



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**“ALGUNAS VARIACIONES SOBRE EL
NÚMERO CROMÁTICO”**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
M A T E M Á T I C A
P R E S E N T A
AMANDA MONTEJANO CANTORAL



**DIRECTOR DE TESIS:
MAT. VICTOR MANUEL NEUMANN LARA**



**FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



ACADEMIA NACIONAL
DE INVESTIGACIONES
CIENTÍFICAS

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Algunas variaciones sobre el número cromático"

realizado por Amanda Montejano Cantoral con número de cuenta 9519287-9
quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Mat. Victor Manuel Neumann Lara

Propietario

Dr. Francisco Larrión Riveroll

Propietario

Dr. Juan José Montellano Ballesteros

Suplente

Dr. Javier Bracho Carpizo

Suplente

M. en C. Ricardo Strausz Santiago

Consejo Departamental de MATEMÁTICAS

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

ACADEMIA NACIONAL
DE INVESTIGACIONES
CIENTÍFICAS

1995

A mi papá, mi mamá, Luis Pedro y Coral.

Agradecimientos

Esta es la culminación de un trabajo que inicié, tal vez hice más de lo que imaginé. Intentaré agradecer a toda la gente que a lo largo de ese tiempo, me ha brindado su apoyo, su amistad, o de alguna manera ha contribuido a la realización de mi sueño.

Agradesco, por supuesto, a mi papá: *no tengo palabras para tratar de explicarte lo mucho que significas para mí, te dedico esta tesis con todo mi amor y la admiración que te tengo.*

A mi mamá: *gracias por enseñarme a ser feliz, sin tu amor y tu ejemplo no sería quien soy.*

A mis hermanos. Luis Pedro: *tal vez no sepas lo mucho que aprendo de ti cada día;* Coral: *por la felicidad que me brinda quererte tanto.*

Quiero concluir este párrafo agradeciendo a Elsa, ella sabe que sin el apoyo y compañía de mi familia no habría llegado a donde estoy.

Desde que entre a la facultad he crecido mucho y lo he disfrutado intensamente. Agradesco por sus enseñanzas, a todos los profesores que tuve.

Por los primeros meses de estudio, a mis amigos físicos, Alejandro, Mariano y en especial a Damián: *gracias además de todo por tu amistad.*

A toda la gente que elegí en la facultad para compartir estos años y los que vienen. Laura, Bárbara, Emiliano, Ramon, Mauricio, Rodrigo, Víctor, Ayari, Rafael, Isabel, Natalia, Ferran: *les debo mucha alegría y cada uno sabe por qué.*

Me siento muy afortunada de haber ingresado mi mente al mundo de las gráficas, esto en gran parte se lo debo a Víctor: *gracias por la confianza y por la paciencia, he disfrutado mucho aprender de ti.*

Agradesco a mis sinodales por el tiempo invertido en esta tesis. En especial al Dino por su amistad y al Roli por su apoyo y sus enseñanzas.

A la incondicional “Banda Caprice”: *a pesar de todos los encuentros y desencuentros que hemos tenido, ustedes saben que han sido un pilar esencial en mi vida.*

En particular agradezco a Vania y a Thais por su amistad inquebrantable.

A Toño: *gracias por tu apoyo, por compartir conmigo estos últimos meses y todo lo que me has enseñado.*

Gracias.

Índice General

Introducción

1 Preliminares	3
1.1 Conceptos básicos	3
1.2 Coloraciones	9
2 Homomorfismos	13
2.1 Homomorfismos irreflexivos	13
2.1.1 Definiciones y primeros ejemplos	13
2.1.2 Diferentes tipos de homomorfismos	18
2.2 Cocientes	20
2.2.1 Epimorfismos fieles	20
2.2.2 i -epimorfismos elementales	23
2.3 Retractos	26
2.3.1 Retractos y retractos impropios	26
2.3.2 Equivalencia homomorfica	30
3 Coloraciones y categorías	35
3.1 Las tres categorías	35
3.1.1 Gráficas	36
3.1.2 Origráficas	36
3.1.3 Gráficas n -coloreadas en aristas	40
3.2 Variaciones del número cromático	43
3.2.1 El número cromático generalizado	43
3.2.2 Nichos y nichales	45
4 El número cromático orientado	51
4.1 Para origráficas	51
4.2 Para gráficas	59

ÍNDICE GENERAL

4.2.1	Ciclos	60
4.2.2	Árboles	60
4.2.3	Periplanas	62
4.2.4	Gráficas con máximo grado k	65
4.2.5	Gráficas con número cromático acíclico acotado	68
4.2.6	Gráficas planas	70
5	El número n-cromático	71
5.1	El número 2-cromático	72
5.1.1	El número 2-cromático y el número cromático orientado	72
5.1.2	El número 2-cromático de los ciclos	74
5.2	El número n -cromático	78
5.2.1	Árboles	78
5.2.2	Gráficas con número cromático acíclico acotado	80
5.2.3	Gráficas planas	81
6	La conjetura de las trayectorias	83

Introducción

A partir de la conjetura de los 4 colores se inicia el estudio de coloraciones en gráficas lo que motiva la introducción del concepto de número cromático de una gráfica.

El número cromático de una gráfica G es el mínimo número de clases en una partición de los vértices de G en conjuntos independientes. Tales particiones — que inducen coloraciones de los vértices de G en las cuales vértices adyacentes reciben colores distintos — corresponden a homomorfismos de G en gráficas completas.

Los problemas de coloraciones en gráficas son muy interesantes y han sido ampliamente estudiados a lo largo del último siglo, sin embargo permanece un gran número de problemas no resueltos en el tema (véase [6]) por lo que ésta es una rama clásica de Teoría de gráficas que dista mucho de agotarse.

En la última década, han aparecido varios artículos de investigación que introducen interesantes variaciones del número cromático. El objetivo de esta tesis es presentar algunas de las más recientes como son:

- El *número cromático orientado* de una gráfica orientada.
- El *número cromático orientado* de una gráfica simple.
- El *número n -cromático* de una gráfica n -coloreada en aristas.
- El *número n -cromático* de una gráfica simple.

La mayor parte del material que se presenta en esta tesis está tomado de los artículos: *The chromatic number of oriented graphs* de E. Sopena [9] y *Homomorphisms of edge-coloured graphs and Coxeter groups* de N. Alon, T. H. Marshall [1].

Para dar una visión integrada de los conceptos arriba mencionados fue conveniente crear un marco de referencia adecuado (Capítulo III). Dicho

marco requirió de un enfoque categórico que se mantuvo, sin embargo, dentro de límites estrechos y en un nivel poco formal, ya que nuestra intención fue siempre mantenernos dentro del terreno natural de la Teoría de la gráficas.

En el Capítulo I se presentan, de manera muy breve, las definiciones y los conceptos básicos de Teoría de gráficas que se requieren para el desarrollo de este trabajo. En el Capítulo II damos un repaso más profundo de la teoría de homomorfismos, el material empleado allí fue tomado esencialmente de: *Graph homomorphisms: structure and symmetry* [4].

En el Capítulo IV se presentan los resultados referentes al número cromático orientado, y en el V los referentes al número n -cromático.

Finalmente en el Capítulo VI se establece una conjetura referente al número n -cromático de las trayectorias.

No resta sino decir que hay problemas dentro de esta teoría muy interesantes y con amplias posibilidades de desarrollo a futuro.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este primer capítulo es dar de manera muy breve, las definiciones y los conceptos básicos de *Teoría de gráficas* que se requieren para el desarrollo de este trabajo.

1.1 Conceptos básicos

Una **gráfica** es un objeto matemático $G = \{V(G), E(G), f_G\}$ donde:

- $V(G)$ es un conjunto cuyos elementos se llaman **vértices** de G .
- $E(G)$ es un conjunto cuyos elementos se llaman **aristas** de G .
- f_G es una función que va de $E(G)$ en $V(G)^{(2)}$ llamada **función de incidencia**.

Entendemos que $V(G)^2 = V(G) \times V(G)$ es el conjunto de **pares ordenados** de vértices y $V(G)^{(2)}$ el de **pares no ordenados**.

Dos vértices u y v de G son **adyacentes** si existe alguna arista a en $E(G)$ tal que $f_G(a) = (u, v)$; en este caso decimos que u y v son los **extremos** de a .

Dos gráficas G y H son **isomorfas** (ponemos $G \simeq H$), si existe una biyección $g : V(G) \rightarrow V(H)$ con la propiedad de que tanto g como g^{-1} preservan adyacencia, es decir, si $f_G(a) = (u, v)$ entonces existe una arista a' en $E(H)$ tal que $f_H(a') = (g(u), g(v))$ y viceversa. A una función que satisface esas propiedades se le llama **isomorfismo**.

El **grado** de un vértice v es el número de veces en que v aparece como extremo de alguna arista de la gráfica; representamos al máximo de los grados de los vértices de una gráfica G como $\Delta(G)$, y al mínimo como $\delta(G)$.

A la cardinalidad del conjunto de vértices de una gráfica G se le llama el **orden** y a la del conjunto de aristas el **tamaño** de G , por lo general ponemos $|V(G)| = p$ y $|E(G)| = q$. En este trabajo sólo vamos a considerar **gráficas finitas**, es decir gráficas cuyo orden y tamaño sea finito.

Para tener una **representación geométrica** de estos objetos, pensaremos que los vértices son puntos en el plano y dibujamos a las aristas como arcos cuyos extremos son exactamente aquellos vértices que nos indica la función de incidencia.

Si para alguna gráfica G , se puede realizar esta representación en el plano con la condición adicional de que las aristas no se crucen más que en los extremos, diremos que G es **aplanable**, a dicha representación se le llama **plana**. En la figura 1.1 se muestran algunos ejemplos de representaciones de gráficas. G_2 y G_3 son planas, G_1 y G_5 son aplanables mientras que G_4 no es aplanable.

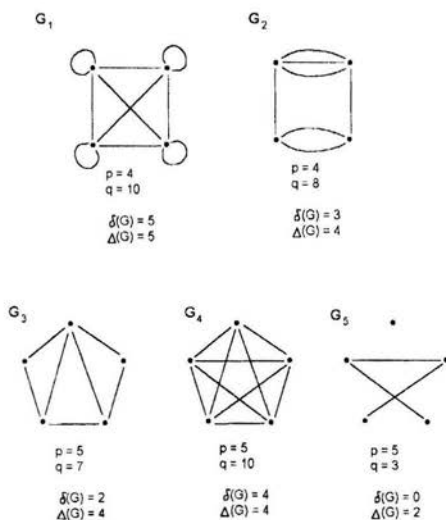


figura 1.1

Dos aristas a y a' que cumplen $f_G(a) = f_G(a')$ se llaman **aristas paralelas**: la gráfica G_2 de la figura 1.1 nos proporciona un ejemplo de esto: G_3 , G_4 y G_5 no tiene aristas paralelas ni lazos —los **lazos** son aquellas aristas cuyos extremos coinciden, como se muestra en G_1 — por lo general vamos a considerar este tipo de gráficas, las llamaremos **gráficas simples**.

Para referirnos a las gráficas simples no es necesario mencionar la función de incidencia, pues en estos casos el conjunto de aristas se puede pensar como una colección de pares no ordenados de vértices. En este sentido, podemos hablar de gráficas **completas** —aquellas que poseen todas las aristas entre sus vértices— las denotamos como K_n donde n indica en número de vértices; en la figura 1.1, G_4 es una representación de K_5 .

Dada una gráfica simple $G = \{V(G), E(G)\}$, el **complemento** de G está definido como $\bar{G} = \{V(G), \bar{E}(G)\}$ donde $\bar{E}(G)$ son las parejas de vértices (u, v) tales que $(u, v) \notin E(G)$; en la figura 1.1 G_3 y G_5 son complementarias.

Notemos que G_5 —a diferencia de las otras cuatro— no es "conexa", para entender correctamente este concepto veamos las siguientes definiciones válidas para gráficas simples y no simples.

Una sucesión alternante de vértices y aristas $(v_1, a_1, v_2, a_2, \dots, a_n, v_n)$ en donde cada arista a_i tiene como extremos a los vértices v_i y v_{i+1} se llama un **camino**; un camino que no repite aristas es un **paseo** y un camino que no repite vértices es una **trayectoria**; un paseo en el cual sólo se repiten el primero y el último vértice es un **ciclo**; la **longitud** en cada caso es el número de aristas.

Para facilitar la notación, si la gráfica no tiene aristas paralelas, solo pondremos los vértices (v_1, v_2, \dots, v_n) ; veamos algunos ejemplos:

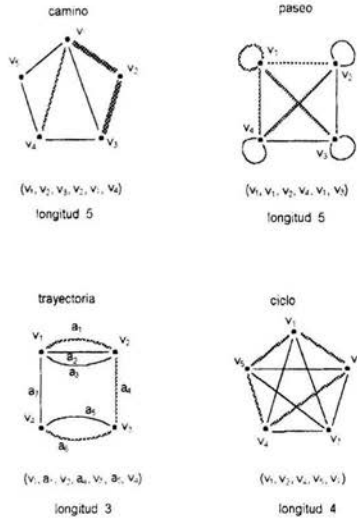


figura 1.2

Si G contiene ciclos, le llamaremos **cuello** de G a la longitud mínima de un ciclo en G ; el **cuello impar (resp. par)** de G será la mínima longitud impar (resp. par) de un ciclo en G , lo denotamos como $c_i(G)$ (resp. $c_p(G)$); para la primera gráfica de la figura 1.2 tenemos $c_i(G) = 3$ y $c_p(G) = 4$.

Una gráfica G es **conexa** si para todo par de vértices existe una trayectoria que los une; en este trabajo, por lo general sólo vamos a considerar gráficas conexas.

Una gráfica conexas y sin ciclos es un **árbol**. Cada árbol con más de un vértices posee al menos dos **vértices terminales** —vértices de grado uno—.

Dadas dos gráficas $H = \{V(H), E(H), f_H\}$ y $G = \{V(G), E(G), f_G\}$, decimos que H es **subgráfica** de G si $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$ y $f_H(a) = f_G(a)$ para toda arista a de H .

Una subgráfica se llama **inducida** si cada vez que $f_G(a) \subset V(H)$ ⁽²⁾ tenemos que $a \in E(H)$; en este caso decimos que $V(H)$ induce H en G .

Si V' es un subconjunto de $V(G)$, denotamos como $G[V']$ a la subgráfica que induce V' en G . Un subconjunto de vértices de $V(G)$ es **independiente** en G si la subgráfica que induce no tiene aristas; por ejemplo, si consideramos como G a la primera gráfica de la figura 1.2, tenemos que $G[v_1, v_3, v_4]$ es un triángulo y $\{v_2, v_5\}$ es un conjunto independiente.

Una gráfica es **bipartita** si su conjunto de vértices se puede partir en dos conjuntos independientes.

Una subgráfica H de G se llama **generadora** si $V(H) = V(G)$; una **factorización** de G es un conjunto de subgráficas generadoras ajenas dos a dos en aristas cuya unión es G .

Una gráfica es **r -regular** si todos sus vértices tienen grado r , un **r -factor** de una gráfica G es una subgráfica r -regular, generadora de G . Una **r -factorización** de G es una factorización de G en r -factores; a continuación se muestran una 1-factorización de K_4 y una 2-factorización de K_5 .

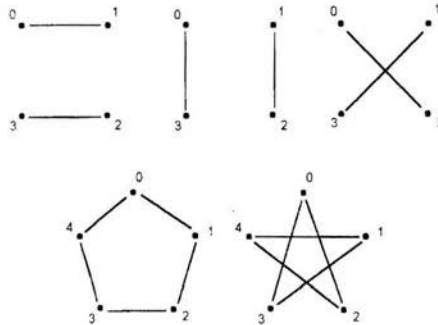


figura 1.3

Es fácil probar que las gráficas completas de orden par siempre se pueden 1-factorizar mientras que, para las completas de orden impar esto resulta imposible.

La gráfica que se obtienen de una gráfica completa de orden par K_{2n} , suprimiendo un 1-factor se le llama **octaedro** y se les denotan por O_n .

Una **digráfica** es un objeto matemático $D = \{V(D), F(D), f_D\}$ donde:

- $V(D)$ es un conjunto cuyos elementos se llaman **vértices** de D .
- $F(D)$ es un conjunto cuyos elementos se llaman **flechas** de D .
- f_D es una función que va de $F(D)$ en $V(D) \times V(D)$ llamada **función de incidencia**.

En el caso de las gráficas teníamos $V(D)^{(2)}$ el conjunto de los pares no ordenados de vértices, en este caso tenemos $V(D)^2$ el conjunto de pares

ordenados, es por eso que si $f_D(a) = (u, v)$ decimos que u es el **origen** de la flecha a , y v es su **extremo**.

Dada una digráfica D , le llamamos el **soporte** de D a la gráfica que se obtiene si consideramos cada $f_D(a)$ como un par no ordenado. En otras palabras, el soporte de una digráfica se obtiene borrando las puntas de las flechas; en la figura 1.4 se muestran digráficas cuyos soportes son las gráficas de la figura 1.1.

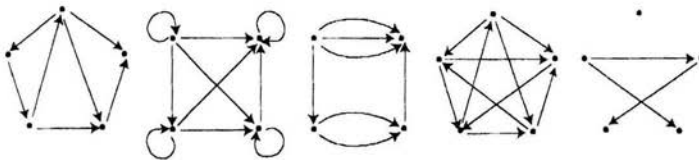


figura 1.4

Recíprocamente, dada una gráfica G obtenemos una digráfica si asignamos a cada arista de G una sola de las dos posibles orientaciones que puede tener, es decir, una flecha entre sus extremos; a esta asignación —de puntas de flecha— se le llama una **orientación** de G ; las digráficas de la figura 1.4 provienen de orientaciones de las gráficas en la figura 1.1.

A las digráficas cuyos soportes son gráficas simples, les llamamos **origráficas**.

Las origráficas completas se llaman **torneos**.

Un **torneo circulante** $\overrightarrow{C}_{2n+1}(I)$ es un torneo con $2n+1$ vértices v_0, v_1, \dots, v_{2n} en el cual las flechas van de v_i a v_j siempre que $(j-i)$ sea menor o igual que n (modulo n) excepto los valores en I ; el siguiente es un dibujo de $\overrightarrow{C}_7(3)$.

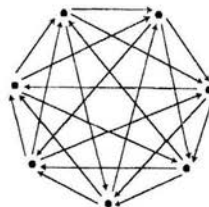


figura 1.5

1.2 Coloraciones

Los problemas de coloraciones en *Teoría de gráficas* se refieren a las particiones del conjunto de vértices ó de aristas, en clases que cumplan ciertas características.

Dado un conjunto V , decimos que $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ es una **partición** de V en n clases, si se cumple que $V_i \neq \emptyset$, $V_i \subset V$ para toda i ; $V_i \cap V_j = \emptyset$ y $\bigcup_{i=1}^n V_i = V$.

Dadas dos o más particiones de un mismo conjunto, el **refinamiento común óptimo** de ellas es la partición en la que cada miembro se obtiene intersectando las clases de cada una de las particiones dadas.

Entendemos que colorear los vértices (resp. las aristas) de una gráfica significa asignarle a cada vértice (resp. a cada arista) un color; de un modo más preciso, una **k-coloración** de los vértices (resp. de las aristas) de G , es una función $c : V(G) \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ (resp. $c : E(G) \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$) donde c_1, c_2, \dots, c_k representan los k colores; a menudo tomamos $c_1 = 1, \dots, c_k = k$.

A las pre-imágenes de cada color $c^{-1}(i)$ se les llama **clases cromáticas**; las clases cromáticas forman una **partición cromática** del conjunto de vértices (resp. de aristas) de la gráfica.

