemanniana son las geodésicas. En la teoría general de la relatividad de Einstein la geometría del espacio es una geometría riemanniana, la luz viaja a lo largo de geodésicas y la curvatura del espacio está determinada por la naturaleza de la materia que hay en él.

Desde su origen en el estudio de la axiomática, la geometría no euclidiana se ha convertido en un instrumento excepcionalmente útil aplicado al mundo físico. En la teoría de la relatividad, en la óptica y en la teoría general de la propagación ondulatoria, una descripción no euclidiana de los fenómenos es a veces mucho más adecuada que una euclidiana.

Además de las geometrías no euclidianas, en el siglo XIX se inició un desarrollo completamente nuevo en geometría, que pronto se convertiría en una de las grandes fuerzas de las matemáticas modernas. La nueva rama llamada análisis situs o topología, tiene como objeto el estudio de las propiedades de las figuras geométricas que persisten incluso cuando las figuras son sometidas

a deformaciones tan drásticas que hacen que se pierdan todas las propiedades métricas y proyectivas.

Uno de los grandes geómetras de la época fue A.F. Möebius (1790-1868), a sus sesenta y ocho años envió a la Academia de París una memoria sobre superficies de una cara que contenía algunos de los hechos más sorprendentes de este nuevo tipo de geometría. Al igual que otras contribuciones importantes anteriores, su trabajo permaneció sepultado por años en los archivos de la Academia hasta que finalmente fue hecho público por el autor. Independientemente de Moebius, el astrónomo J.B. Listing (1808-1882) en Gotinga había hecho descubrimientos similares, y por sugerencia de Gauss había publicado en 1847 un pequeño libro. Cuando Bernhard Riemann llegó a Gotinga como estudiante, encontró la atmósfera matemática de este pueblo universitario, llena de un acucioso interés por estas nuevas ideas geométricas extrañas. Pronto se dio cuenta de que allí estaba la clave para entender las propiedades más profundas de las funciones analíticas de una variable compleja. Tal vez nada haya dado mayor ímpetu al desarrollo posterior de la topología que la gran estructura de la teoría de funciones de Riemann, en la que los conceptos topológicos son fundamentales.

Aunque la topología se desarrolló a partir de la segunda mitad del siglo XIX, antes, hubo algunos descubrimientos aislados que encontraron su lugar en el desarrollo sistemático moderno. Con mucho, el más importante de estos descubrimientos es una fórmula que relaciona el número de vértices, de aristas y de caras de un poliedro simple, la cual fue observada desde 1640 por Descartes y redescubierta y utilizada por Euler en 1752. El carácter típico de esta relación como teorema topológico se hizo claro mucho más tarde, después de que Poincaré reconociera la "fórmula de Euler" y sus generalizaciones como uno de los teoremas centrales de la topología. Así, tanto por razones históricas como intrínsecas, se hará una presentación de la fórmula de Euler.

Aunque el estudio de los poliedros tuvo un lugar central en la geometría griega, fueron Descartes y Euler los que descubrieron el siguiente hecho: En un poliedro simple, si V denota el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras, entonces siempre se cumple la igualdad:

$$V - A + C = 2$$

Un poliedro es un sólido que consta de cierto número de caras poligonales. En el caso de los sólidos regulares, todos los polígonos que forman su superficie son congruentes, y todos los ángulos en los vértices son iguales. Un poliedro es simple si no tiene "huecos", de manera que su superficie puede deformarse continuamente en la superficie de una esfera. En la figura 3.10 se muestra el grupo de los 5 poliedros regulares, también conocidos como sólidos platónicos. El teorema de Euler funciona tanto para los poliedros regulares como para los irregulares, siempre y cuando no tengan

“huecos”. La demostración del teorema de Euler, no se presenta aquí.

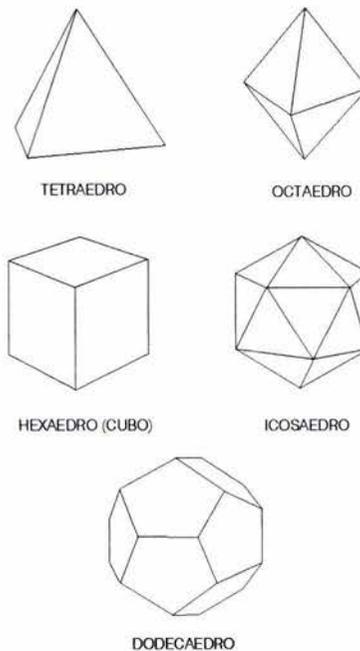


Figura 3.10. Poliedros regulares o sólidos platónicos. Conocidos desde la antigua Grecia, estos cinco poliedros son los únicos cuyas caras son polígonos iguales. Todos sus vértices pueden ubicarse en la superficie de una esfera.

La existencia de los polígonos regulares o sólidos platónicos, permite hacer algunas observaciones importantes acerca del método discreto de transformación conforme, se había mencionado anteriormente que la segunda y última proyección que forma parte del método, hace necesaria la tangencia de un conjunto de “burbujas” cuyo centro está contenido sobre la superficie del hemisferio sur de la esfera. Si se hace la pregunta ¿es posible lograr la tangencia de un conjunto grande de burbujas de igual tamaño dispuestas como se mencionó anteriormente? La existencia de los poliedros regulares nos permite afirmar que no, ya que si pudieran acomodarse las burbujas llenando el hemisferio con tangencias exhaustivas, supondría que el patrón de tangencias sería de forma poligonal, pero la inexistencia general de poliedros regulares, con las excepciones ya citadas, permite confirmar la imposibilidad de tapizar el hemisferio con burbujas del mismo tamaño.

De lo anterior se confirma fácilmente el hecho de que para lograr la tangencia de las burbujas situadas en el hemisferio sur de la esfera, es necesario ajustar el radio de cada burbuja. La preocupación acerca del problema de “llenar” la circunferencia, se puede observar de manera intuitiva en la obra del artista holandés Maurits Cornelius Escher (1898-1972).

En la figura 3.11 se reproduce un diseño de M. C. Escher, donde se observa esa preocupación. La misma figura es un ejemplo de la

representación de “líneas rectas” en un modelo de Poincaré de geometría hiperbólica. Para mayor detalle de la generación e implicaciones del grabado de la figura 3.11, está disponible en internet un artículo de Douglas Dunham [2003].

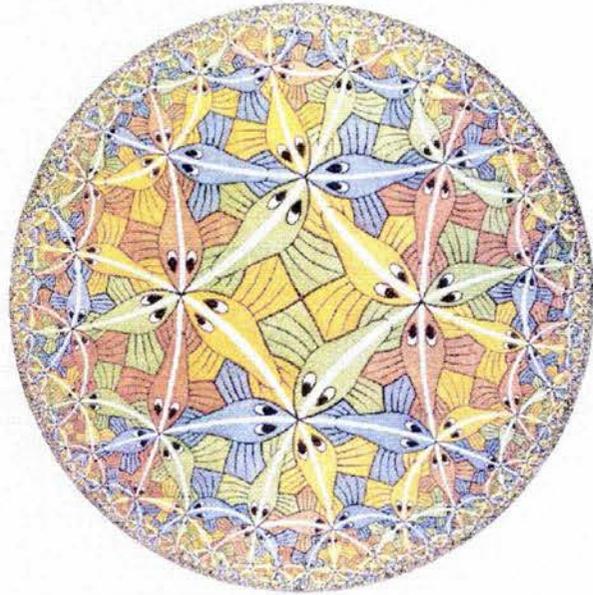


Figura 3.11. Circle limit III, de Mauritus Cornelius Escher

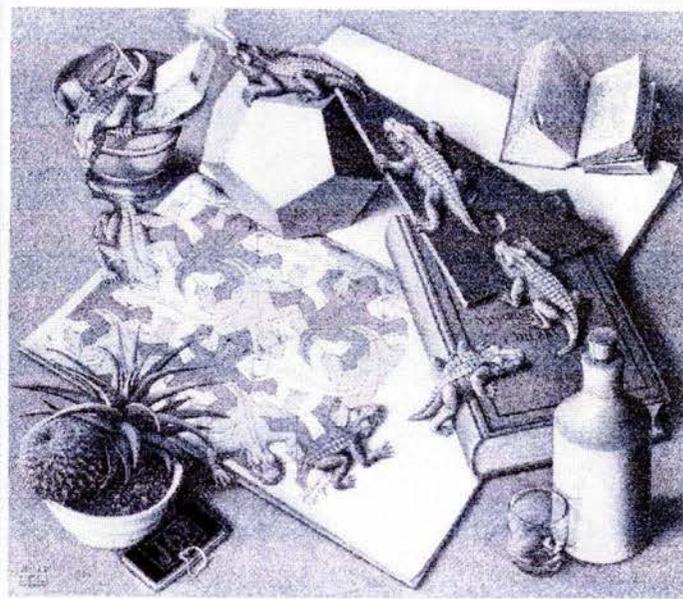


Figura 3.12. “Reptiles”, de Mauritus Cornelius Escher. Se observa en el dibujo sobre el escritorio un patrón hexagonal, que correspondería a las tangencias de un conjunto de circunferencias de radio constante, pero en su paseo por la tercera dimensión, los reptiles evidencian restricciones geométricas mucho más severas que en el plano, el dodecaedro es uno de los únicos 5 poliedros regulares.

La figura 3.12 es sugerente, recuérdese que el problema de la transformación discreta implica la obtención de las tangencias de un conjunto de burbujas situadas en el hemisferio inferior de una esfera. La figura muestra en el papel que está sobre el escritorio, una malla hexagonal de donde surgen los reptiles. La malla puede asociarse rápidamente al patrón de tangencias de un conjunto de circunferencias. Pero en la tercera dimensión, la geometría sufre restricciones mucho más severas que en la segunda. Los poliedros regulares son solo 5, ver figura 3.10.

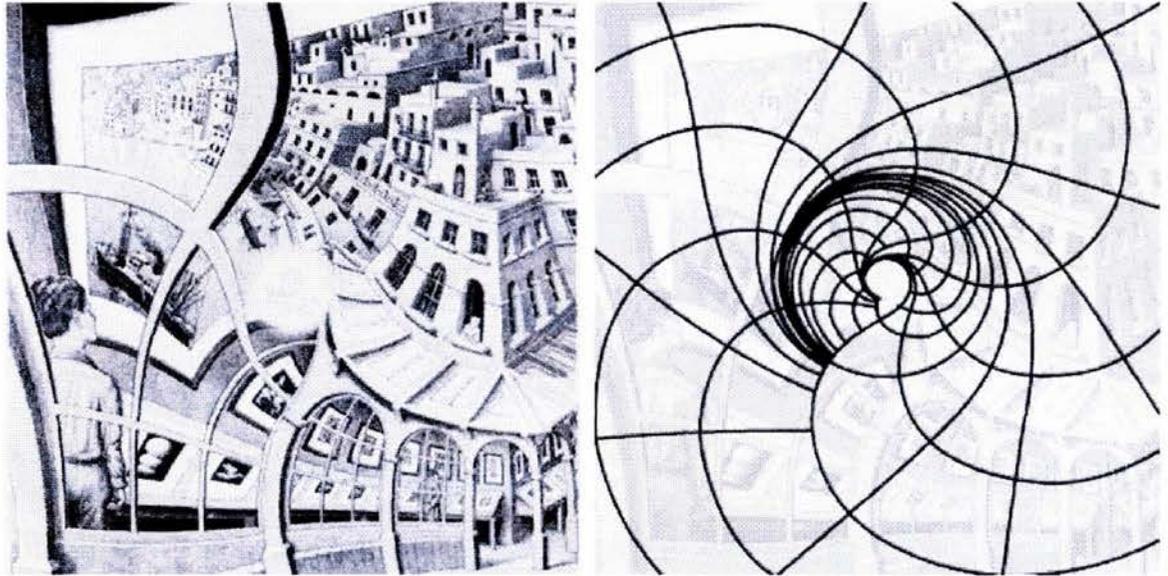


Figura 3.13. "Galería de grabados" de M.C. Escher, donde se observa el empleo de una transformación conforme. Se ve la fiel representación de objetos pequeños lograda después de una transformación conforme, p. ej. los barcos y las personas del muelle.

Krantz, muestra también en su artículo [1999] un análisis del grabado de Escher denominado "Galería de grabados", Krantz hace la comparación de la transformación del espacio representado por Escher, con la transformación lograda por la función $-z^i$. La imagen es sumamente interesante, ya que el visitante de una galería de arte aparece, gracias a una transformación geométrica, como parte del espacio de uno de los grabados representados en la exposición.

Al respecto, y como un ejercicio más ambicioso, Smit y Lenstra [2003] presentan un artículo en el que describen el método que Escher siguió para el trazo de su "Galería de grabados", con imágenes de los bosquejos originales, y con la explicación de un procedimiento detallado mediante el cual se encuentra la transformación geométrica que el autor habría deseado tener a su disposición durante la concepción de la obra.

$$h(w) = w^\alpha = w^{(2\pi + \log 256)/(2\pi)}$$

Una prueba de que al autor se le complicó la generación de una malla conforme, es que en el centro del grabado, Escher decidió dejar un espacio en blanco, que aprovechó para colocar su rúbrica, Smit y Lenstra [2003] se dieron a la tarea de generar mediante un programa de cómputo desarrollado por Joost Batenburg de la Universidad de Leiden, y con la ayuda de dos artistas holandeses Hans Richter y Jacqueline Hofstra, la regeneración de la imagen del puerto que Escher sometió posteriormente a una transformación geométrica, a partir de esa imagen original, fue posible redibujar el grabado de Escher mediante la transformación geométrica dada anteriormente y obtener la imagen de lo que fue difícil a Escher dibujar en el centro del grabado. Esta tentativa de “completar” el grabado, se muestra en la figura 3.14.

