



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Asimetría día - noche en los neutrinos solares

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A :

ROGELIO ROJAS RAMOS



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION 2004 LAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
 "Asimetría Día-Noche en los Neutrinos Solares"

realizado por Rojas Ramos Rogelio

con número de cuenta 9850863-7 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
 Propietario

Propietario Dr. Juan Carlos D'Olivo Saez

Propietario Dra. Myriam Mondragón Ceballos

Propietario Dr. Omar Miranda Romagnoli

Suplente Dr. Sarira Sahu

Suplente Dr. Genaro Toledo

*J. D'Olivo*  
*Myriam Mondragón*  
~~*Omar Miranda Romagnoli*~~  
*Sarira Sahu*  
*Genaro Toledo*

Consejo Departamental de Física

*Patricia Goldstein Menache*

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE  
 Coordinadora de Licenciatura  
 FACULTAD DE CIENCIAS  
 DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Rogelio Rojas Ramos

FECHA: 24 de Mayo de 2004

FIRMA: 

## AGRADECIMIENTOS:

Al proyecto PAPIIT-UNAM IN109001, por su apoyo recibido durante la realización de este trabajo.

De una forma muy especial al Dr. Juan Carlos D'Olivo Saez, por la toda la ayuda recibida bajo su dirección, pero sobre todo por su amistad. Gracias, sinceramente por la oportunidad de trabajar con usted.

A Alexis Armando Aguilar Arevalo, ya que por su tesis de licenciatura empece a conocer a los neutrinos. Al Dr. Luis G. Cabral Rosetti por su ayuda tanto en Linux como en Latex. Ambos, tienen mi gratitud por su ayuda académica y personal.

A la Unidad de Computo, Antonio, Israel y Martin por las facilidades recibidas en la redacción de este documento.

A mis sinodales: Dr. Omar Miranda, Dr. Genaro Toledo, Dra. Myriam Mondragón, Dr. Sarira Sahu por las observaciones realizadas a la tesis.

Y por supuesto, a todos los NEUTRINOS.

## *DEDICADA A:*

DIOS.

Y a la mejor familia que me ha dado: Leonardo, Carlota, José Luis y Silvia. A la familia que me permitió elegir: P. Alvaro, Judith, Obed, Nestor y Najib. Al ser que siempre estuvo a mi lado, en todo momento, quien fue el motivo por el cual continuar. Siempre estará en mis pensamientos a pesar de no haberle conocido.

A mi amiga Ana Laura.

A mis dos amigos y HERMANOS, compañeros de mil batallas, Miguel Angel y Jorge Alfredo. Porque sin ellos, la vida no sería la misma. Y a la persona que siempre tendré por amiga: Deyanira.

A mis amigos y compañeros: Alejandro y Vicente, Flavio y Karla Paola, Veronica, Tere, Karen, Carla, Maribel, Beto y Enrique, Julio, David, Sergio, Carlos. Con ellos, la Física fue mas agradable, de lo que ya es por sí misma. A todas las personas, conocidas y desconocidas, que hicieron mejor mi estancia en la Facultad de Ciencias, en el Instituto de Ciencias Nucleares, en la UNAM, y en la ciudad de México. Como Carolina y Alicia.

A mis amigos: Magdalena, Jorge Méndez, Miriam y Raúl, Socorro y Yadira, Cruz, Sotero, Abner, Esmeralda, Alfredo, Javier, Daniel, José Luis, Hugo y Nestor, Feliciano e Isidro, Juan Carlos, Ana Delia, Blanca, Ana Luisa, Yolanda, Esperanza, N. Rosete, Lupita, Rosalia, F. Horta, Martha, Rodrigo, Karmen, Juventino. Y a los muchos otros que falto por nombrar.

A mis tias Teresa, Leonor y Ana, a mi prima Mariela. A toda mi familia paterna que es muy grande. A las personas que ya se han marchado y que les recuerdo con mucha gratitud, entre ellas a Concepción y Julia.

Y porque dejaría de ser yo mismo, finalmente, este trabajo es dedicado al esfuerzo y dedicación de una persona muy especial: Rogelio Rojas Ramos.

ASIMETRÍA DÍA-NOCHE  
EN LOS  
NEUTRINOS SOLARES

Rogelio Rojas Ramos  
Dr. Juan Carlos D'Olivio Saez

# Prefacio

Los neutrinos son las partículas conocidas más elusivas e intrigantes de la naturaleza. Dentro del *Modelo Estándar* (SM) de los constituyentes fundamentales de la materia se le asignan las propiedades mínimas que son compatibles con los experimentos: masa nula, carga nula, momento dipolar nulo. Cualquier medición que se aparte de este simple esquema dará una indicación clara de Física nueva más allá del Modelo Estándar. Esto explica el enorme interés y el gran esfuerzo en el estudio experimental y teórico de las propiedades de los neutrinos, así como en el entendimiento de sus consecuencias en astrofísica y cosmología. Si los neutrinos tienen masa y existe entre ellos una mezcla de estados, entonces puede ocurrir el fenómeno de las *oscilaciones de neutrinos*, o sea, transformaciones periódicas entre los diferentes *sabores* (por ej.,  $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\mu$ ). Recientemente, los resultados de los experimentos SuperKamiokande (SK) y SNO han proporcionado una clara evidencia de la existencia de tales oscilaciones [1, 2], lo que constituye uno de los descubrimientos más trascendentes de los últimos años en la física de las partículas elementales.

Basados en el entendimiento de la evolución estelar, la física del Sol parece estar muy bien entendida; el Sol es una estrella que se encuentra en una etapa estable, donde se fusiona hidrógeno para formar helio. Debido a estas reacciones nucleares se produce un flujo intenso de neutrinos del electrón. Por más de tres décadas, los experimentos de neutrinos solares han detectado menos neutrinos de los que son predichos por detallados modelos teóricos del Sol. Este déficit se conoce como el *problema de los neutrinos solares*. Y la mejor solución a dicho problema la constituyen las oscilaciones de neutrinos. Las transiciones entre los distintos sabores pueden incrementarse notablemente cuando los neutrinos atraviesan medios densos como el interior de una estrella. Esto se conoce con el nombre de mecanismo MSW [3, 4] y provee la mejor solución al problema de los neutrinos solares.

Es un hecho bien conocido, que cuando los neutrinos (provenientes del Sol) atraviesan la Tierra, como resultado del efecto de la materia sobre las transiciones entre  $\nu_e$  y  $\nu_\alpha$  ( $\alpha = \mu, \tau$ ), el flujo de neutrinos del electrón observado durante la noche resulta diferente al que se observa en el día. Casi todos los cálculos realizados en general predicen un flujo nocturno mayor que el diurno. La mayoría de estos estudios han sido realizados bajo la suposición de oscilaciones entre dos



---

sabores con un ángulo de mezcla  $\theta < 45^\circ$ , de tal forma que el número de  $\nu_\alpha$  que llegan a la Tierra es mayor que el número de  $\nu_e$ . En dicha circunstancia, se plantea que el efecto de la materia terrestre es el de convertir  $\nu_\alpha$  en  $\nu_e$  y viceversa, y ya que inicialmente hay un número mayor de  $\nu_\alpha$ , durante la noche el flujo de neutrinos del electrón resulta mayor que en el día.

En un trabajo reciente Chiang y Wolfenstein [5] señalaron que la explicación anterior es incorrecta. Dichos autores han llevado a cabo un estudio cualitativo de la *asimetría día-noche* y a partir del mismo llegaron a la conclusión de que el signo de la asimetría es dictado por el hecho de que el efecto de la materia en el Sol tiene el mismo signo que en la Tierra. En la referencia [5] se empleó la *aproximación adiabática* para la solución de los neutrinos dentro del Sol y un perfil de densidad constante para la Tierra.

La densidad de materia terrestre puede ser aproximada por medio de una función escalón, con un valor en el núcleo de unas 2.6 veces mayor que en el manto. En esta tesis, se realiza un análisis mas completo de la asimetría día-noche en los neutrinos solares, introduciendo el *operador de evolución* en la base de sabor para estudiar la propagación de los neutrinos a través de la Tierra. Se considera una situación mas realista de un perfil tipo escalón para la densidad de materia terrestre y se incorporan los efectos *no adiabáticos* en la solución de los neutrinos dentro del Sol.

La tesis esta estructurada de la siguiente forma:

En el capítulo 1 presentamos el formalismo de la mezcla entre neutrinos masivos y de las oscilaciones de neutrinos en el vacío

En el capítulo 2 consideramos la propagación de los neutrinos en un medio material (neutro) para una densidad constante. También se deriva la solución adiabática para una densidad variable, y se discute la manera de tomar en cuenta efectos no adiabáticos.

En el capítulo 3 describimos algunas características de los neutrinos solares, así como su evolución desde el punto de producción hasta que arriivan a la superficie de la Tierra.

En el capítulo 4 se hace un estudio más detallado de la asimetría día-noche de un perfil constante y uno de tipo escalón para la densidad en el interior de la Tierra, incorporando los efectos no adiabáticos en la solución de los neutrinos solares. En este análisis se emplea la representación del operador de evolución en la base de sabor, para los neutrinos solares que cruzan la Tierra, cuya derivación se presenta en el apéndice B.

En el capítulo 5, se hace un resumen de los resultados obtenidos y se presentan las conclusiones.

# Índice general

<b>1. Oscilaciones de neutrinos en vacío</b>	<b>1</b>
1.1. La matriz de mezcla. . . . .	1
1.2. El operador de evolución. . . . .	3
1.3. Oscilaciones en vacío. . . . .	5
<b>2. Oscilaciones de Neutrinos en Materia.</b>	<b>13</b>
2.1. Potenciales efectivos. . . . .	13
2.2. Evolución en materia. . . . .	17
2.2.1. La noción de resonancia. . . . .	19
2.2.2. Cruce de niveles. . . . .	21
2.3. Densidad uniforme. . . . .	22
2.4. Solución adiabática. . . . .	23
2.5. Solución no adiabática. . . . .	24
<b>3. Neutrinos Solares</b>	<b>29</b>
3.1. Evolución de los neutrinos solares . . . . .	32
<b>4. Asimetría Día-Noche</b>	<b>37</b>
4.1. Cruce a través del manto. . . . .	37
4.2. Cruce a través del núcleo y manto . . . . .	48
4.2.1. Análisis de la asimetría . . . . .	51
<b>5. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>A. Sistema de dos niveles</b>	<b>59</b>
A.1. Diagonalización de la matriz hermítica. . . . .	61
<b>B. Evolución en materia con densidad constante</b>	<b>65</b>
<b>C. La trayectoria en la Tierra</b>	<b>69</b>

# Capítulo 1

## Oscilaciones de neutrinos en vacío

Las oscilaciones de neutrinos son transformaciones periódicas de neutrinos de un sabor en otro, y se presentan cuando existe mezcla entre neutrinos masivos, en otras palabras, el estado del neutrino que es producido por interacción electrodébil no es un eigenestado de masa. Este fenómeno fue primero señalado por Pontecorvo [6], mientras que la posibilidad de mezcla arbitraria entre dos estados de neutrinos masivos fue primero introducido por Maki, Nakagawa y Sakata [7]. El fenómeno de las oscilaciones de neutrinos esta relacionado con la naturaleza cuántica de los neutrinos y tienen su origen en el hecho de que el estado de una partícula puede ser expresado utilizando diferentes bases. Estas bases están formadas por un conjunto de estados independientes y se caracterizan por ser el conjunto de estados propios de algún observable físico.

### 1.1. La matriz de mezcla.

De acuerdo al *Modelo Estándar* (SM por sus siglas en ingles) de las partículas elementales [8], existen tres tipos de *sabores* de neutrinos:  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ , los cuales estan asociados con cada uno de los leptones cargados conocidos (electrón  $e$ , muón  $\mu$  y tau  $\tau$ ), de tal forma que  $(\nu_\alpha, \alpha)$ ,  $\alpha = e, \mu, \tau$ , conforman una generación o familia de leptones. Estas generaciones se caracterizan por los números leptónicos individuales  $L_\alpha$ , definidos por

$$L_\alpha(\nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} . \tag{1.1}$$

El número de neutrinos se determinó experimentalmente a través de la medición del ancho de decaimiento del bosón  $Z^0$ , en los experimentos llevados a cabo con el acelerador LEP [9], en CERN. El resultado fue

$$n_{\nu_\alpha} = 3.00 \pm 0.06. \tag{1.2}$$

## 1.1. LA MATRIZ DE MEZCLA.

---

En el SM los neutrinos no tienen masa y se propagan en el vacío a la velocidad de la luz. Sin embargo, hasta donde sabemos, no existe una razón teórica profunda por la que las masas de los neutrinos deban ser exactamente cero. Por otra parte, los neutrinos tienen masa en la mayoría de las extensiones teóricas del SM. Además, los experimentos llevados a cabo con neutrinos atmosféricos y solares han aportado evidencia concluyente de la existencia de oscilaciones entre neutrinos masivos.

Supongamos que el estado de un neutrino que se propaga en el vacío colapsa a alguno de los estados de sabor definido mediante la realización de una medición del observable llamado sabor, lo cual puede hacerse a través de una interacción débil (intercambio de un  $Z^0$ , o un  $W^\pm$ ) con un leptón o un quark. Si este conjunto de estados de sabor no fuera la base en la que el Hamiltoniano del neutrino, propagándose en el vacío, es diagonal esperaríamos que existiera algún otro conjunto de estados independientes del neutrino que asociaríamos con los estados estacionarios. Más aún, el estado de un neutrino en un momento determinado podría ser al mismo tiempo una combinación lineal de los estados de sabor definido, y una combinación diferente de los estados propios del Hamiltoniano.

Para que esto sea posible, es necesario suponer que los estados con sabor definido no son los estados estacionarios del neutrino, y por lo tanto existe necesariamente el segundo conjunto de estados. Como veremos más adelante, los estados que diagonalizan al Hamiltoniano de una partícula libre deben tener una masa y un momento bien definidos, lo cual nos lleva a concluir que, si los estados de sabor definido no coinciden con los estados estacionarios en el vacío, entonces los neutrinos tienen una masa distinta de cero. Sin embargo, esta masa debe ser muy pequeña debido a cotas experimentales.

La base de los autoestados del Hamiltoniano del neutrino en vacío deberá tener tres elementos, para coincidir en dimensionalidad con la base de los autoestados de sabor definido,  $\nu_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) [10]. El cambio de una base a otra se verifica por medio de la *matriz de mezcla*  $U$

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} |\nu_i\rangle, \quad (1.3)$$

$$|\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{i\alpha}^\dagger |\nu_\alpha\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle, \quad (1.4)$$

donde  $\alpha = e, \mu, \tau$ , y  $U_{\alpha i}$  son elementos de una matriz unitaria de  $3 \times 3$

$$U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{I}, \quad (1.5)$$

es decir,

$$\sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* = \delta_{ij}. \quad (1.6)$$

En el SM todos los neutrinos son no masivos, en cuyo caso la matriz  $U$  no tiene significado físico y siempre se puede hacer igual a la identidad  $\mathbb{I}$ . Por lo tanto, al introducir la matriz de mezcla, estamos suponiendo implícitamente que al menos uno de los neutrinos tiene masa no nula. En general,  $U$  es una matriz compleja de  $n \times n$ , y para construirla hay que determinar  $2n^2$  parámetros reales. La condición de unitariedad impone  $n^2$  restricciones, por lo cual, el número de parámetros independientes se reduce a  $n^2$ . De estos parámetros,  $2n - 1$  fases arbitrarias pueden ser eliminadas por una redefinición de los componentes izquierdos de los campos (de los leptones cargados y neutrinos) que participan en la interacción de corriente cargada [11]. De tal manera que el número de parámetros físicamente significativos en la matriz de mezcla es  $(n - 1)^2$ . Una matriz ortogonal de  $n \times n$  es caracterizada por  $n(n - 1)/2$  ángulos de mezcla, así el resto de los parámetros esenciales de  $U$  corresponden a  $(n - 1)(n - 2)/2$  fases. Si CP se conserva en el sector de los neutrinos, entonces desaparecen todas las fases y  $U$  es una matriz (real) ortogonal, con  $n(n - 1)/2$  parámetros (ángulos de mezcla).

Para  $n = 2$ , no hay fases (conservación de CP) y el único parámetro físico es un único ángulo de mezcla  $\theta$ . En este caso,  $U$  es la matriz ortogonal

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

que es una matriz de rotaciones en dos dimensiones. Para  $n = 3$  hay tres ángulos de mezcla y una sola fase, y la matriz de mezcla es análoga a la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa en el sector de quarks. Una parametrización muy usada de la matriz de mezcla para tres sabores es la siguiente [12]:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

donde  $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ ,  $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), y  $\delta$  es la fase de violación de CP. La factorización (1.8) combina una rotación alrededor de cada uno de los ejes coordenados en un espacio tridimensional y una matriz diagonal que incluye la fase  $\delta$ .

## 1.2. El operador de evolución.

Un sistema cuántico aislado de toda intervención exterior evoluciona de forma exactamente previsible y, si tal sistema no se somete a ninguna medición, su evolución (i.e., la transformación del vector que representa su estado dinámico

## 1.2. EL OPERADOR DE EVOLUCIÓN.

---

en el instante  $t_0$   $|\psi(t_0)\rangle$  en el vector de estado  $|\psi(t)\rangle$  en un instante arbitrario  $t$ , es lineal [13]. Por lo tanto, existe un operador lineal  $\mathcal{U}(t, t_0)$  tal que

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (1.9)$$

donde  $\mathcal{U}(t, t_0)$  es, por definición, el operador de evolución del sistema. Como  $|\psi(t_0)\rangle$  es arbitrario, es claro de (1.9) que

$$\mathcal{U}(t_0, t_0) = \mathbb{I}. \quad (1.10)$$

Empleando la ecuación diferencial de movimiento de los estados dinámicos del sistema (Ec. de Schrödinger)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle, \quad (1.11)$$

el operador  $\mathcal{U}(t, t_0)$  es completamente determinado cuando el Hamiltoniano  $H(t)$  del sistema es dado. Al sustituir (1.9) en la ecuación (1.11) se tiene que el operador de evolución satisface la misma ecuación [14], es decir

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(t, t_0) = H(t)\mathcal{U}(t, t_0). \quad (1.12)$$

Para que la norma del vector  $|\psi(t)\rangle$  permanezca constante en el transcurso del tiempo, es necesario y suficiente que  $H(t)$  sea Hermitiano y, en consecuencia, que  $\mathcal{U}(t, t_0)$  sea un operador unitario:

$$\mathcal{U}^{-1}(t, t_0) = \mathcal{U}^\dagger(t, t_0), \quad (1.13)$$

lo cual se sigue de (1.12) y (1.10).

Si el sistema es conservativo, i.e., si su energía, representada por el Hamiltoniano  $H$  no depende explícitamente del tiempo, la Ec. (1.12) puede ser fácilmente integrada. Tomando en cuenta la condición inicial (1.10), obtenemos

$$\mathcal{U}(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}, \quad (1.14)$$

y si  $|\varphi_n\rangle$  es un eigenvector de  $H$  con eigenvalor  $E_n$ , entonces:

$$\mathcal{U}(t, t_0)|\varphi_n\rangle = e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}|\varphi_n\rangle. \quad (1.15)$$

Cuando  $H$  es explícitamente dependiente del tiempo, se puede estar tentado a considerar, por analogía con la ecuación (1.14), que el operador de evolución es igual a el operador  $\mathcal{V}(t, t_0)$  definido por:

$$\mathcal{V}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau}. \quad (1.16)$$

Sin embargo, en general esto no es cierto, ya que la derivada de un operador de la forma  $e^{A(t)}$  no es, en general, igual a  $A'(t)e^{A(t)}$ , lo cual, puede verse por expansión de  $e^{A(t)}$  en una serie de potencias en  $A(t)$ . Se requiere que  $A(t)$  y  $\frac{dA}{dt}$  conmuten para que se verifique la igualdad.

### 1.3. Oscilaciones en vacío.

Consideraremos al neutrino como una partícula masiva propagándose en el vacío con una energía mucho mayor a su masa en reposo. Supongamos que la partícula puede estar en cualquiera de  $n$  estados cuánticos independientes, elementos de una base A, a los que denotamos por  $\psi_\alpha, \psi_\beta, \psi_\gamma, \dots$ , y que existe una base B, cuyos elementos denotamos por  $\psi_i, i = 1, 2, \dots$ , en la que el operador Hamiltoniano de partícula libre es diagonal, es decir

$$\langle \psi_i | H_0 | \psi_j \rangle = E_i \delta_{ij} . \quad (1.17)$$

La base en la que el  $H_0$  es diagonal es la base de los estados con masas definidas  $m_i, i = 1, 2, \dots, n$ , y cuyas energías son dadas por la ecuación

$$E_i = \sqrt{p_i^2 c^2 + m_i^2 c^4} , \quad (1.18)$$

donde  $p_i$  es el momento del estado  $i$ . Por lo tanto, en esta base el Hamiltoniano de partícula libre se puede escribir como la matriz diagonal

$$H_0 = \text{diag}\{E_1, E_2, \dots, E_n\} , \quad (1.19)$$

con  $E_i$  dada por la Ec. (1.18). En la aproximación relativista, con  $p_i$  mucho mayor a la energía en reposo, de la partícula a primer orden en el cociente  $m_i^2 c^2 / p_i^2$  podemos hacer

$$E_i \cong p_i c + \frac{m_i^2 c^3}{2p_i} . \quad (1.20)$$

Supongamos que al tiempo  $t_0$ , el estado de la partícula estudiada es uno de los elementos de la base A, i.e.,

$$|\psi(t_0)\rangle = |\psi_\alpha\rangle , \quad (1.21)$$

el cual, se puede escribir como una combinación lineal de los elementos de la base B (autoestados de masa definida)

$$|\psi_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\psi_i\rangle , \quad (1.22)$$

donde  $U_{\alpha i}$  son los elementos de la matriz de mezcla  $U$ .

El estado al tiempo  $t$  será una combinación lineal de los  $n$  estados de masa definida, y se propagará en el vacío hasta alcanzar un detector capaz de hacerlo colapsar en uno de los elementos de la base A. Suponiendo que el neutrino es creado con un momento definido [15, 16], cada elemento de la base de los

### 1.3. OSCILACIONES EN VACÍO.

eigenestados de masa, que compone a la partícula, se propaga con un momento definido, el cual, es común para todos. Esto significa que en la Ec. (1.18)

$$p_i = p \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.23)$$

y, por el hecho de tener masas distintas, llevarán una energía diferente.

De acuerdo con (1.9) y (1.22), el estado  $|\psi(t)\rangle$  al tiempo  $t$  en términos de los elementos de la base de autoestados de masa, se expresa como:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i} \mathcal{U}(t, t_0) |\psi_i\rangle. \quad (1.24)$$

La probabilidad de que al tiempo  $t$  el estado que originalmente era  $|\psi_\alpha\rangle$  se observe como el estado  $|\psi_\beta\rangle$  será

$$P(\psi_\alpha \rightarrow \psi_\beta; t) \equiv \left| \langle \psi_\beta | \psi(t) \rangle \right|^2, \quad (1.25)$$

donde

$$\langle \psi_\beta | \psi(t) \rangle = \sum_{ij} U_{\alpha i} U_{\beta j}^* \langle \psi_j | \mathcal{U}(t, t_0) | \psi_i \rangle. \quad (1.26)$$

Para partícula libre, en la base de los autoestados de masa definida, el operador de evolución es diagonal y, a partir de la ecuación (1.19), el estado de la partícula al tiempo  $t$  se expresa como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i(t-t_0)/\hbar} |\psi_i\rangle. \quad (1.27)$$

Por lo tanto, para este caso, las ecuaciones (1.25) y (1.26) toman la forma

$$\langle \psi_\beta | \psi(t) \rangle = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i(t-t_0)/\hbar}, \quad (1.28)$$

$$P(\psi_\alpha \rightarrow \psi_\beta; t) = \sum_{ij} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j} e^{-i(E_i - E_j)(t-t_0)/\hbar}, \quad (1.29)$$

y separando la suma de la ecuación (1.29) en tres partes correspondientes a:  $i=j$ ,  $i < j$ ,  $i > j$ , podemos escribir la probabilidad de transición como:

$$\begin{aligned} P(\psi_\alpha \rightarrow \psi_\beta; t) &= \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 \\ &+ 2\Re \sum_{j < i} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j} e^{-i(E_i - E_j)(t-t_0)/\hbar}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Empleando la Ec. (1.20), la diferencia de energías ( $E_i - E_j$ ) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$E_i - E_j \cong \frac{\delta m_{ij}^2 c^3}{2p}, \quad (1.31)$$



donde  $\delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$  son las diferencias de las masas elevadas al cuadrado.