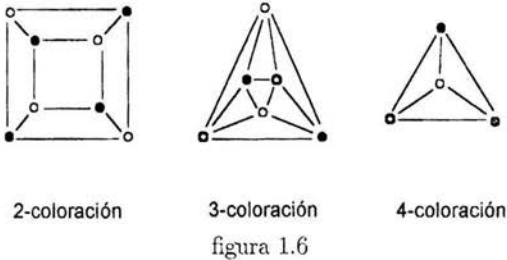
En este trabajo se usarán diversas reglas para colorear los vértices ó aristas de una gráfica; una "regla" para colorear establese restricciones sobre las clases cromáticas.

En el estudio de las coloraciones de vértices de gráficas, una "regla" clásica para colorear es la siguiente:

"si dos vértices son adyacentes no pueden recibir el mismo color."

En otras palabras, se pide que las clases cromáticas sean conjuntos independientes de vértices. A estas coloraciones se les llaman **coloraciones propias**: cualquier coloración que no sea propia se llama **impropia**.

Entonces, una **k-coloración propia** de los vértices de G es una función $c : V(\vec{G}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que si $uv \in E(G)$ entonces $c(u) \neq c(v)$; los siguientes son ejemplos de coloraciones propias.



Es claro que si $|V(G)| = p$ entonces existe una p -coloración de G , sin embargo es posible que con menos colores se puedan colorear propiamente los vértices de G . También es claro que si $|E(G)| \neq \emptyset$ se necesitan al menos 2 colores para colorear los vértices de G .

Dada una gráfica G , determinar el número exacto de colores que se requieren para colorear propiamente sus vértices es un problema muy importante, que ha sido y continúa siendo estudiado extensamente.

El **número cromático** $\chi(G)$ es el mínimo k para el cual existe una k -coloración de G ; en los ejemplos de la figura 1.6, las coloraciones son óptimas, es decir, ninguna de esas tres gráficas se puede colorear con menos colores de los indicados.

Se dice que G es k -coloreable si $\chi(G) \leq k$.

Existen muchos otros tipos de coloraciones propias e impropias, en este trabajo vamos a estudiar además de las anteriores, otras coloraciones llamadas acíclicas.

Una **k -coloración acíclica** de G , es una k -coloración propia de sus vértices con la condición adicional de que toda subgráfica inducida por dos clases cromáticas sea una gráfica acíclica; en la figura 1.7 damos un ejemplo de coloración acíclica.

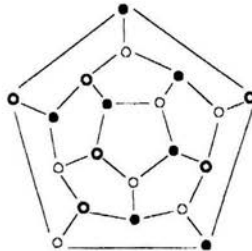


figura 1.7

El **número cromático acíclico** de una gráfica G es el mínimo k tal que exista una k -coloración acíclica de G ; lo denotamos como $\chi_a(G)$.

El número cromático acíclico de una gráfica G también se puede definir como el mínimo número de colores que se necesitan para colorear propiamente los vértices de G , de tal manera que cada ciclo reciba al menos tres colores.

Capítulo 2

Homomorfismos

Dadas dos gráficas G y H , un **homomorfismo** de G en H es una función $h : V(G) \rightarrow V(H)$ que preserve adyacencia, es decir, si $uv \in E(G)$ entonces $h(u) = h(v)$ ó $h(u)h(v) \in E(H)$.

Por lo general siempre que esté definido el concepto de homomorfismo, existirán *homomorfismos triviales*. Por ejemplo, en teoría de grupos, cualquier grupo se puede mapear bajo un homomorfismo trivial en cualquier otro, mandando todos los elementos del primero a la identidad del segundo. En teoría de gráficas los *homomorfismos triviales* son aquellos que mandan todos los vértices de una gráfica en un solo vértice de otra. En este trabajo, sin embargo, nos interesa estudiar especialmente a los homomorfismos que no “aplasten” aristas, es decir, no permitiremos que si $uv \in E(G)$ entonces $h(u) = h(v)$ y $h(u)h(v) \notin E(H)$; a esta clase de homomorfismos se les llaman *homomorfismos irreflexivos*.

2.1 Homomorfismos irreflexivos

Naturalmente en este contexto ya no existirán homomorfismos irreflexivos triviales, incluso ahora será posible que entre dos gráficas no exista ningún homomorfismo irreflexivo.

2.1.1 Definiciones y primeros ejemplos

Definición 2.1. *Un homomorfismo irreflexivo de G en H es una función $h : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que:*

$$uv \in E(G) \text{ implica que } h(u)h(v) \in E(H)$$

Es importante notar que la composición de homomorfismos irreflexivos es un homomorfismo irreflexivo.

Un homomorfismo irreflexivo h entre dos gráficas G y H induce de manera natural una función h_E entre las aristas de dichas gráficas:

$$h_E(uv) = h(u)h(v).$$

En adelante, para facilitar la escritura, pondremos **i-homomorfismo** para referirnos a los homomorfismos irreflexivos.

Definición 2.2. Dado un i-homomorfismo h de G en H , la **imagen** de G bajo h es una subgráfica $h(G)$ de H , definida como:

$$\begin{aligned} V(h(G)) &= \{v \in V(H) \mid v = h(v') \text{ para algún } v' \in V(G)\} \\ E(h(G)) &= \{uv \in E(H) \mid uv = h_E(u'v') \text{ para alguna } u'v' \in E(G)\} \end{aligned}$$

De la misma manera, dado un i-homomorfismo h de G en H y una subgráfica F de G se define $h(F)$, la imagen de F bajo h , que por supuesto es una subgráfica de $h(G)$.

Antes de ver algunos ejemplos para aclarar estos conceptos, veamos el siguiente resultado que es muy sencillo pero útil en el manejo de i-homomorfismos:

Proposición 2.1. $h : V(G) \rightarrow V(H)$ es un i-homomorfismo si y solamente si $h^{-1}(I)$ es un subconjunto independiente de $V(G)$ para todo subconjunto independiente I de $V(H)$

Demostración.

Sea $h : V(G) \rightarrow V(H)$ un i-homomorfismo. Se sigue inmediatamente de la definición que si F es una subgráfica de G con $E(F) \neq \emptyset$ entonces $E(h(F)) \neq \emptyset$ lo cual implica que para todo I subconjunto independiente de $V(H)$, $h^{-1}(I)$ es necesariamente un subconjunto independiente de $V(G)$.

Supongamos que para todo I subconjunto independiente de $V(H)$, $h^{-1}(I)$ es un subconjunto independiente de $V(G)$, en particular esto se cumple para cualquier pareja de vértices no adyacentes en H , es decir, $h^{-1}(u) \cup h^{-1}(v)$ es independiente para toda pareja de vértices $\{u, v\}$ que no sean adyacentes en H , esto implica que si $uv \in E(G)$ necesariamente $h(u)h(v) \in E(H)$. ■

Como un corolario muy sencillo de este teorema observemos que, dado un i -homomorfismo, la imagen inversa de un vértice es siempre un conjunto independiente, a este tipo de conjuntos —las imágenes inversas de los vértices— se les llaman **fibras**.

Cuando exista al menos un i -homomorfismo de G en H lo denotamos como $G \rightarrow H$, si no existe ningún i -homomorfismo ponemos $G \nrightarrow H$.

De manera más específica escribimos $G \xrightarrow{h} H$ para indicar que h es un i -homomorfismo de G en H .

Ahora si, veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.1. *Sea G no trivial, entonces G es una gráfica bipartita si y sólo si $G \rightarrow K_2$.*

Demostración.

Si G es una gráfica bipartita, podemos definir un i -homomorfismo h de $V(G)$ en $V(K_2) = \{1, 2\}$ como:

$$h(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in V_1 \\ 2 & \text{si } u \in V_2 \end{cases}$$

donde $\{V_1, V_2\}$ es una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes.

Por el contrario, si existe un i -homomorfismo $h : V(G) \rightarrow V(K_2)$, tenemos una partición de $V(G)$ en dos conjuntos independientes dada por $h^{-1}(1)$ y $h^{-1}(2)$, es decir, las únicas dos fibras del i -homomorfismo entre G y K_2 nos proporcionan la bipartición de $V(G)$ en conjuntos independientes. ■

Ejemplo 2.2. *Si G es isomorfa a alguna subgráfica de H , la inclusión de G en H es un i -homomorfismo; en particular, tenemos que si $G \rightarrow K_2$ entonces $G \rightarrow H$ para cualquier H con $E(H) \neq \emptyset$, pues tomamos la composición entre el i -homomorfismo que existe de G en K_2 y la inclusión de K_2 en H . (figura 2.1).*

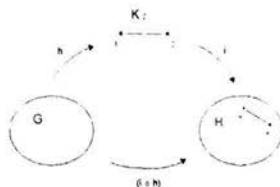


figura 2.1

Ejemplo 2.3. Para los ciclos pares tenemos que $C_n \rightarrow K_2$ y por lo tanto $C_n \rightarrow H$ para toda H con $E(H) \neq \emptyset$.

Ejemplo 2.4. Para ciclos impares C_m y C_n con $m \leq n$, tenemos que $C_n \rightarrow C_m$.

Demostración.

Sean $C_n = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $C_m = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ dos ciclos impares con $m \leq n$, entonces $h: V(C_n) \rightarrow V(C_m)$ definida de la siguiente manera es un i -homomorfismo

$$h(u_i) = \begin{cases} v_i & \text{para } 1 \leq i \leq m \\ v_1 & \text{para } m+1 \leq i \leq n \text{ con } i \text{ par} \\ v_m & \text{para } m+1 \leq i \leq n \text{ con } i \text{ impar} \end{cases}$$

■

Para aclarar este último ejemplo, en la figura 2.4 se muestra el caso específico correspondiente a los valores $n = 9$ y $m = 5$

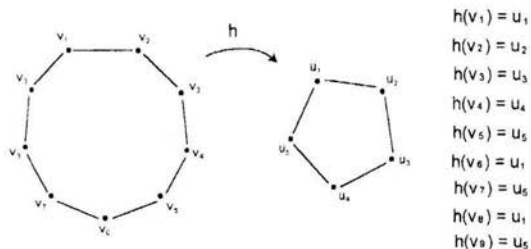


figura 2.2

Por lo general será conveniente tener una idea "visual" de algunos homomorfismos, es por eso que procederemos como sigue para representar un homomorfismo de G en H

- Dibujamos ambas gráficas y asignamos números a los vértices de H .
- A cada vértice de G se pondrá el número correspondiente a su imagen.

Por ejemplo, el i-homomorfismo de C_9 a C_5 que se vió en el ejemplo 2.4, queda representado como se muestra en la figura 2.3.

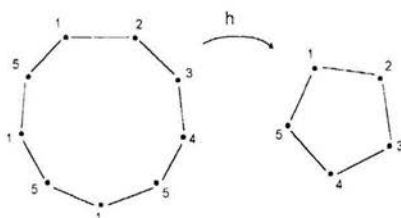


figura 2.3

Como hemos dicho antes, no siempre existen i-homomorfismos entre dos gráficas, es importante notar que la existencia de un i-homomorfismo de G en H , no necesariamente implica la existencia de uno de H en G .

A continuación se muestra un ejemplo concreto de este hecho.

Ejemplo 2.5. $C_5 \rightarrow C_3$ pero $C_3 \not\rightarrow C_5$

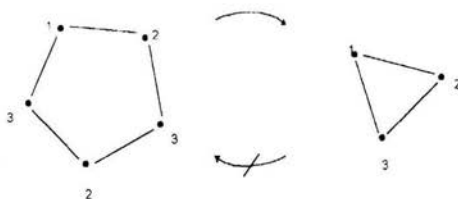


figura 2.4

En general, para ciclos impares se tiene que $C_n \rightarrow C_m$ pero $C_m \not\rightarrow C_n$ si $m \leq n$

Como corolario inmediato de este último ejemplo tenemos la siguiente:

Proposición 2.2. *Si H y G no son gráficas bipartitas y $G \rightarrow H$ entonces el cuello impar de H es a lo más el cuello impar de G , es decir*

$$c_i(H) \leq c_i(G)$$

2.1.2 Diferentes tipos de homomorfismos

Así como las funciones, los homomorfismos se pueden clasificar según sean suprayectivos, inyectivos o biyectivos. Comúnmente se les llaman **bimorfismos** a los homomorfismos biyectivos, **epimorfismos** a los suprayectivos y **monomorfismos** a los inyectivos.

Vale la pena aclarar que la inversa de un bimorfismo no necesariamente es un homomorfismo, por ejemplo, cualquier biyección de $V(\overline{K_n})$ en $V(K_n)$ es un bimorfismo y su inversa no es un homomorfismo.

Observemos que los monomorfismos —y por lo tanto los bimorfismos— son siempre homomorfismos irreflexivos.

Los homomorfismos para los cuales la imagen del dominio es una *subgráfica inducida* del codominio son particularmente importantes, existen dos tipos de estos.

Definición 2.3. *Un homomorfismo h de G en H es **pleno** si para toda pareja de vértices $\{h(u), h(v)\}$ adyacentes en H , tenemos que las preimágenes u y v son adyacentes en G .*

Definición 2.4. *Un homomorfismo h de G en H es **fiel** si $h(G)$ —la imagen de G bajo h — es subgráfica inducida de H .*

Observemos que todos los homomorfismos plenos son fieles, sin embargo existen homomorfismos fieles que no son plenos.

Como un ejemplo de esta afirmación, tenemos los i -homomorfismos de C_n a C_m descritos en el ejemplo 2.4. Para aclarar esto consideremos nuevamente el caso concreto de C_9 a C_5 . Este i -homomorfismo es fiel, sin embargo no es pleno pues existen vértices que son adyacentes en C_5 , y cuyas preimágenes no lo son en C_9 (figura 2.5)

$$v_1v_5 \in E(C_5)$$

$$v_1 = h(u_1) = h(u_6) = h(u_8)$$

$$v_5 = h(u_5) = h(u_7) = h(u_9)$$

$$u_1u_5 \notin E(C_9), u_1u_7 \notin E(C_9), u_6u_9 \notin E(C_9), u_8u_5 \notin E(C_9).$$

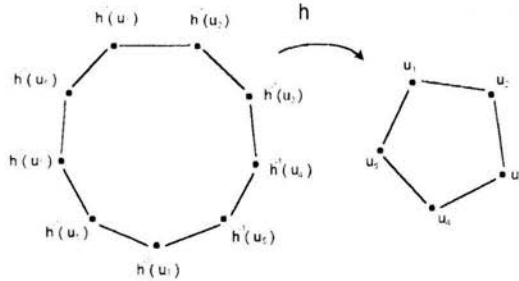


figura 2.5

Existe una caracterización muy cómoda de los homomorfismos plenos que los distingue claramente de los fieles; para entenderla consideremos una gráfica bipartita G con $E(G) \neq \emptyset$ y el i -homomorfismo de G en K_2 descrito en el ejemplo 2.1. Naturalmente este i -homomorfismo es fiel, y sólo es pleno en el caso en que G sea una gráfica bipartita completa.

De esta manera se tiene que si h es un homomorfismo de G en H , y $uv \in E(H)$, basta que exista alguna arista entre $h^{-1}(u)$ y $h^{-1}(v)$ para que h sea fiel, mientras que para que h sea pleno es necesario que $h^{-1}(u) \cup h^{-1}(v)$ induzca una gráfica bipartita completa.

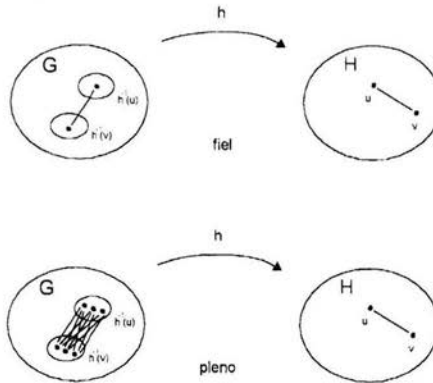


figura 2.6

Para concluir esta sección, sólo resta mencionar que los **isomorfismos** tales como fueron definidos en el capítulo I, son los **bimorfismos fieles**.

2.2 Cocientes

Dado un homomorfismo $h : V(G) \rightarrow V(H)$ sabemos que $h(G)$ —la imagen de G bajo h — es una subgráfica de H . En esta sección nos vamos a interesar por aquellos homomorfismos en que $h(G)$ sea exactamente H , es decir, en los homomorfismos que sean suprayectivos en vértices y aristas.

2.2.1 Epimorfismos fieles

Un epimorfismo fiel es precisamente un homomorfismo suprayectivo en vértices y aristas.

Definición 2.5. H es *cociente* (resp. *i-cociente*) de G si existe un epimorfismo (resp. *i-epimorfismo*) fiel de G en H .

Por ejemplo, C_3 es *i-cociente* de C_5 , en general —como se vió en el ejemplo 2.4— C_m es *i-cociente* de C_n si $m \leq n$ y ambos son números impares.

A continuación veremos que la definición clásica del cociente de una gráfica por una partición (definición 2.6), coincide con la que acabamos de dar (definición 2.5).

Definición 2.6. Sea G una gráfica y $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ una partición cualquiera de $V(G)$ en k subconjuntos (resp. subconjuntos independientes), G/\mathcal{P} , el *cociente canónico* de G por \mathcal{P} (resp. *i-cociente canónico* de G por \mathcal{P}), se define de la siguiente manera:

- $V(G/\mathcal{P}) = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$
- $V_i V_j \in E(G/\mathcal{P})$ si existen $v_i \in V_i$ y $v_j \in V_j$ tales que $v_i v_j \in E(G)$

La proyección natural $\Pi_{\mathcal{P}} : V(G) \rightarrow V(G/\mathcal{P})$ definida como $\Pi_{\mathcal{P}}(v) = V_i$ si $v \in V_i$, es un epimorfismo (resp. *i-epimorfismo*) fiel de G en G/\mathcal{P} , por lo que G/\mathcal{P} es un cociente (resp. un *i-cociente*) de G en el sentido de la definición 2.5.

Ejemplo 2.6. Consideramos $C_6 = u_1, u_2, \dots, u_6$ y las siguientes dos particiones:

$$\mathcal{P}_1 = \{V_1, V_2\} \text{ donde } V_1 = \{u_1, u_2, u_3\}, V_2 = \{u_4, u_5, u_6\}$$

$$\mathcal{P}_2 = \{V_3, V_4\} \text{ donde } V_3 = \{u_1, u_3, u_5\}, V_4 = \{u_2, u_4, u_6\}$$

al tomar los cocientes tenemos que $C_6/\mathcal{P}_1 \cong C_6/\mathcal{P}_2 \cong K_2$

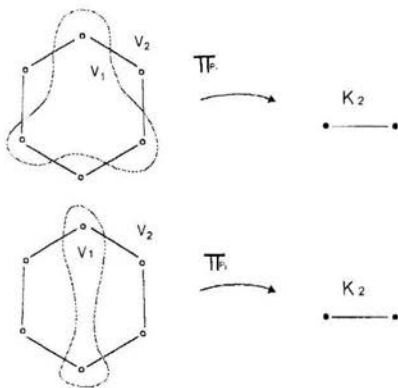


figura 2.7

$\Pi_{\mathcal{P}_1} : V(C_6) \rightarrow V(C_6/\mathcal{P}_1)$ es un *i-epimorfismo fiel*, y
 $\Pi_{\mathcal{P}_2} : V(C_6) \rightarrow V(C_6/\mathcal{P}_2)$ es simplemente un *epimorfismo fiel*.