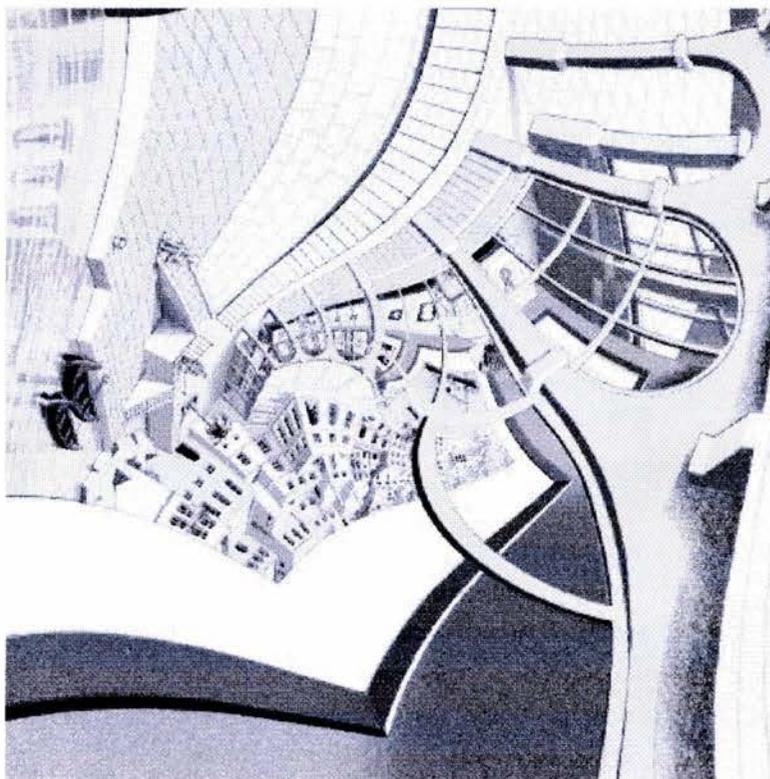


Figura 3.14. Imagen obtenida por Smit y Lenstra, de lo que podría ser la parte central del grabado de Escher “Galería de grabados” donde el autor dejó una zona blanca en el centro debido, muy probablemente, a la dificultad de hacer una malla conforme en esa zona. La figura es un acercamiento de lo que podría ser lo no dibujado en la zona blanca.

3.2.- Proyecciones Cartográficas.

Las proyecciones cartográficas se usan para tener una representación plana de la superficie terrestre de uso práctico para los navegantes, aeronautas, geógrafos, turistas, etc. Las proyecciones cartográficas pueden dividirse en 1) Cilíndricas, 2) Cónicas y 3) Cenitales. Existen también algunas otras proyecciones cartográficas especiales que no pueden clasificarse dentro de las 3 anteriores (Errázuriz K. [1992]).

Las proyecciones cenitales presentan simetría radial a partir de un punto central, que es el foco de la proyección y que se ubica sobre una línea recta que es perpendicular al plano de la proyección en el punto donde hace tangencia la superficie de la esfera. Véase la figura 3.15.

Una proyección cenital puede ser 1) Polar, 2) Ecuatorial o 3) Oblicua, dependiendo de la posición del punto de tangencia del globo con el plano hacia el cual se está proyectando. En la posición polar, el punto central coincide con el polo norte o sur; en la ecuatorial, el centro es cualquier punto situado sobre el ecuador; y en la posición oblicua el centro está en cualquier punto intermedio entre el ecuador y los polos.

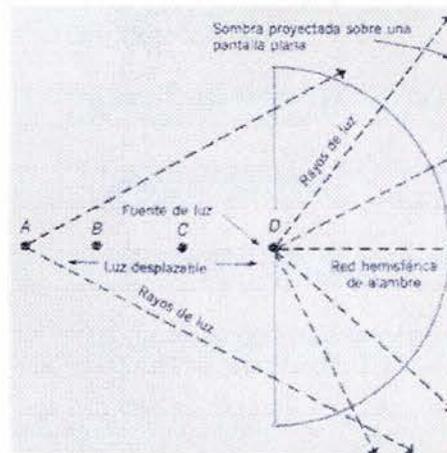


Figura 3.15. Principio de las proyecciones cenitales Strahler [1989].

Cuando la posición del foco, sobre la línea tangente a la proyección, se sitúa sobre una posición característica respecto a la esfera que se está proyectando, se puede clasificar como: 1) Gnomónica, cuando el foco de la proyección se sitúa en el centro de la esfera (posición D en la figura 3.15); 2) Estereográfica, cuando el foco se sitúa en el otro punto de intersección de la línea con la esfera (posición B de la figura 3.15), este tipo de proyección tiene utilidad en el campo de las matemáticas para la representación del plano complejo extendido sobre una esfera, por lo que se explicará

más adelante con más detalle. 3) Ortográfica, cuando el punto de proyección se ubica a una distancia infinita del plano de proyección, por lo que los rayos de luz de la proyección se suponen paralelos entre ellos, y perpendiculares al plano de proyección.

En seguida, se explicarán algunos aspectos de las proyecciones cilíndricas y cónicas. Para el caso de las proyecciones estereográficas, se hará una explicación especial en el último apartado del capítulo, dada su importancia en el campo de las matemáticas y especialmente en el de las variables complejas.

3.2.1 La Proyección Cilíndrica.



Figura 3.16. Principio de las Proyecciones Cilíndricas.

Después de llevar la proyección hacia un cilindro tangente a la esfera sobre el ecuador, la imagen plana se obtiene “desenrollando el cilindro. Las proyecciones cilíndricas tienen la ventaja de que los paralelos se mapean como líneas horizontales, y los meridianos como líneas rectas verticales.

La más conocida de las proyecciones cartográficas, es cilíndrica y se conoce como proyección de Mercator.

Para aprovechar las virtudes de la proyección de Mercator, los cartógrafos idearon la proyección Universal Transversal de Mercator (UTM). Al igual que la proyección tradicional, la UTM utiliza como base un cilindro tangente al globo, pero en lugar de ser el ecuador la circunferencia de tangencia entre la esfera y el cilindro, lo es un círculo meridiano, como se muestra en la figura 3.17.

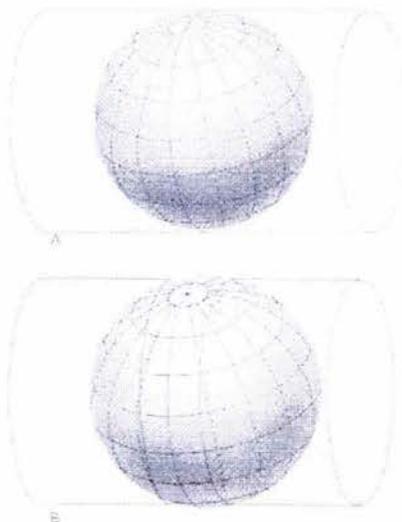


Figura 3.17. Proyección cilíndrica transversal. En la imagen superior, el cilindro es tangente a la esfera sobre la circunferencia formada por un par de meridianos. En la segunda se representa una proyección secante, donde se mejora el efecto de la escala de la proyección de Mercator sobre una banda más ancha, y es la que se utiliza en el sistema UTM.

El sistema UTM, se utiliza en las latitudes comprendidas entre los 80° S y 84° N. A partir de esas latitudes hacia los polos, se utiliza la Proyección Estereográfica Polar.

3.2.2.- La Proyección Cónica.

Las proyecciones cónicas se basan en el principio de transferir la red geográfica del globo a un cono, que después es desarrollado para formar un mapa plano. Las proyecciones cónicas tienen las características siguientes:

- 1.- Los meridianos son líneas rectas que convergen en un punto en los polos Norte y Sur.
- 2.- Los paralelos son arcos de círculos concéntricos, cuyo centro se halla en los polos Norte y Sur.
- 3.- Una proyección cónica completa es un sector circular, nunca un círculo completo.
- 4.- Una proyección cónica no puede representar el globo completo y normalmente no llega a representar ni un hemisferio.

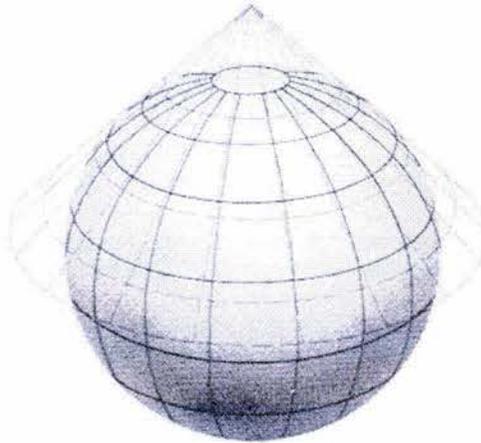


Figura 3.18. Principio de las Proyecciones Cónicas.

3.3.- La Proyección Estereográfica.

La proyección Estereográfica es una proyección conforme. Las líneas de proyección parten de un punto diametralmente opuesto al punto en el plano de proyección que es tangente al globo. La red estereográfica puede representar más de un hemisferio, pero no el globo completo. Los paralelos y meridianos se encuentran más próximos cerca del centro, y van espaciándose hacia el exterior, en la proyección estereográfica los paralelos y meridianos son líneas rectas o arcos de circunferencia. Como esta proyección es realmente conforme, todos los círculos sobre el globo también lo son sobre el mapa. La escala, sin embargo, aumenta del centro hacia la periferia.

Steven G. Krantz [1999] presenta en su artículo la imagen que se reproduce en la figura 3.19.

Además de sus aplicaciones en Cartografía, la Proyección Estereográfica se aplica intensamente en matemáticas para la representación del "plano complejo extendido"; es decir, el conjunto resultante de la unión del campo complejo $\{C\}$ con el conjunto $\{\infty\}$; la proyección estereográfica, permite representar el infinito, como un punto situado en el polo norte de una esfera.



Figura 3.19. Proyección estereográfica ecuatorial (conforme), elaborada por el cartógrafo holandés Joan Blaeu alrededor del año 1664.

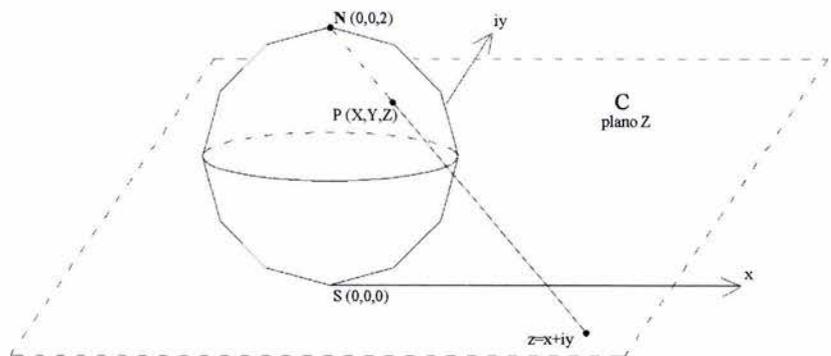


Figura 3.20. Proyección estereográfica de $z = x + iy$ sobre la esfera de radio unitario.

Lo anterior es posible si se considera una esfera de radio unitario, cuyo polo sur es tangente al plano complejo en el origen, y su polo norte es el infinito. Todos los puntos del plano complejo, pueden ser representados, con correspondencia uno a uno, con los puntos de la superficie de la esfera ya descrita. El método de relación de los puntos es el siguiente:

- Únase el punto por representar con el polo norte de la esfera, usando una línea recta.
- Dicha línea, interseca la esfera en un punto P , de coordenadas (X, Y, Z) .

De esta manera, es posible asignar a $z = x + iy$ el punto $P: (X, Y, Z)$ situado en la esfera $X^2 + Y^2 + (Z - 1)^2 = 1$; Si se introduce un parámetro s tal que:

$$X = sx; \quad Y = sy; \quad Z = 2 - 2s$$

De forma que es posible escribir la ecuación de la esfera como:

$$s^2(x^2 + y^2 + 4) - 4s = 0$$

Cuya única solución no nula para s es:

$$s = \frac{4}{|z|^2 + 4}$$

De manera que se cumplen las relaciones siguientes:

$$X = \frac{4x}{|z|^2 + 4} \quad Y = \frac{4y}{|z|^2 + 4} \quad Z = \frac{2|z|^2}{|z|^2 + 4}$$

y para $z = x + iy$:

$$s = \frac{2 - Z}{2}; \quad x = \frac{2X}{2 - Z}; \quad y = \frac{2Y}{2 - Z}$$

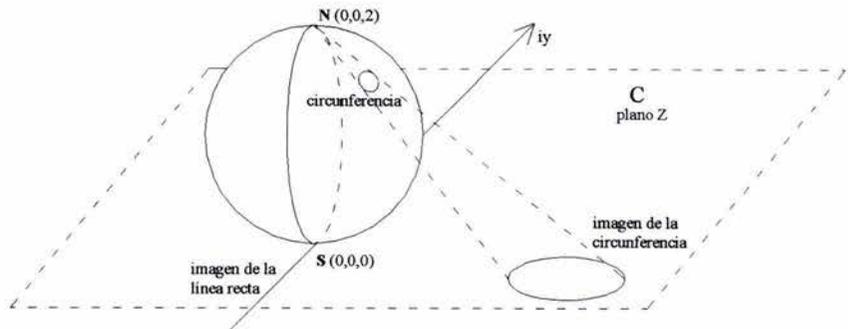


Figura 3.21 Circunferencias y líneas en la proyección estereográfica.

La proyección estereográfica mapea un conjunto de puntos en el plano complejo, a un conjunto de puntos sobre la esfera de radio unitario y viceversa. Por ejemplo, la imagen de una circunferencia en el plano, es una circunferencia en la esfera que no pasa por el polo norte. De manera semejante, un línea recta en el plano, se mapea a una circunferencia de la esfera, que pasa por el polo norte, ver la figura 3.21. Es fácil observar, que la representación geométrica de circunferencias y líneas rectas en la esfera unitaria, no es geoméricamente diferente. La representación de dos líneas no paralelas proyectadas en la esfera, corresponde a un par de circunferencias en la esfera que se intersecan en dos puntos, uno de ellos situado en el infinito Ablowitz [1997].