El momento  $p$  de la partícula puede escribirse en términos de su energía promedio  $E$ , definida por

$$E = \frac{1}{n} \sum_i E_i, \quad (1.32)$$

y para hacerlo, observamos que, si  $m_i c \ll p$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces

$$E \cong \frac{1}{n} \sum_i \left( pc + \frac{m_i^2 c^3}{2p} \right) = pc \left( 1 + \frac{\bar{m}^2 c^2}{2p^2} \right), \quad (1.33)$$

con

$$\bar{m}^2 \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i^2, \quad (1.34)$$

y despreciando el término  $\bar{m}^2 c^2 / 2p^2 \ll 1$  se tiene

$$E \approx pc. \quad (1.35)$$

La suposición de que la partícula tiene una energía mucho mayor a su energía en reposo  $m_i \ll E_i$  implica que se trata de una partícula relativista con una velocidad comparable a la de la luz. En el problema de neutrinos solares, es necesario considerar neutrinos cuyas energías son del orden de MeV. Experimentos de laboratorio establecen los siguientes límites cinemáticos superiores en las masas de los neutrinos [17]

$$m_{\nu_e} < 2.2\text{eV}, \quad m_{\nu_\mu} < 0.19\text{MeV}, \quad m_{\nu_\tau} < 18.2\text{MeV}. \quad (1.36)$$

Mientras que límites cosmológicos establecen

$$\sum_\alpha m_{\nu_\alpha} < 14\text{eV}, \quad (1.37)$$

con  $\alpha = e, \mu, \tau$  [18]. Por lo tanto, es buena aproximación asumir que

$$t - t_0 \approx \frac{x}{c}, \quad (1.38)$$

donde  $x$  es la distancia recorrida por la partícula. Con estas consideraciones reescribiremos la probabilidad como

$$P(\psi_\alpha \rightarrow \psi_\beta) = \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 + 2\Re \sum_{j < i} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \exp \left( -ix \frac{\delta m_{ij}^2 c^4}{\hbar c 2E} \right), \quad (1.39)$$

### 1.3. OSCILACIONES EN VACÍO.

donde el primer término es la probabilidad promedio, obtenida al promediar sobre la distancia y/o energía:

$$\langle P(\psi_\alpha \rightarrow \psi_\beta) \rangle = \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 = \sum_i |U_{\alpha i}^* U_{\beta i}|^2 = \langle P(\psi_\beta \rightarrow \psi_\alpha) \rangle. \quad (1.40)$$

Midiendo las probabilidades promedio obtenemos únicamente información sobre los parámetros de la matriz de mezcla, pero no sobre las diferencias de las masas elevadas al cuadrado.

El segundo término de (1.39) tiene un comportamiento periódico como función del tiempo, razón por la cual se usa el término *oscilaciones* para denominar este fenómeno físico. Una partícula para la que se cumplan las aproximaciones hechas en esta sección experimentará un cambio periódico en su composición en términos de los elementos de la base A mientras se propaga en el vacío.

En el resto del trabajo nos restringiremos al caso de dos neutrinos, digamos  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$ , en el que la matriz de mezcla depende de un solo parámetro  $\theta$  y existe sólo una diferencia de masas elevadas al cuadrado  $\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ . La razón es que dos generaciones son suficientes para explicar las ideas teóricas involucradas en la solución del problema de los neutrinos solares y la inclusión la tercera generación vuelve mas complicadas las formulas. En este contexto, la evolución espacial de un haz de neutrinos, en la base de los eigenestados con masa definida, es gobernada por el Hamiltoniano

$$H_0 = \left( E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right) \mathbb{I} - \frac{\delta m^2}{4E} \sigma_3, \quad (1.41)$$

donde  $\sigma_3$  es la matriz diagonal de Pauli

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Utilizando unidades naturales ( $\hbar=c=1$ ) en un haz que inicialmente estaba compuesto únicamente de  $\nu_e$ , la probabilidad de encontrar a un  $\nu_e$  o un  $\nu_\mu$  a una distancia  $x$  es dada por la sustitución de los elementos de la matriz de mezcla (1.7) en la ec. (1.39):

$$P_{\nu_e} \equiv |\langle \nu_e | \nu(x) \rangle|^2 = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( x \frac{\delta m^2}{4E} \right), \quad (1.43)$$

$$P_{\nu_\mu} \equiv |\langle \nu_\mu | \nu(x) \rangle|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( x \frac{\delta m^2}{4E} \right). \quad (1.44)$$

donde  $P_{\nu_e} + P_{\nu_\mu} = 1$ . Notemos que la probabilidad de encontrar un  $\nu_e$  es menor, en general, que la unidad. Gribov y Pontecorvo [19] fueron los primeros en

proponer que esto podía ser la causa de la disminución del flujo de los neutrinos del electrón observado en experimentos con neutrinos solares.  $P_{\nu_e}$  se conoce como la *probabilidad de supervivencia* del neutrino del electrón, la cual como se mencionó antes, tiene un comportamiento oscilatorio con una longitud de oscilación (distancia en la que completa un período) de

$$l_\nu = \frac{4\pi E}{\delta m^2}, \quad (1.45)$$

y una amplitud que es proporcional a los elementos de la matriz de mezcla. Cabe mencionar, que una condición necesaria para que las oscilaciones de neutrinos se presenten, es que los números leptónicos individuales  $L_\alpha$  no sean estrictamente conservados. En las ecuaciones (1.43) y (1.44), el espacio físico de parámetros es cubierto con  $\delta m^2 \geq 0$  y  $0 \leq \frac{\pi}{2}$  (o alternativamente  $0 \leq \frac{\pi}{4}$  y  $\delta m^2 \leq 0$ ), las oscilaciones sólo ocurren sí  $\theta \neq 0$  y  $\delta m^2 \neq 0$ , y su amplitud es máxima para  $\frac{\pi}{4}$  (mezcla máxima). En ocasiones el argumento del término oscilatorio es escrito como

$$x \frac{\delta m^2}{4E} = 1.27 \delta m^2 (\text{eV}^2) \frac{x(\text{Km})}{E(\text{GeV})}. \quad (1.46)$$

A partir de la Ec. (1.40), la probabilidad de supervivencia promedio, del neutrino electrónico, es dada por

$$\bar{P}_{\nu_e} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta, \quad (1.47)$$

lo cual es equivalente a considerar, en (1.43), que

$$\sin^2 \left( x \frac{\delta m^2}{4E} \right) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( x \frac{\delta m^2}{2E} \right) \right] \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad (1.48)$$

debido a la integración sobre la energía y/o la distancia.

En el supuesto caso de que las oscilaciones de neutrinos en el vacío ocurran debido a la mezcla de las dos primeras familias, es posible hallar relaciones entre los parámetros de interés en el problema ( $\sin^2 2\theta$ ,  $\delta m^2$ ) que dependerán de cantidades que pueden ser medidas experimentalmente. En un experimento real,  $E$  y  $x$ , tienen cierta dispersión debido a varios efectos, pero en un subconjunto de estos experimentos existe  $\langle x/E \rangle$  bien definido alrededor del cual se distribuyen los eventos. Para ser sensible a un valor dado de  $\delta m^2$ , un cierto experimento tiene que ser diseñado con  $x \sim l_\nu$ , i.e., con  $\langle x/E \rangle \approx \delta m^2$  [20]. Es instructivo hacer un modelo en el cual  $b \equiv 1.27x/E$  tenga una distribución gaussiana con desviación estándar  $\sigma_b$  sobre un valor central  $b_0$  [21]. La probabilidad de transición promediada sobre  $b$  es entonces:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[ 1 - \cos(2b_0 \delta m^2) e^{-2\sigma_b^2 (\delta m^2)^2} \right], \quad (1.49)$$

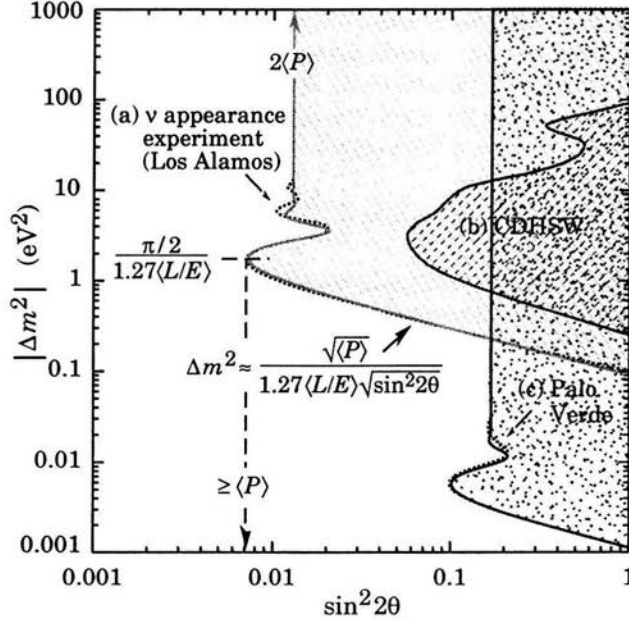


Figura 1.1: Rango de parámetros, de las oscilaciones de neutrinos, excluidos por tres experimentos. La línea punteada en (a) corresponde al experimento (DURKIN 88) de Los Alamos, mientras que la línea sólida se obtiene de la Ec. (1.49) usando los parámetros  $\langle P \rangle = 0.0065$ ,  $\delta m^2 = 0.095 \text{eV}^2$  en  $\sin^2 2\theta = 1$ , y  $\sigma_b/b_0 = 0.23$ ; (b) corresponde a los datos obtenidos en (DIDAK 84); y para (c) el resultado del experimento del reactor Palo Verde (BOEHM 01) es mostrado por la línea punteada, la línea sólida es obtenida de la Ec. (1.49) usando  $\langle P \rangle = 0.084$ ,  $\delta m^2 = 0.011 \text{eV}^2$  en  $\sin^2 2\theta = 1$ , y  $\sigma_b/b_0 = 0.3$ . Los experimentos se han elegido para propósitos ilustrativos y ninguno representa el mejor límite actual.

cabe señalar que  $\langle P \rangle$  no es el valor promedio dado en (1.40), sino el valor que resulta de integrar sobre la resolución del experimento. El valor de  $\langle P \rangle$  es establecido por el experimento, y entonces, se encuentra a  $\sin^2 2\theta$  como una función de  $\delta m^2$ . Esta función es mostrada en la figura 1.1 para elecciones particulares del parámetro. El límite de la región de exclusión del parámetro tiene las siguientes características:

- (1) Para un valor grande de  $\delta m^2$ , las oscilaciones rápidas son completamente eliminadas por el efecto exponencial, y en este límite  $\sin^2 2\theta = 2\langle P \rangle$ ;
- (2) La excursión máxima de la curva esta en  $\sin^2 2\theta = \langle P \rangle$  si la resolución es muy buena. Este “tope” a la izquierda ocurre en  $\delta m^2 = \pi/2b_0$ ;
- (3) Para un valor grande de  $\sin^2 2\theta$ ,  $\delta m^2 \approx \sqrt{\langle P \rangle} / (b_0 \sqrt{\sin^2 2\theta})$ ;

Si un efecto positivo es observado en un experimento, entonces la región de exclusión es remplazada por una región permitida, que usualmente depende de otra información, tal como estimaciones de  $x$  y  $E$  para cada evento.

En el caso del Sol las interacciones entre los neutrinos y los electrones del plasma estelar afectan la probabilidad de oscilación. En esta situación el formalismo discutido anteriormente debe ser modificado para incorporar los efectos de un medio sobre la propagación de los neutrinos. Esto será analizado en el capítulo siguiente.



## Capítulo 2

# Oscilaciones de Neutrinos en Materia.

Cuando los neutrinos se propagan a través de un medio material, pueden sufrir interacciones con las partículas presentes en él y dispersarse, ya sea coherente o incoherentemente. Estas interacciones modifican las propiedades de los neutrinos, y por ello el fenómeno de las oscilaciones se ve afectado. Para dispersión inelástica incoherente  $\nu-p$  existe una sección eficaz característica muy pequeña [22]:

$$\sigma \approx 10^{-43} \text{cm}^2 \left( \frac{E}{\text{MeV}} \right)^2. \quad (2.1)$$

La pequeñez de esta sección eficaz es mostrada por el hecho de que si un haz de  $10^{10}$  neutrinos con energía  $E \approx 1\text{MeV}$  fuera dirigido a la Tierra, sólo uno es deflectado por la materia terrestre. De lo anterior podría parecer que para los neutrinos la materia es irrelevante, pero se debe tomar en cuenta que la Ec. (2.1) no considera la contribución de interacciones coherentes elásticas a ángulo cero (*forward scattering*), la cual, se considera en este estudio.

### 2.1. Potenciales efectivos.

La propagación de los neutrinos a través de un medio se estudia como un proceso de dispersión elástica coherente, proceso en el que la condición de coherencia de la función de onda de los neutrinos en el medio material se traduce en un índice de refracción [23] o, equivalentemente, en un potencial efectivo de interacción, el cual depende de la densidad y composición de la materia [4, 24, 25, 26]. Usando la descripción del modelo estandar (SM) el potencial efectivo se debe a las interacciones de corrientes cargadas y de corrientes neutras con las partículas del medio, así los dos tipos de interacciones contribuyen

## 2.1. POTENCIALES EFECTIVOS.

Tabla 2.1.— Potenciales efectivos para  $\nu_e$  (signo superior) y  $\bar{\nu}_e$  (signo inferior) en distintos medios.

medio	$V_{CC}$	$V_{CN}$
$e^+$ y $e^-$	$\pm\sqrt{2}G_F(N_e - N_{\bar{e}})$	$\mp\frac{G_F}{\sqrt{2}}(N_e - N_{e^-})(1 - 4\text{sen}^2\theta_W)$
$p$ y $\bar{p}$	0	$\pm\frac{G_F}{\sqrt{2}}(N_p - N_{\bar{p}})(1 - 4\text{sen}^2\theta_W)$
$n$ y $\bar{n}$	0	$\mp\frac{G_F}{\sqrt{2}}(N_n - N_{\bar{n}})$
neutro	$\pm\sqrt{2}G_F N_e$	$\mp\frac{G_F}{\sqrt{2}} N_n$

a la energía potencial de interacción por separado:

$$V = V_{CC} + V_{CN} . \quad (2.2)$$

El potencial efectivo para neutrinos electrónicos  $\nu_e$ , inducido por la interacción de corriente cargada con los electrones en materia esta dado por:

$$V_{CC} = \sqrt{2}G_F N_e , \quad (2.3)$$

donde  $N_e$  es la densidad del número de electrones que, en general, es dependiente de la posición  $N_e = N_e(x)$ . El potencial es positivo indicando que la fuerza es repulsiva [27] (para  $\bar{\nu}_e$  el signo de  $V$  es negativo), el potencial tambien puede ser expresado en términos de la densidad de materia  $\rho$ :

$$V_{CC} \approx 7.6 \times 10^{-14} \rho Y_e \text{ eV} \left( \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right)^{-1} , \quad (2.4)$$

donde  $Y_e = \frac{N_e}{N_p + N_n}$  es la fracción de electrones. En la tabla [2.1] se presentan los potenciales efectivos para la interacción de  $\nu_e$  con diferentes partículas en el medio [28]. Para neutrinos del muon  $\nu_\mu$  y neutrinos del tau  $\nu_\tau$ , el potencial efectivo inducido por interacciones de corriente cargada es  $V_{CC} = 0$  para cualquiera de estos medios, mientras que el potencial inducido por interacciones de corriente neutra  $V_{CN}$  es el mismo que para  $\nu_e$

$$V_{CN} = -\frac{1}{\sqrt{2}}G_F N_n . \quad (2.5)$$

Para comenzar nuestro estudio de la evolución de los neutrinos en materia, recordaremos que la ecuación de evolución del neutrino en vacío es particularmente simple en la base de los eigenestados con masa definida:

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \end{pmatrix} = H_0 \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \end{pmatrix} , \quad (2.6)$$



donde  $H_0$  es el Hamiltoniano en vacío dado por (1.41). La relación entre los estados de sabor y los eigenestados de masa es

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

con  $U$  la matriz de mezcla dada en (1.7). Teniendo en cuenta que  $U$  es unitaria y que el ángulo de mezcla no tiene dependencia espacial ( $\dot{\theta}=0$ ), la evolución del neutrino en la base de sabor es

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \end{pmatrix} = H'_0 \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

donde

$$H'_0 = U H_0 U^\dagger = \left( E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right) \mathbb{I} + \frac{\delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Debido a la interacción con el medio, el Hamiltoniano de un neutrino propagándose en un medio material es de la forma

$$H = H'_0 + H_{int}, \quad (2.10)$$

en donde  $H_{int}$  añade una interacción definida a cada estado de sabor definido  $(\nu_e, \nu_\mu)$  que compone al neutrino

$$H_{int} = \begin{pmatrix} V^{\nu_e} & 0 \\ 0 & E^{\nu_\mu} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

con  $V^{\nu_\alpha}$ ,  $\alpha = e, \mu$ , la energía potencial de interacción de los neutrinos  $\nu_e, \nu_\mu$ , con el medio.

En un medio neutro el neutrino electrónico  $\nu_e$  puede tener interacciones de corriente cargada únicamente con los electrones, mientras que  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$  participarían en las interacciones de corriente cargada si los muones y los leptones tau, respectivamente, estuvieran presentes, pero estas condiciones no son satisfechas en materia normal. Por consiguiente, consideramos que las contribuciones de corriente cargada afectan sólo a los  $\nu_e$ , mientras que los tres tipos de neutrinos sufren interacciones de corriente neutra idénticas con los protones, neutrones y electrones del medio. Las contribuciones al potencial debidas a protones y electrones se cancelan para un medio neutro donde  $N_e = N_p$ .

De tal forma, podemos separar las energías de interacción de los neutrinos como sigue<sup>1</sup>:

$$V^{\nu_e} = V_{CN} + V_{CC},$$

---

<sup>1</sup>Esta derivación fue basada en las siguientes suposiciones: (a) los efectos de dispersión inelástica y de absorción son irrelevantes, (b) las partículas del medio están en reposo, y (c) la dispersión de los neutrinos por las partículas del medio ocurren independientemente [29].

## 2.1. POTENCIALES EFECTIVOS.

---

$$V^{\nu_\mu} = V_{CN} . \quad (2.12)$$

Dada la forma que toma la energía de interacción para cada neutrino en (2.12), podemos separar el Hamiltoniano de interacción en una parte proporcional a la matriz identidad y una parte no trivial:

$$H_{int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}(N_e - N_n)\mathbb{I} + \sqrt{2}G_F N_e \sigma_3 \quad (2.13)$$

Combinando este resultado con la ecuación (2.10), escribimos el Hamiltoniano para un neutrino que se propaga en un medio material neutro en la base de estados de sabor definido como:

$$H = \left\{ E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} + \frac{G_F}{\sqrt{2}}(N_e - N_n) \right\} \mathbb{I} + \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\delta m^2 \cos 2\theta + A & \delta m^2 \sin 2\theta \\ \delta m^2 \sin 2\theta & \delta m^2 \cos 2\theta - A \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

en donde  $A$  es el parámetro de Wolfenstein, el cual es muy importante en todo el análisis siguiente, y es definido como:

$$A = 2\sqrt{2}G_F N_e E, \quad (2.15)$$

que tiene una dependencia espacial  $A = A(x)$ , debida a la densidad del número de electrones

La parte proporcional a la matriz identidad sólo añade una fase global al estado que es solución de la ecuación de evolución y no afecta al ángulo de mezcla ni a las probabilidades, por lo que basta considerar la parte no diagonal

$$H = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\mathcal{B} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

donde  $\mathcal{A} = \delta m^2 \sin 2\theta$  y  $\mathcal{B} = \delta m^2 \cos 2\theta - A$ . La matriz  $H = H(x)$  corresponde a un caso particular de un *sistema de dos niveles* (ver apéndice A), con los elementos fuera de la diagonal igual a una constante real  $\mathcal{A}$ . Como  $H$  es real, la transformación que la diagonaliza  $\tilde{U}(x)$  es ortogonal (i.e.,  $\eta = 0$  en Ec. (A.4)). Como  $H(x)$  es dependiente de la distancia, la diagonalización también lo será

$$H_D(x) = \tilde{U}^\dagger(x)H(x)\tilde{U}(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(x) & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2(x) \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

con<sup>2</sup>

$$\varepsilon_{1,2} = \mp \frac{1}{4E} \sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2}, \quad (2.18)$$

los elementos de la matriz diagonal. En este contexto, definimos los eigenestados instantáneos del Hamiltoniano en materia mediante la relación:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} = \tilde{U}^\dagger(x) \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

donde la transformación unitaria, es dada por

$$\tilde{U}(x) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \text{sen } \tilde{\theta} \\ -\text{sen } \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

con el ángulo de mezcla efectivo en materia,  $\tilde{\theta}$ , dado por la Ec. (A.5)

$$\text{tg } 2\tilde{\theta} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}, \quad (2.21)$$

en donde observamos que  $\tilde{\theta}$  depende de la posición  $x$ , debido a que  $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(A)$ .

## 2.2. Evolución en materia.

De acuerdo con (A.10), la ecuación de evolución para los eigenestados instantáneos en materia es

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} = \tilde{H} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

donde

$$\tilde{H} = H_D - iU^\dagger \frac{dU}{dx}. \quad (2.23)$$

Ahora llevaremos a una forma explícita el Hamiltoniano dado en la Ec. (2.23), para lo cual, comenzamos con la derivada espacial de la matriz de mezcla en materia

$$\frac{d\tilde{U}}{dx} = -\frac{d\tilde{\theta}}{dx} \begin{pmatrix} \text{sen } \tilde{\theta} & -\cos \tilde{\theta} \\ \cos \tilde{\theta} & \text{sen } \tilde{\theta} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

---

<sup>2</sup>Los eigenvalores del Hamiltoniano completo (Ec. (2.14)) son

$$\varepsilon_{1,2} = E + \frac{m_2^2 + m_1^2}{4E} + \frac{G_F}{\sqrt{2}}(N_e - N_n) \mp \frac{1}{4E} \sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2},$$

ya que, mientras los eigenestados son los mismos que los de la parte no diagonal, esto no sucede con los eigenvalores.

## 2.2. EVOLUCIÓN EN MATERIA.

---

y enseguida multiplicamos por  $-i\tilde{U}^\dagger$  a la izquierda de ambos miembros de la igualdad:

$$-i\tilde{U}^\dagger \frac{d\tilde{U}}{dx} = i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Entonces,  $\tilde{H}$  se expresa como

$$\tilde{H} = H_D + i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

y por lo tanto (2.22), se reescribe de la siguiente manera:

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & -i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \\ i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} & \mathcal{E}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Esta última expresión puede llevarse a una forma mas conveniente e ilustrativa. A partir de la ecuación (2.18), expresamos la diferencia de las energías, en analogía con la Ec. (1.31), como:

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \frac{\delta M^2}{2E}, \quad (2.28)$$

en donde  $\delta M^2 \equiv M_2^2 - M_1^2$  es la diferencia de los cuadrados de las masas de los eigenestados instantáneos

$$\begin{aligned} \delta M^2 &= \sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2} \\ &= \sqrt{(\delta m^2 \sin 2\theta)^2 + (\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

y por lo tanto reescribimos los valores propios como:

$$\mathcal{E}_{1,2} = \mp \frac{\delta M^2}{4E} \quad (2.30)$$

con lo cual podemos generalizar la ecuación (1.45) a una longitud de oscilación en materia como:

$$\tilde{l} \equiv \frac{4\pi E}{\delta M^2}, \quad (2.31)$$

que en términos de la longitud de oscilación en vacío  $l_v$ , es dada por:

$$\tilde{l} = l_v \frac{\delta m^2}{\delta M^2}. \quad (2.32)$$

A partir de la ecuación (2.21) tenemos

$$\operatorname{tg} 2\tilde{\theta} = \frac{\delta m^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\delta m^2 \cos 2\theta - A}, \quad (2.33)$$

en donde  $\theta$  no tiene dependencia espacial, sino únicamente el parámetro de Wolfenstein  $A=A(x)$ . Al tomar la derivada de (2.33) con respecto a  $x$  obtenemos:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dx} = \frac{1}{2} \delta m^2 \operatorname{sen} 2\theta \frac{\cos^2 2\tilde{\theta}}{(\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2} \frac{dA}{dx}. \quad (2.34)$$

De (2.33)

$$\cos 2\tilde{\theta} = \frac{\delta m^2 \cos 2\theta - A}{\sqrt{(\delta m^2 \operatorname{sen} 2\theta)^2 + (\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2}}, \quad (2.35)$$

y (2.34) toma la forma

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\delta m^2 \operatorname{sen} 2\theta}{(\delta m^2 \operatorname{sen} 2\theta)^2 + (\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2} \frac{dA}{dx}. \quad (2.36)$$

Finalmente, empleando (2.30), la ecuación de evolución de los eigenestados instantaneos del Hamiltoniano en materia (2.27), es

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta M^2}{4E} & -i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \\ i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} & \frac{\delta M^2}{4E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

donde

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\delta m^2}{(\delta M^2)^2} \operatorname{sen} 2\theta \frac{dA}{dx}. \quad (2.38)$$

### 2.2.1. La noción de resonancia.

La longitud de oscilación en materia, dada por (2.32),

$$\tilde{l} = l_v \frac{\delta m^2}{\sqrt{(\delta m^2 \operatorname{sen} 2\theta)^2 + (\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2}}, \quad (2.39)$$

y el parámetro de mezcla  $\operatorname{sen}^2 2\tilde{\theta}$ , obtenido a partir de (2.33),

$$\operatorname{sen}^2 2\tilde{\theta} = \frac{(\delta m^2 \operatorname{sen} 2\theta)^2}{(\delta m^2 \operatorname{sen} 2\theta)^2 + (\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2}, \quad (2.40)$$

presentan un comportamiento resonante, en función del parámetro de Wolfenstein  $A(x)$ , y su valor en la resonancia  $A_R = A(x_R)$  es definido como el valor para el cual la diferencia entre las masas efectivas, Ec. (2.29), es mínima:

$$A_R = \delta m^2 \cos 2\theta. \quad (2.41)$$

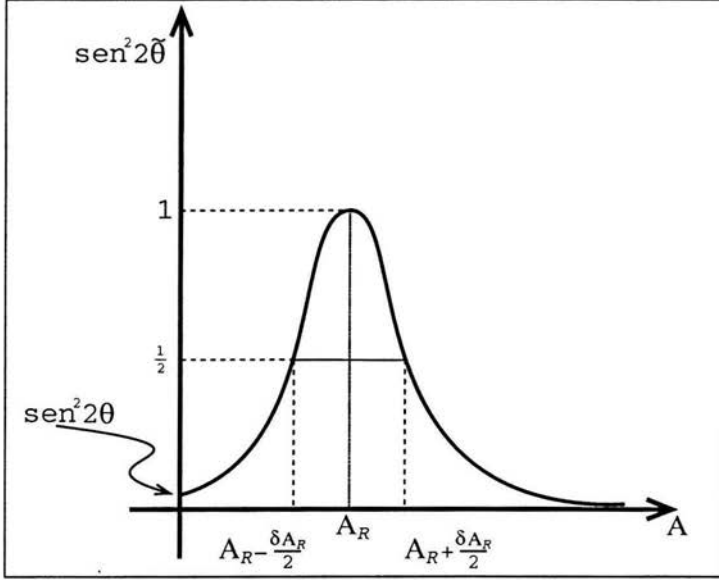


Figura 2.1: Dependencia del parámetro efectivo de mezcla  $\text{sen}^2 2\tilde{\theta}$  sobre el parámetro de Wolfenstein  $A$ .