Nótese que si H es cociente (resp. *i-cociente*) de G , entonces existirá una partición (resp. una partición en conjuntos independientes) \mathcal{P} de $V(G)$ de tal forma que el cociente (resp. *i-cociente*) canónico G/\mathcal{P} es una gráfica isomorfa a H , esta partición estará dada por las fibras del epimorfismo (resp. *i-epimorfismo*) fiel que va de G en H .

Proposición 2.3. Para todo $h : V(G) \rightarrow V(H)$ homomorfismo (resp. *i-homomorfismo*), existe una partición (resp. partición en conjuntos independientes) \mathcal{P} de $V(G)$, y un monomorfismo $m : V(G/\mathcal{P}) \rightarrow V(H)$ tal que $h = m \circ \Pi_{\mathcal{P}}$

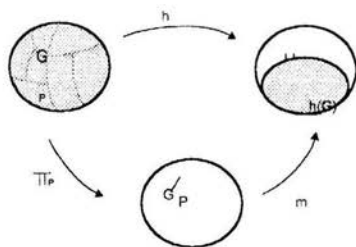


figura 2.10

Demostración.

Dado un homomorfismo (resp. *i*-homomorfismo) $h : V(G) \rightarrow V(H)$, sus fibras forman una partición (resp. partición en conjuntos independientes) \mathcal{P} de $V(G)$.

Además G/\mathcal{P} es isomorfa a $h(G)$ pues existe un biformismo fiel $\varphi : V(G/\mathcal{P}) \rightarrow V(h(G))$, definido como $\varphi(V_u) = u$ donde V_u es el vértice en G/\mathcal{P} correspondiente a $h^{-1}(u)$.

Sea $m : V(G/\mathcal{P}) \rightarrow V(H)$ definida como $m = i \circ \varphi$ donde i es la inclusión de $h(G)$ en H (figura 2.11); m es un monomorfismo y para todo $v \in V(G)$ se tiene que si $h(v) = u$ entonces

$$(m \circ \Pi_{\mathcal{P}})(v) = m(\Pi_{\mathcal{P}}(v)) = m(V_u) = u = h(v)$$

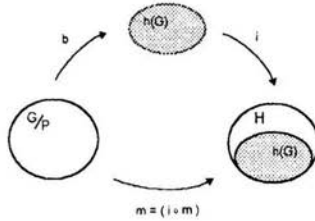


figura 2.11

por lo tanto $h = m \circ \Pi_{\mathcal{P}}$. ■

Observemos que h es un epimorfismo (resp. *i*-epimorfismo) fiel si y sólo si m es un isomorfismo.

En este momento hemos llegado al punto clave para entender la estrecha relación que existe entre las coloraciones propias y los homomorfismos irreflexivos.

Proposición 2.4. G es k -coloreable propiamente si y sólo si $G \rightarrow K_k$

Demostración.

Supongamos que G es propiamente k -coloreable, entonces tenemos una partición \mathcal{P} de $V(G)$ en k subconjuntos independientes (las clases cromáticas); $\Pi_{\mathcal{P}}$ es un *i*-homomorfismo de G en G/\mathcal{P} , que es una gráfica

de orden k : si f es cualquier monomorfismo de G/\mathcal{P} en K_k , entonces $f \circ \Pi_{\mathcal{P}}$ es un i -homomorfismo de G en K_k .

Recíprocamente, si $f : V(G) \rightarrow V(K_k)$ es un i -homomorfismo, entonces las fibras de f forman una partición de $V(G)$ en k subconjuntos independientes lo cual se puede ver como una k -coloración (propia) de vértices de G . ■

Las coloraciones que se mostraron en la figura 1.6 del Capítulo I nos proporcionan los siguientes i -cocientes:

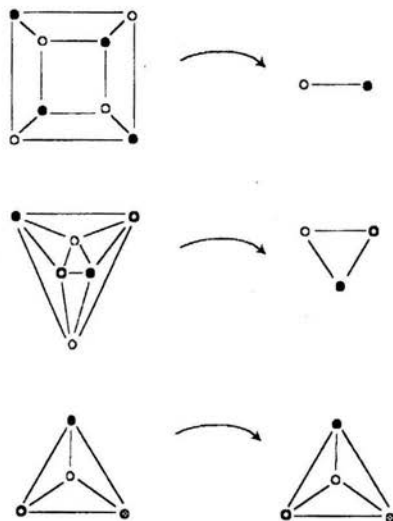


figura 2.12

2.2.2 i -epimorfismos elementales

Los i -epimorfismos fieles son muy interesantes y veremos en esta sección, que se pueden obtener componiendo **i -epimorfismos elementales** —aquellos i -epimorfismos que identifican sólo una pareja de vértices no adyacentes, es decir, que tienen una única fibra no trivial que consta exactamente de dos vértices no adyacentes—. Consecuentemente, cada i -cociente de una gráfica G es el último término de una sucesión de i -cocientes de G , en la cual cada

miembro se obtiene del anterior identificando un par de vértices no adyacentes.

Definición 2.7. H es un *i-cociente elemental* de G , si existe un *i-epimorfismo elemental* de G en H .

Proposición 2.5. Sea H *i-cociente propio* de G , entonces H es la imagen de G bajo la composición de puros *i-epimorfismos elementales*.

Demostración.

La demostración se hará por inducción sobre $n = |V(G)|$. Para $n = 3$ claramente tenemos el resultado.

Sea G una gráfica de orden $(n + 1)$ y H un *i-cociente propio* de G .

Como el *i-cociente* es propio existe alguna fibra no trivial, es decir, podemos encontrar un vértice $u \in V(H)$ tal que $|h^{-1}(u)| \geq 2$.

Tomamos $v, w \in h^{-1}(u)$, estos vértices no son adyacentes por lo que podemos considerar el *i-epimorfismo elemental* $h_{v,w}$ que los identifica.

Sea \tilde{G} la gráfica que se obtiene.

\tilde{G} es una gráfica de orden n y H sigue siendo *i-cociente propio* de \tilde{G} , por hipótesis de inducción sabemos que H se obtiene de \tilde{G} bajo la composición de puros *i-epimorfismos elementales*, y como $h_{v,w}$ es un *i-epimorfismo elemental* obtenemos el resultado, (figura 2.13). ■

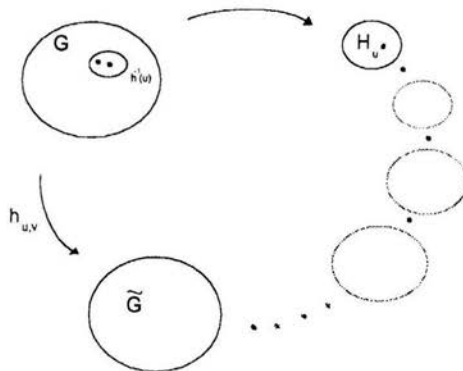


figura 2.13

Dada una gráfica G podemos tomar todas las gráficas que sean i -cocientes elementales de ella, luego todos los i -cocientes elementales de estas nuevas gráficas y así sucesivamente, de esta manera obtenemos todos los i -cocientes de G . Es claro que este proceso debe terminar en algún momento pues las gráficas que consideramos son siempre finitas.

En la figura 2.14 se muestran todos los i -cocientes de C_6 .

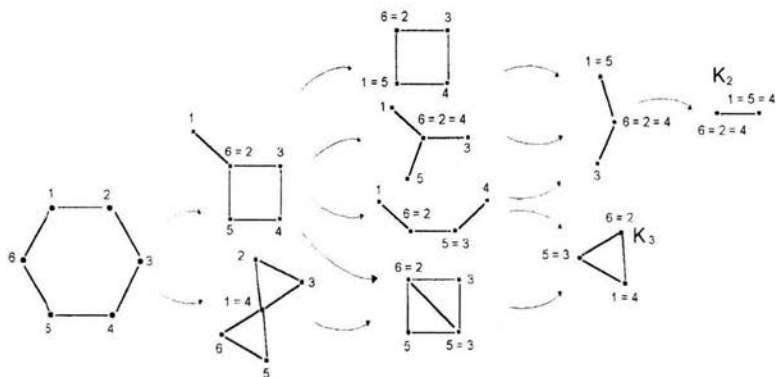


figura 2.14

Las gráficas completas no tienen i -cocientes pues en ellas, ya no existen vértices no adyacentes que se puedan identificar.

En general a este tipo de gráficas —aquellas cuyos únicos i -cocientes son ella misma— se les llaman **gráficas terminales**.

Las **gráficas terminales de una gráfica G** son todas las gráficas terminales que provienen de G . En la figura 2.14 se puede observar que K_2 y K_3 son las únicas gráficas terminales de C_6 .

De todas las gráficas terminales que una gráfica G pueda tener, nos interesan las de orden mínimo, a estas las llamaremos **i -cocientes mínimos** de G . Por ejemplo K_3 es gráfica terminal de C_6 pero no es i -cociente mínimo, el único i -cociente mínimo de C_6 es K_2 .

Nos interesan estas definiciones, pues el número cromático de una gráfica G , en términos de homomorfismos, significa lo siguiente:

Proposición 2.6. *El número cromático de una gráfica G es igual a k , si y sólo si K_k es i -cociente mínimo de G , es decir:*

$$\chi(G) = k \text{ si y sólo si } G \rightarrow K_k \text{ pero } G \not\rightarrow K_{k-1}$$

Demostración.

Supongamos que $\chi(G) = k$, entonces k es el mínimo número tal que G es k -coloreable.

Por ser G k -coloreable, tenemos que $G \rightarrow K_k$; por ser k mínimo, tenemos que G no es $(k-1)$ -coloreable y por lo tanto $G \not\rightarrow K_{k-1}$.

Supongamos ahora que $G \rightarrow K_k$ pero $G \not\rightarrow K_{k-1}$, se sigue inmediatamente que G es k -coloreable pero no es $(k-1)$ -coloreable, es decir el número cromático de G es igual a k . ■

Tal vez en este contexto no tenga mucho sentido hablar de gráficas terminales ó i -cocientes mínimos en vez de gráficas completas simplemente, pero en el siguiente capítulo se aplicarán estas mismas ideas para estudiar coloraciones en otras categorías de gráficas en donde las gráficas terminales no tienen por que ser completas. En algunas de estas categorías existen objetos (gráficas con estructura adicional) que poseen varios i -cocientes mínimos no isomorfos.

2.3 Retractos

Un homomorfismo de una gráfica en si misma se llama un **endomorfismo**. Naturalmente la imagen de un endomorfismo de G es una subgráfica de G .

2.3.1 Retractos y retractos impropios

Dada una gráfica G , nos vamos a interesar por aquellos endomorfismos irreflexivos cuya imagen sea una subgráfica inducida de G .

Definición 2.8. Sea $r : V(G) \rightarrow V(G)$ un endomorfismo (resp. i -endomorfismo) y $r(G) = H$.

Si $r(v) = v$ para todo $v \in V(H)$ decimos que r es una **retracción** (resp. **i -retracción**) y H es un **retracto** (resp. **i -retracto**) de G .

Antes de ver algunos ejemplos, tenemos dos observaciones:

Observación 2.1. La composición de retracciones (resp. *i*-retracciones) es una retracción (resp. *i*-retracción), por lo que si H es retracto (resp. *i*-retracto) de G y F es retracto (resp. *i*-retracto) de H , tenemos que F es un retracto (resp. *i*-retracto) también de G .

Observación 2.2. si H es un retracto (resp. *i*-retracto) de G , entonces H es isomorfo a un cociente (resp. *i*-cociente) de G .

Ejemplo 2.7. Sea $C_{2n} = u_1, u_2, \dots, u_{2n}$ un ciclo par. Si definimos

$r : V(C_{2n}) \rightarrow V(C_{2n})$ como:

$$r(u_i) = \begin{cases} u_1 & \text{si } i \text{ es impar} \\ u_2 & \text{si } i \text{ es par} \end{cases}$$

tenemos que la arista u_1u_2 es un *i*-retracto de C_{2n} .

Este es un ejemplo muy sencillo, sin embargo podríamos haber dicho aún más, ya que para los ciclos pares cualquier arista es un *i*-retracto.

Es importante observar que no siempre se da esta situación, se puede dar el caso de una gráfica que tenga dos subgráficas isomorfas, una de las cuales sea *i*-retracto de ella, mientras que la otra no; consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8. Sea F la gráfica que se muestra en la figura 2.15, en ella se pueden identificar dos subgráficas inducidas C' y C'' isomorfas a C_8 .

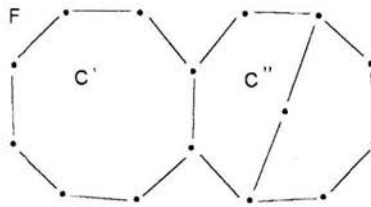


figura 2.15

C' es *i-retracto* de F , como se muestra en la figura 2.16, sin embargo C'' no es un *i-retracto* de F .

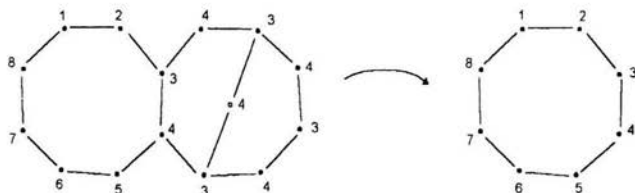


figura 2.16

Dada esta situación, es conveniente introducir un concepto más relajado.

Definición 2.9. Dadas dos gráficas G y H , decimos que H es **retracto impropio** (resp. ***i-retracto impropio***) de G , si existen homomorfismos (resp. *i-homomorfismos*) $h : V(G) \rightarrow V(H)$ y $g : V(H) \rightarrow V(G)$ tales que $h(g(u)) = u$ para todo $u \in V(H)$.

Lo que nos está diciendo esta definición es lo siguiente:

Proposición 2.7. H es *retracto impropio* (resp. *i-retracto impropio*) de G si y sólo si G tiene un *retracto* (resp. *i-retracto*) isomorfo a H .

Demostración.

Si H es *retracto* (resp. *i-retracto*) impropio de G , existen homomorfismos (resp. *i-homomorfismos*) $h : V(G) \rightarrow V(H)$ y $g : V(H) \rightarrow V(G)$ con la propiedad de que $h(g(u)) = u$ para todo $u \in V(H)$.

Esta condición nos implica que g es un monomorfismo fiel, y por esta razón es que $g(H)$ es una subgráfica inducida de G isomorfa a H . La retracción (resp. *i-retracción*) es $(g \circ h)$.

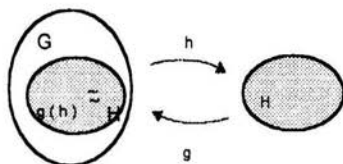


figura 2.17

Ahora supongamos que G tiene un retracto (resp. *i*-retracto) H' isomorfo a H .

Sea f el isomorfismo entre H' y H .

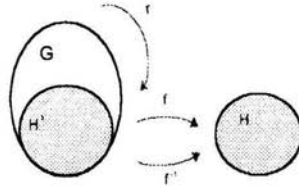


figura 2.18

Definimos h y g de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h &= (f \circ r) \\ g &= f^{-1} \end{aligned}$$

Veamos que estos homomorfismos (resp. *i*-homomorfismos) cumplen lo que queríamos:

$$h(g(u)) = (f \circ r)(f^{-1}(u)) = f(r(f^{-1}(u))).$$

Como $f^{-1}(u) \in V(H')$ y $r(u) = u$ para todo $u \in V(H')$ tenemos que:

$$f(r(f^{-1}(u))) = f(f^{-1}(u)) = u$$

por lo que $h(g(u)) = u$ para todo $u \in V(H)$, lo cual implica que H es un retracto (resp. *i*-retracto) impropio de G . ■

En el ejemplo 7 hemos visto que C_8 es *i*-retracto impropio de F , pues existe una subgráfica isomorfa a C_8 que es *i*-retracto de ella. En este mismo ejemplo podemos observar como esto, no necesariamente implica que cualquier subgráfica de F isomorfa a C_8 sea *i*-retracto de ella.

El concepto de retracto (resp. *i*-retracto) impropio, se utiliza si lo que nos interesa es distinguir únicamente el "tipo" de gráfica que puede ser retracto (resp. *i*-retracto) de G .

Para terminar esta sección veamos el siguiente resultado que nos será de mucha utilidad mas adelante.

Proposición 2.8. *Dado cualquier endomorfismo (resp. i-endomorfismo) h de una gráfica G , existe una potencia de h que es una retracción (resp. i-retracción) de G .*

Demostración.

Sea $h : V(G) \rightarrow V(G)$ un endomorfismo (resp. i-endomorfismo) cualquiera. Tenemos que:

$$G \supseteq h(G) \supseteq h^2(G) \supseteq \dots$$

Como G es una gráfica finita, existe n tal que:

$$h^{n-1}(G) = h^n(G).$$

Llamémosle H a esta subgráfica de G , es decir:

$$H = h^{n-1}(G) = h^n(G).$$

Observemos que la imagen de H bajo h es ella misma, por lo que h restringida a H es una biyección, entonces existe un índice k para el cual $h^{n+k}(G) = H$ y $h^{n+k}(u) = u$ para todo u vértice de H . ■

2.3.2 Equivalencia homomorfica

Definición 2.10. *Cuando tengamos que $G \rightarrow H$ y $H \rightarrow G$ diremos que G y H son **i-hom-equivalentes** y lo denotamos como $G \leftrightarrow H$.*

Es fácil verificar que \leftrightarrow es una relación de equivalencia.

Como ejemplos de gráficas i-hom-equivalentes tenemos los siguientes:

- $G \leftrightarrow K_2$ para cualquier gráfica bipartita G .
- $G \leftrightarrow R$ siempre que R sea retracto de G .

Estos dos ejemplos nos podrían sugerir que, para que dos gráficas sean i -hom-equivalentes, entonces una tiene que ser retracto de la otra; veremos que si $G \leftrightarrow R$ entonces G y R tienen un i -retracto impropio común, en particular uno muy especial que estudiaremos a continuación.

Anteriormente se han definido las *gráficas terminales* como aquellas gráficas cuyos únicos i -cocientes son ella misma; hemos visto también, que este tipo de gráficas son gráficas completas. Por supuesto una gráfica completa no tiene subgráficas propias que sean i -retractos de ella, entonces tiene sentido pensar de alguna manera en "i-retractos minimales".

Definición 2.11. Una gráfica es un *corazón* si no tiene ninguna subgráfica propia que sea i -retracto de ella.

No solo las gráficas completas son corazones, por ejemplo, también todas las gráficas con número cromático crítico son corazones.

Las gráficas con número cromático crítico son aquellas para las cuales, el número cromático de cualquiera de sus subgráficas, es menor al número cromático de la gráfica, ejemplos:

- Todos los ciclos impares.
- La gráfica de Petersen (figura 2.19)

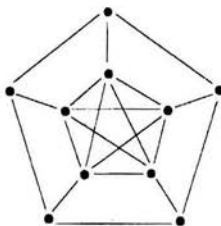


figura 2.19

Una buena manera de caracterizar a los corazones es la siguiente.

Proposición 2.9. G es un corazón si y sólo si todo i -endomorfismo de G es un automorfismo de G

Demostración.

Supongamos que G es un corazón, sea $h : V(G) \rightarrow V(G)$ cualquier i -endomorfismo. Por la proposición 8, tenemos que existe una potencia de h que es un i -retrato de G , pero como G es un corazón tenemos que:

$$h^n(G) = G$$

y esto demuestra que h es un automorfismo de G .

Si todo i -endomorfismo de G es un automorfismo de G , es claro que G es un corazón. ■

Definición 2.12. Decimos que H es un **corazón de G** , si H es un corazón y es i -retrato de G .

