720726

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE QUIMICA

TITULO DEL TEMA: TALLER DE MATEMATICAS I
Un ensayo sobre enseñanza de esta ciencia en el área de Química.

NOMBRE DEL SUSTENTANTE: José Landeros Valdepeña

CARRERA INGENIERO QUIMICO METALURGICO

AÑO 1976

INTRODUCCION

En el transcurso de mi carrera observé que los ejemplos plantea - dos en las cátedras de los profesores de la Facultad de Química que impar - ten asignaturas no matemáticas, generalmente contienen desarrollos matemáti cos muy sencillos, siendo éstos poco representativos para la mayoría de los problemas fisicoquímicos o químicos.

Una de las respuestas más frecuentes al preguntar a los profeso - res el por qué no utilizan las disciplinas matemáticas como una herramienta en la resolución de sus modelos, fue que muchos estudiantes no conocen el - manejo de quebrados, logaritmos, funciones trigonométricas, etc. Esto nos - hace pensar que el profesor se ve obligado a enseñar operaciones elementa - les de aritmética y álgebra, desvirtuando el fin de su curso y a veces - creando lagunas en el alumnado, incluso en algunas ocasiones el profesor - mismo encuentra o tiene limitaciones para problemas reales y complejos.

Se hizo una encuesta sobre los tópicos matemáticos más utilizados llegándose a los resultados siguientes:

Cuatro operaciones básicas

Algebra elemental

Derivadas e integrales sencillas

Trigonometría

Exponenciación y logaritmos

Método de los mínimos cuadrados

De las cinco asignaturas matemáticas obligatorias que cursa el Ingeniero Químico Metalúrgico se utiliza lo siguiente:

Matemáticas I (5 horas por semana)..........	aritmética y álgebra elemental
Matemáticas II (4 horas por semana).........	una pequeña parte
Cálculo diferencial e integral (6 horas)....	derivadas e integrales sencillas.
Ecuaciones diferenciales (5 horas)..........	una pequeña parte
Estadística I (5 horas por semana)..........	una pequeña parte
Estadística II (5 horas por semana).........	método de los mínimos cuadrados y control de calidad. *

Sin embargo, se requieren los conocimientos de trigonometría, exponenciación y logaritmos y factorización, los cuales solo son tratados -en forma elemental- en el segundo semestre del tercero y cuarto año del bachillerato, no repitiéndose en los cursos de la Facultad de Química.

Los estudiantes ingresan a la Universidad con muchas deficiencias de temas que estudiaron someramente o que no vieron y ésto los conduce a un conformismo al ver que sus demás compañeros carecen de lo mismo.

El Taller de Matemáticas trata de subsanar estas deficiencias por medio de cursos extracurriculares-habiéndose comenzado en el segundo semestre de 1975- y programados -encontrándose en prueba los cursos de factoriza

* Ver anexo I

ción, exponenciación y logaritmos-. Se encontró un gran entusiasmo por parte de los estudiantes, pero por las necesidades propias de sus materias en curso y personales no ha sido posible lograr una gran asistencia.

Por estar estos cursos en pleno desarrollo no fue posible exponerlos en este ensayo, mas sin embargo es importante mencionar que son fundamentales para el estudiante medio.

Una experiencia adquirida en el Taller de Matemáticas -con respecto a estos tres cursos- fue que el estudiante no solo desconoce por completo estos temas, sino que además no sabe sumar, restar, multiplicar o dividir quebrados (pese a que los números racionales se incluyen en el programa de Matemáticas I, los estudiantes de segundo semestre no los manejan). Si un profesor de matemáticas dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias -como son los quebrados- disminuirá su interés por el curso e impedirá su desarrollo intelectual; pero si por el contrario pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y por el uso de las matemáticas.

Recordando lo dicho anteriormente, el profesor de las asignaturas fisicoquímicas o químicas se ve obligado a enseñar operaciones elementales de aritmética y álgebra, siendo que solo debe mostrar como llegar de un problema a un modelo, y el profesor de matemáticas debe orientar al estudiante al desarrollo del planteamiento matemático. Desgraciadamente ésto no ocurre y el profesor de química explica como resolver dicho modelo utilizando reglas de tres, un sin fin de cambios de signo "convencionales", tanteos para-la resolución de polinomios de tercer grado, recetarios absurdos y sin razonamiento, etc. En otras palabras, las deficiencias matemáticas no son reparadas en su desarrollo profesional.

El profesor observa lo anterior en sus exámenes, donde las preguntas de índole operacional no son contestadas satisfactoriamente, mientras que son resueltas sin gran dificultad preguntas conceptuales; ésto lleva a algunos profesores a evitar preguntas operacionales resultando que el estudiante acredita algunas materias al memorizar conceptos sin que nada de su contenido científico se incorpore al estudiante por falta de razonamiento.

Por las razones expuestas, es muy importante familiarizar al estudiante con los problemas matemáticos, minimizar las abstracciones que le resulten difíciles e incorporar las matemáticas en su diaria práctica profesional y en su vida misma.

Para llevarlo a cabo, se pensó en el Taller de Matemáticas, el cual empezó a trabajar en una de las intersecciones entre las matemáticas y la química debido a que el estudiante no aprende en sus materias obligatorias las aplicaciones de las matemáticas. Como el profesor de areas cercanas a las matemáticas no utiliza estos conceptos, el estudiante olvida el manejo adquirido y finaliza su carrera sin la preparación adecuada. Por un lado, como un intento de evitarle pérdidas de tiempo al profesor de química y verse obligado a ir a campos que competen a las matemáticas e inversamente para los profesores de la misma, se realizó de manera infor -

mal y dinámica el Taller de Matemáticas.

La idea de formar el Taller de Matemáticas nació a fines de 1974-cuando al platicar con varios compañeros, alumnos y profesores se opinaba -la necesidad de hacer razonar al estudiante. Me pareció que mediante cursos extracurriculares sobre el problema de aplicación de las matemáticas en la-química sería posible desarrollar la capacidad de raciocinio y que no se relacionara a las matemáticas con algo abstracto e inútil; en otras palabras, lo que se desea es relacionar intimamente la aritmética y el álgebra con -los conocimientos profesionales para que el alumno se desarrolle en el transcurso de su carrera en la medida que el propio interesado crea más indispensable, no pretendiendo mostrar la única alternativa posible, sino la que en mi vida profesional docente ha resultado más necesaria.

Cerca del 70% de los egresados de la Facultad de Química no saben resolver una ecuación de tercer grado, un simple sistema de ecuaciones li-neales, etc (datos obtenidos de los exámenes de admisión a maestría); así -como tampoco su utilidad. Por esta razón se empezó con el Taller de Matemáticas I.

El principal problema que se encontró al desarrollarlo es que no-existe la suficiente y adecuada bibliografía sobre los usos en la química -de los temas indicados en los programas de Matemáticas I, por lo cual, me -pareció necesario crear unos apuntes de mediana complejidad, en los que breve y sencillamente se expongan ejemplos sobre los usos de las matemáticas.

Como existe una gran cantidad de libros de texto que explica la -

teoría de los temas aquí expuestos -para no ser repetitivos- y dar más dinamismo a ésta tesis se pensó en formularlo por medio de ejemplos ilustrativos. La explicación sobre el desarrollo general de este ensayo está dada en el capítulo 0.

Deseo expresar mi gratitud al M. en C. Jorge Ludlow por sus valiosas sugerencias y agradecer la ayuda recibida por, Sra Isabel V. de Landeros, Srita Silvia Landeros, Srita Rocio Gutiérrez y en forma especial a la Srita Violeta Mugica por haber pasado a máquina el original.

José Landeros.

CAPITULO CERO

Las matemáticas son la herramienta y lenguaje básico de la fisicoquímica y la química por sus modelos, representaciones, gráficas, demostraciones, cálculos, etc. El estudiante del area química necesita entender esto y desarrollar sus conocimientos matemáticos para suplementar su función profesional. Por un lado, las matemáticas "asustan" por su aparente complejidad y por otro se las relaciona con algo abstracto e inútil; por ésto, uno de los objetivos de este ensayo es buscar estímulos para el empleo de las matemáticas en la física y química.

La meta del curso de matemáticas I que se imparte en la Facultad de Química es: "Dar al alumno un entrenamiento mental adecuado para razonar, analizar y deducir. Proporcionarle los conocimientos necesarios que le auxiliarán en el estudio de la física, la fisicoquímica, la química, etc. Tener un lenguaje adecuado para exponer los problemas técnicos y así facilmente resolverlos". Este objetivo se tomó como principal. La frase "proporcionarle los conocimientos necesarios que le auxilien en el estudio de la física, la fisicoquímica, la química, etc" se interpretó en el sentido operacional y es esta la razón por la cual incluyo en este ensayo ejemplos de esta índole; la frase "tener un lenguaje adecuado para expresar los problemas técnicos y así facilmente resolverlos" se interpretó en forma de aplicaciones, debido a lo importante de adquirirlo (en los números 4.15, 5.16 y 6.5 del temario de matemáticas I aparece el sustantivo "aplicaciones", al que no se le ha dado la debida importancia). Por último, la frase "dar al alumno un entrenamiento mental adecuado para razonar, analizar y deducir" es una conclusión de lo anterior y una posible manera de exponerlo está dada en el desarrollo de esta tesis, siendo una manera muy particular de exponer las ideas, el utilizar analogías y ejemplos. Es claro que este ensayo no es exhaustivo de los recursos matemáticos en la química; pero se espera que sea una introducción hacia esta área.

La elección del orden de los temas no concuerda con el dado por el temario de matemáticas I, debido a que las aplicaciones observadas en los temas aquí expuestos tienen otras concordancias.

TEMA I (IV del temario de matemáticas I) ESTRUCTURA DEL SISTEMA NUMERICO

1.1 (4.1) Números naturales

1.2 (4.4 y 4.5) Números enteros

1.3 (4.7 y 4.8) Números racionales

1.4 (4.9) Números reales

Los números naturales son relacionados con cantidades físicas o químicas, introduciendo un concepto intuitivo de los mismos. En el libro "¿De cuántas formas?" de N. Vilenkin se expone en forma popular la combinatoria y su primera parte puede ser utilizada en la explicación de los números naturales, sin embargo, no fue aprovechado en este ensayo porque no se desean repetir los materiales utilizados en los libros, sino tratar de adaptarlos a las necesidades de los alumnos de la Facultad de Química. Por tal razón, los libros mencionados al final de esta tesis solo sirvieron de consulta y no como base.

Los números enteros vistos en su aplicación a los calores de formación*, muestran una analogía entre ambos temas y ayudan al estudiante de primer ingreso a comprender las propiedades del conjunto de los enteros desde el punto de vista matemático, y a comprender las propiedades del conjunto de los enteros desde un punto de vista químico. Esta última aseveración se repetirá con frecuencia en el transcurso de este capítulo.

Los factores de conversión -parte importante del análisi dimensional- son de gran utilidad en el desarrollo del estudiante de química, y los profesores de otras áreas han tratado de explicarlos sin el éxito deseado, por ésto y dada la analogía que presentan con los números racionales, son tratados algunos cálculos químicos indispensables en esta sección, pretendiéndose subsanar las deficiencias propias del estudiante en el manejo de los quebrados en problemas relativos a la física, fisicoquímica y química.

Resaltar la importancia del conjunto de los reales así como sus propiedades. Estos números -en especial los irracionales- resultan de difícil manejo para el estudiante, aplicándose algunos que tratan la exponenciación, como es el caso de un ejemplo sobre el radio molecular, el cual tiene como fin el uso de radicales y la deducción del radio de una manera sencilla. Este ejemplo resultó de gran interés para el alumno por sentirse capaz de razonar o analizar un ejemplo similar.

* Aunque los calores de formación no son números enteros, para la finalidad de este ensayo los tomaremos como tales.

TEMA II (VI del temario de matemáticas I) SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

2.1 (No está en el temario de matemáticas I) Planteamiento de una ecuación)

2.2 (No está en el temario de matemáticas I) Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

2.3 (6.1) Sistemas de ecuaciones lineales.

2.3.1 Balanceo de reacciones químicas y el método de suma y resta para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

2.3.2 (6.2, 6.3 y 6.4) Matrices

2.3.3 (6.8) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por matrices.

2.3.4 (6.6) La matriz escalonada.

2.3.5 (6.7 y 6.10) La matriz inversa y la función determinante.

Algo básico y muy necesario para el estudiante de la Facultad de Química es el adquirir los elementos, conocimientos y razonamientos que pueden emplearse al desear representar una situación o problema por medio de una ecuación. Esta es una de las tres metas del curso de matemáticas I (tener un lenguaje adecuado para expresar los problemas técnicos y así fácilmente resolverlos) y está brevemente expuesto en la primera parte de este capítulo.

Una de las dificultades del alumno de primer ingreso es la de no saber despejar una ecuación, ni relacionar letras con cantidades físicas; por tal razón se explican algunos tópicos de fácil comprensión -Gases idea les, presiones parciales y ecuación de estado de Van der Waals) que nos ser virán de ejemplo para este desarrollo.

El estudiante de enseñanza media conoce el método de suma y resta, este hecho se aprovecha para enseñarle el balanceo de reacciones químicas y/o para reafirmar este conocimiento, mencionándose una analogía entre estos dos métodos. Se exponen algunos tipos de matrices y se explica la multiplicación matricial para poder continuar con los siguientes temas, o sea, recordar someramente los conceptos adquiridos en clase.

Se explican cuatro métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, adjuntándose a cada uno un ejemplo con el fin de que el alumno vea como se puede plantear un sistema y aplique distintos métodos de resolución; esta parte es la más importante del capítulo II debido a que (1) El alumno ve rara vez un planteamiento de ecuaciones en su primer semestre o en la clase de cualquiera de sus asignaturas matemáticas. (2) El alumno solo resuelve problemas de rutina que no lo relacionan con la realidad y los cuales tienen solución sencilla.

TEMA III (I, IV y V del temario de matemáticas I) EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

Los tópicos tratados se encuentran agrupados en este tema debido a su similitud con respecto a su aplicación. El nombre utilizado corresponde al tema central del capítulo; aunque en la parte final del mismo no se encuentre una relación con el campo de los números complejos, sí existe una relación con la aplicación usada para estos números.

3.1 Polinomios cuadráticos y la constante del producto de solubilidad.

3.1.1 (parte del tema V del temario de matemáticas I) Constante del producto de solubilidad.

3.1.2 (4.11, 4.12, 4.13, 4.14) El campo de los números complejos.

3.2 (4.15) Circuitos eléctricos.

3.3 (1.2 y 1.3) Algebra Booleana.

Es un error pensar que todos los alumnos que ingresan al nivel superior pueden resolver una ecuación cuadrática por la fórmula general, por tal razón y por aplicar este método de resolución, se introduce el concepto de la constante del producto de solubilidad, el cual, para reacciones sencillas plantea una ecuación de segundo orden. Con este conocimiento, se parte a la obtención de números complejos y se extiende el mismo para la explicación de alguna de sus propiedades que se requerirían en la siguiente sección.

Una aplicación directa de los números complejos se encuentra en el desarrollo de las propiedades de un circuito eléctrico; conceptos como reactancia, impedancia compleja, admitancia compleja, etc, nos sirven para que el estudiante opere a los números complejos en situaciones supuestamente reales y una vez más, no desligue a las matemáticas de la realidad.

El álgebra de conmutación, es una álgebra booleana que nos relaciona a los circuitos con conmutadores con la lógica matemática, y así aplicar las explicaciones recibidas en clase de matemáticas I a este tipo de circuitos. En esta parte, se ven los circuitos con conmutadores y las tablas de verdad sin los conocimientos del álgebra proposicional, o sea, de- la realidad a las matemáticas y no a la inversa- que viene siendo lo expuesto en las secciones anteriores.

TEMA IV (V del temario de matemáticas I)

4.1 (5.1, 5.3, 5.6, 5.7, 5.10) Algunos teoremas fundamentales.

4.2 (5.4, 5.5) División sintética y la ecuación degradada.

4.3 (No está en el temario de matemáticas I) Resolución de la ecuación general de tercer grado.

4.4 (5.17) Resolución de la ecuación general de cuarto grado

4.5 (5.15) Método de Newton

En los temas 4.3, 4.4 y 4.5 se tiene el subtema 5.16 del temario de matemáticas I.

Primero se enuncian algunos problemas de interés que servirán para el desarrollo del capítulo; también se menciona la división sintética y la ecuación degradada con el fin de poder factorizar un polinomio o con el fin de simplificar una ecuación al encontrar alguna de sus raices. Posteriormente, se mencionan tres métodos de resolución de ecuaciones polinomiales para que el alumno tenga oportunidad de elegir el que le parezca más adecuado a un planteamiento obtenido; pero lo más importante, es que estos métodos son ejemplificados con casos reales. Estos casos se basan en ecuaciones de estado que el alumno ve en su clase de fisicoquímica II - en el primer semestre de la Facultad de Química-. Este capítulo es el más corto de este ensayo porque su aplicación a problemas de química más avanzada - está fuera de los recursos del estudiante medio de primer ingreso.

Esta tesis trata de ver el programa de matemáticas I de manera - aplicada a la física, fisicoquímica y química. Sin embargo, algunos tópi - cos no fueron desarrollados porque no se les encontró una aplicación real- o porque la aplicación resultó obsoleta. A continuación se expone el tema- rio de matemáticas I, colocándose un asterisco a los temas no mencionados- en este ensayo.

Tema	Descripción
1.	Lógica
* 1.1	Introducción histórica
1.2	Lógica matemática
1.3	Tabla de verdad
* 1.4	Método de prueba
2.	Conjuntos
* 2.1	Algebra de conjuntos
* 2.2	Par ordenado
* 2.3	Producto cartesiano
3.	Relaciones y Funciones
* 3.1	Relaciones binarias y sus propiedades

* 3.2	Intervalos
* 3.3	Relaciones de equivalencia
* 3.4	Definición de función
* 3.5	Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas
* 3.6	Función: idéntica, constante, producto, inversa, etc
* 3.7	Gráfica de una función
* 3.8	Función valor absoluto y sus propiedades
4.	Estructura del sistema numérico
4.1	Números naturales
* 4.2	Inducción matemática
* 4.3	Aplicaciones de inducción
4.4	Números enteros
4.5	Relación de orden de los enteros
* 4.6	Concepto de grupo
4.7	Números racionales
4.8	Relación de orden de los racionales
4.9	Números reales
* 4.10	Concepto de campo
4.11	Números complejos
4.12	Definición
4.13	Potencias y raices de los Números complejos
4.14	Teorema de De Moivre
4.15	Aplicaciones

5.

5. Teoría de ecuaciones

5.1 Polinomios

* 5.2 Productos notables

5.3 Teorema del factor y del residuo

5.4 División sintética

5.5 Ecuación degradada

5.6 Forma factorizada de un polinomio

5.7 Las "n" Raíces de una ecuación de grado "n"

* 5.8 Polinomios idénticos

* 5.9 Relaciones entre las raíces y los coeficientes

5.10 Las raíces imaginarias se presentan por pares

* 5.11 Límites de las raíces reales; raíces enteras y racionales

* 5.12 Empleo de las gráficas en la teoría de Ecuaciones. - Precauciones al graficar máximos y mínimos.

* 5.13 Reglas de los signos de Descartes

* 5.14 Resolución de ecuaciones numéricas, Método Interpolación Lin

5.15 Método de Horner, de Newton

5.16 Aplicaciones

5.17 Resolución de la ecuación de cuarto grado. Raíces de la ecuación cúbica. Resolvente. Discriminante de la ecuación de cuarto grado.

6. Matrices

6.1 Sistemas de ecuaciones lineales

6.2 Definición de matrices

6.3 Operaciones sobre matrices

NOTA: (1) Aunque en los temas: 3.3 Relaciones de equivalencia; 3.4 Definición de función; 3.5 Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas; 3.6 Función idéntica, constante, producto, inversa, etc; 3.7 Gráfica de una función; 3.8 Función valor absoluto y sus propiedades; podrían analizarse aplicaciones importantes a la química ó a la fisicoquímica, ésto no es incluido por encontrarse estos temas lo suficientemente explicados en el libro "Mathematics Technique in Chemistry". Dence.Ed. Wiley, 1975

(2) Al exponer los ejemplos enunciados en la presente tesis en el Taller de Matemáticas, se vió que no eran los más adecuados; sin embargo, estos no fueron modificados para que el lector observe más tangiblemente el desarrollo real efectuado.

CAPITULO I

"ESTRUCTURA DEL SISTEMA NUMERICO"

1.1) LOS NUMEROS NATURALES

En los remotos días en que los hombres obtenían su alimento únicamente de la caza y la recolección de frutos, surgió la necesidad de llevar un registro de sus provisiones. Contar, sumar y multiplicar fueron operaciones que crecieron en importancia a medida que los hombres se convertían en agricultores y pastores.

Los hombres ham empleado los símbolos numéricos desde hace más de setenta siglos. Con el transcurso del tiempo, inventaron nuevos métodos para escribir los números. Los sistemas de numeración evolucionaron ingeniosamente hasta llegar a nuestro sistema decimal posicional o al sistema binario de las máquinas electrónicas. Existen varias teorías y mucha incertidumbre acerca del origen de nuestros numerales, llamados numerales indoarábigos. La teoría mas ampliamente aceptada es la que dice que se originaron en la India, estos numerales fueron traídos a España en el siglo VIII o IX D.C., por los árabes o moros y difundidos más tarde por la Europa cristiana.

En esta sección nos ocuparemos de los símbolos numéricos empleados en un principio por los árabes. Al conjunto de números arábigos (indoarábigos) usados para contar, 1 caballo, 30 personas, 5 pueblos, 12 árboles, etc. los llamamos números naturales y los denotamos por $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

El cero es incluído dentro de los números naturales puesto que para representar mediante algún número la ausencia de algo, fue necesario encontrar el cero. El cero es un número natural y conocido, como un ejemplo de ello se tiene el sistema maya. Este sistema se desarrolló independientemente de las civilizaciones del viejo mundo y se cree que estuvo en uso por cinco o seis siglos antes que cualquiera de los paises asiáticos. Fue el primero que empleó el principio de valor de posición a la vez que un símbolo para el cero en un sistema de numeración, sus valores de posición eran:

20 de la unidad más baja, kines (día) constituye 1 vinal.

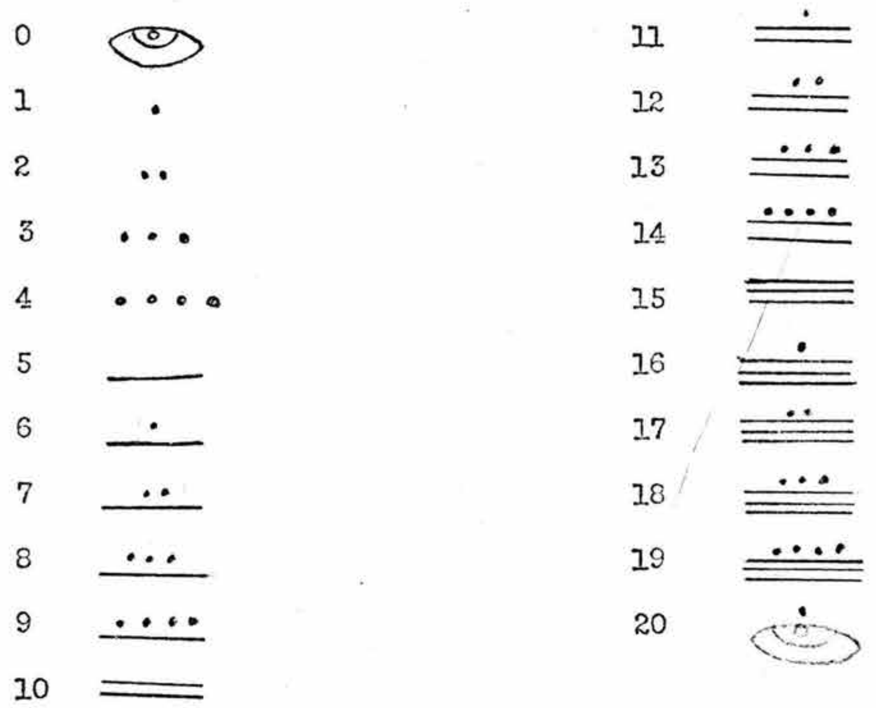
18 vinales forman un tun (360 días)

20 tunes forman un katun (7200 días)

20 katunes hacen un ciclo (144000 días)

20 ciclos hacen un gran ciclo (2 880 000 días)

Los números del cero al veinte eran representados por barras y puntos como se muestra:



PROPIEDADES DE LOS NUMEROS NATURALES

a) Si sumamos dos o más números naturales obtendremos otro número natural, ejemplo:

2 protones + 5 protones + 16 protones = 23 protones

5 átomos de uranio + 8 átomos de uranio = 13 átomos de uranio

b) De igual forma, si multiplicamos dos o más números naturales - obtendremos otro número natural, ejemplo:

Si el átomo de helio contiene dos electrones, 15 átomos de helio contendrán $15 \times 2 = 30$ electrones.

50 moles de agua contienen $50 \times 2 = 100$ átomos de hidrógeno y- $50 \times 1 = 50$ átomos de oxígeno.

c) Sin embargo, no siempre que restemos dos números naturales obtendremos otro número natural, ejemplo:

15 neutrones - 50 neutrones = ?, "- 35 neutrones" no representa algo real.

10 horas - 22 horas = ?, no es comprensible el concepto de - "- 12 horas".

d) Al dividir dos números naturales, no siempre obtendremos otro- número natural, ejemplo:

Al dividir en tres partes iguales 301 átomos, tendremos en cada parte $\frac{301}{3}$ = ?, " 100 1/3 de átomo" no es representativo.

Estos cuatro incisos nos llevan al concepto de cerradura. Se dice que un conjunto de números es cerrado con respecto a una operación cuando al combinar dos elementos del conjunto bajo dicha operación resulta un tercer elemento que pertenece a ese conjunto. Por lo tanto, el conjunto de los números naturales es cerrado respecto a la suma y la multiplicación.

e) $2H_2 + O_2 \rightleftarrows O_2 + 2H_2$

La suma de dos números naturales no depende del orden en que se sumen (Ley conmutativa de la suma).

$x + y = y + x$

4 átomos de hidrógeno + 2 átomos de oxígeno = 2 átomos de oxígeno + 4 átomos de hidrógeno.

f) $2Fe + (6Fe + Fe) \rightleftarrows (2Fe + 6Fe) + Fe$

La suma de varios números naturales es independiente de la manera en que se agrupen los números (Ley asociativa de la suma)

$x + (y + z) = (x + y) + z$

Si x es el coeficiente de 2Fe

y es el coeficiente de 6Fe

z es el coeficiente de Fe

entonces el número de átomos de fierro es

$2 + (6 + 1) = (2 + 6) + 1$

g) $4MnCO_3 + 4Ca(OH)_2 + O_2 \rightleftarrows 4CaCO_3 + 2Mn_2O_3 + 4H_2O$

La ley distributiva la expresamos de la siguiente forma:

$x(y + z) = xy + yz$

Si:

x es el subíndice del oxígeno de los compuestos $CaCO_3$ y Mn_2O_3

y es el coeficiente del compuesto $CaCO_3$

z es el coeficiente del compuesto Mn_2O_3

Entonces el número de átomos de oxígeno en los dos primeros productos de la reacción expuesta es:

$3(4 + 2) = (3)(4) + (3)(2)$

La ley conmutativa y asociativa de la multiplicación son similares a los incisos e) y f).

OBJETIVOS

1.- Hacer un breve comentario del sistema indoarábigo y del maya, así como de los números naturales.

2.- Fijar al cero como un número natural

3.- Mencionar algunas propiedades de los números naturales

4.- Usar entidades físicas que puedan ser representadas por los números naturales.