En el punto de resonancia  $\text{sen}^2 2\tilde{\theta}(x) = 1$  y, por lo tanto, la longitud de oscilación toma el valor

$$\tilde{l}_R = \frac{l_v}{\text{sen} 2\theta}, \quad (2.42)$$

o bien, emplendo la relación (2.39),

$$\tilde{l}_R = \frac{\tilde{l}}{\text{sen} 2\tilde{\theta}}. \quad (2.43)$$

Suele definirse el ancho de la región de resonancia como el intervalo de valores  $A(x)$  delimitado por los puntos donde

$$\text{sen}^2 2\tilde{\theta}(x) = \frac{1}{2}, \quad (2.44)$$

lo cual, nos lleva a resolver la ecuación:

$$A^2(x) - [2\delta m^2 \cos 2\theta] A(x) + [(\delta m^2 \cos 2\theta)^2 - (\delta m^2 \text{sen} 2\theta)^2] = 0, \quad (2.45)$$

dando por resultado

$$A^\pm = \delta m^2 \cos 2\theta \pm \delta m^2 \text{sen} 2\theta, \quad (2.46)$$

que define el ancho de la región de resonancia  $\delta A_R \equiv (A^+ - A^-)$ , en valores de  $A(x)$ , como:

$$\delta A_R = 2\delta m^2 \sin 2\theta. \quad (2.47)$$

Por lo tanto el parámetro de mezcla

$$\sin^2 2\tilde{\theta} = \frac{(\delta A_R)^2}{(\delta A_R)^2 + 4(A_R - A)^2}, \quad (2.48)$$

tiene la forma característica de una resonancia *Breit-Wigner* de amplitud  $\Gamma = (\delta A_R/2)$ , centrada en  $A_R$ , Fig. 2.1. Mikeyev y Smirnov [30] fueron los primeros en darse cuenta de la importancia de la presencia de tal resonancia en el contexto del problema de neutrinos solares.

### 2.2.2. Cruce de niveles.

En la ausencia de mezcla, los elementos diagonales de la matriz de evolución  $E_e$  y  $E_\mu$ , son los niveles de energía de  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$ . En un medio,  $E_e$  y  $E_\mu$  son funciones lineales de  $A$ . Ellos se cruzan en el punto  $A = A_R = \delta m^2$  ( $E_e = E_\mu$ ), i.e., en el parámetro de densidad de materia resonante [29] (figura 2.2). Esto es radicalmente alterado cuando la mezcla es introducida. Los estados  $\tilde{\nu}_1$  y  $\tilde{\nu}_2$ , los cuales son diferentes de  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$ , tienen energías  $\mathcal{E}_1(A)$  y  $\mathcal{E}_2(A)$ , las cuales no se cruzan (fig. 2.2): la mezcla remueve el cruce de niveles.

La diferencia de energías

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \frac{1}{2E} \sqrt{(\delta m^2 \sin 2\theta)^2 + (\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2} \quad (2.49)$$

tiene un mínimo en la resonancia. Notamos que, cuando  $A$  incrementa,  $\mathcal{E}_1(A)$  cambia de la trayectoria  $E_e$  a la trayectoria  $E_\mu$ , mientras que  $\mathcal{E}_2$  muestra el comportamiento opuesto, y la transición ocurre principalmente en la región de resonancia. Esto trae consigo el hecho de que  $\tilde{\nu}_1$  es principalmente  $\nu_e$  a densidades bajas y principalmente  $\nu_\mu$  a densidades altas. Lo opuesto es cierto para  $\tilde{\nu}_2$ .

Los eigenestados, dados por (2.19)

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \cos \tilde{\theta} - \nu_\mu \sin \tilde{\theta} \\ \nu_e \sin \tilde{\theta} + \nu_\mu \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

muestran rasgos interesantes. Como un ejemplo consideraremos que el ángulo de mezcla en vacío  $\theta$  es pequeño. Entonces, para  $N_e \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\theta} \rightarrow \theta$ , tal que  $\tilde{\nu}_1 \simeq \nu_e$ . Para el otro caso cuando  $N_e \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{\theta} \rightarrow (\pi/2)$ , tal que  $\tilde{\nu}_1 \simeq \nu_\mu$ . En otras palabras, el eigenestado de masa inferior es casi puramente  $\nu_e$  si la densidad de materia se anula, y es casi puramente  $\nu_\mu$  si la densidad de materia es infinita.

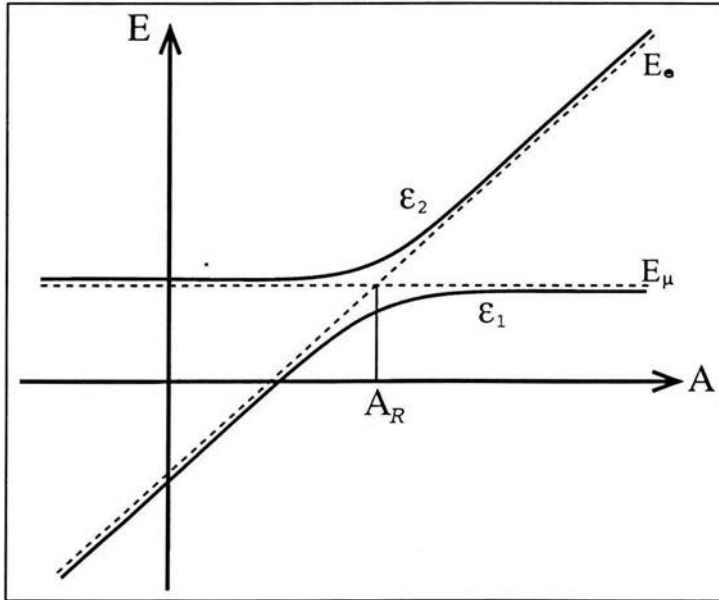


Figura 2.2: Esquema del cruce de niveles. Dependencia de los niveles de energía de dos neutrinos en función de  $A$  en ausencia de mezcla (líneas discontinuas) y tomando en cuenta la mezcla (líneas continuas).

### 2.3. Densidad uniforme.

Para ciertas situaciones muy particulares, es fácil hallar una solución a la ecuación (2.37). Este es el caso cuando consideramos un haz de neutrinos viajando a través de un medio de densidad uniforme, en el cual la densidad del número de electrones  $N_e$  es constante y, entonces, el parámetro de Wolfenstein  $A$  también es constante. De esta manera notamos que  $(d\tilde{\theta}/dx) = 0$ , por lo cual  $\tilde{\nu}_1$  y  $\tilde{\nu}_2$  son, de hecho, estados propios estacionarios y evolucionan independientemente sin transiciones  $\tilde{\nu}_1 \leftrightarrow \tilde{\nu}_2$ . También es importante mencionar que las componentes de sabor, relacionadas con  $\tilde{\theta}$ , de los eigenestados no varían. Mientras  $A$  es constante, los eigenestados de masa evolucionan solo por una fase

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(x) \\ \tilde{\nu}_2(x) \end{pmatrix} = \mathcal{U}(x) \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(0) \\ \tilde{\nu}_2(0) \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

donde, a partir de (A.14)

$$\mathcal{U}(x) = \begin{pmatrix} e^{-i\mathcal{E}_1 x} & 0 \\ 0 & e^{-i\mathcal{E}_2 x} \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

con  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ , los eigenvalores (constantes) dados por (2.18).



Las probabilidades correspondientes para un haz de neutrinos viajando a través de un medio uniforme que inicialmente era  $\nu_e$  pueden ser obtenidas reemplazando  $\theta$  por  $\tilde{\theta}$ , y  $\delta m^2$  por la diferencia de masas al cuadrado efectiva en el medio  $\delta M^2$ , en las expresiones dadas en (1.43) y (1.44):

$$P_{\nu_e}(x) = 1 - \sin^2 2\tilde{\theta} \sin^2 \left( \frac{\delta M^2}{4E} x \right), \quad (2.53)$$

$$P_{\nu_\mu}(x) = \sin^2 2\tilde{\theta} \sin^2 \left( \frac{\delta M^2}{4E} x \right). \quad (2.54)$$

Tomando el promedio del término dependiente de  $x$  en (2.54), obtenemos la probabilidad promedio de conversión

$$\bar{P}_{\nu_\mu} = \frac{1}{2} \sin^2 2\tilde{\theta} \quad (2.55)$$

que es proporcional al parámetro de mezcla  $\sin^2 2\tilde{\theta}$ , y como hemos visto anteriormente, tiene un comportamiento resonante.

## 2.4. Solución adiabática.

Consideremos el caso cuando la densidad del número de electrones  $N_e$  cambia con suficiente lentitud, tal que  $d\tilde{\theta}/dx$  es pequeña, de tal manera que podemos hacer uso de la *aproximación adiabática* y considerar la matriz  $\tilde{H}$  de la ecuación (2.37) aproximadamente diagonal. Que tan pequeña debe ser  $d\tilde{\theta}/dx$  está relacionado con el hecho de que los términos fuera de la diagonal en la matriz  $\tilde{H}$  sean mucho menores que los términos de la diagonal principal:

$$\left| \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \right| \ll \frac{\delta M^2}{4E}, \quad (2.56)$$

de tal forma que las transiciones  $\tilde{\nu}_1 \leftrightarrow \tilde{\nu}_2$  resultan despreciables, con lo cual la probabilidad de cruce  $P_c$  desaparece y los  $\tilde{\nu}_i$  ( $i=1,2$ ) evolucionan independientemente. Esto es análogo a la situación en un medio con densidad constante. Las componentes de sabor de los eigenestados  $\tilde{\nu}_i$ , determinadas por  $\tilde{\theta}(x)$ , varían conforme a la variación de la densidad, lo cual es la diferencia básica en comparación con el caso de un medio de densidad constante.

La desigualdad en (2.56) es llamada condición de adiabaticidad, y a la evolución de los eigenestados instantáneos del Hamiltoniano en materia cuando se satisface dicha condición se le llama evolución adiabática. Si se satisface la condición de adiabaticidad a lo largo de toda la evolución de los neutrinos en el medio material, se puede escribir la matriz  $\tilde{H}$  de la siguiente forma:

$$\tilde{H} \approx \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(x) & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2(x) \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

## 2.5. SOLUCIÓN NO ADIABÁTICA.

y un estado expresado en la base de eigenestados instantáneos del Hamiltoniano en materia  $\tilde{H}$  evolucionará, a partir de (A.14), de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(x) \\ \tilde{\nu}_2(x) \end{pmatrix} \approx \mathcal{U}(x) \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(0) \\ \tilde{\nu}_2(0) \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

donde

$$\mathcal{U}(x) = \begin{pmatrix} e^{-i \int_0^x \mathcal{E}_1(x') dx'} & 0 \\ 0 & e^{-i \int_0^x \mathcal{E}_2(x') dx'} \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

En general, en el punto de producción, de acuerdo con (2.50)

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(0) \\ \tilde{\nu}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \cos \tilde{\theta}_0 - \nu_\mu \sin \tilde{\theta}_0 \\ \nu_e \sin \tilde{\theta}_0 + \nu_\mu \cos \tilde{\theta}_0 \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

donde el subíndice '0' de ahora en adelante indica las cantidades en el punto donde el neutrino es producido. En el caso del Sol, cuando los neutrinos llegan a la superficie en  $x_\odot$ , los eigenestados instantáneos coinciden con los eigenestados de masa en vacío, es decir

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1(x_\odot) \\ \tilde{\nu}_2(x_\odot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Por lo tanto, utilizando la relación entre los eigenestados de sabor y de masa (2.7), después de abandonar el Sol la probabilidad de detectar a un neutrino electrónico a una distancia  $x$  del punto de producción, en la aproximación adiabática, es

$$P_{\nu_e}^{\text{ad}}(x) = \bar{P}_{\nu_e}^{\text{ad}} + \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\theta}_0 \sin 2\theta \cos \left[ \int_0^x (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) dy \right]. \quad (2.62)$$

donde

$$\bar{P}_{\nu_e}^{\text{ad}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\theta. \quad (2.63)$$

es la probabilidad promedio.

## 2.5. Solución no adiabática.

Los efectos no adiabáticos inducen transiciones entre los estados  $\tilde{\nu}_1$  y  $\tilde{\nu}_2$ . Más adelante, demostraremos que para valores realistas de los parámetros, tales efectos son importantes sólo cerca de la región de resonancia [31, 32]. Para otras

regiones, la aproximación adiabática es buena y puede ser usada sin problemas. En la región de resonancia, debemos resolver la ecuación de propagación (2.37) de manera exacta, asumiendo alguna forma simplificada para el perfil de densidad que sea aproximadamente válido en esa región. A partir de dicha solución podemos hallar la probabilidad  $P_c$  de que en dicha región tenga lugar la transición de un estado propio instantáneo al otro.

Una fórmula analítica, aproximada, para la probabilidad de supervivencia de un  $\nu_e$  viajando fuera del Sol, que toma en cuenta los efectos no adiabáticos, es la siguiente:

$$\bar{P}_{\nu_e} = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 - 2P_c) \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\theta \right]. \quad (2.64)$$

En el siguiente capítulo daremos una descripción detallada de la evolución de los neutrinos solares, así como un análisis completo de la probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico.

La solución adiabática se obtuvo suponiendo que  $\tilde{\theta}$  es un parámetro que varía muy ligeramente. Cuantificaremos ahora este enunciado, lo cual también llevará a una plausible expresión para  $P_c$ . Usando la expresión para  $d\tilde{\theta}/dx$ , dada en la ecuación (2.38), tenemos

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dx} = \frac{\sqrt{2}EG_F\delta m^2}{(\delta M^2)^2} \operatorname{sen} 2\theta \frac{dN_e}{dx}, \quad (2.65)$$

con lo cual, reducimos la condición adiabática a la forma

$$\left| \frac{dN_e}{dx} \right| \ll \frac{1}{4\sqrt{2}E^2G_F} \frac{(\delta M^2)^3}{\delta m^2 \operatorname{sen} 2\theta}, \quad (2.66)$$

y teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen} 2\tilde{\theta} = \frac{\delta m^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\delta M^2}, \quad (2.67)$$

reescribimos la ecuación (2.56) como

$$\kappa(x) \gg 1. \quad (2.68)$$

donde

$$\kappa(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}G_F} \left( \frac{\delta m^2}{2E} \right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{\operatorname{sen}^3 2\tilde{\theta}} \frac{1}{\left| \frac{dN_e}{dx} \right|}, \quad (2.69)$$

es el llamado *parámetro adiabático*, el cual, depende de la posición vía  $\tilde{\theta}$  y  $dN_e/dx$ . Si la densidad es muy alta en algún punto,  $\tilde{\theta} \rightarrow (\pi/2)$  y  $\kappa(x)$  llega a ser muy grande. Por el contrario, si la densidad de materia se anula en algún lugar  $\tilde{\theta} \rightarrow \theta$ , y de nuevo  $\kappa(x)$  será grande a menos que  $\theta$  tenga un valor cercano a  $\pi/4$ .

## 2.5. SOLUCIÓN NO ADIABÁTICA.

---

De la ecuación (2.69), es obvio que la condición adiabática es más difícil de satisfacer en la resonancia, donde  $\sin 2\tilde{\theta}$  es máximo. La probabilidad de transición  $P_c$  mencionada anteriormente depende de las condiciones cerca de la resonancia. Sea  $\kappa_R = \kappa(x_R)$  el valor del parámetro adiabático en la resonancia, de (2.69), teniendo en cuenta que  $\sin 2\tilde{\theta}(x_R) = 1$  y que

$$N_e(x_R) = \frac{\delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F E}, \quad (2.70)$$

resulta

$$\kappa_R = \frac{\delta m^2 \sin^2 2\theta}{2E \cos 2\theta} \frac{1}{\left| \frac{1}{N_e} \frac{dN_e}{dx} \right|_{x_R}}. \quad (2.71)$$

Por supuesto, si  $\kappa_R \gg 1$ , entonces  $P_c \cong 0$  y la propagación es adiabática en todas partes, mientras que, si  $\kappa_R \lesssim 1$ , entonces  $P_c$  es apreciable.

Intuitivamente, es claro que  $P_c$  debe ser más grande para valores mayores de  $E$ , lo cual dice, que el cruce de neutrinos mas energéticos ocurre mas rápidamente. También se puede decir que si  $E \rightarrow 0$ ,  $P_c$  debe desaparecer. Tampoco puede ser un polinomio en  $E$ , puesto que el cruce de niveles es esencialmente un efecto no perturbativo. Estas consideraciones sugieren una solución de la forma

$$P_c = e^{-\kappa_R F}, \quad (2.72)$$

donde la cantidad  $F$  es independiente de  $E$  y depende de cómo  $N_e$  varía con  $x$  cerca de la resonancia, por ejemplo, si la variación es lineal,  $F$  es una constante, como veremos enseguida en la llamada *aproximación semiclásica*.

La probabilidad de transición no adiabática entre dos estados fue calculada independientemente por Landau, Zener y Stückelberg [33] en el contexto de problemas de Física atómica, y fué aplicado al presente caso por Parke y Haxton [34, 35]. Para encontrar el comportamiento principal en la aproximación semiclásica, usamos el método de trayectorias complejas de Landau [36]. este método da

$$\ln P_c = -2\Im [S_1(t_1, t_*) + S_2(t_*, t_2)], \quad (2.73)$$

donde  $S_1(t_1, t_*)$  denota la acción para el movimiento del haz de neutrinos en el estado  $\tilde{\nu}_1$  de un tiempo inicial  $t_1$  a un tiempo de transición  $t_*$  el cual será especificado muy pronto. Después del tiempo  $t_*$ , usamos la acción en el estado  $\tilde{\nu}_2$  hasta un cierto tiempo final  $t_2$  cuando el haz de neutrinos sale de la región no adiabática. Las partes imaginarias de la acción siguen siendo inafectadas si tomamos  $t_1 = t_2 = t_R$ , siendo  $t_R$  el tiempo al cual el haz de neutrinos cruza el

punto de resonancia. Así,

$$\ln P_c = -2\Im \int_{t_R}^{t_*} (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) dt. \quad (2.74)$$

Cambiando la variable de integración de  $t$  a  $A$ , dada por (2.15), se tiene

$$\ln P_c = -\frac{1}{E} \Im \int_{A_R}^{A_*} \frac{dA}{(dA/dx)} \sqrt{(\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2 + (\delta m^2 \sin 2\theta)^2}, \quad (2.75)$$

donde reemplazamos  $dA/dt$  por  $dA/dx$  puesto que hemos estado utilizando  $t$  y  $x$  alternativamente.  $A_R$  es dada por (2.41) y,  $A_*$  es el valor de  $A$  en el “punto de transición” antes mencionado. En el metodo de Landau, este es el valor de  $A$  para el cual los dos eigenvalores coinciden, es decir,  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ . De la figura 2.2, observamos que esto no sucede para ningún valor real de  $A$ . De hecho, de las ecuaciones (2.29) y (2.30) se tiene que

$$A_* = \delta m^2 e^{\pm i 2\theta}, \quad (2.76)$$

el cual es complejo. Así, la integración de (2.75) tiene que ser hecha para los valores complejos de  $A$ . Esta es la razón por la cual este método es llamado método de trayectorias complejas.

Para evaluar la integral, necesitamos conocer el comportamiento de  $A$  como función de  $x$  en la región de resonancia. Si la variación es lineal,  $dA/dx$  es constante y podemos ponerla fuera de la integral. Cambiando la variable de integración de  $A$  por  $a = (A - \delta m^2 \cos 2\theta) / \delta m^2 \sin 2\theta$ , tenemos

$$\ln P_c = -\frac{(\delta m^2 \sin 2\theta)^2}{E |dA/dx|_{x_R}} \Im \int_0^i \sqrt{1 + a^2} da = -\frac{(\delta m^2 \sin 2\theta)^2}{E |dA/dx|_{x_R}} \cdot \frac{\pi}{4}, \quad (2.77)$$

y, recordando que  $A_R = \delta m^2 \cos 2\theta$ , podemos también escribir:

$$\ln P_c = -\frac{\delta m^2 \sin^2 2\theta}{E \cos 2\theta} \cdot \frac{1}{\left| \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right|_{x_R}} \cdot \frac{\pi}{4}. \quad (2.78)$$

Por lo tanto, en la ecuación (2.72),  $F = \pi/2$ , es decir,

$$P_c = e^{-\pi \kappa_R / 2}. \quad (2.79)$$

Este resultado, de hecho, depende sobre la suposición de una variación lineal de  $A$  cerca de la resonancia, lo cuál, puede parecer un poco drástico.

Por otro lado, D’Olivo [14] usando la aproximación de Magnus, obtuvo una expresión analítica para la probabilidad de cruce

$$P_c = \sin^2 \left[ (\tilde{\theta}_0 - \theta) e^{\kappa_R} \right], \quad (2.80)$$

## 2.5. SOLUCIÓN NO ADIABÁTICA.

---

la cual, se comporta cualitativa y cuantitativamente mejor que la Ec. (2.79), para todo el rango de valores de energía de los neutrinos, pero sobre todo en el límite extremo no adiabático.

Existen otras expresiones para la probabilidad de cruce, en las que se asume alguna forma simplificada del perfil de la densidad, dando por resultado expresiones del siguiente tipo

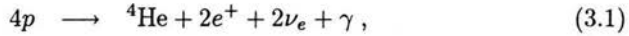
$$P_c = \frac{e^{-\kappa_R F} - e^{-\kappa_R F / \sin^2 \theta}}{1 - e^{-\kappa_R F / \sin^2 \theta}}, \quad (2.81)$$

donde  $F$  es calculada usando el metodo de Landau. En el próximo capítulo, asumiremos un perfil de tipo exponencial para la densidad del Sol, en el estudio de la evolución de los neutrinos solares.

## Capítulo 3

# Neutrinos Solares

Basados en el entendimiento de la evolución estelar conocemos que las reacciones termonucleares generan la energía solar. Estos procesos involucran sólo la primera generación de fermiones, y de este modo, los neutrinos solares son únicamente neutrinos electrónicos, además, debido a las reacciones de fusión se producen sólo neutrinos y no antineutrinos. Dichas reacciones ocurren vía dos cadenas principales, la cadena  $pp$  que es responsable del 98.5% de la energía, y el ciclo CNO con el 1.5% restante. Existen cinco reacciones que producen  $\nu_e$  en la cadena  $pp$  y tres en el ciclo CNO. Ambas cadenas dan lugar a la fusión de protones en  ${}^4\text{He}$ :



donde la energía liberada en la reacción,  $Q = 4m_p - m_{{}^4\text{He}} - 2m_e = 26\text{MeV}$ , es mayormente radiada a través de los fotones y solamente una fracción pequeña es portada por los neutrinos,  $\langle E_{2\nu_e} \rangle = 0.59\text{MeV}$ . Los fotones son dispersados y redispersados por la interacción con la materia solar y, en promedio, les toma cerca de  $10^4$  años para salir. En cambio, los neutrinos interactúan muy débilmente con el plasma estelar, viajando casi a la velocidad de la luz, y sólo requieren de unos dos minutos para emerger del Sol.

Para determinar de forma precisa las razones de las diversas reacciones en las dos cadenas, que nos darán los flujos de los neutrinos y su espectro de energía, es necesario un conocimiento detallado del Sol y su evolución. Los modelos solares describen las características del Sol y su evolución a partir de un conjunto de parámetros observacionales (luminosidad superficial, edad, radio  $R_\odot$  y masa) y de varias suposiciones básicas (simetría esférica, equilibrio hidrostático y térmico, ecuación de gas ideal, y abundancias actuales de los elementos). Durante las últimas cuatro décadas, los modelos solares se han refinado constantemente como resultado de la creciente información acerca de los parámetros de interés.