Observemos que toda gráfica finita G tiene al menos un corazón, pues recordemos que un i -retrato de un i -retrato de G , es un i -retrato de G . Entonces tomamos un i -retrato H de G con mínimo número de vértices y este será un corazón.

En principio una gráfica puede tener muchos corazones, por ejemplo, todas las aristas de un ciclo par son corazones, pero ¿puede tener una gráfica dos corazones no isomorfos?

Proposición 2.10. Todos los corazones de una gráfica son isomorfos.

Demostración.

Sean H_1 y H_2 dos corazones de G , con r_1 y r_2 las i -retracciones correspondientes.

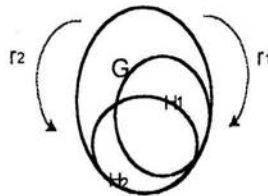


figura 2.20

Consideramos $f_1 : V(H_2) \rightarrow V(H_1)$ la restricción de r_1 en H_2 y

$f_2 : V(H_1) \rightarrow V(H_2)$ la restricción de r_2 en H_1 , entonces tanto $(f_1 \circ f_2)$ como $(f_2 \circ f_1)$ son endomorfismos de H_1 y H_2 respectivamente, pero como H_1 y H_2 son corazones, por la proposición 9, tenemos que estos endomorfismos en realidad son automorfismos.

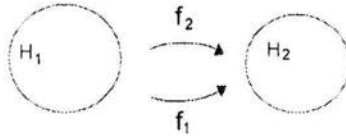


figura 2.21

Esto demuestra que H_1 y H_2 son gráficas isomorfas. ■

En este sentido podemos hablar de *el corazón de una gráfica*. Ahora si podemos demostrar que si dos gráficas G y H son i -hom-equivalentes, entonces G y H tienen un i -retracto impropio común.

Proposición 2.11. Si $G \leftrightarrow H$ entonces el corazón de G y el corazón de H son isomorfos.

Demostración.

Si G y H son i -hom-equivalentes, existen homomorfismos g y h como en el dibujo.

Sean G^c y H^c los corazones de G y H respectivamente; consideramos gráficas \tilde{G}^c y \tilde{H}^c isomorfas a G^c y H^c de tal manera que $\phi : V(G) \rightarrow V(\tilde{G}^c)$ y $\psi : V(H) \rightarrow V(\tilde{H}^c)$ sean las i -retracciones impropias correspondientes (i_{G^c} y i_{H^c} son las inclusiones).

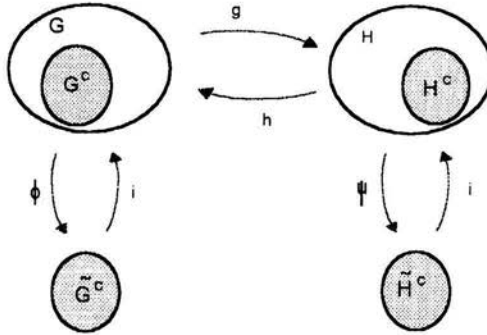


figura 2.22

Como \tilde{G}^c es un corazón, tenemos que $(i_{G^c} \circ g \circ h \circ \phi)$ es un automorfismo de \tilde{G}^c , y por lo tanto $(h \circ \phi) : V(H) \rightarrow V(\tilde{G}^c)$ es una *i-retracción impropia*, lo cual quiere decir que \tilde{G}^c es *i-retracto impropio* de H , por la proposición 10 tenemos que todos los corazones de una gráfica son isomorfos y así queda demostrado el resultado. ■

Capítulo 3

Coloraciones y categorías

En el capítulo pasado se ha mencionado la relación existente entre las coloraciones propias y los homomorfismos irreflexivos, a saber:

$$G \text{ es } k\text{-coloreable si y solo si } G \rightarrow K_k$$

En este capítulo vamos a definir, de manera análoga, como colorear otro tipo de gráficas: las gráficas orientadas y las gráficas con aristas n -coloreadas.

Para llevar acabo este análisis, es necesario situarnos en tres diferentes “universos” o “categorías” de gráficas y determinar claramente lo que los homomorfismos significan en cada una de ellas.

Vale la pena aclarar que no es nuestra intención el dar un tratamiento categórico del material que se presenta, simplemente queremos hacer notar que éste, puede situarse en un contexto más amplio.

3.1 Las tres categorías

A continuación se hará una breve descripción de las tres principales categorías que se consideran en este trabajo. Antes de esto es conveniente recordar la siguiente definición:

Una **categoría** \mathcal{C} esta dada por una clase de *objetos* \mathcal{X} y una clase de *morfismos* o “*flechas*” \mathcal{F} que cumplen las siguientes propiedades:

- Cada morfismo f tiene dos objetos asociados, un *dominio* y un *codominio*. Ponemos $X \xrightarrow{f} Y$ si el dominio del morfismo f es X y el codominio es Y . También se usa $X = \text{dom}(f)$ y $Y = \text{cod}(f)$.

- Dados dos morfismos f y g tales que $\text{dom}(g) = \text{cod}(f)$, la *composición* $g \circ f$ esta definida y tiene dominio $\text{dom}(f)$ y codominio $\text{cod}(g)$:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

- La composición es *asociativa*, es decir, dados $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ y $Z \xrightarrow{h} W$ tenemos que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Para cada objeto X existe un morfismo *identidad* id_X que satisfice $\text{id}_X g = g$ para toda $Y \xrightarrow{g} X$ y $\text{id}_X f = f$ para toda $X \xrightarrow{f} Y$.

Esta definición es muy general. Para nuestro fin es más conveniente restringirnos a **categorías concretas**, aquellas cuyos objetos son conjuntos con cierta estructura y cuyos morfismos son funciones que preservan esa estructura.

Como ejemplos clásicos de categorías concretas tenemos a los espacios topológicos con las funciones continuas y a los grupos con los homomorfismos.

3.1.1 Gráficas

La primera categoría que consideramos, se denota con la letra \mathcal{G} ; sus **objetos** son todas las **gráficas simples, finitas** y **conexas**; sus **morfismos** son los **homomorfismos irreflexivos** como se definieron en el Capítulo II.

A los elementos de \mathcal{G} se les denota con letras mayúsculas A, B, G, H etc.

A los subconjuntos se les denota con mayúsculas cursivas $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{H}$ etc.

Como se vió en el Capítulo II, los **objetos terminales** de \mathcal{G} siempre son gráficas completas.

Las **coloraciones** en \mathcal{G} que vamos a considerar son las **coloraciones propias** como se definieron en el Capítulo I.

3.1.2 Origráficas

La segunda categoría con la que vamos a trabajar, es la categoría $\vec{\mathcal{G}}$ cuyos **objetos** son todas las posibles **origráficas** con soporte en \mathcal{G} .

A los elementos de $\vec{\mathcal{G}}$ se les denota con letras mayúsculas y una flecha: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{G}, \vec{H}$ etc.

Para denotar al conjunto de origráficas que tienen su soporte en un subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ se emplea el símbolo $\vec{\mathcal{A}}$.

En la figura 3.1 se muestran todas las posibles origráficas cuyo soporte es C_4 . A este conjunto de origráficas lo denotamos por \mathcal{O}_{C_4} ; en general, para denotar al conjunto de todas las origráficas con soporte G , utilizamos el símbolo \mathcal{O}_G .

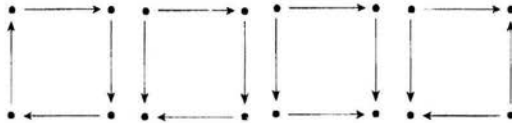


figura 3.1

Los **morfismos** de $\vec{\mathcal{G}}$ son los **i-homomorfismos** definidos de la siguiente manera:

- $h : V(\vec{G}) \rightarrow V(\vec{H})$ es un i-homomorfismo de \vec{G} en \vec{H} si:

$$uv \in F(\vec{G}) \text{ implica que } h(u)h(v) \in F(\vec{H}).$$

(recordemos que $uv \in F(\vec{G})$ significa que la flecha va de u a v).

$\vec{\mathcal{G}}$ es una subcategoría de la categoría \mathcal{D} cuyos objetos son digráficas y que tiene por morfismos a los i-homomorfismos.

Sea D una digráfica y $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ una partición de $V(D)$ en conjuntos independientes, definimos D/\mathcal{P} , el **i-cociente canónico de D por \mathcal{P}** $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de la misma manera que en \mathcal{G} se definió G/\mathcal{P} :

$$V(D/\mathcal{P}) = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}.$$

$$V_i V_j \in F(D/\mathcal{P}) \text{ si existen } v_i \in V_i \text{ y } v_j \in V_j \text{ tales que } v_i v_j \in F(D).$$

$$\Pi_{\mathcal{P}} : V(D) \rightarrow V(D/\mathcal{P}) \text{ tal que } \Pi_{\mathcal{P}}(v) = V_i \text{ si } v \in V_i.$$

Recordemos que un i-cociente elemental de una gráfica G en \mathcal{G} , se obtiene al identificar una pareja de vértices no adyacentes de G . Observemos que si D es una digráfica, al identificar dos vértices no adyacentes se obtiene otra digráfica D' , sin embargo si D es una origráfica, D' no siempre resulta ser una origráfica, pues puede tener mas de una flecha entre dos vértices (figura 3.2).

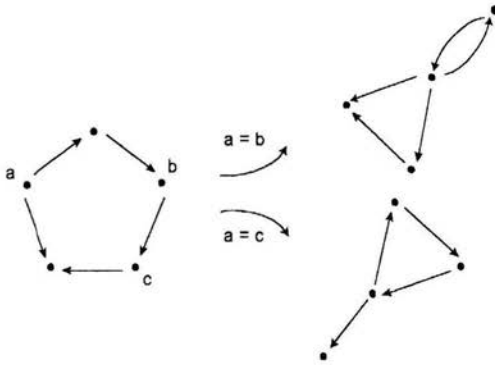


figura 3.2

Entonces dada $\vec{G} \in \vec{\mathcal{G}}$, no basta que \mathcal{P} sea una partición en conjuntos independientes de $V(\vec{G})$ para que \vec{G}/\mathcal{P} sea un objeto de la categoría $\vec{\mathcal{G}}$. Esto es debido a que los i-homomorfismos en $\vec{\mathcal{G}}$, además de preservar flechas, preservan trayectorias dirigidas de longitud dos, lo cual se demuestra en la siguiente:

Proposición 3.1. *Dado h , un i-homomorfismo de \vec{G} en \vec{H} , tenemos que si $uv \in F(\vec{G})$ y $vw \in F(\vec{G})$ entonces $h(u) \neq h(w)$.*

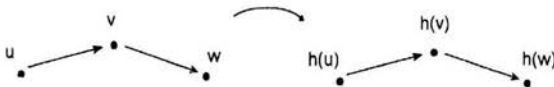


figura 3.3

Demostración.

Sean u, v y w vértices de \vec{G} tales que tanto uv como vw son flechas. Entonces, por definición, tenemos que

$$h(u)h(v) \in F(\vec{H}) \text{ y } h(v)h(w) \in F(\vec{H}).$$

Si $h(u)$ fuera igual a $h(w)$, tendríamos flechas de ida y vuelta entre dos vértices de \vec{H} , lo cual es una contradicción pues \vec{H} pertenece a la categoría de las origráficas. ■

De esta manera tenemos que \vec{H} es un **i-cociente elemental** de \vec{G} en $\vec{\mathcal{G}}$ si \vec{H} se obtiene al identificar dos vértices de \vec{G} que no estén conectados ni con una flecha ni con una trayectoria dirigida de longitud dos.

Es por esta razón que las gráficas soporte de los objetos terminales en esta categoría no son necesariamente gráficas completas.

Observación 3.1. *Los objetos terminales en $\vec{\mathcal{G}}$ son las origráficas en las que cada par de vértices está unido por una flecha ó por una trayectoria dirigida de longitud dos.*

Ejemplo 3.1. *Los únicos ciclos, orientados cíclicamente, que son gráficas terminales en $\vec{\mathcal{G}}$ son C_3^{\rightarrow} , C_4^{\rightarrow} y C_5^{\rightarrow} .*

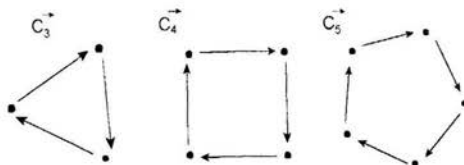


figura 3.4

Una vez aclaradas las diferencias entre los i-cocientes elementales —y por lo tanto los objetos terminales— de \mathcal{G} y de $\vec{\mathcal{G}}$, ya podemos definir lo que significan las coloraciones de vértices para origráficas.

Queremos que una k -coloración de $\vec{G} \in \vec{\mathcal{G}}$ se pueda ver como un i-homomorfismo de \vec{G} en alguna orientación de K_k .

Entonces, para decidir como colorear en $\vec{\mathcal{G}}$, sólo hay que tener cuidado al hacer el cociente de las clases cromáticas para que obtengamos realmente un elemento de la categoría. Por ejemplo, la coloración de C_6^{\rightarrow} mostrada en la figura 3.5 es mala, pues la digráfica que resulta al hacer el cociente no pertenece a $\vec{\mathcal{G}}$: es decir, el cociente no es una origráfica.

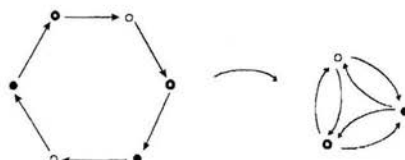


figura 3.5

De acuerdo con lo anterior, definimos las coloraciones en $\vec{\mathcal{G}}$ de la siguiente manera.

Definición 3.1. Una *k-coloración admisible* de $\vec{G} \in \vec{\mathcal{G}}$ es una partición de $V(\vec{G})$ en k subconjuntos de tal forma que:

- Sea una *k-coloración propia* de G (la gráfica soporte de \vec{G})
- Todas las flechas que vayan de una clase cromática a otra tengan la misma dirección.

En las coloraciones admisibles así definidas, dos vértices unidos por una trayectoria dirigida de longitud uno ó dos, necesariamente pertenecen a distintas clases cromáticas. En particular, esto implica que si una origráfica contiene una trayectoria dirigida de longitud dos, se necesitan al menos tres colores para colorearla; en la figura 3.6 se muestra una coloración admisible de C_6^- .

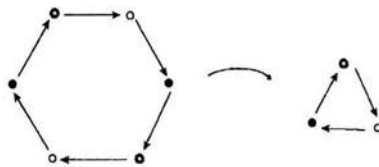


figura 3.6

De lo anterior se desprende la siguiente:

Proposición 3.2. Existe una *k-coloración admisible* de $\vec{G} \in \vec{\mathcal{G}}$ si y sólo si

$$\vec{G} \rightarrow \vec{K}_k \text{ con } \vec{K}_k \in \mathcal{O}_{K_k}.$$

3.1.3 Gráficas n-coloreadas en aristas

La tercera categoría que vamos a estudiar, es la categoría $\mathcal{G}^{(n)}$ cuyos **objetos** son todas las posibles gráficas **n-coloreadas en aristas** con soporte en \mathcal{G} .

Definición 3.2. Una gráfica n -coloreada en aristas es un par ordenado $(G, f) = G^f$ donde G es una gráfica y f es una n -coloración de $E(G)$ en la que se utilizan los n colores.

Si (G, f) es una gráfica n -coloreada en aristas decimos que G es su **soporte**.

Una gráfica n -coloreada en aristas (G, f) determina una partición del conjunto de aristas de su soporte en n clases cromáticas no vacías que son las fibras de f :

$$\begin{aligned} E_i(G) &= f^{-1}(c_i) \\ E(G) &= \bigcup_{i=1}^n E_i(G) \\ E_i(G) &\neq \emptyset \\ E_i(G) \cap E_j(G) &= \emptyset, \quad i \neq j \end{aligned}$$

En la figura 3.7 se muestran todas las posibles gráficas 2-coloreadas en aristas cuyo soporte es C_4 . A este conjunto de gráficas n -coloreadas en aristas se les denota por $\mathcal{C}_{C_4}^{(2)}$; en general, para denotar al conjunto de gráficas n -coloreadas en aristas con soporte G , usamos el símbolo $\mathcal{C}_G^{(n)}$.

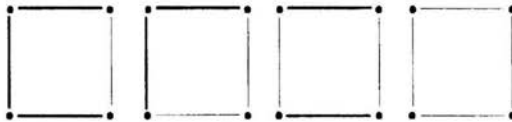


figura 3.7

Para denotar todas las gráficas n -coloreadas en aristas cuyo soporte es algún elemento de un subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ se emplea el símbolo $\mathcal{A}^{(n)}$.

Los **morfismos** en esta categoría serán los **i-homomorfismos** definidos de la siguiente manera:

- $h : V(G^f) \rightarrow V(H^f)$ es un i -homomorfismo de G^f en H^f si:
 $uv \in E(G)$ implica que $h(u)h(v) \in E(H)$ y el color de la arista uv es el mismo que el de la arista $h(u)h(v)$, es decir, si $uv \in E_i(G)$ entonces $h(u)h(v) \in E_i(H)$.

Haciendo un análisis similar al que se hizo en la sección anterior, encontramos la siguiente:

Observación 3.2. *Los objetos terminales en $\mathcal{G}^{(n)}$ son gráficas con la propiedad de que cada par de vértices está unido por una arista ó por una trayectoria bicromática de longitud dos.*

De la misma manera que se hizo para $\vec{\mathcal{G}}$, hay que decidir como colorear objetos de $\mathcal{G}^{(n)}$ evitando que, al identificar los vértices de cada clase cromática, se formen aristas paralelas de distintos colores. Por ejemplo, la coloración que se muestra en la figura 3.8 es mala.

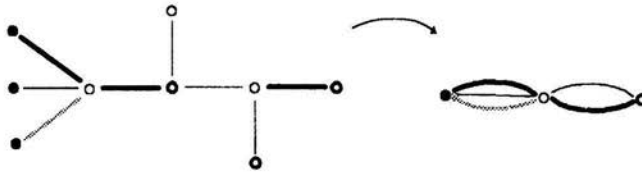


figura 3.8

Con lo dicho anteriormente queda motivada la siguiente:

Definición 3.3. *Una k -coloración admisible de $G^f \in \mathcal{G}^{(n)}$ es una partición de $V(G)$ en k subconjuntos de tal forma que:*

- *Sea una k -coloración propia de G .*
- *Todas las aristas que vayan de una clase a otra tengan el mismo color.*

En las coloraciones admisibles así definidas, dos vértices unidos por una arista ó una trayectoria bicromática de longitud dos, siempre pertenecen a distintas clases cromáticas.

Es por esta razón que no existe una 3-coloración admisible para el árbol de la figura 3.8 ; a continuación se muestra una 4-coloración admisible de esta gráfica:

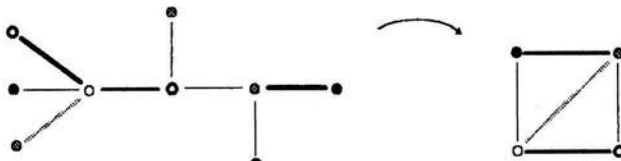


figura 3.9

Por supuesto en $\mathcal{G}^{(n)}$ tenemos el siguiente resultado que es análogo a los correspondientes en \mathcal{G} y $\overrightarrow{\mathcal{G}}$.