1.2) LOS NUMEROS ENTEROS

En el átomo existen principalmente tres tipos de partículas, protón, neutrón y electrón. El protón y el electrón contienen cargas iguales, pero de naturaleza distinta y convencionalmente se le agrega el signo positivo al protón y negativo al electrón. Al neutrón por contener un protón y un electrón no se le asigna signo puesto que no tiene carga.

En la molécula de agua H_2O, se observa una relación de dos átomos de hidrógeno por cada átomo de oxígeno. Como el ion hidrógeno contiene un protón mientras que el ion oxígeno contiene dos electrones desapareados, al primero le asignamos una carga de +1 y al segundo una carga de -2. Esto nos indica que el signo es algo muy utilizado y de caracter convencional. De la misma forma, si a los números naturales se les asigna un signo (el signo positivo generalmente se omite) formaremos otro conjunto al que llamaremos conjunto de los números enteros.

$$\left\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

Obsérvese que el cero carece de signo, ésto es similar con lo que sucede con el caso del neutrón o de un compuesto químico (no ión) los cuales carecen de carga.

Hay que observar que la extensión hecha no puede hacerse con ligereza, puesto que está sometida a ciertas condiciones que mencionaremos al hablar de las propiedades de los números enteros. Por ejemplo, al introducir los enteros negativos, es necesario, para que resulte una extensión de la no ción de número natural y cumpla leyes análogas, entre otras, que las operaciones que se apliquen a los números naturales sirvan para los números enteros negativos y además, se pueda extender la sustracción coherentemente. Lo mismo pasa con las notaciones; Por ejemplo, se emplean todavía para las latitudes las notaciones: 32° de latitud norte, 46° de latitud sur o las notaciones +32° y -46°. *

CALORES DE FORMACION

Cuando efectuamos una reacción química, algunas veces notamos que la temperatura de sus componentes "baja o sube"; ésto es debido a una energía térmica que se produce. El calor desprendido o absorbido en la formación de un compuesto a partir de los elementos que lo forman a una temperatura de 25°C es llamado calor de formación. Convencionalmente se adoptó el signo positivo cuando el sistema absorbe calor (reacción endotérmica) y el signo negativo cuando el sistema desprende calor (reacción exotérmica).

Al calor de formación de un elemento libre se le asigna el cero. Con lo indicado se observa que se tienen tanto números negativos como positivos y el cero. Es importante hacer notar que el calor de formación de un compuesto varía según su estado físico (Ejemplo: el calor de formación del -

* Los signos más (+) y menos (-) datan del siglo XVI. La teoría mas ampliamente aceptada es la que dice que se originaron en la India.

n-pentano C_5H_{12} en el estado gaseoso es -35 Kcal/mol, y en el estado líquido es -41 Kcal/mol *).

El calor de reacción (el cual se toma generalmente a 25°C) es igual a la suma de calores de formación de los productos menos la suma de calores de formación de los reactivos.

Ejemplo: $2C_{(s)} + O_{2\,(g)} \longrightarrow 2CO_{(g)}$

En las tablas de calores de formación obtenemos los siguientes valores.

$\Delta H_f C_{(s)}$ = calor de formación del carbono : 0 cal

$\Delta H_f O_{2\,(g)}$ = calor de formación del oxígeno : 0 cal

$\Delta H_f CO_{(g)}$ = calor de formación del monóxido de carbono: -26,000 cal

El calor de reacción es:

$$\left[2\Delta H_f CO_{(g)}\right] - \left[2\Delta H_f C_{(s)} + \Delta H_f O_{2\,(g)}\right] =$$
$$2(-26{,}000) - \left[2(0) + (0)\right] = -52{,}000 \text{ cal}$$

Como se habrá notado, los calores de formación del carbono y del monóxido de carbono los multiplicamos por 2 (cantidad en moles), debido a que los calores de formación están dados en cal/mol.

* Aunque los calores de formación no son números enteros, para la finalidad de este ensayo los tomaremos como tales.

NOTA: En una reacción partimos de ciertas sustancias denominadas reactivos para obtener otras que llamamos productos.

REACTIVOS ⟶ PRODUCTOS

Jurado asignado originalmente - según el tema.

PRESIDENTE	Héctor C. Bolivar Terrazas
VOCAL	Jorge Ludlow Landero
SECRETARIO	Andoni Garritz Ruiz
1er SUPLENTE	Jesús García Fadrique
2do SUPLENTE	Alejandro Ludlow Wiechers

Sitio donde se desarrolló el tema: Escuela Nacional de Estudios Profesionales, Cuautitlán. U.N.A.M.

Nombre y firma del sustentante: José Landeros Valdepeña

Nombre y firma del asesor del tema: M. en C. Jorge Ludlow Landero

Ejemplo: se sabe que el óxido férrico se reduce con el monóxido de carbono de la siguiente forma

$$Fe_2O_{3(s)} + 3CO_{(g)} \rightleftarrows 2Fe_{(s)} + 3CO_{2(g)}$$

$$\Delta H_r = -6,650 \text{ cal } *$$

Calcular el calor de formación del $Fe_2O_{3(s)}$

En las tablas de calores de formación encontramos:

$\Delta H_f CO_{(g)} = -26,000$ cal

$\Delta H_f CO_{2(g)} = -94,000$ cal

* ΔH_r = calor de reacción = -6,650 cal

Utilizando el concepto de calor de reacción:

$$\Delta H_r = 2\Delta H_f Fe_{(s)} + 3\Delta H_f CO_{2\ (g)} - \Delta H_f\ Fe_2O_{3\ (s)} + 3\Delta H_f CO_{(g)}$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$-6,650 = \left[2(0) + 3(-94,000)\right] - \left[H_f Fe_2O_{3\ (s)} + 3\ (-26,000)\right]$$

Desarrollando:

$$-6,650 = -204,000 - \Delta H_f\ Fe_2O_{3\ (s)}$$

Despejando:

$$\Delta H_f Fe_2O_3 = -204,000 + 6,650 = -197,350 \text{ cal}$$

Observación: puede ser recomendable introducir al estudiante al concepto de la ley de Hess después de la comprensión de este ejemplo. No se incluirá en este ensayo.

OBJETIVOS:

1.- Explicar el concepto convencional del signo

2.- Hacer una breve introducción en el manejo de los calores de formación.

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS ENTEROS

a) El conjunto de los números enteros, al igual que el conjunto - de los números naturales es cerrado bajo su operación de adición y multiplicación (estas operaciones son extensiones lógicas de los números naturales)

Ejemplo: 1.- Al sumar los calores de formación de productos o- reactivos obtenemos un número entero.

2.- Al multiplicar el calor de formación de un com - puesto por su coeficiente (cantidad de moles) obtenemos un número entero.

b) El conjunto de los números enteros es cerrado con respecto a - la operación de sustracción, en otras palabras al restar un número entero de otro obtendremos un número entero.

Ejemplo: La suma de calores de formación de los productos me - nos la suma de los calores de formación de los reactivos nos resulta otro número entero al que llamamos calor de reacción.

c) El conjunto de los números enteros y el conjunto de los núme - ros naturales contienen un elemento llamado idéntico aditivo que viene siendo el cero, el cual tiene la siguiente propiedad:

$x + 0 = 0 + x = x$ donde x es cualquier número entero

Ejemplo:

$$\Delta H_f Fe_{(s)} + \Delta H_f CO_{2(g)} = \Delta H_f CO_{2(g)}$$
$$0 + (-94{,}000) = -94{,}000$$

d) El inverso aditivo de un número entero x, denotado por -x, tie ne la siguiente propiedad:

$x + (-x) = 0$, idéntico aditico

Ejemplo:

$$CO_{2(g)} \rightleftarrows CO_{2(g)}$$

$$\Delta H_r = \Delta H_f CO_{2(g)} - \Delta H_f CO_{2(g)}$$
$$= (-94,000) - (-94,000)$$
$$= 0$$

e) Tenemos la siguiente relación de orden para el conjunto de los números enteros (ley de tricotomía)

Si $x - y > 0$, entonces $x > y$

$x - y = 0$, entonces $x = y$

$x - y < 0$, entonces $x < y$

Ejemplo: Ordenar los siguientes calores de formación

a) $\Delta H_f\ CO_{(g)}$ y $\Delta H_f CO_{2(g)}$

b) $\Delta H_f\ Fe_{(s)}$ y $\Delta H_f O_{2\ (g)}$

c) $\Delta H_f\ Fe_2O_3$ y $\Delta H_f CO_{(g)}$

a) $\Delta H_f CO_{(g)} - \Delta H_f CO_{2(g)} = -26,000 - (-94,000) = 68,000 > 0$

Por lo tanto $\Delta H_f\ CO_{(g)} > \Delta H_f CO_{2(g)}$

b) $\Delta H_f Fe_{(s)} - \Delta H_f O_{2(g)} = 0 - 0 = 0$

Por lo tanto $\Delta H_f Fe_{(s)} = \Delta H_f O_{2(g)}$

c) $\Delta H_f Fe_2O_{3(s)} - \Delta H_f CO_{(g)} = -197,350 - (-26,000) = -171,350 < 0$

Por lo tanto $\Delta H_f Fe_2O_{3(s)} < \Delta H_f CO_{(g)}$

Si denotamos los enteros negativos por:

$$-n = \{n\}\ ,\ n = 1,2,3,4,\ldots$$

El conjunto de todos los enteros será: $\big\{\{n\}\ /\ n = 1,2,3,\ldots\big\} \cup N = Z$ y es facil ver que el conjunto Z así definido satisface las propiedades anteriormente expuestas.

OBJETIVOS:

1.- Mencionar algunas propiedades del conjunto de los números enteros y ejemplificarlas con calores de formación, haciendo una analogía entre los mismos.

2.- Dar una definición informal del conjunto de los números enteros.

1.3) LOS NUMEROS RACIONALES

En los anteriores conjuntos numéricos mencionamos la cerradura - con respecto a las operaciones de adición, sustracción y multiplicación. Si- formamos un conjunto de números que incluya las anteriores cerraduras y que- sea cerrado con respecto a la división, tendremos una estructura matemática- que satisfaga las cuatro operaciones básicas.

El conjunto de los números racionales -que tiene la forma $\frac{a}{b}$ o ab^{-1} donde a y b son enteros y $b \neq 0$ - es cerrado con respecto a las cuatro operaciones básicas. Este conjunto incluye al conjunto de los números enteros - cuando $b = \pm 1$ y por lo tanto se tiene la relación siguiente:

$$N \subset Z \subset Q$$

donde Q designa al conjunto de los números racionales.

Se mencionó que $b \neq 0$, ésto es debido a que la división entre cero no está definida, por ejemplo:

Proposición	$a=b$
Multiplicando por a	$a^2 = ab$
Restando b^2	$a^2-b^2 = ab-b^2$
Factorizando	$(a + b)(a - b) = b(a - b)$
Dividiendo entre (a-b)	$a + b = b$
Sustituyendo a=b (proposición)	$a + a = a$
Sumando	$2a = a$
Dividiendo entre a	$2 = 1$?

Cuando se divide entre (a-b) de hecho se está dividiendo entre cero y la igualdad no se conserva.

FACTOR DE CONVERSION

Una relación muy conocida es por ejemplo:

$$1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos}$$

y la podemos expresar en forma de quebrado o número racional,

$$\frac{1 \text{ hora}}{60 \text{ minutos}} \quad \text{o} \quad \frac{60 \text{ minutos}}{1 \text{ hora}}$$

a ambas expresiones las llamaremos factores de conversión. Notándose que son equivalentes a la unidad.

Por ejemplo, si deseamos conocer a cuantas horas equivalen 42 minutos, utilizamos el primero de los factores de conversión de la siguiente forma:

$$42 \text{ minutos} \times \frac{1 \text{ hora}}{60 \text{ minutos}} = \frac{7}{10} \text{ hora} = 0.7 \text{ hora}$$

Ejemplos:

a) Transformar 2 m/h a m/seg

$$2 \frac{m}{h} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ seg}} = 0.000555 \text{ m/seg}$$

b) La conductividad del mercurio a 32°F es 4.8 BTU/h ft °F. ¿Cuales la conductividad del mercurio en cal/h cm °C ?

Las relaciones que necesitamos son: 1 Kcal = 4 BTU, 1 ft= 30. 48 cm, 1.8 °F = 1 °C

$$4.8 \frac{\text{BTU}}{\text{h ft °F}} = 4.8 \frac{\text{BTU}}{\text{h ft°F}} \times \underbrace{\frac{1000 \text{ cal}}{4 \text{ BTU}} \times \frac{1 \text{ ft}}{30.48 \text{ cm}} \times \frac{1.8 \text{ °F}}{1 \text{ °C}}} = 71 \frac{\text{cal}}{\text{h cm °C}}$$

Factor de conversión : $1 \frac{\text{BTU}}{\text{h ft °F}} = 14.8 \frac{\text{cal}}{\text{h cm °C}}$

En general, todas las equivalencias de unidades las podemos expresar como factores de conversión.

Existen factores de conversión específicos para cada caso, por ejemplo, la densidad del cobre a 20 °C es 8.92 g/cm^3, ésto implica que

$$8.92 \text{ g Cu} = 1 \text{ cm}^3 \text{ Cu} \qquad \text{a } 20°\text{C}$$

pero esta relación entre unidades de masa y unidades de volúmen solo se cumple para un compuesto específico y una temperatura determinada; otro ejemplo es una reacción química

$$Fe_2O_3\,(s) + 3CO\,_{(g)} \longrightarrow 2Fe\,_{(s)} + 3CO_2\,_{(g)} + 6,650 \text{ cal}$$

en la cual observamos que existen: 1 mol de Fe_2O_3 por tres moles de CO, por 2 moles de Fe, por tres moles de CO_2, por 6,650 cal, pudiéndose obtener los siguientes factores de conversión:

$$\frac{1 \text{ mol } Fe_2O_3}{3 \text{ mol CO}} \quad \text{o} \quad \frac{1 \text{ mol } Fe_2O_3}{2 \text{ mol Fe}} \quad \text{o} \quad \frac{3 \text{ moles CO}}{6,650 \text{ cal}}\text{ , etc}$$

Otros tipos de factores de conversión específicos pueden ser:

- Peso molecular

  1 mol de Fe = 56 g Fe

  1 mol de H_2SO_4 = 98 g de H_2SO_4

- El número de Avogadro

  6.023×10^{23} moléculas = 1 mol

- Tantos por cientos

- Molaridad, molalidad, etc

- Relaciones entre fórmula molecular y fórmula empírica

  y un sin fin de relaciones

Como un intento de clasificar lo mencionado anteriormente se tienen los siguientes ejemplos:

I) Si tengo 25 g de óxido férrico, de acuerdo con la reacción:

$$Fe_2O_3 + 3CO \longrightarrow 2Fe + 3CO_2 + 6,650 \text{ cal}$$

deseo conocer:

a) ¿ Cuánto bióxido de carbono se desprende ?

b) ¿ Cuánto calor ?

c) ¿ Cuántos cm^3 de Fe (suponiendo que la densidad del fierro es 7.7 g/cm^3) ?

d) ¿ Cuántas moléculas de monóxido de carbono se utilizarón ?

a) $25 \text{ g } Fe_2O_3 = 25 \text{ g } Fe_2O_3 \cdot \frac{1 \text{ mol } Fe_2O_3}{159.6 \text{ g } Fe_2O_3} \cdot \frac{3 \text{ moles } CO_2}{1 \text{ mol } Fe_2O_3} \cdot \frac{44 \text{ g } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} =$

$= 20.68 \text{ g } CO_2$

b) $25 \text{ g } Fe_2O_3 = 25 \text{ g } Fe_2O_3 \cdot \frac{1 \text{ mol } Fe_2O_3}{159.6 \text{ g } Fe_2O_3} \cdot \frac{6,650 \text{ cal}}{1 \text{ mol } Fe_2O_3} = 1041.7 \text{ cal}$

c) $25 \text{ g } Fe_2O_3 = 25 \text{g } Fe_2O_3 \cdot \frac{1 \text{ mol } Fe_2O_3}{159.6 \text{g } Fe_2O_3} \cdot \frac{2 \text{ mol } Fe}{1 \text{ mol} Fe_2O_3} \cdot \frac{56 \text{g } Fe}{1 \text{mol } Fe} \cdot \frac{1 cm^3 Fe}{7.7 \text{g} Fe} =$

$= 2.28 \ cm^3 \ Fe$

d) $25 \text{ g } Fe_2O_3 = 25 \text{g } Fe_2O_3 \cdot \frac{1 \text{ mol } Fe_2O_3}{159.6 \text{g } Fe_2O_3} \cdot \frac{3 \text{ mol } CO}{1 \text{mol } Fe_2O_3} \cdot \frac{6.023 \times 10^{23} \text{ moléc } CO}{1 \text{ mol } CO}$

$= 2.83 \times 10^{23}$ moléculas de CO

Una de las formas de expresar las concentraciones de una solución es por molaridad, molalidad o tanto por ciento.

$$M = \text{molaridad} = \frac{\text{moles de soluto}}{\text{1 litro de solución}}$$

$$m = \text{molalidad} = \frac{\text{moles de soluto}}{\text{1 Kg de solvente}}$$

donde: soluto = generalmente es un sólido o puede ser la sustancia de menor concentración

Solución = mezcla de soluto y solvente

$$\% \text{ en peso de } x = \frac{\text{Peso de } x}{\text{Peso total del sistema}} \; 100$$

de la misma forma pueden expresarse tanto por ciento en mol o tanto por ciento en volúmen.

II) Si se tienen 20g de NaCl (sal) en 1000 g de H_2O. Dar la molaridad y molalidad de la solución y el tanto por ciento en peso de los componentes. Se sabe que la densidad de la solución es 1.12 g/cm^3 a 20°C.

$$M = \frac{20 \text{ g NaCl} \times \dfrac{1 \text{ mol NaCl}}{58.5 \text{g NaCl}}}{1020 \text{g de solución} \; \dfrac{1 cm^3 \text{ solución}}{1.12 \text{ g solución}}} = 0.376 \frac{\text{mol NaCl}}{1 \text{ lt. solución}}$$

($1000 \text{ gr } H_2O + 20 \text{ g NaCl} = 1020 \text{ g de solución}$)

$$m = \frac{20 \text{ g NaCl} \times \dfrac{1 \text{ mol NaCl}}{58.5 \text{g NaCl}}}{1000 \text{ g } H_2O} = 0.342 \frac{\text{mol NaCl}}{1 \text{ Kg } H_2O}$$

$$\% \text{ NaCl} = \frac{20 \text{ g NaCl}}{1020 \text{g solución}} \times 100 = 1.96$$ (1.96g NaCl por 100g solución)

$$\% \; H_2O = \frac{1000 \text{g } H_2O}{1020 \text{g solución}} \times 100 = 98.04$$ (98.04g H_2O por 100g solución)

III) ¿Cómo se prepararían $100 cm^3$ de solución 0.1 M a partir de la solución del problema anterior ?

$$100 cm^3 \text{ sol. deseada} \times \frac{0.1 \text{ moles NaCl}}{1000 cm^3 \text{sol. deseada}} \times \frac{1000 ml \text{ sol. anterior}}{0.376 \text{ moles NaCl}} =$$

= 26.6 ml de la solución anterior

Se necesitan 26.6ml de la solución anterior y 73.4ml de agua

En un mismo compuesto podemos obtener el tanto por ciento en peso de los elementos que lo forman

$Al_2(SO_4)_3$

Al .... $27 \times 2 = 54g$

S .... $32 \times 3 = 96g$

O .... $16 \times 12 = 192g$

total 342g

$\% Al = \frac{54g}{342g} \times 100 = 15.79$

$\% S = \frac{96g}{342g} \times 100 = 28.07$

$\% O = \frac{192g}{342g} \times 100 = 56.14$

IV) Si deseamos partir a la inversa, ¿ Qué compuesto químico contiene 15.79% de Al, 28.07 de S y 56.14% O ?

Como se trata de tantos por cientos, tomamos como base de cálculo 100 gramos - si se tratara de tanto por uno, la base de cálculo sería un gramo-

Al: $15.79g\ Al \times \frac{1\ mol\ Al}{27g\ Al} = 0.585\ mol\ Al$

S: $28.07g\ S \times \frac{1\ mol\ S}{32g\ S} = 0.877\ mol\ S$

O: $56.14g\ O \times \frac{1\ mol\ O}{16g\ O} = 3.509\ mol\ O$

Dividimos estos valores entre el menor de ellos:

Al: 0.585 mol Al / 0.585 mol Al = 1 mol Al/ 1 mol Al

S: 0.877 mol S / 0.585 mol Al = 1.5 mol S/ 1 mol Al

O: 3.509 mol O / 0.585 mol Al = 6 mol O / 1 mol Al

Nuestra fórmula quedaría $Al_1S_{1.5}O_6$, pero como las relaciones moleculares en un compuesto siempre están dadas en relación de enteros, multiplicamos por 2 los subíndices para eliminar las fracciones

$$Al_2S_3O_{12} \quad o \quad Al_2(SO_4)_3$$

La fórmula así obtenida se le denomina fórmula EMPIRICA y para obtener la fórmula MOLECULAR es necesario conocer su peso molecular y la siguiente relación

$$n = \frac{\text{peso molecular de la fórmula molecular}}{\text{peso molecular de la fórmula empírica}}$$

donde n = 1, 2, 3, ...

Entonces la fórmula molecular será equivalente a n(fórmula empírica).

V) Una sustancia A contiene 54.54% C, 9.10 % H y 36.36% O; ¿ Cuáles su fórmula empírica y cuál es su fórmula molecular ? , si su peso molecular es 88.

Base de cálculo: 100 gramos

$$O: 36.36g\ O = 36.36g\ O \times \frac{1\ \text{mol de O}}{16g\ O} = 2.2725\ \text{mol O}$$

$$H: 9.18\ g\ H = 9.18g\ H \times \frac{1\ \text{mol de H}}{1g\ \text{de H}} = 9.10\ \text{mol H}$$

$$C: 54.54g\ C = 54.54gC \times \frac{1\ \text{mol C}}{12g\ C} = 4.545\ \text{mol C}$$

Dividiendo entre el menor valor

4.545 mol C / 2.2725 mol O = 2 mol C/ 1 mol O

9.10 mol H / 2.2725 mol O = 4 mol H/ 1 mol O

2.2725 mol O/ 2.2725 mol O = 1 mol O/ 1 mol O

Fórmula empírica: C_2H_4O

Peso molecular de la fórmula empírica: 44

$$n = \frac{88}{44} = 2$$

Fórmula molecular = $(C_2H_4O)_2$ = $C_4H_8O_2$

Puede ser el ácido butírico o ácido aso-butírico, entre otros.

OBJETIVOS:

1.- Mencionar la división entre cero

2.- Explicar y ejemplificar los factores de conversión, introdu - ciendo al estudiante a los cálculos de química elementales.

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS RACIONALES

a) El conjunto de los números racionales es cerrado con respecto- a las cuatro operaciones básicas.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

b) En los racionales se tiene para cada número un inverso multipli cativo -excepto para el cero- con la propiedad

$$(x)\ (x^{-1}) = 1$$

donde x: es un número racional

x^{-1}: es el inverso multiplicativo de x

Ejemplo,

El inverso multiplicativo de $\frac{2 \text{ moles de Fe}}{3 \text{ moles CO}}$ es $\frac{3 \text{ moles CO}}{2 \text{ moles Fe}}$

$$\frac{2 \text{ moles Fe}}{3 \text{ moles CO}} \cdot \frac{3 \text{ moles CO}}{2 \text{ moles Fe}} = 1$$

c) La unidad es el idéntico multiplicativo, es decir, cualquier número multiplicado por el idéntico nos da el mismo número.

$$x = (x)\ (1) = (1)\ (x)$$

Ejemplo:

$$100g\ Fe_2O_3 = 100g\ Fe_2O_3 \cdot \frac{1 \text{ mol } Fe_2O_3}{159.6g\ Fe_2O_3} = 0.627 \text{ mol } Fe_2O_3$$

El factor de conversión $\frac{1 \text{ mol } Fe_2O_3}{159.6g\ Fe_2O_3}$ es el idéntico multiplicativo, o sea es equivalente a la unidad.

d) El idéntico aditivo y el inverso aditivo en el conjunto de los racionales es el mismo al mencionado en el conjunto de los enteros.

e) Si el numerador y el denominador tienen el mismo signo, $\frac{+}{+}$ o $\frac{-}{-}$, decimos que el racional es positivo; y si tienen signos contrarios $\frac{+}{-}$ o $\frac{-}{+}$, decimos que el racional es negativo.

f) Una relación de orden similar al anillo de los enteros la encontramos en los racionales.

Si:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

OBJETIVOS:

1.- Mencionar algunas propiedades del campo de los racionales.

2.- Hacer una analogía entre los factores de conversión y los números racionales.

1.4) EL CAMPO DE LOS REALES

Un número racional $\frac{a}{b}$ puede expresarse en forma decimal al dividir a entre b. El decimal obtenido será periódico excepto si los factores primos del entero b son solo 2 o 5.

$$\frac{1}{7} = 0.142857\overline{142857} \quad *$$

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{25} = 0.04$$

De igual forma, un número de forma decimal infinita periódica representa un número racional de la forma $\frac{a}{b}$.

$$x = 0.\overline{33}$$

$$10x = 3.\overline{33}$$

$$10x - x = 3.\overline{33} - 0.\overline{33}$$

$$9x = 3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Pero cuando la decimal infinita no es periódica, este número no lo podemos representar como racional.

Ejemplo: $\sqrt{2} = 1.414213...$ no es un decimal infinito periódico. - Si quicieramos representarlo en la forma $\frac{a}{b}$, siendo éste racional irreducti -

* El guión colocado agrupa los números de la periodicidad.

Nota: se elude el caso de $1.\overline{9}$, $2.\overline{9}$, etc ble tendríamos:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$, elevando al cuadrado...

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$a^2 = 2b^2$$

Esta expresión nos indica que "a" es un número par puesto que "a^2" lo es. Si expresamos el número "a" como "2c"

$$(2c)^2 = 2b^2$$

$$4c^2 = 2b^2$$

$$2c^2 = b^2$$

ésto implica que "b" también es par, contradiciendo que el racional $\frac{a}{b}$ sea irreductible; por lo tanto $\sqrt{2}$ no es un número racional.

A los números que corresponda una decimal infinita no periódica los llamaremos irracionales.

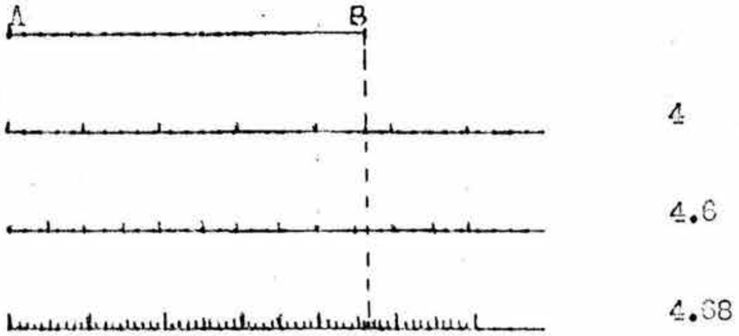
Como se habrá observado, el conjunto de los racionales contiene "huecos". En el nuevo sistema, éstos serán cubiertos por el conjunto de los números irracionales de tal manera que se forme un nuevo conjunto de números más completo al que llamaremos Reales.

El conjunto de los números reales incluirá todos los decimales periódicos o no periódicos. En el caso de los últimos, tendremos una decimal infinita que no podemos representar"exactamente".