LA TRANSFORMACIÓN DE SCHWARZ- CHRISTOFFEL



En este capítulo se muestra un camino para hallar la fórmula de Schwarz-Cristoffel. Se describen algunas extensiones para transformaciones hacia el círculo unitario y polígonos con lados circulares y, al final del capítulo, se hace una primera introducción al problema del parámetro.

4.1.- Breviario Histórico.

El primer documento disponible en el cual aparece la fórmula de Schwarz-Christoffel, fue publicado en Zürich, Suiza con el nombre "Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie" en 1867, por el alemán Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), quien en aquella época era profesor de matemáticas en el Instituto Tecnológico de Zürich. En el mencionado artículo, Christoffel hace una aproximación al problema de la conducción de calor mediante la función de Green. En el artículo muestra que, en el caso de un dominio poligonal, es posible obtener la función de Green mediante una transformación conforme, partiendo de un semiplano. En trabajos subsecuentes, Christoffel extendió la idea para regiones exteriores al polígono y fronteras curvas.

Hacia 1869, Herman Amandus Schwarz (1843-1921) descubrió, de manera aparentemente independiente de Christoffel la fórmula en la ciudad de Halle. En sus tres artículos, Schwarz abarcó más terreno que el explorado por Christoffel, abundó el estudio de regiones triangulares y rectangulares, y generalizó la transformación para fronteras curvas y polígonos con lados circulares. Schwarz publicó por vez primera, una gráfica de la transformación de Schwarz-Christoffel, y estableció también su famoso principio de reflexión.

A 130 años de su descubrimiento, la fórmula de Schwarz-Christoffel ha tenido un impacto importante en la teoría del análisis complejo, especialmente en la demostración del teorema de Riemann, que fue expuesto por primera vez por quien lleva su nombre en su célebre trabajo doctoral hacia 1851. Riemann se basó en el principio de Dirichlet para la prueba de su teorema, sin embargo, años después esta argumentación fue considerada incompleta por Wilhem Weierstrass, por lo que fue necesario esperar algunos trabajos de Koebe, Osgood, Cratheódory y Hilbert para su demostración en los primeros años del siglo XX.

4.2.- El principio de reflexión de Schwarz.

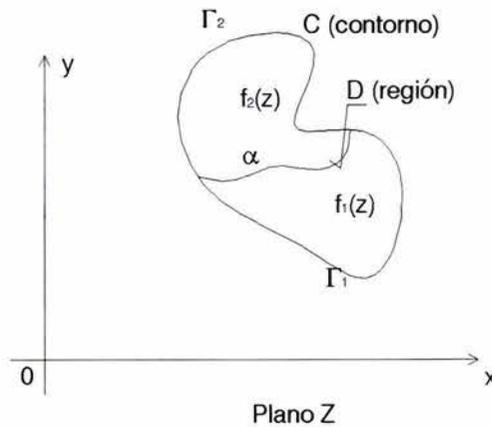


Figura 4.1 Región D, y sus subdivisiones.

La figura 4.1 ilustra un dominio D que está dividido en dos subdominios D_1 y D_2 , para los cuales, respectivamente, están definidas dos funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$; de esta manera puede establecerse que:

Si las funciones analíticas $f_1(z)$ y $f_2(z)$ coinciden en cada punto de la curva α , es decir, para todo $z \in \alpha$ $f_1(z) = f_2(z)$ y ambas funciones son continuas sobre α , entonces $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son continuaciones analíticas cada una de la otra.

Lo anterior se demuestra mediante el teorema integral de Cauchy. La consecuencia más importante del teorema anterior es el principio de reflexión de Schwarz, que dice:

Sean D_z y D_w dos dominios cuya frontera contiene arcos de circunferencia α_z y α_w (que en la región compleja pueden ser líneas rectas sin complicación alguna), respectivamente. Si $w = f(z)$ transforma D_z en D_w y α_w es la imagen de α_z , entonces $f(z)$ se puede continuar analíticamente sobre α_z hacia el dominio D_z^* obtenido de D_z por inversión respecto al círculo C_z , del cual α_z forma parte.

Si $z \in D_z$ y $z^* \in D_z^*$, y si z y z^* son puntos inversos con respecto a C_z , entonces los puntos $f(z)$ y $f(z^*)$ son imágenes reflejadas en el círculo C_w , del cual α_w forma parte.

El principio de reflexión de Schwarz puede representarse de la siguiente forma:

$$f(z^{**}) = f(z)$$

$$f(z^*) = f(z)^*$$

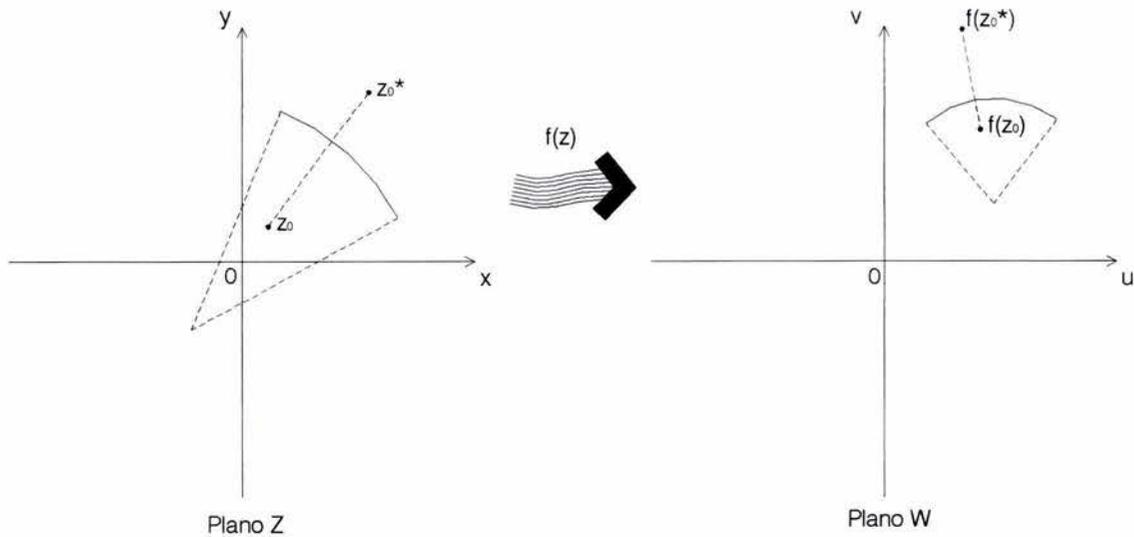


Figura 4.2. Principio de reflexión de Schwarz.

La ventaja más clara del principio de reflexión de Schwarz es que, hace posible la obtención de una transformación de una región D_z , conocidas las características de la región reflejada D_z^* por un arco de circunferencia o segmento de recta.

4.3 La fórmula de Schwarz-Christoffel.

En la sección 2.4 se observó la propiedad que tienen los puntos críticos, tal que en sus inmediaciones, los ángulos se multiplican por un factor n , que es el orden de la primera derivada de la función $f(z)$ de grado entero, que presenta el mencionado punto crítico.

Con base en la propiedad anterior, es posible explorar el comportamiento de las funciones cuya derivada tiene la forma:

$$f'(z) = A(z - z_0)^\alpha \quad (4.1)$$

donde $-1 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 0$. El punto z_0 es un punto de ramificación para $f'(z)$.

Puesto que:

$$\arg f'(z) = \arg A + \alpha \arg(z - z_0) \quad (4.2)$$

y recordando que el argumento de un punto transformado por $f(z)$ está dado por

$$\arg dw = \arg dz + \arg f'(z) \quad (4.3)$$

puede decirse que aquella función cuya derivada tiene la forma de (4.1) puede transformar un punto del eje real, a un segmento de recta con inclinación $\arg A$, si $z \in \mathbf{Re}$ está a la derecha de z_0 y en una recta con inclinación $\arg A + \pi\alpha$ si z queda a la izquierda de z_0 .

Con base en esta observación, es posible construir una función $f(z)$ cuya derivada sea:

$$f'(z) = A(z - x_1)^{\alpha_1} (z - x_2)^{\alpha_2} \dots (z - x_{n-1})^{\alpha_{n-1}} \quad (4.4)$$

donde $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ son números reales del plano Z donde $A \neq 0$ es una constante compleja y $-1 < \alpha_k < 1$ para $k=1, 2, \dots, n$.

Dado:

$$\arg f'(z) = \arg A + \alpha_1 \arg(z - x_1) + \alpha_2 \arg(z - x_2) + \dots + \alpha_n \arg(z - x_{n-1})$$

las imágenes de los intervalos reales de Z $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, \infty)$ son segmentos de recta cuyos ángulos medidos a partir de la horizontal, están dados como sigue:

Intervalo	Angulo
(x_{n-1}, ∞)	$\arg A$
(x_{n-2}, x_{n-1})	$\arg A + \pi\alpha_n$
...	...
(x_1, x_2)	$\arg A + \pi(\alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1})$
$(-\infty, x_1)$	$\arg A + \pi(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1})$

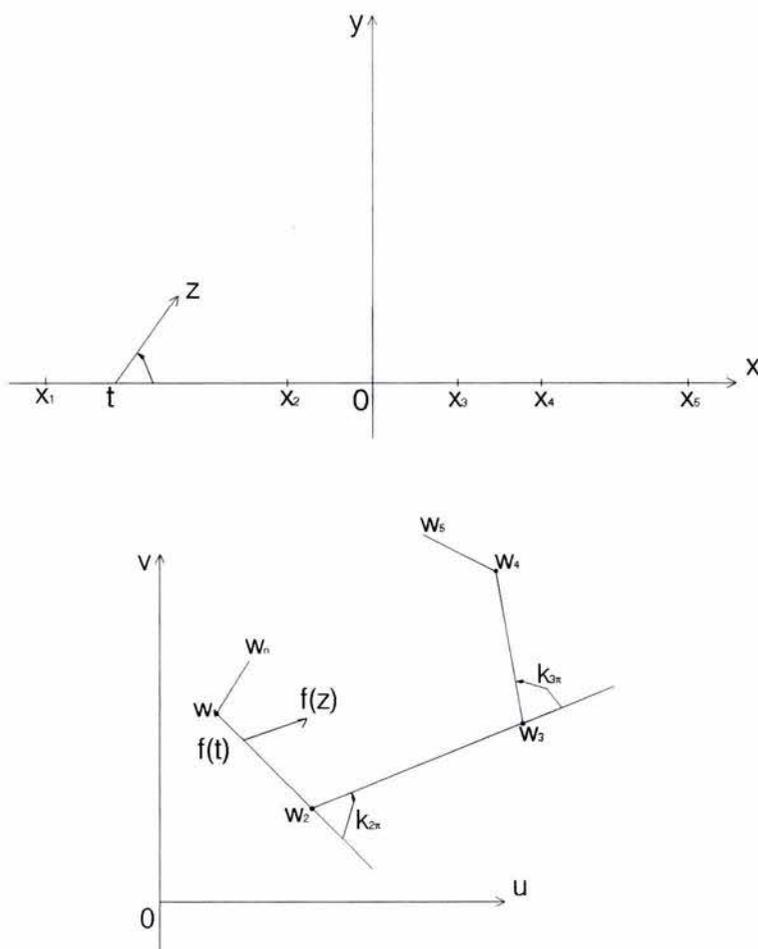


Figura 4.3. Definición de los ángulos para la transformación de Schwarz-Christoffel.

De este modo, la función $w = f(z)$ transforma el eje real en una trayectoria poligonal. $f(z)$ es analítica en el plano complejo, excepto en los cortes de ramificación definidos por los puntos x_1, x_2, \dots, x_n .

Así que, si z es un punto cualquiera del semiplano superior, la transformación conforme $f(z)$ puede definirse como:

$$f(z) = \int^z f'(\zeta) d\zeta \quad (4.5)$$

$$f(z) = A + B \int_0^z (\zeta - x_1)^{\alpha_1} (\zeta - x_2)^{\alpha_2} \dots (\zeta - x_{n-1})^{\alpha_{n-1}} d\zeta \dots (4.6)$$

Donde A y B son constantes complejas, las cuales permiten ajustar la posición y la escala de la transformación.

4.4.- Extensión a polígonos con lados circulares.

Sea P el interior de un polígono Γ que tiene como vértices w_1, w_2, \dots, w_n , y ángulos interiores $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ ordenados en sentido contrario al de las manecillas del reloj. La transformación conforme de un círculo de radio 1 hacia el polígono P está dado por:

$$f(z) = A + B \int_0^z \left(1 - \frac{\zeta}{x_1}\right)^{\alpha_1} \left(1 - \frac{\zeta}{x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(1 - \frac{\zeta}{x_n}\right)^{\alpha_n} d\zeta \quad (4.7)$$

Donde A y B son constantes complejas y se cumple que $w_k = f(z_k)$ para $k=1, 2, \dots, n$

La demostración de la fórmula anterior se obtiene a partir de las propiedades de la transformación bilineal, y el principio de reflexión de Schwarz. Se observa que la expresión anterior contiene un término adicional a la del caso de transformación hacia el semiplano superior.

La solución analítica de esta fórmula es extraordinariamente complicada, y para su solución no numérica en triángulos, se hace uso de la función hipergeométrica y la función S de Schwarz, las cuales están fuera del alcance de este trabajo, y que pueden estudiarse, la hipergeométrica, en el libro de Glen D. Anderson [1997] y la función S de Schwarz en los textos de Ablowitz [1997] y en el de Nehari [1952].