Nosotros adoptamos como *Modelo Solar Estándar* (SSM) la versión más reciente del modelo desarrollado por Bahcall y Pinsonneault[37], designado como

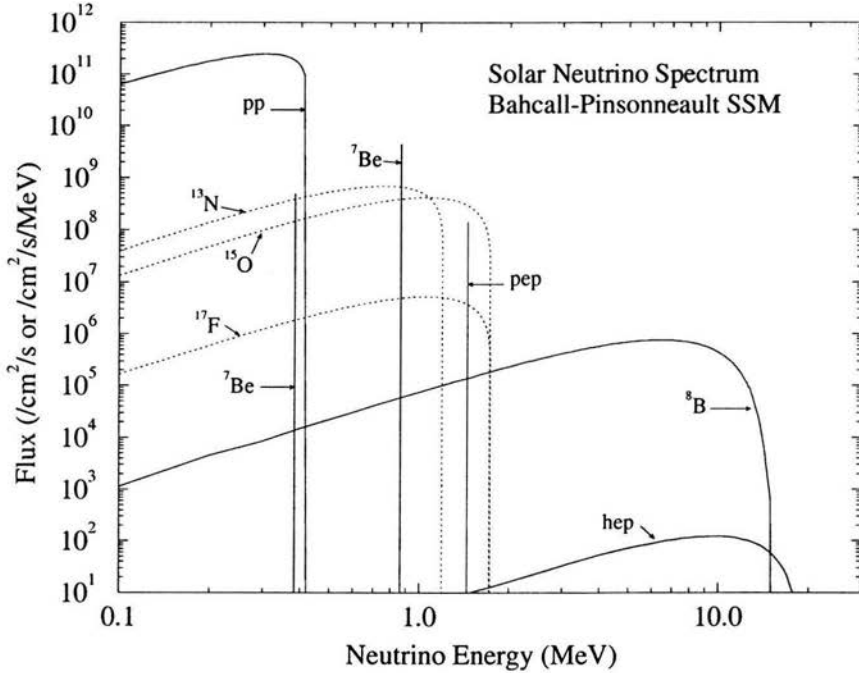


Figura 3.1: Espectro de los neutrinos solares. El flujo de neutrinos de fuentes continuas son dadas en unidades de  $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{MeV}^{-1}$  en una unidad astronómica y el flujo de las fuentes monoenergéticas es dado en  $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ .

BP2000. En la figura 3.1 mostramos el espectro de energía de los flujos de neutrinos de las reacciones en las dos cadenas principales (tabla 4.1).

Tabla 3.1.— Reacciones de la producción de neutrinos en el Sol.

Reacción	Flujo ( $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ )
$p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$	$\phi(pp) = 5.95 \times 10^{10}$
$p + e + p \rightarrow {}^2\text{H} + \nu_e$	$\phi(pep) = 1.40 \times 10^8$
${}^3\text{He} + p \rightarrow {}^4\text{He} + e^+ + \nu_e$	$\phi(hep) = 9.30 \times 10^3$
${}^7\text{Be} + e \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$	$\phi({}^7\text{Be}) = 4.77 \times 10^9$
${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu_e$	$\phi({}^8\text{B}) = 5.05 \times 10^6$
${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e$	$\phi({}^{13}\text{N}) = 5.48 \times 10^8$
${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$	$\phi({}^{15}\text{O}) = 4.80 \times 10^8$



Para describir la evolución de los neutrinos en materia solar, es necesario conocer otras cantidades que son predichas por el SSM, tales como la densidad y la composición de la materia solar, las cuales nos proporcionan la densidad del número de electrones  $N_e$ . La densidad de la materia solar disminuye monótonicamente como función de la distancia radial  $R$  al centro del Sol (Fig. 3.2). Para una distancia  $R < 0,9R_\odot$ ,  $N_e$  se puede aproximar por un perfil exponencial

$$N_e(R) = N_e(0)e^{-R/r_0}, \quad (3.2)$$

con  $r_0 = R_\odot/10.54 = 3.4 \times 10^{14} \text{eV}^{-1}$ . Además, para determinar de manera precisa la evolución de los neutrinos se necesita conocer la distribución en la región de producción para los flujos de los neutrinos producidos en las distintas reacciones. En la figura 3.3 observamos la predicción del BP2000 para las distribuciones de la cadena  $pp$ .

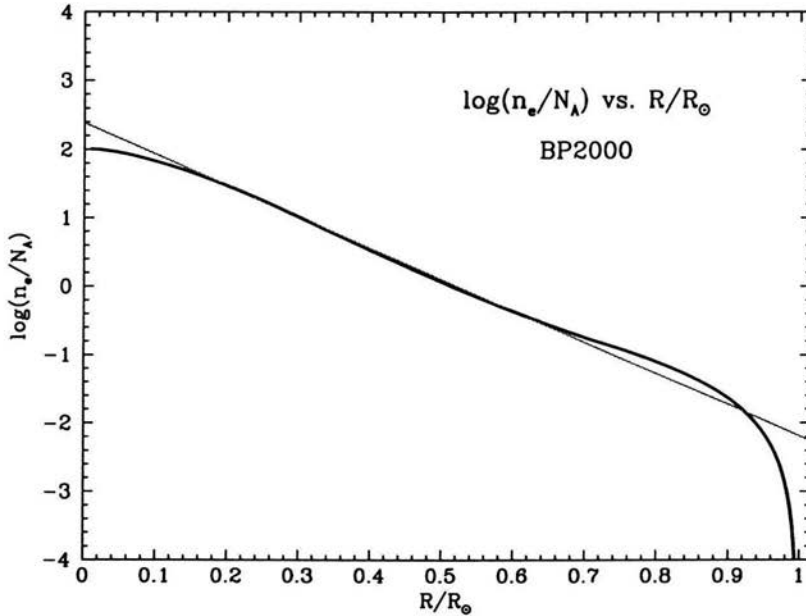


Figura 3.2: Perfil de la densidad de materia solar. La línea continua es la predicción del BP2000; y la línea discontinua es la aproximación exponencial.

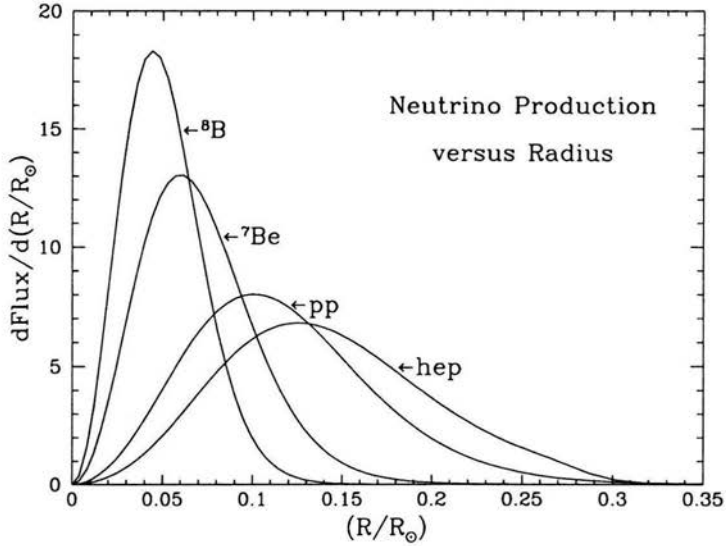


Figura 3.3: Producción de los neutrinos de la cadena  $pp$  como una función de la distancia del centro del Sol.

### 3.1. Evolución de los neutrinos solares

Consideremos un neutrino del electrón producido en el interior del Sol en  $x=x_0$ , cuyo vector de estado representamos por

$$\psi_{\nu_e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Este estado se puede escribir en la base de los eigenestados instantáneos del Hamiltoniano en materia:

$$\psi(x_0) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta}_0 & -\text{sen } \tilde{\theta}_0 \\ \text{sen } \tilde{\theta}_0 & \cos \tilde{\theta}_0 \end{pmatrix} \psi_{\nu_e} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta}_0 \\ \text{sen } \tilde{\theta}_0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

donde  $\tilde{\theta}_0$  es el ángulo de mezcla en la materia solar, en  $x=x_0$ . La evolución del estado es esencialmente adiabática desde el punto de producción  $x_0$  hasta antes de entrar a la región de resonancia en  $x=x_R-\delta$ , por lo que a esta distancia el

estado es dado por

$$\psi(x_R - \delta) = \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_2} \end{pmatrix} \psi(x_0), \quad (3.5)$$

donde

$$\gamma_{1,2} = \int_{x_0}^{x_R - \delta} \mathcal{E}_{1,2}(x) dx. \quad (3.6)$$

Mientras el neutrino viaja dentro de la región de resonancia, existe la posibilidad de cruzamiento entre los eigenestados instantáneos del Hamiltoniano, por lo cual, al salir de esta región el estado puede escribirse como:

$$\psi(x_R + \delta) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - P_c} e^{-i\alpha} & \sqrt{P_c} e^{-i\beta} \\ -\sqrt{P_c} e^{i\beta} & \sqrt{1 - P_c} e^{i\alpha} \end{pmatrix} \psi(x_R - \delta), \quad (3.7)$$

donde hemos elegido una parametrización  $SU(2)$  general para el operador de evolución en la base de los eigenestados instantáneos de masa en materia, en términos de la llamada probabilidad de cruce  $P_c$  y de dos fases genéricas  $\alpha$  y  $\beta$ . Esta es la forma más general de una matriz unitaria de  $2 \times 2$  con sólo dos fases. Para un perfil de densidad exponencial [38, 39]

$$P_c = \frac{e^{-\gamma \sin^2 \theta} - e^{-\gamma}}{1 - e^{-\gamma}}, \quad (3.8)$$

donde

$$\gamma = 2\pi r_0 \frac{\delta m^2}{2E}, \quad (3.9)$$

es decir, en la ecuación (2.81),  $F$  toma el valor

$$F = \pi \frac{\sin^2 \theta \cos 2\theta}{\sin^2 2\theta} = \frac{\pi}{2} (1 - \operatorname{tg}^2 \theta). \quad (3.10)$$

La evolución del neutrino desde que abandona la región de resonancia hasta que llega a la superficie del Sol ( $x = x_S$ ), con muy buena aproximación, de nuevo es adiabática:

$$\psi(x_S) = \begin{pmatrix} e^{-i\gamma'_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma'_2} \end{pmatrix} \psi(x_R + \delta), \quad (3.11)$$

con

$$\gamma'_{1,2} = \int_{x_R + \delta}^{x_S} \mathcal{E}_{1,2}(x) dx. \quad (3.12)$$

### 3.1. EVOLUCIÓN DE LOS NEUTRINOS SOLARES

En términos de los eigenestados de masa en vacío el estado al borde del Sol es:

$$\psi_{\odot} = \begin{pmatrix} \cos \omega & \text{sen } \omega \\ -\text{sen } \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \psi(x_S) \quad (3.13)$$

con  $\omega = \bar{\theta}_S - \theta$ , donde  $\bar{\theta}_S$  es el ángulo de mezcla en materia en  $x = x_S$  y  $\theta$  el ángulo de mezcla en vacío. Suponemos que la densidad se anula en el borde del Sol, con lo cual  $\bar{\theta}_S = \theta$ , de donde resulta  $\omega = 0$  y  $\psi_{\odot} = \psi(x_S)$ .

Con lo antes expuesto, la evolución completa del neutrino electrónico, desde el punto de producción en el interior del Sol  $x_0$  hasta su superficie  $x_{\odot}$ , en la base de los eigenestados de masa en vacío, puede expresarse como

$$\psi_{\odot} = \mathcal{U}(x_{\odot}, x_0) \psi(x_0), \quad (3.14)$$

donde  $\psi(x_0)$  es dada por (3.4) y  $\mathcal{U}(x_{\odot}, x_0)$  es el operador de evolución total hasta la superficie del Sol

$$\mathcal{U}(x_{\odot}, x_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-P_c} e^{-i\xi_{12}} & \sqrt{P_c} e^{-i\xi_{22}} \\ -\sqrt{P_c} e^{i\xi_{22}} & \sqrt{1-P_c} e^{i\xi_{12}} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

donde

$$\xi_{12} = \alpha - \left( \frac{\Delta\gamma + \Delta\gamma'}{2} \right), \quad \xi_{22} = \beta - \left( \frac{\Delta\gamma - \Delta\gamma'}{2} \right), \quad (3.16)$$

con

$$\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \Delta\gamma' = \gamma_2' - \gamma_1'. \quad (3.17)$$

Eliminando una fase global, tenemos

$$\psi_{\odot} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 e^{-i\phi} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

con  $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ , donde

$$a_1 = \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - P_c \right) \cos 2\bar{\theta}_0 + \sqrt{P_c(1-P_c)} \text{sen } 2\bar{\theta}_0 \cos(\xi_{12} - \xi_{22}) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.19)$$

$$\phi = \text{arctg} \frac{u}{v}, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{P_c(1-P_c)} \cos 2\bar{\theta}_0 \text{sen}(\xi_{12} + \xi_{22}) - \frac{1}{2} \text{sen } 2\bar{\theta}_0 \text{sen } 2\xi_{12} \\ &\quad + \frac{1}{2} P_c \text{sen } 2\bar{\theta}_0 (\text{sen } 2\xi_{12} + \text{sen } 2\xi_{22}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
 v &= -\sqrt{P_c(1-P_c)} \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos(\xi_{12} + \xi_{22}) + \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\xi_{12} \\
 &\quad - \frac{1}{2} P_c \sin 2\tilde{\theta}_0 (\cos 2\xi_{12} + \cos 2\xi_{22}) .
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Notemos que  $\xi_{12}-\xi_{22}$  no depende de  $\Delta\gamma'$ , es decir, sólo depende de las diferencias de fase antes y durante la región de resonancia.

En el camino del Sol a la Tierra, los neutrinos recorren en el vacío una distancia  $D$ , de manera tal que, salvo una fase global, el estado (3.18) que arriva a la superficie de la Tierra es

$$\psi_{\oplus} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \psi_{\odot} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 e^{-i(\phi+\varphi)} \end{pmatrix} . \tag{3.23}$$

donde  $\varphi = \frac{\delta m^2}{2E} D$  es la fase (relativa) adquirida por los eigenestados de masa en vacío en el camino del Sol a la Tierra. Escrito en la base de los eigenestados de sabor (3.23) resulta

$$\begin{pmatrix} a_e \\ a_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta e^{-i(\phi+\varphi)} \\ -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta e^{-i(\phi+\varphi)} \end{pmatrix} , \tag{3.24}$$

con  $|a_e|^2 + |a_\mu|^2 = 1$ . De aquí, durante el día, la probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico es dada por

$$P_{\nu_e}^D = |a_e|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - 2a_1^2) \cos 2\theta + a_1 a_2 \sin 2\theta \cos(\phi + \varphi) , \tag{3.25}$$

Con el fin de hacer un análisis, antes de incorporar el efecto de la Tierra, escribiremos (3.25) con más detalle. A partir de (3.19), tenemos que

$$(1 - 2a_1^2) = (2P_c - 1) \cos 2\tilde{\theta}_0 - 2\sqrt{P_c(1-P_c)} \sin 2\tilde{\theta}_0 \cos(\Phi_{12} - \Phi_{22}) , \tag{3.26}$$

donde  $(1 - 2P_c)$  es llamado *factor de adiabaticidad*, el cual determina la adiabaticidad de la conversión dentro del Sol y  $\cos 2\tilde{\theta}_0$  es el *factor de posición de la resonancia*, el cual, determina a que distancia del punto de producción esta situada la capa de resonancia. Se puede ver que

$$\begin{aligned}
 a_1 a_2 \cos(\phi + \varphi) &= -\sqrt{P_c(1-P_c)} \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos(\Phi_{12} + \Phi_{22}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} P_c \sin 2\tilde{\theta}_0 (\cos 2\Phi_{12} + \cos 2\Phi_{22}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\Phi_{12} ,
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 a_2 \sin(\phi + \varphi) &= \sqrt{P_c(1-P_c)} \cos 2\tilde{\theta}_0 \sin(\Phi_{12} + \Phi_{22}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} P_c \sin 2\tilde{\theta}_0 (\sin 2\Phi_{12} + \sin 2\Phi_{22}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sin 2\tilde{\theta}_0 \sin 2\Phi_{12} ,
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

### 3.1. EVOLUCIÓN DE LOS NEUTRINOS SOLARES

donde, se ha hecho conexión con la notación de los ángulos  $\Phi_{ij}$  que aparecen en las referencias [40, 41, 42], mediante la identificación:

$$\Phi_{12} = \xi_{12} - \frac{\varphi}{2}, \quad \Phi_{22} = \xi_{22} - \frac{\varphi}{2}. \quad (3.29)$$

Con lo cual (3.25) se puede escribir como

$$P_{\nu_e} = \bar{P}_{\nu_e} + P_{\nu_e}^{osc} \quad (3.30)$$

donde

$$\bar{P}_{\nu_e} = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - P_c \right) \cos 2\theta \cos 2\tilde{\theta}_0, \quad (3.31)$$

es la probabilidad promedio, derivada primeramente por Parke [34], y

$$\begin{aligned} P_{\nu_e}^{osc} &= \sqrt{P_c(1-P_c)} \cos 2\theta \sin 2\tilde{\theta}_0 \cos(\Phi_{12} - \Phi_{22}) \\ &- \sqrt{P_c(1-P_c)} \sin 2\theta \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos(\Phi_{12} + \Phi_{22}) \\ &- \frac{1}{2} P_c \sin 2\theta \sin 2\tilde{\theta}_0 (\cos 2\Phi_{12} + \cos 2\Phi_{22}) \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\Phi_{12}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

son términos oscilatorios, y el último de ellos corresponde a la parte adiabática. En general, en el caso de los neutrinos solares, se considera una buena aproximación el despreciar los términos oscilatorios<sup>1</sup> y conservar sólo  $\bar{P}_{\nu_e}$ , ya que, al promediar sobre la energía de los neutrinos que llegan a la Tierra, es de esperar que ocurran fuertes cancelaciones en estos términos. Hacemos notar que, si  $P_c=0$ , se tiene

$$\bar{P}_{\nu_e}^{ad} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \cos 2\tilde{\theta}_0, \quad (3.33)$$

que corresponde a la probabilidad de supervivencia para el caso en que los neutrinos evolucionan, en el Sol, de forma completamente adiabática.

---

<sup>1</sup>En el siguiente capítulo exponemos las justificaciones de esta afirmación tan útil para nuestros fines.

## Capítulo 4

# Asimetría Día-Noche

En la sección (2.3) hemos visto que, para una densidad constante, la solución a la ecuación de evolución de los eigenestados en materia, es extremadamente sencilla. Sin embargo, debido al abrupto cambio de densidad en el borde y a la existencia de una probabilidad de transición entre el estado  $\nu_2$  (en el vacío) y  $\tilde{\nu}_1$  en el medio, la base que forman los eigenestados en materia no es una representación adecuada para tratar un haz de neutrinos que atraviesan la frontera entre el espacio vacío y un medio uniforme. Una buena representación del haz de neutrinos que llegan a la Tierra es la base de los eigenestados de sabor, los cuales son continuos a través del borde. Por tal razón, en este caso, es conveniente describir la evolución en la Tierra en términos del operador de evolución en la base de sabor.

Cuando los neutrinos solares viajan por el interior de la Tierra, como consecuencia del efecto de la materia (apéndice B), el flujo de neutrinos del electrón en la noche es diferente que en el día. Nosotros estamos interesados en el signo de la llamada *Asimetría Día-Noche* [43, 44, 45] y, en este capítulo, hallaremos la solución a dicho problema para un modelo sencillo, aunque bastante realista, del perfil de densidad terrestre, el cual consiste de dos regiones (manto y núcleo), cada una caracterizada por una densidad constante, como se muestra en la figura 4.1. Primero describiremos el caso en que los neutrinos cruzan sólo a través del manto y luego analizaremos la situación mas compleja en que atraviezan ambas regiones.

### 4.1. Cruce a través del manto.

Sea  $\psi(0)$  el estado inicial y que corresponde al estado, en la base de sabor, del neutrino que llega a la Tierra, dado por (3.24). Empleando el operador de evolución  $\mathcal{U}(L)$  para un neutrino que se propaga en materia con densidad constante, dado por (B.20), y omitiendo la fase global  $\xi$ , la evolución a través

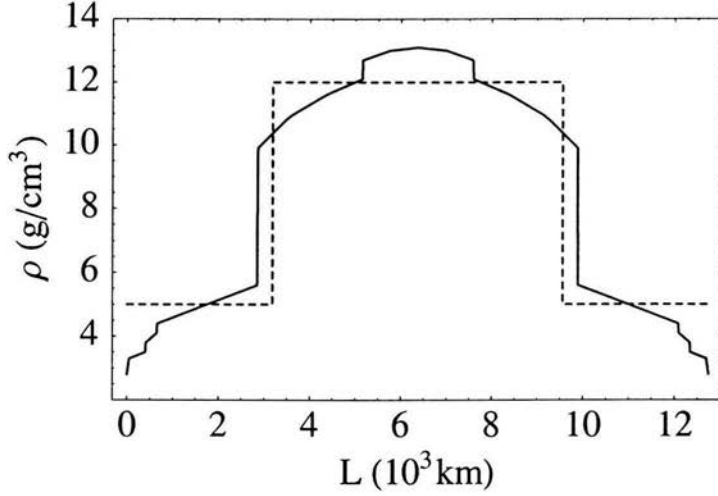


Figura 4.1: Perfil realista de la densidad de la densidad de la materia terrestre (línea continua) dada en el Preliminary Reference Earth Model (PREM) [46]. Y perfil escalón manto-núcleo-manto (línea discontinua).

de la Tierra para un sólo perfil constante es dada por:

$$\psi(L) = \mathcal{U}(L)\psi(0) = \begin{pmatrix} a_e(L) \\ a_\mu(L) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde  $L$  es la distancia recorrida y

$$\begin{aligned} a_e(L) &= a_e \cos \lambda L - i \operatorname{sen} \lambda L \left( a_\mu \operatorname{sen} 2\tilde{\theta} - a_e \cos 2\tilde{\theta} \right), \\ a_\mu(L) &= a_\mu \cos \lambda L - i \operatorname{sen} \lambda L \left( a_e \operatorname{sen} 2\tilde{\theta} + a_\mu \cos 2\tilde{\theta} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Por lo tanto, la probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico al emerger de la Tierra, durante la noche, es

$$\begin{aligned} P_{\nu_e}^N &= |a_e(L)|^2 \\ &= |a_e|^2 - \operatorname{sen} 2\lambda L \operatorname{sen} 2\tilde{\theta} \Im(a_e^* a_\mu) \\ &\quad + \operatorname{sen}^2 \lambda L \left[ (1 - 2|a_e|^2) \operatorname{sen}^2 2\tilde{\theta} - \operatorname{sen} 4\tilde{\theta} \Re(a_e^* a_\mu) \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $P_{\nu_e}^D = |a_e|^2$  es la probabilidad, dada por (3.25), de detectar a un  $\nu_e$  durante el día, es decir, cuando llega a la superficie de la tierra ( $L=0$ ). De acuerdo con (3.24)

$$a_e^* a_\mu = \frac{1}{2}(1 - 2a_1^2) \operatorname{sen} 2\theta + a_1 a_2 \cos 2\theta \cos(\phi + \varphi) - i a_1 a_2 \operatorname{sen}(\phi + \varphi). \quad (4.4)$$



Es conveniente para nuestros fines definir el *parámetro adimensional*<sup>1</sup>

$$\chi \equiv \delta m^2 / A , \quad (4.5)$$

donde  $A = 2\sqrt{2}G_F N_e E$  es el parámetro de Wolfenstein, con  $N_e$  la densidad del número de electrones en el manto terrestre. Considerando que la distancia promedio del Sol a la Tierra es  $D = 1.50 \times 10^{13}$  cm, o bien, en unidades naturales  $D \cong 7.60 \times 10^{17} \text{eV}^{-1}$ , en términos de nuestra variable adimensional  $\chi$ , la fase en vacío  $\varphi$  viene dada por

$$\varphi = \sqrt{2}G_F N_e D \chi = 1.29 \times 10^5 \chi , \quad (4.6)$$

con lo cual, las cantidades

$$a_1 a_2 \cos(\phi + \varphi) , \quad a_1 a_2 \sin(\phi + \varphi) , \quad (4.7)$$

que contienen a  $\varphi$ , oscilan rápidamente y son importantes únicamente para valores de  $\chi \lesssim 10^{-5}$  ( $\frac{\delta m^2}{E} \lesssim 10^{-17} \text{eV}$ ) que corresponde a la región de oscilaciones en vacío (VO), en donde los efectos de la materia suprimen las transiciones de sabor en el Sol y en la Tierra. Los términos en la probabilidad de supervivencia (4.3) que contienen las cantidades dadas en (4.7), corresponden a la contribución de interferencia, debida a la coherencia de la mezcla de los eigenestados de masa en vacío.

En este trabajo, asumimos la aproximación de mezcla incoherente<sup>2</sup> cuya región se toma como [47, 48, 49, 50, 51]:  $\chi \gtrsim 10^{-2}$  ( $\frac{\delta m^2}{E} \gtrsim 10^{-14} \text{eV}$ ). El rango intermedio  $10^{-5} \lesssim \chi \lesssim 10^{-2}$ , en el que las cantidades (4.7) deben tomarse en cuenta, corresponde a las oscilaciones de cuasivacío (QVO) [52, 53, 54, 55] que no serán contempladas. Por lo tanto, para  $\chi \gtrsim 10^{-2}$  (región MSW) se desprecian tales términos, y

$$P_{\nu_e}^N = |a_e|^2 + (1 - 2a_1^2) \text{sen}^2 \lambda L \left( \text{sen}^2 2\bar{\theta} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \text{sen} 4\bar{\theta} \text{sen} 2\theta \right) , \quad (4.8)$$

con

$$\begin{aligned} |a_e|^2 &\cong \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2a_1^2) \cos 2\theta , \\ a_e^* a_\mu &\cong \frac{1}{2}(1 - 2a_1^2) \text{sen} 2\theta . \end{aligned} \quad (4.9)$$

---

<sup>1</sup>Equivalente a la razón entre la longitud de refracción  $l_0 = 2\pi/\sqrt{2}G_F N_e$  y la longitud de oscilación en vacío  $l_\nu$  [56].

