UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"ACATLAN"

INTRODUCCION A LOS PROCESOS ESTOCASTICOS

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

MAHIL HERRERA MALDONADO

ASESOR: FIS. MAT. JORGE LUIS SUAREZ MADARIAGA

ACATLAN, ESTADO DE MEXICO OCTUBRE DE 2003

1

A mis padres.

Con mucho cariño.

Mahil Herrera Maldonado.

Agradecimientos.

A mis padres, por su apoyo en todos los aspectos y ejemplo, durante todas las etapas de mi vida. Este trabajo también es suyo.

A mis hermanos; por su apoyo moral, porque de cada uno de ellos, tengo algo.

A mis amigos, por insistirme en terminar este trabajo, por los tiempos compartidos en las buenas y en la malas.

A mi Universidad, por darme la oportunidad de estudiar en sus instalaciones, por todo lo aprendido en ella y todas las personas que me ha permitido conocer.

A mis maestros, por sus conocimientos y experiencias trasmitidas.

A mis sinodales, por el tiempo dedicado a la revisión del trabajo.

A Jorge Luis, mi asesor, por su paciencia y desinteresada ayuda brindada en el desarrollo de este trabajo.

A mis alumnos, que por ellos surgió la idea de realizar este trabajo. En especial a mis alumnos de Procesos Estocásticos I, semestre 2003-I , por sus aportaciones para el enriquecimiento de este trabajo.

Y a todos lo que lean el trabajo, les agradeceré que envíen sus comentarios al siguiente correo: mahilh@hotmail.com

¡Muchas gracias!.

Mahil Herrera Maldonado.

Indice

T

PAGINACION

DISCONTINUA

CONTENIDO

II

Introducción.

La palabra estocástico es sinónimo de aleatorio, los procesos estocásticos son modelos matemáticos que estudian los fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo, se puede describir estos fenómenos por medio de una colección de variables aleatorias, los procesos estocásticos estudian esta colección, de variables desde el punto de vista de su interdependencia y su comportamiento limite. La aplicación de los procesos estocásticos abundan en la naturaleza, se presentan en; la Medicina, Biología, Economía, Comunicación, por citar sólo algunas áreas, es una herramienta muy útil para modelar a aquellos problemas en los que se involucre la aleatoriedad, a través del tiempo.

La inquietud por desarrollar este trabajo radica en que a pesar de que en la actualidad se pueden encontrar libros muy completos respecto al tema, desgraciadamente en el país no contamos con este tipo de libros, que hablen específicamente del tema y que sean adecuados a los estudios que se desarrollan en la carrera, esta situación hace que el estudio de una materia, que si de por sí, por ella misma guarda un grado de dificultad alto, al no contar con material bibliográfico accesible, la hace aún más difícil, problema que personalmente me toco experimentar, y ahora, que he tenido la oportunidad de dar el curso, lo encontré también en mis alumnos.

Dado el gran desarrollo que ha tenido la teoría de los procesos estocásticos, es prácticamente imposible incluir toda la teoría en un solo trabajo, por lo que el objetivo central del presente trabajo es que sea un material de apoyo, que cubra lo que se ve en un curso de procesos estocásticos en la carrera de Actuaría, procurando mantener un nivel teórico que esté de acorde con el nivel matemático que se ve en la carrera y sirva de introducción a este campo tan extenso de los procesos estocásticos.

Los conocimientos que se requieren para poder comprender el trabajo son; conocer los fundamentos de la teoría de la probabilidad, del cálculo y álgebra matricial. Se recomienda hacer hincapié en los conceptos de probabilidad condicional.

En el primer capítulo de esta tesina, se ven las definiciones básicas de los procesos estocásticos, en este capítulo también se ve la teoría fundamental relacionada con dos tipos de procesos muy importantes, el proceso Poisson y Bernoulli, el primero tiene espacio de tiempo continuo y el otro su espacio de tiempo es discreto, considero que empezar con estos dos tipos de procesos ayudan a entender mejor el concepto de lo que es un proceso estocástico, la teoría que lo rodea y lo más importante, como modelar problemas que involucren procesos estocásticos, ambos son procesos sencillos de comprender y muy útiles.

Los procesos estocásticos que cumple la propiedad de Markov, son procesos muy importante en el estudio de los procesos estocásticos, las cadenas de Markov son de este tipo de procesos y es el tema que se analiza en el capítulo 2, ahí se desarrolla la teoría referente a las cadenas de Markov, se define la propiedad de Makov, se analizan los conceptos de distribución inicial, estado absorbente, estado transitorio y estado recurrente, se exponen los elementos teóricos para el manejo de distribuciones estacionarias en las cadenas de Markov.

En el capítulo tres se presenta la teoría general de los procesos de Markov, que son procesos que cumplen con la propiedad de Markov, la diferencia con las cadenas de Markov es, que en los primeros se considera el espacio del tiempo discreto y en estos se considera el espacio del tiempo continuo. Además se expone la relación que hay entre las cadenas de Markov y los procesos de Markov, así como una serie de aplicaciones de los procesos de Markov a los sistemas de colas por medio de los procesos de nacimiento y muerte.

En cada uno de los capítulos se incluyen una serie de ejemplos para comprender mejor cada uno de los conceptos que se manejan.

Introducción a los procesos estocásticos.

Mahil Herrera Maldonado.

Capítulo 1.

1.- Nociones de los Procesos Estocásticos.

1.1. Procesos Estocásticos.

La palabra estocástico es sinónimo de aleatorio, los procesos estocásticos son modelos matemáticos que estudian los fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo, se puede describir estos fenómenos por medio de una colección de variables aleatorias $\{X_t\}$ donde t es un punto en un espacio T llamado espacio parametral. Algunos ejemplos de estos tipos de fenómenos se dan a continuación.

Ejemplo 1.1. X_t podría ser el número de alumnos formados en la fila de inscripción de alguna carrera, en cualquier instante t, X_t puede tomar los valores de 0, 1, 2, ... ; t puede tomar valores de $[\, 0, \infty\,)$, considerando la hora de la apertura de la ventanilla como el instante cero.

Ejemplo 1.2. X_t lo podemos considerar como el t-ésimo lanzamiento de una moneda, aquí X_t le podemos asignar los valores de 1 si cae cara y 0 si no, t toma sus valores en los $\mathbb{N}$, este es un proceso Bernoulli que veremos con más detalle en el siguiente punto de este capítulo.

Ejemplo 1.3. Supongamos que $X_1, X_2, \cdots$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, sea $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, con espacio de estados en los $\mathbb{N}$, $\{ S_n , n \in \mathbb{N}\}$ es un proceso estocástico, que recibe el nombre de *caminata aleatoria.*

Definición 1.1. Un *proceso estocástico* es una familia de variables aleatorias $\{X_t , t \in T \}$ (o $X(t)$, $t \in T$), T es llamado espacio parametral y donde para cada $t \in T$, X_t es un punto en un espacio E, llamado espacio de estados.

De la definición anterior si T es contable, se dice que es un proceso estocástico de parámetros discretos, si T no es contable se dice que, el proceso tiene parámetros continuos, el parámetro t es interpretado comúnmente como tiempo, uno puede considerar a X_t como el estado del proceso en el tiempo t, un ejemplo de que t no siempre representa unidades de tiempo lo es el ejemplo 1.2. Así como el espacio parametral puede ser discreto o continuo, el espacio de estados también lo es.

Ejemplo 1.4. Sea $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$, donde $X(t)$ representa la temperatura máxima y mínima de algún lugar en el intervalo de tiempo de $(0, t)$.

De este ejemplo podemos ver que el proceso X_t puede ser el resultado de un experimento ó un vector, es decir, el proceso puede ser multidimensional. También podríamos tener un espacio parametral multidimensional, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5. Para un proceso estocástico que es la profundidad del mar en la posición x en el instante t , X_t es tal que, $t = (t , x)$ con $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{X}$, donde $\mathbb{X}$ representa el conjunto de las referencias geográficas para todo el mar. Aquí t no es solamente el tiempo, sino una combinación de las coordenadas de tiempo y espacio, aquí el espacio de estados es $S = [0, \infty)$, donde la profundidad es 0 cuando quede expuesto el lecho del océano y no existe límite para la altura que puedan alcanzar las olas, por supuesto, no se formarán olas de altura infinita.

Aquí únicamente analizaremos procesos de tipo unidimensional, en los cuales podemos tener cuatro tipos de procesos:

a) Tiempo discreto y espacio de estado discreto.
b) Tiempo discreto y espacio de estados continuo.
c) Tiempo continuo y espacio de estados discreto.
d) Tiempo continuo y espacio de estados continuo.

1.2. Procesos Bernoulli.

Definición 1.2. El proceso estocástico $\{X_n ; n \in \mathbb{N}\}$ es un *proceso Bernoulli* si satisface

a) $X_1, X_2, \ldots$ son independientes y
b) $P\{X_n = 1\} = p$, $P\{X_n = 0\} = 1 - p = q$ para todo n.

Al evento $X_n = 1$, lo llamaremos éxito y al evento $X_n = 0$, fracaso.

Definición 1.3. Sea $\{ X_n ; n \in \mathbb{N} \}$ un proceso Bernoulli, con probabilidad de éxito p, el *número de éxitos en el n-ésimo ensayo* se define como

$$N_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ X_1 + X_2 + \cdots + X_n & \text{si } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Entonces N_n es el número de éxitos en los primeros n ensayos, y $N_{n+m} - N_n$ es el número de éxitos en los ensayos $n+1$, $n+2$, ... , $n+m$. Como podemos ver $\{ N_n ; n = 0, 1, 2, \ldots \}$ define un proceso estocástico, con espacio de estados y tiempo discreto $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

De la definición de proceso Bernoulli, tenemos que las X_n se distribuyen como una Bernoulli con parámetro p (Bernoulli(p)) y las X_n son independientes y la suma de variables aleatorias independientes Bernoulli se distribuye como una binomial con parámetro n y p (b(n, p)), entonces N_n es una suma de variables aleatorias independientes Bernoulli, con lo que podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 1.1. Para $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) $P\{ N_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$

b) $E[N_n] = np$

c) $V[N_n] = npq$.

El uso de probabilidad condicional en la prueba del siguiente resultado ilustra una de las principales técnicas usadas en el estudio de los procesos estocásticos.

Teorema 1.2. Para $n, k \in \{0, 1, 2, \ldots \}$

$$P\{ N_{n+1} = k\} = p\,P\{ N_n = k-1\} + qP\{ N_n = k\}$$

Demostración.

Usando el teorema de la probabilidad total.

$$P\{ N_{n+1} = k\} = \sum_j P\{N_{n+1} = k \mid N_n = j\} P\{N_n = j\}$$

Dado que $\{ X_1, \ldots, X_n \}$ es independiente de X_{n+1}, tenemos que N_n es independiente de X_{n+1} y como $N_{n+1} = N_n + X_{n+1}$, es decir,

$$
\begin{aligned}
P\{ N_{n+1} = k , N_n = j \} &= P\{ N_n + X_{n+1} = k , N_n = j \} \\
&= P\{ X_{n+1} = k-j , N_n = j \} \\
&= P\{ X_{n+1} = k-j \} P\{ N_n = j \}
\end{aligned}
$$

con lo que

$$
P\{ N_{n+1} = k \mid N_n = j \} = P\{ X_{n+1} = k-j \} = \begin{cases} p & \text{si } j = k-1 \\ q & \text{si } j = k \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}
$$

de aquí, tenemos

$$
P\{ N_{n+1} = k \} = pP\{ N_n = k-1 \} + qP\{ N_n = k \}.
$$

□

Teorema 1.3. Para algún $m, n \in \{ 0, 1\ 2, \dots \}$

$$
P\{ N_{m+n} - N_m = k \mid N_0, \dots , N_m \} = P\{ N_{m+n} - N_m = k \} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots , n
$$

Demostración.

Las variables aleatorias $N_0, N_1, \dots , N_m$ están completamente determinadas por las variables $X_1, X_2, \dots , X_m$, por definición de N_n e inversamente las variables aleatorias $X_1, X_2, \dots , X_m$ están completamente determinadas por $N_0, \dots , N_m$, por ejemplo $X_m = N_m - N_{m-1}$. Luego entonces

$$
P\{ N_{m+n} - N_m = k \mid N_0, \dots , N_m \} = P\{ N_{m+n} - N_m = k \mid X_1 , \dots , X_m \}
$$

tenemos que $N_{m+n} - N_m = X_{m+1} + X_{m+2} + \cdots + X_{m+n}$ y $\{X_{m+1}, X_{m+2}, \dots , X_{m+n}\}$ es independiente de $\{X_1, \dots , X_m\}$, lo que significa que $N_{m+n} - N_m$ es independiente de $\{X_1, \dots , X_m\}$ así llegamos al resultado.

$$
\begin{aligned}
P\{ N_{m+n} - N_m = k \mid N_0, \dots, N_m \} &= P\{ N_{m+n} - N_m = k \mid X_1, \dots , X_m \} \\
&= P\{ N_{m+n} - N_m = k \}
\end{aligned}
$$

ahora bien $N_{m+n} - N_m = X_{m+1} + X_{m+2} + \cdots + X_{m+n}$ es la suma de n variables aleatorias Bernoulli(p) independientes e idénticamente distribuidas, lo que significa que es una variable aleatoria binomial con parámetro n y p, es decir,

$$P\{ N_{m+n} - N_m = k \} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

□

De este teorema podemos ver que la variable aleatoria $N_{n_k} - N_{n_{k-1}}$ para cualquier $k \in \{1, 2, \dots, j\}$ tal que n_k cumpla con $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_j, N_{n_k} - N_{n_{k-1}}$ es independiente de $\{ N_{n_0}, \dots, N_{n_{k-1}} \}$, a continuación enunciamos este resultado.