Como se ha dicho ya, la obtención analítica de la transformación dada por (4.7) es difícil, y esto puede corroborarse en el libro de Ablowitz [1997], donde a partir de la función S de Schwarz, se obtiene la transformación de manera explícita tan solo para triángulos con 2 lados rectos y uno circular. El análisis de la expresión obtenida lleva a una figura como la mostrada a continuación.

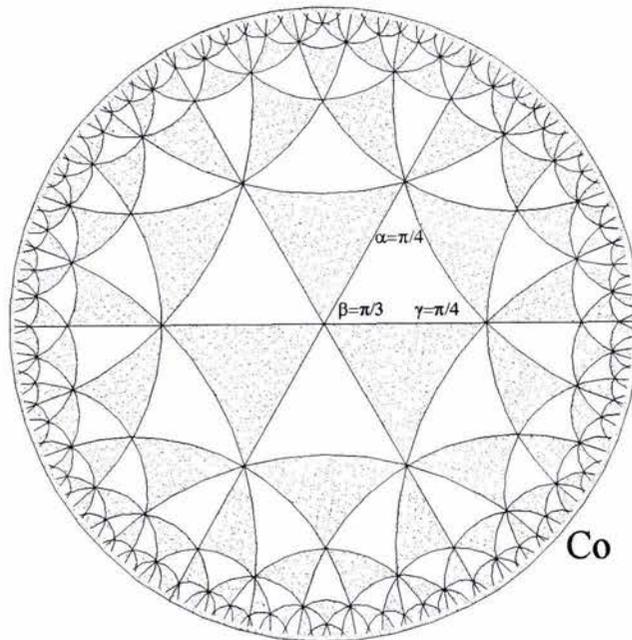


Figura 4.4. Obtención “exhaustiva” de las regiones reflejadas, a partir de un triángulo con dos lados rectos y uno circular, con ángulos interiores $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$ y $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Donde el triángulo fundamental es obtenido de la transformación del semiplano superior de W mediante la función S , determinada por los parámetros $w = S(z; \alpha, \beta, \gamma)$, donde α, β y γ están asociados a los ángulos interiores del triángulo y cumplen la condición:

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\pi} < 1$$

La aplicación sucesiva del principio de reflexión, partiendo del lado curvo del triángulo fundamental, permite obtener las transformaciones correspondientes a los triángulos reflejados hacia los semiplanos inferior y superior de W alternativamente. Los triángulos sombreados en la figura 3.4 se transforman al semiplano superior de W , mientras que los blancos, al inferior. La reflexión infinita de los triángulos permitiría llenar (tapizar) la circunferencia C_0 .

Se observa que la figura fue construida para valores de $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ y $\gamma = \frac{\pi}{4}$ y de la misma forma podría construirse la circunferencia C_0 para valores iniciales diferentes de los ángulos interiores del triángulo fundamental. La aplicación del principio de

reflexión un número par de veces respecto a los lados circulares, es equivalente a una transformación bilineal.

Los textos de Nehari [1952] y Ablowitz [1997], comparten la presentación de la transformación de una región en forma de media luna. Tal vez lo más curioso del ejemplo es que se trata de un polígono con tan solo 2 vértices:

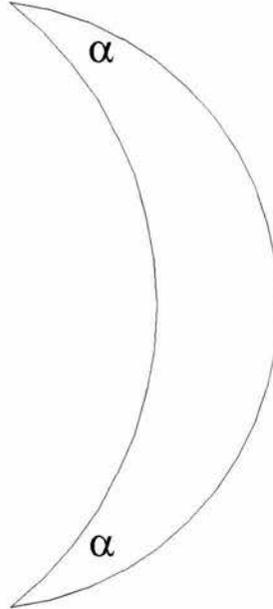


Figura 4.5. Región poligonal con dos lados circulares y sólo dos vértices.

$$f(z) = \frac{A(z-a)^\alpha + B(z-b)^\alpha}{C(z-a)^\alpha + D(z-b)^\alpha} \quad (4.8)$$

Donde a y b son constantes reales, y corresponden a las posiciones de los vértices en Z ; y A , B , C y D son constantes complejas, tales que $AD - BC \neq 0$.

4.4 Ejemplos de Aplicación.

Como se mencionó en la sección anterior, la obtención de formas explícitas de la transformación de Schwarz-Christoffel para polígonos con más de tres vértices, es difícil, ya que la transformación cuenta con solo 3 grados de libertad, los cuales permiten ubicar 3 puntos de la imagen del polígono sobre el eje real de manera arbitraria, respetando el orden de los puntos. Para polígonos con más de 3 vértices, la transformación tiene un nuevo problema, que es, la ubicación de los puntos imagen de los vértices del polígono sobre el eje real.

Este último problema tiene un tratamiento numérico que no se desarrollará de manera detallada en este trabajo, pero se recomiendan los textos de Henrici [1976] y T. A. Driscoll [2002]. A continuación se hace uso de la fórmula de Schwarz-Christoffel para analizar problemas sencillos cuya solución es explícita.

Una línea recta es un polígono con $n = 1$ para $w_1 = \infty$
Y $\alpha_1 = -1$.

$$f(z) = A + B \int_0^z (\xi - x_1)^{-2} d\xi = A + \frac{B}{z - x_1} \quad (4.9)$$

La cual equivale a una transformación del tipo bilineal, con dos grados de libertad.

Dado que:

$$\sum_{k=1}^n (1 - \alpha_k) = 2 \quad (4.10)$$

Entonces, si $n = 2$; $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ o $\alpha_1 = -\alpha_2 \neq 0$. El primer caso ocurre cuando los 2 vértices están en el infinito.

$$f(z) = A + B \int_0^z (\xi - z_1)^{-1} d\xi = A + B \log(z - z_1) \quad (4.11)$$

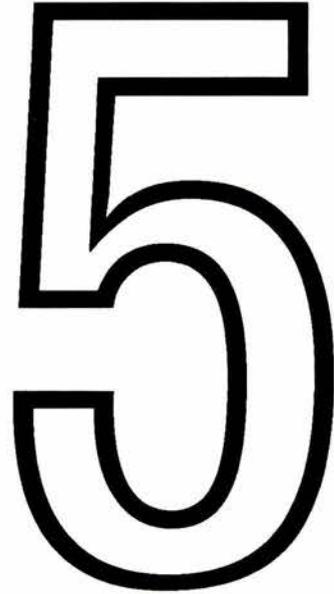
En el caso de que $\alpha_1 = -\alpha_2 \neq 0$, un vértice es finito, y el otro está en el infinito.

$$f(z) = A + B \int_0^z (\xi - z_1)^{\alpha_1 - 1} d\xi = A + B(z - z_1)^{\alpha_1} \quad (4.12)$$

Si $w_3 = \infty$, $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, entonces:

$$f(z) = A + B \int_0^z (\xi^2 - 1)^{-1/2} d\xi = A + B \cosh^{-1}(z) \quad (4.13)$$

APLICACIONES



Se hace una breve descripción del funcionamiento de las herramientas numéricas modernas, que permiten obtener los parámetros de integración (prevértices) para la transformación de Schwarz-Christoffel aplicada a polígonos con más de 3 vértices; se presentan algunos ejemplos simples y, posteriormente, problemas más generales donde se hace uso de los métodos numéricos.

5.1.- Métodos Numéricos.

Uno de los textos más importantes que trata el problema de la transformación de Schwarz-Cristoffel, es el de Henrici [1976], donde se describen varios métodos numéricos para hallar transformaciones conformes partiendo de una circunferencia de radio unitario hacia un polígono. Todos los métodos presentados por Henrici requieren de la solución de un sistema no-lineal de ecuaciones, para encontrar la posición de los prevértices necesarios en la definición de la fórmula, lo cual requiere del uso de métodos iterativos e implica en ciertos casos problemas relacionados con la precisión de los resultados.

Por ejemplo, la transformación de polígonos cuya relación largo/ancho es muy grande, implica la aparición de un problema de hacinamiento de los puntos cercanos en la región transformada, por lo que se obtienen resultados poco satisfactorios. Driscoll y Trefethen [2002] presentan una solución innovadora para el problema del hacinamiento de los puntos en las imágenes de los lados cortos, dicha solución se basa en la aplicación de la relación transversal, que fue definida en la sección 2.5.

Para resolver el problema fundamental de la transformación, que es la obtención de la posición de los vértices en la región transformada, han sido desarrollados varios métodos numéricos, como ya se había mencionado (ver Henrici [1976]). La solución, que presentan Driscoll y Trefethen [2002], se basa en la obtención de las relaciones de longitud de los lados del polígono, comparándolas con las distancias entre los prevértices situados en una circunferencia de radio unitario, estas relaciones de longitudes, generan un sistema no lineal de ecuaciones que permite hallar la posición de las imágenes de los vértices. El tamaño y posición del polígono en el plano Z se obtienen mediante las constantes A y B de la fórmula de Schwarz-Christoffel.

Para obtener las posiciones de los vértices en la región transformada, las relaciones de las longitudes de los lados llevan a un sistema de ecuaciones de naturaleza altamente no-lineal, que se resuelve satisfactoriamente iterativamente mediante un método semejante al de Newton-Raphson. La complejidad de las ecuaciones y el método usado inducen errores en función de n^3 [$O(n^3)$], lo que en la práctica permite manejar con precisión adecuada, sólo una centena de vértices.

Una vez que los parámetros de la transformación de Schwarz-Christoffel son conocidos, la evaluación de $w = f(z)$ es relativamente simple, consiste en la evaluación numérica de la integral.

$$f(z) = A + B \int_0^z (\zeta - x_1)^{\alpha_1} (\zeta - x_2)^{\alpha_2} \dots (\zeta - x_{n-1})^{\alpha_{n-1}} \quad (5.1)$$

La evaluación de la transformación inversa $z = F(w)$, es más complicada, ya que no existe una fórmula explícita para z .

Driscoll y Trefethen [2002] proponen dos técnicas de inversión, a saber:

1.- Método iterativo de Newton para resolver $f(z) - w = 0$.

2.- Solución numérica de la ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{con condiciones iniciales:} \quad z(w_0) = z_0$$

El primer método propuesto es atractivo, ya que $f'(z)$ es conocida, con lo que la convergencia podría ser muy rápida, sin embargo, requeriría partirse de un conjunto de valores que estuvieran cercanos a la solución final, ya que la fuerte no-linealidad de la ecuación, la hace propensa a la divergencia.

La solución de la ecuación diferencial mediante un método numérico convencional es necesaria, a pesar de que implica mayor tiempo de cálculo.

Trefethen recomienda la solución numérica de la ecuación diferencial, con una tolerancia moderada, lo que permite hallar valores cercanos a $F(z)$, los cuales permiten emplear con confianza el método iterativo de Newton para encontrar el valor requerido, con buena precisión.

La elección de los valores iniciales $z(w_0) = z_0$, implica un problema práctico. Los únicos puntos donde se conoce el valor de la transformación inversa, son los vértices, pero en ellos, la transformación es singular, así que los valores iniciales para resolver la ecuación diferencial, pueden elegirse de puntos pertenecientes a las líneas del polígono, que tienen correspondencia con un punto de la circunferencia.

5.2.- Ejemplos Ilustrativos.

Mediante la aplicación de la transformación de Schwarz-Christoffel, el problema más sencillo que podría resolverse, más allá del simple escalamiento y traslación de una región, es el de un polígono definido por 2 vértices, para este caso la transformación queda definida de la manera siguiente:

$$f(z) = A + B \int^z (z - z_1)^{\alpha_1 - 1} dz$$
$$f(z) = A + B(z - z_1)^{\alpha_1} \quad (5.3)$$

para $\alpha_1 = -\alpha_2 \neq 0$, con un vértice finito y otro en ∞

donde α_1 se mide interior al polígono, ver figura 5.1.

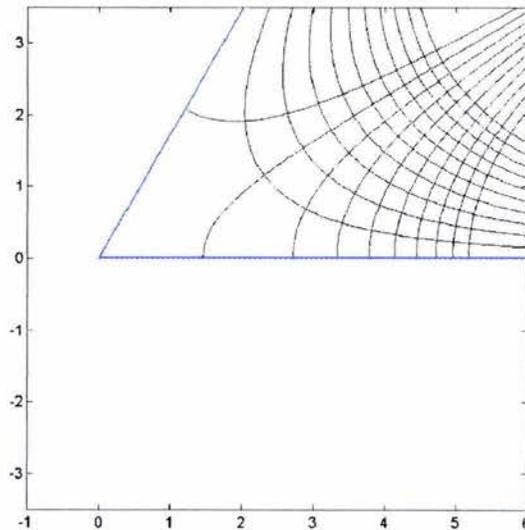


Figura 5.1. Ejemplo de solución en un polígono de 2 lados, uno en cero y el otro en el infinito.

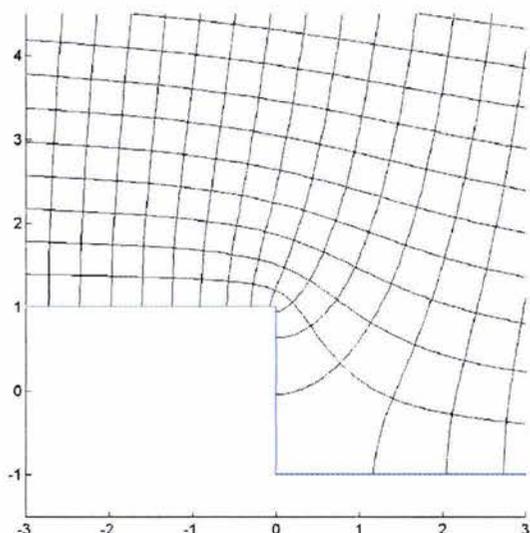


Figura 5.2. Solución en una región poligonal de 3 vértices, 2 finitos y uno en infinito.