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx 1.4\\ &\approx 1.41\\ &\approx 1.414\\ &\approx 1.4142\end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \approx 1.41421$$
$$\approx 1.414213, \text{ etc}$$

y es necesario aproximar este valor. Las aproximaciones pueden ser tan precisas como lo deseemos, ésto puede tener una analogía con la medición de una línea



Dependiendo de la precisión de la regla será la cantidad tomada y y dependiendo de los cálculos requeridos será la cantidad de decimales tomados.

Los números irracionales aparecen de muchos modos, uno de los más conocidos es en forma de radical o exponente fraccionario:

$\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[9]{4}$, etc.

Al número π se le dio una representación en forma de racional, llegándose a algunas aproximaciones, como:

En el papiro de Rhind, $\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3.1604$

En la biblia (Reyes I, 7:23; crónicas II, 4:2), $\pi = 3$

Arquímides (240 A.C.) $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$

Tsu'ch'ung - chih (480 A.C.) - chino- $\pi = \frac{355}{113}$

Bha Skara (1150 A.C) -hindú- $\pi = \frac{3927}{1250}$ y

como valores inexactos dio: $\frac{22}{7}$ y $\sqrt{10}$

Se llegó a cálculos como los efectuados por Abraham Sharp (71 cifras correctas, 1719); sin embargo, toda la especulación sobre π acabó cuando en 1767 Johann Heinrich Lambert demostró que π es irracional.

En las curiosidades relacionadas con π hay varias reglas mnemotécnicas que han sido desarrolladas con el objeto de recordar un número muy grande de cifras decimales para . En la siguiente, hecha por A. C. Orr, uno debe simplemente reemplazar cada palabra por el número de letras que cada una contiene para obtener el valor correcto de con 30 cifras decimales.

Now. I, even I, would celebrate
In rhymes unapt, the great
Inmortal Syracusan, rivaled nevermore
Who in his wondrous lore
Passed on before,
Left men his guidance
How to circles mensurate

Otro semejante es:

See, I have a rhyme
Assisting my feeble brain
Its tasks oftimes resisting

Para una cronología completa de π, ver las obras de Fues y Schepler.

De igual forma el número "e" es un número irracional.

En conclusión, el campo de los números reales constituye un conjunto "completo" con su métrica usual que incluye varios subconjuntos, a saber:

a) Conjunto de los números racionales

Conjunto de los números irracionales

b) Conjunto de los números algebraicos

Conjunto de los números trascendentes

c) Conjunto de los reales positivos

Conjunto de los reales negativos

Conjunto del elemento cero

Sobre el conjunto de los números algebraicos y el conjunto de los números trascendentes cabe hacer las aclaraciones siguientes:

1) Los números algebraicos reales son números reales x que son raíces del polinomio $a_0x^n + \ldots + a_n$, cuyos coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ son enteros.

Estos números pueden ser tanto racionales como irracionales

2) Los números trascendentes reales son números reales que no cumplen la condición anterior, o sea números irracionales que no son algebraicos. Una respuesta más aceptable la dio Liouville en 1851 al indicar un método de crear tantos números trascendentes como se quiera. Por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n$. La respuesta más satisfactoria consiste en demostrar que ciertos números encontrados naturalmente, en el análisis son trascendentes. Hermite lo hizo tomando el número "e", Lindemann demostró que π es también un número trascendente; en cambio, a pesar de la importancia de la constante de Euler

$$C = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \right) - \log n \right] = 0.577216\ldots$$

Aun no se sabe si es trascendente o algebraico.

OPERACIONES CON LOS NUMEROS REALES

Para sumar o multiplicar números reales debemos tomar aproximaciones de éstos, por ejemplo, para sumar 3.1415926535... y 2.71828..., lo haremos con números como

$$3.14 + 2.72 = 5.86$$

$$\text{ó} \quad 3.1416 + 2.7183 \doteq 5.8599 \text{ , etc.}$$

aunque no siempre es necesario obtener un valor numérico, sino que solamente se desea simplificar la expresión; éste es el caso de algunas operaciones entre reales positivos elevados a exponentes fraccionarios. Antes de los siguientes ejemplos se expondrán ciertas propiedades de estos reales:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{1/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Ejemplos:

(I) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$, si $a = \sqrt{2} = 2^{1/2}$

$a + a = 2a$

Por lo tanto $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(II) Simplificar la expresión $\dfrac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{4}}$

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = 2^{3/5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{1}{2^{2/5}} = 2^{-2/5}$$

$$(\sqrt[5]{8})\left(\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\right) = (2^{3/5})\,(2^{-2/5}) = 2^{3/5-2/5} = 2^{1/5} = \sqrt[5]{2}$$

(III) Simplificar la expresión $(5^{3/2})^{5/6}$

$$(5^{3/2})^{5/6} = 5^{3/2\,\cdot\,5/6} = 5^{5/4} = 5^{1\,+\,1/4} = 5\cdot 5^{1/4}$$
$$= 5\sqrt[4]{5}$$

(IV) $\sqrt{8} + \sqrt{35} - \sqrt{50} + 3\sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{24}$

$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{3/2} = 2^{1+1/2} = 2\cdot 2^{1/2} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{35} = \sqrt{5\cdot 7}$ no se simplifica

$\sqrt{50} = \sqrt{2\cdot 5^2} = (2\cdot 5^2)^{1/2} = 2^{1/2}\cdot 5 = 5\sqrt{2}$

$3\sqrt{2}$ no se simplifica

$\sqrt{6} = \sqrt{3\cdot 2}$ no se simplifica

$\sqrt{24} = \sqrt{2^3\cdot 3} = (2^3\cdot 3)^{1/2} = 2^{3/2}\cdot 3^{1/2} = 2^{1+1/2}\cdot\ 3^{1/2} =$

$= 2\cdot 2^{1/2}\cdot 3^{1/2} = 2(2\cdot 3)^{1/2} = 2\sqrt{6}$

Por lo tanto: $\sqrt{8} + \sqrt{35} - \sqrt{50} + 3\sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{24} =$

$= 2\sqrt{2} + \sqrt{35} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{6} - 2\sqrt{6}$

$= \sqrt{2}\,(2 - 5 + 3) + \sqrt{35} + \sqrt{6}\,(1 - 2)$

$= \sqrt{35} - \sqrt{6}$

Los radicales o números elevados a exponentes fraccionarios son comunmente usados en los cálculos químicos, un ejemplo puede ser el cálculo aproximado del radio de una molécula.

Ejemplo: ¿Cuál es el volumen aproximado que ocupa una molécula de HCl a 20°C?. Suponiendo que tiene forma cúbica, calcule la arista del cubo a)

$$1 \text{ molécula de HCl} \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{6.023 \times 10^{23} \text{ molec. HCl}} \times \frac{36.5 g \text{ HCl}}{1 \text{ mol HCl}} \times \frac{1 cm^3 \text{ HCl}}{1.47 g \text{ HCl}} =$$

$$= 41.225 \times 10^{-24} \ cm^3$$

b) Si el volumen de un cubo es L^3, donde L es la arista, entonces:

$$L = \sqrt[3]{41.225 \times 10^{-24} \ cm^3} \simeq 3.45 \times 10^{-8} \ cm = 3.48 \ \text{Å}$$

Los radios de moléculas así obtenidos son muy inexactos, pero dan una idea vaga de la razón del radio, además de un cálculo intuitivo sobre el rango del radio de la molécula.

OBJETIVOS:

1.) Notar la importancia del conjunto de los números reales, así como las aproximaciones de los mismos.

2.) Mencionar algunas propiedades de los números irracionales.

3.) Exponer un ejemplo sobre la utilización de radicales y despertar su interés en ellos.

PROPIEDADES DE LOS REALES

a) El campo de los reales incluye a todos los conjuntos numéricos mencionados

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

$$I \subset R$$

donde: N: Conjunto de los números naturales

Z: Conjunto de los números enteros

Q: Conjunto de los números racionales

I: Conjunto de los números irracionales

R: Conjunto de los números reales

b) Los números reales contienen el idéntico aditivo $\{0\}$, el idéntico multiplicativo $\{1\}$ y para cada número real un inverso aditivo y un inverso multiplicativo excepto el cero.

c) Un número real toma el signo del racional más cercano.

d) Los reales son ordenados, es decir, cumplen la relación de orden ya expuesta.

Si $a - b > 0$ entonces $a > b$

$a - b = 0$ entonces $a = b$

$a - b < 0$ entonces $a < b$

donde a y b son números reales.

e) Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los puntos de una recta

Por lo mencionado podemos concluir que el campo de los reales es ordenado y completo y por lo tanto con una estructura matemática de mayor amplitud.

OBJETIVOS:

1.) Resumir y exponer las propiedades de los números reales.

CAPITULO II

"SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES"

2.1) PLANTEAMIENTO DE UNA ECUACION

Plantear una ecuación es expresar por medio de símbolos matemáticos una condición formulada en palabras. Es traducir el lenguaje llano a fórmulas matemáticas. Las dificultades que podamos tener al plantear la ecuación de un problema son similares a las que nos ofrece una traducción.

Para traducir una frase del español al inglés dos cosas son necesarias: primera, comprender a fondo la frase española y segunda, estar familiarizado con las formas de expresión propias del inglés. La situación es muy semejante cuando se trata de expresar en símbolos matemáticos una condición propuesta en palabras. Se requiere el comprender a fondo la condición y estar familiarizado con las formas de expresión matemática.

Los principales elementos de un"problema por resolver" son: la incógnita, los datos y la condición. Para encontrar la solución hay que conocer de modo preciso a estos elementos. A continuación se exponen una lista de preguntas y sugerencias concernientes a dichos elementos.

¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?

Distinga las diversas partes de la condición

Encuentre la relación entre los datos y la incógnita

Observe la incógnita, trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita.

Piense cómo puede variar la incógnita ; ¿ Puede deducir algún elemento útil?; ¿ Podría pensar en otros datos que le permitieran determinar la incógnita?; ¿ Podría cambiar la incógnita y/o los datos de tal manera que la nueva incógnita y/o los datos estuviesen más relaciona - dos entre sí?.

¿ Ha empleado todos los datos?; ¿ Ha utilizado la condición por completo?.

Se pueden clasificar los problemas por resolver en: problemas de rutina y problemas prácticos; los primeros son problemas que se pueden resolver ya sea sustituyendo simplemente nuevos datos en lugar de - los de algún problema resuelto, ya sea siguiendo paso a paso y sin ninguna originalidad la traza de algún viejo ejemplo. Empleándolos en gran número pueden ser útiles en la enseñanza de las matemáticas, pero sería imperdonable proponerle a los alumnos exclusivamente problemas de este tipo. Los segundos difieren de los anteriores en diversos aspectos, como los conocimientos necesarios y los conceptos empleados que son mas complejos y están definidos con menor claridad en los problemas prácticos que en los matemáticos. Sin embargo, los razonamientos y principales métodos para resolverlos son esencialmente los mismos.

En este capítulo trataremos de exponer problemas prácticos - que incluyan problemas de rutina.

OBJETIVOS

1) Explicar brevemente el concepto "plantear una ecuación".

2) Dar argumentos sobre la importancia del planteamiento de una ecuación.

3) Enunciar los principales elementos de un problema para su localización.

4) Explicar algunas diferencias básicas entre los problemas de rutina y los problemas prácticos, notándose la necesidad de explicar en clase estos últimos.

2.2) ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

En el capítulo anterior se menciona ¿Cuánto calor se desprende de ...?, ¿Cuál es el calor de reacción de ...?, ¿Cuánto es ...?, ¿Cuántos cm^3 de ...?, ¿Cuántas moléculas de ...?, ¿Cuál es el tanto por ciento de ?, etc; el valor numérico que deseamos conocer los denotamos por alguna letra: n, y, x, la inicial de tu nombre, etc. Generalmente se utiliza la letra x.

Ejemplo: Cuál es el calor de reacción de

$$C_{(s)} + \frac{1}{2} O_2\,_{(g)} \longrightarrow CO_{(g)}$$

Se sabe que el calor de reacción es igual al calor de formación de los productos menos el calor de formación de los reactivos.

$$\text{Calor de reacción} = x = \Delta H_f(CO) - \Delta H_f(C) + \frac{1}{2}\Delta H_f(O_2)$$

$$x = -26,416 - (0 + 0) = -26,416 \text{ cal.}$$

Si en una ecuación se tienen cantidades conocidas excepto una, la cual tiene como exponente la unidad se dice que es una ecuación de primer grado con una incógnita.

GASES IDEALES

Un gas es ideal cuando se supone:

a) Que el volúmen de sus moléculas es despreciable en comparación con el volúmen que ocupa el gas.

b) Que su interacción molecular es casi nula.

Para el comportamiento de un gas ideal, Boyle observó que al aumentar la presión ejercida sobre un gas a temperatura constante, el volúmen del gas disminuía, manteniéndose constante el producto de la presión y el volúmen.

$$PV = K_T$$

donde: P es la presión

V es el volúmen

K_T es una constante que depende de la temperatura

Gay Lussac y Charles obtuvieron:

$$V = K_P T$$

$$P = K_V T$$

donde: K_P es una constante que depende de la presión

K_V es una constante que depende del volúmen.

Por ejemplo, si tenemos 60 cm^3 de CO_2 a 1 atm y 25°C y aumentamos la presión a dos atmósferas manteniendo la misma temperatura, ¿ Cuál será el volúmen final?

$$K_T = PV = (1atm)(60 cm^3) = 60 \text{ atm-cm}^3$$

$$K_T = P'V' = (2 \text{ atm}) V' = 60 \text{ atm-cm}^3$$

$$V' = \frac{60 \text{ atm-cm}^3}{2 \text{ atm}} = 30 \text{ cm}^3 \text{ de } CO_2$$

Si despejamos K_T, K_P y K_V de las relaciones anteriores tendremos

$$K_T = VP = V'P'$$

$$K_P = \frac{V}{T} = \frac{V'}{T'}$$

$$K_V = \frac{P}{T} = \frac{P'}{T'}$$

$$\sqrt{K_T K_P K_V} = K = \sqrt{(VP)(V/T)(P/T)} = \sqrt{(V'P')(V'/T')(P'/T')}$$

$$K = \sqrt{\frac{V^2P^2}{T^2}} = \sqrt{\frac{(V')^2(P')^2}{(T')^2}}$$

$$K = \frac{VP}{T} = \frac{V'P'}{T'}$$

Por lo tanto $PV = KT$ o $P'V' = KT'$

La constante K está definida para una mol por el factor de con - versión R, al cual se le conoce como la constante universal de los gases. - Para n moles:

$$PV = nRT$$

Una mol de cualquier gas en condiciones estandar (0°C y 1 atm) o cupa un volúmen de 22.4 litros, con estos datos es posible obtener un valor numérico para la constante R.

$$R = \frac{PV}{nT} = \frac{(1atm)(22.4lt.)}{(1mol)(273°K)} = 0.082 \text{ l-atm/°K-mol}$$

Así como despejamos la constante R, lo podemos hacer para las variables P, V, n, T.

$$P = \frac{nRT}{V} \qquad n = \frac{PV}{RT}$$

$$V = \frac{nRT}{P} \qquad T = \frac{VP}{nR}$$

OBJETIVO:

1) Despejar una variable de una fórmula sencilla dada.

PRESIONES PARCIALES

Dalton nos dice que a temperatura y volúmen constante, la presión ejercida por una mezcla de gases en un sistema es igual a la suma de las presiones parciales que cada gas ejercería si fuera el único existente en el sistema.

Este enunciado lo podemos expresar matemáticamente de la siguiente forma:

$$P_T = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

donde:

P_T = presión total del sistema

P_1 = presión parcial del primer gas

P_2 = presión parcial del segundo gas

...

P_n = presión del n-ésimo gas

Como $P_i = \frac{n_i RT}{V}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$P_T = \frac{n_1 RT}{V} + \frac{n_2 RT}{V} + \frac{n_3 RT}{V} + \ldots + \frac{n_n RT}{V}$$

$$= \frac{RT}{V} (n_1 + n_2 + \ldots + n_n)$$

$$= \frac{RT}{V} n_T$$

donde n_T es el número total de moles, $n_1 + n_2 + \ldots + n_n$

Si se divide la presión parcial del i-ésimo componente entre la presión total, tenemos

$$\frac{P_i}{P_T} = \frac{n_i RT/V}{n_T RT/V} = \frac{n_i}{n_T} = N_i$$

donde N_i = razón del número de moles del i-ésimo componente en - tre el número de moles totales

= razón de la presión parcial del i-ésimo componente en tre la presión total

= fracción molar del i-ésimo componente

Por lo tanto $P_i = N_i P_T$

o sea, para obtener la presión parcial del iésimo componente, se multiplica la fracción mol de este componente por la presión total.

La suma de las fracciones molares de todos los componentes es:

$$N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_n = \frac{n_1}{n_T} + \frac{n_2}{n_T} + \ldots + \frac{n_n}{n_T}$$

$$= \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_n}{n_T} = \frac{n_T}{n_T}$$

$$= 1$$

Por lo tanto $N_i \leq 1$

Ejemplo: Se tienen cuatro recipientes de volúmen V a una temperatura T; el primero contiene 20 moles de hidrógeno a 0.2 atm, el segundo contiene metano a 0.5 atm, el tercero bióxido de carbono a 2 atm y el último, etano a 1 atm. a) ¿Qué presión se tendría si se los traslada a un solo recipiente de volúmen V ? b) Utilizando las fracciones molares, ¿Qué cantidad de moles de cada componente hay en los tres últimos recipientes?

a)
$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$
$$= 0.2 + 0.5 + 2 + 1$$
$$= 3.7 \text{ atm}$$

b)
$$N_1 = \frac{P_1}{P_T} = \frac{0.2 \text{ atm}}{3.7 \text{ atm}} = 0.0541$$

$$N_2 = \frac{P_2}{P_T} = \frac{0.5 \text{ atm}}{3.7 \text{ atm}} = 0.1351$$

$$N_3 = \frac{P_3}{P_T} = \frac{2 \text{ atm}}{3.7 \text{ atm}} = 0.5405$$

$$N_4 = \frac{P_4}{P_T} = \frac{1 \text{ atm}}{3.7 \text{atm}} = 0.2703$$

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1.0$$

$$N_1 = \frac{n_1}{n_T} \qquad n_T = \frac{n_1}{N_1} = \frac{20 \text{ moles}}{0.0541} = 369.69 \text{ moles}$$

La cantidad de moles de cada componente es:

$n_2 = N_2 n_T = (0.1351)(369.69) = 49.94$ moles de metano

$n_3 = N_3 n_T = (0.5405)(369.69) = 199.82$ moles de bióxido de carbono

$n_4 = N_4 n_T = (0.2703)(369.69) = 99.93$ moles de etano

OBJETIVOS:

1) Expresar matemáticamente un enunciado

2) Desarrollar matemáticamente un planteamiento sencillo

3) Aplicar el planteamiento a problemas químicos.

VAN DER WAALS

Como la ecuación de los gases ideales dista (en la mayoría de los casos) de la realidad, Van der Waals propuso a fines del siglo XIX una ecuación que lleva su nombre

$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde: $\frac{n^2a}{V^2}$ = presión debida a la interacción molecular

nb = volumen ocupado por las moléculas del gas

a y b = constantes características de cada gas.

Ejemplo: Que presión tiene un recipiente de dos litros que contiene 40 gramos de oxígeno a 25°C. Los valores de las constantes de Van der Waals para el oxígeno son, a = 1.362 atm-lt^2/mol^2 y b = 0.03186 lt/mol

W = peso = 40g.

T = temperatura = (25 + 273)°K = 298°K

V = volumen = 2 litros

R = constante de los gases = 0.082 atm-lt/°K-mol

$$n = \frac{\text{peso en gramos}}{\text{peso molecular}} = \frac{40g.}{32g/mol} = 1.25 \text{ mol}$$

Si le asignamos la letra x a la propiedad no conocida y sustituímos los datos en la ecuación

$$\left[x + \frac{(1.362)(1.25)^2}{4}\right]\left[2 - (1.25)(0.03185)\right] = (1.25)(0.082)(298)$$

Aparentemente se observa muy complejo el despejar la incógnita x, pero si eliminamos los signos de agrupación en el siguiente orden

( ) : "paréntesis circular" o "paréntesis", agrupa operaciones sencillas.

[ ] : "paréntesis rectangular o corchete", agrupa paréntesis en su interior

{ } : "llave", agrupa corchetes que a su vez contienen paréntesis

se tendría:

$$\left[x + \frac{2.128}{4} \right] \left[2 - 0.0398 \right] = 30.545$$

$$\left(x + 0.532 \right) \left(1.96 \right) = 30.545$$

$$x + 0.532 = \frac{30.545}{1.96} = 15.584$$

$$x = 15.584 - 0.532$$

$$x = 15.052$$

Como x nos representa la presión en atmósferas,

P = 15.052 atm

OBJETIVOS:

1) Hacer uso de los signos de agrupación en el planteamiento y desarrollo de un problema

2) Asignar la letra x a la incógnita o dato desconocido de un problema.

2.3) SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas son del tipo:

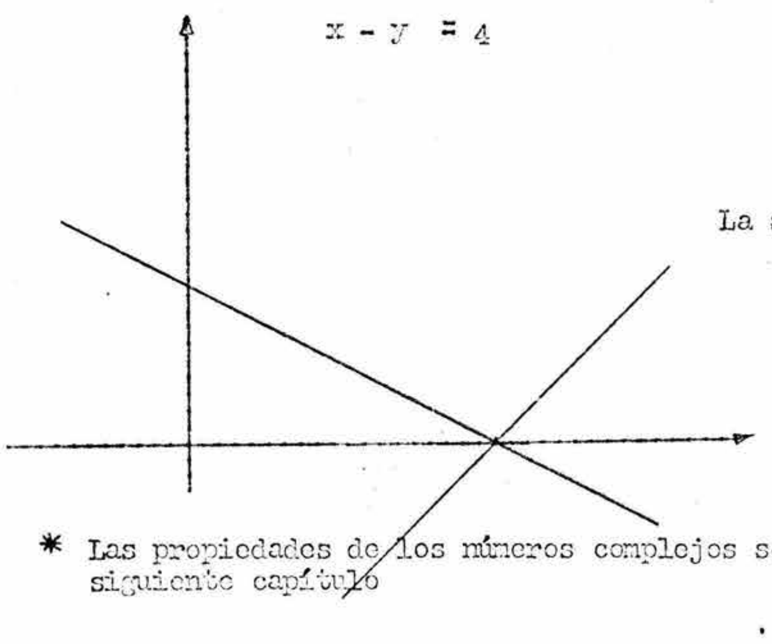
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = k_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = k_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = k_m$$

Los coeficientes a_{ij} de las incógnitas x_j y los términos-independientes k_i se supondrán que son números reales aunque todo lo - que se diga valdrá para el caso en que dichos números se tomen del campo de los números complejos o en general, de un campo arbitrario.*

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden: a) tener solución única , b) tener solución múltiple, o c) no tener solución

Ejemplo: a) $x + 2y = 4$

$x - y = 4$



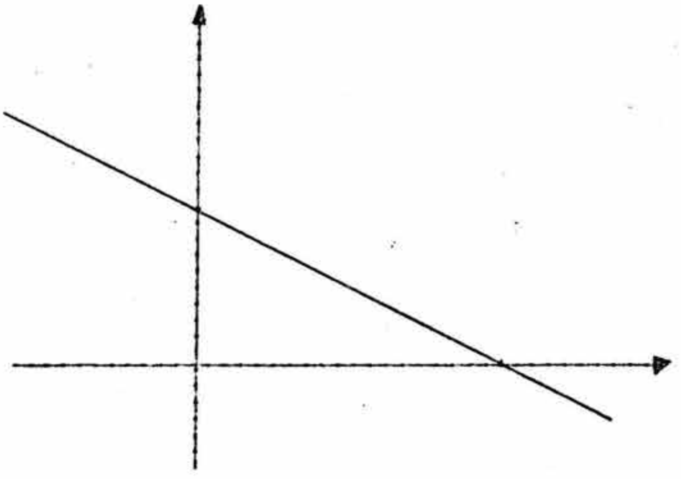
La solución es única y es

(4,0)

* Las propiedades de los números complejos son enunciadas en el siguiente capítulo

b) $x + 2y = 4$

$2x + 4y = 8$



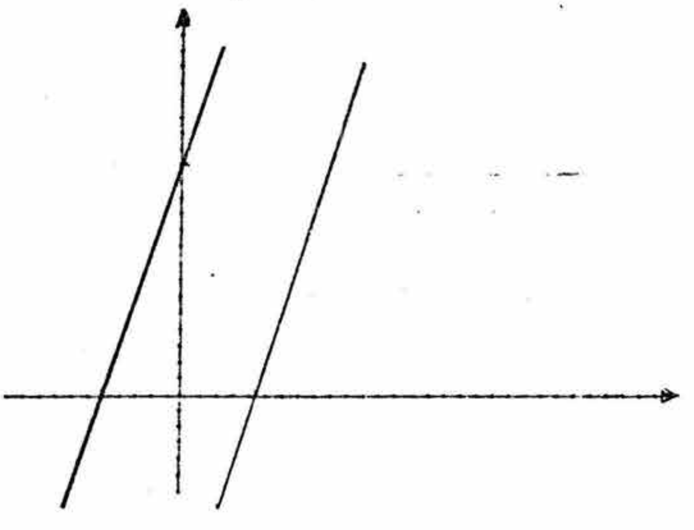
La solución puede ser:

$(0,2),(1,3/2),(4,0),\ldots$

$,\ \ldots\ (t,\frac{4-t}{2}),\ldots$

c) $3x - y = -3$

$3x - y = 3$



No tiene solución

La resolución de un sistema de ecuaciones se puede llevar a cabo por distintos métodos y sobre ellos nos ocuparemos en esta sección.

BALANCEO DE REACCIONES QUIMICAS Y EL METODO DE SUMA Y RESTA PARA SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS

Uno de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas observa gran similitud con el balanceo de reac ciones químicas, esta similitud nos ayudará a encontrar una analogía mas entre las disciplinas matemáticas y las químicas.

DEFINICION: "El número de oxidación" de un elemento es el poder de combinación o valencia con signo.

Por ejemplo, en el agua H_2O, el hidrógeno tiene un poder de combinación de uno y el oxígeno de dos (hay dos átomos de hidrógeno por cada átomo de oxígeno). Si le asignamos al poder de combinación del hidrógeno el signo positivo y al del oxígeno el signo negativo tendremos:

$$\underset{\text{hidrógeno}}{2\,(+1)} + \underset{\text{oxígeno}}{1\,(-2)} = 0$$

Nótese que la suma del número de oxidación de cada uno de los elementos que forman un compuesto es cero. Por tal razón cuando se tenga una molécula de un solo elemento, a éste se le asignará el número de oxidación cero.

El balancear una reacción química equivale a balancear el número de átomos de los reactivos con el de los productos, o viceversa. Por ejemplo:

$H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$ Reacción no balanceada

$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ Reacción balanceada

Se dice que un elemento se "oxida" cuando aumenta su número de oxidación y se "reduce" cuando lo disminuye; ésto quiere decir que en un caso pierde electrones y en el otro los gana.