Proposición 3.3. $G^f \in \mathcal{G}^{(n)}$ es k -coloreable admisiblemente si y sólo si

$$G^f \rightarrow K_k^f \text{ con } K_k^f \in \mathcal{C}_{K_k}^{(n)}.$$

En ocasiones es conveniente modificar un poco esta categoría y considerar alguna de las siguientes:

- $\mathcal{G}^{(\leq n)}$: categoría cuyos objetos son todas las gráficas k -coloreadas en aristas con soporte en \mathcal{G} y $k \leq n$; los morfismos son los mismos de $\mathcal{G}^{(n)}$.
- $\tilde{\mathcal{G}}^{(n)}$: categoría cuyos objetos son los mismos de $\mathcal{G}^{(n)}$, pero los morfismos se definen de la siguiente manera, los llamaremos **i-homomorfismos flexibles**:

$h : V(G) \rightarrow V(H)$ es un i-homomorfismo flexible de G en H si $uv \in E_i(G)$ implica que $h(u)h(v) \in E_{p(i)}(H)$ donde p es una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$.

3.2 Variaciones del número cromático

La importancia del estudio de los objetos terminales se transparenta al ver que podemos generalizar el concepto de número cromático a las categorías que acabamos de introducir, inspirados en el hecho de que en \mathcal{G} tenemos la siguiente afirmación:

$$\chi(G) = k \text{ si y sólo si } K_k \text{ es i-cociente mínimo de } G.$$

3.2.1 El número cromático generalizado

En adelante, cuando se hable de \mathcal{U} nos estaremos refiriendo a cualquiera de las tres categorías \mathcal{G} , $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ ó $\mathcal{G}^{(n)}$; si hablamos de homomorfismos ó coloraciones admisibles, el significado se entiende según la categoría.

Definición 3.4. El **número cromático** de un objeto (gráfica estructurada) $G \in \mathcal{U}$ es el mínimo número de colores para el cual existe una coloración admisible de G .

Definición 3.5. El **número cromático** de un objeto (gráfica estructurada) $G \in \mathcal{U}$ es el mínimo orden de un objeto terminal en \mathcal{U} que provenga de G , es decir, el orden de un i -cociente mínimo para G .

Ya hemos visto en la proposición 2.6 que en \mathcal{G} estas definiciones son equivalentes; notemos que también lo son en las categorías $\vec{\mathcal{G}}$ y $\mathcal{G}^{(n)}$.

En ciertas ocasiones resulta conveniente pensar el número cromático en estos términos. Como un ejercicio, para motivar esta idea, veamos como es que el **número dicromático** de una **digráfica** puede definirse dentro de este mismo esquema:

- El **número dicromático** de una digráfica es el mínimo número de colores que se necesitan para colorear sus vértices de modo que no se formen ciclos monocromáticos.

Sea $\widehat{\mathcal{D}}$ la categoría cuyos objetos son las digráficas y que tiene por morfismos a los homomorfismos cuyas fibras son acíclicas, entonces el número dicromático de una digráfica D es el mínimo orden de un objeto terminal en $\widehat{\mathcal{D}}$ que provenga de D , es decir, el orden de un i -cociente mínimo para D en $\widehat{\mathcal{D}}$.

Además del número cromático de los miembros de \mathcal{U} , nos interesa conocer familias (subconjuntos de \mathcal{U}) que cumplan con la siguiente propiedad:

Definición 3.6. Decimos que una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ es **cromáticamente acotada**, si existe un entero k tal que el número cromático de todos sus miembros es a lo más k .

El tipo de problemas que se abordan en este trabajo son los siguientes, dada una familia cualquiera $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ cromáticamente acotada:

- ¿Cuál es el mínimo número de colores con que se pueden colorear todos los elementos de \mathcal{F} ? a este número le llamaremos el **número cromático de la familia** y lo denotamos con el símbolo $\chi(\mathcal{F})$.
- ¿Existirá algún objeto en la categoría con la propiedad que todos los elementos de la familia se puedan mapear bajo un i -homomorfismo admisible en él?, de existir ese objeto, ¿será único? ¿qué tan chico puede ser?

Para contestar, ó intentar contestar, este tipo de preguntas es necesario hacer algunas definiciones mas específicas.

3.2.2 Nichos y nichales

Definición 3.7. Dada una familia cualquiera $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, un **nichal** de \mathcal{F} es un subconjunto $\mathcal{N} \subset \mathcal{U}$ con la propiedad de que para cada elemento F de \mathcal{F} existe un *i*-homomorfismo admisible de F en algún elemento del nichal.

Es claro que una familia \mathcal{F} puede tener muchos nichales diferentes, denotamos por $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ a la familia de todos ellos, así:

$$\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{N} \subset \mathcal{U} \mid \text{para toda } G \in \mathcal{F} \text{ existe } N \in \mathcal{N} \text{ con } G \rightarrow N\}.$$

Por supuesto, para cualquier \mathcal{U} y para cualquier $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ tenemos que $\mathcal{F} \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$, es decir, una familia siempre será nichal de si misma.

Para cualquier \mathcal{U} y para cualquier $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ se puede construir un nichal (que será llamado **nichal de i-cocientes mínimos** de \mathcal{F}) tomando para cada miembro de \mathcal{F} , algún *i*-cociente admisible —de ese miembro— de orden mínimo.

Hay familias infinitas que poseen nichales finitos, e incluso con un solo miembro. Este último caso es particularmente interesante pues en él, todos los miembros de \mathcal{F} se pueden mapear bajo *i*-homomorfismos admisibles en una sola gráfica de la categoría.

Definición 3.8. A los nichales que constan de un solo elemento se les llama **nichos**.

Observemos que los elementos de un nichal no son necesariamente nichos.

Es claro que si una familia \mathcal{F} tiene nichos, entonces puede tener muchos diferentes, denotamos por $N(\mathcal{F})$ al conjunto de todos ellos, así:

$$N(\mathcal{F}) = \{N \in \mathcal{U} \mid \text{para toda } G \in \mathcal{F} \text{ se tiene que } G \rightarrow N\}.$$

En general nos interesa saber cuando $N(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de nichos para familias de gráficas en \mathcal{G}

Ejemplo 3.2. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ la familia de los árboles, entonces $\{K_2\} \in N(\mathcal{A})$.

Esto es claro pues los árboles son gráficas bipartitas.



figura 3.10

Ejemplo 3.3. Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ la familia de los ciclos, entonces $\{K_3\} \in N(\mathcal{C})$.

Los ciclos pares se pueden colorear con dos colores, los impares con tres; en ambos casos tenemos i -homomorfismos en K_3 .



figura 3.11

Ejemplo 3.4. Sea $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}$ la familia de gráficas planas, entonces $\{K_4\} \in N(\mathcal{P})$.

Esta es otra manera de enunciar el teorema de los cuatro colores.



figura 3.12

Con ayuda de estos nuevos conceptos podemos replantear las preguntas que nos hicimos anteriormente de una manera mucho más clara:

Dada una familia cromáticamente acotada $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$:

- ¿Cuál es el número cromático de \mathcal{F} ?
- ¿Existen nichos para \mathcal{F} ?, de ser así, ¿Qué tan chicos pueden ser?

En el caso de los nichos, además de interesarnos por el orden mínimo que puedan tener, nos interesamos por su estructura.

Es importante notar que el mínimo orden de un nicho para \mathcal{F} , no necesariamente es igual al mínimo número de colores que se requieren para colorear de manera admisible todos los elementos de \mathcal{F} . Esta afirmación es cierta en

el caso de que la categoría sea \mathcal{G} , pero en general para $\vec{\mathcal{G}}$ y $\mathcal{G}^{(n)}$ no es así; más adelante veremos la razón de este hecho y daremos algunos ejemplos.

A continuación se definen dos parámetros que serán muy importantes para el desarrollo de este trabajo.

Definición 3.9. *El espesor de un nichal \mathcal{N} es el supremo de los ordenes de sus elementos, y se denota por $esp(\mathcal{N})$*

$$esp(\mathcal{N}) = \sup_{N \in \mathcal{N}} |V(N)|.$$

Si $esp(\mathcal{N})$ es finito, es claro que podemos colorear cada miembro de \mathcal{F} con a lo más tantos colores como $esp(\mathcal{N})$ siendo \mathcal{N} cualquier nichal de \mathcal{F} .

Entonces, lo que en realidad nos interesa es el mínimo de los espesores de entre todos los nichales que \mathcal{F} pueda tener.

Definición 3.10. *Dada una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ denotamos como $e(\mathcal{F})$ al espesor mínimo de un nichal para \mathcal{F}*

$$e(\mathcal{F}) = \min_{\mathcal{N} \in \mathcal{N}(\mathcal{F})} esp(\mathcal{N}).$$

Para calcular $e(\mathcal{F})$ sólo hay que considerar algún nichal de i -cocientes mínimos de \mathcal{F} pues:

Proposición 3.4. *El espesor de un nichal de i -cocientes mínimos de \mathcal{F} es exactamente $e(\mathcal{F})$.*

Demostración.

Sea n el espesor de un nichal de i -cocientes mínimos para \mathcal{A} . Afirmamos que no puede existir un nichal de espesor menor que n puesto que existe una gráfica en \mathcal{F} que tiene como i -cociente mínimo algún objeto de orden n . ■

Otra cosa muy distinta es preguntarse que tan chicos pueden ser los nichos de una familia si es que estos existen.

Definición 3.11. *Dada una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, si $\mathcal{N}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, $n(\mathcal{F})$ es el mínimo orden de un nicho para \mathcal{F}*

$$n(\mathcal{F}) = \min_{N \in \mathcal{N}(\mathcal{F})} |V(N)|.$$

En particular, para cualquier $G \in \mathcal{U}$ —considerando a la familia que consta de la sola gráfica— tenemos que $n(G)$ es el orden de un cociente mínimo de G , es decir, su número cromático.

Para una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ no es cierto que su número cromático sea $n(\mathcal{F})$. El número cromático de una familia es más bien $e(\mathcal{F})$ como se demuestra a continuación.

Proposición 3.5. *Dada $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, $e(\mathcal{F})$ es el mínimo número de colores tal que cada miembro de \mathcal{F} se puede colorear de manera admisible con a lo más $e(\mathcal{F})$ colores.*

Demostración.

Sabemos que podemos colorear cada miembro de \mathcal{F} con a lo más tantos colores como $\text{esp}(N)$, siendo N cualquier nichal de \mathcal{F} . En particular, podemos hacerlo con $e(\mathcal{F})$.

Para verificar que es el mínimo, recordemos que $e(\mathcal{F})$ es el espesor de un nichal de i -cocientes mínimos, por lo que existe algún objeto en \mathcal{F} que tiene como i -cociente mínimo un elemento de ese orden y por lo tanto no puede colorearse con menos colores. ■

Como los nichos son nichales y su espesor es su orden, en general tenemos que $e(\mathcal{F}) \leq n(\mathcal{F})$.

En algunos casos se da la igualdad y en otros no. En este momento lo único que podemos decir al respecto es lo siguiente:

Proposición 3.6. *En \mathcal{G} , para toda \mathcal{F} siempre sucede que $e(\mathcal{F}) = n(\mathcal{F})$.*

Demostración.

Como hemos dicho antes, los objetos terminales en \mathcal{G} son gráficas completas. Entonces un nichal de cocientes mínimos está formado por gráficas completas cuyo espesor es el orden de la más grande. Esta gráfica es un nicho pues contiene a las demás, y es de orden mínimo pues existe una gráfica en \mathcal{F} que la tiene como i -cociente mínimo. ■

En $\vec{\mathcal{G}}$ y $\mathcal{G}^{(n)}$ no siempre se da esta igualdad; a continuación se presentan dos ejemplos muy sencillos de este hecho.

Ejemplo 3.5. En $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, consideremos al conjunto \mathcal{O}_{C_3} (figura 3.13). Este conjunto es nichal de cocientes mínimos de sí mismo, por lo que

$$e(\mathcal{O}_{C_3}) = 3.$$

Claramente \mathcal{O}_{C_3} no puede tener un nicho de orden 3, entonces

$$e(\mathcal{O}_{C_3}) \neq n(\mathcal{O}_{C_3}).$$

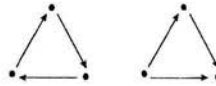


figura 3.13

Ejemplo 3.6. En $\mathcal{G}^{(n)}$ consideremos al conjunto $\mathcal{C}_{C_3}^{(2)}$ (figura 3.14). Este conjunto también es nichal de cocientes mínimos de sí mismo, por lo que

$$e(\mathcal{C}_{C_3}^{(2)}) = 3.$$

Claramente $\mathcal{C}_{C_3}^{(2)}$ no puede tener un nicho de orden 3, entonces

$$e(\mathcal{C}_{C_3}^{(2)}) \neq n(\mathcal{C}_{C_3}^{(2)}).$$



figura 3.14

Capítulo 4

El número cromático orientado

El número cromático orientado se define para elementos de $\vec{\mathcal{G}}$ análogamente a como está definido el número cromático en \mathcal{G} . En la primera sección de este capítulo veremos algunos resultados al respecto relacionados con los ciclos. Posteriormente veremos como este concepto se puede ampliar y definiremos el número cromático orientado para elementos de \mathcal{G} .

4.1 Para origráficas

El número cromático orientado para origráficas está definido de las siguientes dos maneras: usaremos una u otra indistintamente pues son equivalentes:

Definición 4.1. *El número cromático orientado $ocn(\vec{G})$, de $\vec{G} \in \vec{\mathcal{G}}$ es:*

- *El mínimo k tal que exista una k -coloración admisible de \vec{G} .*
- *El orden de un i -cociente mínimo de \vec{G} en $\vec{\mathcal{G}}$.*

Entonces $ocn(\vec{G}) = \mathbf{n}(\vec{G})$.

Ejemplo 4.1. *Sea C_n^- el ciclo de orden n orientado cíclicamente, entonces $ocn(C_3^-) = 3$, $ocn(C_4^-) = 4$ y $ocn(C_5^-) = 5$*

Por otro lado, como C_n^{-} contiene trayectorias dirigidas de longitud dos, se necesitan al menos tres colores para colorearla admisiblemente, es decir:

$$3 \leq \text{ocn}(C_n^{-}).$$

Con estas dos desigualdades obtenemos que:

$$\text{ocn}(C_n^{-}) = 3 \text{ si } n \equiv 0 \pmod{3}.$$

- Si $n \equiv 1 \pmod{3}$, en la figura 4.2 se muestra que $C_n^{-} \rightarrow \overrightarrow{K}_4$; esto nos dice que:

$$\mathbf{n}(C_n^{-}) \leq 4.$$

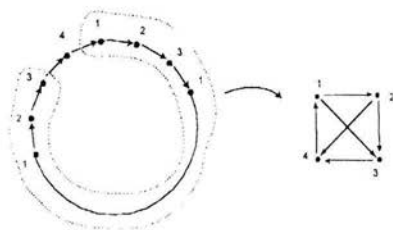


figura 4.3

Por otro lado, $\text{ocn}(C_n^{-})$ no puede ser 3 pues la coloración obligada por las trayectorias dirigidas de longitud dos, no lo permiten. Por lo tanto tenemos que:

$$\text{ocn}(C_n^{-}) = 4 \text{ si } n \equiv 1 \pmod{3}.$$

- Para $n \equiv -1 \pmod{3}$ consideramos $n \geq 7$ pues el caso $n = 5$ ya se tomó en cuenta. En la figura 4.4 se muestra que $C_n^{-} \rightarrow \overrightarrow{K}_4$, por lo que:

$$\mathbf{n}(C_n^{-}) \leq 4.$$

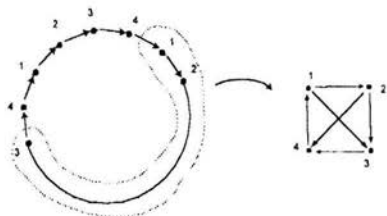


figura 4.4

$ocn(C_n^-)$ no puede ser 3 pues la coloración admisible, obligada por las trayectorias dirigidas de longitud dos, no lo permiten. Entonces

$ocn(C_n^-) = 4$ si $n \equiv -1 \pmod{3}$ excepto $n = 5$. ■

En esta demostración, además de obtener el número cromático orientado exacto para cada ciclo orientado cíclicamente, hemos encontrado un conjunto de tres origráficas que forman un nichal para esta familia.

Corolario 4.1. Sea $\mathcal{C}^- \subset \vec{\mathcal{G}}$ la familia de los ciclos orientados cíclicamente, entonces $\{C_3^-, \vec{K}_4, C_5^-\} \in \mathcal{N}(\mathcal{C}^-)$.

Antes de continuar, recordemos algunas cosas importantes que se vieron en el capítulo anterior:

- El número cromático orientado de una familia $\mathcal{F} \subset \vec{\mathcal{G}}$, es el mínimo número de colores que se requieren para colorear admisiblemente todos los elementos de \mathcal{F} , y lo podemos obtener calculando $e(\mathcal{F})$ que es el espesor mínimo de un nichal para \mathcal{F} ; además, el espesor de un nichal de i -cocientes mínimos de \mathcal{F} es exactamente $e(\mathcal{F})$.
- El hecho de que todos los elementos de una familia se puedan colorear admisiblemente con $e(\mathcal{F})$ colores no implica que exista un nicho de orden $e(\mathcal{F})$ para esa familia ya que, en general —siendo $n(\mathcal{F})$ el mínimo orden de un nicho para \mathcal{F} — se tiene que $e(\mathcal{F}) \leq n(\mathcal{F})$.

Hemos visto en el Capítulo III, que para toda familia $\mathcal{F} \subset \vec{\mathcal{G}}$ se cumple la igualdad $e(\mathcal{F}) = n(\mathcal{F})$. También hemos visto que en $\vec{\mathcal{G}}$ esto no es necesariamente cierto. Sin embargo, existen familias que sí cumplen con esta

igualdad; la familia de los ciclos orientados nos proporcionan un ejemplo. Para demostrarlo, primero veamos los siguientes lemas referentes únicamente a ciclos orientados cíclicamente.

Lema 4.1. Sea $\mathcal{C}^{-} \subset \vec{\mathcal{G}}$ la familia de los ciclos orientados cíclicamente, entonces $e(\mathcal{C}^{-}) = n(\mathcal{C}^{-}) = 5$.

Demostración.

Con las tres gráficas del nichal que se muestra en el Corolario 1, podemos construir un nicho de orden 5 para \mathcal{C}^{-} , el mostrado en la figura 4.5. Esta gráfica es nicho para \mathcal{C}^{-} pues es nicho para $\{C_3^{-}, \vec{K}_4, C_5^{-}\}$.

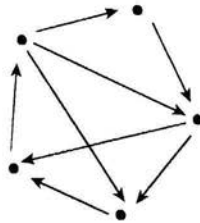


figura 4.5

La existencia de este nicho implica que

$$n(\mathcal{C}^{-}) \leq 5.$$

Por otro lado sabemos que $e(\mathcal{C}^{-})$ es igual al espesor de un nichal de i -cocientes mínimos y como C_5^{-} es una gráfica terminal tenemos que

$$5 \leq e(\mathcal{C}^{-}),$$

por lo que

$$5 \leq e(\mathcal{C}^{-}) \leq n(\mathcal{C}^{-}) \leq 5,$$

lo cual implica el resultado. ■

Observemos que si quitamos a C_5^- de la familia de ciclos orientados cíclicamente, podemos seguir exactamente la misma demostración para probar que \vec{K}_4 es nicho de $\mathcal{C}^- \setminus \{C_5^-\}$ y por lo tanto obtenemos el siguiente:

Lema 4.2. $e(\mathcal{C}^- \setminus \{C_5^-\}) = n(\mathcal{C}^- \setminus \{C_5^-\}) = 4$.

Nuestro objetivo ahora es extender este resultado para la familia completa de ciclos en $\vec{\mathcal{G}}$ no necesariamente orientados cíclicamente. Para lograrlo, demosremos primero el siguiente

Teorema 4.2. *Sea $\vec{\mathcal{C}} \subset \vec{\mathcal{G}}$ la familia de origráficas cuyos soportes son ciclos, entonces \vec{K}_4 es un nicho para $\vec{\mathcal{C}} \setminus \{C_5^-\}$.*

Demostración.