Corolario 1.3.1 Sea $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_j$ son enteros, entonces las variables aleatorias $N_{n_1} - N_{n_0}, N_{n_2} - N_{n_1}, \dots, N_{n_j} - N_{n_{j-1}}$ son independientes.

En el teorema 1.3 se probó que $N_{m+n} - N_m$ es independiente de $N_0, \dots, N_m$, en la demostración no se hizo ninguna referencia a la distribución de las X_n únicamente se considero su independencia. De esta forma podemos decir que el corolario 1.3.1 se cumple para algún proceso estocástico $\{M_n; n = 0, 1, \dots\}$ definido por

$$M_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n & \text{si } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

con $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, variables aleatorias independientes

Un proceso estocástico que cumple con

$$P\{ N_{m+n} - N_m = k \mid N_0, \dots, N_m \} = P\{ N_{m+n} - N_m = k \}$$

o con el corolario 1.3.1, es un *proceso estocástico con incrementos independientes.*

Si para el proceso $\{M_n ; n = 0, 1, \dots\}$ definido anteriormente, las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ a parte de la independencia entre ellas son idénticamente distribuidas, entonces la distribución de los incrementos $M_{n+s} - M_s$ no depende de s, se dice entonces, $\{M_n\}$ es *estacionario con incrementos independientes.*

Regresando al proceso Bernoulli, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.4. Sea Z una variable aleatoria que depende de un número finito de variables aleatorias $N_m, N_{m+1}, \dots$; es decir,

$$Z = g(N_m, N_{m+1}, \dots, N_{m+n})$$

para alguna n y alguna función g. Entonces

$$E[Z \mid N_0, N_1, \ldots, N_m] = E[Z \mid N_m]$$

Demostración.

Dado que $N_{m+1} = N_m + X_{m+1}, \ldots, N_{m+n} = N_m + X_{m+1} + \cdots + X_{m+n}$, hay una función h tal que

$$Z = g(N_m, N_{m+1}, \ldots, N_{m+n}) = h(N_m, X_{m+1}, \ldots, X_{m+n})$$

Así

$$E[Z \mid N_0, N_1, \ldots, N_m] = \sum_k \sum_{\mathbf{i}} h(k, i_1, \ldots, i_n) P\{N_m = k, X_{m+1} = i_1, \ldots, X_{m+n} = i_n \mid N_0, \ldots, N_m\}$$

la segunda suma es sobre toda las n-uples $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n)$ de ceros y unos. Dado que $\{X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}\}$ es independiente de $\{X_1, \ldots, X_m\}$, también $\{X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}\}$ es independiente de $N_0, N_1, \ldots, N_m$ que son determinadas por $\{X_1, \ldots, X_m\}$. Entonces

$$\begin{aligned} P\{ N_m = k, X_{m+1} = i_1, \ldots, X_{m+n} = i_n \mid N_0, \ldots, N_m \} \\ &= P\{ X_{m+1} = i_1, \ldots, X_{m+n} = i_n \} P\{ N_m = k \mid N_0, \ldots, N_m \} \\ &= \pi(i_1) \cdots \pi(i_n) P\{ N_m = k \mid N_0, \ldots, N_m \}, \end{aligned}$$

donde $\pi(i) = \mathrm{P}\{ X_n = i \} = p$ o q si $i = 1$ o $i = 0$ respectivamente. Por otro lado

$$\begin{aligned} P\{ N_m = k \mid N_0, \ldots, N_m \} &= E[\mathrm{I}_{\{k\}}(N_m) \mid N_0, \ldots, N_m] \\ &= \mathrm{I}_{\{k\}}(N_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = N_m \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$E[Z \mid N_0, N_1, \ldots, N_m] = \sum_k \sum_{\mathbf{i}} h(k, i_1, \ldots, i_n) \pi(i_1) \cdots \pi(i_n) I_{\{k\}}(N_m)$$

$$E[Z \mid N_0, N_1, \ldots, N_m] = \sum_{\mathbf{i}} h(N_m, i_1, \ldots, i_n) \pi(i_1) \cdots \pi(i_n) = f(N_m)$$

independiente de $N_0, \ldots, N_{m-1}$, esto significa

$$E[Z \mid N_0, N_1, \ldots, N_m] = f(N_m) = E[Z \mid N_m]$$

□

El teorema anterior lo satisfacen varios procesos con una estructura menos compleja, tales procesos son llamados cadenas de Markov, del estudio de estos procesos nos ocuparemos en el siguiente capítulo.

Definición 1.4. Sea $\{X_n; n = 1, 2, \ldots\}$ un proceso Bernoulli con probabilidad de éxito p, consideremos una realización del proceso $X_1, X_2, \ldots, X_n$, esta es una secuencia de unos y ceros, denotemos por $T_1, T_2, \ldots$, los índices correspondientes a los sucesivos éxitos, a los T_k se les llama los ***tiempos de éxitos***.

Ejemplo 1.6. Si

$$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 1, X_5 = 1, \ldots$$

Es una realización del proceso, entonces $T_1 = 1$, $T_2 = 4$, $T_3 = 5, \ldots$,es decir, T_k es el número del evento en el que ocurrió el k-ésimo éxito.

Supongamos que para una realización del proceso el k-ésimo éxito ha ocurrido antes de n-ésimo evento, esto es $T_k \leq n$, entonces el número de éxitos en los primeros n eventos debería ser al menos k, esto significa que $N_n \geq k$, e inversamente si $N_n \geq k$ entonces $T_k \leq n$.

Otra relación entre los tiempos de éxitos y el número de éxitos es; si $T_k = n$ significa que en esta realización hay exactamente $k - 1$ éxitos en los primeros $n - 1$ eventos y un éxito ocurre exactamente en el n-ésimo evento, es decir, $N_{n-1} = k - 1$ y $X_n = 1$ e inversamente si $N_{n-1} = k - 1$ y $X_n = 1$ entonces $T_k = n$. A continuación enunciamos estas dos relaciones.

Lema 1.1. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una realización del proceso $k = 1, 2, \ldots$ y $n \geq k$, tenemos que

a) $T_k \leq n$ si, y sólo si $N_n \geq k$

b) $T_k = n$ si, y sólo si $N_{n-1} = k - 1$ y $X_n = 1$.

Teorema 1.5. Para alguna $k \in \mathbb{N}$

a) $P\{ T_k \leq n \} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \quad n = k, k+1, \ldots.$

b) $P\{ T_k = n \} = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}, \quad n = k, k+1, \ldots.$

Demostración.

a) Para $k \in \mathbb{N}$ y $n \geq k$, por el lema 1.1 el evento $\{ T_k \leq n \}$ es igual al evento $\{ N_n \geq k \}$, entonces

$$P\{ T_k \leq n \} = P\{ N_n \geq k \} = \sum_{j=k}^{n} P\{N_n = j\}$$

por el teorema 1.1

$$P\{ N_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots ,n$$

es decir,

$$P\{ T_k \leq n \} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \quad n = k, k+1, \dots .$$

b) Por el lema 1.1 el evento $\{T_k = n\}$ es igual al evento $\{ N_{n-1} = k - 1 , X_n = 1\}$, por definición, el proceso N_{n-1} es independiente de $X_n = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} P\{ T_k = n \} &= P\{ N_{n-1} = k - 1, X_n = 1\} \\ &= P\{ N_{n-1} = k - 1\} P\{ X_n = 1\} \\ &= \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} p = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

□

El teorema anterior nos da información muy importante sobre la estructura del proceso $\{ T_k , k = 1, 2, \dots \}$ pero veamos otros resultados concernientes a la estructura de este proceso.

Teorema 1.6. Sea $T_0 = 0$ y $T_1, T_2, \dots$ los tiempos del primer éxito, segundo éxito, ... de un proceso Bernoulli $\{ X_n; n \in \mathbb{N}\}$ con probabilidad de éxito p, para alguna $k \in \{0, 1, \dots \}$,

$$P\{ T_{k+1} = n \mid T_0, \dots , T_k \} = P\{ T_{k+1} = n \mid T_k \}.$$

Demostración.

Para algún k, n y enteros $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = a$, sea

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_k) = P\{\, T_{k+1} = n \mid T_0 = a_0, T_1 = a_1, \ldots, T_k = a_k \,\}$$

si $n \leq a_k = a$, entonces la probabilidad condicional es cero, si $n > a_k = a$, $T_k = a$ y $T_{k+1} = n$, lo que significa que $X_{a+1} = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1$. Entonces

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_k) = P\{\, X_{a+1} = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1\} = pq^{n-1-a}$$

hemos llegado a que

$$P\{\, T_{k+1} = n \mid T_0 = a_0, T_1 = a_1, \ldots, T_k = a_k \,\} = \begin{cases} 0 & \text{si } \{T_k \geq n\}, \\ pq^{n-1-T_k} & \text{si } \{T_k < n\}, \end{cases} \qquad (1.1)$$

y como podemos ver, el lado derecho de la igualdad es independiente en ambos casos, de $T_0, T_1, \ldots, T_{k-1}$.

□

El teorema anterior nos dice que dado el tiempo T_k del k-ésimo éxito, el tiempo del k+1-ésimo éxito es condicionalmente independiente de $T_0, T_1, \ldots, T_{k-1}$. De la ecuación 1.1 tenemos que

$$P\{\, T_{k+1} = m + T_k \mid T_0, \ldots, T_k \,\} = pq^{T_k+m-1-T_k} = pq^{m-1}$$

lo que nos da el siguiente resultado.

Corolario 1.6.1. Para alguna $k \in \{0, 1, \ldots\}$

$$P\{\, T_{k+1} - T_k = m \mid T_0, \ldots, T_k \,\} = P\{\, T_{k+1} - T_k = m \,\} = pq^{m-1}$$

para toda $m \in \{1, 2, \ldots\}$.

El resultado anterior nos dice, que el tiempo entre dos éxitos es independiente de los tiempos de los previos éxitos y se distribuye como una geométrica.

Corolario 1.6.2. $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución geométrica.

Corolario 1.6.3. $T_{k+1} - T_k$ para $k \in \mathbb{N}$

a) $E[\, T_{k+1} - T_k] = \dfrac{1}{p}$

b) $V[\,T_{k+1} - T_k\,] = \dfrac{q}{p^2}$.

1.3 Procesos Poisson.

Definición 1.5. Un proceso estocástico $\{N_t\,;\ t\ \geq 0\}$, de tiempo continuo y valores enteros, es un *proceso de conteo* si N_t representa el número total de "eventos" que han ocurrido hasta el tiempo t.

A partir de la definición anterior podemos ver que un proceso de conteo debe de cumplir con:

a) $N_t \geq 0$
b) N_t es un valor entero
c) si $s \leq t$, entonces $N_s \leq N_t$
d) para $s < t$, $N_t - N_s$ es igual al número de eventos que han ocurrido en el intervalo $(\,s, t\,]$.

Un proceso de conteo se dice que tiene *incrementos independientes*, si el número de eventos que ocurren en intervalos disjuntos son independientes. Por ejemplo esto significa que $N_{t+h} - N_t$ con $h > 0$ es independiente de $\{\,N_u\,;\ u \leq t\,\}$ para toda t.

Un proceso de conteo se dice que tiene *incrementos estacionarios* si el número de eventos en el intervalo $(\,t + h,\ s + h\,]$ tiene la misma distribución que el número de eventos en el intervalo $(\,t,\ s\,]$ para todo $t < s$, y $h > 0$, o bien, se puede decir que un proceso de conteo cuya distribución del número de eventos que ocurren en un intervalo, depende únicamente de la longitud del intervalo, se le dice que posee *incrementos estacionarios.*

A continuación vamos a definir al proceso Poisson, hay varias definiciones pero todas son equivalentes, daremos una que nos da una buen información sobre la estructura probabilística del proceso.

Definición 1.6. Sea $\{N_t\,;\ t\ \geq 0\}$ un proceso de conteo, donde $N(\,t,\ t + h\,)$ (o $N_{t+h} - N_t$) es el número de eventos o llegadas que ocurren en el intervalo $(t,\ t + h\,]$ y $N_t{:=}N[0,\ t\,]$. Entonces $\{N_t\,;\ t\ \geq 0\}$ es un *proceso Poisson* con parámetro λ si

1) $P\{\,N(\,t, t + h\,) = 0\} = 1 - \lambda\, h + o(\,h\,)$

2) $P\{ N(t, t+h) = 1\} = \lambda h + o(h)$
3) $P\{ N(t, t+h) \geq 2 \} = o(h)$
4) Para toda t y $h > 0$, $N(t, t+h)$ es independiente de $\{ N_u ; u \leq t \}$
5) Tiene incrementos estacionarios

Aquí $o(h)$ es una función tal que

$$\frac{o(h)}{h} \to 0 \text{ cuando } h \to 0.$$

En la definición anterior también hay que considerar que $N_0 = 0$.