<sup>2</sup>La integración sobre la energía del neutrino, así como sobre la región de producción, lleva al promedio en las oscilaciones, lo cual es equivalente a considerar al estado del neutrino que arriva en la superficie de la Tierra como una mezcla incoherente de los eigenestados de masa.

#### 4.1. CRUCE A TRAVÉS DEL MANTO.

Reescribiendo las definiciones de las funciones trigonométricas del ángulo doble de la mezcla en materia terrestre en términos del parámetro adimensional  $\chi$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2\tilde{\theta} &= \frac{\chi \operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{(\chi \cos 2\theta - 1)^2 + (\chi \operatorname{sen} 2\theta)^2}}, \\ \cos 2\tilde{\theta} &= \frac{\chi \cos 2\theta - 1}{\sqrt{(\chi \cos 2\theta - 1)^2 + (\chi \operatorname{sen} 2\theta)^2}},\end{aligned}\quad (4.10)$$

vemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 4\tilde{\theta} &= 2 \operatorname{sen}^2 2\tilde{\theta} \left( \frac{\chi \cos 2\theta - 1}{\chi \operatorname{sen} 2\theta} \right), \\ \operatorname{sen}(2\tilde{\theta} - 2\theta) &= \frac{\operatorname{sen} 2\tilde{\theta}}{\chi},\end{aligned}\quad (4.11)$$

con lo cual, la probabilidad de supervivencia toma la forma:

$$P_{\nu_e}^N = |a_e|^2 + (1 - 2a_1^2) \operatorname{sen}(2\tilde{\theta} - 2\theta) \operatorname{sen} 2\tilde{\theta} \operatorname{sen}^2 \lambda L, \quad (4.12)$$

en donde  $(1 - 2a_1^2)$  es dado por (3.26).

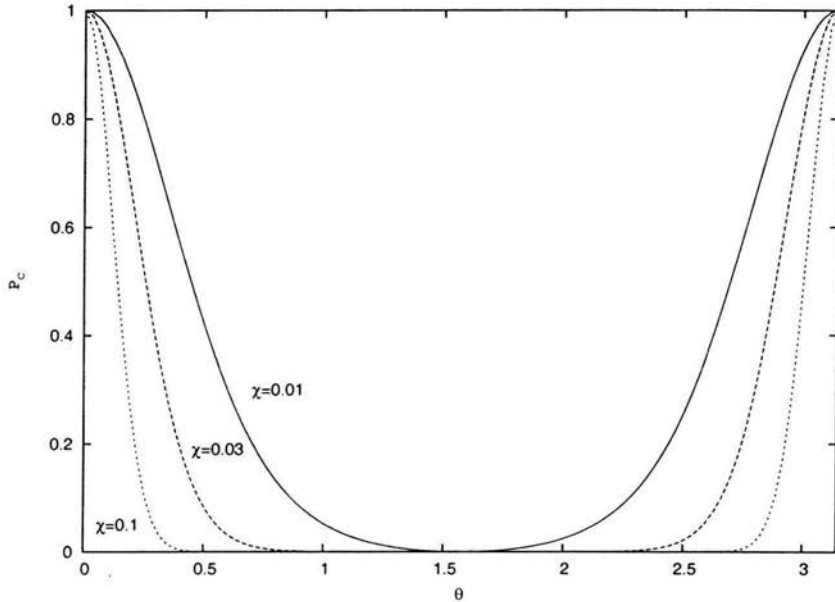


Figura 4.2: Probabilidad de cruce en términos del ángulo de mezcla, en radianes, para ciertos valores de  $\chi$ .

En (3.32), el primer término contribuye de manera significativa, únicamente si se cumplen dos condiciones: (a)  $\sin^2 \theta \leq 2.5 \times 10^{-3}$  y (b) que la probabilidad de Parke (3.31) y el valor absoluto de dicho término sean menores a  $10^{-2}$  [40]. Con tales condiciones, tomamos la siguiente aproximación

$$(1 - 2a_1^2) \cong (2P_c - 1) \cos 2\tilde{\theta}_0. \quad (4.13)$$

El siguiente paso es encontrar una expresión para los factores que aparecen en (4.13), en función del ángulo de mezcla en vacío  $\theta$  y del parámetro adimensional  $\chi$  (para el manto terrestre). Comenzando con la probabilidad de cruce, la cantidad  $\gamma$ , es dada por

$$\gamma \simeq 3.60 \times 10^2 \chi. \quad (4.14)$$

En la figura 4.2, mostramos  $P_c$  en función de las cantidades de interés. Hacemos notar que para  $\chi \gg 10^{-2}$  la condición de adiabaticidad,  $\gamma \gg 1$ , es completamente satisfecha y, consecuentemente  $P_c \cong 0$ . Tanto  $P_c$  como  $\cos 2\tilde{\theta}$  fueron derivadas para un ángulo de mezcla  $0 < \frac{\pi}{4}$  donde la resonancia es posible, sin embargo, pueden ser continuadas analíticamente para  $0 > \frac{\pi}{4}$ .  $P_c$  es significativa para valores de  $\chi \lesssim 2$ .

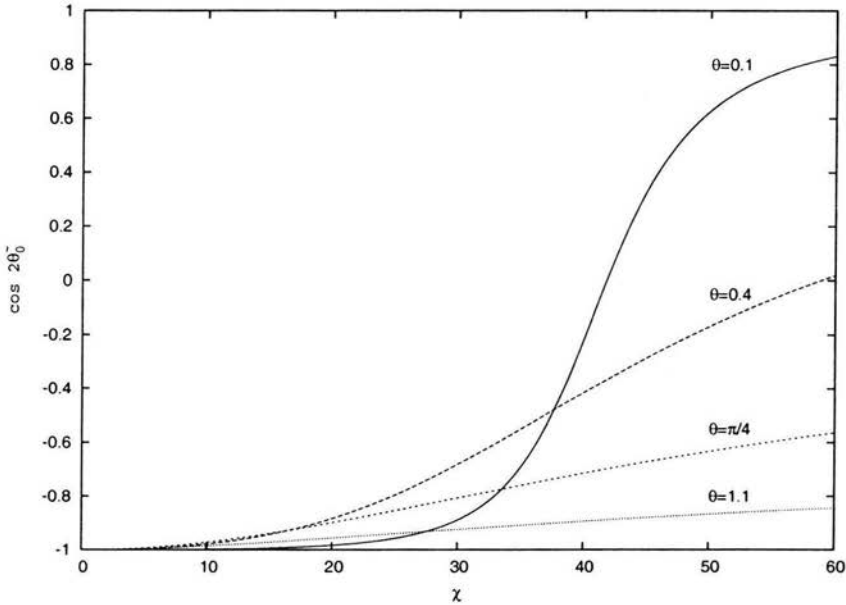


Figura 4.3: Coseno del ángulo doble en el punto de producción en términos del parámetro adimensional terrestre  $\chi$ , para distintos valores del ángulo de mezcla  $\theta$  y  $\mathcal{R} = 41$ .

#### 4.1. CRUCE A TRAVÉS DEL MANTO.

Ahora reescribiremos  $\cos 2\tilde{\theta}_0$  en términos de un “parámetro adimensional solar” en el punto de producción  $\chi_0$ , dado por

$$\chi_0 = \frac{\delta m^2}{A_0}, \quad (4.15)$$

en el que  $A_0 = 2\sqrt{2}G_F N_{e(0)} E$ , donde  $N_{e(0)}$  es la densidad del número de electrones en el punto de producción, de esta manera

$$\cos 2\tilde{\theta}_0 = \frac{\chi_0 \cos 2\theta - 1}{\sqrt{(\chi_0 \cos 2\theta - 1)^2 + (\chi_0 \sen 2\theta)^2}}. \quad (4.16)$$

Cuando los neutrinos son producidos en la resonancia se tiene que  $\cos 2\tilde{\theta}_0 = 0$ , mientras que  $\cos 2\tilde{\theta}_0 < 0$  si la resonancia ocurre en densidades mas bajas que la densidad en el punto de producción. Teniendo en cuenta que  $\chi_0 = \chi N_e / N_{e(0)}$ , la expresión (4.16) toma la forma:

$$\cos 2\tilde{\theta}_0 = \frac{\chi \cos 2\theta - \mathcal{R}}{\sqrt{(\chi \cos 2\theta - \mathcal{R})^2 + (\chi \sen 2\theta)^2}}, \quad (4.17)$$

donde  $\mathcal{R} = N_{e(0)} / N_e$  es la razón entre las densidad del número de electrones en el centro del Sol y en el manto terrestre. En la región de producción

$$20\text{cm}^{-3} N_A \leq N_{e(0)} \leq 100\text{cm}^{-3} N_A, \quad (4.18)$$

donde  $N_A$  es el número de Avogadro, mientras que en el manto terrestre la densidad del número de electrones tiene, aproximadamente, el valor constante  $N_e = 2.2\text{cm}^{-3} N_A$ . En la figura 4.3 se ha graficado  $\cos 2\tilde{\theta}_0$  para  $N_{e(0)} = 90\text{cm}^{-3} N_A$  que corresponde a la densidad del número de electrones en la que, como puede verse en la Fig. 3.3, ocurre el máximo de la producción de neutrinos del  ${}^8\text{B}$ , a una distancia de  $0.05R_\odot$  del centro del Sol. De dicha figura, observamos que  $\cos 2\tilde{\theta}_0$  alcanza el valor de  $-1$  cuando  $\chi \ll \mathcal{R} \cong 41$ , que corresponde a la situación en que la capa de resonancia está lejos de la región de producción (i.e., densidades mucho más bajas que  $N_{e(0)}$ ). Aquí, tomaremos  $\cos 2\tilde{\theta}_0 \cong -1$  como una buena aproximación, válida en nuestra región de interés.

Bajo las consideraciones anteriores tenemos que la probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico es

$$P_{\nu_e}^N = |a_e|^2 + (1 - 2P_c) \sen 2\tilde{\theta} \sen(2\tilde{\theta} - 2\theta) \sen^2 \lambda L, \quad (4.19)$$

donde

$$|a_e|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - 2P_c) \cos 2\theta, \quad (4.20)$$

y, en términos de  $\chi$ ,

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}G_F N_e}{2} \sqrt{(\chi \cos 2\theta - 1)^2 + (\chi \sen 2\theta)^2}. \quad (4.21)$$

Teniendo en cuenta que  $\sqrt{2}G_F N_e \cong 1.70 \times 10^{-13} \text{eV}$  [57] y que el radio de la Tierra es  $R_\oplus = 6371 \text{Km}$ , o bien, en unidades naturales,  $R_\oplus \simeq 3.25 \times 10^{13} \text{eV}^{-1}$ , tenemos

$$\lambda L = 2.76\ell \sqrt{(\chi \cos 2\theta - 1)^2 + (\chi \sen 2\theta)^2}, \quad (4.22)$$

donde  $\ell = L/R_\oplus$  es la distancia recorrida, a través del manto, en radios terrestres. Sí las oscilaciones son promediadas debido a la integración sobre la distancia  $\sen^2 \lambda L \rightarrow 1/2$  y, la probabilidad promedio de supervivencia del neutrino electrónico, es

$$\bar{P}_{\nu_e}^N = |a_e|^2 + \frac{1}{2} (1 - 2P_c) \sen 2\tilde{\theta} \sen(2\tilde{\theta} - 2\theta). \quad (4.23)$$

La asimetría día-noche es definida como

$$\mathcal{A}_{DN} = \frac{N - D}{N + D}, \quad (4.24)$$

donde  $N$  y  $D$  son los flujos de neutrinos electrónicos durante la noche y el día, respectivamente. Supondremos que

$$\mathcal{A}_{DN} \simeq \frac{P_{\nu_e}^N - P_{\nu_e}^D}{P_{\nu_e}^N + P_{\nu_e}^D}, \quad (4.25)$$

donde

$$P_{\nu_e}^N - P_{\nu_e}^D = (1 - 2P_c) \sen 2\tilde{\theta} \sen(2\tilde{\theta} - 2\theta) \sen^2 \lambda L \quad (4.26)$$

$$P_{\nu_e}^N + P_{\nu_e}^D = 1 + (1 - 2P_c) \left[ \sen 2\tilde{\theta} \sen(2\tilde{\theta} - 2\theta) \sen^2 \lambda L - \cos 2\theta \right]. \quad (4.27)$$

La cantidad  $P_{\nu_e}^N - P_{\nu_e}^D$  es llamada *factor de regeneración*  $f_{reg}$  [47]. Para cada valor de  $\ell$ , la asimetría es función del ángulo de mezcla en vacío  $\theta$  y del parámetro adimensional  $\chi$ . A partir de (4.26), vemos que  $f_{reg}$ , y por lo tanto,  $\mathcal{A}_{DN}$  se anulan cuando

$$\chi (1 - 2P_c) \sen^2 2\theta \sen^2 \lambda L = 0. \quad (4.28)$$

En el espacio físico de parámetros considerado  $\delta m^2 > 0$ , con lo cual  $\chi > 0$ . De esta forma, el signo de  $\mathcal{A}_{DN}$  depende exclusivamente de  $P_c$ . Así,  $\mathcal{A}_{DN}$  es positiva para  $P_c \leq 1/2$  y cualquier valor de  $\ell$ , mientras que  $f_{reg} < 0$  ocurre únicamente para  $P_c > 1/2$ . De la figura 4.2, se observa que, de modo general,  $P_c < 1/2$  excepto para valores pequeños del ángulo de mezcla ( $\sen^2 \theta \ll 1$ ), en los cuales

$$P_c \cong e^{-\gamma \sen^2 \theta}. \quad (4.29)$$

#### 4.1. CRUCE A TRAVÉS DEL MANTO.

---

Por lo tanto,  $\mathcal{A}_{DN}$  es positiva a excepción de una región de valores pequeños del ángulo de mezcla alrededor del caso máximo de asimetría,  $\chi = 1$ , como se observa en las Figs. 4.4 y 4.6. Tomando  $P_c = 1/2$  en (4.29), vemos que

$$\sin^2 \theta = \frac{\ln 2}{\gamma}, \quad (4.30)$$

el cual, es independiente de  $\ell$ . Evaluando (4.30) en  $\chi = 1$ , se tiene  $\sin^2 \theta \cong 0.0019$  y como se puede apreciar en la Fig. 4.7,  $\mathcal{A}_{DN}$  es negativa hasta ese valor.

Cuando la condición de adiabaticidad es completamente satisfecha,  $P_c = 0$ , y la resonancia ocurre lejos de la región de producción, la probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico al emerger de la Tierra, tiene la forma:

$$P_{\nu_e}^N = \sin^2 \theta + \sin 2\tilde{\theta} \sin(2\tilde{\theta} - 2\theta) \sin^2 \lambda L, \quad (4.31)$$

que coincide con la probabilidad encontrada en [5]. En este caso, observamos que el factor de regeneración  $f_{reg} \geq 0$  y por lo tanto, la asimetría día-noche  $\mathcal{A}_{DN}$  es siempre positiva, como se muestra en las figuras 4.8 y 4.9, las cuales han sido realizadas para el valor promedio de la probabilidad de supervivencia ( $\sin^2 \lambda L = 1/2$ ).

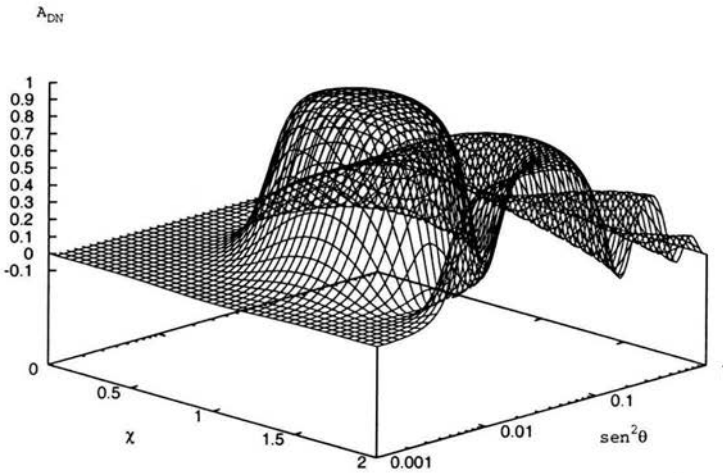


Figura 4.4: Asimetría día-noche para el caso no adiabático,  $\ell=1,5$ .

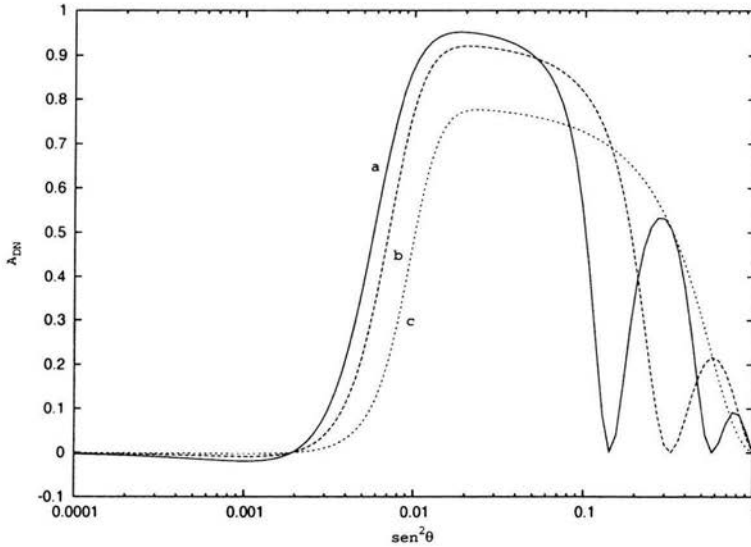


Figura 4.5: Asimetría día-noche para el caso no adiabático, cuando  $\chi=1$  (a)  $\ell=1.5$ , (b)  $\ell=1$ , (c)  $\ell=0.5$ .

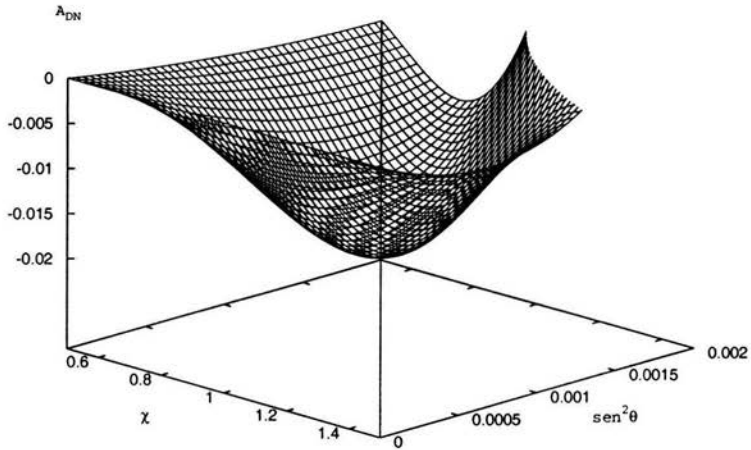


Figura 4.6: Asimetría día-noche para el caso no adiabático, para pequeños ángulos de mezcla y  $\ell=1.5$ .

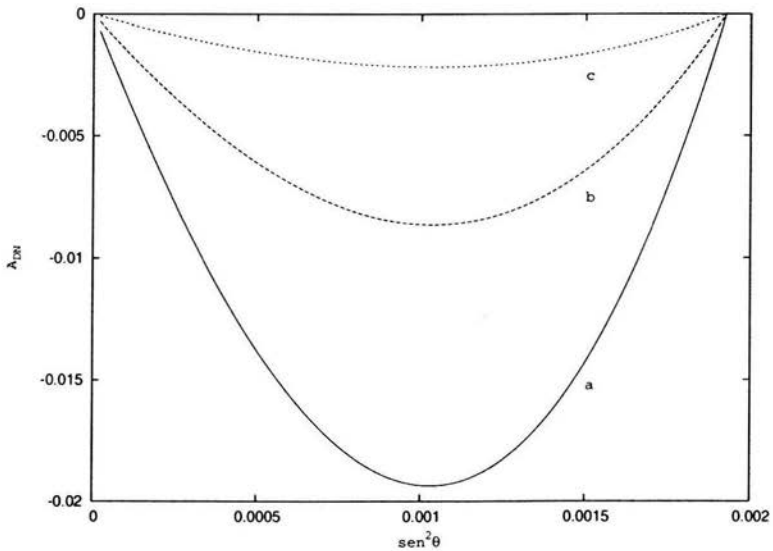


Figura 4.7: Asimetría día-noche para el caso no adiabático para pequeños valores del ángulo de mezcla, cuando  $\chi=1$  (a)  $\ell=0.6$ , (b)  $\ell=1.1$ , (c)  $\ell=1.5$ .



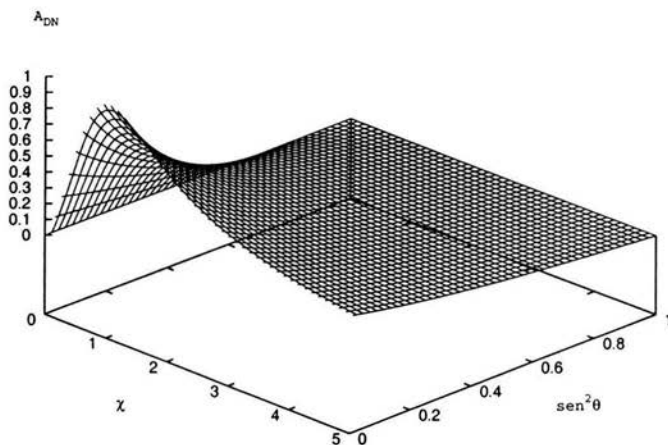


Figura 4.8: Asimetría día-noche para el caso completamente adiabático y  $\text{sen}^2 \lambda L = 1/2$ .

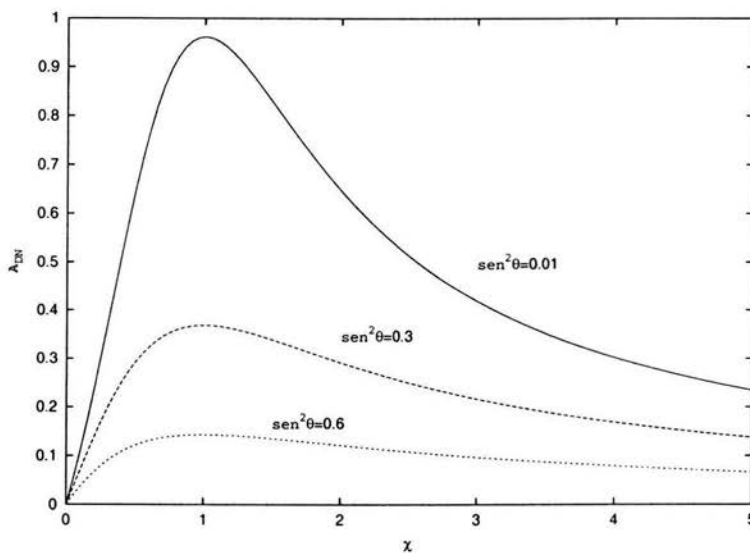


Figura 4.9: Asimetría día-noche, para el caso completamente adiabático, en función de  $\chi$ , para diferentes valores de  $\text{sen}^2 \theta$  y,  $\text{sen}^2 \lambda L = 1/2$ .