Ejemplo: La obtención del óxido de aluminio a partir de los e lementos que lo forman se representa por la reacción

$$Al_{(l)} + O_{2(g)} \longrightarrow Al_2O_3$$

si colocamos en la parte súperior derecha el número de oxidación de cada elemento

$$Al^0 + O_2^0 \longrightarrow Al_2^{+3}O_3^{-2}$$

Es fácil observar que:

$Al^0 \rightarrow Al^{+3}$, el aluminio se oxidó en tres

$O^0 \longrightarrow O^{-2}$, el oxígeno se redujo en dos

por lo tanto $\quad Al^0 \rightleftharpoons Al^{+3} + 3\,e^- \,\ldots\ldots\ldots\, (1)$

$\qquad O^0 \rightleftharpoons O^{-2} - 2\,e^- \,\ldots\ldots\ldots\, (2)$

como la molécula de oxígeno es diatómica, multiplicaremos por dos la e - cuación (2).

$$O_2^0 \rightleftharpoons 2O^{-2} - 4\,e^- \,\ldots\ldots\ldots\, (3)$$

las ecuaciones (1) y (3) nos darán la ecuación original de la siguiente-manera

$$4\{Al^0 \rightleftharpoons Al^{+3} + 3\,e^-\} = 4Al^0 \rightleftharpoons 4Al^{+3} + 12\,e^-$$

$$3\{O_2^0 \rightleftharpoons 2O^{-2} - 4\,e^-\} = 3O_2^0 \rightleftharpoons 6O^{-2} \cancel{-12\,e^-}$$

sumando las dos reacciones se eliminan los electrones y se obtiene la e-cuación original balanceada

$$4Al^0 + 3O_2^0 \rightleftharpoons 4Al^{+3} + 6O^{-2}.$$

$$4Al + 3O_2 \rightleftharpoons 2\,Al_2O_3$$

Así como se eliminaron los electrones de las ecuaciones (1) y (2), se elimina una de las incógnitas en un sistema de dos ecuaciones -

con dos incógnitas.

Ejemplo: $ax + by = c$

$dx + ey = f$

supóngase que la "y" nos representa electrones, entonces multiplicaremos la primera ecuación por "e" y la segunda por "-b"

$$(ae)x + (be)y = ce$$

$$(-bd)x + (-be)y = -bf$$

sumando las dos ecuaciones

$$(ae - bd)\,x = ce - bf$$

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

Este procedimiento es comunmente llamado "suma y resta" y es análogo en su desarrollo al método de balanceo de reacciones expuesto.

OBJETIVOS

1) Hacer una introducción en el método de oxido-reducción para el balanceo de reacciones químicas

2) Observar una analogía entre el método expuesto para balancear reacciones químicas y el de suma y resta.

MATRICES

Llamaremos MATRIZ a un arreglo rectangular de números. Ejemplos de matrices son los arreglos de números que acompañan a un sistema-de ecuaciones, o a una transformación lineal, o a una dependencia de vectores, etc. Sobre los primeros nos ocuparemos en el siguiente tema.

Ejemplo: A es una matriz que tiene tres renglones y cuatro columnas

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$$

(donde a, b, ..., l son números)

se le llama matriz de "tres por cuatro" o "3x4". En general una matriz de m renglones y n columnas se le llama matriz mxn, siendo m y n las dimensiones de la matriz.

Si A es una matriz, entonces la matriz traspuesta de A -se designa por A^T- es la matriz que intercambia el renglón i-ésimo por la columna i-ésima, por ejemplo, la traspuesta de la matriz 3x4 mencionada es

$$A^T = \begin{pmatrix} a & e & i \\ b & f & j \\ c & g & k \\ d & h & l \end{pmatrix}$$

Una matriz mxn para la cual m = n se llama matriz cuadrada, por ejemplo, la matriz 4x4,

$$B = \begin{pmatrix} \underline{a} & b & c & d \\ e & \underline{f} & g & h \\ i & j & \underline{k} & l \\ m & n & o & \underline{p} \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada. En este tipo de matrices, los elementos de la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha constituyen lo que se llama "diagonal principal". Veanse elementos subrrayados.

Una matriz cuadrada para la cual los elementos que se encuentran debajo de la diagonal son cero, se llama "matriz triangular", por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \text{ etc}$$

Si en la matriz cuadrada todos los elementos que no se encuentran en la diagonal son cero se le llama matriz diagonal, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La multiplicación matricial se lleva a efecto, multiplicando el renglón i-ésimo de la primera matriz por la columna j-ésima de la segunda matriz, elemento a elemento, sumamos las multiplicaciones efectuadas y los colocamos en el i-ésimo renglón j-ésima columna de una nueva matriz, la cual representará la multiplicación de las anteriores. Esta operación la efectuamos para todos los renglones de la primera matriz con cada columna de la segunda matriz.

Ejemplo: Efectuar el producto A . B y B . A si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2)(1)+(3)(0) & (2)(2)+(3)(1) & (2)(3)+(3)(2) & (2)(4)+(3)(3) \\ (1)(1)+(0)(0) & (1)(2)+(0)(1) & (1)(3)+(0)(2) & (1)(4)+(0)(3) \\ (-1)(1)+(-2)(0) & (-1)(2)+(-2)(1) & (-1)(3)+(-2)(2) & (-1)(4)+(-2)(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 12 & 17 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -4 & -7 & -10 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz A es (3 x 2) la matriz B es (2 x 4) y el producto es $(\underline{3} \times 2) \cdot (2 \times \underline{4}) = (3 \times 4)$, es decir, que la resultante del producto matricial tiene las dimensiones :

(número de renglones de la primera matriz x número de columnas de la segunda matriz)

y el número de columnas de la primera matriz concuerda con el número de renglones de la segunda matriz.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(2)+(2)(1)+(3)(-1)+(4)(?) \\ \\ \end{pmatrix}$$

en este orden, el producto no puede efectuarse porque no existe el produc to elemento a elemento. Nótese que no concuerda el número de columnas de la primera matriz con el número de renglones de la segunda matriz.

Con este ejemplo, podemos concluir que el producto no es conmutativo

$$A.B = B.A$$

y se puede sospechar que no son válidas para las matrices las propiedades comunes de los sistemas numéricos. En consecuencia, se hace necesario investigar cuidadosamente las propiedades de la multiplicación matricial. (Vease "Matemáticas universitarias", Britton, Kriegn y Rutland, Tomo II)

Para concluir esta breve explicación sobre las propiedades de las matrices, mencionaremos que una "matriz idéntica" es una matriz diagonal (los elementos de la diagonal iguales a la unidad) que cumple la siguiente igualdad

$$A \cdot I = A, \text{y/o} \quad I \cdot A = A$$

siendo A una matriz cualesquiera. Si A es una matriz cuadrada se cumplen las dos propiedades. Ejemplos de matrices idénticas son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ etc}$$

Ejemplo: Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Ver que se pueden cumplir las dos igualdades mencionadas mediante una elec ción adecuada de las dimensiones de la matriz idéntica.

$$A \cdot I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = A$$

$$I_{3x3} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = A$$

OBJETIVOS: .-

1.- Exponer algunos tipos de matrices

2.- Explicar brevemente la multiplicación matricial así como sus propiedades.

RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR MATRICES

Cualquier sistema de ecuaciones puede ser representado por ma trices, copiando los coeficientes de las incógnitas, las incógnitas y los términos independientes del siguiente arreglo

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = k_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = k_m \end{array}$$

quedaría

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ k_m \end{pmatrix}$$

matriz de los coeficientes $(m \times n)$	matriz de las incógnitas $(n \times 1)$	matriz de los términos independientes $(m \times 1)$

(Obsérvese que al efectuar el producto matricial e igualar renglón a renglón las dos matrices resultantes se obtiene el sistema de ecuaciones original).

Otra manera de representar el sistema de ecuaciones es por la "matriz aumentada" que está representada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & k_m \end{pmatrix}$$

Si resolvemos simultáneamente un sistema de ecuaciones por su representación normal y por su representación matricial notaremos una gran similitud.

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

multiplicando la segunda ecuación por "a"

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ (ad)x + (ae)y &= af \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ ad & ae \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ af \end{pmatrix}$$

sumando "- d veces" la primera ecuación a la segunda

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ (ae - bd)y &= af - cd \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ae-bd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ af-cd \end{pmatrix}$$

Matriz triangular

multiplicando la primera ecuación por "ae-bd"

$$\begin{aligned} a(ae-bd)x + b(ae-bd)y &= c(ae-bd) \\ (ae-bd)y &= af-cd \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a(ae-bd) & b(ae-bd) \\ 0 & ae-bd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(ae-bd) \\ af-cd \end{pmatrix}$$

Sumando "-b veces" la segunda ecuación a la primera

$$\begin{aligned} a(ae-bd)x &= a(ce-bf) \\ (ae-bd)y &= af-cd \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a(ae-bd) & 0 \\ 0 & ae-bd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(ce-bf) \\ af-cd \end{pmatrix}$$

matriz diagonal

dividiendo la primera ecuación entre "a(ae-bd)" y la segunda ecuación entre "ae-bd"

$$\begin{aligned} x &= \frac{ce-bf}{ae-bd} \\ y &= \frac{af-cd}{ae-bd} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ce-bf}{ae-bd} \\ \frac{af-cd}{ae-bd} \end{pmatrix}$$

Matriz idéntica

Efectuando la multiplicación matricial indicada

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ce-bf}{ae-bd} \\ \frac{af-cd}{ae-bd} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{ce-bf}{ae-bd} \\ y &= \frac{af-cd}{ae-bd} \end{aligned}$$

Las operaciones entre renglones en una matriz las denotaremos por :

1) $R_{i,j}$ Intercambio del i-ésimo y j-ésimo renglón

2) $R_i(x)$ Multiplicación del i-ésimo renglón por un número x diferente de cero.

3) $R_{i,j}(x)$ Adición de x veces el j-ésimo renglón al i-ésimo renglón

Ejemplo: Por error se mezclaron dos frascos que contenían distinta composición; uno de los frascos mostraba la etiqueta "15% Zn, 40% Pb" y el otro mostraba la etiqueta "30% Zn y 10% Pb". ¿ Es posible conocer la composición de la mezcla con solo analizar uno solo de los elementos ?

Un dato que se puede conocer es el peso de la muestra, supóngase que es de 785 gramos. Si se le asigna la letra "x" al peso del primer frasco y la letra "y" al peso del segundo frasco, entonces

$$x + y = 785 \text{ gr. } \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

La cantidad de cinc en los frascos era: 0.15x en el primer frasco y 0.30y en el segundo. La cantidad de plomo era: 0.40x en el primer frasco y 0.10y en el segundo frasco (si no se comprende, ver factores de conversión en la sección de números racionales)

Nos preguntan que si conociendo la composición de un elemento es posible encontrar la del restante. Supóngase que se analizó cinc, encontrándose con que la mezcla contiene 20% de este elemento, o sea

$$(0.20)(785) = 157 \text{ gramos de zinc en la mezcla}$$

con este dato es posible encontrar una segunda ecuación

(gramos de cinc en el primer frasco) + (gramos de cinc en el segundo frasco)=

= (gramos de cinc en la mezcla)

$$0.15x + 0.30y = 157 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

el sistema de ecuaciones es

$$x + y = 785 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$0.15x + 0.30y = 157 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

Si se resuelve por matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.15 & 0.30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 785 \\ 157 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{2,1}(-0.15)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 785 \\ 39.25 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2(1/0.15)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 785 \\ 261.7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{1,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 523.3 \\ 261.7 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $x = 523.3$ gramos (primer frasco)

$y = 261.7$ gramos (segundo frasco)

Si se efectua un balance de matería para el plomo, en forma - similar a la del cinc:

(gramos de plomo en el primer frasco) + (gramos de plomo en el segundo frasco)

= gramos de plomo en la mescla

$$0.40x + 0.10y = (\text{tanto por ciento de plomo})\cdot 785 \;\dots\dots\dots \quad (3)$$

$$(0.40)(523.3) + (0.10)(261.7) = 785\ z$$

$$209.32 + 26.17 = 785\ z$$

$$235.49 = 785\ z$$

$$Z = \frac{235.49}{785} = 0.30$$

El tanto por ciento de plomo es <u>30</u>.

Para rectificar nuestros cálculos, se hará un balance de mate ria del material no deseado.

Primer frasco	Segundo frasco	Tercer frasco (mezcla)
15% Zn	30% Zn	20% Zn
40% Pb	10% Pb	30% Pb
45% resto	60% resto	50% resto
523.3 gramos	261.7 gramos	785 gramos

Resto:

$$(0.45)(523.3) + (0.60)(261.7) = (0.50)(785)$$

$$235.5 + 157 = 392.5$$

$$392.5 = 392.5$$

OBSERVACIONES: a) En la resolución de este ejemplo se planteó un sistema de ecuaciones que no proporcionaba directamente la respuesta, sino que la solución del problema sirvió para plantear un segundo sistema (ecuación (3)) siendo el tanto porciento la incógnita de éste; en muchos casos es necesario conocer otros resultados antes de encontrar la solución del problema, por ejemplo, si nos encontraramos en el primer piso de una casa y deseáramos salir a la calle, lógicamente no saltaríamos por la ventana sino que primero bajaríamos por la escalera y luego saldríamos; de igual forma, primero conocimos los pesos de los frascos y posteriormente se obtuvo el tanto por ciento de plomo.

b) Es importante que al obtener un resultado, lo verifiquemos, y de ser posible mediante el uso de otra ecuación o cambiando datos.

c) ¿Ha progresado usted? ¿Cuál es el logro esencial? He ahí una pregunta que nos podemos formular cuando resolvemos un problema. El paso por dar después para pasar de dichos pasos concretos a una descripe ción general no es del todo cómoda. Y sin embargo, hay que darlo si queremos llevar suficientemente lejos el estudio de la heurística y sacar en claro lo que constituye en general el progreso y logro en el transcurso de la solución de un problema.

Gran número de estas preguntas y sugerencia tienen por objeto directo la movilización de los conocimientos anteriormente adquiridos. Existen situaciones típicas en las que creemos haber reunido el material conveniente -como es el caso del último ejemplo- y en las que buscamos "organizar" mejor lo que hemos movilizado o consideramos no haber reunido aun suficiente material. Nos preguntamos: ¿ Le hace falta introducir algún elemento auxiliar para poder utilizarlo?; ¿ La condición es completa? ¿Ha tenido usted en cuenta todas las nociones esciales que comportaba el problema?. Ciertas preguntas tienen por objeto directo la variación del problema; ¿ Podría enunciar el problema de modo diferente?¿Podría enunciarlo todavía en otra forma?.

Las preguntas y sugerencias de nuestra lista no mencionan el progreso en la marcha hacia la solución, pero de hecho todas apuntan a dicha idea. (Varios de estos puntos se tratan más a fondo en el artículo "Acta Psychologica" Vol 4 (1938), Pags 113-170 de G. Polya).

OBJETIVOS:

1.) Hacer mención de la representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales. Así como una notación usada para las operaciones entre renglones.

2.) Observar una analogía entre el método de suma y resta y la resolución de una matriz.

3.) Mostrar un ejemplo que carece de suficientes datos y a base de razonamientos poder encontrarlos.

4.) Exponer algunas preguntas de interés sobre el progreso y logro alcanzado en la resolución de un problema.

LA MATRIZ ESCALONADA

Se dice que una matriz es escalonada si:

a) Un renglón nulo está debajo de un renglón no nulo.

b) Cada renglón no nulo tiene al uno como primer elemento diferente de cero.

c) Cada primer uno está colocado a la derecha del primer uno del renglón anterior.

d) En lugar del uno puede estar colocado cualquier número diferente de cero; aunque es común el tener al número uno encabezando el renglón.

Procedimiento:

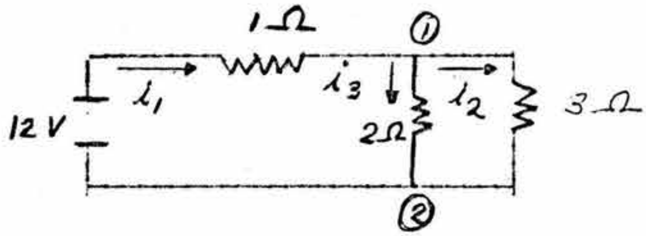
1) Obtener un primer uno en la primera columna (si esto es posible), colocarlo en el primer renglón y usarlo para convertir en cero los elementos diferentes de cero en su columna.

2) Obtener un primer uno en la segunda columna (si esto es posible), colocarlo en el segundo renglón y usarlo para convertir en cero los elementos diferentes de cero en su columna.

3) Continuar el proceso hasta obtener una matriz escalonada.

El rango de una matriz es el número de renglones no nulos de una matriz escalonada. Si el rango de una matriz o sistema de ecuaciones lineales concuerda con el número de incógnitas, el sistema tiene solución única. Si se eliminan los renglones nulos de una matriz escalonada y el sistema tiene solución única, la matriz así obtenida es llamada "matriz no singular".

Ejemplo: Un circuito eléctrico simple puede ser analizado con ecuaciones lineales. Supóngase el siguiente circuito



Las dimensiones usadas en este ejemplo son: ohms para los resistores, amperes para la corriente y volts para potencial.

Existen tres leyes acerca del circuito que pueden ser utilizadas:

1) Ley de Ohm: la diferencia de potencial a través de un resistor es el producto de la corriente y el valor del resistor.
2) Ley de Kirchhoff de la corriente: La suma de las corrientes que fluyen de una unión son iguales a la suma de las corrientes que fluyen hacia la unión.
3) Ley de Kirchhoff de los voltajes: la suma algebraica de los voltajes en cualquier "anillo cerrado" es cero.

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad o \quad i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4) \text{ por } (2)$$

La caida de voltaje a través del resistor:

de 1,	es i_1	Por (1)
de 2,	es $2i_3$	Por (1)
de 3,	es $3i_2$	Por (1)

En el anillo cerrado izquierdo

$$i_1 + 2i_3 = 12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5) \qquad \text{por } (3)$$

En el anillo cerrado derecho

$$3i_2 - 2i_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6) \qquad \text{por } (3)$$

En todo el circuito

$$i_1 + 3i_2 = 12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7) \qquad \text{por } (3)$$

El sistema de ecuaciones obtenido es

$$\begin{array}{rl}
i_1 - i_2 - i_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots \; (4) \\
i_1 \qquad + 2i_3 = 12 & \ldots\ldots\ldots\ldots \; (5) \\
3i_2 - 2i_3 = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots \; (6) \\
i_1 + 3i_2 \qquad = 12 & \ldots\ldots\ldots\ldots \; (7)
\end{array}$$

La matriz aumentada para este sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{4,1}(-1)]{R_{2,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{4,2}(-4)]{R_{1,2}(1),\ R_{3,2}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -11 & -36 \\ 0 & 0 & -11 & -36 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{4,3}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -11 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\ (-1/11)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 36/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada

Rango = 3

Número de incógnitas = 3

El sistema tiene solución única

$$\xrightarrow[R_{2,3}(-3)]{R_{1,3}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 60/11 \\ 0 & 1 & 0 & 24/11 \\ 0 & 0 & 1 & 36/11 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones para esta matriz es

$i_1 = 60/11$

$i_2 = 24/11$

$i_3 = 36/11$

En la sección de números complejos se verá que una forma de-rectificar esta solución es

$$\frac{60}{11} = \frac{24}{11} + \frac{36}{11}$$

OBJETIVOS:

1) Explicar lo que es una matriz escalonada, el procedimiento de obtención y sus usos.
2) Exponer un ejemplo sobre este método.

LA MATRIZ INVERSA Y LA FUNCION DETERMINANTE

El uso de la matriz inversa o la función determinante para resolver un sistema de ecuaciones lineales no es muy adecuado, mas sin embargo tiene interés en la obtención de la inversa de una transformación-lineal y en la obtención de eigenvalores y eigenvectores de una transformación lineal.

Una matriz A nxn es llamada no singular o invertible si existe una matriz A^{-1} nxn tal que $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$. La matriz A^{-1} es llamada la inversa de A.

El procedimiento de obtención de una matriz inversa es efectuando operaciones similares tanto en la matriz A como en la idéntica y la matriz obtenida de la idéntica es la matriz inversa de A.

Ejemplo: Obtener la inversa de la matriz de los coeficientes del sistema

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Matriz A	Matriz idéntica
$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow{R_{2,1}(-d/a)} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ae-bd}{a} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{d}{a} & 1 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow{R_2(a/ae-bd)} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{d}{ae-bd} & \frac{a}{ae-bd} \end{pmatrix}$
$\xrightarrow{R_{1,2}(-b)} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{ae}{ae-bd} & -\frac{ab}{ae-bd} \\ -\frac{d}{ae-bd} & \frac{a}{ae-bd} \end{pmatrix}$
$\xrightarrow{R_1(1/a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{e}{ae-bd} & -\frac{b}{ae-bd} \\ -\frac{d}{ae-bd} & \frac{a}{ae-bd} \end{pmatrix}$

La matriz inversa de A es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{e}{ac-bd} & \dfrac{-b}{ac-bd} \\ \dfrac{-d}{ac-bd} & \dfrac{a}{ac-bd} \end{pmatrix}$$

Un número diferente de cero multiplicado por una matriz es igual al escalar por cada uno de los elementos de la matriz, con esta propiedad es fácil ver que

$$A^{-1} = \frac{1}{ac-bd} \begin{pmatrix} e & -b \\ -d & a \end{pmatrix}$$

La matriz $\begin{pmatrix} e & -b \\ -d & a \end{pmatrix}$ es llamada matriz de los cofactores* y al factor "ac-bd" es llamado determinante de la matriz A. Obsérvese que si el determinante es igual a cero, la matriz inversa no está definida. Por tal razón si el determinante de una matriz cuadrada A es diferente de cero, la matriz A es no singular e invertible y el sistema tiene solución única.

Con la matriz inversa es posible encontrar la solución del sistema de la siguiente forma

$$\frac{1}{ac-bd} \begin{pmatrix} e & -b \\ -d & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ac-bd} \begin{pmatrix} e & -b & c \\ -d & a & f \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{ac-bd} \begin{pmatrix} ac-bd & 0 \\ 0 & ac-bd \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ac-bd} \begin{pmatrix} ce-bf \\ af-cd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ac-bd} \begin{pmatrix} ce-bf \\ af-cd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ce-bf}{ae-bd} \\ \\ \frac{af-cd}{ae-bd} \end{pmatrix}$$

En forma similar es posible obtener la inversa de la matriz- de los coeficientes del sistema

$$ax + by + cz = k$$
$$dx + ey + fz = l$$
$$px + qy + rz = m$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{aer + bfp + cdq - cep - afq - bdr} \begin{pmatrix} er-fq & cq-br & bf-ce \\ fp-dr & ar-cp & cd-af \\ dq-ep & bp-aq & ae-bd \end{pmatrix}$$

El determinante de A es

$$\det(A) = aer + bfp + cdq - cep - afq - bdr$$

Una submatriz de una matriz A es una matriz obtenida de A al quitar algunos renglones y/o columnas. Si quitamos los renglones 1 y 2, y - la columna 2, indicamos la matriz resultante por A(1, 2/2). Los números de los renglones quitados son enlistados después de la barra vertical. Si nin gún renglón o columna es quitado usaremos un guión para llenar los espa - cios A(-/1) o A(1/-).

El cálculo de un determinante por expansión a lo largo del i-ésimo renglón es

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1}\det A(i/1) + (-1)^{i+2}a_{i2}\det A(i/2)+\dots+(-1)^{i+n}a_{in}\det A(i/n)$$

La fórmula puede ser descrita en palabras "tomar el primer elemento a_{i1} y calcular el determinante de la submatriz resultante $A(i/1)$. Multiplicar estos números por $(-1)^{i+1}$, la potencia viene siendo la suma del renglón y columna en la que a_{i1} aparece. Esto da el primer término "$(-1)^{i+1}a_{i1}\det A(i/1)$" Los otros término son calculados en forma similar.

El determinante de A también puede ser calculado por la expansión a lo largo de la j-ésima columna de A:

$$\det A = (-1)^{1+j}a_{1j}\det A(1/j) + (-1)^{2+j}a_{2j}\det A(2/j) + \dots + (-1)^{n+j}a_{nj}\det A(n/j)$$

TECNICAS PARA EL CALCULO DEL DETERMINANTE

1) Intercambiando dos renglones o columnas de A cambia el valor del determinante por un factor de -1; $\det R_{ij}\ A = -\det A,\ i\neq j$

2) Multiplicando un renglón o columna por el escalar x, cambia el valor del determinante por un factor x; $\det R_i(x)A = x\det A$

3) Añadiendo un múltiplo de un renglón o columna a otro, permanece el valor del determinante inalterable; $\det R_{ij}(x)A = \det A,\ i\neq j$.

4) El determinante de la matriz idéntica es uno, entonces $\det I_n = 1$.

5) Si A contiene dos renglones o dos columna que sean iguales $\det A = 0$.

6) Si algún renglón o columna de A es una combinación lineal de los otros renglones o columnas de A entonces $\det A = 0$.

REGLA DE CRAMER

Sea A la matriz de los coeficientes para el sistema de n ecuaciones lineales de n incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= k_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= k_n \end{aligned}$$

Suponiendo que det A $\neq$ 0 entonces

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} k_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ k_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & k_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & k_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & k_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & k_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & k_n \end{pmatrix}}{\det A}$$

En el siguiente ejemplo utilice la matriz inversa y la funcion determinante (regla de Cramer) para su resolución.

Ejemplo: Tenemos dos frascos, uno contiene H_2SO_4 al 89% y el otro HNO_3 al 90%. Nuestro matraz contiene una solución que contiene 10% de HNO_3 y 40% de H_2SO_4. Calcular la cantidad en gramos de cada sustancia necesarios para obtener 10 Kg de la mezcla deseada.

Si x = cantidad en gramos de la solución de ácido sulfúrico concentrado

y = " " " " " " " " nítrico "

z = " " " " " " contenida en el matraz.