En la figura 5.2 se muestra la solución para un polígono de tres vértices, en $i, -i$ e ∞ , en este caso, la solución general para 3 vértices tiene la forma:

$$f(z) = A + B[(z^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1}(z)] \quad (5.4)$$

Para el caso de polígonos de 4 lados, la ejecución de la integral se vuelve bastante más complicada que en el caso anterior, sin embargo, existen soluciones exactas que implican el uso de las funciones elípticas de Jacobi. En este trabajo no se especifican soluciones a este tipo de problemas, ya que, la simple evaluación de dichas funciones es un problema muy específico. Para mayor información acerca de las funciones elípticas, puede recurrirse al texto de Nehari [1952], donde se explican detenidamente sus propiedades de mapeo, y el libro de Anderson [1997], que además de tratar ampliamente el tema de las funciones elípticas y su evaluación numérica, trata el tema de las funciones hipergeométricas, que pueden ser de utilidad, para evaluar numéricamente la función S de Schwarz, y otras funciones que definen mapeos conformes y cuasi-conformes.

La figura 5.3 muestra los resultados de una transformación llevada a un polígono de 4 lados. Dicha transformación fue obtenida con la herramienta SC de matlab reprogramada por Driscoll [2002], y es una versión actualizada del SCPACK escrito en FORTRAN 77 por Lloyd N. Trefethen, y que está disponible en internet en la dirección <http://www.netlib.org/conformal>. Del mismo modo puede encontrarse la caja de herramientas SC en <http://www.math.udel.edu/driscoll/SC>.

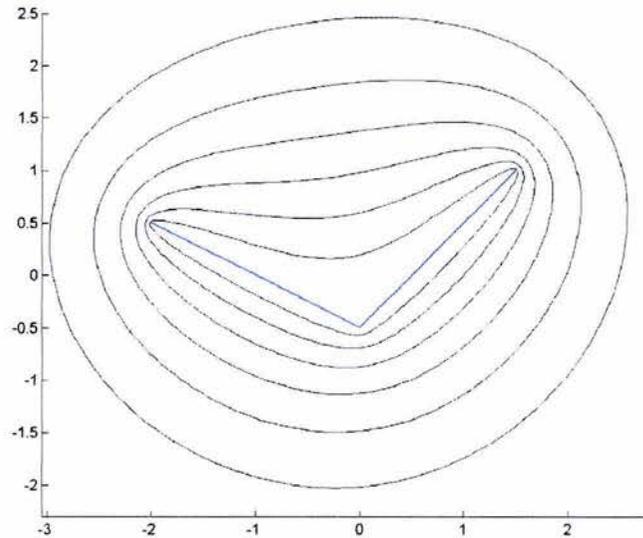


Figura 5.3. Solución en el exterior de un polígono de 4 lados, obtenida mediante la herramienta numérica SC de matlab.

5.3.- Aplicaciones a la Mecánica de Fluidos.

Para introducir las aplicaciones a la mecánica de fluidos, se partirá de un ejemplo que hace un uso del método de las transformaciones conformes, que es el flujo alrededor de un cilindro sumergido en un flujo uniforme. Para iniciar, se parte de la definición de una cuadrícula en el semiplano superior, definida en el plano W , como se muestra en la figura 5.4. La transformación necesaria tiene la forma:

$$z = w + ai\sqrt{1-w^2} \quad (5.5)$$

que es la transformación inversa de:

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (5.6)$$

donde:

a es el radio de la circunferencia.

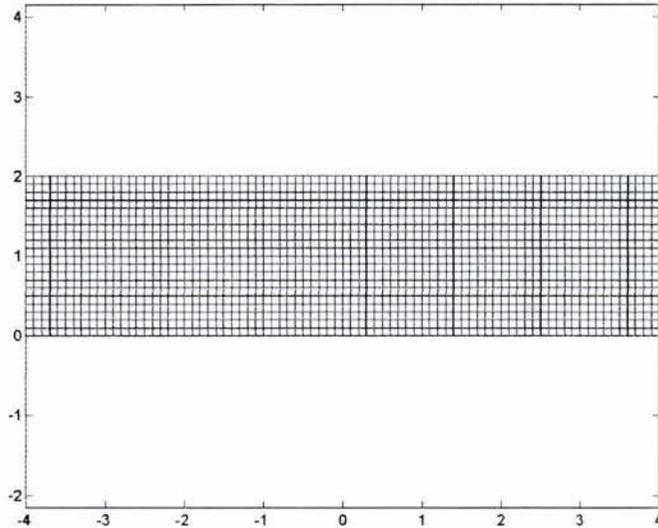


Figura 5.4. Cuadrícula que representa un flujo uniforme, con líneas de corriente horizontales y equipotenciales verticales.

La malla mostrada en la figura 5.4, puede representar un flujo uniforme, con líneas de corriente horizontales y equipotenciales verticales, cuyo potencial en forma compleja puede escribirse como:

$$\Omega(w) = kw$$

donde la constante k contiene la información de la velocidad de flujo en infinito, v_0 y el ángulo de inclinación de las líneas de corriente respecto al eje real, θ_0 .

$$\Omega(w) = v_0 e^{-i\theta_0} w$$

Puesto que en el flujo que se está representando en el plano W , el ángulo de inclinación de las líneas de corriente es cero, puede escribirse el potencial simplemente como:

$$\Omega(w) = v_0 w$$

Debe observarse que esta forma tan simple del potencial en el plano W , es el que da sentido al método de las transformaciones conformes, ya que, cuando se conocen las transformaciones $z = Z(w)$ y principalmente su inversa $w = W(z)$, es posible evaluar el potencial en el "plano físico" Z .

Bajo la transformación $z = Z(w) = w + ai\sqrt{1-w^2}$, la región rectangular graficada en la figura 4.4 se transforma en la región representada en la figura 4.5.

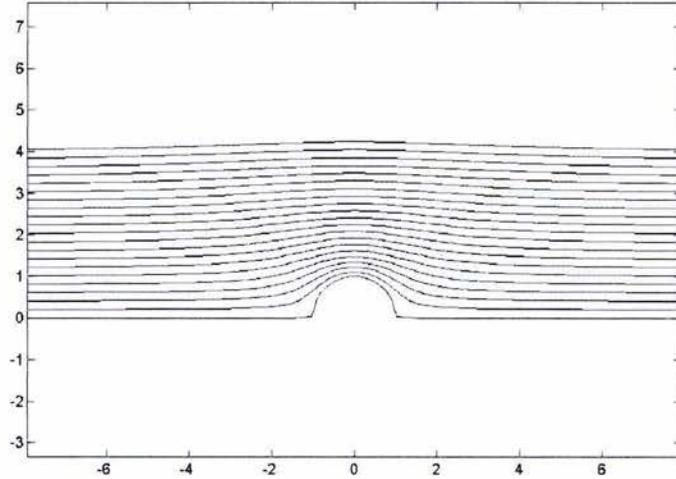


Figura 5.5. Transformación del obstáculo a una semicircunferencia de radio $a = 1$.

Para complementar la visualización de la región alrededor del cilindro, es posible transportar, o reflejar la imagen del semiplano superior, hacia el semiplano inferior, tal como se muestra en la figura 5.6.

Sin embargo, la parte más importante del problema de flujo que se está describiendo, es la obtención de la función potencial en el "plano físico" Z ; Para ello, conocido $\Omega(w)$, se hace necesaria la obtención de $\Omega(z)$, que es posible a partir de la transformación $w = W(z)$, para escribir $\Omega[W(z)]$.

Para el caso del flujo alrededor del cilindro sumergido,

$$w = W(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (5.7)$$

Así que el potencial complejo en el plano Z , $\Omega[W(z)]$, se obtiene de las relaciones siguientes:

$$\Omega(w) = v_0 w ; \quad \Omega[W(z)] = \frac{v_0}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (5.8)$$

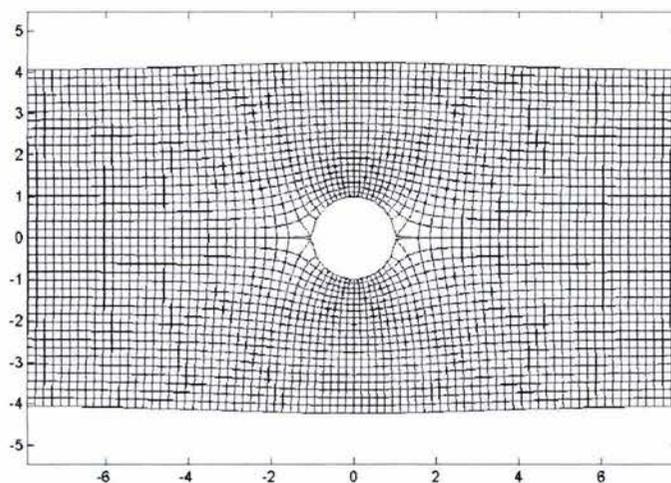


Figura 5.6. Región transformada por $z = Z(w) = w + ai\sqrt{1 - w^2}$ y reflejada hacia el semiplano inferior, para completar la región de flujo alrededor de un cilindro.

La información que proporciona el conocimiento del potencial complejo en el plano Z , puede observarse en las ecuaciones siguientes:

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (5.9)$$

$$\Omega'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y} = v_x - iv_y \quad (5.10)$$

El conjugado $\overline{\Omega'(z)}$, es análogo al campo de velocidades en el plano Z :

$$\overline{\Omega'(z)} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\phi}{\partial y} = v_x + iv_y \quad (5.11)$$

En general, el potencial complejo tiene la forma:

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (5.12)$$

Su derivada es conocida como velocidad compleja y se escribe:

$$\Omega'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y} = v_x - iv_y \quad (5.13)$$

El conjugado complejo:

$$\overline{\Omega'(z)} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_x + i v_y \quad (5.14)$$

Es análogo al campo de velocidades en dos dimensiones.

Para el caso del flujo alrededor del cilindro sumergido, el potencial complejo y su derivada en Z , están dados por:

$$\Omega(z) = v_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

$$\Omega'(z) = v_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) = v_0 \left(1 - \frac{a^2 e^{-2i\theta}}{r^2} \right) \quad (5.15)$$

Para graficar las velocidades, se hace uso de la computadora, donde una vez evaluada la función anterior, puede obtenerse el valor absoluto de la velocidad, para lo cual no se hace necesaria la obtención del conjugado, ya que al obtener el valor absoluto, el signo de la velocidad en la dirección y puede ser ignorado.

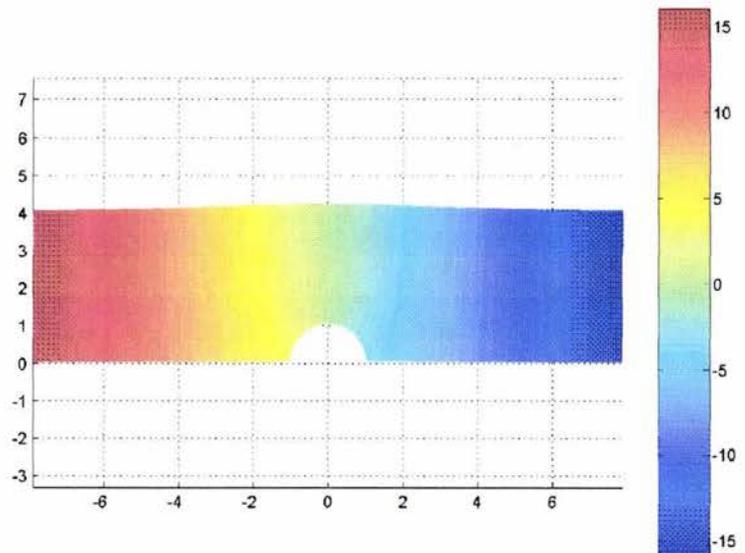


Figura 5.7. Potencial $\Omega(z)$ para el flujo alrededor de un cilindro.

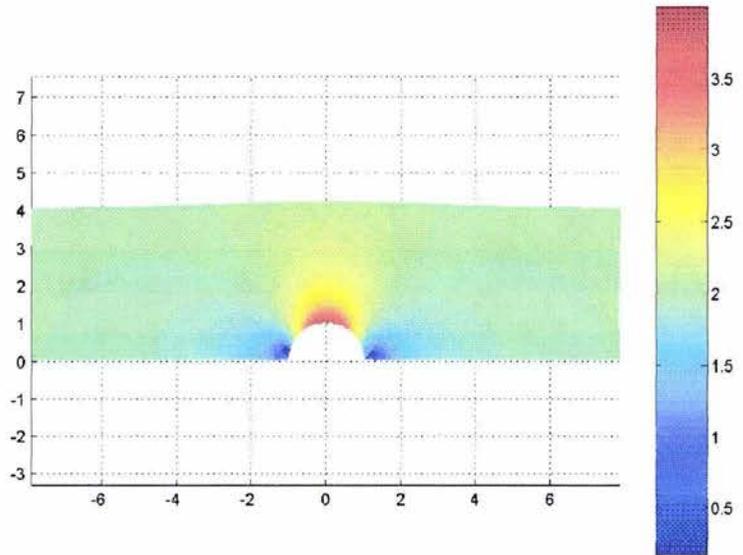


Figura 5.8. Valor absoluto de la velocidad en el plano Z .

Otro ejemplo de transformación que puede aplicarse a la malla rectangular de la figura 5.4, es $z = is\sqrt{1-w^2}$, en cuya imagen, se genera el flujo alrededor de una "rendija" u obstáculo de altura s y espesor nulo, ubicado en el origen. Al igual que en el caso de la transformación que genera el flujo alrededor de la semicircunferencia, esta transformación genera la imagen en el semiplano superior, así que para el caso en que se pretenda generar el flujo alrededor de una placa, la parte inferior puede obtenerse reflejando la imagen del semiplano superior.