Sea $t_0 \in \mathbb{R}^+ \cup 0$ y Z el tiempo de espera hasta la próxima llegada después del tiempo t_0,

$$P\{x\} = P\{Z > x\},$$

entonces

$$P\{x + h\} = P\{ Z > x + h \} = P\{ Z > x, N(t_0 + x, t_0 + x + h) = 0\}$$

de la definición de probabilidad condicional

$$= P\{ N(t_0 + x, t_0 + x + h) = 0 \mid Z > x \} P\{ Z > x \} \quad (1.2)$$

Ahora bien $Z > x$ si, y sólo si, $N(t_0, t_0 + x) = 0$, pero $N(t_0 + x, t_0 + x + h)$ es independiente de $N(t_0, t_0 + x)$ por la propiedad 4 de la definición 1.6, entonces la ecuación 1.2 es equivalente a

$$\begin{aligned} P\{x + h\} &= P\{ N(t_0 + x, t_0 + x + h) = 0 \} P\{x\} \\ &= (1 - \lambda h + o(h))\, P\{x\} \end{aligned}$$

entonces

$$P\{x + h\} - P\{x\} = -(\lambda h) P\{x\} + o(h) P\{x\}$$

lo dividimos entre h y tomamos $h \to 0$, obtenemos

$$P'\{x\} = \lim_{h \to 0} \frac{P\{x+h\} - P\{x\}}{h} = -\ \lambda P\{x\}$$

Esta ecuación diferencial tiene la solución

$$P\{x\} = P\{0\}\ e^{-\lambda x}\ .$$

Pero $P\{0\} = P\ \{Z > 0\} = 1$ ya que la probabilidad de dos llegadas al mismo tiempo es

$$P\{\ N(\,t,\, t+h\,) \geq 2\ \} = o(\,h\,)$$

y dado que $h \to 0$,

$$P\{\ N(\,t,\, t+h\,) \geq 2\ \} = 0$$

es decir,

$$P\{\ Z = 0\ \} = 0$$

y si obtenemos su complemento $P\ \{Z > 0\} = 1 - P\{\ Z = 0\ \}$. Entonces

$$P\{x\} = e^{-\lambda x}$$

con esto hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 1.7. Z se distribuye como una exp(λ) (exponencial con parámetro λ), independiente de t_0.

Así como para un proceso Bernoulli, tenemos los tiempos de éxito, para un proceso Poisson, tenemos el siguiente concepto totalmente equivalente, si $\{N_t\,;\ t \geq 0\}$ es un proceso Poisson con parámetro λ denotaremos por $T_1, T_2, \ldots,$ los *tiempos de llegada*, correspondientes a los sucesivos arribos.

Como vimos anteriormente para $t_0 \in \mathbb{R}^+ \cup 0$ y Z el tiempo de espera hasta la próxima llegada después del tiempo t_0,

$$P\{x\} = P\ \{Z > x\} = e^{-\lambda x}\ ,$$

la probabilidad de que el tiempo de llegada del primer suceso sea mayor a x sería;

$$P\ \{\ T_1 > x\} = e^{-\lambda x}$$

si tomamos ahora a T_{i-1} como t_0 el próximo arribo sería en el tiempo T_i, el tiempo de espera entre las llegadas $i-1$ e i, es $T_i - T_{i-1}$ es decir, $Z = T_i - T_{i-1}$, luego entonces la probabilidad de que la llegada entre $i-1$ e i sea mayor a x sería

$$P\{ T_i - T_{i-1} > x\} = e^{-\lambda x},$$

que como podemos ver no depende de i, es decir, T_1, $T_2 - T_1$, ... , $T_i - T_{i-1}$ son independientes y todas se distribuyen como una exp(λ), así podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 1.8. Los tiempos entre llegadas se distribuyen como una exp(λ) y son independientes.

Al distribuirse $T_i - T_{i-1}$ como una exp(λ). Obtenemos también:

Corolario 1.8.1.

a) $E[T_i - T_{i-1}] = \dfrac{1}{\lambda}$

b) $V[T_i - T_{i-1}] = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Teorema 1.9. El tiempo de llegada T_n, $n \in \mathbb{N}$ tiene una distribución gamma con parámetros n y λ.

Demostración.

Podemos expresar a T_n como sigue

$$T_n = T_1 + T_2 - T_1 + \cdots + T_n - T_{n-1}$$

es decir, T_n la podemos expresar como la suma de n variables aleatorias exp(λ) y como los tiempo entre las llegadas, son independientes, tenemos una suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como una exp(λ), lo que significa que T_n se distribuye como una gamma con parámetro n y λ.

□

Hasta el momento no hemos dicho nada sobre la distribución de N_t, definamos

$$P_m\{t\} = P\{ N_t = m \}.$$

Entonces

$$P_0\{t\} = P\{\, N_t = 0 \,\} = \mathrm{P}\ \{Z > t\} = P\{t\}$$

y por eso

$$P_0\{t\} = e^{-\lambda t}$$

Ahora bien por los incisos 4 y 5 de la definición 1.6

$$P_m\{t + h\} = P_m\{t\}\, P_0\{h\} + P_{m-1}\{t\}\, P_1\{h\} + \sum_{i=2}^{m} P_{m-i}\{t\}P_i\{h\}$$

a partir de $i = 2$, tenemos

$$P_{m-2}\{\, t \,\}\, P_2\{\, h \,\} = P\{\, N_t = m-2 \,\}P\{\, N_h = 2 \,\}$$

por la propiedad 3 de la definición 1.6

$$= \ P\{\, N_t = m-2 \,\}\mathrm{o}(\, h\,)\,,$$

es decir, podemos hacer

$$\sum_{i=2}^{m} P_{m-i}\{t\}P_i\{h\} \ = \ \mathrm{o}(h)$$

quedándonos

$$P_m\{t+h\} = P_m\{t\}\, P_0\{h\} + P_{m-1}\{t\}\, P_1\{h\} + \mathrm{o}(h)$$

Usando la propiedad uno y dos de la definición 1.6

$$P_m\{t+h\} = \ P_m\{t\}(1 - \lambda h + \mathrm{o}(h)\,) + P_{m-1}\{t\}(\,\lambda h + \mathrm{o}(h)\,) + \mathrm{o}(h)$$

$$P_m\{t+h\} - P_m\{t\} = -\lambda h\, P_m\{t\} + \lambda h\, P_{m-1}\{t\} + \mathrm{o}(h)$$

Entonces si dividimos todo entre h y tomamos el límite cuando $h \to 0$

$$P_m^{'}\{t\} = -\lambda\, P_m\{t\} + \lambda\, P_{m-1}\{t\}$$

también sabemos que

$$P_m\{0\} = \ P\{\, N_0 = m \,\} = 0 \quad \text{para } m = 1, 2, \ldots \qquad (1.4)$$

Ahora definamos

$$Q_m\{t\} = P_m\{t\}\, e^{\lambda t}. \tag{1.5}$$

Entonces la ecuación

$$P_m'\{t\} = -\lambda P_m\{t\} + \lambda P_{m-1}\{t\}$$

usando la ecuación 1.5 nos queda como

$$-\lambda\, e^{-\lambda t} Q_m\{t\} + e^{-\lambda t} Q_m'\{t\} = -\lambda e^{-\lambda t} Q_m\{t\} + \lambda Q_{m-1}\{t\}\, e^{-\lambda t}$$

dividiendo todo entre $e^{-\lambda t}$ nos queda

$$-\lambda Q_m\{t\} + Q_m'\{t\} = -\lambda Q_m\{t\} + \lambda Q_{m-1}\{t\}$$

llegamos a

$$Q_m'\{t\} = \lambda Q_{m-1}\{t\}.$$

Resolviendo recursivamente:

$$Q_0\{t\} = P_0\{t\}\, e^{\lambda t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1$$

$$Q_1'\{t\} = \lambda Q_0\{t\} = \lambda \text{ de aquí } Q_1\{t\} = \lambda t + \text{c}.$$

haciendo $t = 0$, en la ecuación 1.5

$$Q_1\{0\} = P_1\{0\}\, e^{\lambda 0} = \text{c}$$

por la ecuación 1.4 $P_1\{0\} = 0$, tenemos que $Q_1\{0\} = 0$ lo que significa que $\text{c} = 0$ así que

$$Q_1\{t\} = \lambda t$$

ahora

$$Q_2'\{t\} = \lambda Q_1\{t\} = \lambda^2 t$$

$$Q_2\{t\} = \frac{\lambda^2 t^2}{2} + \text{c}$$

Por otro lado tenemos que $Q_2\{0\} = P_2\{0\} e^{\lambda 0} = 0$, luego entonces $\text{c} = 0$ y nos queda que

$$Q_2\{t\} = \frac{\lambda^2 t^2}{2}$$

y así podemos seguir sucesivamente hasta llegar a

$$Q_m\{t\} = \frac{\lambda^m t^m}{m!}.$$

De la ecuación 1.5

$$P_m\{t\} = \frac{\lambda^m t^m}{m!} e^{-\lambda t}$$

Es decir, que N_t se distribuye como una Poisson con parámetro λt (Po(λt)).

Teorema 1.10. N_t se distribuye como una Po(λt).

Corolario 1.10.1.

a) $E[N_t] = \lambda t$

b) $V[N_t] = \lambda t$

Definición 1.7. $\frac{N_t}{t}$ es el *tiempo de intensidad.*

Del corolario 1.10.1 tenemos que el valor esperado del tiempo de intensidad es

$$E\left[\frac{N_t}{t}\right] = \lambda,$$

λ se le llama intensidad.

Por otro lado tenemos por definición que los incrementos de las llegadas son independientes, es decir, para $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < \cdots < t_k = t$, $N_{t_k+s} - N_{t_k}$ es independiente de N_u; $u \le t_k$, para s, $u \ge 0$ esto significa que $N_{t_k+s} - N_{t_k}$ es independiente de $N_u - N_{t_i}$. Ya que N_t se distribuye como una Po(λt) tenemos que

$N_{t_1+s} - N_{t_1}$ se distribuye Po(λs) esto significa que a cualquier tiempo empieza otro proceso Poisson.

Corolario 1.10.2. Sea $\{N_t\,;\, t \geq 0\}$ un proceso Poisson con intensidad λ. Entonces para alguna $s, t \geq 0$,

$$P\{\, N_{t+s} - N_t = k \mid N_u;\, u \leq t \,\} = P\{\, N_{t+s} - N_t = k \,\}$$

$$= \frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}\ ,\ k = 0, 1, \ldots .$$

Teorema 1.11. Sea L_t un proceso Poisson con intensidad λ y M_t es un proceso Poisson con intensidad μ, ambos procesos son independientes. Si definimos a $N_t = L_t + M_t$, entonces N_t es un proceso Poisson con intensidad $\lambda + \mu$.

Demostración.

Tenemos que probar que N_t cumple con la definición de un proceso Poisson, probaremos únicamente la propiedad dos y la propiedad cuatro, la uno y la tres son inmediatas a partir de probar la propiedad dos y la cinco es semejante a la cuatro.

$$P\{\, N(t, t+h) = 1 \,\} = P\{\, L(t, t+h) + M(t, t+h) = 1 \,\}$$

$$= P\{\{\, L(t, t+h) = 1 \text{ y } M(t, t+h) = 0 \,\} \cup \{\, L(t, t+h) = 0 \text{ y } M(t, t+h) = 1\}\,\}$$

como ambos eventos son excluyentes y además, L_t y M_t, son independientes, tenemos que

$$\begin{aligned} &P\{\, N(t, t+h) = 1 \,\} \\ &\quad = P\{L(t, t+h) = 1\}P\{\, M(t, t+h) = 0\} + P\{L(t, t+h) = 0\}P\{M(t, t+h) = 1\} \\ &\quad = (\lambda h + o(h))\,(1 - \mu h + o(h)) + (1 - \lambda h + o(h))\,(\mu h + o(h)) \\ &\quad = \lambda h - \lambda\mu h^2 + \lambda h\, o(h) + o(h) - o(h)\,\mu h + o(h)o(h) + \\ &\qquad \mu h - \lambda\mu h^2 + \mu h\, o(h) + o(h) - o(h)\,\lambda h + o(h)o(h) \end{aligned}$$

como podemos ver todo depende de $o(h)$ excepto λh y μh, es claro ver que para $\lambda\mu h^2$ si tomamos a $o(h) = h^2$ tenemos una función del tipo de $o(h)$ luego entonces

$$P\{N(t, t+h) = 1\} = (\lambda + \mu)\, h + o(h)$$

con esto hemos probado que N_t cumple la propiedad cuatro de un proceso Poisson.

Ahora hay que probar que $N(t, t+h)$ es independiente de $\{ N_u ;\, u \leq t \}$.
Como L_t y M_t, ambos son proceso Poisson cumplen que

$$L(t, t+h) \text{ es independiente de } \{ L_u ;\, u \leq t \} \text{ y}$$
$$M(t, t+h) \text{ es independiente de } \{ M_u ;\, u \leq t \}$$

Por definición L_t y M_t son independientes, lo que significa que

$$M(t, t+h) \text{ es independiente de } \{ L_u ;\, u \leq t \} \text{ y}$$
$$L(t, t+h) \text{ es independiente de } \{ M_u ;\, u \leq t \}$$

y por consiguiente

$$L(t, t+h) + M(t, t+h) \text{ es independiente de } \{ L_u ;\, u \leq t \} \text{ y } \{ M_u ;\, u \leq t \}$$

y por tanto $L(t, t+h) + M(t, t+h)$ es independiente de $\{ L_u + M_u ;\, u \leq t \}$, como se quería probar.

□

1.4 Ejercicios.

Ejemplo1.7. Un cierto componente en un sistema, tiene un tiempo de vida cuya distribución puede considerarse como $\pi(m) = pq^{m-1}$, $m \geq 1$. Cuando el componente falla es remplazado por uno idéntico. Sea $T_1, T_2, \ldots$ denota el tiempo de falla;

$$U_k = T_k - T_{k-1}$$

es el tiempo de vida del k-ésimo componente remplazado. Dado que los componentes son idénticos,

$$P\{ U_k = m\} = pq^{m-1},\ m \geq 1$$

y los componentes tienen tiempos de vida independientes, así tenemos que $\{ T_k \}$ lo podemos considerar los tiempos de éxito de un proceso Bernoulli. Si sabemos que los tiempos de las tres primeras fallas ocurren en los tiempos 3, 12 y 14, ¿ Cuál es el tiempo esperado de la quinta falla?.