Demostraremos por inducción que $\vec{C}_n \rightarrow \vec{K}_4$ para cada $\vec{C}_n \in \vec{\mathcal{C}} \setminus \{C_5^-\}$.

Caso 1) $n = 2m$. La inducción será sobre m ; la base es para $m = 2$ y la coloración deseada se muestra en la figura 4.6.

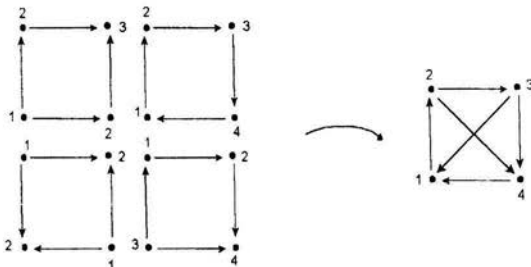


figura 4.6

Como hipótesis de inducción tenemos que $\vec{C}_{2m} \rightarrow \vec{K}_4$ para cualquier $\vec{C}_{2m} \in \vec{\mathcal{C}} \setminus \{C_5^-\}$.

Sea \vec{C}_n cualquier elemento de $\vec{\mathcal{C}} \setminus \{C_5^-\}$ con $n = 2(m + 1)$, entonces tenemos dos posibilidades:

- Si \vec{C}_n está orientado cíclicamente, por el Lema 2, sabemos que $\vec{C}_n \rightarrow \vec{K}_4$.

- Si \vec{C}_n no está orientado cíclicamente, existen dos flechas encontradas y podemos realizar un i -homomorfismo elemental como se muestra en la figura 4.7.

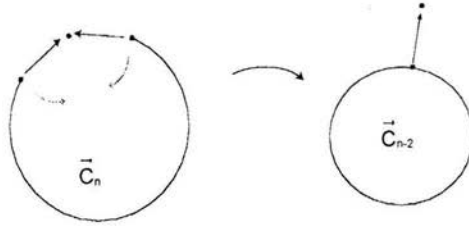


figura 4.7

Por hipótesis de inducción tenemos un i -homomorfismo de \vec{C}_{n-2} en \vec{K}_4 y, como todos los vértices de \vec{K}_4 tienen flechas que entran y flechas que salen, podemos extender ese i -homomorfismo para obtener uno de \vec{C}_n en \vec{K}_4 de la manera indicada en la figura 4.8. Así, queda demostrado el resultado para el caso par.

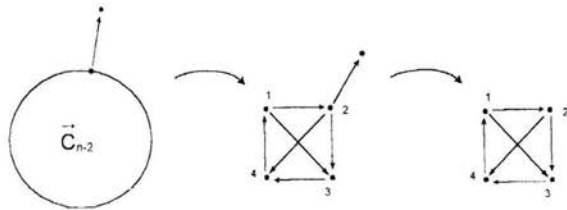


figura 4.8

Caso 2) $n = 2m + 1$. En este caso funciona la misma demostración, sólo nos falta checar la base de inducción, que es con $n = 7$, la cual se muestra en la figura 4.9.

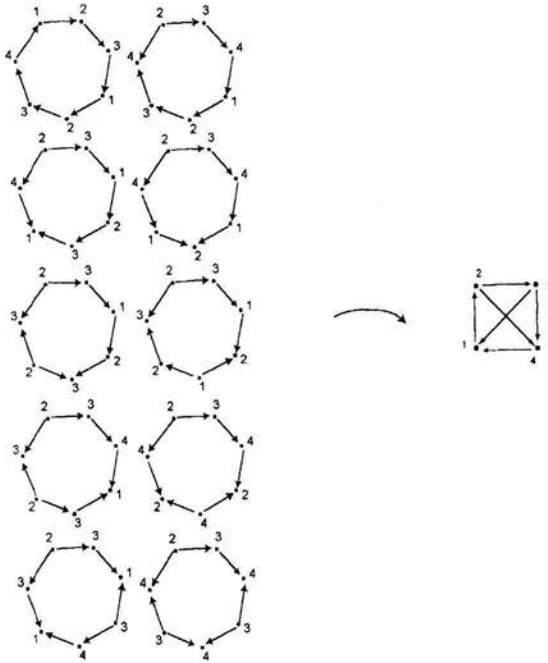


figura 4.9

Con esto queda demostrado que \vec{K}_4 es un nicho para $\vec{\mathcal{C}} \setminus \{C_5^-\}$. ■

Como consecuencia de este resultado, tenemos el siguiente:

Teorema 4.3. $e(\vec{\mathcal{C}} \setminus \{C_5^-\}) = n(\vec{\mathcal{C}} \setminus \{C_5^-\}) = 4$.

Demostración.

La existencia de un nicho de orden 4 para $\vec{\mathcal{C}} \setminus \{C_5^-\}$ implica que

$$n(\vec{\mathcal{C}} \setminus \{C_5^-\}) \leq 4.$$

Por otro lado, tenemos que $4 \leq e(\vec{\mathcal{C}} \setminus \{C_5^-\})$ pues existen ciclos orientados con número cromático orientado igual a 4. ■

4.2 Para gráficas

El concepto de número cromático orientado se puede extender para elementos de \mathcal{G} de la siguiente manera:

Definición 4.2. Dada una gráfica $G \in \mathcal{G}$, su **número cromático orientado** $ocn(G)$, es el mínimo número de colores con el cual se puedan colorear admisiblemente todas las origráficas cuyo soporte sea G .

El número cromático orientado de una gráfica $G \in \mathcal{G}$, se puede obtener calculando el máximo de los números cromáticos orientados de los miembros de \mathcal{O}_G , es decir:

$$ocn(G) = \max_{\vec{G} \in \mathcal{O}_G} \{ocn(\vec{G})\}.$$

Como $ocn(\vec{G})$ es el orden de un i -cociente mínimo de \vec{G} , podemos tomar un nichal de i -cocientes mínimos para \mathcal{O}_G , y su espesor es exactamente $ocn(G)$, es decir

$$ocn(G) = e(\mathcal{O}_G).$$

Ejemplo 4.2. ¿Cuál es el número cromático orientado de C_4 ?

Consideramos \mathcal{O}_{C_4} y un nichal de i -cocientes mínimos de \mathcal{O}_{C_4} (figura 4.10); el espesor de este nichal es 4 y, por lo tanto, $ocn(C_4) = 4$.

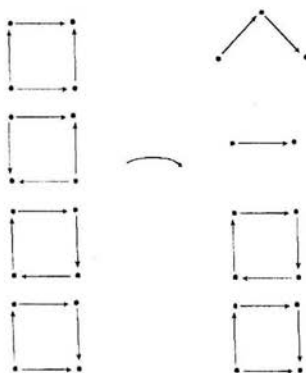


figura 4.10

4.2.1 Ciclos

Demostraremos que todos los ciclos tienen número cromático orientado a lo más 4 —excepto el pentágono que, por supuesto, tiene número cromático orientado 5—.

Teorema 4.4. *Sea $C_n \in \mathcal{G}$ el ciclo de orden n , entonces $ocn(C_n) \leq 4$ para toda $n \neq 5$.*

Demostración.

Sabemos por el Teorema 3 que $e(\vec{\mathcal{C}} \setminus \{C_5^{-}\}) = 4$.

Como $\mathcal{O}_{C_n} \subset \vec{\mathcal{C}} \setminus \{C_5^{-}\}$ para toda $n \neq 5$, tenemos que $e(\mathcal{O}_{C_n}) \leq 4$ lo cual quiere decir exactamente que $ocn(C_n) \leq 4$. ■

Cuando $n \equiv \pm 1 \pmod{3}$ podemos decir más: En ese caso sabemos que existe al menos un elemento de \mathcal{O}_{C_n} con número cromático 4 —recordemos que $ocn(C_n^{-}) = 4$ donde C_n^{-} es el ciclo de orden n orientado cíclicamente— entonces se tiene que

$$ocn(C_n) = 4 \text{ si } n \equiv \pm 1 \pmod{3} \text{ (} n \neq 5\text{)}.$$

4.2.2 Árboles

Para conocer o acotar el número cromático orientado de los árboles, seguiremos la misma estrategia que se usó para la familia de los ciclos: demostraremos que $e(\vec{\mathcal{A}}) = n(\vec{\mathcal{A}}) = 3$ —donde $\vec{\mathcal{A}}$ es la familia de origráficas cuyo soporte es un árbol—. Para esto, primero buscaremos algún nicho para $\vec{\mathcal{A}}$ de orden 3.

Teorema 4.5. *Sea $\vec{\mathcal{A}} \subset \vec{\mathcal{G}}$ la familia de origráficas cuyo soporte es un árbol, entonces $\{C_3^{-}\} \in N(\vec{\mathcal{A}})$.*

Demostración.

Se demostrará por inducción sobre $n = |V(\vec{\mathcal{A}})|$ que para cada miembro $\vec{A} \in \vec{\mathcal{A}}$ se tiene $\vec{A} \rightarrow C_3^{-}$.

Si $n = 2$ ó $n = 3$ tenemos los i -homomorfismos que se muestran en la figura 4.11.

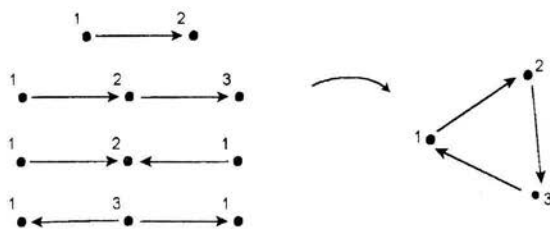


figura 4.11

Sea \vec{A} un miembro cualquiera de $\vec{\mathcal{A}}$ de orden n y sea u un vértice terminal de \vec{A} .

Por hipótesis de inducción existe un i -homomorfismo de $\vec{A}-u$ en C_3^- .

Como todos los vértices de C_3^- tienen una flecha que entra y otra que sale, podemos extender este i -homomorfismo a un i -homomorfismo de \vec{A} en C_3^- sin importar la orientación que tenga la arista incidente en u (figura 4.12). ■

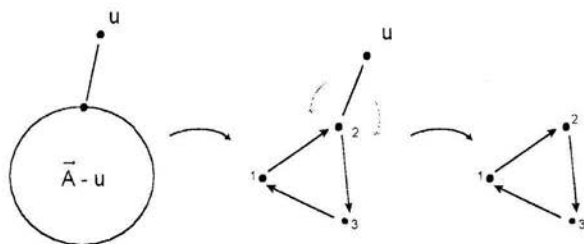


figura 4.12

Como consecuencia de este resultado, tenemos el siguiente

Teorema 4.6. $e(\vec{\mathcal{A}}) = n(\vec{\mathcal{A}}) = 3$.

Demostración.

La existencia de un nicho de orden 3 implica que $n(\vec{\mathcal{A}}) \leq 3$; por otro lado, sabemos que si una gráfica contiene una trayectoria dirigida de longitud 2, su número cromático orientado es al menos 3, por lo que $3 \leq e(\vec{\mathcal{A}})$. Así obtenemos que

$$3 \leq e(\vec{\mathcal{A}}) \leq n(\vec{\mathcal{A}}) \leq 3,$$

lo cual implica el resultado. ■

Ahora sí, podemos saber cual es el número cromatico orientado exacto de cada árbol: para los árboles de orden uno ó dos tenemos que

$$\begin{aligned} ocn(A_1) &= 1, \\ ocn(A_2) &= 2. \end{aligned}$$

En general tenemos el siguiente

Teorema 4.7. *Sea $A_n \in \mathcal{G}$ un árbol cualquiera de orden $n \geq 3$, entonces $ocn(A_n) = 3$.*

Demostración.

Recordemos que $ocn(A_n) = e(\mathcal{O}_{A_n})$.

Claramente $\mathcal{O}_{A_n} \subset \vec{\mathcal{A}}$, por lo que $e(\mathcal{O}_{A_n}) \leq e(\vec{\mathcal{A}}) = 3$.

Por otro lado, si $n \geq 3$, existe al menos una trayectoria de longitud 2 que al orientarla con la misma dirección nos obliga a utilizar al menos tres colores. ■

4.2.3 Periplanas

Las gráficas *periplanas* son aquellas gráficas planas en la cuales todos sus vértices pertenecen a una misma cara que, supondremos, es la exterior. La figura 4.13 muestra un ejemplo de gráfica periplana.

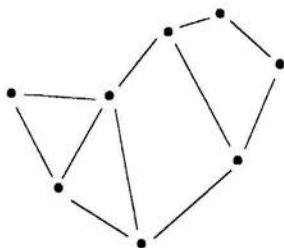


figura 4.13

Queremos acotar el número cromático orientado de las gráficas periplanas. Para hacerlo usaremos la misma idea que se usó en la demostración del teorema 4.5. Allí se demostró, por inducción, que C_3^{\rightarrow} es nicho para la familia de árboles. La inducción se pudo hacer esencialmente por dos razones: la primera, que para cualquier árbol siempre podemos elegir un vértice terminal; la segunda, que C_3^{\rightarrow} tiene la propiedad de que en cada vértice hay una flecha que entra y otra que sale.

Las gráficas periplanas no tienen vértices terminales, sin embargo, siempre podemos elegir un vértice de grado dos. Para facilitar las cosas, primero buscaremos un nicho para las gráficas periplanas orientadas maximales.

Lema 4.3. *Sea \mathcal{OP}_{\max} la familia de las gráficas periplanas maximales, entonces $\{\vec{C}_7\langle 3\rangle\} \in N(\vec{\mathcal{OP}}_{\max})$.*

Demostración.

Sea $\vec{G} \in \vec{\mathcal{OP}}_{\max}$ donde n es el orden de \vec{G} . Se demostrará por inducción sobre n que $\vec{G} \rightarrow \vec{C}_7\langle 3\rangle$.

Para $n = 3$ se cumple claramente que $\vec{G} \rightarrow \vec{C}_7\langle 3\rangle$, pues $\vec{C}_7\langle 3\rangle$ tiene como subgráficas a los dos miembros de \mathcal{O}_{C_3} .

Sea \vec{G} cualquier orientación de una gráfica periplana maximal, de orden n mayor que 3.

Sea u un vértice de grado 2 de \vec{G} y sean v y w sus vecinos. Podemos asumir que $vw \in F(\vec{G})$.

$\vec{G} - u$ es claramente periplana y, por hipótesis de inducción, existe un i -homomorfismo φ de $\vec{G} - u$ en $\vec{C}_7\langle 3\rangle$. Ya que $\vec{C}_7\langle 3\rangle$ es transitivo en flechas, podemos asumir que la imagen de uw es 01.

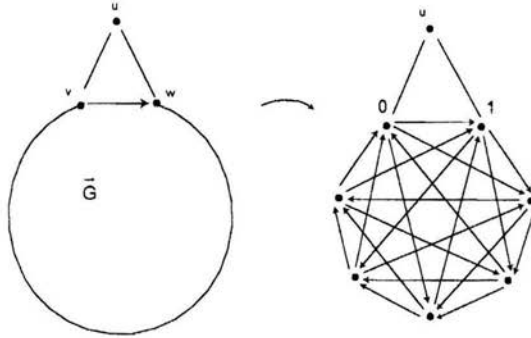


figura 4.14

El i -homomorfismo φ se puede extender a un i -homomorfismo de \vec{G} en $\vec{C}_7(3)$ donde la imagen de u varía según se muestra en la figura 4.15. ■

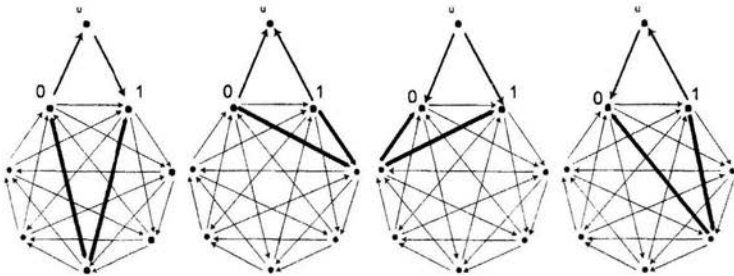


figura 4.15

Con este resultado podemos demostrar el siguiente

Teorema 4.8. Sea $\vec{\mathcal{OP}} \subset \vec{\mathcal{G}}$ la familia de las gráficas periplanas, entonces $\{\vec{C}_7(3)\} \in N(\vec{\mathcal{OP}})$.

Demostración.

Toda gráfica periplana es subgráfica generadora de alguna gráfica periplana maximal. ■

Corolario 4.2. $e(\overrightarrow{\mathcal{OP}}) = n(\overrightarrow{\mathcal{OP}}) = 7$.

Demostración.

La existencia de un nicho de orden 7 para esta familia implica que $n(\overrightarrow{\mathcal{OP}}) \leq 7$.

En la figura 4.16 se muestra una gráfica periplana orientada que es un objeto terminal en $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ pues cada pareja de vértices está conectada por una trayectoria dirigida de longitud 1 ó 2. Esto implica que $7 \leq e(\overrightarrow{\mathcal{OP}})$ con lo cual queda demostrado el resultado. ■

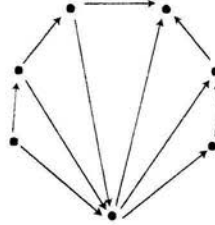


figura 4.16

A continuación se muestra el resultado como lo presenta E. Sopena en [10].

Teorema 4.9. (E. Sopena) Toda gráfica periplana tiene número cromático orientado a lo más 7.

Demostración.

Sea $G \in \mathcal{G}$ una gráfica periplana, entonces $\mathcal{O}_G \subset \overrightarrow{\mathcal{OP}}$, por lo que $e(\mathcal{O}_G) \leq e(\overrightarrow{\mathcal{OP}}) = 7$. ■

4.2.4 Gráficas con máximo grado k

Un resultado clásico sobre el número cromático en \mathcal{G} es el siguiente:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Encontrar una cota para el número cromático orientado de una gráfica, en términos de su grado máximo, resulta un propósito muy interesante. Para realizarlo usaremos el siguiente resultado —bien conocido como el *teorema de Vizing*— que relaciona al máximo grado de una gráfica con su **índice cromático** de la siguiente manera:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Recordemos que el **índice cromático** $\chi'(G)$ de una gráfica G , está definido como el mínimo número de colores que se necesitan para colorear las aristas de G con la propiedad de que cada dos aristas incidentes a un mismo vértice reciban distinto color.

Desafortunadamente no tenemos un resultado tan simple como en \mathcal{G} . Sin embargo, el hecho de poder acotar el número cromático orientado en términos del máximo grado es un resultado notable.

Teorema 4.10. *Sea G una gráfica con $\Delta(G) = k$, entonces*

$$\text{ocn}(G) \leq 4 \binom{k+1}{2}.$$

Demostración.

Por el teorema de Vizing, sabemos que podemos colorear las aristas de G con a lo más $(k+1)$ colores, de modo que dos aristas del mismo color no incidan con un mismo vértice.

Sean $G_{i,j}$ las subgráficas generadoras con las aristas de los colores $\{i, j\}$, con i distinto de j . Tenemos $\binom{k+1}{2}$ subgráficas de este tipo.

Observemos que cada $G_{i,j}$ es de grado máximo dos, por lo que sus componentes conexas serán trayectorias o ciclos pares y, en consecuencia, su número cromático orientado será a lo más 4, es decir

$$\text{ocn}(G_{i,j}) \leq 4 \text{ para cada } \{i, j\}_{i \neq j}.$$

Entonces, para cada $\vec{G} \in \mathcal{O}_G$, podemos tomar particiones $\mathcal{P}_{i,j}$ de $V(\vec{G})$ en cuatro clases, con la propiedad de que al tomar los cocientes correspondientes en cada $\vec{G}_{i,j}$ —la orientación de $G_{i,j}$ inducida por \vec{G} — obtenemos objetos de $\vec{\mathcal{G}}$.