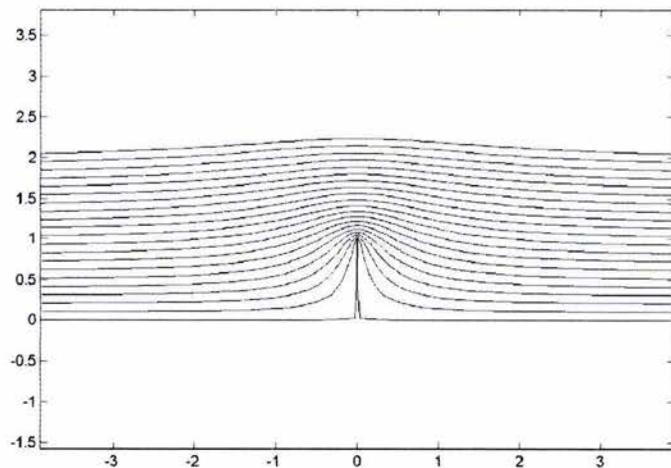


Figura 5.9. Flujo alrededor de un obstáculo de altura $s = 1$ y espesor nulo.

Para un flujo rectilíneo, el potencial complejo tiene la forma siguiente:

$$\Omega(z) = kz$$

$$\Omega(z) = v_0 e^{-i\theta_0} z$$

$$\Omega(z) = v_0 (\cos\theta_0 - i\sin\theta_0)(x + iy)$$

donde v_0 y θ_0 son constantes reales positivas; si $\theta_0 = 0$

$$\Omega(z) = v_0(1 - 0)(x + iy)$$

$$\Omega(z) = v_0(x + iy)$$

De este modo, se genera un nuevo ejemplo, en el que se parte de un dominio contenido en el semiplano superior de Z , en donde se define una banda de altura unitaria. Se pretende con esto, hallar una solución al flujo potencial alrededor de medio hexágono, que se grafica en el plano imagen. La transformación de la banda de altura unitaria hacia la región en que se supone que existe un hexágono, se hace mediante la herramienta numérica SC de matlab. En las figuras siguientes se muestra la región definida en el plano Z y la región transformada.

En el problema del flujo alrededor del cilindro, el método de la transformación conforme permite hallar una fórmula explícita para calcular la velocidad en cualquier punto de la región plana en donde se está analizando el flujo.

Para el caso en que el flujo esté definido por una región poligonal con más de 3 vértices, es posible manejar la herramienta numérica denominada SC de matlab, la tarea principal de esta herramienta, es la de hallar el valor de los "prevértices" en la imagen de la transformación.

Sin embargo, permite calcular también, con buena precisión el valor de la transformación inversa, con lo que es posible determinar los valores del potencial en el "plano físico". Lo anterior es importante, pero hace necesario hallar numéricamente los valores de las derivadas del potencial, lo cual implica una pérdida significativa de precisión en los resultados.

Para ilustrar la aplicación de la herramienta SC de matlab, se presenta un ejemplo en el que se analiza el flujo alrededor de una región semihexagonal, que se ilustra en la figura 5.10. Al igual que en el ejemplo de flujo alrededor de una semicircunferencia, se parte de una región rectangular, solo que en este caso, los parámetros y la integral de Schwarz-Cristoffel se obtienen numéricamente.

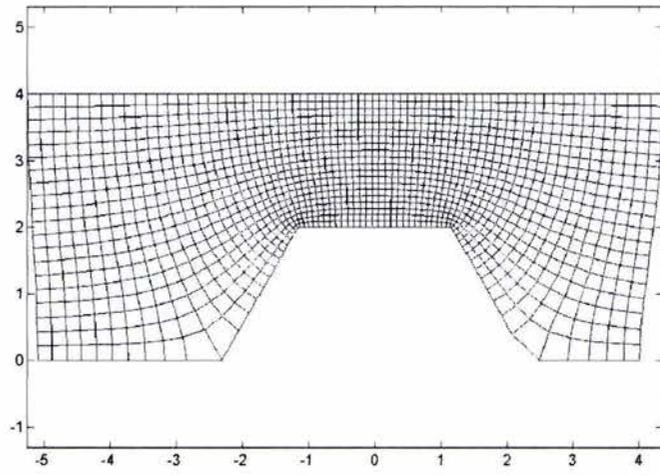


Figura 5.10. región semihexagonal obtenida a partir de una rectangular, aplicando la transformación de Schwarz-Cristoffel.

En la ultima figura se obtienen las líneas de corriente y las equipotenciales del flujo. Para obtener la velocidad en diferentes puntos del flujo, es necesario calcularlo numéricamente.

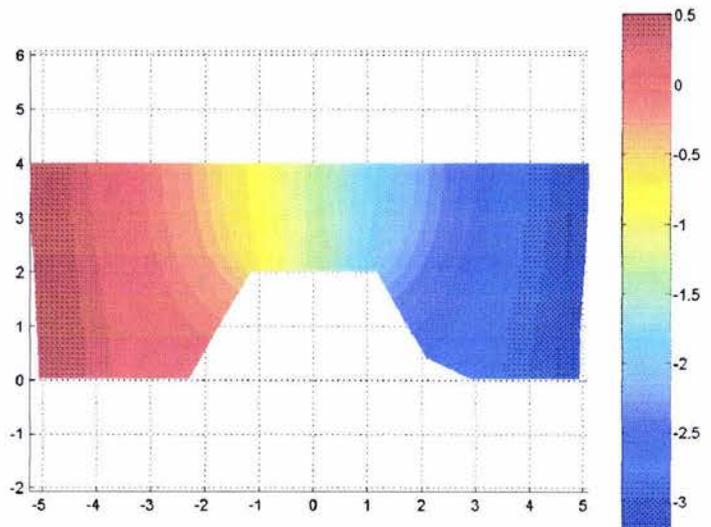


Figura 5.11 Representación de la función potencial $\phi(x, y)$ obtenida a partir de la transformación $\Omega[W(z)]$

Al obtener numéricamente las derivadas del potencial, se obtienen las velocidades del flujo en las direcciones x y y , a partir de las cuales es posible obtener la magnitud del vector velocidad en la región del flujo. En la figura 5.12, se muestra una gráfica de la velocidad del flujo en el dominio (x, y) analizado. Se observan dos puntos de inflexión donde la velocidad tiende a cero, es decir se presentan 2 puntos de estancamiento. También hay dos puntos de inflexión en los que la velocidad tiende a infinito, razón por la cual se observan dos puntos con valores de velocidad excesivamente altos.

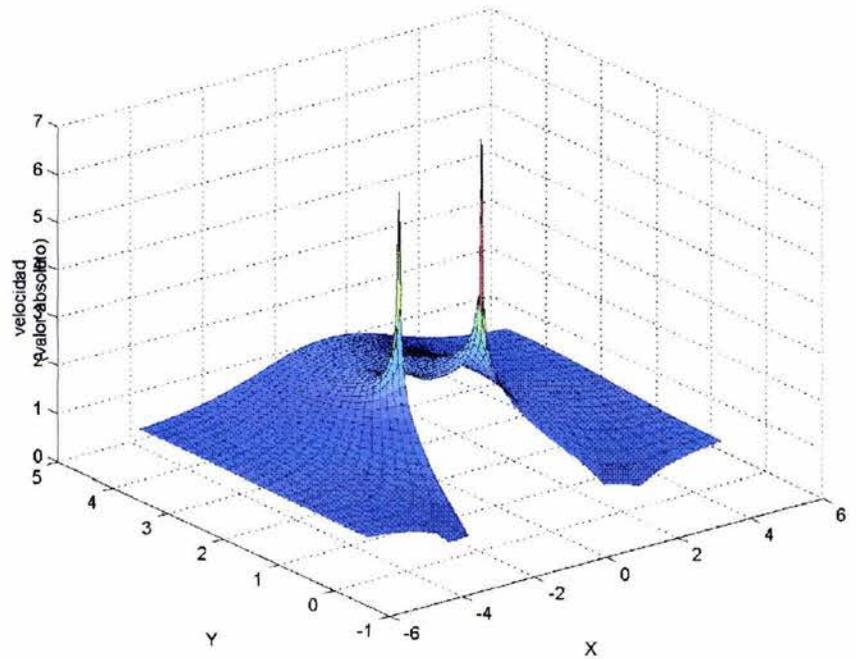


Figura 5.12. Graficación de la magnitud de la velocidad sobre la región de flujo del problema.

Un problema interesante, de aplicación frecuente en la ingeniería geotécnica, es el flujo de agua debajo de una tablaestaca. Para el análisis de este tipo de problemas, Levi [1965] presenta un conjunto de fórmulas de gran utilidad en este campo, sin embargo, hay un modelo de una tablaestaca compuesta, desarrollado por Khosla el cual parte de las consideraciones siguientes:

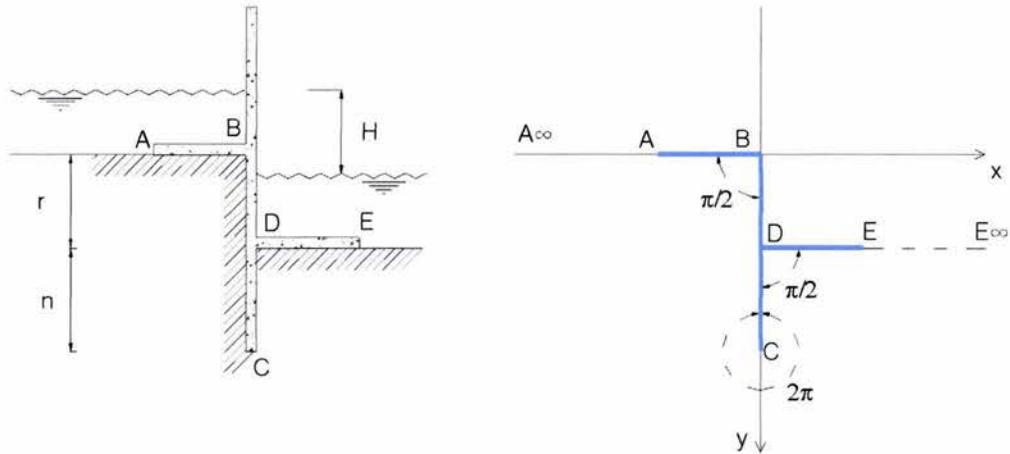


Figura 5.13. Modelo de Khosla para el flujo bajo una tablaestaca compuesta en un medio permeable.

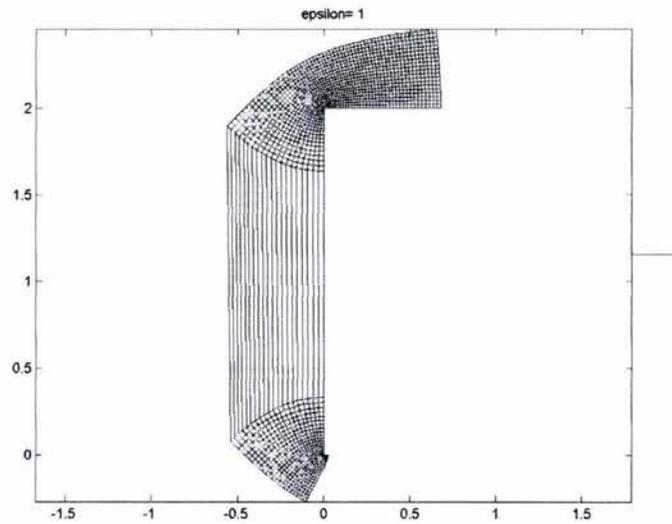
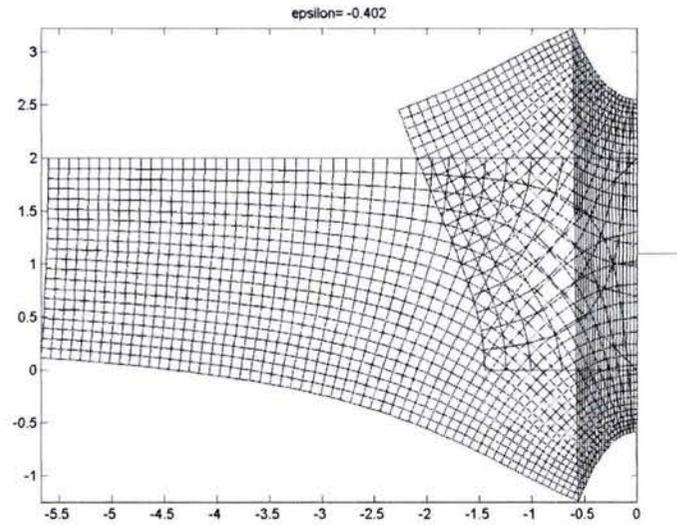
El procedimiento para ver la deducción del método de Khosla, puede seguirse en Levi [1965]. El modelo matemático considera un polígono con vértices B , C , D y un vértice en infinito, donde coinciden los puntos A_∞ y E_∞ , ese vértice en infinito es despreciado por Khosla y así, con tres factores en la fórmula de Schwarz-Christoffel, correspondientes a los vértices en B , C y D , cuyos ángulos considerados pueden verse en la figura 5.13, se obtiene la transformación siguiente, después de la integración:

$$w = ir + \frac{r}{\pi} \left(\frac{\sqrt{z^2 - 1}}{\varepsilon} \right) - \operatorname{arccosh}(z)$$

El valor de ε puede obtenerse en función de la relación n/r mediante la expresión:

$$\frac{n}{r} = \frac{-i}{\pi} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon} - \operatorname{arccosh}(\varepsilon) \right)$$

Donde se observa que el valor de ε no se obtiene de manera explícita, así que es necesario encontrarlo de manera iterativa. En el ejemplo que se analizó para este trabajo, se consideró $r = 2$ y $n = 2$, con lo que el valor de ε obtenido es de -0.402 . Sin embargo, al aplicar la fórmula de Khosla a una malla rectangular, las regiones transformadas que se obtuvieron, para una variedad de valores de ε , que se presentan en la figura 5.14.