Por el teorema 1.6,

$$E[T_5 \mid T_1, T_2, T_3] = E[T_5 \mid T_3].$$

Si hacemos $T_5 = T_3 + (T_5 - T_3)$, nos queda

$$\begin{aligned} E[T_5 \mid T_3] &= E[T_3 \mid T_3] + E[T_5 - T_3 \mid T_3] \\ &= E[T_3 \mid T_3] + E[T_5 - T_3] \end{aligned}$$

Por el corolario 1.6.3, y haciendo $T_5 - T_3 = T_4 - T_3 + T_5 - T_4$

$$E[T_5 \mid T_3] = T_3 + \frac{2}{p}.$$

Lo que se quería calcular es:

$$E[T_5 \mid T_1, = 3, T_2 = 12, T_3 = 14] = 14 + \frac{2}{p}.$$

Ejemplo 1.8. Considérese el proceso estocástico como la trayectoria de una partícula, la cual se mueve a lo largo de un eje con pasos de una unidad a intervalos de tiempo también de una unidad. Supóngase que la probabilidad de cualquier paso que se tome a la derecha es p y el que se tome a la izquierda es $q = 1 - p$. Suponemos también que cualquier paso se da de manera independiente a cualquier otro. Este tipo de proceso es una *caminata aleatoria*. Si la partícula esta en la posición cero en el instante cero, determínese la probabilidad de que se encuentre en la posición k después de n pasos.

Definimos $\{X_n \ ; n \in \mathbb{N}\}$ como las variable aleatorias independientes, donde $X_n = 1$ si la partícula da el paso a la derecha y $X_n = -1$ si el paso fue a la izquierda, cada una con probabilidad

$$P\{X_n = 1\} = p \text{ y } P\{X_n = -1\} = q .$$

Sea $\{Z_n\}$ un proceso estocástico, donde Z_n es la posición de la partícula en el tiempo n, este proceso estocástico tiene un espacio de estados discreto con valores en $\{-\infty, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, \infty\}$, el tiempo $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Para $n = 0$ tenemos que inicialmente $Z_0 = 0$. Después de n pasos

$$Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

se desea determinar el valor de

$$P\{ Z_n = k \mid Z_0 = 0 \}$$

sea la variable aleatoria

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i = 1 \\ 0 & \text{si } X_i = -1 \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Es decir, la $Y_i = ½ (X_i + 1)$, al ser las X_i independientes tenemos que también los son las Y_i, es decir, $\{ Y_n ; n \in \mathbb{N}\}$ define un proceso Bernoulli (ver la definición 1.2), si N_n es el número de éxitos tenemos de la definición 1.3, que

$$N_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n & \text{si } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

en términos de las X_i tenemos que

$$N_n = ½ (X_1 + 1) + ½ (X_2 + 1) + \cdots + ½ (X_n + 1) = ½ (Z_n + n)$$

Luego entonces

$$\begin{aligned} P\{ Z_n = k \mid Z_0 = 0 \} &= P\{ Z_n = 2N_n - n = k \mid Z_0 = N_0 = 0 \} \\ &= P\{ N_n = ½ (k + n) \mid N_0 = 0 \} \end{aligned}$$

por el teorema 1.3

$$P\{ Z_n = k \mid Z_0 = 0 \} = P\{ N_n = ½ (k + n) \}$$

$$= \binom{n}{\frac{1}{2}(k+n)} p^{½(k+n)} q^{½(n-k)}, \quad \text{siempre que } ½ (k + n) = \{0, 1, \ldots, n\}.$$

También podemos calcular

$$\begin{aligned} E[Z_n] &= E[2N_n - n] \\ &= 2E[N_n] - n \\ &= 2np - n \end{aligned}$$

$$= 2np - n(p+q)$$
$$= n(p-q) \qquad // \; p+q=1 \; //$$

análogamente

$$V[Z_n] = V[2N_n - n] = 4npq$$

Ejemplo 1.9. Hay un restaurante por el cual, los vehículos solo pueden llegar a el por medio de la carretera, supóngase que la llegada de vehículos al restaurante por el lado derecho sigue una proceso Poisson con parámetro λ y las llegadas por el lado izquierdo siguen un proceso Poisson con parámetro μ, luego del teorema 1.11 sabemos que el número de llegada al restaurante en vehículo sigue un proceso Poisson con parámetro $\lambda+\mu$.

Ejemplo 1.10. Un componente de un sistema, su tiempo de vida sigue una distribución $\exp(\lambda)$. Cuando éste falla es inmediatamente reemplazado por uno idéntico; y cuando éste falla es reemplazado inmediatamente por otro idéntico, etc. Esto significa que los tiempos de vida $X_1, X_2, \ldots$ de los sucesivos componentes son independientes e idénticamente distribuidos con distribución

$$P\{X_n \le t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \; t \ge 0.$$

Supongamos que el costo de reemplazamiento del componente que falla es de β pesos y supongamos una tasa de interés de $\alpha > 0$, así que un peso gastado en un tiempo t traído a valor presente es $e^{-\alpha t}$. Si $T_1, T_2, \ldots$, son los tiempos de las sucesivas fallas, entonces $T_1 = X_1$, $T_2 = X_1 + X_2, \ldots$; el tiempo de la n-ésima falla es T_n, y el valor presente del costo del reemplazamiento es $\beta e^{-\alpha T_n}$. Sumando sobre todas las n, obtenemos el valor presente del costo de todos los futuros reemplazamientos; esto es

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \beta e^{-\alpha T_n}$$

A nosotros nos interesa calcular el valor esperado de C, que es,

$$E[C] = \beta \sum_{n=1}^{\infty} E\left[e^{-\alpha T_n}\right]$$

calculemos la esperanza, por el teorema 1.8. sabemos que los tiempos entre llegadas, son independientes e idénticamente distribuidas.

$$E\left[e^{-\alpha T_n}\right] = E\left[e^{-\alpha T_1}e^{-\alpha(T_2-T_1)}\cdots e^{-\alpha(T_n-T_{n-1})}\right]$$

$$= E\left[e^{-\alpha T_1}\right]E\left[e^{-\alpha(T_2-T_1)}\right]\cdots E\left[e^{-\alpha(T_n-T_{n-1})}\right]$$

$$= E\left[e^{-\alpha T_1}\right]^n$$

$$= \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\lambda e^{-\lambda t}dt\right]^n$$

$$= \left[\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\alpha)t}dt\right]^n$$

haciendo un cambio de variable

$$= \left[\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\int_0^\infty e^{-u}du\right]^n$$

$$= \left[\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right]^n$$

luego entonces

$$E[C] = \beta\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^n$$

$$= \beta\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^n$$

$$= \beta\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}}\right)$$

$$= \beta\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\left(\frac{1}{\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}}\right)$$

$$= \beta \frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\left(\frac{\lambda+\alpha}{\alpha}\right)$$

$$= \beta \frac{\lambda}{\alpha}$$

Capítulo 2.

2.- Cadenas de Markov.

2.1. Introducción.

Hay procesos estocásticos, tales que, la información de algún estado futuro X_{n+1}, dado que se sabe la información de los estados pasados $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ y del estado presente X_n, es independiente de los estados pasados y únicamente depende del estado presente X_n, por su forma de comportarse, estos procesos se aplican en diversas áreas, aquí analizaremos aquellos que tienen un espacio parametral de tiempo discreto T y un espacio de estados E, finito o contable infinito.

Definición 2.1. Un proceso estocástico $\{X_n\ ,\ n \in T\}$, con espacio parametral de tiempo discreto T y un espacio de estados E finito o contable infinito es una *cadena de Markov* si

$$P\{\, X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0\,, X_1 = i_1, \ldots\,, X_n = i \,\} = P\{\, X_{n+1} = j \mid X_n = i \,\} = p_{ij}.$$

p_{ij} es la probabilidad de transición o de paso, del estado i en el tiempo n, al estado j en el tiempo $n+1$, es decir, p_{ij} es la probabilidad de transición o de paso del estado i al estado j en un paso.

Sin pérdida de generalidad tomaremos a T y E como subconjunto de los números enteros.

Definición 2.2. Si las p_{ij} no dependen de n, se dice que la cadena de Markov es *homogénea.*

La definición 2.2 nos dice que

$$P\{\, X_{n+1} = j \mid X_n = i \,\} = P\{\, X_{m+1} = j \mid X_m = i \,\} = p_{ij} \text{ con } m \neq n.$$

supondremos siempre que p_{ij} no dependen de n. A $p_{ij} = P\{\, X_1 = j \mid X_0 = i \,\}$ también lo podemos poner como

$$P\{X_1 = j \mid X_0 = i\} = P_i\{X_1 = j\}$$

Las probabilidades de transición p_{ij} satisfacen

$$p_{ij} \geq 0, \quad i,j \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j \in E} p_{ij} = 1.$$

Podemos escribir todas las probabilidades de transición del estado i en el tiempo n, al estado j en el tiempo $n+1$, de la siguiente forma matricial

$$\text{estados de } X_{n+1}$$

$$\text{estados de } X_n \quad \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} = \mathbf{P}$$

P es la matriz de probabilidades de transición.

Definición 2.3. Una matriz **P** se llama *estocástica* si cada uno de sus elementos, $p_{ij} \geq 0$, $i,j \geq 0$ y $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$, es decir cada uno de los elementos de la matriz es mayor o igual que cero y en cada renglón su suma es uno.

Definición 2.4. Una matriz **P** se llama *doblemente estocástica* si cada uno de sus elementos $p_{ij} \geq 0$, $i,j \geq 0$, $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$ y $\sum_{i \in E} p_{ij} = 1$

La definición 2.4 nos dice que una matriz es doblemente estocástica si tanto sus columnas como sus renglones suman uno.

Ejemplo 2.1. Supóngase que la posibilidad de que el día de mañana llueva sólo depende de la situación climatológica de hoy y no de días previos, además supongamos que si llueve hoy, la probabilidad de que mañana llueva es α y si hoy no llueve, la probabilidad de que llueva mañana es β, esto quiere decir que si hoy llueve, entonces mañana no lloverá con probabilidad $1 - \alpha$ y si hoy no llueve, la probabilidad de que mañana tampoco sería $1 - \beta$, si consideramos que el estado 0 es que llueva y al estado 1 que no llueva, claramente bajo los supuestos que hemos hecho éste ejemplo es una cadena de Markov con la siguiente matriz de transición,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.2. Un apostador tiene \$N , en cada juego que apuesta tiene la probabilidad p de ganar \$1 o perder \$1 con probabilidad $1-p$, el jugador se retirará cuando se quede sin dinero o bien cuando haya duplicado su dinero original \$N.

Si consideramos X_n como el dinero que tienen el apostador después de la n-ésima vez que apuesta, X_n claramente es una cadena de Markov, ya que lo que va apostar únicamente dependerá del dinero que tenga actualmente y no de lo que haya jugado antes, X_n tienen espacio de estados E = {0, 1 , 2, ... , 2N}, sus probabilidades de transición son

$$p_{ij} = p \quad \text{con } j = i+1, i = 1, 2, \dots, 2N-1$$
$$p_{ij} = 1-p \text{ con } j = i-1, i = 1, 2, \dots, 2N-1 \text{ y}$$
$$p_{00} = p_{2N,2N} = 1$$

los estados 0 y 2N son estados absorbentes, este concepto lo definiremos más adelante, de aquí obtenemos la siguiente matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.3. Sea $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ definido por

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n & \text{si } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

con $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, variables aleatorias discretas, independientes e idénticamente distribuidas, con distribución de probabilidad $\{ p_k \,;\, k = 0, 1, 2, \ldots \}$. Dado que $X_{n+1}=X_n + Y_{n+1}$, tenemos que,

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_0, X_1, \ldots, X_n\} = P\{Y_{n+1} = j - X_n \mid X_0, X_1, \ldots, X_n\} = p_{j-X_n}$$

Claramente depende únicamente de X_n. Así tenemos que el proceso $\{X_n \,,\, n \in T\}$ define una cadena de Markov con probabilidades de transición

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = p_{j-i}$$

y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Teorema 2.1. Sea $\{X_n;\, n \in T,\, n \geq 0\}$ una cadena de Markov, para todo $m, n \in T$, con $m, n \geq 0$ y $i_0, i_1, \ldots, i_m \in E$

$$P\{ X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0 \} = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} i_m}$$

Demostración.

$$P\{ X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0 \}$$
$$= P\{ X_{n+2} = i_2, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0, X_{n+1} = i_1\}\, P\{ X_{n+1} = i_1 \mid X_n = i_0 \}$$

por ser $\{X_n;\, n \in T,\, n \geq 0\}$ una cadena de Markov y por definición de probabilidad de transición

$$= P\{ X_{n+2} = i_2, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_{n+1} = i_1\}\; p_{i_0 i_1}$$

repitiendo el primer paso

$$= P\{ X_{n+3} = i_3, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_{n+1} = i_1, X_{n+2} = i_2\}\; p_{i_0 i_1}\, P\{ X_{n+2} = i_2 \mid X_{n+1} = i_1\}$$

$$= P\{ X_{n+3} = i_3, \ldots, X_{n+m} = i_m \mid X_{n+2} = i_2\}\; p_{i_0 i_1}\; p_{i_1 i_2}$$

y así sucesivamente hasta llegar a

$$P\{ X_{n+1} = i_1, \ldots , X_{n+m} = i_m \mid X_n = i_0 \} = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} i_m}$$

□

Sea $\pi(i) = P\{ X_0 = i \}$ la distribución inicial de X_n.