Podemos formar las siguientes ecuaciones

a) La cantidad en gramos que adicionemos de cada solución debe darnos 10 Kg de muestra deseada

$$x + y + z = 10 \text{ Kg} = 10000\text{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

b) La cantidad en gramos de ácido sulfúrico añadido debe darnos el 50% de la solución final

$$0.89x + 0.40z = 0.50\,(10000) = 5000 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

o sea, gramos de H_2SO_4 de solución concentrada más gramos de H_2SO_4 de solución del matraz = 50% de 10000 gramos.

c) Lo mismo que en b) para el HNO_3

$$0.90y + 0.10z = (0.25)(10000) = 2500 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Por lo tanto nuestro sistema de ecuaciones es:

$$x + y + z = 10000$$

$$0.89x + 0.40z = 5000$$

$$0.90y + 0.10z = 2500$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.89 & 0 & 0.40 \\ 0 & 0.90 & 0.10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,000 \\ 5,000 \\ 2.500 \end{pmatrix}$$

a) La matriz inversa de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.89 & 0 & 0.40 \\ 0 & 0.90 & 0.10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{2,1}(0.89)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.89 & -0.49 \\ 0 & 0.90 & 0.10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.89 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{2}(-1/0.89)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.55 \\ 0 & 0.90 & 0.10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1.123 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{3,2}(-0.90)]{R_{1,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.45 \\ 0 & 1 & 0.55 \\ 0 & 0 & -0.395 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1.123 & 0 \\ 1 & -1.123 & 0 \\ -0.90 & 1.011 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{3}(-1/0.395)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.45 \\ 0 & 1 & 0.55 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1.123 & 0 \\ 1 & -1.123 & 0 \\ 2.276 & -2.557 & -2.53 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{2,3}(-0.55)]{R_{1,3}(-0.45)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1.023 & 2.27 & 1.136 \\ -0.2528 & 0.284 & 1.39 \\ 2.276 & -2.557 & -2.53 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1.023 & 2.27 & 1.136 \\ -0.2528 & 0.284 & 1.39 \\ 2.276 & -2.557 & -2.53 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} -1.023 & 2.27 & 1.136 \\ -0.2528 & 0.284 & 1.39 \\ 2.276 & -2.557 & -2.53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.89 & 0 & 0.40 \\ 0 & 0.90 & 0.10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1.023 & 2.27 & 1.136 \\ -0.2528 & 0.284 & 1.39 \\ 2.276 & -2.557 & -2.53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10,000 \\ 5,000 \\ 2,500 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,970 \\ 2,370 \\ 3,650 \end{pmatrix}$$

Existe un pequeño error debido al cálculo y aproximación de los decimales tomados.

b) Por determinantes tenemos

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.89 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.9 & 0.10 \end{pmatrix}$$ (tomando el primer renglón para el desarrollo)

$$= 1 \det \begin{pmatrix} 0 & 0.4 \\ 0.9 & 0.10 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 0.89 & 0.4 \\ 0 & 0.10 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 0.89 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$= -0.36 - 0.089 + 0.801 = 0.352$$

$$\det A_x = \det \begin{pmatrix} 10,000 & 1 & 1 \\ 5,000 & 0 & 0.4 \\ 2,500 & 0.9 & 0.10 \end{pmatrix} \text{(tomando la segunda columan)}$$

$$= -1 \det \begin{pmatrix} 5,000 & 0.4 \\ 2,500 & 0.10 \end{pmatrix} - 0.9 \det \begin{pmatrix} 10,000 & 1 \\ 5,000 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$= 500 + 900 = 1,400$$

$$\det A_y = \det \begin{pmatrix} 1 & 10,000 & 1 \\ 0.89 & 5,000 & 0.4 \\ 0 & 2,500 & 0.10 \end{pmatrix} \text{(tomando la primera columan)}$$

$$= 1 \det \begin{pmatrix} 5000 & 0.4 \\ 2,500 & 0.10 \end{pmatrix} - 0.89 \det \begin{pmatrix} 10,000 & 1 \\ 2,500 & 0.10 \end{pmatrix}$$

$$= -500 + 1335 = 835$$

$$\det A_z = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10,000 \\ 0.89 & 0 & 5,000 \\ 0 & 0.9 & 2,500 \end{pmatrix} \text{(Tomando la tercera columna)}$$

$$= 10,000 \det \begin{pmatrix} 0.89 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix} - 5,000 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix} + 2500 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.89 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 8010 - 4500 - 225 = 1285$$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{1,400}{0.352} = 3,977.27\text{g}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{835}{0.352} = 2,372.159g$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{1285}{0.352} = 3,650.568\ g.$$

Una forma de rectificar nuestros resultados es efectuando un balance de materia para el agua. Si los porcentajes faltantes para 100 son debidos al agua, entonces

89% H_2SO_4 . . . . 11% H_2O

90% HNO_3 . . . . 10% H_2O

10% HNO_3 y 40% H_2SO_4 . . . . 50% H_2O

El balance quedaría:

$$(0.11)(3977.3) + (0.10)(2372.1) + (0.50)(3650.6) = (0.25)(10,000)$$

$$437.5 + 237.2 + 1825.3 = 2,500$$

$$2500 = 2500$$

OBJETIVOS:

1.) Exponer un método de obtención de una matriz inversa y de un determinante

2.) Explicar el uso de la matriz inversa y de la función determinante en un sistema de ecuaciones

3.) Ejemplificar el objetivo dos por medio de un ejemplo aplicativo

El objetivo general de todo este capítulo es aplicar los sistemas de ecuaciones a casos concretos y así el alumno no desligue de la realidad los métodos empleados, haciéndose énfasis especial en la comprobación de un resultado.

CAPITULO TRES

EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

3.1) POLINOMIOS CUADRATICOS Y LA CONSTANTE DEL PRODUCTO DE SOLUBILIDAD

Un polinomio es cuadrático si es equivalente a lo siguiente

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

Demostraremos que siempre es posible escribir este polinomio como el producto de dos factores lineales. Si tomamos "a" como factor -

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

completando el trinomio cuadrado perfecto

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Esta última expresión puede escribirse como la diferencia de dos cuadrados

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

$$= a\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

$$= a\left[x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

Si $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

$$x - \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0 \qquad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x - \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0 \qquad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto la solución de un polinomio cuadrático de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

$$es = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

CONSTANTE DEL PRODUCTO DE SOLUBILIDAD

Una solución que contiene iones es llamada "solución iónica"; por ejemplo, al disolver KCl (cloruro de potasio) en agua se formaran iones K^+ y Cl^-. Si continuamos agregando iones llegará un momento en el cual ya no se - disuelven y entonces decimos que la solución está saturada. Si continuamos - la adición, el cloruro de potasio se acumulará en el fondo del recipiente. - En el equilibrio, podemos expresar la disolución de la sal de cloruro de potasio en agua por

$$KCl_{(s)} \rightleftharpoons K^+_{(aq)} + Cl^-(aq)$$

donde el subíndice "aq" nos indica que los iones se encuentran disueltos.

Definimos la constante de equilibrio de la reacción anterior por

$$Keq = \frac{(\text{Concentración de iones potasio})\ (\text{concentración de iones cloruro})}{(\text{concentración de cloruro de potasio sólido})}$$

$$= \frac{[K^+][Cl^-]}{[KCl]}$$

La constante de equilibrio está en función de la relación de concentraciones elevada cada una al número de moles de la reacción balanceada- en equilibrio.

Ejemplo: ¿ Cúal es la constante de equilibrio del cromato de plata en agua?

$$Ag_2CrO_{4\,(s)} \rightleftharpoons 2Ag^+_{(aq)} + CrO_{4\,(aq)}^{=}$$

$$Keq = \frac{[Ag^+]^2\,[CrO_4^=]}{[Ag_2CrO_4]}$$

Esta constante para la reacción en equilibrio tiene su base en la ley de acción de las masas: "El producto de las concentraciones de todos los productos se divide entre el producto de las concentraciones de todos los reactivos resultando una constante que solo varía al cambiar la temperatura". Una pregunta que nos podemos hacer es: ¿ Porqué las concentraciones se elevan al número de moles de la reacción balanceada?. Para contestarla veamos de nuevo la reacción anterior

$$Ag_2CrO_{4\,(s)} \rightleftharpoons 2Ag^+_{(aq)} + CrO_{4\,(aq)}^{=}$$

$$Ag_2CrO_{4\,(s)} \rightleftharpoons Ag^+_{(aq)} + Ag^+_{(aq)} + CrO_{4\,(aq)}^{=}$$

$$Keq = \frac{[Ag^+][Ag^+][CrO_4^=]}{[Ag_2CrO_4]} = \frac{[Ag^+]^2\,[CrO_4^=]}{[Ag_2CrO_4]}$$

La disolución del Ag_2CrO_4 no se verifica totalmente sino que cuando la reacción alcanza el equilibrio (solución saturada) hay una cantidad de Ag_2CrO_4 sólido que no puede disolverse más (excepto al aumentar la temperatura), y por lo tanto esta cantidad es constante

$$Keq\,[Ag_2CrO_4] = [Ag^+]^2\,[CrO_4^=] = \text{constante}$$

$$= \text{Kps}$$

$$= \text{constante del producto de solubilidad}$$

Una forma de conocer la constante del producto de solubilidad de una solución binaria (mezcla de dos componentes, para nuestro caso, agua y - un sólido) es evaporar el agua de la solución saturada, pesar el residuo y- efectuar las operaciones pertinentes.

Ejemplo: 107 ml. de solución saturada de Ag_2CrO_4 se evaporan a sequedad y el residuo obtenido pesa 5 mg. Calcular el producto de solubilidad

$$5 \text{ mg. } Ag_2CrO_4 = 5 \text{ mg. } Ag_2CrO_4 \times \frac{1g}{1000mg} \times \frac{1 \text{ mol de } Ag_2CrO_4}{332g \ Ag_2CrO_4}$$

$$= 0.000015 \text{ mol } Ag_2CrO_4 = 1.5 \times 10^{-5} \text{mol } Ag_2CrO_4$$

$$\frac{1.5 \times 10^{-5} \text{mol } Ag_2CrO_4}{0.107 lt.} = 1.4 \times 10^{-4} \text{ mol } Ag_2CrO_4/lt$$

Por la reacción se tienen $2(1.4 \times 10^{-4})$ mol Ag^+ y 1.4×10^{-4} mol $CrO_4^=$

$$Kps = Ag^{+\,2} \ CrO_4^=$$
$$= (2.8 \times 10^{-4})^2 \ (1.4 \times 10^{-4})$$
$$= 1.098 \times 10^{-11}$$

Ejemplo: El problema puede ser a la inversa. ¿ Cuántos gramos de- $BaCO_3$ podemos disolver en un litro de agua, si el Kps ($BaCO_3$) = 4.1×10^{-16}?

La reacción es:

$$BaCO_{3(s)} \rightleftarrows Ba^{+2}_{(aq)} + CO^=_{3(aq)}$$

$$Kps = [Ba^{+2}][CO_3^=]$$

si agregamos x moles de $BaCO_3$ obtenemos x moles de Ba^{+2} y x moles de $CO_3^=$.

Sustituyendo datos

$$4.1 \times 10^{-16} = (x)(x) = x^2 \quad \text{(polinomio cuadrático)}$$

Extrayendo raiz cuadrada en ambos lados de la igualdad

$x = \pm 2.02 \times 10^{-8}$ moles, solo se toma el signo positivo por no representar algo real el otro signo.

$$2.02 \times 10^{-8} \text{mol } BaCO_3 = 2.02 \times 10^{-8} \text{ mol } BaCO_3 \times \frac{197.3g\ BaCO_3}{1 \text{ mol } BaCO_3}$$

$$= 398.5 \times 10^{-8} g\ BaCO_3$$

Por lo tanto podemos disolver $3.985 \times 10^{-6} g\ BaCO_3$ en un litro de agua.

Si el valor de la concentración de un compuesto en el agua es mayor que la constante del producto de solubilidad, se formará precipitado y No se formará en caso contrario.

Ejemplo: A medio litro de una solución 0.02 molar de $AgNO_3$ se le añade medio litro de una solución de 1mg/1t de NaCl. ¿ Se formará un precipitado de AgCl si el Kps del AgCl es 1.6×10^{-10}?

La reacción que se verifica es

$$AgNO_3 + NaCl \rightleftharpoons NaNO_3 + AgCl \text{ (precip. blanco)}$$

ó

$$Ag^+ + Cl^- \rightleftharpoons AgCl$$

Por lo tanto:

$$Kps = [Ag^+][Cl^-]$$

Acerca de los datos:

$$\frac{1mg\ NaCl}{1\ 1t} \times \frac{1g}{1000mg} \times \frac{1 \text{ mol NaCl}}{58.5g \text{ NaCl}} = 1.7 \times 10^{-5} \text{ mol NaCl/1t}$$

Como adicionamos medio litro de cada solución tenemos:

$$\begin{array}{ll} 1 \times 10^{-2} \text{ mol } AgNO_3 & \text{en 0.5 litro} \\ + \ 8.5 \times 10^{-6} \text{ mol NaCl} & \text{en 0.5 litro} \\ \hline 1 \times 10^{-2} \text{ mol } AgNO_3 \text{ y } 8.5 \times 10^{-6} \text{ mol NaCl} & \text{en un litro} \end{array}$$

$$1 \times 10^{-2} \text{mol AgNO}_3 \rightleftharpoons 1 \times 10^{-2} \text{ mol } Ag^+ + 1 \times 10^{-2} \text{ mol } NO_3^-$$

$$8.5 \times 10^{-6} \text{ mol NaCl} \rightleftharpoons 8.5 \times 10^{-6} \text{ mol } Na^+ + 8.5 \times 10^{-6} \text{ mol } Cl^-$$

$$[Ag^+][Cl^-] = (1 \times 10^{-2})\ (8.5 \times 10^{-6}) = 8.5 \times 10^{-8}$$

Como este valor es mayor que el Kps del AgCl, concluímos que se formará precipitado porque la solución está sobresaturada de AgCl.

Conclusión: Una forma de identificar plata en una solución es agregando cloruros porque su Kps es muy pequeño, 1.6×10^{-10}

Si en lugar de sales, ionizamos un ácido, tenemos

$$HA + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + A^-$$

$$Keq = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[HA][H_2O]}$$

La concentración del agua es constante e igual a:

$$\text{densidad del agua} = \frac{1 \text{ Kg}}{1 \text{ lt}} \times \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ Kg}} \times \frac{1 \text{ mol } H_2O}{18 \text{ g}} = 55.5 \text{ mol/lt}$$

$$Keq[H_2O] = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[HA]} = \text{constante}$$

$$= \text{Kion} = \text{constante de ionización}$$

La constante de ionización nos puede servir para conocer que ácido es mas fuerte; por ejemplo

$$\text{Kion } (H_2SO_4) \approx 1 \times 10^{-2}$$

$$\text{Kion } (HCN) \approx 7.2 \times 10^{-10}$$

Por lo tanto el H_2SO_4 es mas fuerte que el HCN, ya que el primero se encuentra mas ionizado.

Ejemplo: Se tiene una solución 0.1 molar de HIO_3 (Kion $= 1.7 \times 10^{-1}$).

calcular el porcentaje de ionización del HIO_3.

$$HIO_3 + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + IO_3^-$$

$$Kion = \frac{[H_3O^+][IO_3^-]}{[HIO_3]}$$

Si suponemos que existen x moles ionizados de HIO_3, se tendrán - (0.1 - x) moles de HIO_3/1t sin ionizar.

$$(0.1 - x)\ HIO_3 + H_2O \rightleftarrows x\ H_3O^+ + x\ IO_3^-$$

$$Kion = \frac{(x)(x)}{(0.1 - x)} = 1.7 \times 10^{-1}$$

Desarrollando:

$$x^2 + 0.17x - 0.017 = 0$$

Resolviendo esta ecuación por la fórmula

$$x = \frac{-0.17 \pm \sqrt{(0.17)^2 - 4(1)(-0.017)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-0.17 \pm 0.31}{2}$$

La solución del sistema es: $\{-0.24,\ 0.07\}$

Como x nos representa una cantidad de materia, x = 0.07

$$\%\ \text{ionización} = \frac{\text{Cantidad de } HIO_3 \text{ ionizado}}{\text{Cantidad original de } HIO_3} \times 100$$

$$= \frac{[IO_3^-]}{[HIO_3]} \times 100 = \frac{0.07}{0.10} \times 100$$

$$= 70\%$$

Esto nos indica que una gran parte se ioniza y la reacción se realizará con tendencia a la derecha. HIO_3 es un ácido fuerte.

Con lo anteriormente dicho, ¿es posible afirmar que toda ecuación del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, tiene solución en el conjunto de los reales?

La respuesta es NO, por ejemplo:

$$x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 = -1$$

no existe ningún número real x, tal que elevado al cuadrado de "-1", en general, si "$b^2 - 4ac$" es negativo, el valor de x no será real.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

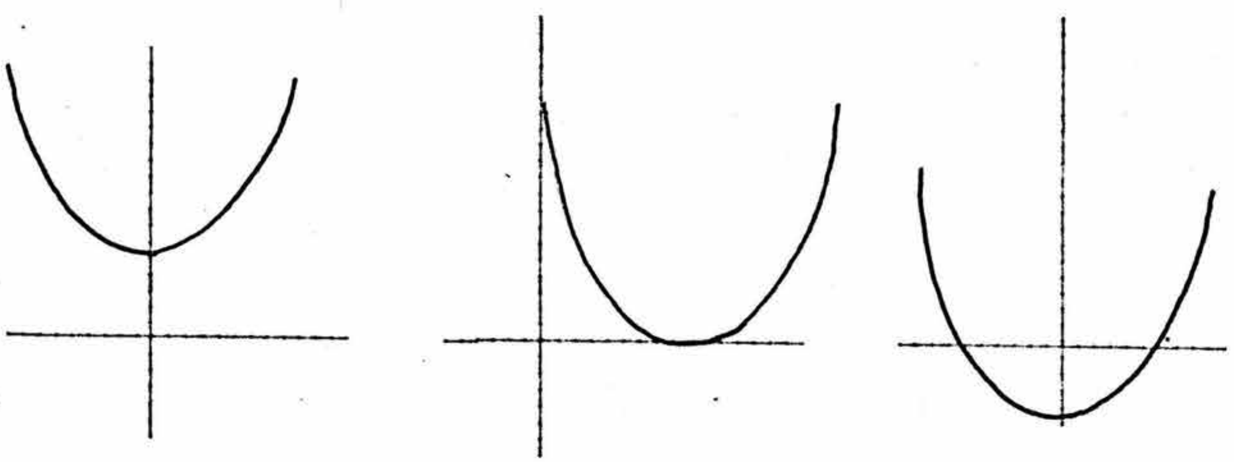
Por tal razón "$b^2 - 4ac$" es llamado el discriminante de la ecuación cuadrática

Si $b^2 - 4ac < 0$, $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$ es un número imaginario

$b^2 - 4ac = 0$, $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}} = 0$ y el sistema tiene dos soluciones iguales

$b^2 - 4ac > 0$, el sistema tiene dos soluciones diferentes.

Graficamente, la solución de una ecuación cuadrática nos representa los puntos de cruce del eje de las abscisas, o sea, el valor de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ cuando $f(x) = 0$



$b^2 - 4ac < 0$ $\qquad$ $b^2 - 4ac = 0$ $\qquad$ $b^2 - 4ac > 0$

Ejemplo: ¿ Cuál es la solución de la ecuación cuadrática con coeficientes iguales a la unidad, a = b = c = 1 ?

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}$$

Si "i" nos representa el valor de $\sqrt{-1}$ y $i^2 = -1$, entonces

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \,,\; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Rectificando:

$$f\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$$f\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

Obsérvese que la solución del sistema

$$\left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \,,\; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

consiste de números conjugados, los cuales son utilizados en el siguiente sistema numérico.

OBJETIVOS:

1.) Demostrar la fórmula general para ecuaciones cuadraticas

2.) Explicar brevemente los conceptos de la constante del producto de solubilidad y la constante de ionización.

3.) Exponer ejemplos sobre las constantes, obteniendo una conclusión de la solución encontrada.

4.) Utilizar la ecuación cuadrática en la resolución de problemas de ionización y en la introducción al sistema de los números complejos y a la interpretación gráfica de la raiz de un polinomio.

EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Si una ecuación cuadrática tiene dos ecuaciones no reales, éstas las podemos expresar en forma de pares ordenados.

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}\,i = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}\right)$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}\,i = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}\right)$$

Es decir, una parte real y otra imaginaria

$$a + bi = (a,b)$$

donde a es la parte real

b es la parte imaginaria

Las propiedades de los pares ordenados así formados son:

$$(a,b) \pm (c,d) = (a \pm c,\ b \pm d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc) \quad *$$

donde a, b, c, d son números reales.

Al conjunto de pares ordenados que cumple las dos propiedades -

* Esto puede demostrarse facilmente

mencionadas es llamado "sistema de los números complejos". Este sistema incluye al conjunto de los números reales (a,0) y a los imaginarios puros (0,b). Por lo tanto

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

Con el campo de los números complejos podemos satisfacer cualquier ecuación y obtener las raíces de cualquier polinomio de grado n (véase siguiente capítulo).

El conjugado de un número complejo "a + bi" es "a - bi"; por ejemplo, si la solución de una ecuación cuadrática es $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, la otra solución será $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; con el conjugado es posible demostrar que la división de dos números complejos es un número complejo.

Ejemplo: Demuestre que la expresión $\frac{a + bi}{c + di}$ es posible expresarla en la forma (x,y).

Si multiplicamos la expresión por el conjugado del denominador

$$\frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Por lo tanto: $\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$

El valor absoluto o módulo de un número complejo a + bi es

$$|a + bi| = |(a,b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Por lo tanto, 1) Si $Z = a + bi$ y $\bar{Z} = a - bi$

$$|Z|^2 = a^2 + b^2 = (a + bi)(a-bi) = Z\bar{Z}$$

2) Si $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$

$$|Z_1 Z_2| = |Z_1|\,|Z_2|$$

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

Dos propiedades de los conjugados son:

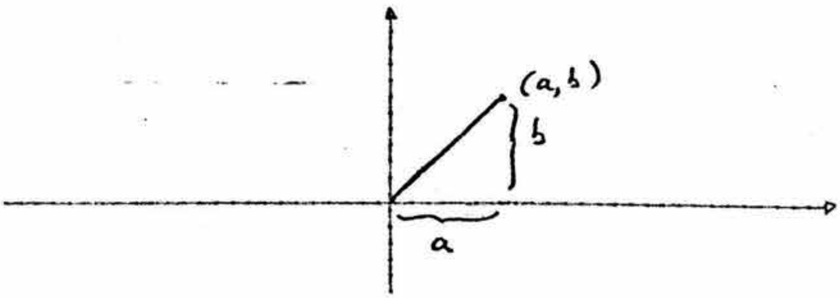
a) La suma o resta de dos conjugados es igual al conjugado de los números complejos sumados o restados.

$$\overline{Z_1} \pm \overline{Z_2} = \overline{Z_1 \pm Z_2}$$

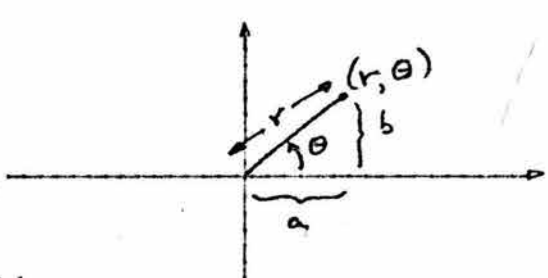
b) El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de sus números conjugados

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$$

El número complejo a + bi o (a,b) puede representarse en un plano euclidiano



Este punto también puede representarse por su distancia al origen (módulo) y el ángulo que forma con el eje de las abscisas. (argumentos)



Por el teorema de Pitágoras

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi| = |(a,b)|$$

Por relaciones trigonométricas básicas

$$\operatorname{Sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad b = r\operatorname{Sen} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{a}{r} \qquad a = r\operatorname{Cos} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\operatorname{Tan}\theta = \frac{b}{a} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Entonces

$$\theta = \operatorname{arc}\operatorname{Tan}\frac{b}{a} = \operatorname{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$$

$$(a,b) = (r\operatorname{Cos}\theta,\ r\operatorname{Sen}\theta) = r(\operatorname{Cos}\theta,\ \operatorname{Sen}\theta) = r(\operatorname{Cos}\theta + i\operatorname{Sen}\theta)$$

$$= \text{(Forma Trigonométrica)}$$

$$\overline{(a,b)} = r(\operatorname{Cos}\theta,\ -\operatorname{Sen}\theta)$$

Si $Z_1 = (a,b) = r(\operatorname{Cos}\theta,\ \operatorname{Sen}\theta)$ y $Z_2 = (c,d) = s(\operatorname{Cos}\varphi,\ \operatorname{Sen}\varphi)$

$$Z_1 \pm Z_2 = (r\operatorname{Cos}\theta \pm s\operatorname{Cos}\varphi,\ r\operatorname{Sen}\theta \pm s\operatorname{Sen}\varphi)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (rs\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\varphi - rs\operatorname{Sen}\theta\operatorname{Sen}\varphi,\ rs\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sen}\varphi + rs\operatorname{Sen}\theta\operatorname{Cos}\varphi)$$

$$= rs(\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Sen}\theta\operatorname{Sen}\varphi,\ \operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sen}\varphi + \operatorname{Sen}\theta\operatorname{Cos}\varphi)$$

$$= rs(\operatorname{Cos}(\theta+\varphi),\ \operatorname{Sen}(\theta+\varphi)) \ *$$

Por lo tanto, para multiplicar dos números complejos, se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.

En forma similar se obtiene

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r}{s}(\operatorname{Cos}(\theta-\varphi),\ \operatorname{Sen}(\theta-\varphi))$$

* Por propiedades de las funciones trigonométricas

$$\operatorname{Cos}(x+y) = \operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}y - \operatorname{Sen}x\operatorname{Sen}y$$

$$\operatorname{Sen}(x+y) = \operatorname{Cos}x\operatorname{Sen}y + \operatorname{Sen}x\operatorname{Cos}y$$

De Moivre demostró que

$$Z^{n} = r^{n} (\text{Cos } n\theta , \text{ Sen } n\theta)$$

Steinmetz representó al número complejo en la forma

$$Z = r \angle\theta \quad \text{(forma polar)}$$

Por las deducciones anteriores se concluye que

$$Z_1 \cdot Z_2 = rs \angle\theta + \varphi$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r}{s} \angle\theta - \varphi$$

$$Z^{n} = r^{n} \angle n\theta$$

$$\bar{Z} = r \angle -\theta \text{ , si } Z = r \angle\theta$$

OBJETIVOS:

1.) Hacer una introducción al sistema de los números complejos, mencionando sus propiedades.

2.) Preparar el material matemático necesario para el siguiente tema.

3.2) CIRCUITOS ELECTRICOS

Todos los efectos de la electricidad pueden explicarse y predecirse presumiendo la existencia de una diminuta partícula denominada "electrón". Aplicando esta teoría "electrónica" los hombres de ciencia han hecho predicciones y descubrimientos que pocos años atrás parecían imposibles. La teoría electrónica no solo constituye la base para el diseño de equipos eléctricos y electrónicos de todo tipo, sino que explica los fenómenos químicos y permite a los químicos predecir y formar nuevos compuestos, como los sintéticos.

El estudio de la electricidad se basa exclusivamente en la teoría electrónica. Esta teoría afirma que todos los efectos eléctricos y electrónicos obedecen al desplazamiento de electrones de un lugar a otro, o a que en un lugar determinado hay una cantidad demasiado grande o demasiado pequeña de electrones.

Usted ha oído que la electricidad es la acción que producen los electrones al trasladarse de un punto a otro; pero para que los electrones puedan moverse, es necesario que alguna forma de energía se convierta en electricidad. Se pueden considerar seis formas de energía, cada una de las cuales podría considerarse como fuente independiente de electricidad:

frotamiento, presión, calor, luz, magnetismo y acción química

La fuente principal de electricidad estática es por frotamiento.- Al frotar dos materiales diferentes entre sí, los electrones fluyen de uno a otro quedando cargado negativamente el material que capta los electrones y -

positivamente el que los pierde. Ejemplo de estos materiales son: la baquelita, el ambar, la franela, el vidrio, la seda, el nylon, la piel, etc.

Al colocar cristales de cuarzo entre dos placas de metal y ejercer presion en ellas, se producirá una carga eléctrica por presión, de igual forma, cuando hablamos por teléfono se efectúa una presión de ondas sonoras que mueven un diafragma que a su vez acciona una bobina, generándose energía eléctrica.

Al calentar directamente un termopar (dos piezas soldadas de metales distintos) se forma una diferencia de temperaturas entre los extremos del termopar creándose una carga eléctrica.

Las pilas eléctricas son una fuente eléctrica debido a la acción química. Estas contienen en su interior un electrolito que lleva los electrones de una placa a otra, creándose una acumulación de electrones en una de las placas, siendo ésta una fuente de energía eléctrica.

Las cargas eléctricas tienen como unidad básica al electrón, pero así como pedimos 50g de sal ($NaCl$) no decimos que nos den 5.15×10^{23} moléculas de sal, de igual forma usamos al coulomb como unidad de carga eléctrica (un coulomb equivale aproximadamente a la carga de 6.24×10^{18} electrones).

La intensidad del flujo de los electrones es el número de electrones que pasan por un material en un período de tiempo dado, a ésto se le conoce vulgarmente con el nobmre de "corriente". Ya que la cantidad de electrones la medimos por coulomb:

$$I\,(\text{ampere}) = \frac{q\ (\text{coulomb})}{t\ (\text{segundos})}$$

Un ampere será igual a 1 coulomb/ segundo.

Ejemplo ¿Cuál es la intensidad de corriente en la óribita de un e lectrón en el átomo de hidrógeno? El radio de la órbita, la velocidad y la carga del electrón son: 5.28×10^{-9} cm, 2.2×10^{8} cm/seg, 1.602×10^{-19} Cb, respectivamente.