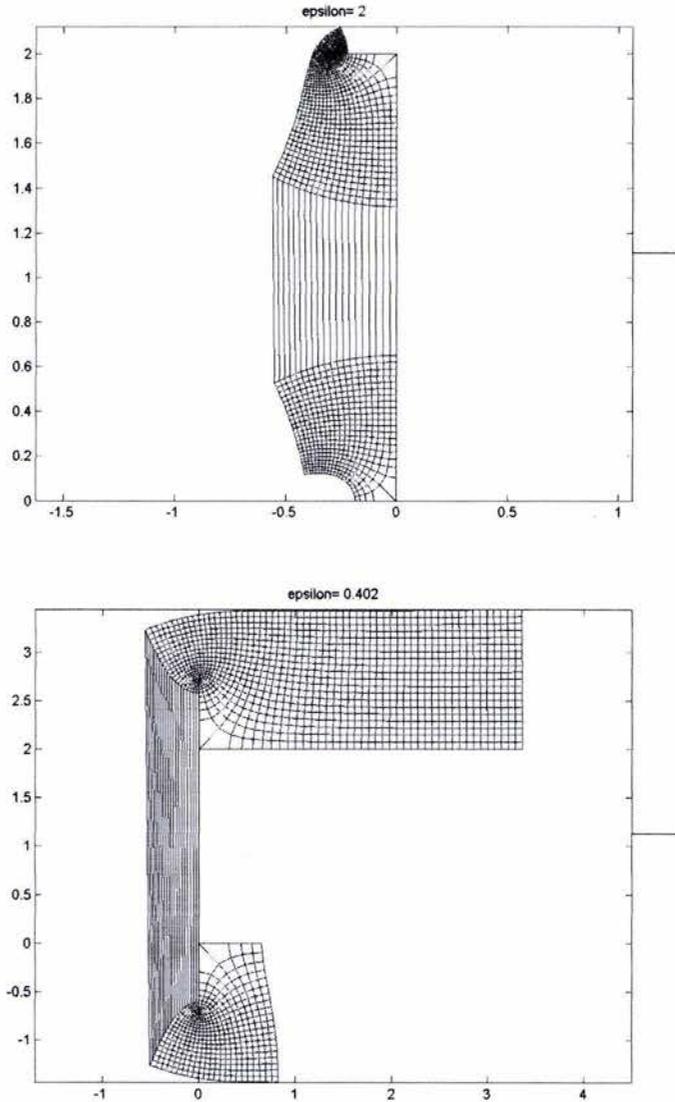


Figura 5.14. Gráficas obtenidas de una malla rectangular, mediante la transformación de Khosla, para cuatro valores de ϵ . No se observa correspondencia con el modelo de la figura 5.13.

De hecho, el modelo de Khosla tiene otro problema además del de la aplicación de la fórmula. El problema es que el flujo que pretendería obtenerse basado en las consideraciones de la figura 5.13 es como el que se muestra en la figura 5.15. Se observa que el flujo en la zona de contacto del medio permeable con el cuerpo de agua, tanto aguas arriba como aguas abajo, no está representado correctamente, ya que las líneas de flujo, deberían ser perpendiculares a las fronteras antes mencionadas.

En la figura 5.16, se presenta una solución alternativa posible, empleando la herramienta numérica de Driscoll [2002]

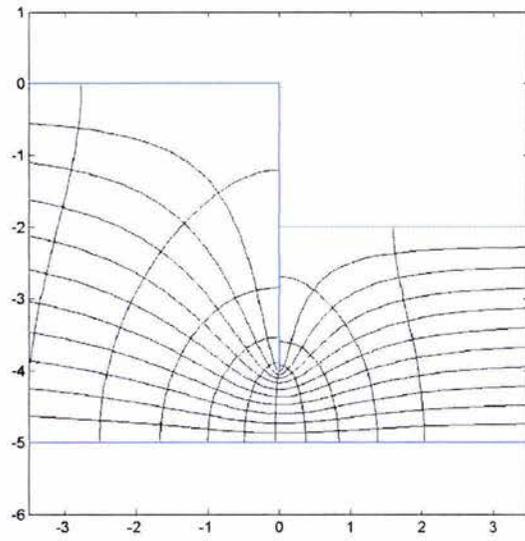


Figura 5.15. Líneas de corriente bajo una tablaestaca.

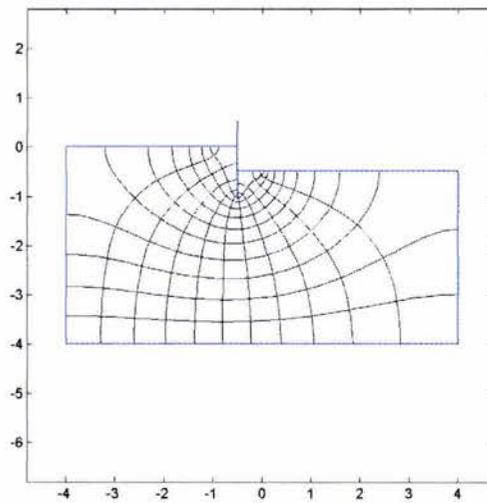


Figura 5.16. Opción de solución al problema planteado por Khosla, mediante la herramienta numérica SC de matlab.

5.3.2. Redes de flujo.

La teoría de las redes de flujo considera que las características del flujo varía solamente en la región plana en que se está analizando, y que en la 3ª dimensión, las características del flujo permanecen constantes. De este modo, para evaluar el caudal, se considera que se está analizando un volumen de suelo con ancho unitario, de donde es posible escribir lo siguiente:

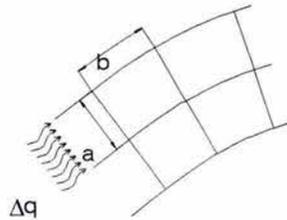


Figura 5.16 Esquema ilustrativo de la Ley de Darcy.

Ley de Darcy:

$$v = ki$$

$$q = kiA$$

$$\Delta q = k \frac{\Delta h}{b} (a)(1) = k \frac{a}{b} \frac{h}{n_e} \quad (5.16)$$

donde:

Δq : es el caudal que transita entre dos líneas de corriente, previamente seleccionadas.

k : es la permeabilidad del medio [$L M^0 T^{-1}$]

a : es el ancho del canal de flujo

b : es la distancia entre dos equipotenciales previamente seleccionadas.

h : es la carga hidráulica total.

n_e : número de caídas de potencial

n_f : número de canales de flujo

q : caudal total que transita por la red de flujo

$$q = n_f \Delta q = kh \frac{n_f a}{n_e b} \quad (5.17)$$

Para un problema dado, las relaciones $\frac{n_f}{n_e}$ y $\frac{a}{b}$ debe cuidarse que sean constantes, es decir, la red de flujo debe ser trazada con equipotenciales equidistantes al igual que las equipotenciales Marsal R. J. Y Resendiz D. [1983]. Para el caso del trazado de una red de flujo en la computadora, lo anterior es fácil de lograr.

Se presenta también el ejemplo de una excavación resguardada a ambos lados por tablaestacas, y con presencia de agua en la superficie del terreno. El método de las redes de flujo permite estimar el caudal de agua que está ingresando a la excavación. Mediante la transformación de Schwarz-Christoffel puede trazarse la red de flujo con buena precisión, y sin necesidad de hacer tanteos.

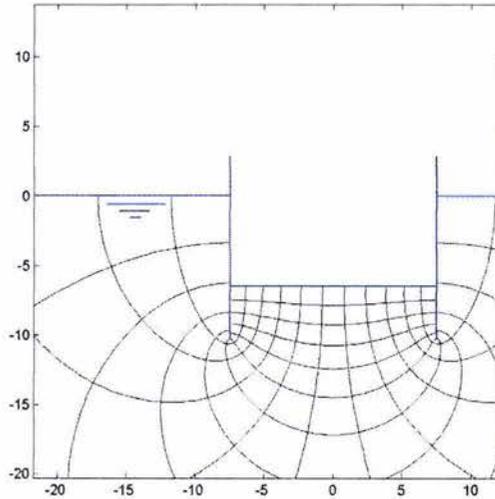


Figura 5.17 Red de flujo bajo dos tablaestacas que resguardan una excavación.

En la figura se muestra una red de flujo, que puede representar el flujo bajo un par de tablaestacas que protegen una excavación.

En el siguiente ejemplo, se aprovechan las hipótesis de las redes de flujo, para obtener la geometría de la superficie libre del agua en el flujo de una canal. Para ello, se parte de que el caudal q es conocido, de esta manera, la superficie libre del agua debe satisfacer la ecuación de Bernoulli. Vale la pena anotar aquí, que a pesar de que la teoría del flujo potencial parte de la idea de que el flujo es conservativo, es decir, que no hay pérdidas de energía, para el caso particular de encontrar la frontera del flujo, podría aceptarse la consideración de pérdidas energéticas, ya que la transformación de Schwarz-Cristoffel se está manejando, en este caso, solo como

una herramienta geométrica que permite definir las trayectorias de las equipotenciales y líneas de corriente en un flujo.

Dicho de otro modo, las velocidades no se están calculando a partir de una función potencial, sino simplemente como:

$$v = \frac{q}{\Delta s} \quad (5.18)$$

donde s es una coordenada curvilínea a lo largo de una equipotencial.

La ventaja principal de utilizar redes de flujo para encontrar la geometría de una frontera que no es rígida, es que permite considerar el efecto de la distribución no uniforme de las velocidades medidas en la profundidad del flujo. Además permite considerar secciones de flujo que no son planas, es decir, permite analizar problemas en donde las variaciones espaciales del flujo son súbitas.

Para determinar la carga de velocidad, se consideran algunos puntos, definidos en la frontera rígida, a partir de los cuales se obtienen las equipotenciales del flujo, y en base a la coordenada curvilínea s , se obtiene la velocidad para cada Δs equivalente aproximadamente a un centésimo de la longitud de la equipotencial.

Para hallar el valor de la carga de velocidad, se hace uso de la expresión para calcular el coeficiente de Coriolis, que en el libro de Chow [1994] aparece como:

$$\alpha = \frac{\int v^3 dA}{V^3 A} \approx \frac{\sum v^3 \Delta A}{V^3 A} \quad (5.19)$$

Donde V es la velocidad media en la sección, y A es el área. En el caso del ejemplo que se analiza, se está considerando que el ancho es unitario, por lo que en lugar de A se manejan las longitudes medidas a lo largo de s :

$$\alpha = \frac{\sum v^3 \Delta s}{V^3 S} \quad (5.20)$$

Un defecto del método propuesto para determinar las características del flujo y la superficie libre del agua, es que al evaluar las velocidades en las proximidades de la frontera rígida, aparece el problema de que en los puntos en que existen puntos singulares, la velocidad puede tender a ∞ , con lo que el coeficiente α no puede evaluarse correctamente, sin embargo, el problema se resuelve iniciando el cálculo de las velocidades, a una distancia prudente de la frontera rígida. Dado que en el ejemplo cada equipotencial se divide en 100 intervalos, se despreció la velocidad calculada en los primeros cinco Δs considerados a partir de la frontera rígida.

El problema de precisión derivado no puede ser grave, ya que solamente se calculan las velocidades puntuales para hallar el valor del coeficiente de Coriolis α .

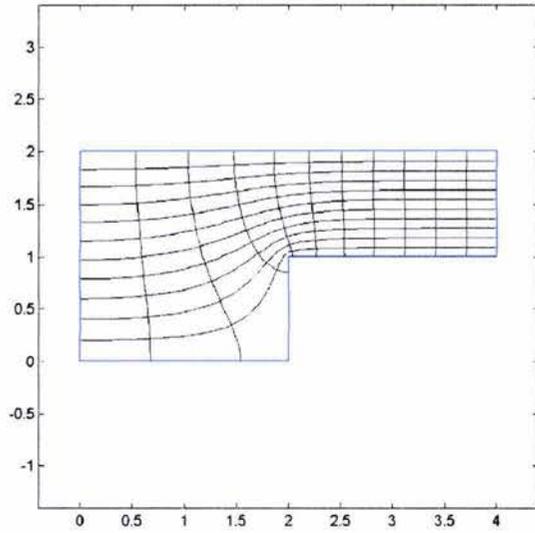


Figura 5.18. Condición de flujo inicial, en un problema en el que la geometría y posición de la superficie libre del agua es una incógnita.

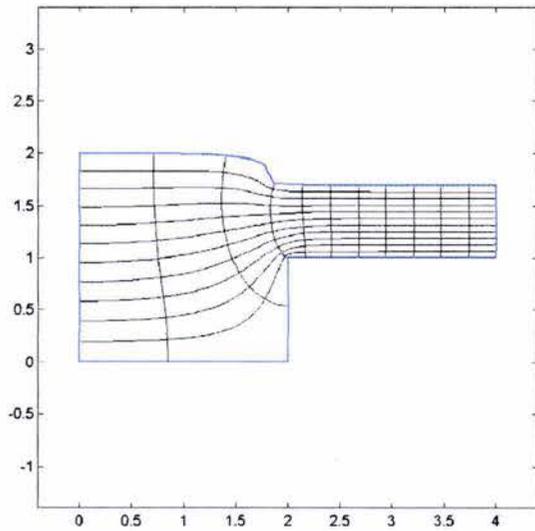


Figura 5.19. Líneas de corriente y equipotenciales del flujo, con la posición de la frontera superior ya calculada.