Corolario 2.1.1. Sea $\{X_n;\ n \in T,\ n \geq 0\}$ una cadena de Markov, la ley de distribución de probabilidades del vector aleatorio ($X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \ldots,\ X_n = i_n$) depende de las probabilidades de transición p_{ij} y de la distribución inicial, es decir,

$$P\{ X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots , X_n = i_n \} = \pi(i_0)\, p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

Demostración.

$$P\{ X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots , X_n = i_n \} = P\{ X_1 = i_1, \ldots , X_n = i_n \mid X_0 = i_0 \}\, P\{ X_0 = i_0 \}$$

Del teorema 2.1 y de la definición de distribución inicial

$$P\{ X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots , X_n = i_n \} = \pi(i_0)\, p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

□

Los p_{ij}^n para $n, i, j \geq 0$, son los elementos de la matriz $\mathbf{P}^n$.

Teorema 2.2. Sea $\{X_n;\ n \in T,\ n \geq 0\}$ una cadena de Markov, para $m \in T$, con $m \geq 0$

$$P\{ X_{n+m} = j \mid X_n = i\} = p_{ij}^m$$

para todo $i, j \in E$.

Demostración.

Demostremos por inducción.

Para $m = 1$, por definición, esto es claro.
Por hipótesis de inducción se cumple para $m = l$, ahora verifiquemos si se cumple para $m = l + 1$.

$$P\{ X_{n+l+1} = j \mid X_n = i \} = \sum_{k \in E} P\{X_{n+l+1} = j, X_{n+l} = k \mid X_n = i\}$$

$$= \sum_{k \in E} P\{X_{n+l+1} = j \mid X_{n+l} = k, X_n = i\} P\{X_{n+l} = k \mid X_n = i\}$$

$$= \sum_{k \in E} P\{X_{n+l+1} = j \mid X_{n+l} = k\} P\{X_{n+l} = k \mid X_n = i\}$$

por hipótesis de inducción

$$= \sum_{k \in E} p_{kj} p_{ik}^{l} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{l} p_{kj}$$

$$= p_{ij}^{l+1}$$

□

Así que para una cadena de Markov, la probabilidad de transición en m pasos se define como

$$P\{X_{n+m} = j \mid X_n = i\} = p_{ij}^{m}.$$

Teorema 2.3. Sea $\{X_n; n \in T, n \geq 0\}$ una cadena de Markov

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i \in E} P\{X_0 = i\} p_{ij}^{n}$$

para todo $j \in E$.

Demostración.

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i \in E} P\{X_n = j, X_0 = i\}$$

$$= \sum_{i \in E} P\{X_0 = i\} P\{X_n = j \mid X_0 = i\}$$

por el teorema anterior

$$= \sum_{i \in E} P\{X_0 = i\} p_{ij}^{n}$$

□

Teorema 2.4. (Ecuación de Chapman – Kolmogorov) Sea $\{X_n; n \in T, n \geq 0\}$ una cadena de Markov, para todo $m, n \in T$, con $m, n \geq 0$ e $i, j \in E$

$$p_{ij}^{n+m} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{n} p_{kj}^{m}$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{n+m} &= P\{X_{n+m} = j \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{k\in E} P\{X_{n+m} = j, X_m = k \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{k\in E} P\{X_{n+m} = j \mid X_m = k, X_0 = i\} P\{X_m = k \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{k\in E} P\{X_{n+m} = j \mid X_m = k\} P\{X_m = k \mid X_0 = i\} \\
&= \sum_{k\in E} p_{ik}^{m} p_{kj}^{n}
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.4. Del ejemplo 2.1, consideremos que $\alpha = 0.7$ (la probabilidad de que mañana llueva dado que hoy llueve) y $\beta = 0.4$ (la probabilidad de que mañana llueva dado que hoy no llueva), entonces la matriz de transición es:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la probabilidad de que llueva en 4 días dado que hoy está lloviendo?

Tenemos que calcular p_{00}^{4}, para obtenerlo calculemos la matriz de transición $\mathbf{P}^4$, luego entonces

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix} \qquad \text{y}$$

$$\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^2\,\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{pmatrix}$$

por tanto la probabilidad de que llueva dentro de 4 días dado que está lloviendo hoy es 0.5749.

2.2. Clasificación de estados.

Definición 2.5. Si la probabilidad p_{ij}^{n} es no cero para alguna $n \geq 1$ se dice que el estado i lleva al estado j o también que j es *alcanzado* o *accesible* desde el estado i se denota por $i \rightarrow j$.

Definición 2.6. Se dice que los estados i, j se *comunican* si $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$, se denota por $i \leftrightarrow j$.

Definición 2.7. Una cadena de Markov es *irreducible* si todos los estados se comunican.

La definición anterior nos dice que una cadena de Markov es irreducible si cada estado es alcanzado desde cualquier otro, en algún número de pasos.

Teorema 2.5. La comunicación es simétrica y transitiva es decir para estados i, j y k,

1) $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$
2) si $i \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$

Demostración.

1) se cumplen inmediatamente a partir de la definición, probemos 2).

Si $i \leftrightarrow j$ entonces existe $n_1 > 0$, $p_{ij}^{n_1} > 0$ y
$j \leftrightarrow k$ entonces existe $n_2 > 0$, $p_{jk}^{n_2} > 0$

usando Chapman Kolmogorov

$$p_{ik}^{n_1+n_2} = \sum_{r \in E} p_{ir}^{n_1} p_{rk}^{n_2} \geq p_{ij}^{n_1} p_{jk}^{n_2} > 0,$$

lo que significa que si existe un n_3 tal que

$$p_{ik}^{n_3} > 0 .$$

□

Definición 2.8. Un estado j que se comunica nuevamente con él, $j \leftrightarrow j$, se dice que es un *estado de retorno*, es decir, j es un estado de *retorno* si $p_{jj}^{n} > 0$, para alguna $n \geq 1$.

Definición 2.9. Dado un estado j una *clase de comunicación* E_j es definida como el conjunto de todos los estados k los cuales se comunican con j; es decir

$$k \in E_j \text{ si, y sólo si } k \leftrightarrow j.$$

Podría pasar que E_j sea un conjunto vacío, es decir, que puede existir un estado j que no se comunica ni con el mismo, j es un estado de *no retorno.*

Teorema 2.6. Si E_1 y E_2 son dos clases de comunicación, entonces E_1 y E_2 son disjuntos.

Demostración.

Si para un estado que esté tanto en E_1 como en E_2, significa que $E_1 = E_2$, habremos probado que son disjuntos.

Supongamos que E_1 y E_2 tienen un estado i en común. Sean j y k dos estados tales que $E_1 = E_j$ y $E_2 = E_k$, probemos que $E_j = E_k$.

Verifiquemos primero que $E_j \subset E_k$ sea $h \in E_j$, dado que $h \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow i$, entonces $h \leftrightarrow i$, como $i \leftrightarrow k$ entonces $h \leftrightarrow k$, se cumple que $E_j \subset E_k$, análogamente podemos probar que $E_k \subset E_j$, lo que significa que $E_1 = E_2$ cuando tienen un estado en común.

□

Con la definición de clase de comunicación, tenemos que una cadena de Markov es irreducible si la cadena consiste de una sola clase de comunicación.

Podemos entonces decir que todo estado j en una cadena de Markov o bien pertenece a una clase de comunicación o es un estado de no retorno. Podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.7. El conjunto de estados E de una cadena de Markov puede escribirse como la unión de un finito o contable infinito, de conjuntos disjuntos E_r,

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_r \cup \ldots \quad \text{y} \quad E_iE_j = \varnothing \text{ para } i \neq j,$$

Donde cada conjunto E_r es una clase de comunicación o contiene exactamente un estado de no retorno.

Cuando un proceso entra a un conjunto C de estados y ya no puede salir nunca de él, se dice que el conjunto C de estados es cerrado, un conjunto cerrado puede contener uno o más estados, definamos formalmente a un conjunto cerrado.

Definición 2.10. Un conjunto C de estados se dice que es *cerrado* si $p_{ij}^n = 0$, para toda $n \geq 1$ y todo $i \in C$ y $j \notin C$.

Definición 2.11. j es un estado *absorbente* si, $p_{jj} = 1$ y $p_{jk}^n = 0$ para toda $n \geq 1$ y para todo $j \neq k$.

La definición anterior nos dice que, si un conjunto cerrado C contiene solamente un estado, entonces se le llama absorbente.

A partir de las definiciones es claro que si una cadena de Markov no contiene conjuntos cerrados, será irreducible, es decir, el único conjunto cerrado es el conjunto de los estados.

Definición 2.12. Un *conjunto* cerrado es *irreducible*, si ningún subconjunto propio de C es cerrado.

Definición 2.13. El *periodo* $d(i)$ de retorno al estado i es definido como

$$d(i) := \text{m.c.d.}\{m : p_{ii}^m > 0\}.$$

Definición 2.14. El estado i es *aperiódico* si $d(i) = 1$ y *periódico* si $d(i) > 1$.

Definición 2.15. El *tiempo de llegada* a un estado $j \in E$, se define como

$$T_j = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = j\}.$$

La probabilidad de empezar en el estado i y llegar al estado j en m pasos es, $f_{ij}^m = P_i\{T_j = m\}$.

Definamos a

$$f_{ij} = P_i\{T_j < \infty\} = \sum_{m=1}^{\infty} P_i\{T_j = m\} = \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}^m$$

como la probabilidad de que el proceso esté en i y alcance alguna vez j.

f_{ij} la podemos calcular teniendo en cuenta las siguientes opciones:

1) que de i pase a j en el primer paso con probabilidad p_{ij} o
2) que la primera transición sea a $k \in \{E - j\}$ y después eventualmente pasar a j.

De esto, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.8. Para cada $i, j \in E$,

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in \{E-j\}} p_{ik} f_{kj} .$$

Del teorema anterior podemos también deducir

$$f_{ij}^{m} = \begin{cases} p_{ij} & m = 1 \\ \sum_{k \in \{E-j\}} p_{ik} f_{kj}^{m-1} & m \geq 2 \end{cases}$$

Definición 2.16. Sea $\{X_n; n \in T, n \geq 0\}$ una cadena de Markov, definimos a

$$N_j = \sum_{k=0}^{\infty} I\{X_k = j\}$$

como el *número de llegadas* al estado j.

De la definición anterior $P_i\{N_j = m\}$ es la probabilidad, de estando en el estado i visitemos m veces el estado j.

Teorema 2.9. Sea $\{X_n; n \in T, n \geq 0\}$ una cadena de Markov entonces

1) $P_j\{N_j = m\} = \left(f_{jj}\right)^{m-1} (1 - f_{jj}),\ m = 1, 2, \ldots$

2) $P_i\{N_j = m\} = \begin{cases} 1 - f_{ij} & m = 0 \\ f_{ij}\left(f_{jj}\right)^{m-1}\left(1 - f_{jj}\right) & m = 1, 2, \ldots \end{cases}$ para $i \neq j$.

Hacemos notar que $\left(f_{jj}\right)^{m-1}$ significa que f_{jj} está elevado a la potencia $m-1$, que es muy diferente a como definimos f_{jj}^{m}.

Demostración.

Demostremos 1), el que suceda el evento $N_j = m$ es equivalente a que ocurra

$T_{j_1} < \infty$, $T_{j_2} < \infty$, ... , $T_{j_m} < \infty$, $T_{j_{m+1}} = \infty$, donde j_m representa la m-ésima llegada al estado j.

El tiempo entre las llegadas es independiente es decir,

$$\{T_{j_1} < \infty\}, \{T_{j_2} - T_{j_1} < \infty\}, \{T_{j_3} - T_{j_2} < \infty\}, \ \dots \ , \{ T_{j_{m+1}} - T_{j_m} = \infty \}$$

son independientes, esto se debe a que Markov implica independencia de llegadas de j a j, sus respectivas probabilidades asociadas son:

$$1, f_{jj}, f_{jj}, \dots , 1 - f_{jj}$$

la primera es uno porque ya estamos en j, luego entonces tenemos que

$$P_j\{ N_j = m \} = f_{jj}\, f_{jj} \cdots (1 - f_{jj}) = \left(f_{jj}\right)^{m-1} (1 - f_{jj}).$$

Ahora demostremos 2), para $m = 0$, significa que j nunca será alcanzado desde i, es decir

$$P_i \{N_j = 0 \} = P_i \{T_j = \infty \} = 1 - P_i \{T_j < \infty \} = 1 - f_{ij}.$$

Para $m \neq 0$, la diferencia con el inciso anterior es que ya estamos en el estado j (con probabilidad uno) luego entonces sólo hace falta considerar la probabilidad de pasar de i a j por primera vez, esto sucederá con probabilidad

$$P_i \{T_j < \infty \} = f_{ij}$$

tenemos entonces que

$$P_i \{N_j = m \} = f_{ij}\left(f_{jj}\right)^{m-1} (1 - f_{jj})$$

□

Definición 2.17.

1) j es *recurrente* si $P_j\{ T_j < \infty \} = 1$, significa que si estamos en el estado j, la probabilidad de que el proceso regrese alguna vez al estado j es uno.
2) Si no es recurrente se dice que es *transitorio.* Es decir $P_j\{ T_j = \infty \} > 0$.
3) Si j es recurrente y $E_j(T_j) = \infty$ se dice que j es *cero recurrente* o *recurrente nulo.*
4) Si j es recurrente y $E_j(T_j) < \infty$ se dice que es *recurrente positivo.*

Si $f_{jj} = 1$ entonces j es recurrente, que $f_{jj} = 1$ significa que tendremos un número infinito de llegadas a j, $P\{N_j = \infty\} = 1$ y que para todo m, $P\{ N_j = m \} = 0$, también podemos ver que $E_j(N_j) = \infty$.