De esta manera tenemos $\binom{k+1}{2}$ particiones distintas de $V(\vec{G})$. Si consideramos \mathcal{P} el refinamiento común de estas particiones, entonces \mathcal{P} es una partición de $V(\vec{G})$ en a lo más $4^{\binom{k+1}{2}}$ clases que cumple $\vec{G}/\mathcal{P} \in \vec{\mathcal{G}}$.

Lo anterior demuestra que $\text{ocn}(\vec{G}) \leq 4^{\binom{k+1}{2}}$ para toda $\vec{G} \in \mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ por lo que $\text{ocn}(G) \leq 4^{\binom{k+1}{2}}$. ■

Corolario 4.3. Sea $\mathcal{G}^{\Delta \leq k}$ la familia de gráficas con máximo grado a lo más k . entonces:

$$e(\overline{\mathcal{G}^{\Delta \leq k}}) \leq 4^{\binom{k+1}{2}}.$$

Observemos que esta cota es muy grande. Por ejemplo, para $k = 2$ tenemos $e(\overline{\mathcal{G}^{\Delta \leq 2}}) \leq 64$, mientras que hemos demostrado en la sección pasada que $e(\overline{\mathcal{G}^{\Delta \leq 2}}) \leq 5$ pues $\mathcal{G}^{\Delta \leq 2}$ es la familia de ciclos y trayectorias.

Hasta el momento, la mejor cota superior para $e(\overline{\mathcal{G}^{\Delta \leq k}})$ que se conoce, es la siguiente. no daremos la demostración en este trabajo.

Teorema 4.11.(Kostochka, Sopena, Zhu, [7]). Sea G una gráfica con $\Delta(G) = k$. entonces

$$\text{ocn}(G) \leq 2 \cdot k^2 \cdot 2^k.$$

También se ha demostrado en [7] que, para toda $k \geq 2$, existe una gráfica con máximo grado k y número cromático orientado al menos $2^{\frac{k}{2}}$.

Para valores pequeños de k , sólo se conocen los referentes a $k = 2$ que hemos mencionado anteriormente, y el siguiente resultado que tampoco demostraremos en este trabajo.

Teorema 4.12. (Sopena, Vignal [11]). Sea G una gráfica con $\Delta(G) = 3$. entonces $\text{ocn}(G) \leq 11$.

4.2.5 Gráficas con número cromático acíclico acotado

Uno de los propósitos que se tienen al estudiar un invariante numérico, como es el número cromático orientado, es caracterizar familias de gráficas con dicho parámetro acotado. Hemos visto en la sección pasada que una gráfica con grado máximo acotado tiene número cromático orientado acotado, sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, los árboles tienen número cromático orientado a lo más tres, mientras que su máximo grado de ninguna manera está acotado.

La familia de gráficas con número cromático acíclico acotado es exactamente la familia de gráficas con número cromático orientado acotado, es decir, podemos encontrar una cota superior para el número cromático orientado en términos del número cromático acíclico (teorema 4.14) y también podemos dar una cota superior para el número cromático acíclico en términos del número cromático orientado (teorema 4.13).

Teorema 4.13. (Kostochka, Sopena, Zhu, [7]). *Sea G una gráfica con número cromático orientado a lo más k , entonces*

$$\chi_a(G) \leq k^{\lceil \log_2(\lceil \log_2 k \rceil + \frac{1}{2}) \rceil + 1}.$$

La demostración de este teorema no se presentará en este trabajo.

La demostración del siguiente teorema sí la daremos, pero para ello veamos primero el siguiente

Lema 4.4. *Sea $\vec{G} \in \mathcal{O}_G$ con G bipartita y acíclica, y sea $\{V_1, V_2\}$ una partición en conjuntos independientes de $V(G)$, entonces existen particiones $\{V'_1, V''_1\}$ y $\{V'_2, V''_2\}$ de V_1 y V_2 respectivamente, tales que al tomar el cociente de \vec{G} por $\mathcal{P} = \{V'_1, V''_1, V'_2, V''_2\}$ obtenemos un elemento de $\vec{\mathcal{G}}$.*

Demostración.

Si \vec{G} no es trivial, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe una flecha uv de V_1 en V_2 .

Definimos $u \in V'_1$ y $v \in V'_2$, después seguimos el i -homomorfismo que se encuentra en la figura 4.17.

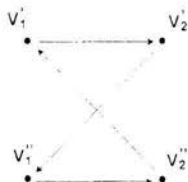


figura 4.17

■

Teorema 4.14. (Raspaud, Sopena, [8]). *Sea G una gráfica con número cromático acíclico a lo más k , entonces $\text{ocn}(G) \leq k \cdot 2^{(k-1)}$.*

Demostración.

Sean V_1, V_2, \dots, V_n las clases cromáticas de alguna coloración acíclica de G .

Para cada pareja de colores $\{i, j\}_{i \neq j}$ consideramos la subgráfica inducida $G[V_i \cup V_j]$.

Cada una de estas gráficas es bipartita y acíclica. Utilizando el resultado del lema 4, podemos asegurar que, dada cualquier orientación, existen particiones $V_i = \{V'_{i,j}, V''_{i,j}\}$ y $V_j = \{V'_{j,i}, V''_{j,i}\}_i$ con la propiedad de que al tomar el cociente obtenemos un elemento de la categoría $\vec{\mathcal{G}}$.

Entonces para cada $\vec{G} \in \mathcal{O}_G$, consideramos en cada V_i el siguiente conjunto de $(k-1)$ biparticiones:

$$V_i = \{V'_{i,j}, V''_{i,j}\}_{j \neq i}.$$

Llamemos \mathcal{P}_i al refinamiento común de estas particiones en V_i . El número de clases de \mathcal{P}_i es a lo más $2^{(k-1)}$.

La unión de las \mathcal{P}_i nos da una partición \mathcal{P} de $V(\vec{G})$ con a lo más $k \cdot 2^{(k-1)}$ clases con la propiedad de que $\vec{G}/\mathcal{P} \in \vec{\mathcal{G}}$.

Lo anterior demuestra que $\text{ocn}(\vec{G}) \leq k \cdot 2^{(k-1)}$ para toda $\vec{G} \in \mathcal{O}_G$ por lo que $\text{ocn}(G) \leq k \cdot 2^{(k-1)}$. ■

Corolario 4.4. *Sea $\mathcal{G}^{x_a \leq k}$ la familia de gráficas con número cromático acíclico a lo más k , entonces*

$$e(\overline{\mathcal{G}^{x_a \leq k}}) \leq k \cdot 2^{(k-1)}.$$

Observemos que $\mathcal{G}^{x_a \leq 2}$ es exactamente la familia de los árboles \mathcal{T} ; en ese caso el Corolario 4 nos dice que $e(\overline{\mathcal{T}}) \leq 4$, lo cual es bastante aceptable pues recordemos que $e(\overline{\mathcal{T}}) = 3$.

4.2.6 Gráficas planas

Para acotar el número cromático orientado de las gráficas planas, usaremos el siguiente resultado demostrado en 1979.

Teorema 4.15. (Borodin, [3]). *Toda gráfica plana tiene número cromático acíclico a lo más 5.*

Con este resultado y el Teorema 4.13 obtenemos una cota superior para el número cromático orientado de las gráficas planas.

Teorema 4.16. *Sea G una gráfica plana, entonces $ocn(G) \leq 80$.*

Se cree que esta cota es muy grande, sin embargo, lo único que se ha logrado es la construcción de una origráfica plana con número cromático orientado al menos 16, (Sopena, [9]).

En otras palabras, sabemos que existe $P \in \mathcal{P}$ con

$$16 \leq ocn(P) \leq 80.$$

entre estos dos valores no se sabe nada más.

Capítulo 5

El número n-cromático

En este capítulo realizaremos un análisis parecido al que se hizo en el Capítulo 4, pero trabajaremos en la categoría $\mathcal{G}^{(n)}$ de las gráficas n-coloreadas en aristas.

Del mismo modo que en las otras dos categorías, \mathcal{G} y $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, el número cromático en $\mathcal{G}^{(n)}$ puede definirse de dos maneras distintas pero equivalentes:

Definición 5.1. *El número n-cromático $\chi_n(G^f)$ de $G^f \in \mathcal{G}^{(n)}$ es:*

- *El mínimo k tal que exista una k -coloración admisible de G^f .*
- *El orden de un i -cociente mínimo para G^f en $\mathcal{G}^{(n)}$, es decir*

$$\chi_n(G^f) = \mathbf{n}(G^f).$$

Así como anteriormente se definió el número cromático orientado en \mathcal{G} , definiremos ahora el número n-cromático en \mathcal{G} .

Definición 5.2. *Dada una gráfica $G \in \mathcal{G}$, su número n-cromático $\chi_n(G)$, es el mínimo número de colores con el cual se pueden colorear de manera admisible todas las gráficas n-coloreadas en aristas con soporte G .*

El número n-cromático de una gráfica $G \in \mathcal{G}$, se obtiene calculando el máximo de los números n-cromáticos de los elementos de $\mathcal{C}_G^{(n)}$:

$$\chi_n(G) = \max_{G^f \in \mathcal{C}_G^{(n)}} \{\chi_n(G^f)\},$$

ó, en otras palabras

$$\chi_n(G) = e \left(\mathcal{C}_G^{(n)} \right).$$

Observemos que el número 1-cromático de una gráfica $G \in \mathcal{G}$ coincide con el número cromático en el sentido clásico.

5.1 El número 2-cromático

Es natural comenzar por estudiar el número 2-cromático. Lo primero que podemos observar es que este está relacionado de alguna manera con el número cromático orientado.

5.1.1 El número 2-cromático y el número cromático orientado

Lo que queremos es acotar el número 2-cromático de una gráfica cualquiera en términos de su número cromático orientado. Para llevar a cabo esto, veamos primero el siguiente lema que se refiere únicamente a gráficas bipartitas.

Lema 5.1. *Si G es una gráfica bipartita, entonces $\chi_2(G) \leq 2 \times \text{ocn}(G)$.*

Demostración.

Dada alguna bipartición $V(G) = \{V_1, V_2\}$ en conjuntos independientes, tenemos una biyección $\varphi : \mathcal{C}_G^{(2)} \rightarrow \mathcal{O}_G$ dada por la siguiente regla de correspondencia:

Si $G^f \in \mathcal{C}_G^{(2)}$ entonces $\varphi(G^f)$ es la orientación de G tal que para cada arista $(u, v) \in E(G)$ con $u \in V_1, v \in V_2$, se tiene que $(u, v) \in F(\varphi(G^f))$ (resp. $(v, u) \in F(\varphi(G^f))$) si $f(u, v) = 1$ (resp. $f(u, v) = 2$), es decir:

- *Las aristas de color 1 se cambian por flechas que van de V_1 a V_2 .*
- *Las aristas de color 2 se cambian por flechas que van de V_2 a V_1 .*

Claramente φ es una biyección.

Para toda $G^f \in \mathcal{C}_G^{(2)}$, consideramos $V(G) = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, la partición inducida por las clases cromáticas de alguna coloración óptima admisible de $\varphi(G^f)$, donde $k = \text{ocn}(b(G^f))$.

Llamemos \mathcal{P} al refinamiento común óptimo de las particiones $\{V_1, V_2\}$ y $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$; el número de clases de \mathcal{P} es a lo más $2 \times k = 2 \times \text{ocn}(b(G))$.

Observemos que al tomar el cociente G^f/\mathcal{P} , este permanece en la categoría $\mathcal{G}^{(2)}$ por lo que se tiene que

$$\chi_2(G^f) \leq 2 \times \text{ocn}(b(G)).$$

Esto lo podemos hacer para toda $G^f \in \mathcal{C}_G^{(2)}$ lo cual implica que

$$\chi_2(G) \leq 2 \times \text{ocn}(G).$$

■

Podemos encontrar una cota del número 2-cromático en términos del número cromático orientado y el número cromático.

Teorema 5.1. *Para toda $G \in \mathcal{G}$ se cumple $\chi_2(G) \leq \chi(G) \times \text{ocn}(G)$.*

Demostración.

Sean $V_1, V_2, \dots, V_{\chi(G)}$ las clases cromáticas de alguna coloración propia óptima de G . Existe una biyección $\varphi: \mathcal{C}_G^{(2)} \rightarrow \mathcal{O}_G$ dada por la siguiente regla de correspondencia:

Si $G^f \in \mathcal{C}_G^{(2)}$ entonces $\varphi(G^f)$ es la orientación de G tal que para cada arista $(u, v) \in E(G)$ con $u \in V_i, v \in V_j$ con i menor que j , se tiene que $(u, v) \in F(\varphi(G^f))$ (resp. $(v, u) \in F(\varphi(G^f))$) si $f(u, v) = 1$ (resp. $f(u, v) = 2$), es decir:

- Una arista entre V_i y V_j de color 1 se cambia por una flecha de V_i a V_j siempre que i sea menor que j .
- Una arista entre V_i y V_j de color 2 se cambia por una flecha de V_j a V_i siempre que i sea menor que j .

Para toda $G^f \in \mathcal{C}_G^{(2)}$, consideramos $V(G) = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, la partición inducida por las clases cromáticas de alguna coloración óptima admisible de $\varphi(G^f)$, donde $k = \text{ocn}(\varphi(G^f))$.

Llamemos \mathcal{P} al refinamiento común óptimo de las particiones $\{V_1, V_2, \dots, V_{\chi(G)}\}$ y $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$. El número de clases de \mathcal{P} es a lo más $\chi(G) \times \text{ocn}(\varphi(G^f))$.

Observemos que G^f/\mathcal{P} permanece en la categoría $\mathcal{G}^{(2)}$ por lo que

$$\chi_2(G^f) \leq \chi(G) \times \text{ocn}(\varphi(G^f)), \text{ para toda } G^f \in \mathcal{C}_G^{(2)}$$

lo cual implica que $\chi_2(G) \leq \chi(G) \times \text{ocn}(G)$. ■

Como $\varphi : \mathcal{C}_G^{(2)} \rightarrow \mathcal{O}_G$ es una biyección, podemos considerar $\varphi^{-1} : \mathcal{O}_G \rightarrow \mathcal{C}_G^{(2)}$ y procediendo de manera análoga obtenemos el siguiente

Teorema 5.2. $\frac{\text{ocn}(G)}{\chi(G)} \leq \chi_2(G) \leq \chi(G) \times \text{ocn}(G)$.

5.1.2 El número 2-cromático de los ciclos

A continuación estudiaremos el número 2-cromático de los ciclos.

Ejemplo 5.1. ¿Cuál es el número 2-cromático de C_4 ?

Consideramos $\mathcal{C}_{C_4}^{(2)}$, y un nichal de i -cocientes mínimos (figura 5.1). El espesor de este nichal es 4 y por lo tanto $\chi^{(2)}(C_4) = 4$.

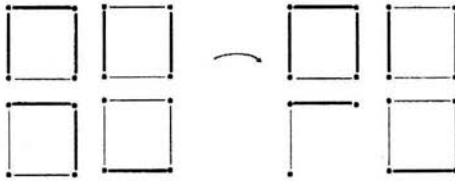


figura 5.1

Ejemplo 5.2. ¿Cuál es el número 2-cromático de C_5 ?

Consideramos $\mathcal{C}_{C_5}^{(2)}$, y un nichal de i -cocientes mínimos (figura 5.2). El espesor de este nichal es 4 y por lo tanto $\chi^{(2)}(C_5) = 4$.

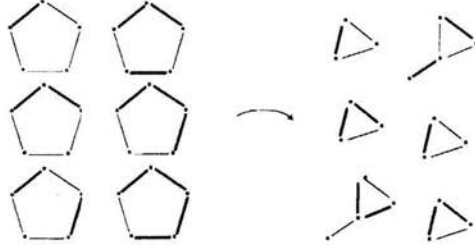


figura 5.2

Observemos que, a pesar de que en ambos casos el número 2-cromático es 4, en el caso de $\mathcal{C}_{C_5}^{(2)}$ podemos construir un nicho de orden cuatro, mientras que para $\mathcal{C}_{C_4}^{(2)}$ esto no es posible. En general tenemos los siguientes resultados.

Teorema 5.3. *Sea $\mathcal{C}_{2n+1}^{(2)} \subset \mathcal{G}^{(2)}$ la familia de gráficas 2-coloreadas en aristas cuyo soporte es un ciclo impar, entonces $\{K_4^f\} \in N(\mathcal{C}_{2n+1}^{(2)})$, donde K_4^f es la 2-coloración de aristas de K_4 mostrada en la figura 5.3.*

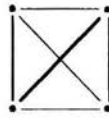


figura 5.3

Demostración.

Probaremos por inducción sobre n , que para todos los ciclos, 2-coloreados en aristas con soporte C_{2n+1} , existe un homomorfismo en K_4^f .

Si $n = 1$ es claro, ya que K_4^f tiene como subgráficas a los dos únicos miembros de $\mathcal{C}_{C_3}^{(2)}$.

Dado C_{2n+1}^f , 2-coloreado en aristas, podemos encontrar dos aristas del mismo color que incidan en un mismo vértice; utilizando la hipótesis de inducción se componen los i -homomorfismos admisibles que se muestran en la figura 5.4 para obtener el i -homomorfismo admisible a K_4^f , con lo cual queda demostrado el resultado. ■

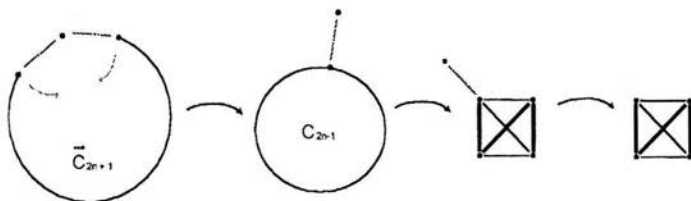


figura 5.4

Corolario 5.1. $e(C_{2n+1}^{(2)}) = n(C_{2n+1}^{(2)}) = 4$.

Demostración.

La existencia de un nicho de orden 4 para esta familia implica que $n(C_{2n+1}^{(2)}) \leq 4$; por otro lado sabemos que $4 \leq e(C_5^{(2)})$ (ejemplo 2). ■

Como se vió en el ejemplo 1, la familia de ciclos impares no puede tener un nicho de orden 4. Demostraremos a continuación que sí tiene uno de orden 5.

Teorema 5.4. Sea $C_{2n}^{(2)} \subset \mathcal{G}^{(2)}$ la familia de gráficas 2-coloreadas en aristas cuyo soporte es un ciclo par, entonces $\{K_5^f\} \in N(C_{2n}^{(2)})$, donde K_5^f es la 2-coloración de aristas de K_5 mostrada en la figura 5.5.



figura 5.5

Demostración.

Probaremos por inducción sobre $n \geq 2$, que para todos los ciclos, 2-coloreados en aristas con soporte C_{2n} , existe un i -homomorfismo en K_5^f .

Se puede ver en la figura 5.1, que para todo miembro de $C_{C_4}^{(2)}$, existe un i -homomorfismo en K_5^f .

Si $n = 3$, en la figura 5.6 se muestra esquemáticamente que $\{K_5^f\} \in N(C_6^{(2)})$.