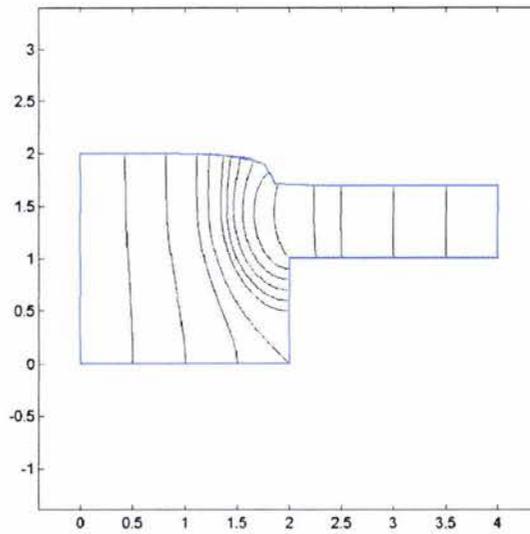


Figura 5.20. Donde se indica la posición y geometría de las equipotenciales colocadas con menor separación en la zona donde la superficie libre del agua varía rápidamente.

**COMENTARIOS
FINALES
Y CONCLUSIONES.**

6

6.1.- Comentarios Finales.

En cuanto a los procesos de transformación conforme, mediante funciones de variables complejas, se sabe que la mayor parte de estas transformaciones son casos particulares de la de Schwarz-Christoffel, de aquí su importancia en la teoría de la variable compleja.

Se sabe que en teoría, la transformación de Schwarz-Christoffel funciona no solo para polígonos con lados rectos sino, también para polígonos con lados circulares y en general para todas aquellas formas de los lados, que puedan representarse mediante relaciones polinómicas de x y y .

Lo anterior es atractivo, sin embargo, como se hizo ver a lo largo de este trabajo, no es fácil obtener expresiones algebraicas, aún para transformaciones de polígonos con lados rectos, y más de tres vértices. La aplicación de métodos numéricos es indispensable en el proceso de solución de las transformaciones definidas por la fórmula de Schwarz-Christoffel.

Actualmente se trabaja en la implementación de herramientas numéricas para la obtención de transformaciones conformes en regiones múltiplemente conexas, las cuales tienen un importante campo de aplicación en el análisis de problemas de mecánica, no solo de fluidos, sino también de sólidos, como el caso del análisis de esfuerzos en barras prismáticas de secciones huecas sujetas a torsión, como las de los puentes o de flechas transmisoras de potencia.

En este trabajo, se presentó un problema simple en el que es necesario determinar la geometría y posición de una de las fronteras. La condición que debe cumplir la frontera en el ejemplo es simplemente la ecuación de Bernoulli, sin embargo, es posible explorar condiciones más elaboradas para explorar, por ejemplo, la geometría en problemas donde la significación de los efectos viscosos ocurre en una zona reducida, ver Bertram V. [2000] o Echávez G. [2000].

Debe tenerse en cuenta que el problema de la obtención de una de las fronteras del problema, considero simplemente las hipótesis clásicas de las redes de flujo, es decir no fue necesaria la obtención del potencial complejo para el cálculo de las velocidades en la región analizada, esto mejora de manera importante el tiempo de cálculo y la convergencia del proceso iterativo para hallar la posición de la frontera.

No debe perderse de vista, que para problemas físicos en donde es aplicable la ecuación de Laplace, el método de los elementos finitos proporciona valores exactos del potencial en los vértices de los elementos (Zienkiewicz O.C. y Taylor R.L. [1994]), así que es una técnica altamente competitiva para la solución de problemas

definidos en dominios con geometrías complicadas. En este mismo sentido, el cálculo mediante transformaciones conformes tiene la ventaja de permitir hallar con precisión las líneas equipotenciales y de flujo.

Tal vez una de las aplicaciones más atractivas de la transformación de Schwarz-Christoffel es el análisis de la mecánica de fractura en sólidos (particularmente en placas), ya que el uso de métodos numéricos como el de elementos finitos, implica mucho tiempo de cálculo, y procesos sumamente complicados. La trayectoria de una grieta puede seguirse mediante la inserción de una cadena de vértices del polígono hacia el interior del medio sólido en un proceso iterativo, que permita recalculer el estado de esfuerzos principales en el medio elástico conforme la grieta avanza (ver por ejemplo, González J.L. [1998]).

6.2.- Conclusiones.

La elegancia y simplicidad de la solución de la ecuación de Laplace mediante transformaciones conformes, hace de esta técnica un recurso de actualidad para el análisis de problemas de flujo definidos en regiones planas. Es también una opción viable para la obtención de datos de inicio para procesos de cómputo que impliquen la solución de problemas de flujo en donde se considera el efecto de la viscosidad.

El uso práctico de la transformación de Schwarz-Christoffel, implica el uso de técnicas numéricas para determinar los parámetros de la integral.

La transformación de Schwarz-Christoffel es una herramienta útil para el predimensionamiento de estructuras hidráulicas.

En el campo del diseño geométrico, la T.S.C. tiene posibilidades de aplicación en la definición de superficies complicadas como vialidades, terracerías, domos, y cubiertas en general.

En el trazo de las trayectorias de cables de preesfuerzo para losas de formas caprichosas la T.S.C. puede ser una herramienta importante en el proceso de optimización.

La T.S.C. puede aplicarse también en el análisis de deformaciones en membranas elásticas.

El uso de métodos numéricos para la obtención de potenciales complejos en dominios con formas poligonales de muchos vértices, hace altamente versátil el uso de las técnicas comunes del flujo potencial, ya que una vez obtenido el potencial complejo, es posible hacer uso los principios de superposición y reflexión en regiones planas.

REFERENCIAS.

Ablowitz M. S. & Fokas. (1997) "Complex Variables". Cambridge University Press. U.K..

Anderson G. L (1997) "Conformal Invariants, and Quasiconformal Maps" Wiley Interscience, New York.

Bertram V. (2000) "Practical Ship Hidrodinamics", Butterworth Heinemann. U.K..

Chandrupatla T. Y Belegundu A. D. (1999) "Introducción al estudio del Elemento Finito en Ingeniería". 2ª Ed. México.

Chung Y. K. "Solution of Flow under Sluice Gates". Journal of the Engineering Mechanics Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers EM 1 págs. 121-140.

Churchill R. V. (1970) "Variables Complejas y sus Aplicaciones" 2ª Ed. Mc Graw Hill. México.

Chow. V. T. (1994) "Hidráulica de Canales Abiertos". Mc Graw Hill. Bogotá.

Cohn H. (1967) "Conformal Mapping on Riemann Surfaces". Dover Publications, Inc. U.S.A..

Courant R. y Robbins H. (1996) "¿Qué son las matemáticas?". Fondo de Cultura Económica. México.

Driscoll T. A. & Trfethen L. N. (2002) "Schwarz-Christoffel Mapping". Cambridge University Press U. K..

Dunham D. (April 2003) "Creating Repeating Hyperbolic Patterns- Old and New". Notices of the AMS, Volume 50, Number 4, pp 452-455. (Disponible en <http://www.ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf>).

Echávez G. (2001) "Notas del curso de Mecánica de Fluidos". D.E.P.F.I. UNAM. México.

Echávez G. (1996) "Introducción a los Modelos Hidráulicos de Fondo Fijo y a la Ingeniería Experimental". U.N.A.M. México 1996.

Errázuriz K. Y González J. I. (1992) "Proyecciones Cartográficas. Manejo y Uso". Textos Universitarios. Ediciones Universidad Católica de Chile. Chile.

Estrada Espinoza de los Monteros. (1988) "Laboratorio de Cartografía". Edit. Trillas. México.

Favier J. (1995) "Los Grandes Descubrimientos. De Alejandro a Magallanes". Fondo de Cultura Económica, México.

Featherstone R. E. & Nalluri C. (1988) "Civil Engineering Hydraulics" 2ª Ed. BSP Professional Books, U.K..

González J.L. (1998) "Mecánica de Fractura". Noriega Limusa, México.

Henrici P. (1976) "Applied & Computational Complex Analysis" volumes I, II, III. Wiley Interscience, New York.

Hofstadter D.R. (1982) "Gödel, Escher, Bach: Una eterna trenza dorada". Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. México.

Hwang N. H. C. & Houghtalen R. J. (1996) "Fundamentals of Hydraulic Engineering Systems". 3ª Ed. Prentice Hall. New Jersey.

Larson y Hostetler. (1989) "Cálculo y Geometría Analítica". 3ª Ed. Mc Graw Hill. México.

Levi E. (1965) "Mecánica de los Fluidos, introducción teórica a la hidráulica moderna". Facultad de Ingeniería. U.N.A.M. México.

Marsal R. J. Y Resendiz D. (1983) "Presas de Tierra y Enrocamiento". Editorial Limusa, México.

Marshall J. S. (2001) "Inviscid Incompressible Flow". Wiley Interscience. U.S.A..

Nehari Z. (1952) "Conformal Mapping" Dover. New York.

Nakamura. S. (1996) "Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab".

Krantz G. (1999) "Conformal Mappings", American Scientist, Vol. 87, pp 436-445.

Smit B. & Lenstra H.W. Jr. (April 2003) "Artful Mathematics: The Heritage of M.C. Escher" Notices of the AMS, Volume 50, Number 4, pp 446-451. (Disponible en <http://www.ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf>).

Spiegel M. R. (1991) "Variable Compleja". Mc Graw Hill. México.

Strahler N.A. & Strahler H.A. (1989) "Geografía Física". 3ª Ed. Ediciones Omega. Barcelona.

Vergara M. A. (1993) "Técnicas de Modelación en Hidráulica". Alfaomega. México.

Wunsch A. D. (1997) "Variable Compleja con Aplicaciones". 2ª Ed. Pearson Education. México.

White F.M. (1979) "Mecánica de Fluidos". Mc Graw Hill, U.S.A.

Zienkiewicz O. C. y Taylor R. L. (1994) "El Método de los Elementos Finitos" Volumen 1. 4ª Ed. Mc Graw Hill. Barcelona.

APÉNDICE I

ÁLGEBRA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Este apéndice abunda sobre los conceptos básicos, que acerca del manejo algebraico de los números y funciones complejas, se presentaron en las secciones 2.1 y 2.2.

Dado:

$$z = x + yi$$

$$x = \operatorname{Re}(z)$$

$$y = \operatorname{Im}(z)$$

$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta \equiv \arg(z) = \alpha \tan \frac{y}{x}$$

$$z = x + yi = r \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = re^{i\theta}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$\bar{z} = x - yi$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{(z + \overline{z})}{2}$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{(z - \overline{z})}{2i}$$

$$z \overline{z} = |z|^2$$

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$$

$$(f_1 - f_2)' = f_1' - f_2'$$

$$(kf_1)' = kf_1'$$

$$(f_1 f_2)' = f_1 f_2' + f_1' f_2$$

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2}$$

$$\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$$

$$\frac{d}{dz}[g(f(z))] = g'(f(z))f'(z)$$

FUNCIONES ELEMENTALES.

La función exponencial para $z = x + yi$, se define como:

$$e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}; \quad e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}};$$

e^z es analítica en la totalidad del plano complejo y

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \operatorname{senz} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{senz}_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{senz}_2$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(iz)$$

$$\operatorname{senhz} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \operatorname{sen}(iz)$$

$$\cos(iy) = \cosh y$$

$$\operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{senhy}$$

$$\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{senx} \cosh y + i \cos x \operatorname{senhy}$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{senx} \operatorname{senhy}$$

Para n entero:

$$\text{Si } z = n\pi; \quad \operatorname{senz} = 0$$

$$\text{Si } z = \frac{(2n+1)\pi}{2}; \quad \cos z = 0$$

$$\text{Si } z = in\pi; \quad \operatorname{senhz} = 0$$

$$\text{Si } z = \frac{i(2n+1)\pi}{2}; \quad \cosh z = 0$$

Representaciones en series de potencias.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\operatorname{senz} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\log(z) = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)$$

donde k es un entero y $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$

APÉNDICE II

RECURSOS DE CÓMPUTO.

En esta sección se proporciona información acerca de los recursos de cómputo de distribución general que permiten resolver el problema del parámetro de la transformación de Schwarz-Christoffel.

CONFPACK: Es un programa escrito en FORTRAN escrito por D. M. Hough para transformación interior y exterior de regiones simplemente conexas.

Zipper: Es una rutina de C escrita por Marshall que utiliza el método de interpolación de Kühnau para regiones interiores y exteriores. Es muy rápido, pero no calcula los parámetros de los vértices de manera explícita. Puede encontrarse en <http://www.math.washington.edu/Marshall/zipper.html>.

Circle Pack: Es un programa que maneja el problema de la transformación conforme mediante un criterio discreto, escalando conjuntos de círculos con ciertos patrones de tangencias. Es un método aproximado y puede revisarse con detalle en <http://www.math.utk.edu/kens>.

Lo programas que se mencionan a continuación, pueden encontrarse en la dirección:

<http://www.netlib.org/conformal>

DSPACK: Es un programa escrito por Hu, y permite hacer transformaciones de regiones doblemente conexas, definidas por polígonos, hacia una circunferencia unitaria. Obtiene los valores de los parámetros de los vértices, y calcula la transformación inversa.

CAP: Escrito por Bjorstad y Grosse para mapeo de polígonos con lados circulares, es una rutina que está en fase de desarrollo.

GEARLIKE:

El programa utilizado en los ejemplos de aplicación de la transformación del presente trabajo es la caja de herramientas SC para Matlab, que además de la obtención explícita de los parámetros de los vértices y la obtención de la transformación inversa, tiene una rutina para la obtención de los polinomios de Faber. SC puede encontrarse en:

<http://www.math.udel.edu/~driscoll/SC/>

La caja de herramientas SC fue desarrollada con base en el programa SCPACK escrito en FORTRAN 77 por Trfethen. SCPACK está disponible también en la página de Netlib.

Por último, se cita la dirección donde puede encontrarse un excelente programa didáctico (en francés), con el cual se desarrollaron las gráficas de los capítulos 1 y 2.

<http://www.mecaps.cict.fr/>