Si $f_{jj} <1$, tenemos que $P_j\{ T_j < \infty \} <1$, lo que significa que $P_j\{ T_j = \infty \} > 0$, esto significa que existe la probabilidad de nunca regresar a j, es decir, que j es transitorio. También podemos ver que si $f_{jj} <1$, del teorema 2.9 es claro que la distribución de N_j cuando empieza en j es una geométrica con parámetro $1-f_{jj}$.

Teorema 2.10. Si $f_{jj} <1$ entonces N_j iniciando en j se distribuye como una geométrica con parámetro $1-f_{jj}$.

Definición 2.18. Sea R, la matriz con elementos $r_{ij} = E_i(N_j)$ con $i, j \in E$, a la matriz R se le llama *matriz potencia*.

$$r_{ij} = E_i(N_j) = E_i\left(\sum_{n=0}^{\infty} I\{X_n = j\}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_i\{X_n = j\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^n$$

en forma matricial nos quedaría que

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \cdots$$

Teorema 2.11. 1) $r_{jj} = \dfrac{1}{1-f_{jj}}$

2) $r_{ij} = f_{ij} r_{jj}$ con $i \neq j$.

Demostración.

El inciso 1 sale de que la distribución de N_j iniciando en j es una distribución geométrica, su valor esperado es

$$E_j(N_j) = \frac{1}{1-f_{jj}}$$

Probemos ahora 2,

$$
\begin{aligned}
r_{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} m P_i\{N_j = m\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m f_{ij}(1-f_{jj})\left(f_{jj}\right)^{m-1} \\
&= f_{ij} \sum_{m=1}^{\infty} m(1-f_{jj})\left(f_{jj}\right)^{m-1} \\
&= f_{ij} E_j(N_j) \\
&= f_{ij}\, r_{jj}
\end{aligned}
$$

□

Podemos decir que j es recurrente si, y sólo si $E_j(N_j) = \infty$ y j es transitorio si, y sólo si $E_j(N_j) < \infty$.

Teorema 2.12.

1) Si j es transitorio o recurrente nulo, entonces para todo $i \in E$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = 0.$$

2) Si j es recurrente positivo y aperiódico, entonces

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^n = \pi(j) > 0$$

y también

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = f_{ij}\pi(j)$$

para todo $i \in E$.

Demostración.

Aquí probaremos el caso cuando j es transitorio, para una demostración de j recurrente nulo y el inciso 2 puede encontrarse en Çinlar.

Si j es transitorio entonces $r_{jj} = E_j(N_j) < \infty$, entonces

$$r_{jj} = f_{jj}\, r_{jj} < r_{jj} < \infty$$

$$r_{jj} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{n} < \infty$$

luego entonces r_{jj} es finito solamente si $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{n} = 0$.

□

Teorema 2.13. Si j es recurrente y $j \to k$ entonces $k \to j$ y $f_{kj} = P_k\{T_j < \infty\} = 1$.

Demostración.

$j \to k$ significa que se puede pasar de j a k sin visitar a j, a la probabilidad de este evento le asignamos $\alpha > 0$. Sean:

A = " nunca visitar a j desde j" y
B = "Caminar de j a k y nunca regresar a j desde k"

por ser B un caso especial de A tenemos que P{ A } ≥ P { B }, ahora bien

$$P\{A\} = 1 - f_{jj} \qquad \text{y} \qquad P\{B\} = \alpha\,(1 - f_{kj})$$

Por ser j recurrente $f_{jj} = 1$, entonces

$$0 = 1 - f_{jj} = P\{A\} \geq P\{B\} = \alpha\,(1 - f_{kj}) \geq 0$$

entonces, $\alpha\,(1 - f_{kj}) = 0$
como $\alpha > 0$, entonces $1 - f_{kj} = 0$, es decir, $f_{kj} = 1$.

Significa también que $k \to j$.

□

Teorema 2.14. Si j es recurrente y $j \to k$ entonces k es recurrente.

Demostración.

Si $j \to k$ significa que existe un $l > 0$, tal que, $p_{jk}^{l} > 0$, del teorema anterior como j es recurrente y $j \to k$ entonces $k \to j$, es decir, existe un $m > 0$ tal que $p_{kj}^{m} > 0$, es decir que $p_{jk}^{l}\ p_{kj}^{m} > 0$.

Usando Chapman – Kolmogorov

$$p_{kk}^{m+n+l} = P_k\{X_{m+n+l} = k\} = \sum_{i\in E} p_{ki}^{m} p_{ik}^{n+l}$$

considerando un caso particular de p_{ik}^{n+l}

$$\sum_{i\in E} p_{ki}^{m} p_{ik}^{n+l} \geq \sum_{i\in E} p_{ki}^{m} p_{ii}^{n} p_{ik}^{l}$$

ya que $j \in E$, tomamos el elemento j de la suma, nos queda que

$$\sum_{i\in E} p_{ki}^{m} p_{ii}^{n} p_{ik}^{l} \geq p_{kj}^{m} p_{jj}^{n} p_{jk}^{l}$$

es decir, que

$$p_{kk}^{m+n+l} \geq p_{kj}^{m} p_{jj}^{n} p_{jk}^{l} \qquad (1)$$

por otro lado

$$\begin{aligned} r_{kk} = E_k(N_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_k\{X_n = k\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{n} \\ &\geq \sum_{n=m+l}^{\infty} p_{kk}^{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{n+m+l} \end{aligned}$$

por (1)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{n+m+l} &\geq \sum_{n=0}^{\infty} p_{kj}^{m} p_{jj}^{n} p_{jk}^{l} \\ &= p_{kj}^{m} p_{jk}^{l} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{n} \end{aligned}$$

$$= p_{kj}^{m} p_{jk}^{l} \, E_j(N_j)$$

como j es recurrente $E_j(N_j) = \infty$, luego entonces $E_k(N_k) = \infty$, por tanto k es recurrente.

□

Teorema 2.15. Si j es recurrente, entonces existe un conjunto C_j cerrado e irreducible que contiene a j.

Demostración.

Sea $C_j := \{ j \in E, j \to i \}$, como j es recurrente entonces si $j \to i$ entonces por el teorema 2.13 $i \to j$ entonces $C_j := \{ i \in E, j \leftrightarrow i \}$.

□

Con la demostración de este teorema y el teorema 2.6. podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.16. Los estados recurrentes se pueden dividir en una manera única en conjuntos cerrados e irreducibles.

Teorema 2.17. Si $\{X_n;\ n \in T,\ n \geq 0\}$ es una cadena de Markov, con E irreducible entonces.

1) Todos los estados son recurrentes.
2) Todos los estados son transitorios.

Demostración.

1) Por el teorema anterior y el teorema 2.14 si j es recurrente y E es irreducible, entonces todo elemento de E debe ser recurrente.

2) Por el teorema 2.14, sabemos que para $j, k \in E$, si j es recurrente y $j \to k$ entonces k es recurrente, negando ambas proposiciones, tenemos que, si k es transitorio entonces j es transitorio, $k \to j$.

□

Teorema 2.18. Si $\{X_n;\ n \in T,\ n \geq 0\}$ es una cadena de Markov, con E irreducible entonces, todos los estados tienen la misma periodicidad.

Demostración.

Sea k un estado con periodicidad $d(k)$, como E es irreducible $k \leftrightarrow j$, entonces existe $s>0$ y $r>0$, tal que $p^r_{jk}>0$ y $p^s_{kj}>0$, ahora bien,

$$p^{s+r}_{kk} \geq p^s_{kj}\, p^r_{jk} > 0$$

para el estado j, sea $d(j)$ su periodicidad, sea n un múltiplo de $d(j)$, supongamos que n no es múltiplo de $d(k)$, luego entonces para

$$p^{s+r+n}_{kk} \geq p^s_{kj}\, p^n_{jj}\, p^r_{jk}$$

como n no es múltiplo de $d(k)$, entonces $p^{s+r+n}_{kk}=0$, lo que significa que $p^s_{kj}\, p^n_{jj}\, p^r_{jk}=0$, pero como $p^s_{kj}\, p^r_{jk}>0$ entonces $p^n_{jj}=0$, es una contradicción ya que n es un múltiplo de $d(j)$, entonces, por tanto $d(k) = d(j)$.

□

Teorema 2.19. Si $\{X_n;\ n \in T,\ n \geq 0\}$ es una cadena de Markov, y sea $C<\infty$ un subcojunto de estados irreducible, entonces no tiene estados transitorios, ni recurrentes nulos.

Demostración.

Demostremos que C no puede tener estados transitorios, el caso de recurrente nulo es totalmente análogo.
Sea j un estado transitorio por el teorema anterior significa que todos los estados en C son transitorios, ahora del teorema 2.12, si j es transitorio, entonces para algún $i \in C$

$$\lim_{n\to\infty} p^n_{ij} = 0$$

para cada $i \in C$ tenemos que $\sum_{j\in C} p^n_{ij} = 1$, entonces

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in C} p^n_{ij} = \sum_{j\in C} \lim_{n\to\infty} p^n_{ij} = 0$$

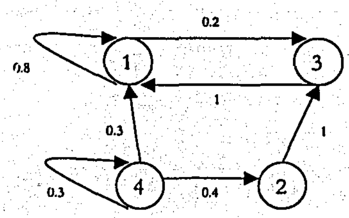
es una contradicción por lo que j no puede ser transitorio.

□

Ejemplo 2.5. Sea **P** la siguiente matriz de transición.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Dado que $p_{13} > 0$ y $p_{31} > 0$ y $p_{12} = p_{14} = p_{32} = p_{34} = 0$, los estados $\{1, 3\}$ son cerrados e irreducibles, son recurrentes positivos porque son finitos, esto es por el teorema 2.19, los estados 2 y 4 son transitorios.



Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov, con espacio de estados E y matriz de transición P, obtengamos los elementos de la matriz R

Si j es un estado recurrente significa que:

$$f_{jj} = 1 \Rightarrow r_{jj} = \infty,$$

ahora bien, si i es cualquier estado, entonces si,

$$i \to j \quad \Leftrightarrow \quad f_{ij} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_{ij} = f_{ij} r_{jj} = \infty$$

y si

$$i \not\to j \Leftrightarrow \quad f_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_{ij} = 0.$$

Si j es transitorio e i es recurrente, tenemos que $i \not\to j$ porque si $i \to j$ e i es recurrente entonces j es recurrente, caeríamos en una contradicción, así que

$$r_{ij} = 0 \quad \text{porque} \quad f_{ij} = 0.$$

Por último analicemos el caso en el que i, j son transitorios, sea D el conjunto de estados transitorios, sean **Q** y **S** las matrices que se obtienen a partir de **P** y **R** respectivamente, al eliminar todos los renglones y columnas correspondientes a los estados recurrentes, es decir, **Q** y **S** tienen elementos

$$q_{ij} = p_{ij} \text{ y } s_{ij} = r_{ij}, \text{ con } i, j \in D.$$

la matriz de probabilidades de transición la podemos particionar de la siguiente manera.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

de manera similar tendríamos, para $m \geq 0$ en los enteros

$$\mathbf{P}^m = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^m & 0 \\ \mathbf{L}_m & \mathbf{Q}^m \end{pmatrix},$$

aquí $\mathbf{K}^m$ es la potencia m de **K** similar para **Q** pero $\mathbf{L}_m$ es únicamente una matriz. Por definición

$$\mathbf{R} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}^m = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{K}^m & 0 \\ \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{L}_m & \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{Q}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}' & 0 \\ \mathbf{L}' & \mathbf{S} \end{pmatrix}$$

con $\quad \mathbf{S} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{Q}^m = \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots$

tenemos que,

$$\mathbf{SQ} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \mathbf{Q}^3 + \cdots = \mathbf{QS}$$
$$\mathbf{SQ} = \mathbf{QS} = \mathbf{S} - \mathbf{I}$$
$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{S} = \mathbf{I} \text{ y } \mathbf{S}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \mathbf{I}$$

Si D es finita entonces **S** es la inversa de $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$. Si no es finita podemos tener muchas soluciones.

Teorema 2.20. **S** es la solución minimal de $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{Y} = \mathbf{I}, \mathbf{Y} \geq 0$.

Demostración.

Hay que demostrar que si hay otra solución **Y** de $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{Y} = \mathbf{I}$ entonces $\mathbf{Y} \geq \mathbf{S}$, sea **Y** una solución, **Y** ≥ 0

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Q})\mathbf{Y}=\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{Y}=\mathbf{I}+\mathbf{Q}\mathbf{Y}$$
$$=\mathbf{I}+\mathbf{Q}(\mathbf{I}+\mathbf{Q}\mathbf{Y})$$
$$=\mathbf{I}+\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^2\mathbf{Y}$$

y sustituyendo **Y** sucesivamente

$$\mathbf{Y}=\mathbf{I}+\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^2+\cdots+\mathbf{Q}^n+\mathbf{Q}^{n+1}\mathbf{Y},$$

tenemos que

$$\mathbf{Y}\geq \mathbf{I}+\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^2+\cdots+\mathbf{Q}^n$$

$$\mathbf{S}=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbf{Q}^m\leq \mathbf{Y}.$$

□

Si **Y** es una solución y **S** es otra solución, entonces , $\mathbf{H}=\mathbf{Y}-\mathbf{S}\geq 0$, y

$$\mathbf{H}=\mathbf{Y}-\mathbf{S}=\mathbf{I}+\mathbf{Q}\mathbf{Y}-\mathbf{I}-\mathbf{Q}\mathbf{S}$$
$$=\mathbf{Q}(\mathbf{Y}-\mathbf{S})$$
$$=\mathbf{Q}\mathbf{H}$$

cada columna **h** de **H** satisface

$$\mathbf{h}=\mathbf{Q}\mathbf{h}\geq 0$$

por otro lado, de **S**

$$s_{ij}=f_{ij}r_{jj}\leq r_{jj}<\infty$$

porque i, j son estados transitorios, la única solución de $(\mathbf{I}-\mathbf{Q})\mathbf{Y}=\mathbf{I}$ es **S**, si, y sólo si, la solución de $\mathbf{h}=\mathbf{Q}\mathbf{h}$ es $\mathbf{h}=\mathbf{0}$.