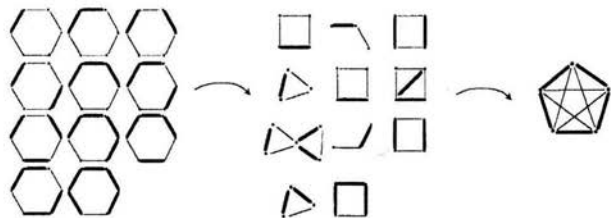


figura 5.6

Si $n \geq 4$, para cualquier C_{2n} , 2-coloreado en aristas, podemos construir un i -homomorfismo elemental como se muestra en la figura 5.7.

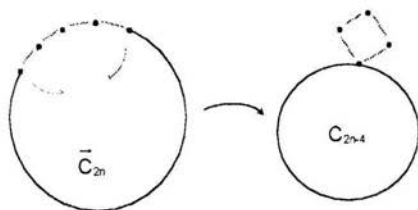


figura 5.7

Por hipótesis de inducción, y como K_5^f tiene dos aristas de cada color en cada vértice, siempre disponemos de i -homomorfismos admisibles como los mostrados en la figura 5.8, cuya composición nos da el i -homomorfismo requerido. ■

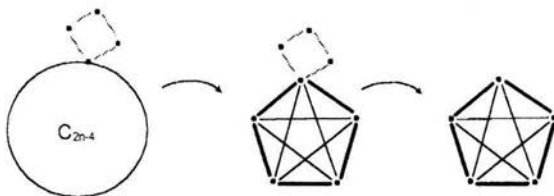


figura 5.8

Corolario 5.2. $e(C_{2n}^{(2)}) = n(C_{2n}^{(2)}) = 5$.

Demostración.

La existencia de un nicho de orden 5 para esta familia implica que $n \binom{C_{2n}^{(2)}}{2} \leq 5$. Por otro lado, en la demostración del teorema 19 se probó que $5 \leq e \binom{C_{2n}^{(2)}}{2}$. ■

Como consecuencia de estos resultados tenemos que el número 2-cromático de cualquier ciclo es a lo más 5.

Teorema 5.5. Si $C \in \mathcal{G}$ es un ciclo, entonces $\chi_2(C) \leq 5$.

5.2 El número n-cromático

En general el estudio del número n-cromático se vuelve más complicado, sin embargo tenemos algunos resultados para las familias de:

- i) árboles
- ii) gráficas con número cromático acíclico acotado
- iii) gráficas planas.

5.2.1 Árboles

En esta sección demostraremos que el número n-cromático de un árbol cualquiera es a lo más $(n + 1)$ si n es impar, y $(n + 2)$ si n es par; en otras palabras, el número n-cromático de un árbol es a lo más el mínimo par mayor que n , es decir $2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Antes que nada, demostraremos la existencia de un nicho de orden $2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ para la familia de árboles n-coloreados en aristas.

Teorema 5.6. Sea $\mathcal{A}^{(n)} \subset \mathcal{G}^{(n)}$ la familia de gráficas n-coloreadas en aristas cuyo soporte es un árbol, entonces

- Para n par, $\left\{ O_{\frac{n+2}{2}}^f \right\} \in N(\mathcal{A}^{(n)})$.
- Para n impar, $\left\{ K_{\frac{n+1}{2}}^f \right\} \in N(\mathcal{A}^{(n)})$.

Las n-coloraciones en aristas de $K_{\frac{n+1}{2}}^f$ y $O_{\frac{n+2}{2}}^f$ de K_{n+1} y $O_{\frac{n+2}{2}}$ respectivamente corresponden a 1-factorizaciones; por ejemplo, en la figura 5.9 se muestran las correspondientes para $n = 4$ y $n = 5$ respectivamente.

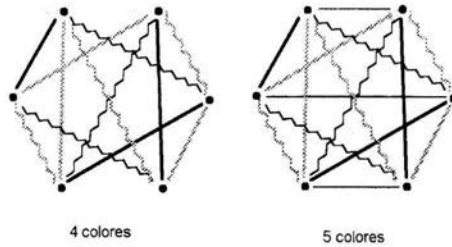


figura 5.9

Demostración.

Ambos casos se pueden probar por inducción pues en cada vértice de K_{n+1}^f y de $O_{\frac{n+2}{2}}^f$ inciden aristas de todos los colores. ■

Con ayuda de este resultado podemos probar el siguiente:

Teorema 5.7. $e(\mathcal{A}^{(n)}) = n(\mathcal{A}^{(n)}) = 2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Demostración.

La existencia de un nicho de orden $2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ para esta familia implica que $n(\mathcal{A}^{(n)}) \leq 2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Para demostrar que $2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil \leq e(\mathcal{A}^{(n)})$ consideremos los siguientes casos:

- *Si n es impar, existe un objeto terminal de $\mathcal{G}^{(n)}$, de orden $(n+1)$ (figura 5.10), por lo que $(n+1) \leq e(\mathcal{A}^{(n)})$. (la figura corresponde a $n=5$).*

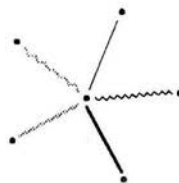


figura 5.10

- Si n es par, la gráfica que se muestra en la figura 5.11 (que corresponde a $n = 4$), contiene $(n + 1)$ vértices x_1, x_2, \dots, x_{n+1} que no se pueden identificar en ningún i -cociente admisible, y con la propiedad de que en cada uno de ellos inciden aristas de los n colores.

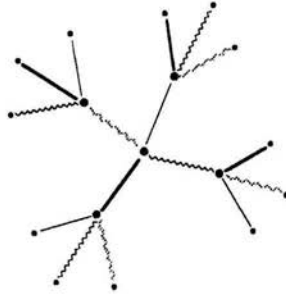


figura 5.11

Como las gráficas completas de orden impar no tienen 1-factores, no podemos colorear las aristas de K_{n+1} con n colores de modo que en cada vértice incida una de cada color. Por esta razón es que cualquier i -cociente admisible del árbol de la figura 5.11, es de orden al menos $(n + 2)$, lo cual implica que $(n + 2) \leq e(\mathcal{A}^{(n)})$.

■

Como consecuencia de estos resultados, el número n -cromático de cualquier árbol es a lo más el mínimo par mayor que n .

Teorema 5.8. Sea $A \in \mathcal{G}$ un árbol cualquiera, entonces $\chi_n(A) \leq 2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

5.2.2 Gráficas con número cromático acíclico acotado

En esta sección veremos la generalización del Teorema 4.14, pero primero veamos un lema.

Lema 5.2. Sea $G^f \in \mathcal{C}_G^{(n)}$ con G bipartita y acíclica, y sea $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes, entonces existen particiones $\{V_1^1, V_1^2, \dots, V_1^n\}$ y $\{V_2^1, V_2^2, \dots, V_2^n\}$ de V_1 y V_2 respectivamente, tales que al tomar el cociente de G por $\mathcal{P} = \{V_1^1, V_1^2, \dots, V_1^n, V_2^1, V_2^2, \dots, V_2^n\}$ obtenemos un elemento de $\mathcal{G}^{(\leq n)}$.

Demostración.

Consideramos $K_{n,n}^f$, gráfica bipartita completa cuyas aristas están n -coloreadas según alguna 1-factorización.

En virtud de que en cada vértice de $K_{n,n}^f$, inciden aristas de todos los colores, se puede probar por inducción la existencia de un i -homomorfismo admisible de G^f en $K_{n,n}^f$ que respeta la bipartición de G^f . ■

Teorema 5.9. (Alon, Marshall [1]). Sea G una gráfica con número cromático acíclico a lo más k , entonces $\chi_n(G) \leq k \times n^{(k-1)}$.

Demostración.

Sean V_1, V_2, \dots, V_k las clases cromáticas de una coloración acíclica óptima de G .

Para cada par de colores distintos $\{i, j\}$ consideramos la subgráfica inducida $G[V_i \cup V_j]$ que es bipartita y acíclica por construcción.

En virtud del lema 5.2, existen particiones $\{V_{i,j}^1, V_{i,j}^2, \dots, V_{i,j}^n\}$ y $\{V_{j,i}^1, V_{j,i}^2, \dots, V_{j,i}^n\}$ de V_i y V_j respectivamente, con la propiedad de que al tomar el i -cociente de $G[V_i \cup V_j]$ obtenemos un objeto de la categoría $\mathcal{G}^{(\leq n)}$.

Sea \mathcal{P}_i el refinamiento común óptimo de las particiones de V_i , $\{V_{i,j}^1, V_{i,j}^2, \dots, V_{i,j}^n\}$ con $j \in \{1, 2, \dots, k\} - \{i\}$; claramente \mathcal{P}_i tiene a lo más $n^{(k-1)}$ clases.

La unión de las \mathcal{P}_i 's es una partición \mathcal{P} de $V(G)$ con a lo más $k \times n^{(k-1)}$ clases, no es difícil cerciorarse de que $G'/\mathcal{P} \in \mathcal{G}^{(\leq n)}$.

Lo anterior demuestra que $\chi_n(G') \leq k \times n^{(k-1)}$ para toda $G' \in \mathcal{C}_G^{(n)}$ por lo que $\chi_n(G) \leq k \times n^{(k-1)}$. ■

5.2.3 Gráficas planas

Recordemos que toda gráfica plana tiene número cromático acíclico a lo más 5. Con este resultado y el Teorema 5.9 obtenemos inmediatamente una cota superior para el número n -cromático de las gráficas planas.

Teorema 5.10. (Alon, Marshall [1]). Sea G una gráfica plana, entonces $\chi_n(G) \leq 5n^4$.

Capítulo 6

La conjetura de las trayectorias

A lo largo de este trabajo hemos estudiado con detenimiento el número cromático orientado y el número n -cromático de los árboles.

En general, siendo $\vec{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{A}^{(n)}$ las familias de árboles en $\vec{\mathcal{G}}$ y $\mathcal{G}^{(n)}$ respectivamente, tenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}e(\vec{\mathcal{A}}) &= n(\vec{\mathcal{A}}) = 3, \\e(\mathcal{A}^{(n)}) &= n(\mathcal{A}^{(n)}) = 2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil.\end{aligned}$$

Recordemos que estas igualdades nos dicen lo siguiente

- Existen nichos de orden 3 y $2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ para las familias de árboles en $\vec{\mathcal{G}}$ y en $\mathcal{G}^{(n)}$ respectivamente, y además no pueden existir nichos de orden más chico.
- El espesor de cualquier nichal para cada una de estas familias no puede ser menor que 3 y $2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ respectivamente, es decir, existen árboles que no se pueden colorear con menos colores que éstos, y para cualquier árbol $A \in \mathcal{G}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}ocn(A) &\leq 3, \\ \chi_n(A) &\leq 2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil.\end{aligned}$$

Las trayectorias forman una subfamilia especial de los árboles que denotamos por \mathcal{T} .

El hecho de que $\vec{\mathcal{T}} \subset \vec{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{T}^{(n)} \subset \mathcal{A}^{(n)}$ implica las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} e(\vec{T}) &\leq n(\vec{T}) \leq 3, \\ e(\mathcal{T}^{(n)}) &\leq n(\mathcal{T}^{(n)}) \leq 2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil. \end{aligned}$$

Respecto a la primera de estas desigualdades, podemos observar fácilmente que $3 \leq e(\vec{T})$, pues una trayectoria dirigida de longitud dos es una gráfica terminal en $\vec{\mathcal{G}}$.

De esta manera, tenemos para las trayectorias orientadas, el siguiente resultado.

Teorema 6.1. $e(\vec{T}) = n(\vec{T}) = 3$.

Ya que las trayectorias son —en algún sentido— los árboles más simples, es natural preguntarse si para alguna n , $e(\mathcal{T}^{(n)})$ ó $n(\mathcal{T}^{(n)})$ son estrictamente menores que $e(\mathcal{A}^{(n)})$ ó $n(\mathcal{A}^{(n)})$.

Ejemplo 6.1. Para $\mathcal{T}^{(2)}$ consideremos la trayectoria que se muestra en la figura 6.1; también aparecen todos sus i.cocientes en $\mathcal{G}^{(2)}$.

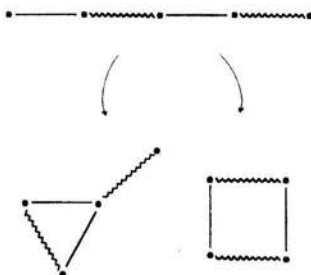


figura 6.1

Esto implica que $4 \leq e(\mathcal{T}^{(2)})$, por lo que en este caso se cumple que

$$e(\mathcal{T}^{(2)}) = n(\mathcal{T}^{(2)}) = 4.$$

Ejemplo 6.2. Para $\mathcal{T}^{(3)}$ consideremos la trayectoria que se muestra en la figura 6.2; también aparecen todos sus i.cocientes en $\mathcal{G}^{(3)}$.

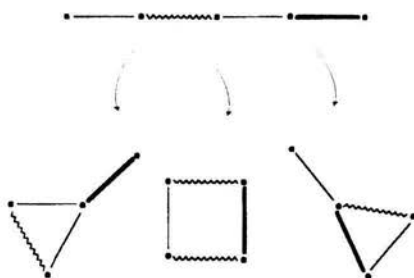


figura 6.2

Esto implica que $4 \leq e(\mathcal{T}^{(3)})$, por lo que en este caso también se cumple que

$$e(\mathcal{T}^{(3)}) = n(\mathcal{T}^{(3)}) = 4.$$

Podemos plantear entonces la siguiente:

Conjetura 6.1. $e(\mathcal{T}^{(n)}) = n(\mathcal{T}^{(n)}) = 2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, para toda n .

La conjetura es cierta también en los casos $n = 4, 5, 6$ y 7 , que son los únicos —además de 2 y 3 — para los que conocemos el valor exacto de $e(\mathcal{T}^{(n)})$ y $n(\mathcal{T}^{(n)})$.

Aquí sólo probaremos el resultado para $n = 4$ y $n = 5$, pero antes veremos una definición más.

Definición 6.1. Dadas $G^f \in \mathcal{G}^{(n)}$, $H \in \mathcal{G}$ y h un i.homomorfismo de G —la gráfica soporte de G^f — en H ; h será llamado admisible para G^f si para cada par de aristas $a_1, a_2 \in E(G^f)$ de color distinto, se tiene que $h(a_1) \neq h(a_2)$.

Observación 6.1. Si $h : V(G) \rightarrow V(H)$ es un i.homomorfismo admisible para G^f , entonces h determina una n -coloración de aristas en $h(G) \subset H$ que se puede extender (posiblemente no de manera única) a una n -coloración de aristas H^f de H , de modo que h es un i.homomorfismo en $\mathcal{G}^{(n)}$ de G^f en H^f ; recíprocamente un i.homomorfismo $h : V(G^f) \rightarrow V(H^f)$ en $\mathcal{G}^{(n)}$ determina un i.homomorfismo de G en H admisible para G^f .

Teorema 6.2. $e(\mathcal{T}^{(4)}) = n(\mathcal{T}^{(4)}) = 6$.

Demostración.

En virtud de la siguiente desigualdad

$$e(\mathcal{T}^{(n)}) \leq n(\mathcal{T}^{(n)}) \leq 2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil,$$

basta probar que $6 \leq e(\mathcal{T}^{(4)})$ ó, equivalentemente, que existe una trayectoria $T^f \in \mathcal{T}^{(4)}$ cuyos cocientes mínimos son de orden 6.

Consideremos los colores c_0, c_1, c_2, c_3 y sea $T_{i,j}^f$ la trayectoria coloreada con los colores c_i, c_{i+j} como se muestra en la figura 6.3, (los índices estan tomados módulo 4)

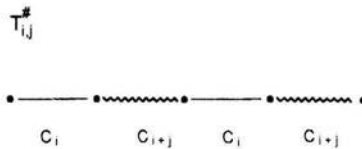


figura 6.3

Sea T_i^f la trayectoria que obtenemos concatenando $T_{i,1}^f, T_{i,2}^f$ y $T_{i,3}^f$ mas una arista de color c_i al final (figura 6.4).

Por último, consideremos T^f la trayectoria que se obtiene al concatenar T_1^f, T_2^f, T_3^f y T_4^f (figura 6.5).

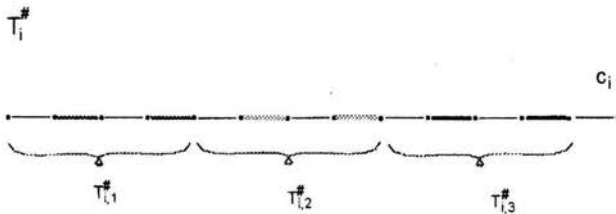


figura 6.4

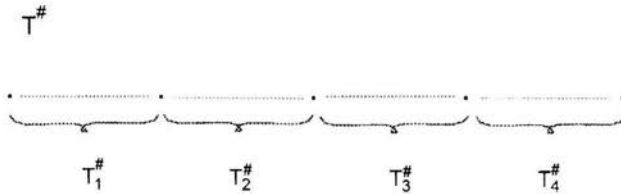


figura 6.5

Afirmación 1: Todo i -cociente de $T_{i,j}^f$ tiene dos aristas de color c_i y dos de color c_{i+j} (ejemplo 19).

Supongamos que existe un i -homomorfismo de T_i en K_n admisible para T_i^f . Por la observación 1 y la afirmación 1, existe una 4-coloración de aristas de K_n en la cual aparecen al menos 2 aristas de cada color, esto implica que n no puede ser menor a 5.

Entonces todo i -homomorfismo de T_i en K_5 admisible para T_i^f , ocupa todos los vértices de K_5 . Por la observación 1 y como cada vértice de T_i^f es extremo de una arista de color i , tenemos la siguiente

Afirmación 2: Todo i -cociente de orden 5 de T_i^f tiene al menos tres aristas de color i .

Supongamos que existe un i -homomorfismo de T en K_n admisible para T^f . Por la observación 1 y la afirmación 2, existe una 4-coloración de aristas de K_n en la cual aparecen al menos tres aristas de cada color, por lo que n no puede ser menor que 6 con lo cual queda demostrado el resultado. ■

Corolario 6.1. $e(\mathcal{T}^{(5)}) = n(\mathcal{T}^{(5)}) = 6$.

Demostración.

Consideramos los colores c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 y la trayectoria que resulta de concatenar T^f con una última arista es de color c_4 (figura 6.6). ■



figura 6.6

Bibliografía

- [1] **N. Alon, T. H. Marshall.** *Homomorphisms of edge-coloured graphs and Coxeter groups.* J. Algebraic Combin. 8 (1998) 5-13
- [2] **J. A. Bondy, U. S. R. Murty.** *Graph Theory with applications.* (1976).
- [3] **O. V. Borodin.** *On acyclic colorings of planar graphs.* Discrete Math. 25 (1979) 211-236
- [4] **G. Hahn, C. Tardif.** *Graph homomorphisms: structure and symmetry. Graph symmetry algebraic methods and applications.* Kluwer Academic Publishers (1997) 107-166
- [5] **F. Harary.** *Graph Theory.* Addison-Wesley, 1969.
- [6] **T. R. Jensen, B. Toft.** *Graph coloring problems.* Wiley-Interscience (1995)
- [7] **A. V. Kostochka, E. Sopena, X. Zhu.** *Acyclic and oriented chromatic numbers of graphs.* J. Graph Theory 24 (4) (1997) 331-340
- [8] **A. Raspaud, E. Sopena.** *Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs.* Inform. Process. Lett. 51 (1994) 171-174
- [9] **E. Sopena.** *The chromatic number of oriented graphs.* J. Graph Theory 25 (1997) 191-205
- [10] **E. Sopena.** *Oriented graph coloring.* Discrete Math. 229 (2001) 359-369
- [11] **E. Sopena, L. Vignal.** *A note on the oriented chromatic number of graphs with maximum degree three.* Preprint.13