La incógnita es la intensidad, $I = q/t$, pero será necesario conocer el tiempo para poder aplicar esta fórmula. El tiempo o período de un ciclo completo es el inverso de la frecuencia.

$$T = \frac{1}{f}, \qquad f = \frac{v}{2\pi r}$$

sustituyendo los datos

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{2.2 \times 10^{8}\ \text{cm/seg}}{2\pi(5.28 \times 10^{-9}\ \text{cm/rev}} = 6.63 \times 10^{15}\ \text{rev/seg} = 6.63x10^{15}\ \text{Hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = 1.5 \times 10^{-16}\ \text{seg}$$

$$I = \frac{q}{t} = \frac{1.602 \times 10^{-19}\ \text{Cb}}{1.5 \times 10^{-16}\text{seg}} = 1.068 \times 10^{-3}\ \text{A.}$$

La Fuerza electromotriz (FEM) es la energía eléctrica de las cargas menos positivas a cargas más positivas. Siempre que dos puntos de carga desigual estén conectados, existirá un flujo de corriente eléctrica,y cuanto más grande sea la FEM o voltaje entre las cargas,mayor será el flujo de corriente.

El voltaje (V) y el amperaje (I) están relacionados por una constante de proporcionalidad R.

$$V = RI \qquad \text{(Ley de Ohm)}$$

siendo R la resistencia medida en ohms; por ejemplo, si el voltaje permanece constante , a R muy grande (vidrio) el flujo de corriente será pequeño y vice versa, a R muy pequeña (cobre) el flujo de corriente será grande.

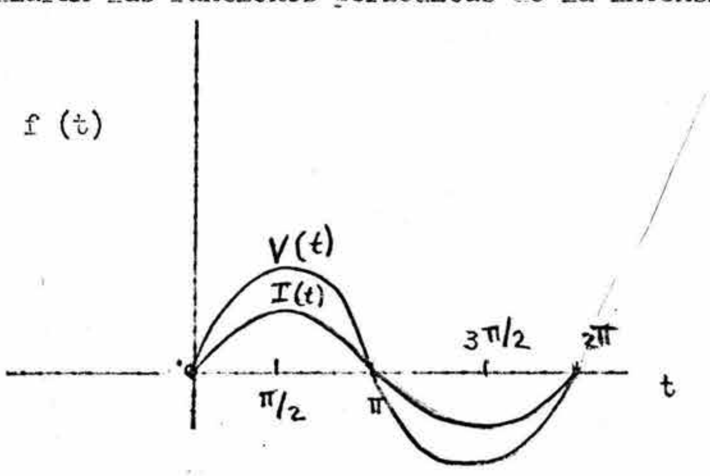
La resistencia depende de los siguientes factores:

1) Material.- Hasta los mejores conductores de la corriente (cobre o plata) tienen cierta resistencia que limita el flujo de la corriente.

2) Sección transversal.- A mayor sección transversal (diámetro del alambre) menor será la resistencia, debido a que la corriente circula más facilmente.

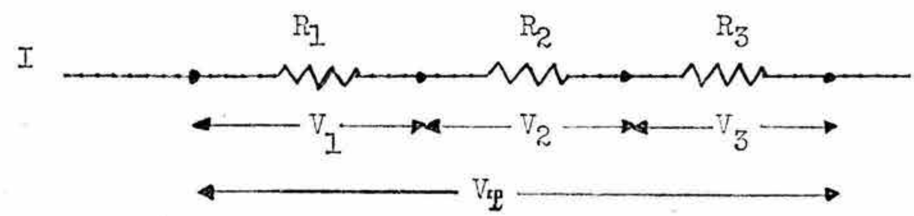
3) La longitud,-cuanto más largo es el conductor, mayor será la resistencia.

En esta sección introductoria al análisis de los circuitos eléctricos, se estudiarán las funciones periódicas de la intensidad y voltaje.



CIRCUITOS SENCILLOS

I. SERIE. Cuando se conectan resistencias en serie, la intensidad de corriente se mantiene constante durante la línea, y la diferencia de potencial total es igual a la suma de las diferencias de potencial en cada una de las resistencias.



$I_T = I_1 = I_2 = I_3$ . . . . (1)

$V_T = V_1 + V_2 + V_3$ . . . . (2)

Por la Ley de Ohm se tiene:

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 = I_1R_1 + I_2R_2 + I_3R_3$$

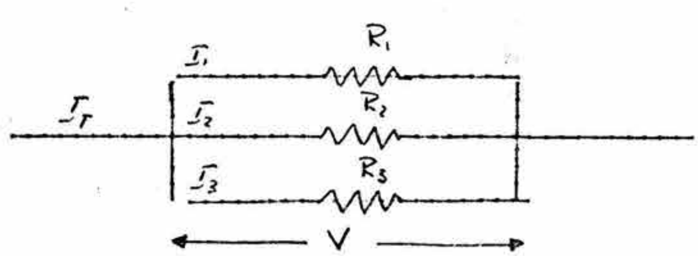
Por la ecuación (1)

$$V_T = I_T\ (R_1 + R_2 + R_3)$$

Como $V_T = I_TR_T$, entonces

$R_T = R_1 + R_2 + R_3$ . . . . (3)

II. PARALELO. Cuando se conectan resistencias en paralelo, la diferencia de potencial se mantiene constante en cada una de las ramas, mientras que la intensidad se distribuye en las líneas de las ramas.



$$V_T = V_1 = V_2 = V_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Por la Ley de Ohm

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}$$

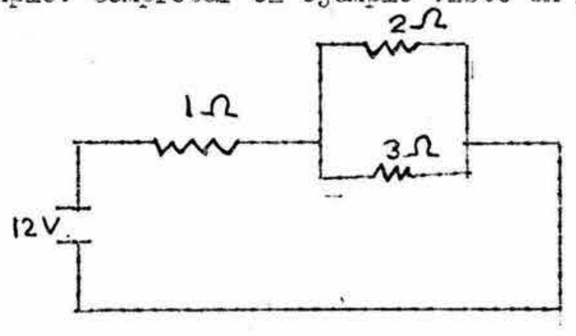
Por la ecuación (4)

$$I_T = V_T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

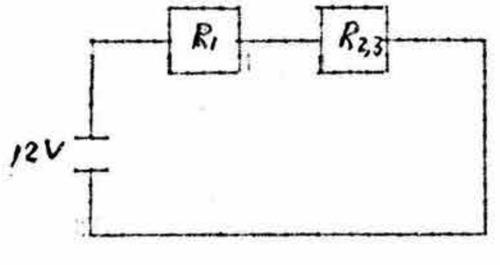
Como $I_T = V_T / R_T$, entonces

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Ejemplo: Comprobar el ejemplo visto en la sección matriz escalonada.



Este circuito puede ser reducido a



Donde $R_{2,3}$ es : $\frac{1}{R_{2,3}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$

$$R_{2,3} = \frac{6}{5}$$

$$R_T = R_1 + R_{2,3} = 1 + \frac{6}{5} = \frac{11}{5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$I_T = \frac{V_T}{R_T} = \frac{12}{11/5} = \frac{60}{11} \quad \text{. . . . . Ley de Ohm}$$

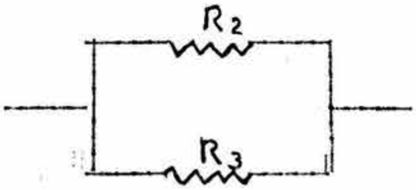
Para conocer cada una de las intensidades es necesario conocer las diferencias de potenciales en cada resistencia.

$$I_T = I_1 = I_{2,3} = \frac{60}{11} \quad \text{. . . . . (1)}$$

$$V_1 = I_1 R_1 = \frac{60}{11} \times 1 = \frac{60}{11} \quad \text{. . . . . . Ley de Ohm}$$

$$V_{2,3} = I_{2,3} R_{2,3} = \frac{60}{11} \times \frac{6}{5} = \frac{72}{11} \quad \text{. . . . Ley de Ohm}$$

En (2,3)



se tiene

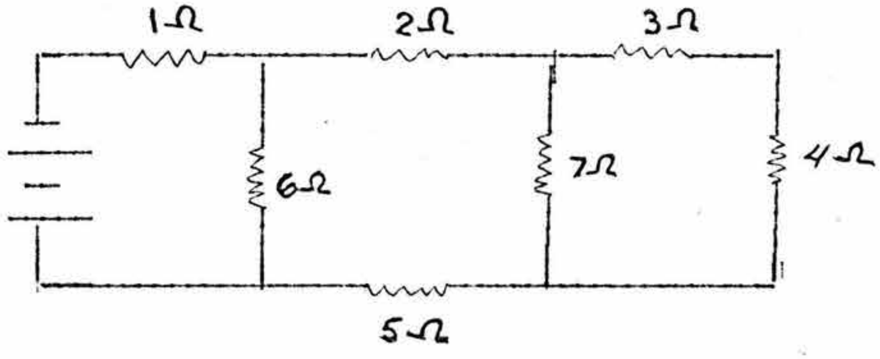
$$V_{2,3} = V_2 = V_3 \quad \text{. . . . . (4)}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{72/11}{2} = \frac{36}{11} \quad \text{. . . . . Ley de Ohm}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{72/11}{3} = \frac{24}{11} \quad \text{. . . . . Ley de Ohm}$$

Con lo cual queda comprobado el ejemplo

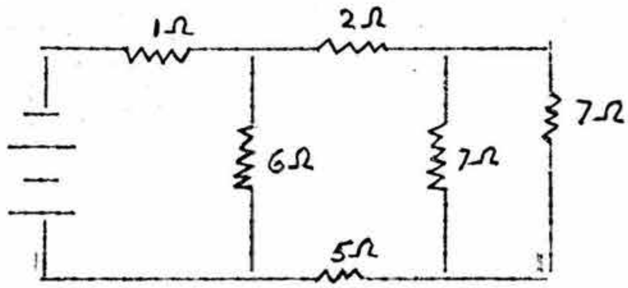
Ejemplo: Encontrar la densidad de corriente que entrega una batería de 20 V (con resistencia interna despreciable)



Para encontrar la resistencia total del circuito se siguen los siguientes pasos:

a) Las resistencias de 3Ω y 7Ω están en serie.

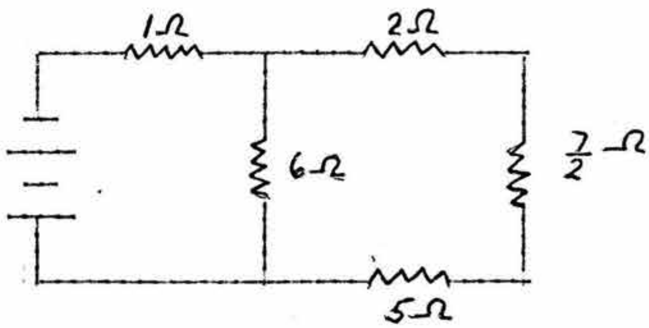
$$R = 3 + 4 = 7\,\Omega$$



b) Las resistencias de 7Ω se encuentran en paralelo

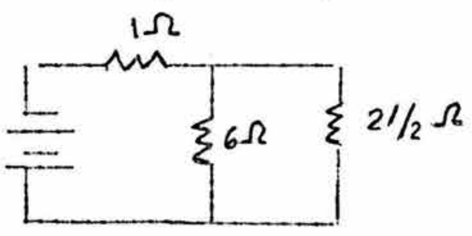
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

$$R = 7/2\,\Omega$$



c) Las resistencias de 2Ω, $7/2\,\Omega$ y 5Ω están conectadas en serie

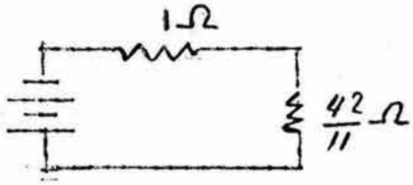
$$R = 2\Omega + \frac{7\Omega}{2} + 5\Omega = \frac{21}{2}\,\Omega$$



d) Las resistencias de $\frac{21}{2}\Omega$ y 6Ω se encuentran en paralelo

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{21/2} + \frac{1}{6} = \frac{11}{42}$$

$$R = \frac{42}{11}\,\Omega$$



e) Las resistencias de 1Ω y $\frac{11}{42}\Omega$ están en serie

$$R_T = 1 + \frac{42}{11} = \frac{53}{11}\,\Omega$$

Por lo tanto

$$I_T = \frac{V_T}{R_T} = \frac{20}{52/11} = 4.15\ \text{A}$$

El valor eficaz de la diferencia de potencial en corriente alterna es

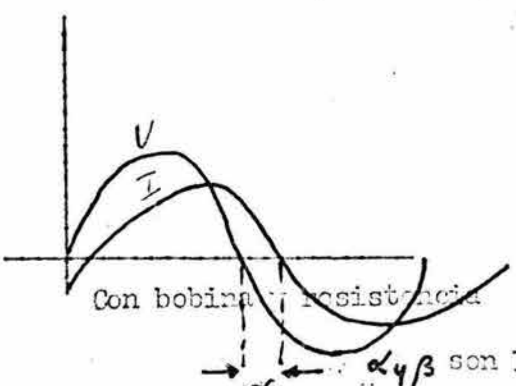
$$V_{ef} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

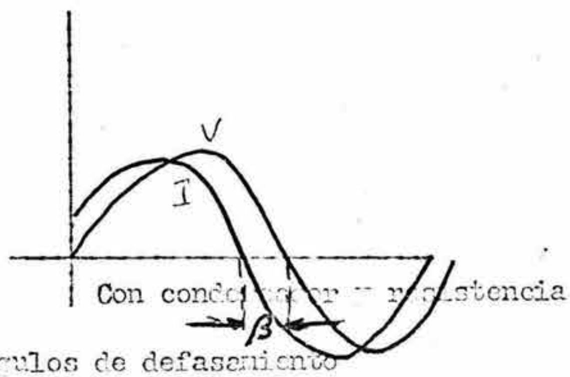
de igual forma,

$$I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

Los voltímetros y amperímetros de corriente alterna miden los valores eficaces.

Como se indicó anteriormente, la intensidad y el voltaje se encuentran en fase variando respecto a una constante de proporcionalidad que es la resistencia; pero cuando se halla en el circuito una bobina o un condensador, la intensidad se atrasa o adelanta con respecto al voltaje. Resultando en ambos casos que la intensidad y el voltaje se encuentran defasados.





α y β son los angulos de defasamiento

La "inductancia" existe en un circuito debido a que la corriente eléctrica siempre produce un campo magnético. La fuerza del campo eléctrico depende de la intensidad de la corriente, siendo la inductancia la propiedad de un circuito que se opone a cualquier variación de la intensidad. Un ejemplo de un inductor es una bobina que genera una FEM de autoinducción que motiva la oposición al campo de la intensidad. Su unidad es el henry.

Cuando el voltaje de un circuito varía, el circuito se opone a dicha variación. Esta propiedad es llamada "capacitancia" y tiene un efecto similar a la inductancia para la corriente. Los condensadores y capacitores son dispositvos eléctricos que se utilizan para agregar capacitancia a los circuitos. Su unidad es el faradio.

La reactancia inductiva X_L y la reactancia capacitiva X_C se pueden definir como

$$X_L = wL = 2\pi fL$$

$$X_C = \frac{1}{wC} = \frac{1}{2\pi fC}$$

donde: w = velocidad angulara. rad/seg

f = frecuencia. rev/seg o r.p.s. o hertz = Hz

L = autoinducción. Henrios = H

C = capacidad. faradios = F

X_L = reactancia inductiva. Ohms = Ω

X_C = reactancia capacitva. Ohms = Ω

La "impedancia es la relación entre el voltaje aplicado y la intensidad de corriente circulante.

$$Z = \frac{V}{I}$$

La impedancia o impedancia compleja equivale a las reactancias y resistencias ordenadas de la siguiente forma

$$Z = R + (X_L - X_C)\, i = (R,\ X_L - X_C) \qquad \text{(ohms)}$$

por lo tanto

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

La diferencia de potencial e intensidad son funciones senoidales o cosenoidales que se pueden representar por

$$V = V_{max}\ \text{Sen}(wt + \Theta_1) = V_{ef}\ \angle\Theta_1$$
$$I = \underbrace{I_{max}\ \text{Sen}(wt + \Theta_2)}_{\text{forma trigonométrica}} = \underbrace{I_{ef}\ \angle\Theta_2}_{\text{forma de Steinmetz}}$$

donde:

w = velocidad angular

t = tiempo

Θ = ángulo de fase

$|\Theta_2 - \Theta_1|$ = ángulo de defasamiento

El ángulo de defasamiento entre el voltaje y la intensidad varía entre -90° y 90°, dependiendo si en el circuito solo se encuentra -- una bobina o solo un condensador. Veamos estos casos hipotéticos.

$$V = V_{max}\ \text{Sen}(wt + \Theta) = \frac{V_{max}}{2}\ \angle\Theta$$

a) En el circuito solamente se encuentra una bobina

$$X_L = wL$$

$$Z = X_L\, i = wLi = wL\ \angle 90° \qquad \text{(forma de Steinmetz)}$$

$$I = \frac{\frac{V_{max}}{\sqrt{2}}\ \angle\Theta}{wL\ \angle 90°} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}\, wL}\ \angle\Theta - 90°$$

$$= \frac{V_{max}}{\sqrt{2}\, wL}\ \text{Sen}(wt + \Theta - 90°) = I_{max}\ \text{Sen}(wt + \Theta - 90°)$$

LA INTENSIDAD ESTA ATRASADA 90° CON RESPECTO AL VOLTAJE

b) En el circuito solamente se encuentra una resistencia

$$Z = R = R \angle 0°$$

$$I = \frac{\frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \angle \theta}{wL \angle 0°} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}\ wL} \angle \theta$$

La intensidad se encuentra en fase con respecto al voltaje.

c) En el circuito solamente se encuentra un condensador

$$X_C = \frac{1}{wC}$$

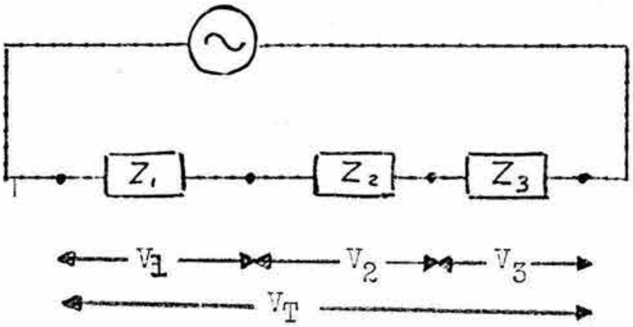
$$Z = -X_c\, i = -\frac{1}{wC}\, i = \frac{1}{wC} \angle -90°$$

$$I = \frac{\frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \angle \theta}{\frac{1}{wC} \angle -90°} = \frac{wC\ V_{max}}{2} \angle \theta + 90°$$

La intensidad esta adelantada 90° con respecto al voltaje

A continuación, se estudiarán los circuitos en serie y en para lelo con la inclusión de bobinas y condensadores.

I SERIE

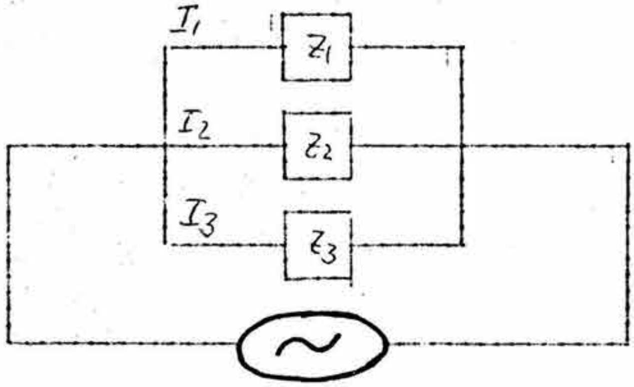


$$I_T = I_1 = I_2 = I_3$$

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3$$

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

II PARALELO



$$V_T = V_1 = V_2 = V_3$$

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

Para mayor facilidad de cálculo de impedancias colocadas en paralelo se conoce la admitancia compleja Y, que viene siendo el inverso de la impedancia compleja. Sus unidades son $\mho$ o Ω^{-1}

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R \pm Xi} = \frac{1}{R \pm Xi} \cdot \frac{R \pm Xi}{R \pm Xi} = \frac{R \pm Xi}{R^2 + X^2}$$

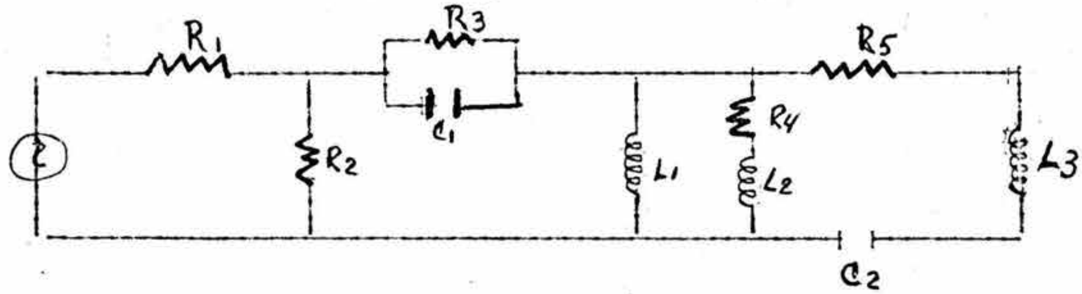
donde $\frac{R}{R^2 + X^2}$ se le conoce como inductancia G

$\frac{\pm X}{R^2 + X^2}$ se le conoce como suceptancia B

Por lo tanto: $\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$, es equivalente a

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

Ejemplo: Obtener la intensidad de corriente del siguiente circui to



Donde: $R_1 = 1\,\Omega$ $L_1 = 10$ mH

$R_2 = 2\,\Omega$ $L_2 = 20$ mH

$R_3 = 3\,\Omega$ $L_3 = 30$

$R_4 = 4\,\Omega$ $C_1 = 100\,\mu F$

$R_5 = 5\,\Omega$ $C_2 = 200\,\mu F$

La frecuencia es de 60 ciclos/seg

$$W = 2\pi f = 2\pi(60) = 377 \text{ rad/seg}$$

$$X_{L_1} = wL_1 = (377)\ (10 \times 10^{-3}) = 3.77\,\Omega$$

$$X_{L_2} = wL_2 = (377)\ (20 \times 10^{-3}) = 7.54\,\Omega$$

$$X_{L_3} = wL_3 = (377)\ (30 \times 10^{-3}) = 11.31\,\Omega$$

$$X_{C_1} = \frac{1}{wC_1} = \frac{1}{(377)\ (100 \times 10^{-6})} = 26.52\,\Omega$$

$$X_{C_2} = \frac{1}{wC_2} = \frac{1}{(377)\ (200 \times 10^{-6})} = 13.26\,\Omega$$

Para el cálculo de la impedancia compleja total se obtiene:

a) R_5, L_3 y C_2 se encuentran conecatos en serie

$$Z_1 = 5 + 11.31i - 13.26i = 5 - 1.95i$$

b) R_4 y L_2 se encuentran conectados en serie

$$Z_2 = 4 + 7.54i$$

c) R_3 y C_1 se encuentran conectadas en paralelo

$$Y' = \frac{1}{R_3} = 0.33\ \mho$$

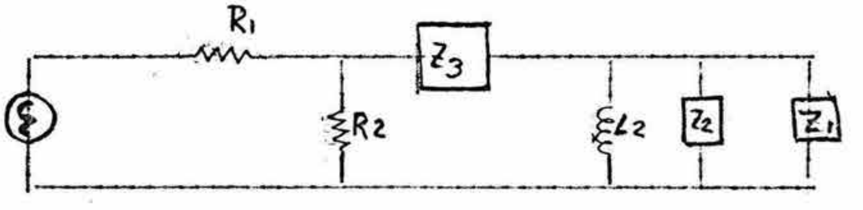
$$Y'' = \frac{1}{-X_C i} = -\frac{1}{26.52i} = 0.038i\ \mho$$

$$Y_3 = Y' + Y'' = 0.33 + 0.38i = 0.33 \angle 6°20'$$

$$Z_3 = \frac{1}{Y_3} = \frac{1}{0.33\angle 6°20'} = 3\angle -6°20'$$

$$= 3 - 0.34i$$

El circuito se simplifica a



d) Z_1, Z_2 y L_2 se encuentran conectados en paralelo

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{5 - 1.95i} = 0.174 + 0.07i$$

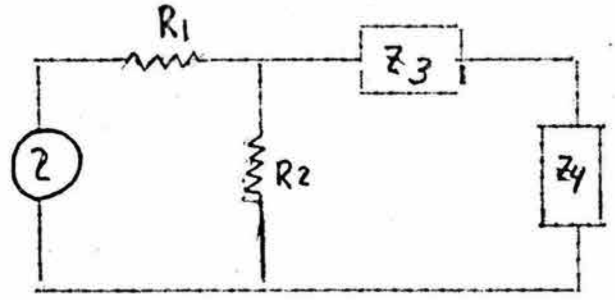
$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{4 + 7.54i} = 0.055 - 0.1\,i$$

$$Y''' = \frac{1}{X_{L_2}} = \frac{1}{3.77i} = -0.265i$$

$$Y_4 = Y_1 + Y_2 + Y''' = (0.174 + 0.07i) + (0.055 - 0.1i)$$

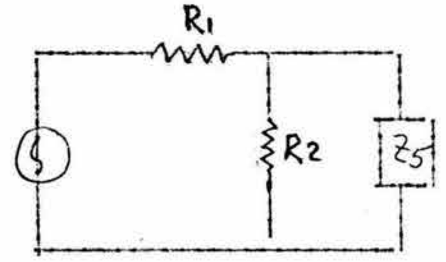
$$= 0.23 - 0.3i$$

$$Z_4 = \frac{1}{Y_4} = \frac{1}{0.23 - 0.3i} = 1.61 + 2.1i$$



e) Z_3 y Z_4 se encuentran conectados en serie

$$Z_5 = Z_3 + Z_4 = (3 - 0.34i) + (1.61 + 2.1i) = 4.61 + 1.76i$$



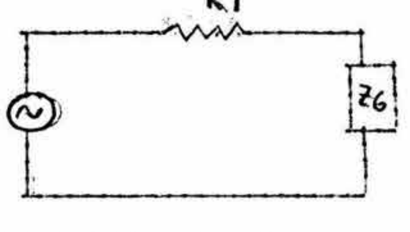
f) R_2 y Z_5 se encuentran conectados en paralelo

$$Y^{IV} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$Y_5 = \frac{1}{Z_5} = \frac{1}{4.61+1.76i} = 0.19 - 0.07i$$

$$Y_6 = Y^{IV} + Y_5 = 0.5 + (0.19 - 0.07i) = 0.66 - 0.7i$$

$$Z_6 = \frac{1}{Y_6} = \frac{1}{0.66 - 0.07i} = 1.5 + 0.16i$$



g) R_1 y Z_6 se encuentran en serie

$$Z_T = R_1 + Z_6 = 1 + (1.5 + 0.16i) = 2.5 + 0.16i$$

$$= 6.28 \angle 3°40'$$

Por lo tanto

$$I_T = \frac{V_T}{Z_T} = \frac{120 \quad 0°}{6.28 \quad 3°40'} = 19 \angle -3°40'$$

La intensidad es de 19 amperes y está atrasada 3°40' con respecto al voltaje.

OBJETIVOS:

1.) Hacer una breve introducción a los circuitos eléctricos sencillos.

2.) Usar las propiedades de los números complejos para resolver un problema de electrónica y así dar una aplicación de este sistema numérico.