## 4.2. Cruce a través del núcleo y manto

Cuando el neutrino cruza a través del núcleo de la Tierra, viaja por tres regiones de densidad (casi) constante hasta llegar al detector, y el operador de evolución en la base de sabor resulta

$$\mathcal{U}(L) = \mathcal{U}(L_3)\mathcal{U}(L_2)\mathcal{U}(L_1), \quad (4.32)$$

siendo  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , la distancia viajada en el medio  $i$ . Para cada factor en (4.32) tenemos

$$\mathcal{U}(L_i) = c_i \mathbb{I} - i s_i \mathbb{U}_i, \quad (4.33)$$

donde hemos introducido las abreviaciones

$$\begin{aligned} s_i &= \text{sen } \lambda_i L_i \\ c_i &= \text{cos } \lambda_i L_i \end{aligned} \quad (4.34)$$

con  $\lambda_i = \delta M_i^2 / 4E$ . En (4.33),  $\mathbb{I}$  es la matriz unidad y

$$\mathbb{U}_i = \begin{pmatrix} -\tilde{s}_i & \tilde{c}_i \\ \tilde{c}_i & \tilde{s}_i \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \tilde{s}_i &= \text{sen } 2\tilde{\theta}_i \\ \tilde{c}_i &= \text{cos } 2\tilde{\theta}_i \end{aligned} \quad (4.35)$$

que satisface  $\mathbb{U}_i^2 = \mathbb{I}$ . En el apéndice (C) mostramos que  $L_1 = L_3$  y, por lo tanto,

$$\lambda_1 = \lambda_3, \quad \mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_3, \quad (4.36)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(L) &= c_2(c_1^2 - s_2^2) \mathbb{I} - i 2s_1 c_1 c_2 \mathbb{U}_1 - i c_1^2 s_2 \mathbb{U}_2 \\ &\quad - s_1 c_1 s_2 (\mathbb{U}_2 \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_1 \mathbb{U}_2) + i s_1^2 s_2 \mathbb{U}_1 \mathbb{U}_2 \mathbb{U}_1, \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde  $L = 2L_1 + L_2$  y

$$\mathbb{U}_2 \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_1 \mathbb{U}_2 = 2\tilde{c} \mathbb{I}, \quad (4.38)$$

con

$$\tilde{c} \equiv \tilde{c}_2 \tilde{c}_1 + \tilde{s}_2 \tilde{s}_1 = \text{cos}(2\tilde{\theta}_2 - 2\tilde{\theta}_1). \quad (4.39)$$

Además, multiplicando (4.38) a la izquierda por  $\mathbb{U}_1$ , se tiene

$$\mathbb{U}_1 \mathbb{U}_2 \mathbb{U}_1 = 2\tilde{c} \mathbb{U}_1 - \mathbb{U}_2, \quad (4.40)$$

de manera tal que el operador de evolución es finalmente escrito como:

$$\mathcal{U}(L) = \left[ c_2(c_1^2 - s_1^2) - 2s_1 c_1 s_2 \tilde{c} \right] \mathbb{I} - i 2 (s_1 c_1 c_2 - s_1^2 s_2 \tilde{c}) \mathbb{U}_1 - i s_2 \mathbb{U}_2. \quad (4.41)$$

Después de atravesar la Tierra el estado del sistema puede expresarse como en la ecuación (4.1), pero con  $\mathcal{U}(L)$  dado ahora por (4.41). La amplitud de probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico resulta

$$a_e(L) = (\gamma + i\alpha)a_e - i\beta a_\mu, \quad (4.42)$$

donde  $a_e, a_\mu$  son dadas en (3.24) y

$$\begin{aligned} \gamma &= c_2 (c_1^2 - s_1^2) - 2s_1 c_1 s_2 \tilde{c}, \\ \alpha &= 2s_1 (c_1 c_2 - s_1 s_2 \tilde{c}) \tilde{c}_1 + s_2 \tilde{c}_2, \\ \beta &= 2s_1 (c_1 c_2 - s_1 s_2 \tilde{c}) \tilde{s}_1 + s_2 \tilde{s}_2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

De la unitariedad del operador de evolución  $\mathcal{U}^\dagger(L)\mathcal{U}(L) = \mathbb{I}$ , se tiene que

$$\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad (4.44)$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} P_{\nu_e}^N &= |a_e(L)|^2 \\ &= |a_e|^2 + 2\gamma\beta\Im(a_e^* a_\mu) - 2\alpha\beta\Re(a_e^* a_\mu) + \beta^2(1 - 2|a_e|^2). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Recordemos que  $|a_e|^2$  es la probabilidad de detectar un  $\nu_e$  durante el día (Ec. (3.25)). Además, usando los resultados dados en (4.9), para  $\chi > 10^{-5}$ , se tiene

$$P_{\nu_e}^N = |a_e|^2 + (1 - 2a_1^2)\beta\zeta \quad (4.46)$$

donde  $(1 - 2a_1^2)$  es dada por (4.13), y

$$\zeta = \beta \cos 2\theta - \alpha \sin 2\theta. \quad (4.47)$$

Lo siguiente es escribir las funciones trigonométricas para el doble de los ángulos de mezcla en materia en términos del parámetro adimensional  $\chi$ , para el caso del manto, estas expresiones son las mismas que aparecen en (4.10), es decir,

$$\tilde{s}_1 = \frac{\chi \sin 2\theta}{\sqrt{(\chi \cos 2\theta - 1)^2 + (\chi \sin 2\theta)^2}}, \quad \tilde{c}_1 = \frac{\chi \cos 2\theta - 1}{\sqrt{(\chi \cos 2\theta - 1)^2 + (\chi \sin 2\theta)^2}}, \quad (4.48)$$

mientras que, para el caso del núcleo, se tienen expresiones de la forma (4.17)

$$\tilde{s}_2 = \frac{\chi \sin 2\theta}{\sqrt{(\chi \cos 2\theta - \mathcal{R}_T)^2 + (\chi \sin 2\theta)^2}}, \quad \tilde{c}_2 = \frac{\chi \cos 2\theta - \mathcal{R}_T}{\sqrt{(\chi \cos 2\theta - \mathcal{R}_T)^2 + (\chi \sin 2\theta)^2}}, \quad (4.49)$$

## 4.2. CRUCE A TRAVÉS DEL NÚCLEO Y MANTO

donde  $\mathcal{R}_T = N_e^N/N_e^M \cong 2.45$  es la razón entre las densidades del número de electrones en el núcleo y el manto [58]. De lo anterior, se tiene que

$$\tilde{c}_1 = \tilde{s}_1 \left( \frac{\chi \cos 2\theta - 1}{\chi \sin 2\theta} \right), \quad \tilde{c}_2 = \tilde{s}_2 \left( \frac{\chi \cos 2\theta - \mathcal{R}_T}{\chi \sin 2\theta} \right), \quad (4.50)$$

y

$$\sin(2\tilde{\theta}_1 - 2\theta) = \frac{1}{\chi} \tilde{s}_1, \quad \sin(2\tilde{\theta}_2 - 2\theta) = \frac{\mathcal{R}_T}{\chi} \tilde{s}_2, \quad (4.51)$$

con  $\chi \neq 0$ ,  $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ , con lo cual

$$\zeta = 2s_1 (c_1 c_2 - s_1 s_2 \tilde{c}) \sin(2\tilde{\theta}_1 - 2\theta) + s_2 \sin(2\tilde{\theta}_2 - 2\theta). \quad (4.52)$$

Al igual que en la sección (4.1), asumiremos: (a) el estado del neutrino que arriva en la superficie de la Tierra es una mezcla incoherente de los eigenestados de masa en vacío; (b) la relación (4.13); (c) en el Sol, la resonancia ocurre lejos de la región de producción. Entonces, la probabilidad de supervivencia del neutrino del neutrino electrónico, es finalmente escrita como:

$$P_{\nu_e}^N = |a_e|^2 + (1 - 2P_c)\beta\zeta \quad (4.53)$$

donde  $|a_e|^2$  es dada en la ecuación (4.20).

En el caso  $L_2 = 0$  ( $s_2 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ), la distancia recorrida en la Tierra es  $L = 2L_1$ , con lo cual,

$$\beta = \sin \lambda L \sin 2\tilde{\theta}, \quad \zeta = \sin \lambda L \sin(2\tilde{\theta} - 2\theta), \quad (4.54)$$

donde hemos hecho  $\lambda_1 = \lambda$  y  $\tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}$ . Por lo tanto, (4.53) se reduce a

$$P_{\nu_e}^N = |a_e|^2 + (1 - 2P_c) \sin 2\tilde{\theta} \sin(2\tilde{\theta} - 2\theta) \sin^2 \lambda L, \quad (4.55)$$

que coincide con la Ec. (4.19) correspondiente a la probabilidad de supervivencia para el caso en que los neutrinos sólo cruzan por el manto.

Asimismo, si la densidad de ambos medios fuese la misma, entonces  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , con lo cual  $\tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}$ ,  $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = \cos 2\theta$  y  $\tilde{c} = 1$ . Teniendo en cuenta que

$$2s_1 (c_1 c_2 - s_1 s_2) + s_2 = \sin [\lambda(2L_1 + L_2)], \quad (4.56)$$

vemos que  $\beta$  y  $\zeta$  toman las formas simples dadas en la Ec. (4.54) (pero con  $L = 2L_1 + L_2$ ) y, otra vez  $P_{\nu_e}^N$  se reduce a la expresión (4.19).

## 4.2.1. Análisis de la asimetría

La asimetría día-noche  $\mathcal{A}_{DN}$  definida en (4.24), para el caso manto-núcleo, está determinada por

$$\begin{aligned} P_{\nu_e}^N - P_{\nu_e}^N &= (1 - 2P_c) \beta \zeta, \\ P_{\nu_e}^N + P_{\nu_e}^N &= 1 + (1 - 2P_c) (\beta \zeta - \cos 2\theta), \end{aligned} \quad (4.57)$$

con  $\beta$  y  $\zeta$  dados en (4.43) y (4.52), respectivamente. La asimetría es una función del ángulo de mezcla  $\theta$  y del parámetro adimensional  $\chi$ , para cada valor del ángulo nadir  $\eta$ , definido en el apéndice C, y el cual determina las distancias recorridas por el neutrino en el manto y en el núcleo terrestres. El análisis de dicha función en forma completa no se vé como una tarea sencilla, sin embargo, empezaremos por examinar a  $\tilde{c}$  (el cual, denominaremos como *factor de localización de las resonancias terrestres*) como función de  $\chi$ , para cada valor de  $\theta$ . En la Fig. 4.10 mostramos el comportamiento de  $\tilde{c}$  como función de  $\chi$ , para distintos valores del ángulo de mezcla, y en ella observamos lo siguiente: (a) para valores pequeños del ángulo de mezcla,  $\tilde{c} \simeq -1$  en la región  $1 < \chi < \mathcal{R}_T$  y  $\tilde{c} \simeq 1$  en cualquier otro caso; (b) para valores de  $\theta$  cercanos a  $\pi/4$  y toda la región  $\pi/4 < \theta \leq \pi/2$ , llamada *dark side* [59],  $\tilde{c} \simeq 1$ .

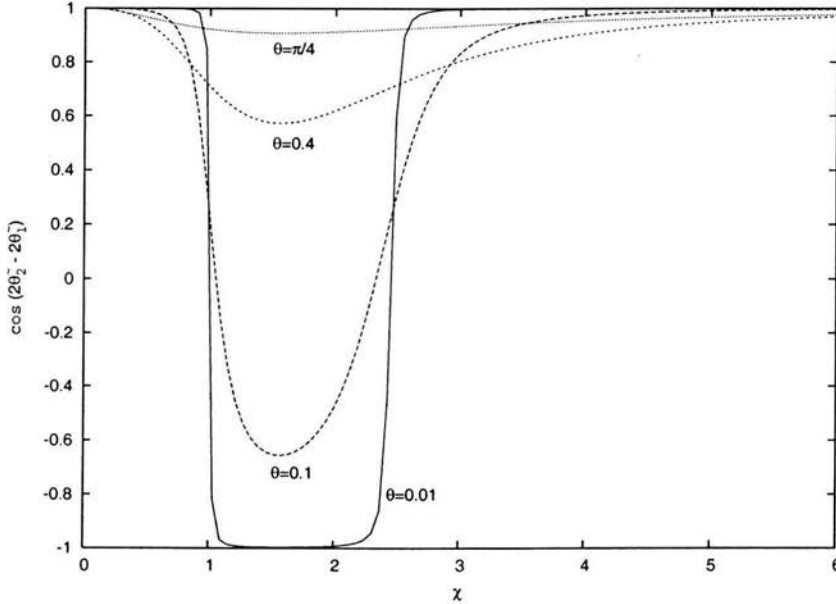


Figura 4.10: Factor de localización de las resonancias para distintos valores del ángulo de mezcla.

## 4.2. CRUCE A TRAVÉS DEL NÚCLEO Y MANTO

Aún cuando el comportamiento de  $\tilde{c}$  no permite hacer una aproximación para todo el espacio de parámetros, sí nos permite hacer el estudio de la asimetría por intervalos en  $\chi$  delimitados por  $\chi=1$  y  $\chi=\mathcal{R}_T$ . En lo que resta de esta sección, haremos este análisis, para cada una de las soluciones MSW que estuvieron en boga en años recientes: LOW, SMA y LMA.

La solución llamada LOW corresponde a un valor central de  $\delta m^2 = 7.8 \times 10^{-7} \text{eV}^2$  ( $\chi \approx 2.1 \times 10^{-2}$ , para una energía de 10 MeV) [60], que cae en la “frontera” de la aproximación de mezcla incoherente, y un rango

$$0.27 \lesssim \text{sen}^2 \theta \lesssim 0.5, \quad (4.58)$$

para el ángulo de mezcla. Para esta solución  $\tilde{c} \cong 1$  y la asimetría día-noche, resulta pequeña y positiva, para cualquier valor del ángulo nadir. En la Fig. 4.11, se grafica  $\mathcal{A}_{DN}$  para algunos valores de  $\eta$ , como  $\eta = 0$  correspondiente al caso en que los neutrinos recorren el diámetro de la Tierra,  $\eta = 0.4014$  el valor mínimo que alcanza el detector SNO, y  $\eta_0 = 0.5789$  el ángulo máximo por el cual los neutrinos cruzan a través del núcleo (apéndice C). De tal manera que, la asimetría se mantiene positiva para cualquier distancia recorrida, ya sea únicamente en el manto, o en ambas regiones del perfil terrestre (manto y núcleo).

La solución SMA de pequeños ángulos de mezcla,

$$0.0003 \lesssim \text{sen}^2 \theta \lesssim 0.002, \quad (4.59)$$

corresponde a  $\delta m^2 = 4.6 \times 10^{-6} \text{eV}^2$  como valor central ( $\chi \approx 1.4$ ). En este caso,  $\tilde{c} \cong -1$  y, a partir de (4.30), resulta que  $\mathcal{A}_{DN}$  es negativa y de magnitud extremadamente pequeña hasta  $\text{sen}^2 \theta \cong 0.00137$ , independientemente del ángulo nadir, como puede apreciarse en la figuras 4.13. De tal forma, una asimetría que se mantuviera negativa al variar  $\eta$  de cero a  $\pi/2$  sería evidencia de la solución SMA.

Los datos de los neutrinos solares, incluyendo la fase de sal de SNO, así como el análisis combinado de los resultados solares y de los datos espectrales de KamLAND [56], favorecen la solución LMA de grandes ángulos de mezcla. Los valores favorecidos de los parámetros de las oscilaciones son

$$\delta m^2 = 7.1 \times 10^{-5} \text{eV}^2, \quad \text{sen}^2 \theta = 0.2857. \quad (4.60)$$

Los nuevos resultados de SNO [61] excluyen la mezcla máxima a un nivel de  $5.2\sigma$ , y desfavorece también, a un nivel de  $3\sigma$ , la región alta de la solución LMA (h-LMA):  $\delta m^2 > 10^{-4} \text{eV}^2$ . A este nivel de confianza los límites son

$$4.8 \times 10^{-5} \text{eV}^2 < \delta m^2 < 1.7 \times 10^{-4} \text{eV}^2. \quad (4.61)$$

Nosotros tomaremos como valor central de los parámetros de oscilación del neutrino aquellos dados en (4.60) y un rango al cual convergen diferentes análisis

$$\delta m^2 = (6-8) \times 10^{-5} \text{eV}^2, \quad \text{sen}^2 \theta = 0.28-0.30. \quad (4.62)$$

Para el rango de parametros (4.62), la evolución del neutrino dentro del Sol ocurre en el regimen altamente adiabático ( $P_c=0$ ). Para el máximo de emisión de neutrinos del Boro y energías relevantes para la señal de SNO ( $E \cong 10\text{MeV}$ ), obtenemos un valor de  $\chi=20.5$ , para el cual, sigue siendo valida la aproximación  $\cos 2\tilde{\theta}_0 \simeq -1$ . En la Fig. 4.14 graficamos para dicho valor la asimetría día-noche en función de  $\sin^2 \theta$ , y de la misma, observamos un claro efecto del núcleo sobre el signo de  $\mathcal{A}_{DN}$ , en contraste a su valor siempre positivo cuando el neutrino sólo cruza el manto. A continuación, explicaremos con mayor detalle este hecho.

Cuando  $\chi \gg \mathcal{R}_T$  (i.e.,  $\chi \gg 1$ ), como en el caso considerado, entonces  $\tilde{c} \cong 1$ , con lo cual

$$\beta = s_\lambda \tilde{s}_1 + s_2 (\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1) , \quad \zeta = \frac{1}{\chi} \left[ s_\lambda \tilde{s}_1 + s_2 (\mathcal{R}_T \tilde{s}_2 - \tilde{s}_1) \right] , \quad (4.63)$$

donde

$$s_\lambda \equiv \sin (2L_1 \lambda_1 + L_2 \lambda_2) , \quad (4.64)$$

y, por lo tanto el factor de regeneración  $f_{reg} = \beta \zeta$  es dado por

$$\begin{aligned} f_{reg} &= \frac{\tilde{s}_1^2}{\chi} \left\{ s_\lambda^2 + s_\lambda s_2 \left[ \left( \frac{\mathcal{R}_T \tilde{s}_2}{\tilde{s}_1} - 1 \right) + \left( \frac{\tilde{s}_2}{\tilde{s}_1} - 1 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + s_2^2 \left( \frac{\mathcal{R}_T \tilde{s}_2}{\tilde{s}_1} - 1 \right) \left( \frac{\tilde{s}_2}{\tilde{s}_1} - 1 \right) \right\} . \end{aligned} \quad (4.65)$$

con

$$\frac{\tilde{s}_2}{\tilde{s}_1} - 1 \cong \frac{(\mathcal{R}_T - 1)}{\chi} \cos 2\theta , \quad (4.66)$$

$$\frac{\mathcal{R}_T \tilde{s}_2}{\tilde{s}_1} - 1 \cong (\mathcal{R}_T - 1) \left( 1 + \frac{\mathcal{R}_T}{\chi} \cos 2\theta \right) . \quad (4.67)$$

De esta forma, a primer orden en  $1/\chi$ , el factor de regeneración toma la forma

$$f_{reg} = \frac{\tilde{s}_1^2}{\chi} \left[ s_\lambda^2 + (\mathcal{R}_T - 1) s_\lambda s_2 \right] , \quad (4.68)$$

con

$$\tilde{s}_1 \cong \sin 2\theta . \quad (4.69)$$

Por lo tanto, la asimetría día noche  $\mathcal{A}_{DN}$  puede tomar valores negativos debido al segundo término que aparece en (4.68). La aproximación anterior resulta muy buena y proporciona una expresión sencilla para determinar el efecto del núcleo sobre la asimetría día-noche.

Por último, la Fig. 4.15 muestra  $\mathcal{A}_{DN}$  como función del ángulo nadir  $\eta$ , para el valor central y los valores límite de  $\text{sen}^2 \theta$  para la solución LMA. En esta figura observamos que, para valores de  $\eta \leq 0.1696$  (correspondiente al valor de la latitud más alta, para la cual, los neutrinos solares siempre pasan por el núcleo cada día del año  $\lambda_s$ , ver apéndice C), se asegura que la asimetría es positiva para los parámetros considerados. El detector SNO se localiza en la latitud  $\lambda_{\text{SNO}} = 46.3^\circ$  norte y la razón del tiempo total, en un año, durante el cual los neutrinos solares cruzan el núcleo en el camino al detector SNO es de 0.0396 [62]. Esto implica que en la localización del experimento SNO, en promedio, el 7.9% de una noche el Sol está detrás del núcleo de la Tierra. Además, el experimento alcanza un mínimo del ángulo nadir  $\eta_{m,\text{min}}$  de 0.4014, y el *tiempo de cobertura* del año, en que los neutrinos cruzan el núcleo (apéndice C), se restringe a los meses de otoño e invierno. Por lo tanto, al experimento SNO no le es posible caracterizar en forma completa la influencia del núcleo sobre la asimetría día-noche.

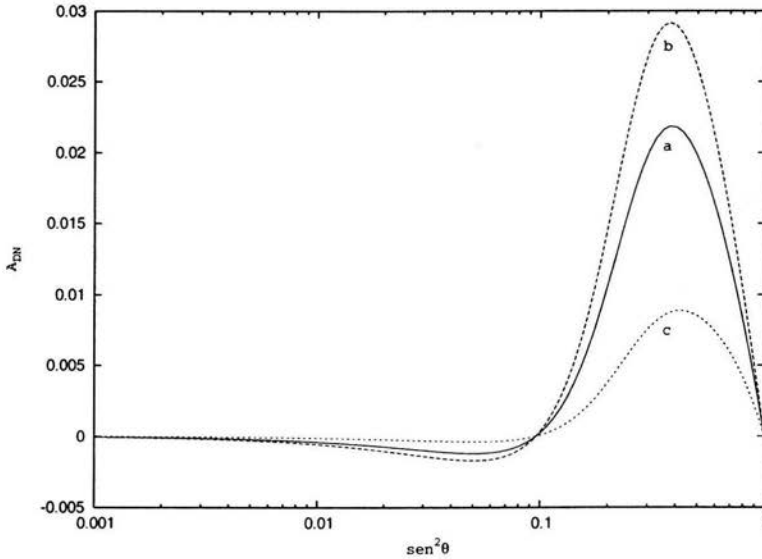


Figura 4.11: Asimetría día-noche para la solución no adiabática, con  $\chi = 0.02$  (a)  $\eta = 0.5789$ , (b)  $\eta = 0.4014$ , (c)  $\eta = 0$ .



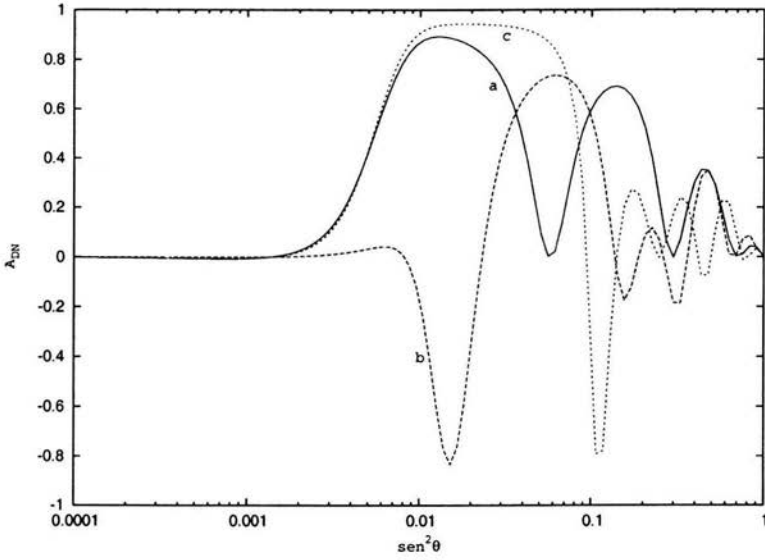


Figura 4.12: Asimetría día-noche para la solución no adiabática, con  $\chi=1.4$  (a)  $\eta=0.5789$ , (b)  $\eta=0.4014$ , (c)  $\eta=0$ .

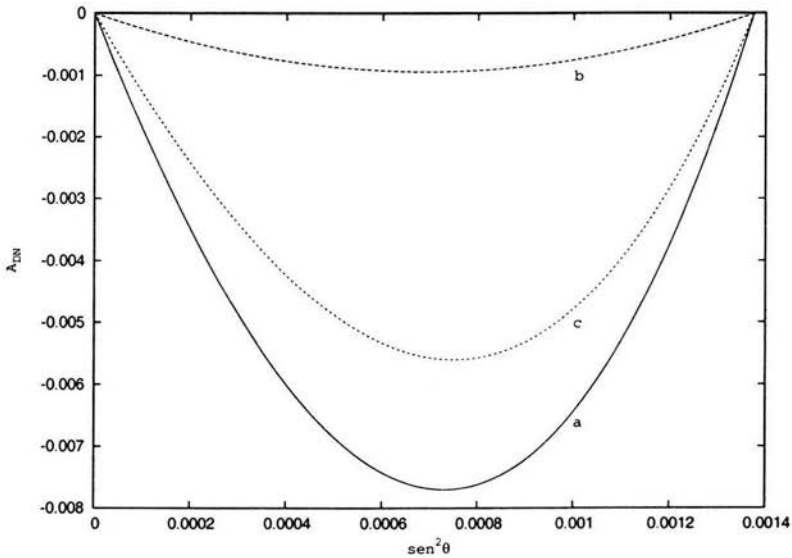


Figura 4.13: Asimetría día-noche para la solución no adiabática, con  $\chi=1.4$  (a)  $\eta=0.5789$ , (b)  $\eta=0.4014$ , (c)  $\eta=0$ .

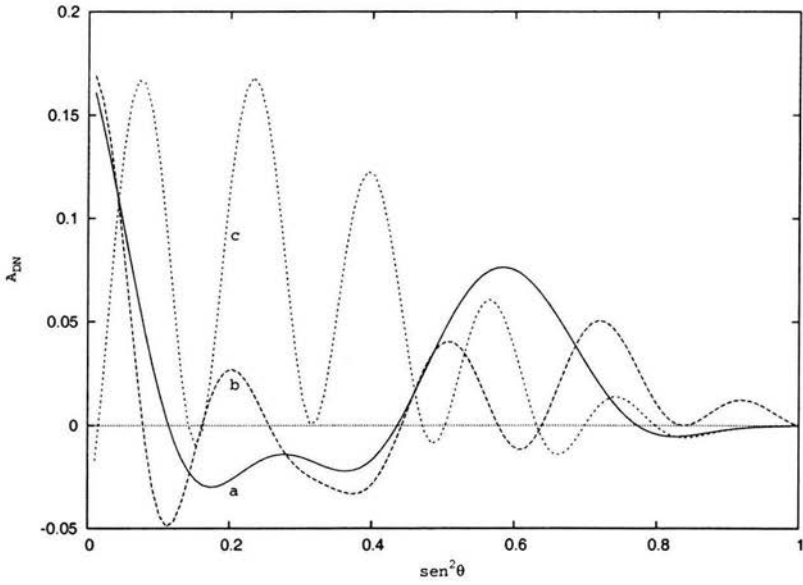


Figura 4.14: Asimetría día-noche para la solución adiabática, con  $\chi = 20.5$  (a)  $\eta = 0.5789$ , (b)  $\eta = 0.4014$ , (c)  $\eta = 0$ .