Corolario 2.20.1. **S** es la única solución a $(\mathbf{I}-\mathbf{Q})\mathbf{Y}=\mathbf{I}$, $\mathbf{Y}\geq 0$ si, y sólo si $\mathbf{h}=\mathbf{Q}\mathbf{h}$, $0\leq \mathbf{h}\leq 1$ implica que $\mathbf{h}=\mathbf{0}$.

Ejemplo 2.6. X es una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0.8 & 0.2 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.3 \end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Como podemos ver los estados 1, 2, 3 forman un conjunto irreducible, de estados recurrentes positivos, los estados 4 y 5 forman otra clase de conjunto irreducible de estados recurrentes positivos y los estados 6, 7, y 8 son estados transitorios, los cuales únicamente pueden ir a los estados 1, 2 y 3, no tienen comunicación con los estados 4 y 5.

Calculemos **R**, para j recurrente e i cualquier estado tenemos que $r_{ij} = \infty$, en caso de que $i \not\rightarrow j$, tenemos que $r_{ij} = 0$, únicamente nos hace falta calcular el caso en el que tanto i como j son estados transitorios (nos hace falta calcular la submatriz inferior del lado derecho), obtengamos **Q** que se obtienen a partir de **P**, al eliminar todos los renglones y columnas correspondientes a los estados recurrentes

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6 & 0\\ 0 & 0 & 0.2\\ 0.6 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

tenemos estados transitorios finitos, luego entonces **S** (**S** que se obtienen a partir de **R**, al eliminar todos los renglones y columnas correspondientes a los estados recurrentes) es la inversa de $\mathbf{I}-\mathbf{Q}$

$$\mathbf{S}=(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}=\begin{pmatrix}0.6 & -0.6 & 0\\ 0 & 1 & -0.2\\ -0.6 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{66}\begin{pmatrix}125 & 75 & 15\\ 15 & 75 & 15\\ 75 & 45 & 75\end{pmatrix},$$

así tenemos que la matriz **R** para esta cadena de Markov es

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}\infty & \infty & \infty\\ \infty & \infty & \infty\\ \infty & \infty & \infty\end{matrix}} & 0 & 0\\ 0 & \boxed{\begin{matrix}\infty & \infty\\ \infty & \infty\end{matrix}} & 0\\ \boxed{\begin{matrix}\infty & \infty & \infty\\ \infty & \infty & \infty\\ \infty & \infty & \infty\end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix}125/66 & 75/66 & 15/66\\ 15/66 & 75/66 & 15/66\\ 75/66 & 45/66 & 75/66\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

Ahora calculemos los valores para la matriz **F**. Si i, j son recurrentes y pertenecen al mismo conjunto cerrado e irreducible entonces $f_{ij}=1$.

Si i es recurrente y j es transitorio entonces $f_{ij}=0$.

Si i,j son recurrentes, $i\in E_1$ y $j\in E_2$, $E_1\cap E_2=\varnothing$ entonces $f_{ij}=0$.

Si i,j son transitorios, entonces $r_{ij}<\infty$, del teorema 2.11.1

$$r_{jj}=\frac{1}{1-f_{jj}}\quad\Rightarrow r_{jj}(1-f_{jj})=1$$

$$\Rightarrow r_{jj}-1=r_{jj}f_{jj}$$

$$\Rightarrow f_{jj} = 1 - \frac{1}{r_{jj}}$$

y del teorema 2.11.2

$$r_{ij} = f_{ij} r_{jj} \quad \Rightarrow \quad f_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_{jj}}$$

Teorema 2.21. Si i es transitorio y C es un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes

$$f_{ij} = f_{ih} \text{ para todo } j,\, h \in C.$$

Demostración.

Para $j, h \in C$, $f_{jh} = f_{hj} = 1$, así si la cadena llega a un estado de C, éste también visita todos los otros estados, entonces $f_{ij} = f_{ih}$.

□

Sea C_1, C_2, ... una clase de conjuntos cerrados e irreducibles y D es un conjunto de estados transitorios, donde $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ... son las matrices de transición correspondientes a los conjuntos C_1, C_2, ... y $\mathbf{Q}$ es la que está formada por los estados transitorios y $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, ... son las matrices de transición de los estados transitorios a los estados de la clase de conjuntos cerrados e irreducibles C_1, C_2, ... respectivamente, la matriz $\mathbf{P}$ nos queda de la siguiente forma

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_3 & \cdots & \mathbf{Q} \end{pmatrix}.$$

Como estamos interesados únicamente en saber cuando el conjunto C_j será alcanzado, sin pérdida de generalidad podemos considerarlos como estados absorbentes es decir cambiemos a $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ... por 1, 1, ... , así nuestra matriz de transición $\mathbf{P}$ la podemos rescribir de la siguiente forma

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \cdots & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

donde el i-ésimo elemento de $\mathbf{b}_j$ ($\mathbf{b}_j$ es un vector columna) es, la probabilidad de estando en el estado transitorio i, llegue al conjunto C_j,

$$\mathbf{b}_j(i) = \sum_{k \in C_j} p_{ik}\text{, con } i \in D$$

o más simple

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m)$, los elementos de $\mathbf{B}$ son $b_{ij} = \sum_{k \in C_j} p_{ik}$, de aquí se sigue que

$$\tilde{\mathbf{P}}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{Q}^n \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{B}_n = (\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^{n-1})\mathbf{B}$, los elementos bn_{ij} de la matriz $\mathbf{B}_n$, nos indican la probabilidad de que en n pasos vayamos desde el estado i a C_j o bien es la probabilidad que desde el estado i el proceso entre al C_j en un tiempo n o antes es decir (lo podemos ver como $X_0 = i$ queremos llegar a $X_n = C_j$)

$$bn_{ij} = P_i\{\, T_j < n+1 \}$$

entonces la probabilidad de que alcancemos a C_j a partir del estado transitorio i en algún momento sería

$$\begin{aligned} P_i\{\, T_j < \infty \} &= \lim_{n\to\infty} P_i\{\, T_j < n+1 \} \\ &= \lim_{n\to\infty} bn_{ij} \\ \lim_{n\to\infty} \mathbf{B}_{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{Q}^k\right)\mathbf{B} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q}^k\right)\mathbf{B} \\ &= \mathbf{SB} \end{aligned}$$

luego entonces si i es transitorio, $f_{ik} = (sb)_{ij}$, para todo $k \in C_j$, por el teorema anterior podemos definir

$$g_{ij} = f_{ik} = (sb)_{ij}$$

como la probabilidad de alcanzar el conjunto C_j desde el estado transitorio i.

De todo lo anterior podemos concluir que para cada estado transitorio i y una clase recurrente C_j, la probabilidad de alcanzar el conjunto C_j desde el estado transitorio i, es

$$g_{ij} = f_{ik} = (sb)_{ij} \quad \text{para todo } k \text{ en } C_j.$$

Lema 2.1. Sea i un estado transitorio desde el cuál únicamente un número finito de estados transitorios puede ser alcanzado. Además, supóngase que hay únicamente una clase C de estados recurrentes, que puede ser alcanzado desde i. Entonces $f_{ij} = 1$ para todo $j \in C$.

Demostración.

Al existir únicamente un conjunto de estados recurrentes que son alcanzados a partir del conjunto de estados transitorios D, tenemos que la matriz **B** se convierte en un vector columna, por definición $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$, es decir, si **1** es el vector columna formado por puros unos, por la definición

$$\mathbf{P}\,\mathbf{1} = \mathbf{1}$$

tenemos que, $\mathbf{B} + \mathbf{Q1} = \mathbf{1}$, o bien $\mathbf{B} = \mathbf{1} - \mathbf{Q1}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_n &= (\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^{n-1})\mathbf{B} \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^{n-1})(\mathbf{1} - \mathbf{Q1}) \\
&= \mathbf{I}\,\mathbf{1} + \mathbf{Q1} + \mathbf{Q}^2\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{1} - \mathbf{Q1} - \mathbf{Q}^2\mathbf{1} - \cdots - \mathbf{Q}^n\mathbf{1} \\
&= \mathbf{1} - \mathbf{Q}^n\mathbf{1}
\end{aligned}$$

Así si tomamos el límite

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{B}_n = \lim_{n \to \infty} (\mathbf{1} - \mathbf{Q}^n\mathbf{1})$$

dado que $\sum \mathbf{Q}^n < \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{Q}^n = 0$, entonces el límite anterior nos queda como $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{B}_n = 1$, obtenemos

$$g_{ij} = f_{ik} = 1, \text{ para todo } k \in C.$$

□

Ejemplo 2.7. Ahora calculemos la matriz **F** de la cadena del ejemplo 2.6, si i, j son recurrentes y pertenecen a la misma clase entonces $f_{ij} = 1$, cuando pertenecen a diferentes clases $f_{ij} = 0$, si i es recurrente y j es transitorio $f_{ij} = 0$. Si i, j son transitorios usamos los resultados de **R** para calcular

$$f_{jj} = 1 - \frac{1}{r_{jj}}, \quad f_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_{jj}}$$

por ejemplo sea $i = 6$, $j = 7$, del ejemplo 2.6 $r_{67} = \dfrac{75}{66}$ y $r_{77} = \dfrac{75}{66}$ luego entonces $f_{67} = 1$.

Y usando el lema 2.1 para el caso en que i es transitorio y j es recurrente $f_{ij} = 1$, así

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0.472 & 1 & 0.20 \\ 0.12 & 0.12 & 0.20 \\ 0.60 & 0.60 & 0.12 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

2.3 Distribución estacionaria.

Definición 2.19. Sea $\{X_n;\ n \in T,\ n \geq 0\}$ una cadena de Markov, con matriz de transición **P**, π es una *distribución estacionaria* con respecto a **P** o $\{X_n;\ n \in T,\ n \geq 0\}$ si, y sólo si

1) π es una distribución.
2) $\pi = \pi\,\mathbf{P}$, es decir, $\pi(j) = \sum_{i\in E}\pi(i)p_{ij}$ para toda $j \in E$.

Teorema 2.22. Si $\{X_n;\, n \in T,\, n \geq 0\}$ es una cadena de Markov irreducible, aperiódica entonces todos los estados son recurrentes positivos si, y sólo si el sistema de ecuaciones lineales

$$\pi(j) = \sum_{i\in E}\pi(i)p_{ij}\ ;\ \text{para toda } j \in E$$

$$\sum_{j\in E}\pi(j) = 1$$

tiene una solución π. Si existe una solución π esta es positiva, $\pi(j) > 0$ para toda j, π es única y

$$\pi(j) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} \qquad \text{para todo } i,j \in E.$$

Demostración.

Si j es recurrente positivo y aperiódico por el teorema 2.12

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \tau(j) > 0$$

ya que para todo $i,j \in E, f_{ij} = 1$, y

$$\sum_{j\in E}\tau(j) = \sum_{j\in E}\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in E} p_{ij}^{n} = 1$$

τ es una distribución.

Sea $p_{ij}^{n+1} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{n} p_{kj}$

$$\begin{aligned}\tau(j) &= \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k\in E} p_{ik}^{n} p_{kj}\\ &= \sum_{k\in E}\lim_{n\to\infty} p_{ik}^{n} p_{kj}\end{aligned}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$= \sum_{k\in E} \tau(k) p_{kj}$$

$$\tau = \tau \mathbf{P}$$

Todavía nos hace falta revisar su unicidad, sea π otra solución

$$\begin{aligned} \pi &= \pi \mathbf{P} \\ &= \pi \mathbf{P}\mathbf{P} \\ &= \pi \mathbf{P}\mathbf{P}\mathbf{P} \\ &= \pi \mathbf{P}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(j) &= \sum_{i\in E} \pi(i) p_{ij}^n \qquad \text{para todo } j \in E \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in E} \pi(i) p_{ij}^n \\ &= \sum_{i\in E} \pi(i) \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n \\ &= \sum_{i\in E} \pi(i) \tau(j) \\ &= \tau(j) \sum_{i\in E} \pi(i) \\ &= \tau(j) \end{aligned}$$

Ahora demostremos la otra parte del teorema, es decir, hay que probar que la existencia de una solución π al sistema de arriba implica que todos los estados son recurrentes positivos.
Sea π una distribución estacionaria

$$\pi = \pi \mathbf{P} = \pi \mathbf{P}^n$$

$$\pi(j) = \sum_{i\in E} \pi(i) p_{ij}^n \qquad \text{para todo } j \in E.$$

Supongamos que la cadena no es recurrente positiva por el teorema 2.12,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = 0$$

entonces

$$\pi(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in E} \pi(i) p_{ij}^n = \sum_{i\in E} \pi(i) \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = 0$$

esto significa que $\sum_{j\in E} \pi(j) = 0$, esto es una contradicción, por tanto los estados son recurrentes positivos.

□

Ejemplo 2.8. Sea X una cadena de Markov, con matriz de transición

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

podemos ver que los estados {0, 1} forman una clase de conjunto de recurrencia C_1, los estados {2,3,4} forman otra clase de conjunto de recurrencia C_2, ambos conjuntos está formado por estados aperiódicos y los estados {5, 6} son transitorios. Calculemos la matriz $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$, para calcularla usamos el teorema 2.12.2 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = f_{ij}\pi(j)$ y el resultado del teorema 2.22.