3.3) ALGEBRA BOOLEANA

En su libro "Las leyes del pensamiento", George Boole (1815-1864) introdujo el primer pensamiento sistemático de la lógica, y para este propósito desarrolló el sistema algebraico conocido como "Algebra booleana". En los últimos cien años se han escrito pocas obras de matemáticas que hayan tenido mayor impacto en las matemáticas y la filosofía que esta famosa obra. Su significado fue adecuadamente expresado por Augusto De Morgan: "Nunca se hubiera creído que los procesos simbólicos del álgebra, inventados como instrumento para el cálculo numérico, resultaran adecuados para expresar actos del pensamiento y para establecer la gramática y el diccionario de un sistema universal de lógica, hasta que fue demostrado en "LAS LEYES DEL PENSAMIENTO"

Además de sus aplicaciones en el campo de la lógica, el álgebra booleana tiene otras dos aplicaciones importantes:

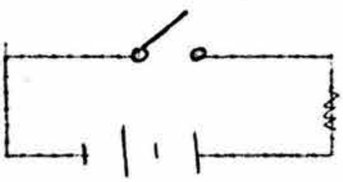
1) En el álgebra natural para tratar la combinación de elementos mediante las operaciones de intersección y unión de conjuntos; adjuntando la idea del "número de elementos" en un conjunto, el álgebra booleana sirve de fundamento para la teoría de probabilidades.

2) Hace como treinta años, Claude e Shannon dió a conocer una nueva área de aplicación del álgebra booleana mostrando que las propiedades básicas de combinación serie-paralelo de dispositivos eléctricos, tales como interruptores, podrían representarse adecuadamente mediante esta álgebra. Desde entonces, el álgebra booleana ha tenido una aplicación importante en la complicada tarea de diseñar circuitos telefónicos de conmutadores, dispositivos de control automático y computadoras electrónicas. Actualmente hay más interés en esta aplicación que en cualquier otra.

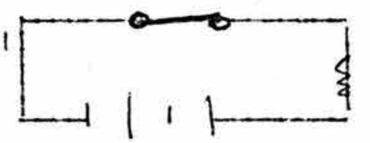
ALGEBRA DE CONMUTACION

Se sabe que para que la corriente pase por un circuito se requiere que éste se encuentre cerrado o sea que no haya interrupción de la fuente de energía eléctrica. Si existiera alguna, entonces se detiene el flujo de corriente y se dice que el circuito se encuentra abierto.

El interruptor ("apagador") es un dispositivo utilizado para abrir o cerrar un circuito o alguna parte del mismo en un instante o tiempo deseado



Circuito abierto



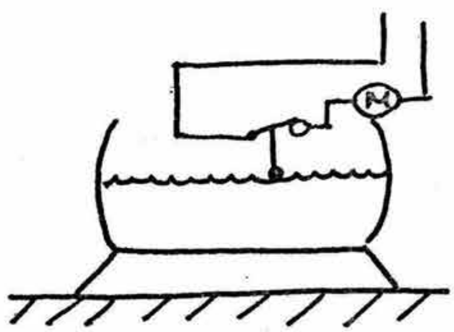
Circuito cerrado

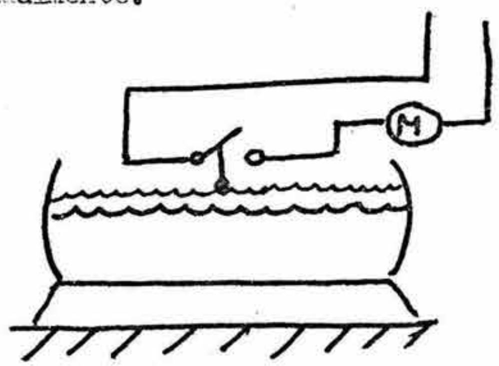
donde el símbolo "" representa a un interruptor.

Cuando pasa corriente por una resistenia (lámpara, refrigerador, televisión, radio, etc) la energía eléctrica se transforma en calor y calienta la resistencia. Si la temperatura aumenta mucho, se daña la resistencia, fundiéndose el conductor de la misma y se abre el circuito. Este efecto nocivo es aprovechado para la creación del fusible. Los fusibles son resistencias metálicas diseñadas para fundirse cuando la intensidad de la corriente es más alta que la que soporta su resistencia, o sea, la potencia consumida abre el circuito, y de esta forma el fusible protejerá a cualquier aparato eléctrico de la sobrecarga.

Los fusibles no sirven como interruptores de control de aparatos eléctricos, sino como interruptores de la intensidad de corriente.

Para el control de ventiladores, bombas, sopladores y en general- de motores pequeños se usan distintos tipos de controles, el más aplicable es el control automático para el cual, se utilizan interruptores de presión, de flotador o termostatos. Por ejemplo, Si tenemos un tanque que se desea llenar y le colocamos un flotador, de tal manera que al llenarse el tanque, el flotador abra el circuito que controla la bomba y se detenga el suministro de agua. Al vaciarse el tanque, el flotador baja de posición y cierra el circuito, haciendo funcionar la bomba; en esta forma es posible mantener el tanque con agua sin necesidad de controlarlo manualmente.





Sin explicar cada uno de los distintos interruptores para control automático, es fácil ver la importancia de este tipo de control.

Ejemplo: Supóngase que una bomba llena dos tanques y en cada uno se tiene un interruptor de flotador. Cómo conectaría estos dos interruptores para el control de los tanques.

Si A y B denotan a los interruptore, obsérvese que el siguiente arreglo en paralelo satisface los requerimientos (tabla I)

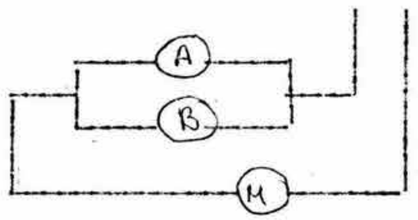
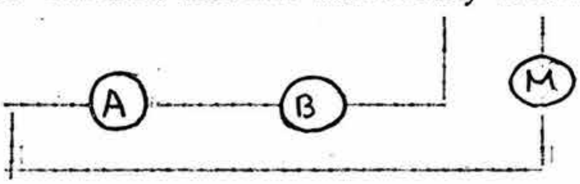


TABLA I

Tanque A	Tanque B	Interruptor A	Interruptor B	Circuito	Motor
lleno	lleno	abierto	abierto	abierto	no funciona
lleno	no lleno	abierto	cerrado	cerrado	funciona
no lleno	lleno	cerrado	abierto	cerrado	funciona
no lleno	no lleno	cerrado	cerrado	cerrado	funciona

Ejemplo: Se tiene un tanque que suministra cierto líquido a un proceso. La tubería que comunica el tanque con la fábrica tiene una válvula solenoide que sirve para dejar pasar el líquido cuando se necesite en el proceso. Si A representa a un interruptor de flotador en el tanque y B representa al interruptor de la tubería. llamado solenoide, entonces el siguiente arrelo en serie



llena las siguientes necesidades

I. No se requiere llenar el tanque y no se requiere líquido en el proceso

II No " " " " " " " " " " " "

III " " " " " " no " " " " " "

IV " " " " " " " " " " " "

TABLA II

A	B	Circuito	Motor de la bomba
abierto	abierto	abierto	no funciona
abierto	cerrado	abierto	no funciona
cerrado	abierto	abierto	no funciona
cerrado	cerrado	cerrado	funciona

En el único caso que se necesita que funcione la bomba es cuando no hay suficiente líquido en el tanque y se requiere líquido en el proceso, IV cas

Si denotamos por el símbolo "0" cuando el interruptor está abierto y por "1" cuando está cerrado, las dos tablas anteriores quedarían

TABLA I

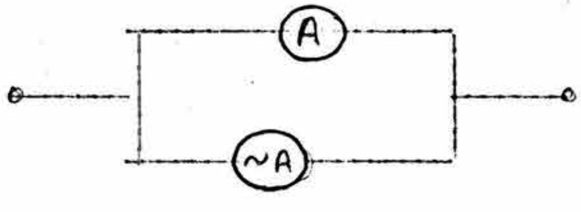
A	B	Circuito
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

TABLA II

A	B	Circuito
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

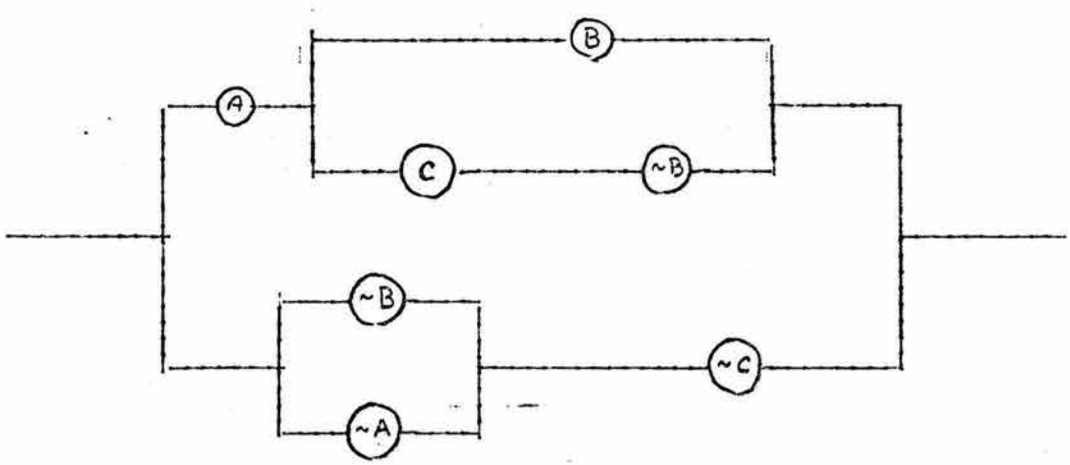
En la tabla I, la corriente puede pasar por un interruptor "o" por el otro para cerrar; el circuito en la tabla II, la corriente debe pasar por un interruptor "y" por el otro para cerrar el circuito. Si denotamos por "$\vee$" la disyunción y por "$\wedge$" la conjunción, la tabla I es "$A \vee B$" y la tabla II es "$A \wedge B$".

Ejemplo: Si se coloca un tocacintas en un automóvil y se desea utilizar una sola bocina para escuchar la radio y el toca-cintas, se necesitará colocar un interruptor especial para que no se escuchen simultáneamente los sonidos de los aparatos con el fin de no dañar la salida del canal de la bocina. Si " A" nos representa lo contrario del interruptor A -si uno está cerrado el otro está abierto-, el siguiente arreglo cubre las especificaciones mencionadas



A (Interruptor del sonido de la radio)	$\sim A$ (Interruptor del sonido del tocacintas)	$A \vee \sim A$ Circuito
1	0	1
0	1	1

Ejemplo: Explique mediante una tabla el funcionamiento del siguiente circuito conmutador



Se observa lo siguiente:

Rama I; C y $\sim B$ se encuentran en serie: $C \wedge \sim B$

B se encuentra en paralelo con $(C \wedge \sim B)$: $B \vee (C \wedge \sim B)$

A se encuentra en serie con $\left[(B \vee (C \wedge \sim B)\right]$: $A \wedge \left[(B \vee (C \wedge \sim B)\right]$

Rama II; $\sim B$ se encuentra en paralelo con $\sim A$: $\sim B \vee \sim A$

$(\sim B \vee \sim A)$ se encuentra en serie con $\sim C$: $(\sim B \vee \sim A) \wedge \sim C$

Como las ramas I y II se encuentran en paralelo

$$\left\{A \wedge \left[B \vee (C \wedge \sim B)\right]\right\} \quad \vee \quad \left\{(\sim B \vee \sim A) \wedge \sim C\right\}$$

Las permutaciones (posibles maneras de escoger los números 0 y 1) de dos signos en n interruptores es 2^n. Para nuestro ejemplo será $2^3 = 8$

TABLA IV (a)

A	B	C	$C \wedge \sim B$	$B \vee (C \wedge \sim B)$	$A \wedge [B \vee (C \wedge \sim B)]$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0
					Rama I

TABLA IV (b)

A	B	C	$\sim B \vee \sim A$	$(\sim B \vee \sim A) \wedge \sim C$		"Rama I" $\vee$ "Rama II"
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1
				Rama II	Rama I	

Se observa que solo en los casos:

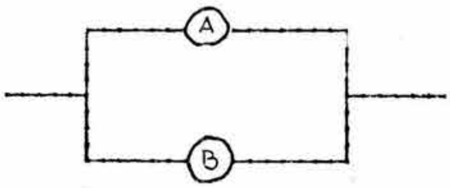
A	B	C	Circuito
0	1	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

El circuito se encuentra abierto, y si A está cerrado, el circuito también lo estará sin importar el estado de los interruptores B y C.

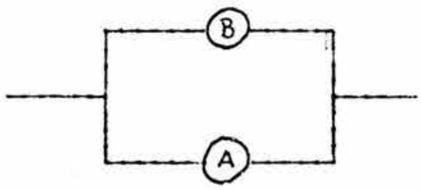
Se dice que dos circuitos de conmutadores son equivalentes si las condiciones de cerradura de los dos circuitos son iguales para toda posición dada de los conmutadores involucrados; como ejemplo, se tienen las siguientes leyes de equivalencia que pueden demostrarse por medio de tablas.

(1) Conmutativa

a)

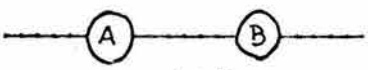


≡

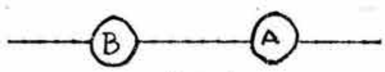


$A \vee B \equiv B \vee A$

b)



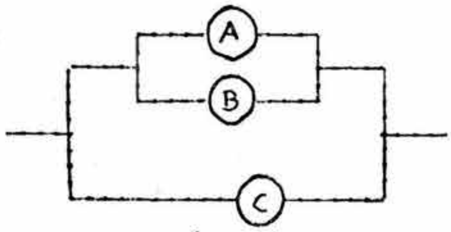
≡



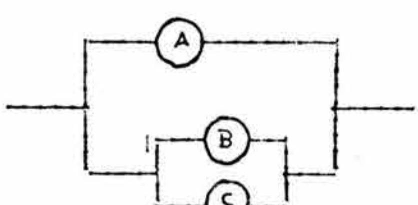
$A \wedge B \equiv B \wedge A$

(2) Asociativa

a)

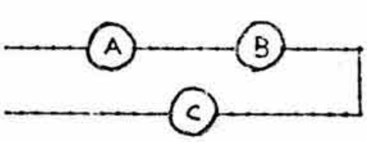


≡

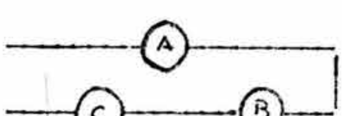


$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$

b)



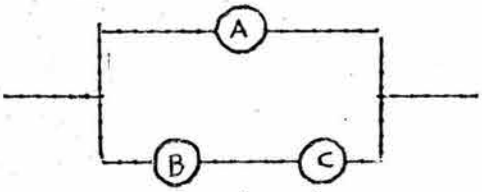
≡

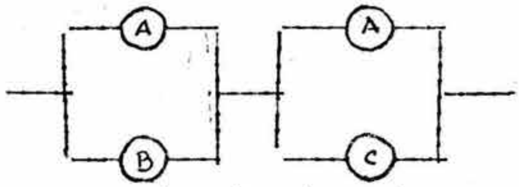


$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$

(3) Distributiva

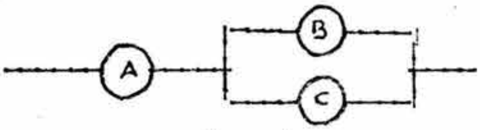
a)



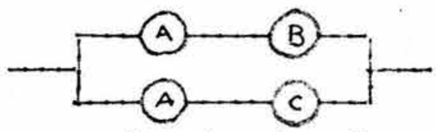


$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

b)



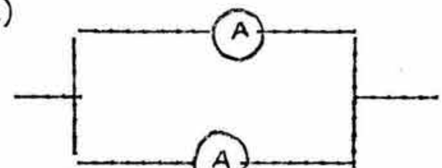
$\equiv$



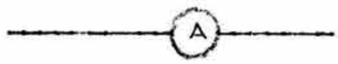
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(4) De simplificación

a)



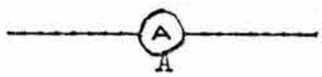
$\equiv$



$A \vee A \equiv A$

b)

$\equiv$

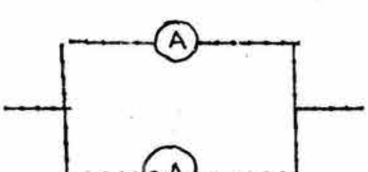


$A \wedge A \equiv A$

Existen varios teoremas importantes en el álgebra booleana, algunos de ellos son expuestos a continuación en forma de proposiciones para circuitos de conmutadores

I

a) El circuito puede encontrase siempre cerrado (tautología)



$\equiv$

$A \vee \sim A \equiv 1$

b) El circuito puede encontrarse siempre abierto (contradicción)

$A \wedge \sim A \equiv 0$

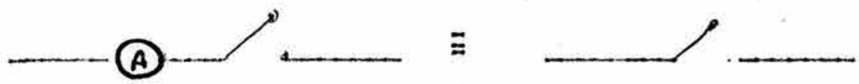
II

Para cada conmutador A en un circuito se tiene:

a)

$A \vee 1 \equiv 1$

b)



$A \wedge 0 \equiv 0$

c)

$A \vee 0 \equiv A$

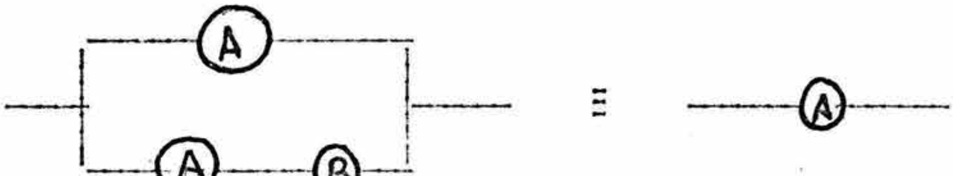
d)

$A \wedge 1 \equiv A$

III

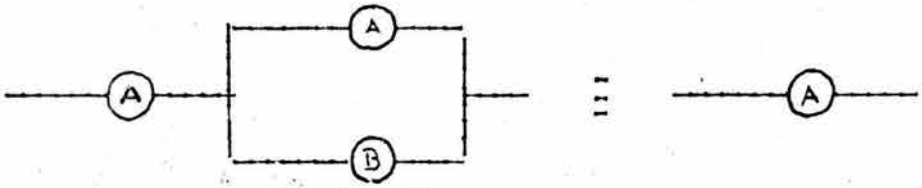
Para cada par de conmutadores A y B

a)



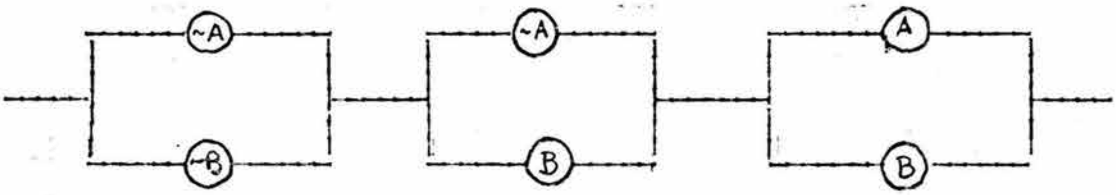
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$

b)



$$A\wedge(A\vee B) \equiv A$$

Ejemplo: Utilice las propiedades mencionadas para simplificar el siguiente circuito



Se tiene

$$(\sim A\vee\sim B)\wedge(\sim A\vee B)\wedge(A\vee B)$$

Por la ley (3b)

$$\left\{(\sim A\wedge\sim A)\vee(\sim A\wedge B)\vee(\sim B\wedge\sim A)\vee(\sim B\wedge B)\right\}\wedge(A\vee B)$$

Por las leyes (1b) y (4b) y la proposición (1b)

$$\left\{(\sim A)\vee(\sim A\wedge B)\vee(\sim A\wedge\sim B)\vee(0)\right\}\wedge(A\vee B)$$

Por la proposición (2c)

$$\left\{(\sim A)\vee(\sim A\wedge B)\vee(\sim A\wedge\sim B)\right\}\wedge(A\vee B)$$

Por la ley (3b)

$$(\sim A\wedge A)\vee(\sim A\wedge B\wedge A)\vee(\sim A\wedge\sim B\wedge A)\vee(\sim A\vee B)\vee(\sim A\wedge B\wedge B)\vee(\sim A\wedge\sim I$$

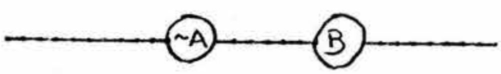
Por la ley (4b) y proposición (1b)

$$0\vee 0\vee 0\vee(\sim A\wedge B)\vee(\sim A\wedge B\wedge B)\vee 0$$

Por la ley (4a y b) y proposición (2c)

$$\sim A\wedge B$$

Por lo tanto el circuito se reduce a



Nótese que se han encontrado las tablas de disyunción, conjunción y negación sin necesidad de utilizar el álgebra de las proposiciones sino única y exclusivamente el álgebra de conmutación. Si se desea ampliar este tema vease: "Algebra booleana y sus aplicaciones" de Whitesitt.

OBJETIVOS

1) Hacer una breve introducción al álgebra de conmutación
2) Deducir las tablas de disyunción, conjunción y egación y aplicarlas a un circuito cualquiera.
3) Mencionar algunas propiedades y aplicarlas en la simplificación de un circuito de conmutadores.

CAPITULO IV

INTRODUCCION A LA TEORIA DE ECUACIONES

Una expresión algebraica de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad , a_0 \neq 0$$

donde n es un entero no negativo y los números a_i son de un campo específico (digamos Q ó R ó C), se llama "polinomio de grado "n" en "x" sobre este campo". Se usarán notaciones tales como p(x), q(x) y r(x) para represen - tar polinomios en x; por ejemplo

$$p(x) = 4x^3 - 7x^2 + 2x - 1$$

es un polinomio de grado 3 sobre el campo R.

ALGUNOS TEOREMAS FUNDAMENTALES

I.- Teorema del residuo. "Si r es una constante, y si un polinomio p(x) es dividido por (x - r) hasta obtener una constante como residuo entonces este residuo es igual a p(r)".

II.- Teorema del factor. "Si p(r) = 0, entonces (x - r) es un factor de p(x). Esto es, si r es una raiz de p(x) = 0, entonces (x - r) es un factor de p(x)". Este teorema también es válido en el otro sentido. "Si (x - r) es un factor de p(x), entonces p(r) = 0, o r es una solución de la ecuación p(x) = 0".

III.- Teorema fundamental del Algebra. "Cada ecuación polinomial p(x) = 0 de grado n > 0 con números complejos como coeficientes, tiene al menos una raiz"."

IV.- "Si $p(x)$ es un polinomio de grado n en x, donde $n > 0$, existen n factores lineales en x cuyo producto es $p(x)$"

V.- "Cualquier ecuación $f(x) = 0$ de grado $n > 0$ tiene, a lo más, n raíces distintas".

VI.- "Si un número complejo $(a + bi)$, con a y b reales y $b \neq 0$, es una raiz de ecuación polinomial $p(x) = 0$ con coeficientes reales, entonces el número complejo $(a - bi)$ también es una raíz de $p(x) = 0$

Estos seis teoremas fundamentales servirán para saber:

(1) Que un polinomio de grado n es factorizable en exactamente n factores

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$
$$= a_0(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

(2) Que una ecuación polinomial $p(x) = 0$ de grado n tiene exactamente n raíces:

$$r_1, r_2, \dots, r_n$$

(3) Que una ecuación polinomial $p(x) = 0$ de grado n con coeficientes reales que tiene como raiz al número complejo $(a + bi)$, tendrá como otra de sus raíces al conjugado de $a + bi$.

DIVISION SINTETICA Y ECUACION DEGRADADA

Si se desea dividir a un polinomio $p(x)$ de la forma

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

entre $(x - r)$, se pueden seguir los siguientes pasos:

(1) Colocar en la primera linea de los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots a_0$, de $p(x)$ en ese orden. Colocar a "r" en el lado derecho de este arreglo.

(2) Multiplicar a_n por r, sumar el producto "a_nr" a "a_{n-1}", escri-

bir el producto y la suma debajo de a_{n-2} en el segundo y tercer renglón - respectivamente; continuar este proceso hasta el último coeficiente de p(x)

El último número en el tercer renglón es el residuo de la división, y los otros números en el tercer renglón son los coeficientes del cociente de la división colocados en la misma forma del paso (1).

$$\begin{array}{cccccc|l} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \cdots & a_1 & a_0 & \underline{r} \\ & a_n r & rb_{n-2} \cdots & b_1 r & b_0 r & \\ \hline a_n & b_{n-2} & b_{n-3} \cdots & b_0 & R & \end{array}$$

o sea, $$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{x - r} = a_n x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0 x + \frac{R}{x-r}$$

Si p(x) = 0 y el residuo de la división de p(x) entre x-r es cero, por los teoremas del factor y del residuo - I y II-, (x - r) es un factor de p(x) y el cociente de la división es una ecuación degradada (en un grado).

$$p(x) = (x - r)(a_n x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0) = 0$$

Ecuación degradada

Si obtenemos una raiz o factor de la ecuación degradada, resultará otro factor y una nueva ecuación degradada: asi, en forma sucesiva, es - posible obtener las n raíces

$$p(x) = a_0 (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n) = 0$$

(ver teoremas IV y V)

OBJETIVOS:

1.- Enunciar brevemente 6 teoremas que servirán para una mejor comprensión de este capítulo.

2.- Explicar como se obtiene una ecuación degradada usando el método de división sintética.

SOLUCION DE LA ECUACION POLINOMIAL GENERAL DE TERCER GRADO

Una ecuación polinomial de tercer grado puede ser escrita en la forma

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

si $x = y - \frac{1}{3}b$, tenemos

$$y^3 + py + q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

donde $p = c - \frac{b^2}{3}$

$$q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}$$

Esta ecuación (2) es llamada "ecuación cúbica reducida". Si $y = z - \frac{p}{3z}$, entonces z satisface

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0 \quad ó \quad z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \quad \ldots.. \quad (3)$$

Resolviendo la ecuación (3) por la fórmula de las cuadráticas

$$z^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{R} \;\; y \;\; z^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{R} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

donde $R = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$

La ecuación (4) tiene tres soluciones, z_1, z_2 y z_3, y con estos valores se obtienen las raíces de la ecuación (1)

$$x_1 = z_1 - \frac{p}{3z_1} - \frac{b}{3}$$

$$x_2 = z_2 - \frac{p}{3z_2} - \frac{b}{3}$$

$$x_3 = z_3 - \frac{p}{3z_3} - \frac{b}{3}$$

Niccolò Tartaglia (1506 - 1557) fue quien desarrolló el método-expuesto y confió el mismo a algunos profesores de la universidad de Bolonia (de la cual él era profesor), sin embargo, Gerónimo Cardano (1501-1576) lo publicó como suyo en 1545 en su famoso tratado "Artis Magnas sive de - regulis algebraicis, o Ars Magna"

Ejemplo: Utilizando la ecuación de Van der Waals, calcular el-volúmen que ocupan 10 moles de bióxido de carbono a una presión de 50 atm y una temperatura de 500°K. Las constantes de Van der Waals para el CO_2 - son, a= 0.36 y b= 0.0428

Si el volúmen es x se tiene

$$\left[50 + \frac{(10)^2(0.36)}{x^2}\right]\left[x - (10)(0.0428)\right] = (10)(0.082)(500)$$

eliminando los cocientes

$$50x - 21.4 + \frac{36}{x} - \frac{15.4}{x^2} = 410$$

Multiplicando la ecuación por $\frac{x^2}{50}$ y rearreglando

$$x^3 - 8.628x^2 + 0.72x - 0.308 = 0$$

Aplicando las fórmulas de Tartaglia

$$b = -8.628$$

$$c = 0.72$$

$$d = -0.308$$

$$p = c - \frac{b^2}{3} = 0.72 - \frac{(-8.628)^2}{3} = -24.094$$

$$q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27} = -45.814$$

$$R = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 6.69$$

$$z = \frac{-q}{2} + \sqrt{R} = 25.494 \Rightarrow z_1 = 2.943$$

$z^3 = -\underline{q} - R = 20.32 \qquad z_1{}' = 2.729$

Las soluciones Z_2, Z_3, Z_2' y Z_3' están dadas en el campo de los complejos y no son de nuestro interés pues no representan un volumen

$$x_1 = z_1 - \frac{p}{3z_1} - \frac{b}{3} = 8.548$$

$$x_1' = z_1' - \frac{p}{3z_1'} - \frac{b}{3} = 8.548$$

Por lo tanto el volumen es de 8.548 litros.