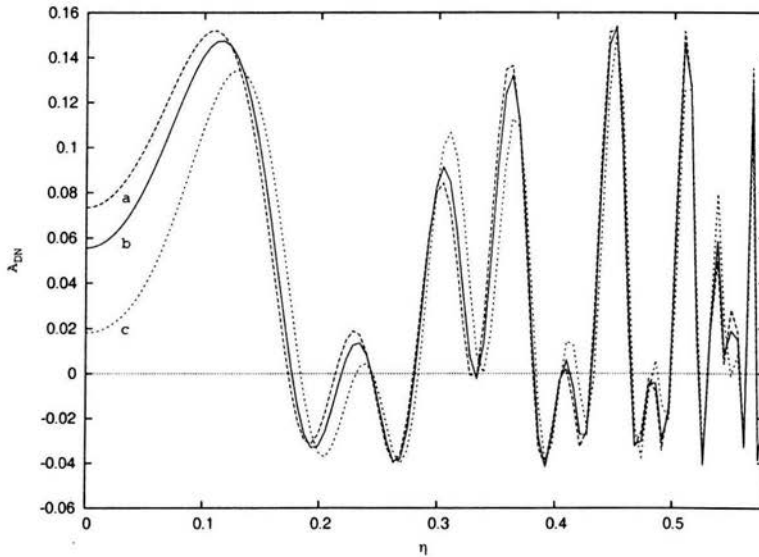


Figura 4.15: Asimetría día-noche, en función del ángulo nadir  $\eta$ , para la solución adiabática, con  $\chi = 20.5$  (a)  $\text{sen}^2 \theta = 0.28$ , (b)  $\text{sen}^2 \theta = 0.2857$ , (c)  $\text{sen}^2 \theta = 0.30$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una forma analítica, lo bastante completa, para describir la evolución de los neutrinos que son producidos en el interior del Sol. Se asume un perfil exponencial para la densidad de materia solar y, en el trayecto de los neutrinos en el interior del Sol, se emplea la aproximación adiabática, excepto en la región de resonancia, donde existe una probabilidad de cruce de los eigenestados instantáneos. Se demostró que los eigenestados de masa sólo adquieren una fase relativa, debido a la distancia entre el Sol y la Tierra que recorren los neutrinos en vacío.

El estudio de la evolución de los neutrinos solares en la Tierra fue realizado en la base de sabor, para un perfil de la densidad terrestre compuesto de dos regiones (manto y núcleo), cada una caracterizada por una densidad constante, para las cuales el operador de evolución toma una forma sencilla. En dicho estudio se hizo uso de las siguientes aproximaciones: (a) el estado del neutrino que arriva en la superficie de la Tierra es una mezcla incoherente de los eigenestados de masa; (b) la relación (4.13); y (c) en el Sol, la resonancia ocurre lejos de la región de producción.

Bajo las consideraciones anteriores, para el caso en que los neutrinos sólo cruzan a través del manto, para cada valor de la distancia recorrida, obtuvimos una expresión sencilla de la probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico en términos de los parámetros de interés: el denominado parámetro adimensional  $\chi = \delta m^2 / A$  y  $\sin^2 \theta$ . La asimetría día-noche, en este caso, es siempre positiva a excepción de una región de valores pequeños del ángulo de mezcla, alrededor del caso máximo de asimetría,  $\chi = 1$ , donde la amplitud de la asimetría toma valores menores que cero, extremadamente pequeños.

Cuando el neutrino cruza a través del núcleo, encontramos también una expresión analítica sencilla para la probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico en términos de  $\chi$  y del ángulo de mezcla, para cada valor del ángulo nadir  $\eta$ . El análisis de la asimetría se realizó tomando en cuenta el denominado

---

factor de localización de las resonancias terrestres, que aparece en dicha probabilidad, así como las diferentes soluciones MSW. Dicho análisis nos permite concluir que, para la solución LOW se mantiene una asimetría positiva para cualquier distancia recorrida por el neutrino, ya sea en una o ambas regiones del perfil terrestre. Análogamente para la solución SMA el signo de la asimetría es negativo para cualquier valor de la distancia recorrida en la Tierra, de tal forma que si una asimetría se mantuviera negativa al variar el rango completo del ángulo nadir, se tendría una evidencia clara de la solución SMA. En tanto que para la solución LMA, que es la más favorecida por los datos experimentales, existe un claro efecto del núcleo sobre el signo de la asimetría día-noche, en contraste a su valor siempre positivo cuando el neutrino cruza sólo el manto.

Por último, también analizamos la cobertura del ángulo nadir de SNO, uno de los detectores más importantes hoy en día, que se encuentra en una latitud de  $46.3^\circ$  norte. Llegamos a la conclusión de que a dicho detector no le es posible caracterizar en forma concluyente la influencia del núcleo sobre la asimetría día-noche debido a que el ángulo nadir mínimo que alcanza en el año es apenas de  $0.4\text{rad}$ , aproximadamente, y el tiempo en que el neutrino cruza por el núcleo, se restringe a los meses de otoño e invierno. La localización del detector es una consideración muy importante si se desea observar, de mejor manera, el efecto del núcleo sobre la asimetría en los neutrinos solares. Las latitudes cercanas al ecuador (menores a  $9.72^\circ$ ) son las más favorables para tal propósito.

De esta forma, hemos mejorado y profundizado el análisis de Chiang y Wolfenstein [5], para la asimetría día-noche. Así, nuestro trabajo, no se ha limitado a la solución adiabática para los neutrinos solares y tampoco a una densidad constante para la Tierra. Al incorporar los efectos no adiabáticos en la evolución de los neutrinos dentro del Sol, así como el empleo del operador de evolución en la base de sabor, para la propagación de los neutrinos en la Tierra, se ha conseguido una descripción más completa y útil de la asimetría. La densidad de la Tierra fue aproximada por un perfil tipo escalón, lo cual nos permitió tomar en cuenta las modificaciones a la asimetría introducidas por la diferencia de densidad entre el núcleo y el manto. Si la probabilidad de cruce en el Sol es despreciable y la trayectoria de los neutrinos es tal que sólo pasan por el manto terrestre, nuestros resultados coinciden con las afirmaciones hechas en [5]. A diferencia de su análisis, hemos explorado el comportamiento general de la asimetría como función de  $\theta$  y  $\chi$  considerando el status actual de los neutrinos solares.

# Apéndice A

## Sistema de dos niveles

El problema de dos niveles, de un sistema cuántico, es de considerable importancia en varios campos de la Física, tanto teórica como experimentalmente [14, 63, 64, 65]. En sus *Lectures on Physics* [66] Feynman describe ejemplos en los cuales la aproximación de un sistema de dos niveles puede ser empleada. Algunos de estos ejemplos incluyen la molécula de amoníaco, la molécula de hidrógeno y oscilaciones de estrañeza en el sistema del meson  $K^0$ .

Consideremos un sistema físico, cuyo espacio de estados sea bidimensional. En una base ortonormal<sup>1</sup>  $\{|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle\}$  el Hamiltoniano  $H(t)$ , que describe la evolución del sistema de dos niveles, es representado por una matrix hermítica:

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_{aa}(t) & h_{ab}(t) \\ h_{ba}(t) & h_{bb}(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

donde los elementos  $h_{aa}(t)$  y  $h_{bb}(t)$  son funciones reales de  $t$ , mientras que  $h_{ba}(t) = h_{ab}^*(t)$ . A cada tiempo  $t$ ,  $H(t)$  puede ser diagonalizado por medio de una transformación unitaria:

$$U^\dagger(t)H(t)U(t) = H_D(t), \quad (\text{A.2})$$

donde  $H_D(t) = \text{diag}\{E_+(t), E_-(t)\}$  es una matrix diagonal cuyos elementos son los eigenvalores instantáneos

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}(h_{aa} + h_{bb}) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(h_{bb} - h_{aa})^2 + 4|h_{ab}|^2}. \quad (\text{A.3})$$

En la sección A.1 presentamos la manera en que se lleva a cabo la diagonalización de (A.1). Tal y como allí se demuestra la matrix unitaria  $U(t)$  es dada por

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta e^{i\eta/2} & \text{sen } \vartheta e^{i\eta/2} \\ -\text{sen } \vartheta e^{-i\eta/2} & \cos \vartheta e^{-i\eta/2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

---

<sup>1</sup> $\langle \varphi_a | \varphi_a \rangle = \langle \varphi_b | \varphi_b \rangle = 1$ ,  $\langle \varphi_a | \varphi_b \rangle = \langle \varphi_b | \varphi_a \rangle = 0$

En general, los ángulos  $\vartheta$  y  $\eta$  dependen del tiempo y son definidos por

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\vartheta &= \frac{2|h_{ab}|}{h_{bb} - h_{aa}}, & 0 \leq \vartheta < 2\pi, \\ h_{ab} &= |h_{ab}|e^{i\eta}, & 0 \leq \eta < 2\pi. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

El estado del sistema al tiempo  $t$ , es

$$\begin{aligned} |t\rangle &= \psi_a(t)|\varphi_a\rangle + \psi_b(t)|\varphi_b\rangle \\ &= \psi_+(t)|\varphi_+(t)\rangle + \psi_-(t)|\varphi_-(t)\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde  $|\varphi_{\pm}(t)\rangle$  son los eigenestados instantáneos, asociados con  $E_{\pm}(t)$ , los cuales estan dados por los vectores columna de la matriz unitaria (A.4). Las amplitudes en ambas bases son relacionadas a través de  $U$ :

$$\begin{pmatrix} \psi_a(t) \\ \psi_b(t) \end{pmatrix} = U(t) \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Consideremos la ecuación de evolución de las amplitudes en la base ortonormal  $\{|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle\}$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_a(t) \\ \psi_b(t) \end{pmatrix} = H(t) \begin{pmatrix} \psi_a(t) \\ \psi_b(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

utilizando la relación de las amplitudes entre ambas bases, dada en (A.7), y multiplicando por  $U^\dagger(t)$ , por la izquierda, ambos miembros de (A.8) se tiene que:

$$i\hbar U^\dagger(t) \frac{dU(t)}{dt} \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix} + i\hbar U^\dagger(t) U(t) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix} = H_D \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Usando la unitariedad de la matriz  $U(t)$  y reorganizando los términos obtenemos

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix} = \left\{ H_D - i\hbar U^\dagger(t) \frac{dU(t)}{dt} \right\} \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

que es la ecuación que satisfacen las amplitudes en las base de los eigenestados instantáneos del Hamiltoniano.

De esta forma la función de onda que describe la evolución temporal del sistema en la base de los eigenestados instantáneos es

$$\begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix} = \mathcal{U}(t, t_0) \begin{pmatrix} \psi_+(t_0) \\ \psi_-(t_0) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

donde el operador de evolución  $\mathcal{U}(t, t_0)$  es una matriz unitaria de  $2 \times 2$ , la cual obedece la ecuación (1.12), con el Hamiltoniano que aparece en (A.10)

$$H_D(t) - i\hbar U^\dagger(t) \frac{dU(t)}{dt} = \begin{pmatrix} a_+(t) & b(t) \\ b^*(t) & a_-(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

donde

$$\begin{aligned} a_\pm(t) &= E_\pm(t) \pm \hbar \frac{\dot{\eta}}{2} \cos 2\vartheta, \\ b(t) &= \hbar \left( \frac{\dot{\eta}}{2} \sin 2\vartheta - i\dot{\vartheta} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

La dependencia temporal asociada con la parte diagonal de (A.12) puede ser integrada exactamente por un cambio en la representación. Para tales propósitos, realizamos otra transformación unitaria y escribimos

$$\mathcal{U}(t, t_0) = P(t, t_0) \mathcal{U}_p(t, t_0), \quad (\text{A.14})$$

donde

$$P(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_+(t)} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_-(t)} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

con

$$\alpha_\pm = \frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t a_\pm(t') dt'. \quad (\text{A.16})$$

En la nueva representación, el operador de evolución satisface

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{U}_p}{\partial t} = H_p \mathcal{U}_p, \quad (\text{A.17})$$

con

$$\begin{aligned} H_p(t) &= \begin{pmatrix} 0 & h(t) \\ h^*(t) & 0 \end{pmatrix}, \\ h(t) &= b(t) e^{-i[\alpha_+(t) - \alpha_-(t)]}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

## A.1. Diagonalización de la matriz hermítica.

Cuando necesitamos únicamente los eigenvalores de (A.1), es muy fácil resolver la ecuación característica, debido a que es un polinomio de segundo grado.

## A.1. DIAGONALIZACIÓN DE LA MATRIZ HERMÍTICA.

---

En principio, el cálculo de los eigenvectores normalizados es también extremadamente simple; sin embargo, es incomodo llevarlo a cabo y puede conducirnos a expresiones innecesariamente complicadas y difíciles de manejar. Aquí presentamos un método simple para calcular los eigenvalores, el cual, es aplicable en todos los casos [67]. Para ello reescribimos la matriz (A.1) de la siguiente forma:

$$H = \frac{1}{2}(h_{aa} + h_{bb})\mathbb{I} + \frac{1}{2}(h_{bb} - h_{aa})K, \quad (\text{A.19})$$

donde  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$  y  $K$  es el operador hermitiano representado en la base  $\{|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle\}$  por la matriz:

$$K = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2h_{ab}}{h_{bb}-h_{aa}} \\ \frac{2h_{ba}}{h_{bb}-h_{aa}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

A partir de (A.19) notamos que  $H$  y  $K$  tienen los mismos eigenvectores  $|\psi_{\pm}\rangle$

$$\begin{aligned} H|\psi_{\pm}\rangle &= E_{\pm}|\psi_{\pm}\rangle, \\ K|\psi_{\pm}\rangle &= k_{\pm}|\psi_{\pm}\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

donde  $E_{\pm}$  y  $k_{\pm}$  son los eigenvalores de  $H$  y  $K$  respectivamente. Con esto concluimos que

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}(h_{aa} + h_{bb}) + \frac{1}{2}(h_{bb} - h_{aa})k_{\pm}, \quad (\text{A.22})$$

son los eigenvalores de  $H$ . Ahora resta encontrar  $k_{\pm}$  mediante la diagonalización de la matriz  $K$ . Reexpresemos a (A.20) como:

$$K = \begin{pmatrix} -1 & |z|e^{i\eta} \\ |z|e^{-i\eta} & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

donde  $|z|$  y  $\eta$  ( $0 \leq \eta < 2\pi$ ) son el argumento y la fase del número complejo

$$z = \frac{2h_{ab}}{h_{bb} - h_{aa}}. \quad (\text{A.24})$$

Construimos la matriz diagonal

$$\Gamma \equiv \begin{pmatrix} e^{i\eta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta/2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

con lo cual  $K = \Gamma L \Gamma^*$ , en donde

$$L = \begin{pmatrix} -1 & |z| \\ |z| & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.26})$$



ahora considerando (A.26) y la matriz ortogonal<sup>2</sup>

$$O = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sen \vartheta \\ -\sen \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

con  $0 \leq \vartheta < 2\pi$ , deseamos construir una matriz diagonal  $K_D = O^* L O$

$$K_D = \begin{pmatrix} -\cos 2\vartheta - |z| \sen 2\vartheta & -\sen 2\vartheta + |z| \cos 2\vartheta \\ \sen 2\vartheta + |z| \cos 2\vartheta & \cos 2\vartheta + |z| \sen 2\vartheta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

matriz que para ser diagonal es necesario que

$$|z| = \text{tg } 2\vartheta, \quad (\text{A.29})$$

y de esta forma

$$K_D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\cos 2\vartheta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos 2\vartheta} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

Ya que la matriz diagonal (A.30) es dada por  $K_D = U^\dagger K U$ , donde  $U = \Gamma O$  es la matriz unitaria<sup>3</sup>

$$U = \begin{pmatrix} \cos \vartheta e^{i\eta/2} & \sen \vartheta e^{i\eta/2} \\ -\sen \vartheta e^{-i\eta/2} & \cos \vartheta e^{-i\eta/2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.31})$$

los eigenvalores de  $K$  estan dados por

$$k_{\pm} = \mp \frac{1}{\cos 2\vartheta}, \quad (\text{A.32})$$

A partir de (A.29),

$$\text{tg } 2\vartheta = \frac{2|h_{ab}|}{h_{bb} - h_{aa}}, \quad (\text{A.33})$$

y por lo tanto los valores propios de  $K$  en términos de los elementos de matriz  $h_{ij}$ , son

$$k_{\pm} = \mp \frac{\sqrt{(h_{bb} - h_{aa})^2 + 4|h_{ab}|^2}}{h_{bb} - h_{aa}}. \quad (\text{A.34})$$

---

<sup>2</sup>Una matriz  $O$  es ortogonal, si su transpuesta  $O^T$  es igual a su inversa

$$O O^T = O^T O = \mathbb{I}.$$

<sup>3</sup>Una matriz  $U$  es unitaria, si su hermítica conjugada es igual a su inversa

$$U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{I}.$$

Ahora procedemos a calcular los autoestados, recordando que  $H$  y  $K$  tienen los mismos eigenvectores. Denotando por  $\psi_a, \psi_b$  las componentes de  $|\varphi_+\rangle$  sobre la base  $\{|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle\}$  y tomando  $k_+$  en (A.21) se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tg} 2\vartheta e^{-i\eta} \\ \operatorname{tg} 2\vartheta e^{i\eta} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos 2\vartheta} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}, \quad (\text{A.35})$$

en donde tenemos un sistema linealmente dependiente de 2 ecuaciones, por lo cual, basta tomar una de ellas

$$\left(1 - \frac{1}{\cos 2\vartheta}\right) \psi_a + \operatorname{tg} 2\vartheta e^{-i\eta} \psi_b = 0, \quad (\text{A.36})$$

la cual simplificando

$$(\cos 2\vartheta - 1) e^{i\eta/2} \psi_a + \operatorname{sen} 2\vartheta e^{-i\eta/2} \psi_b = 0,$$

aplicando las funciones trigonométricas de los ángulos dobles, se obtiene:

$$-\operatorname{sen} \vartheta e^{i\eta/2} \psi_a + \cos \vartheta e^{-i\eta/2} \psi_b = 0, \quad (\text{A.37})$$

si elegimos  $\psi_b = \operatorname{sen} \vartheta e^{i\eta/2}$ , tenemos que  $\psi_a = \cos \vartheta e^{-i\eta/2}$  por lo cual, el eigenvector normalizado  $|\psi_+\rangle$  es

$$|\varphi_+\rangle = \cos \vartheta e^{-i\eta/2} |\varphi_a\rangle + \operatorname{sen} \vartheta e^{i\eta/2} |\varphi_b\rangle, \quad (\text{A.38})$$

análogamente tomando el eigenvalor  $k_-$  se tiene

$$|\varphi_-\rangle = -\operatorname{sen} \vartheta e^{-i\eta/2} |\varphi_a\rangle + \cos \vartheta e^{i\eta/2} |\varphi_b\rangle, \quad (\text{A.39})$$

en donde observamos que  $|\varphi_+\rangle$  y  $|\varphi_-\rangle$  son ortonormales.

## Apéndice B

# Evolución en materia con densidad constante

Para un neutrino que se propaga en un medio material neutro la ecuación de evolución, en la base de sabor, es

$$i \frac{d}{dt} \psi(t) = \mathcal{H} \psi(t) \quad (\text{B.1})$$

con el Hamiltoniano dado por la ecuación (2.14)

$$\mathcal{H} = \zeta \mathbb{I} + \mathbb{T} , \quad (\text{B.2})$$

donde  $\zeta = E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} + \frac{G_F(N_e - N_n)}{\sqrt{2}}$ ,  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$  y  $\mathbb{T}$  es la matriz con traza cero dada por

$$\mathbb{T} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -B & A \\ A & B \end{pmatrix} , \quad (\text{B.3})$$

con  $A = \delta m^2 \sin 2\theta$ ,  $B = \delta m^2 \cos 2\theta - A$  y  $A = 2\sqrt{2}G_F N_e E$ . Suponiendo que  $N_e$  es constante a través de la materia en la cual los neutrinos se propagan, la solución de la ecuación (B.1), poniendo  $t = L$ , es

$$\psi(L) = \mathcal{U}(L) \psi(0) , \quad (\text{B.4})$$

donde

$$\mathcal{U}(L) \equiv e^{-i\mathcal{H}L} \quad (\text{B.5})$$

es el operador de evolución. Para obtener  $\mathcal{U}(L)$ , lo siguiente es hallar la exponencial de la matriz  $-i\mathcal{H}L$ .

---

Cuando se requiere la exponencial de una matriz  $M$  de  $N \times N$  comunmente se recurre a la definición

$$e^M \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n, \quad (\text{B.6})$$

en la que la serie infinita es convergente para cualquier  $M$ . Sin embargo, el cálculo de los elementos de  $e^M$  en (B.6) no es en general muy útil. A continuación demostraremos que la serie en (B.6) puede reducirse a un polinomio finito [68].

La ecuación característica de la matriz  $M$  es el polinomio en  $\lambda$  dada por

$$P(\lambda) \equiv \det(M - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^N + c_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0 = 0, \quad (\text{B.7})$$

donde  $c_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$  son coeficientes dados,  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad y aquellos valores de  $\lambda$  que satisfacen (B.6) son los eigenvalores de  $M$ . El teorema de Cayley-Hamilton asegura que la matriz  $M$  satisface su propia ecuación característica, i.e.,

$$M^N + c_{N-1} M^{N-1} + \dots + c_1 M + c_0 \mathbb{I} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Despejando  $M^N$  se tiene

$$M^N = - (c_{N-1} M^{N-1} + \dots + c_1 M + c_0 \mathbb{I}), \quad (\text{B.9})$$

de lo cual se sigue que

$$M^P = c_{N-1}^{(P)} M^{N-1} + \dots + c_1^{(P)} M + c_0^{(P)} \mathbb{I}, \quad \forall P \geq N \quad (\text{B.10})$$

donde  $c_i^{(P)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , son ciertos coeficientes. Usando el resultado anterior la exponencial de la matriz  $M$  puede ser escrita como

$$e^M = a_0 \mathbb{I} + a_1 M + \dots + a_{N-1} M^{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i M^i, \quad (\text{B.11})$$

donde los  $a_i$ , deben determinarse para cada  $M$ . Así, la serie infinita en la Ec. (B.6) se ha reducido a sólo  $N$  términos, donde  $N$  es la dimensión de la matriz  $M$ .

Tomando en cuenta que, en la Ec. (B.5), el exponente es una matriz de  $2 \times 2$ , a partir del resultado general dado en (B.11) resulta que la expansión del operador de evolución consta únicamente de dos términos:

$$\mathcal{U}(L) = \xi e^{-iL\mathbb{T}} = \xi (a_0 \mathbb{I} - ia_1 L \mathbb{T}), \quad (\text{B.12})$$

con  $\xi \equiv e^{-i\zeta L}$  un factor de fase complejo,  $\mathbb{T}$  la matriz dada en (B.3) y  $a_{0,1}$  coeficientes por determinar.

---

Como el resultado dado en (B.11) fue derivado a partir de la ecuación característica de la matriz  $M$  sus eigenvalores también satisfacen dicha relación. De esta forma, podemos plantear el siguiente sistema lineal de ecuaciones para el par de coeficientes que aparecen en la Ec. (B.12):

$$\begin{aligned} e^{-iL\lambda_-} &= a_0 - iL\lambda_- a_1, \\ e^{-iL\lambda_+} &= a_0 - iL\lambda_+ a_1, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

donde  $\lambda_{\pm}$ , son los eigenvalores de la matriz  $\mathbb{T}$ , es decir, soluciones a la ecuación característica

$$\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0, \quad (\text{B.14})$$

con

$$\begin{aligned} c_1 &= -\text{tr } \mathbb{T} = 0, \\ c_0 &= \det \mathbb{T} = -\frac{1}{(4E)^2} (\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Notese que los coeficientes  $c_{0,1}$  son reales. Las soluciones de (B.14) son:

$$\lambda_{\pm} = \pm\lambda, \quad (\text{B.16})$$

con

$$\lambda = \frac{1}{4E} \sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2} = \sqrt{-\det \mathbb{T}}. \quad (\text{B.17})$$

Despejando de (B.13) se tiene

$$\begin{aligned} a_0 &= \cos \lambda L, \\ a_1 &= \frac{1}{\lambda L} \text{sen } \lambda L, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

que sustituidos en (B.12) nos dan

$$\mathcal{W}(L) = \xi \left( \cos \lambda L \mathbb{I} - \frac{i}{\lambda} \text{sen } \lambda L \mathbb{T} \right). \quad (\text{B.19})$$

A partir de (2.29) identificamos que  $\lambda = \delta M^2 / 4E$ , con lo cual

$$\mathcal{W}(L) = \xi \left( \cos \lambda L \mathbb{I} - i \text{sen } \lambda L \mathbb{U} \right), \quad (\text{B.20})$$

donde  $\mathbb{U}$  es la matriz ortogonal

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} -\cos 2\tilde{\theta} & \text{sen } 2\tilde{\theta} \\ \text{sen } 2\tilde{\theta} & \cos 2\tilde{\theta} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.21})$$

---

con

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2\tilde{\theta} &= \frac{A}{4E\lambda}, \\ \operatorname{cos} 2\tilde{\theta} &= \frac{B}{4E\lambda}.\end{aligned}\tag{B.22}$$

Cuando los neutrinos viajan a través de una serie de regiones de espesor  $L_1, \dots, L_n$  con densidades constantes  $N_{e(1)}, \dots, N_{e(n)}$ , el operador de evolución total es simplemente dado por:

$$\mathcal{U}(L) = \prod_{i=1}^n \mathcal{U}(L_i) = \mathcal{U}(L_n) \cdots \mathcal{U}(L_1),\tag{B.23}$$

donde  $L \equiv \sum_{i=1}^n L_i$  y  $\mathcal{U}(L_i)$  es calculado para el parámetro  $a_i = 2\sqrt{2}G_F N_{e(i)}$ .

Dado un cierto estado inicial  $|\nu_\alpha\rangle$  en la base de sabor, entonces la amplitud  $a_{\alpha\beta}$  para la transición a un neutrino de sabor  $\beta$ , es dada por el elemento de matriz del operador de evolución entre los estados  $|\nu_\alpha\rangle$  y  $|\nu_\beta\rangle$ , es decir,

$$a_{\alpha\beta} \equiv \langle \nu_\beta | \mathcal{U}(L) | \nu_\alpha \rangle, \quad \alpha, \beta = e, \mu.\tag{B.24}$$

La correspondiente probabilidad de transición  $P_{\alpha\beta} \equiv |a_{\alpha\beta}|^2$  es dada por

$$P_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^* a_{\alpha\beta}.\tag{B.25}$$

Para oscilaciones entre dos neutrinos, de (B.20), la amplitud de supervivencia del neutrino electrónico resulta

$$a_{ee} = \operatorname{cos} \lambda L + i \operatorname{cos} 2\tilde{\theta} \operatorname{sen} \lambda L,\tag{B.26}$$

con lo cual

$$P_{ee} = 1 - \operatorname{sen}^2 2\tilde{\theta} \operatorname{sen}^2 \lambda L,\tag{B.27}$$

que coincide con la expresión (2.53) correspondiente a la probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico, en un medio con densidad constante.  $a_e$  y  $P_{\nu_e}$  del texto corresponde a  $a_{ee}$  y  $P_{ee}$  respectivamente, para el caso en que el estado inicial es  $|\nu_e\rangle$ .

## Apéndice C

# La trayectoria en la Tierra

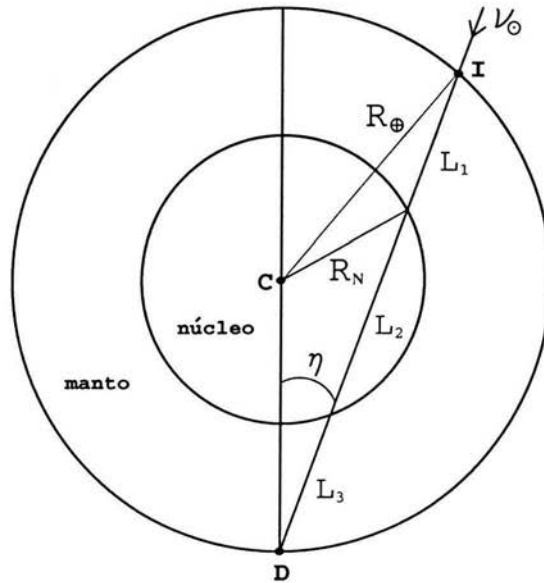


Figura C.1: Geometría de la Tierra. C y D denotan el centro de la Tierra y el detector respectivamente, I es el punto de incidencia del neutrino del Sol en la superficie terrestre,  $\eta$  es el ángulo nadir del Sol,  $R_{\oplus}$  es el radio de la Tierra (6371 km), y  $R_N$  es el radio del núcleo (3486 km).

La trayectoria exacta de los neutrinos solares es una función complicada del tiempo que cambia con la época del año y de la localización geográfica. En este análisis, como modelo de la Tierra, utilizamos el PREM [46] en el cual existen dos estructuras importantes en la densidad: núcleo y manto. Suponiendo que la Tierra es un cuerpo esférico e isotrópico, el *ángulo nadir*  $\eta$  basta para determinar

---

la posición del Sol. El ángulo nadir es aquel subtendido por las direcciones del detector a los centros del Sol y la Tierra, como se observa en la figura (C.1). Durante el día  $\eta$  es mayor a  $90^\circ$ , mientras que en la noche  $\eta \leq 90^\circ$ , un neutrino solar cruzará el centro de la Tierra cuando  $\eta = 0^\circ$ .

La trayectoria visible del Sol en el cielo con respecto al detector es una función del día del año  $d$ . Cada noche el Sol alcanza un valor mínimo del ángulo nadir  $\eta_{m,d}$ . En el transcurso del año  $\eta_{m,d}$  tiene un valor máximo  $\eta_{m,\text{máx}}$  y un valor mínimo  $\eta_{m,\text{mín}}$ . Estos límites y la trayectoria visible del Sol son funciones de la localización del detector especificada por su latitud  $\lambda_D$  y longitud. Para un detector fuera de la banda tropical,  $|\lambda_D| > \delta_{\text{máx}}$ , donde  $\delta_{\text{máx}} = 23.45^\circ$  (0.4093 rad) es la declinación máxima del Sol,  $\eta_{m,\text{máx}}$  es alcanzado en el solsticio de verano,  $\eta_{m,\text{mín}}$  se alcanza en el solsticio de invierno, y  $\eta_{m,\text{mín}} > 0^\circ$  de modo que los neutrinos que llegan al detector nunca cruzan el centro de la Tierra. En cambio, para detectores localizados dentro de la banda tropical,  $\eta_{m,\text{mín}} = 0^\circ$  y neutrinos que cruzan el centro de la Tierra son detectados, el mínimo y el máximo del ángulo nadir en la noche se alcanzan en épocas entre los equinoccios y los solsticios. Finalmente para un detector ecuatorial  $\eta = 0^\circ$  es alcanzado justo en los equinoccios.

A continuación demostraremos que las distancias recorridas por el neutrino en el manto y en el núcleo terrestres quedan determinadas por el ángulo nadir [69]. De la figura (C.1) observamos que la distancia total recorrida por el neutrino en la Tierra hasta el detector es:

$$L = L_1 + L_2 + L_3, \quad (\text{C.1})$$

y del triángulo formado por el detector D, el centro de la Tierra C y el punto de incidencia I, se tiene que

$$L^2 - 2LR_\oplus \cos \eta = 0, \quad (\text{C.2})$$

y, omitiendo la solución trivial  $L=0$ , entonces

$$L = 2R_\oplus \cos \eta, \quad (\text{C.3})$$

donde  $0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$ . De la intersección de  $L$  con la circunferencia de radio  $R_N$

$$R_\oplus^2 + L'^2 - 2L'R_\oplus \cos \eta = R_N^2, \quad (\text{C.4})$$

es decir,

$$L'_\pm = R_\oplus \cos \eta \pm R_\oplus \sqrt{\frac{R_N^2}{R_\oplus^2} - \sin^2 \eta}, \quad (\text{C.5})$$

donde  $0 \leq \eta \leq \eta_0$ , con  $\eta_0 = \arcsen(R_N/R_\oplus) \approx 33.17^\circ$  (0.5789 rad). De la figura, vemos que

$$L_2 = L'_+ - L'_- = 2R_\oplus \sqrt{\frac{R_N^2}{R_\oplus^2} - \sin^2 \eta},$$



$$L_3 = L'_- = R_{\oplus} \cos \eta - R_{\oplus} \sqrt{\frac{R_N^2}{R_{\oplus}^2} - \sin^2 \eta}. \quad (\text{C.6})$$

Y de (C.5) y (C.6) se encuentra que:  $L_1 = L_3$ , es decir, las dos longitudes en el manto son iguales.

Entonces, para  $0 \leq \eta \leq \eta_0$ , la distancia total recorrida en radios terrestres es

$$\ell = 2\ell_1 + \ell_2, \quad (\text{C.7})$$

donde

$$\ell_1 = \cos \eta - \sqrt{\frac{R_N^2}{R_{\oplus}^2} - \sin^2 \eta}, \quad \ell_2 = 2\sqrt{\frac{R_N^2}{R_{\oplus}^2} - \sin^2 \eta}. \quad (\text{C.8})$$

En tanto que, para  $\eta_0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$ ,

$$\ell = 2 \cos \eta, \quad (\text{C.9})$$

de lo cual se sigue que, para este caso,  $0 \leq \ell \leq 1.67$ .

La localización del detector es una consideración muy importante si se desea observar los neutrinos que cruzan el núcleo y el manto de la Tierra. Existen dos aspectos a tomar en cuenta: (a) el tiempo de cobertura del año en que los neutrinos deben pasar a través del núcleo para llegar al detector y (b) el valor mínimo  $\eta_{m,\min}$  que alcanzan sus trayectorias.

La latitud más baja para la cual los neutrinos solares nunca pasarán a través del núcleo terrestre [70] es  $\lambda_n = \eta_0 + \delta_{\max} = 56.62^\circ$ , y la latitud más alta para la cual los neutrinos solares siempre pasarán por el núcleo cada día del año es  $\lambda_s = \eta_0 - \delta_{\max} = 9.72^\circ$  (0.1696 rad). Se puede ver que para una latitud del detector  $\lambda_D$  dada, menor que  $\delta_{\max}$ , el ángulo nadir se anula alguna vez en el invierno, y cubrirá el rango completo  $0 \leq \eta \leq \eta_0$ . Para  $\lambda > \delta_{\max}$ , el valor mínimo  $\eta_{m,\min}$  nunca es cero y su valor incrementa con la altitud.

La figura (C.2) muestra el tiempo de cobertura por día como función de las estaciones del año. En la latitud  $0^\circ$ , la cobertura oscila entre un máximo de casi 4.5 horas durante los equinoccios de primavera y otoño, y un mínimo de cerca de 3.25 horas en los solsticios de verano e invierno; el tiempo de cobertura asciende en conjunto hasta 14.3 % del año. Mientras que la latitud aumenta, este porcentaje decrece y para  $25^\circ$ , la cobertura ocurre únicamente en los meses de otoño e invierno, y en el solsticio de invierno la cobertura es de casi 5 horas. Esto tiene el efecto interesante de doblar la cobertura durante la parte relevante del año. Por ejemplo, en  $30^\circ$ , el tiempo total de cobertura es de 7.5 % del año completo, pero 15 % en otoño e invierno; así comparar los eventos en la noche y en el día durante este intervalo sólo realza la señal total a costa de reducir la estadística total.

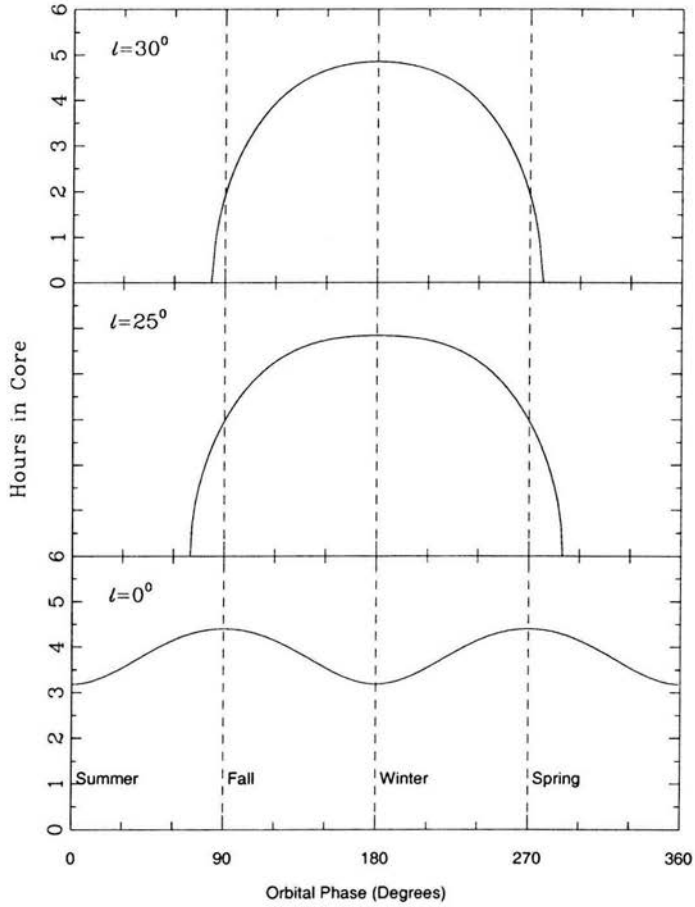


Figura C.2: Número de horas por noche en que los neutrinos solares pasan a través del núcleo de la Tierra: variación anual para varias latitudes.

Del tiempo de cobertura y el rango barrido en  $\eta$ , es claro que, las latitudes cerca del ecuador son las más favorables para observar los efectos del núcleo terrestre sobre los neutrinos solares. Los experimentos actuales de neutrinos solares están en latitudes mayores a  $30^\circ$  y su cobertura se restringe entre a los meses de otoño e invierno.

# Bibliografía

- [1] SK collaboration *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **81**(1998)1562-1567
- [2] SNO Collaboration, *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, Phys. Rev. Lett. **89**(2002)011301
- [3] S.P. Mikheev, A.Y. Smirnov, *Resonance enhancement of oscillations in matter and solar neutrino spectroscopy*, Sov. J. Nucl. Phys. **42**(1985)913-917
- [4] L. Wolfenstein, *Neutrino oscillations in matter*, Phys. Rev. D **17**(1978) 2369-2374
- [5] C.W. Chiang, L. Wolfenstein, *Sign of the day-night asymmetry for solar neutrinos*, Phys. Rev. D **63**(2001)057303
- [6] B. Pontecorvo, *Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge*, Sov. Phys. JETP **7**(1958)172-173
- [7] Z. Maki, M. Nakagawa, S. Sakata, *Remarks on the unified model of elementary particles*, Prog.Theor.Phys. **28**(1962)870
- [8] S. Weinberg, *A model of leptons*, Phys. Rev. Lett. **19**(1967)1264-1266; S.L. Glashow, *Partial symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys **22**(1961)579-588; A. Salam, J.C. Ward, *weak and electromagnetic interactions*, Nuovo Cim. **11**(1959)568-577
- [9] LEP Collaboration, *Electroweak parameters of the  $Z^0$  resonance and the standar model*, Phys. Lett. B **276**(1992)247-253
- [10] S.M. Bilenky, *Present status of neutrino mixing*, hep-ph/0110306
- [11] J.C. D'Olivo, *Renormalización de la teoría electrodébil en presencia de mezcla de fermiones*, Tesis doctoral, departamento de Física, CINVESTAV, México 1984
- [12] T.K. Kuo, J. Pantaleone, *Neutrino Oscillations in matter*, Rev. Mod. Phys. **61**(1989)937-979

- [13] A. Messiah, *Quantum mechanics*, (Dover, New York, 1999)
- [14] J.C. D'Olivo, *Magnus approximation for nonadiabatic transitions and neutrino oscillations in matter*, Phys. Rev. D **45**(1992)924-929
- [15] C. Giunti, C.W. Kim, U.W. Lee, *When do neutrinos really oscillate? Quantum mechanics of neutrino oscillations*, Phys. Rev. D **44**(1991)3635-3640
- [16] B. Kayser, *On the quantum mechanics of neutrino oscillation*, Phys. Rev. D. **24**(1981)110-116
- [17] K. Hagiwara et al (Particle Data Group), *Review of particle physics*, Phys.Rev.D **66**(2002)010001
- [18] A.D. Dolgov, *Cosmological constraints on neutrino masses and mixing*, hep-ph/0306154
- [19] V.N. Gribov, B. Pontecorvo, *Neutrino Astronomy and lepton charge*, Phys.Lett.B **28**(1969)493
- [20] M.C. Gonzalez-Garcia, *Neutrino masses and mixing: where we stand and where we are going*, hep-ph/0211054
- [21] D.E. Groom, *Understanding two-flavor oscillation parameters and limits*, Phys. Rev. D **66**(2002)010001
- [22] M.C. Gonzalez-Garcia, Y. Nir *Neutrino masses and mixing: evidence and implications*, Rev. Mod. Phys. **75**(2003)345-402
- [23] J.C. D'Olivo, J.F. Nieves, M. Torres, *Finite-temperature corrections to the effective potential of neutrinos in a medium*, Phys. Rev. D **46**(1992)1172-1179
- [24] S.M. Bilenky, S.T. Petcov, *Massive neutrinos and neutrino oscillations*, Rev. Mod. Phys. **59**(1987)671-754
- [25] A.Y. Smirnov, *The MSW effect and Solar Neutrinos*, hep-ph/0305106
- [26] S.P. Mikheev, A. Y. Smirnov, *Neutrino oscillations in an inhomogeneous medium: adiabatic regime*, Sov. Phys. JETP **65**(1987)230-236
- [27] P. Langacker, J.P. Leveille, J. Sheiman, *On the detection of cosmological neutrinos by coherent scattering*, Phys. Rev. D **27**(1983)1228-1242
- [28] C.W. Kim, A. Pevsner, 1993, *Neutrinos in Physics and Astrophysics*, Contemporary Concepts in Physics, No. 8 (Harwood Academic, Chur, Switzerland)
- [29] S.P. Mikheev, A.Y. Smirnov, *Resonance oscillations of neutrinos in matter*, Sov.Phys.Usp.**30**(1987)759-790

- 
- [30] S.P. Mikheev, A.Y. Smirnov, *Resonant amplification of neutrino oscillations in matter and solar neutrino spectroscopy*, Nuovo Cim.C **9**(1986)17-26
- [31] P.B. Pal, *Particle physics confronts the solar neutrino problem*, Int. J. Mod. Phys.A **7**(1992)5387-5460
- [32] L.G. Cabral-Rosetti, *Introducción a las oscilaciones de neutrinos*, Rev. Mex. Fis **48**(2002)366-383
- [33] L. Landau, Phys. Z. Sov. **2**(1932)46;  
C. Zener, *Nonadiabatic crossing of energy levels*, Proc. Roy. Soc. Lon. A **137**(1932)696-702;  
E.C.G. Stückelberg, Helv. Phys. Acta **5**(1932)369
- [34] S. J. Parke, *Nonadiabatic Level Crossing in Resonant Neutrino Oscillations*, Phys. Rev. Lett. **57**(1986)1275-1278
- [35] W.C. Haxton, *Adiabatic Conversion of Solar Neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **57**(1986)1271-1274
- [36] L. Landau, L.M. Lifshitz, *Quantum mechanics*, (Pergamon Press, 1977)
- [37] J.N. Bahcall, M.H. Pinsonneault, S Basu, *Solar models: current epoch and time dependences, neutrinos, and helioseismological properties*, Astrophys. J. **555**(2001)990-1012
- [38] S.T. Petcov, *Exact analytic description of two neutrino oscillations in matter with exponentially varying density*, Phys. Lett. B **200**(1988)373-379
- [39] P.I. Krastev, S.T. Petcov, *On the analytic description of two neutrino transitions of solar neutrinos in the Sun*, Phys. Lett. B **207**(1988)64
- [40] S.T. Petcov, *On the oscillations of solar neutrinos in the Sun*, Phys. Lett. B **214**(1988)139-146
- [41] S.T. Petcov, J. Rich, *The effects of a averaging on the matter enhanced oscillations of solar neutrinos*, Phys. Lett. B **224**(1989)426-432
- [42] S.T. Petcov, *Describing analytically the matter enhanced two neutrino transitions in a medium*, Phys. Lett. B **406**(1997)355-365
- [43] A.J. Baltz, J. Weneser, *Matter oscillations: Neutrino transformation in the Sun and regeneration in the Earth*, Phys. Rev. D **37**(1988)3364-3377
- [44] A.J. Baltz, J. Weneser, *Effect of transmission through the Earth on neutrino oscillations*, Phys. Rev. D **35**(1987)528-535
- [45] Q.Y. Liu, M. Maris, S.T. Petcov, *Study of the day-night effect for the Super-Kamiokande detector. I. Time-averaged solar neutrino survival probability*, Phys. Rev. D **56**(1997)5991-6002
-

- [46] A.M. Dziewonski, D.L. Anderson, *Preliminary reference Earth model*, Phys. Earth Planet. Inter. **25**(1981)297-356
- [47] M.C. Gonzalez-Garcia, C. Pena-Garay, Y. Nir, A. Yu. Smirnov, *Phenomenological of maximal and near maximal lepton mixing* Phys. Rev. D **63**(2001)013007; M.C. Gonzalez-Garcia, C. Pena-Garay, A. Yu. Smirnov, *Zenith angle distributions at Super-Kamiokande and SNO and the solution of the solar neutrino problem*, Phys. Rev. D **63**(2001)113004
- [48] A.S. Dighe, Q.Y. Liu, A.Y. Smirnov, *Coherence and the Day-Night Asymmetry in the Solar Neutrino Flux*, hep-ph/9903329
- [49] A.H. Guth, L. Randall, M. Serna, *Day-night and energy dependence of MSW solar neutrinos for maximal mixing*, J. High Energy Phys. **08**(1999)018
- [50] A. Gouvea, A. Friedland, H. Murayama, *Earth matter effect in  $^7\text{Be}$  solar neutrino experiments*, J. High Energy Phys. **03**(2001)009
- [51] K. Kiers, S. Nussinov, N. Weiss, *Coherence effects in neutrino oscillations*, Phys. Rev. D **53**(1996)537-547
- [52] A. Friedland, *Evolution of the neutrino state inside the Sun*, Phys. Rev. D. **64**(2001)013008
- [53] E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, A. Palazzo, S.T. Petcov, *Analytical description of quasivacuum oscillations of solar neutrinos*, Phys. Rev. D **63**(2001)093002
- [54] G.L. Fogli, E. Lisi, D. Montanino, A. Palazzo, *Quasivacuum solar neutrino oscillations*, Phys. Rev. D **62**(2000)113004
- [55] A. Friedland, *Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein Effects in Vacuum Oscillations*, Phys. Rev. Lett. **85**(2000)936-939
- [56] P. C. de Holanda, A. Yu. Smirnov, *Solar neutrinos: the SNO salt phase results and physics of conversion*, hep-ph/0309299
- [57] T. Ohlsson, H. Snellman, *Neutrino oscillations with three flavors in matter: Applications to neutrinos traversing the Earth*, Phys. Lett. B **474**(2000)153-162
- [58] J. Bernabéu, S. Palomarez-Ruiz, A. Pérez, S.T. Petcov, *The earth Mantle-Core effect in charge-asymmetries for atmospheric neutrino oscillations*, Phys. Lett. B **531**(2002)90-98
- [59] A. Gouvea, A. Friedland, H. Murayama, *The dark side of the solar neutrino parameter space*, Phys. Lett. B **490**(2000)125-130
- [60] M.S. Smy, *The solar neutrino problem and its oscillation solution*, Mod. Phys. Lett. A **17**(2002)2163-2178

- 
- [61] SNO Collaboration, *Measurement of the Total Active  $^8\text{B}$  Solar Neutrino Flux at the Sudbury Neutrino Observatory with Enhanced Neutral Current Sensitivity*, nucl-ex/0309004
- [62] M. Maris, S.T. Petcov, *Day-night effect predictions for the SNO detector*, Phys. Rev. D **62**(2000)093006
- [63] E. Sassaroli, *Neutrino oscillations: A relativistic example of a two level system*, Am. J. Phys. **67**(1999)869-875
- [64] X.-G. Zhao, *Evolution operator in two-level systems*, Phys. Lett. A **181** (1993)425-431
- [65] X.-G. Zhao, *A formal solution for the evolution operator and its application in two-level systems*, Phys. Lett. A **193**(1994)5-10
- [66] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures in Physics*, (Addison-Wesley, Reading, MA, 1965), Vol. III.
- [67] C. Cohen-Tannoudji, *Quantum mechanics*, (Hermann, Paris, France, 1997)
- [68] T. Ohlsson, H. Snellman, *Three flavor neutrino oscillations in matter*, J. Math. Phys. **41**(2000)2768-2788, Erratum-ibid.**42**(2001)2345
- [69] T. Ohlsson, H. Snellman, *Neutrino oscillations with three flavors in matter of varying density*, Eur. Phys. J. C. **20**(2001)507-515
- [70] J.M. Gelb, W. Kwong, S.P. Rosen, *Searching for the Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein Enhancement*, Phys. Rev. Lett. **78**(1997)2296-2299

## BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

- [71] A. Franklin, *The road to the neutrino*, PHYSICS TODAY, Feb 2000, 22-28
- [72] L.M. Brown, *The idea of the neutrino*, PHYSICS TODAY, Sep 1978, 23-28
- [73] L. Stodolsky, *When the wavepacket is unnecessary*, Phys. Rev. D **58**(1998) 036006
- [74] W.C. Haxton, B.R. Holstein, *Neutrino Physics*, Am. J. Phys. **68**(2000)15-32
- [75] L. Wolfenstein, *Neutrino Physics*, Rev. Mod. Phys. **71**(1999)s140-s144
- [76] F. Reines, *The neutrino: from poltergeist to particle*, Rev. Mod. Phys. **68**(1996)317-327
- [77] J.N. Bahcall, P.I. Krastev, *Does the Sun appear brighter at night in neutrinos?*, Phys. Rev. C **56**(1997)2839-2857

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [78] S. Pakvasa, J. Pantaleone, *Direct Probes of Neutrino Properties Using Solar-Neutrino Lines*, Phys. Rev. Lett. **65**(1990)2479-2482
- [79] H.A. Bethe, *Possible Explanation of the Solar-Neutrino Puzzle*, Phys. Rev. Lett. **56**(1986)1305-1308
- [80] J. Pantaleone, *Matter effects on observable vacuum oscillations of solar neutrinos*, Phys. Lett. B **251**(1990)618-622