Obsérvese que no importa cual de las dos soluciones de z se tomen z_1 ó z_1', las raíces x_1 y x_1' deben concordar.

Si se aplica el método de la división sintética

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & -8.628 & 0.72 & -0.308 & & 8.548 \\ & 8.548 & -0.684 & 0.308 & & \\ \hline 1 & -0.08 & 0.036 & 0 & & \end{array}$$

Se obtendrá una ecuación degradada de orden dos y se comprobará que 8.548 es una raiz de la ecuación. Como la ecuación degradada es de grado dos, es sencillo obtener sus raíces.

$$x^2 - 0.08x + 0.036$$

$$x = \frac{0.08 \pm \sqrt{(0.08)^2 - 4(0.036)}}{2}$$

$$= 0.04 \pm 0.185i$$

Por lo tanto

$$p(x) = x^3 - 8.628\, x^2 + 0.72\, x - 0.308$$

$$= (x - 8.548)(x - 0.04 - 0.185i)\ (x - 0.04 + 0.0185i)$$

Obsérvese que las dos raíces complejas de la forma a + bi son conjugadas-entre sí (véase teorema VI)

OBJETIVOS:

1.- Exponer el método de Tartaglia
2.- Aplicar este método para obtener el volúmen de un gas de - Van der Waals
3.- Hacer uso de la división sintética para la obtención de otras raíces.

SOLUCION DE LA ECUACION POLINOMIAL DE CUARTO GRADO

Una ecuación polinomial de cuarto grado puede ser escrita en la forma

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

de la ecuación (1)

$$x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo

$$x^4 + bx^3 + \frac{1}{4} b^2x^2 = \frac{1}{4} b^2x^2 - cx^2 - dx - e$$

$$(x^2 + \frac{1}{2} bx)^2 = (\frac{1}{4}b^2 - c)\, x^2 - dx - e \quad \ldots\ldots (3)$$

Sea y un número que se especifica después. El lado izquierdo de la ecuación (3) será un cuadrado perfecto si se añade

$$y(x^2 + \frac{1}{2}bx) + \frac{1}{4} y^2 \qquad \ldots\ldots (4)$$

si (4) es añadido en ambos lados de (3) se obtiene

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y\right)^2 = \left(\frac{1}{4}b^2 - c + y\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}by - d\right)x + \left(\frac{1}{4}y^2 - e\right) \ldots (5)$$

el lado derecho de (5) será un cuadrado perfecto si

$$\left(\frac{1}{2}by - d\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}b^2 - c + y\right)\left(\frac{1}{4}y^2 - e\right) = 0 \text{ , o sea}$$

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y - b^2e + 4ce - d^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

A esta ecuación se le llama"ecuación cúbica resolvente", resolviendo esta ecuación se obtiene se obtiene una de las raíces, supóngase que es S; se- sustituye ésta en la ecuación (5) y resultará el cuadrado de un polinomio lineal ($hx + k$) en el lado derecho.

$$\text{donde} \quad h = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c + S}$$

$$k = \sqrt{\frac{S^2}{4} - e}$$

$$2hk = \frac{bS}{2} - d$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}S\right)^2 = (hx + k)^2 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

de (7) ,

$$x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}S = hx + k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}S = -(hx + k) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Cada una de las ecuaciones (8) y (9) puede ser resuelta usando la fórmula para las cuadráticas. Los cuatro valores así obtenidos son las raíces de (1).

Este método fue inventado por el matemático italiano Ludovico F Ferrari (1522-1560)

Ejemplo: Utilizando la ecuación de estado de Kammerlingh Onnes

$$P\bar{V} = a + bP + cP^2 + dP^3 + eP^4$$

donde P está expresada en atmósferas

$\bar{V}$ está expresada en litros/mol

a, b, c, d y e son constantes características de cada gas, tabulados a distintas temperaturas.

Calcular la presión a la que se encuentra el hidrógeno a 500° C. Supóngase que su volúmen molar es de 0.6345 lt/mol

El valor de los coeficientes de la ecuación de estado para el - hidrógeno a 500° C son:

$$a = 63.446$$

$$b = 1.7975 \times 10^{-2}$$

$$c = 1 \times 10^{-6}$$

$$d = -1.62 \times 10^{-9}$$

$$e = 1.05 \times 10^{-12}$$

La ecuación de estado quedaría como

$$0.6345P = 63.446 + 0.017975P + 1 \times 10^{-6} P^2 - 1.62 \times 10^{-9} P^3 + 1.05 \times 10^{-12} P^4$$

Rearreglando

$$1.05 \times 10^{-12} P^4 - 1.62 \times 10^{-9} P^3 + 1 \times 10^{-6} P^2 - 0.587 \times 10^{12} P + 6.04 \times 10^{13}$$

Entonces

$$b = -1.543 \times 10^3$$

$$c = 0.952 \times 10^6$$

$$d = -0.587 \times 10^{12}$$

$$e = 6.04 \times 10^{13}$$

y la ecuación cúbica resolvente es:

$$y^3 - 0.952 \times 10^6 y^2 + 66.41 \times 10^{13} y - 3.44 \times 10^{23}$$

una de las raices de la ecuación cúbica resolvente es

$S = 6,72 \times 10^7$ (por el método de Newton que se enuncia en la siguien te parte)

con este resultado

$$h = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c + S} = \pm 8.176 \times 10^3 \quad -$$

$$k = \sqrt{\frac{S^2}{4} - e} = \pm 3.27 \times 10^7 \quad +$$

$$2hk = \frac{bS}{2} - d = 53.5 \times 10^{10}$$ (los valores de h y de k tienen el mismo signo)

Las ecuaciones que contienen las mismas raices de la ecuación cuadrática son

$$x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}S = hx + k$$

$$x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}S = -(hx + k)$$

o sea

$$x^2 - 8.95 \times 10^3 x + 0.9 \times 10^6 = 0$$

$$x^2 + 7.4 \times 10^3 x + 6.63 \times 10^7 = 0$$

Aplicando la fórmula de las cuadráticas

$$x_1 = 102$$

$$x_2 = 8,848$$

$$x_3 = -3,700 + 7.25i$$

$$x_4 = -3,700 - 7,250i$$

De estos cuatro valores, el único que corresponde a una respues ta lógica es el primero, por lo tanto

$$P = 102 \text{ atm.}$$

METODO DE NEWTON

Para un polinomio $p(x)$ se hace una estimación de la raiz, por ejemplo r_1, posteriormente se obtiene un valor r_2 de la siguiente forma

$$r_2 = r_1 - \frac{p(r_1)}{p'(r_1)}$$

donde $p'(r_1)$ es la primera derivada de $p(x)$ valuado en r_1. Este valor estará más cerca de la raiz que r_1. Iteradamente se obtiene

$$r_3 = r_2 - \frac{p(r_2)}{p'(r_2)}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$r_{i+1} = r_i - \frac{p\ (r_i)}{p'\ (r_i)} \approx r_i$$

Ejemplo: Resolver la ecuación cubica resolvente del ejemplo anterior.

$$p(y) = y^3 - 0.952 \times 10^6 y^2 + 66.41 \times 10^{13} y - 3.44 \times 10^{23}$$

$$p'(y) = 3y^2 - 1.904 \times 10^6 y + 66.41 \times 10^{13}$$

Primera estimación:

$$r_1 = 1 \times 10^8$$

$$r_2 = r_1 - \frac{p(r_1)}{p'(r_1)} = 7.81 \times 10^7$$

$$r_3 = r_2 - \frac{p(r_2)}{p'(r_2)} = 6.9 \times 10^7$$

$$r_4 = r_3 - \frac{p(r_3)}{p'(r_3)} = 6.722 \times 10^{-7}$$

$$r_5 = r_4 - \frac{p(r_4)}{p'(r_4)} \approx 6.72 \times 10^{-7}$$

La convergencia del proceso depende principalmente del tipo de ecuación inicial y de la aproximación de a_0 y x_0. El proceso de aproximaciones sucesivas puede a veces converger o divergir a la raiz, que no tiene sentido físico. Pero en los caso simples, que se encuentran con más frecuencia en la fisicoquímica, no es necesario tomar medidas especiales de prevención.

Cabe hacer notar que si en cualquiera de las aproximaciones se cometió un error aritmético, ésto sólo extenderá el proceso, pero no influiría en el resultado final. Por este motivo, si en las primeras aproximaciones la magnitud de la raiz varía mucho, se pueden tomar números intermedios con una pequeña cantidad de cifras significativas para acelerar el cálculo; y solo cuando las variaciones de la raiz al pasar a la siguiente aproximación se hacen pequeñas, hay que realizar cálculos exactos. Por lo tanto, este método será el más utilizado en la obtención de raíces de una ecuación.

OBJETIVOS:

1.- Exponer dos métodos específicos para la resolución de ecuaciones de tercero y cuarto grado

2.- Ejemplificar el objetivo anterior con la ecuación de Van der Waals y la ecuación de Kammerlingh Onnes.

3.- Explicar el proceso y la utilidad del método de Newton, re calcando que es el método más sencillo y utilizado en los pro - blemas fisicoquímicos.

COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

"La ciencia física no solo nos da (a los matemáticos) una oportunidad para resolver problemas, sino que nos ayuda también a encontrar los medios de resolverlos".

Henri Poincaré

Los seis meses en que ha funcionado el Taller de Matemáticas I en el Conjunto I de la Escuela Nacional de Estudioa Profesionales Cuautitlán, U.N.A.M, fueron distribuidos de la siguiente forma:

1.) Los dos últimos meses del primer semestre de 1975 se dedicaron a reelaborar todos los bosquejos que se tenían sobre este taller, con alumnos de tres distintas clases, a saber, a) con promedio cercano a diez, b) con promedio superior a ocho, c) con promedio inferior a ocho.

Estos resultados se adaptaron en forma de curso, el cual serviría como base para el segundo semestre del mismo año del Taller de Matemáticas I; aquí se trataron de ligar los conceptos adquiridos en el nivel medio y en el primer semestre de su carrera con los conocimientos recibidos en la cátedra de Matemáticas I, aunándose algunos de los tópicos sencillos de interés como son: fórmula empírica, circuitos eléctricos sencillos, circuitos con conmutadores, etc.

2.) En los cuatro meses intermedios del segundo semestre de 1975 se aplicó el desarrollo aquí enunciado - con ciertas variantes que aquí ya no aparecieron- a todos los alumnos que desearon asistir a este curso extra curricular. La asistencia se dividió de la siguiente forma: a) estudiantes que solo cursaban de cuatro a seis materias en su primer semestre, b) estudiantes que cursaban materias del primero y segundo semestre, c) estudiantes regulares, y d) estudiantes de C.C.H. Naucalpan que solo tomaban este curso en la E.N.E.P.C. U.N.A.M.

Al finalizar este curso fue posible afirmar:

1.- El estudiante de química encuentra de gran interés asistir a estos cursos, pese al poco tiempo con que cuenta.

2.- El estudiante puede aprender sin gran dificultad los temas enunciados.

3.- Casi cada pasaje de esta tesis se esfuerza por mostrar una aplicación y ésta fue utilizada por los estudiantes en sus asignaturas del primer año.

SOBRE LOS PUNTOS ANTERIORES.

1 El estudiante promedio del primero y segundo semestre de química lleva el siguiente horario (de lunes a viernes):

30-40 horas de clase

15-25 horas de viaje (de su casa a la escuela y viceversa)

10-15 horas de sus comidas

40-45 horas de descanso nocturno

entonces, el estudiante cuenta con

25-(-5) horas a la semana

para estudiar sus clases, hacer sus tareas, hacer sus reportes de laboratorio, preparar sus exámenes y asistir a sus asesorías, esto sin contar sus salidas y aseos personales. Pese a lo anterior, el estudiante asistía regularmente al Taller de Matemáticas (2-4 horas por semana). Se le mostró la tabla anterior y se les pregunto si estaban de acuerdo con la misma, la respuesta general fue la siguiente: " es cierta la tabla de arriba excepto por las horas de descanso nocturno, la cual varía de 4-6 horas por día". Ahora yo me atrevería a hacer la siguiente pregunta, "¿No será ésta una de las causas por la cual nuestros compañeros de la Facultad de Química no tienen el rendimiento adecuado en su desarrollo dentro de la misma?"

El estudiante asiste al taller en sus "horas libres" entre clase y clase; estas horas libres -no mencionadas en la tabla anterior- fueron aprovechadas por 146 estudiantes en el Taller de Matemáticas.

② Al final del curso del Taller de Matemáticas I, se procedió a efectuar un exámen -dividido en dos parte, con un intervalo entre cada uno de una semana- que aportó los siguientes resultados.

I Parte

Pregunta | Solución Correcta

1.- Obtenga las unidades del número de Reynolds R = vlp

donde v = velocidad

l = longitud

= densidad

= viscosidad _ 68.4%

2.- Una aleación de Cu y Zn contiene 74.5% en peso de Cu. Calcular el % en mol de Cu en la aleación. _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 81.2%

3.- ¿Cuál es el calor de formación de la nitroglicerina, si se conoce la siguiente reacción.

$4C_3H_5(NO_3)_3 + 11O_2 \longrightarrow 12CO_2 + 12NO_2 + 10H_2O + 1330 Kcal$? _ _ _ _ _ _ 73%

4.-¿Cuál es el volúmen promedio ocupado por una molécula de agua? Con este dato obtenga el diámetro aproximado de la molécula. Supóngase que está colocada dentro de un cubo. _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 82.1%

5.- ¿ Cuáles son las fórmulas moleculares de los siguientes compuestos

a) 59.5%C, 5.8%H, 34.7%N, M = 121
b) 30.3%C, 2.52%H, 67.2%Br, M = 238 ? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 75.4%

6.- ¿ Cuánto equivale 19.34 $\frac{BTU}{día\ ft^2\ °F/in}$

en $\frac{Cal}{seg\ cm\ °C}$? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 89.8%

7.- 635 mg de un gas desconocido ocupan un volúmen de 125 cm^3 a STP. ¿ Cuál es el peso molecular del gas ?. _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 81%

8.- (Para los estudiantes que llevaron el curso de logaritmos). Calcule la viscosidad del nitrógeno a 50°C y 854 atm por el método de Watson-Uyehora

donde $\mu_c = 7.70\ M^{1/2}\ P_c^{2/3}\ T_c^{-1/6}$
$M = 28$ g/mol
$Pc = 33.5$ atm
$Tc = 126.2$ °K

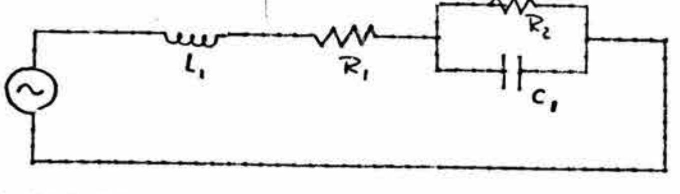
$\mu / \mu_c = 2.39$ (por gráfica) ---------------------- 78.3%

9.- El ácido sobrante de un proceso de nitración contiene el 23% de HNO_3, 57% H_2SO_4 y 20% H_2O en peso. Este ácido ha de concentrarse para que contenga 27% HNO_3 y 60% H_2SO_4 por adición de H_2SO_4 concentrado (93%) y HNO_3 concentrado (90%). Calcular los pesos de ácido sobrante y concentrado que deben combinarse para obtener 1000 lb de mezcla deseada. ---------------- 59%

II Parte

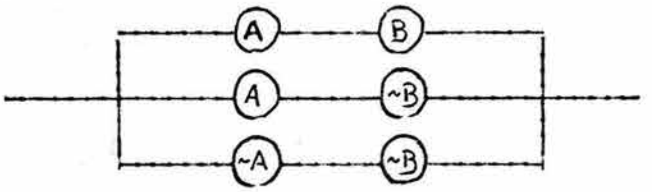
Pregunta | Solución correcta

1.- Encuentre la intensidad del siguiente circuito



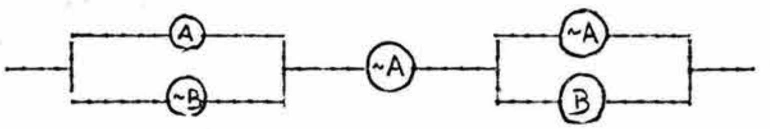
donde V = 100 45°
f = 60 ciclos/seg
R = 1
R = 2
C = 100
L = 50 mH
---------------------- 63.2%

2.- Simplifique el siguiente circuito



Verifique su respuesta ------------------ 84.6%

3.- Explique el funcionamiento del siguiente circuito, por medio de una tabla; obtenga alguna conclusión.



------------ 81.3%

4.- Cuando se calienta azúcar a 600° C en ausencia de aire, se convierte en una masa negra de carbón (C) y agua (H_2O) que se volatiliza como gas. Si 465 mg de azúcar producen 196 mg de carbono. ¿ Cuál es la fórmula empírica del azúcar?. Nota Obtenga hasta 4 cifras decimales de aproximación en sus cálculos. (El alumno no estaba prevenido para hacerle una pregunta de la I parte) ------------------ 75.1%

5.- Una disolución contiene 0.4M HAc y 0.2 M NaAc. Qué iones y moléculas están presentes en ella y cuáles son sus concentraciones
Kion (HAc) = 1.8×10^{-5}
Nota: tener cuidado con las aproximaciones decimales/ ------------------ 43.2%

6.- Utilizando la ecuación de Van der Waals, calcular el volumen que ocupan 7.8 moles de monóxido de carbono a una presión de 75 atm y temperatura de 400 °C ------------------ 93.1%

Excepto en la pregunta 5 de la segunda parte, las demás fueron contestadas satisfactoriamente. Sobre esta pregunta cabe hacer la aclaración que los estudiantes no fueron adiestrados adecuadamente en la toma de cifras significativas y por tal razón hubo una baja en los porcentajes. La pregunta que obtuvo el porcentaje fue la 6 de la segunda parte, y sin embargo dicha pregunta se evita en varios exámenes de Fisicoquímica II (Nota: A los tópicos tratados en este ensayo, factores de conversión, planteamientos de ecuaciones y resolución de ecuaciones polinomiales de tercer grado, se les dio una mayor importancia en el curso llevado en la E.N.E.P.C y posiblemente fue esta la razón del alto porcentaje)

(3) "Las comparaciones son de gran valor en cuanto reducen las relaciones desconocidas a otras conocidas"

G. POLYA

Los comentarios del curso pueden reducirse a los siguientes:

1.) Facilitó el estudio de algunas asignaturas tales como: fisicoquímica II y III, análisis I, ciencia básica I, II, etc.

2.) Ayudó a subsanar muchas deficiencias operacionales.

3.) Se dio al alumno una introducción hacia el uso de las matemáticas en la química.

4.) El alumno que no manejaba bien ciertos conocimientos matemáticos pudo manejarlos al saber la analogía que aquí se plantea con la química, y viceversa. Por ejemplo, los alumnos que sabían resolver un sistema de ecuaciones por el método de suma y resta, comprendieron el balanceo de una-reacción química por la analogía que presentan estos dos métodos.

5.) Los ejemplos expuestos en el curso fueron aclarativos y de gran interés para los temas mencionados.

SOBRE LOS OBJETIVOS

Se observó que el estudiante se familiarizó con los problemas matemáticos e incorporó las matemáticas en su diaria práctica profesional. En opinión de algunos profesores de química, se logró una mejoría en la comprensión de su cátedra, debido a que no necesitaron aclarar dudas de índole operacional o de planteamiento; incluso dos profesores de análisis comentaron que debería ser obligatoria la asistencia al taller de Matemáticas I.

Se logró un aumento en el raciocinio de los estudiantes a problemas prácticos, y se espera que ésto sea la base para un mejor desarrollo en el transcurso de su carrera.

Por el resultado del examen expuesto y por lo que se vio, creo que en buena medida fue cubierto el objetivo principal de este ensayo, que es: "Proporcionarle al alumno los conocimientos necesarios que le auxilien en el estudio de la física, la fisicoquímica, la química, etc,. Tener un lenguaje adecuado para expresar los problemas técnicos y así facilmente resolverlos.- Dar al alumno un entrenamiento mental adecuado para razonar, analizar y deducir."

En particular, se puede decir que se alcanzaron los siguientes ob jetivos:

1) Factores de conversión; se introdujo al estudiante a los cálculos químicos elementales y se hizo una analogía entre los factores de conversión y los números racionales.

2) Ecuaciones de primer grado con una incógnita; se mostró una manera de expresar matemáticamente un enunciado, hacer uso de los signos de agrupación y despejar una incógnita.

3) Sistema de ecuaciones lineales; se observó una analogía entre el método de suma y resta y el expuesto para balancear reacciones químicas; se ejemplificaron los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales por medio de problemas prácticos de interés, los cuales se requieren plantear.

4) Polinomios cuadráticos y la constante del producto de solubilidad; se utilizó la ecuación cuadrática en la resolución de problemas de ionización y así se introdujo al estudiante hacia este tópico.

5) Circuitos eléctricos; se introdujo al estudiante hacia la resolución de circuitos eléctricos sencillos con los conceptos logrados en su 4a clase de matemáticas I y se logró despertarles su interés en este campo. - (Este tópico es tocado en las asignaturas de: Fisicoquímica V, Ingeniería - Eléctrica I y Física III).

6) Algebra Booleana; se aplicaron los conceptos de lógica matemática y de tablas de verdad a los circuitos con commutadores (este tópico es tocado en la asignatura de Ingeniería eléctrica II). Observación: por alguna causa, los estudiantes que asistieron al Taller no manejaban adecuadamente las tablas de verdad -decían que no habían "memorizado" estas tablas-, y - con el álgebra de commutación ya no fue necesaria dicha memorización sino - que se comprendió tangiblemente.

7) Introducción a la teoría de las ecuaciones; se usaron los distirtos métodos de resolución de ecuaciones polinomiales en la obtención de la incógnita de una ecuación de estado.
Observación: aunque el estudiante ya sabía aplicar estos métodos a proble - mas de rútina -con coeficientes muy sencillos-, no pudo, en primera instancia, usarlos a las ecuaciones de estado, las cuales no contienen coeficientes tan sencillos. Esta deficiencia fue subsanada con los ejemplos dados (- ver pregunta 6, parte II)

En general esta tesis contiene diversos objetivos, encontrándose- la mayoría estrechamente relacionados entre sí. Por otra parte, es un ensayo que requiere ser continuado.

SOBRE LA METODOLOGIA

Este ensayo no está referido a una metodología específica, mas sin embargo, deseo hacer el siguiente comentario. En el Taller de Matemáticas se le expone al alumno un problema y se le piden sugerencias para "atacarlo mejor" y así facilmente resolverlo; al alumno se le ocurren un sin fin de ideas pero no siempre las transmite, ya sea por vergüenza o por miedo a la crítica de sus compañeros. Esta barrera se logró disminuir comentándoles lo siguiente:

"Muchas intuiciones han resultado erróneas, y, sin embargo, útiles por conducirnos a una intuición mejor. Ninguna idea es realmente mala, a menos que no tengamos capacidad crítica. Lo que es realmente malo es carecer de ideas". No recuerdo el autor.

"Las palabras constan de letras del alfabeto; las frases, de palabras que pueden encontrarse en el diccionario, y los libros de frases que pueden también encontrarse en otros autores. Pero si las cosas que digo son consistentes y están conectadas de modo que sigan unas de otras, usted puede inculparme de haber cogido mis frases de otros, como de haber cogido mis palabras del diccionario."

DESCARTES

ANEXO I

Se entrevistaron a 26 pasantes de la carrera de Ingeniero Químico Metalúrgico, con las siguientes preguntas:

(1) " Cuál fue el grado de unidad que aportó en sus asignaturas no-matemáticas, el estudio de las siguientes materias .... "

El resultado fue el siguiente:

	Muy útil	útil	poco útil	nó recuerdo
Matemáticas I	2	20	4	
Matemáticas II			15	11
Cálculo Diferencial e Integral	5	18	2	1
Ecuaciones Diferenciales			21	5
Estadística I		5	11	10
Estadística II	1	8	9	8

(2) "De las asignaturas mencionadas, diga Qué temas fueron de utilidad "

Los resultados obtenidos fueron simplificados de la siguiente forma:

Matemáticas I:	Cuatro operaciones básicas	(15)
	Algebra elemental	(23)
	Otras	(8)
Cálculo Diferencial e Integral	Derivadas e integrales sencillas	(26)
	Otros	(3)

Estadística I	Otros ("Poder graficar"?)	(3)
Estadística II	Método de los mínimos cuadrados	(12)
	Control de calidad	(2)
	Otros	(1)

OBSERVACIONES: (1) Las respuestas que no concordaron con el temario de la asignatura mencionada, están incluidas en "otras".

(2) No todos los que contestaron que alguna asignatura matemática fuera "poco útil", mencionaron los temas de utilidad.

(3) Es sorprendente, que no se recuerde la utilidad aportada en las asignatura de Matemáticas II, en 42.31%.

LIBROS DE CONSULTA

Cálculos Químicos

Sidney W. Benson

Limusa Wiley. México, 1972

Higher Chemical Arithmetic

F.W. Guddard

Long Man Group Limited. London, 1970

How to Solve it

G. Polya

A Double Day Anchor Book. U.S.A., 1957

The Principles of Mathematical Chemistry

Dr. George Helm

John Wiley & Sons. U.S.A., 1897

Mathematics for the Chemist

G.J. Kynck

Academic Press Inc. Publishers. U.S.A., 1955

Teoría de los circuitos. Vol I y II

Jiménez Garza Ramus

Limusa Wiley. México, 1973

Aplicaciones de computación a la Ingeniería
Lassu, Chicuricl, Lara, Albarran y Guarda.
Facultad de Ingeniería, UNAM. México, 1973

Algebra Booleana y sus aplicaciones
J. Eldun Whitesitt
CECSA. México, 1972

Teoría de la Aritmética
Peterson and Harnisaki
Limusa Wiley. México, 1969

Tratamiento Matemático de Datos Fisicoquímicos
Spiridonov y Lopatkin
MIR. URSS, 1973

El Reino de los Números
Isaac Asimov
Diana. México, 1973

Lecturas Universitarias 7 y 8. Antología de las Matemáticas
Miguel Lara Aparicio
UNAM. México, 1971

Fundamentos de Fisicoquímica
Maron y Pruton
Limusa Wiley. México, 1968

Problemas de Química Orgánica
Smith y rinol
Alhambra. Madrid, 1955

Control de Motores Eléctricos
Walter W. Alerich
Diana. México 1973

Principios de los procesos Químicos
Hougen, Watson y Ragatz
Reverté. México, 1970

New First Course in the Theory of Equations
L.E. Dikson
John Wiley & Sons. Inc. USA., 1959

Matemáticas Universitarias. Vol I y II
Britton, Kriegh y Rutland
CECSA., México, 1970

Algebra Superior

Cárdenas, Lluis, Raggi y Tomás

Trillas. México, 1973

Algebra Superior

Adrian Albert

UTEHA. México, 1961

Introducción Moderna al Algebra

John L. Kelley

Norma. Colombia, 1968

Algebra

Gerald E. Moore

Barnes & Noble Books. U.S.A., 1970

Mathematical Tecniques in Chemistry

Dence

Wiley. U.S.A., 1975

INDICE