Del primer conjunto calculemos su probabilidad cuando $n \to\infty$, calculemos $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_1^n$, donde

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

para calcularla tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\pi(0) = 0.2\pi(0)+0.7\pi(1)$$

$$\pi(1) = 0.8\pi(0)+0.3\pi(1)$$

$$\pi(0) + \pi(1) = 1$$

de la primera ecuación $\pi(0) = \dfrac{0.7}{0.8}\pi(1)$, sustituyendo en la última ecuación

$$\frac{0.7}{0.8}\pi(1)+\pi(1) = 1$$

de aquí

$$\pi(1)=\frac{7}{15} \text{ y } \pi(0) = \frac{8}{15}$$

para el otro conjunto de estados recurrentes tenemos la siguiente matriz de transición

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\pi(2) = 0.3\pi(2) + 0.6\pi(3)$$
$$\pi(3) = 0.5\pi(2) \qquad +0.4\pi(4)$$
$$\pi(4) = 0.2\pi(2) + 0.4\pi(3)+0.6\pi(4)$$

y además

$$\pi(2) + \pi(3) + \pi(4) = 1$$

de la ecuación uno y dos

$$\pi(3) = \frac{7}{6}\pi(2) \quad \text{y} \quad \pi(4) = \frac{5}{2}\pi(3) - \frac{5}{4}\pi(2)$$

ya que los estados son recurrentes y aperiódicos, sabemos que el sistema tiene solución única, hacemos $\pi(2)=1$, obtenemos que $\pi(3)=\frac{7}{6}$ y $\pi(4)=\frac{10}{6}$, sumamos las tres cantidades $\pi(2) + \pi(3) + \pi(4) = \frac{23}{6}$ y luego las dividimos entre la suma para hacer que se cumpla la última condición, obtenemos que $\pi(2)=\frac{6}{23}$, $\pi(3) = \frac{7}{23}$ y $\pi(4)=\frac{10}{23}$, para calcular por completo la matriz $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$, nos hace falta calcular la matriz **F**, para esto calculemos primero **R**,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

tenemos estados transitorios finitos, luego entonces **S** (**S** que se obtienen a partir de **R**, al eliminar todos los renglones y columnas correspondientes a los estados recurrentes) es la inversa de **I − Q**

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.1 \\ -0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1.75 \end{pmatrix},$$

así tenemos que la matriz **R** para esta cadena de Markov es

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1.75 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos la matriz **F**,

$$\mathbf{G} = \mathbf{SB} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

ahora si, ya podemos obtener $\mathbf{P}^{\infty}$,

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{8}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{15} & \frac{8}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{23} & \frac{7}{23} & \frac{10}{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{23} & \frac{7}{23} & \frac{10}{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{23} & \frac{7}{23} & \frac{10}{23} & 0 & 0 \\ \frac{1.4}{15} & \frac{1.6}{15} & \frac{4.8}{23} & \frac{5.6}{23} & \frac{8}{23} & 0 & 0 \\ \frac{2.8}{15} & \frac{3.2}{15} & \frac{3.6}{23} & \frac{4.2}{23} & \frac{6}{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora que ocurre en caso de que los estados sean periódicos.

Teorema 2.23. Sea X una cadena de Markov, irreducible con estados periódicos y recurrentes con periodo δ, entonces los estados pueden ser divididos en δ conjuntos disjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_\delta$ tal que $p_{ij}=0$ a no ser que $i \in B_1$ y $j \in B_2$ o $i \in B_2$ y $j \in B_3$ o $\ldots$ o $i \in B_\delta$ y $j \in B_1$.

Demostración

Sin pérdida de generalidad tomemos los estados 0 y j, dado que la cadena es irreducible $0 \to j$ y $j \to 0$, es decir, existen enteros r, s tal que

$$p_{0j}^{r} > 0 \text{ y } \beta = p_{j0}^{s} > 0$$

$$p_{00}^{m+s} = p_{0j}^{m}\, p_{j0}^{s} = p_{0j}^{m}\, \beta$$

como el estado 0 tiene periodo δ, $p_{00}^{m+s} > 0$ si $m + s = k\delta$, si $p_{0j}^{m} > 0$ entonces $m = k\delta - s$ se cumple que $p_{0j}^{m} > 0$, si $m = \alpha, \alpha + \delta, \alpha + 2\delta, \ldots$.

Definimos para todo $j \in B_\alpha$,como el conjunto de todos los estados que se pueden alcanzar desde 0 sólo en los pasos $\alpha, \alpha + \delta, \alpha + 2\delta, \ldots$ y a $B_{\alpha+1}$ el conjunto de todos los estados que se pueden alcanzados desde 0 en los pasos $\alpha + 1, \alpha + \delta + 1, \alpha + 2\delta + 1, \ldots$. Entonces $p_{ij} = 0$ excepto si, $i \in B_\alpha$ y $j \in B_{\alpha+1}$ para $\alpha = 1, 2, \ldots, \delta$.

□

Teorema 2.24. Sea P la matriz de transición de una cadena de Markov irreducible con estados periódicos, con periodo δ y $B_1, B_2, \ldots, B_\delta$ definidos como el teorema anterior.

Entonces en la cadena de Markov con matriz de transición $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{\delta}$, las clases B_1, B_2, ... , B_δ son conjuntos cerrados e irreducibles de estados aperiódicos.

Demostración.

En δ pasos la cadena se mueve de B_1 a B_1, de B_2 a B_2, ..., de B_δ a B_δ, veamos esto paso por paso, en un paso sólo podemos llegar al conjunto inmediato a él, esto es, $p_{ij}=0$ a no ser que $i \in B_1$ y $j \in B_2$ o $i \in B_2$ y $j \in B_3$ o ... o $i \in B_\delta$ y $j \in B_1$, en dos paso ocurriría lo siguiente, $p_{ij}^2=0$ a no ser que $i \in B_1$ y $j \in B_3$ o $i \in B_2$ y $j \in B_4$ o ... o $i \in B_\delta$ y $j \in B_2$, en $\delta-1$ pasos, ocurriría lo siguiente, $p_{ij}^{\delta-1}=0$ a no ser que $i \in B_1$ y $j \in B_\delta$ o $i \in B_2$ y $j \in B_1$ o ... o $i \in B_\delta$ y $j \in B_{\delta-1}$, entonces como podemos ver en δ pasos, $p_{ij}^{\delta}=0$ a no ser que $i \in B_1$ y $j \in B_1$ o $i \in B_2$ y $j \in B_2$ o ... o $i \in B_\delta$ y $j \in B_\delta$, como se asevero al inicio, la matriz de transición en δ pasos la podemos poner de la siguiente forma,

$$\mathrm{P}^{\delta} = \overline{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_1 & & & 0 \\ & \mathrm{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{P}_\delta \end{pmatrix}$$

analicemos que ocurre con los estados de esta matriz de transición, podemos ver que cada una de las clases de conjuntos forman un conjunto cerrado e irreducible, además son aperiódicos, $p_{\alpha ij} > 0$ para $i, j \in B_\alpha$, recordemos que ya no trabajamos con la matriz $\mathbf{P}$, ahora estamos trabajando sobre la matriz $\overline{\mathbf{P}}$.

□

A partir de la matriz $\overline{\mathrm{P}}$ podemos calcular $n \to \infty$, usando el teorema 2.22, podemos ver también que $\sum_{j\in E} \pi(j) = \delta$. Hay que ver que $\mathbf{P}^n$ no tiene límite cuando $n \to \infty$, excepto, cuando para todos los estados $p_{ij} = 0$, sin embargo los límites de $\mathbf{P}^{n\delta+m}$ existen cuando $n \to \infty$, pero dependen del estado inicial i. Con el siguiente teorema terminaremos con el estudio de los estados periódicos, sólo se demuestra la primera parte del teorema, la otra parte de la demostración se puede consultar en Çinlar.

Teorema 2.25. Sea P y B_α, definidos como en el teorema anterior y supóngase que la cadena es positiva. Entonces para $m \in \{0, 1, \ldots, \delta-1\}$,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n\delta+m} = \begin{cases} \pi(j) & \text{si } i \in B_\alpha, j \in B_\beta, \beta = \alpha + m (\text{mod } \delta) \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

$\pi(j), j \in E$, son la única solución de

$$\pi(j) = \sum_{i\in E} \pi(i) p_{ij}, \quad \sum_{j\in E} \pi(j) = \delta, \qquad j \in E.$$

Demostración.

Del teorema 2.24 la cadena correspondiente a $\mathbf{P}^\delta = \overline{\mathbf{P}}$, tiene δ clases de conjuntos, de estados recurrentes positivos y aperiódicos. Sea $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\delta$, la distribución límite correspondiente de $B_1, B_2, \ldots B_\delta$ y $\pi(j) = \pi_\alpha(j)$ si $j \in B_\alpha$.

Sea $m \in \{0, 1, \ldots, \delta-1\}$ un valor fijo, supóngase que $i \in B_\alpha$, y sea $\beta = \alpha + m(\text{mod}\delta)$. Tenemos,

$$p_{ij}^{n\delta+m} = \sum_k p_{ik}^m p_{kj}^{n\delta}$$

$$= \begin{cases} \sum_{k\in B_\beta} p_{ik}^m p_{kj}^{n\delta} & \text{si } j \in B_\beta \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

dado que $p_{ik}^m = 0$ excepto si $k \in B_\beta$, y para $k \in B_\beta$, $p_{kj}^{n\delta} = 0$ a no ser que $j \in B_\beta$ también. Para $k, j \in B_\beta$, $\lim_{n\to\infty} p_{kj}^{n\delta} = \pi(j)$, independiente de k, tomando el límite en ambos lados hemos demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n\delta+m} = \begin{cases} \pi(j) & \text{si } i \in B_\alpha, j \in B_\beta, \beta = \alpha + m (\text{mod } \delta) \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

□

Con este último teorema y junto con el teorema 2.22 podemos enunciar el siguiente resultado.

Corolario 2.25.1. Sea X una cadena de Markov, y consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\pi(j) = \sum_{i \in E} \pi(i) p_{ij}, j \in E$$

Entonces todos los estados son recurrentes no nulos o positivos, si, y sólo si, existe una solución π con

$$\sum_{j \in E} \pi(j) = 1$$

y $\pi(j) > 0$, para cada $j \in E$, y no hay otra solución.

Hace falta completar nuestro estudio acerca de la relación de los tipos de estados y el límite de $\mathbf{P}^n$ cuando $n \to \infty$. Si la cadena de Markov es finita, y ésta contiene estados transitorios, hay un momento en el que la cadena de Markov sale de los estados transitorios, pero si no es finita puede ocurrir que nunca salga de ellos.

Sea X una cadena de Markov, con matriz de transición P, A es el conjunto de estados transitorios de la cadena, tal que $A \subset E$, y sea $\mathbf{Q}$ la matriz que se obtienen a partir de $\mathbf{P}$, al eliminar todos los renglones y columnas correspondientes a los estados recurrentes, es decir, $\mathbf{Q}$ tienen elementos

$$q_{ij} = p_{ij} \text{ con } i, j \in A.$$

$\mathbf{Q}^2$ la obtenemos de la siguiente forma,

$$q_{ij}^2 = \sum_{i_1 \in A} q_{ii_1} q_{i_1 j}$$

y en general $\mathbf{Q}^n$ sería,

$$q_{ij}^n = \sum_{i_1 \in A} \sum_{i_2 \in A} \cdots \sum_{i_n \in A} q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_n j}$$

$$= P_i \{ X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A, X_n = j \}$$

$$\sum_{j \in A} q_{ij}^n = P_i \{ X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A, X_n \in A \}$$

Si n crece, decrece $\sum_{j \in A} q_{ij}^n$ porque

$$\{X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A\} \supseteq \{ X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A, X_n \in A \}$$

Sea

$$f(i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in A} q_{ij}^n = \lim_{n\to\infty} P_i\{ X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A, X_n \in A \}$$

la probabilidad de que la cadena de Markov nunca salga de A, dado que empezó en i.

Teorema 2.26. f es la solución máxima de

$$h = Qh \qquad 0 \le h \le 1,$$

además $f = 0$ o $\sup_{i\in A} f(i)=1$.

Demostración.

$$\text{Sea } f_n(i) = \sum_{j\in A} q_{ij}^n = P_i\{X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A, X_n \in A\}$$

$$f_1 \ge f_2 \ge f_3 \ge \cdots$$

y

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

tenemos que

$$f_{n+1}(i) = \sum_{k\in A} q_{ik} f_n(k)$$

tomando el límite

$$f(i) = \sum_{k\in A} q_{ik} f(k)$$

luego entonces f es una solución a h = Qh, ahora probemos que es una solución máxima. Sea h otra solución, $h \le 1$

$$h = Qh \text{ entonces } h = Q^n h \le Q^n 1 = f_n$$

haciendo $n \to \infty$, $h \le f$, por tanto f es una solución máxima.

Sólo hace falta probar la última parte, para $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ es trivial, sea $c = \sup_{i \in A} f(i)$

$$\mathbf{f} = \mathbf{Q}^n \mathbf{f} \leq c\, \mathbf{Q}^n \mathbf{1} \leq c\mathbf{f}_n \text{ para toda } n,$$

tomando límite por ambos lados $\mathbf{f} \leq c\mathbf{f}$ entonces $1 \leq c$, por lo tanto $\sup_{i \in A} f(i) = 1$.

□

Teorema 2.27. Sea X una cadena de Markov irreducible con matriz de transición **P**, y **Q** es la matriz que obtenemos a partir de **P** al eliminar la fila y columna k, $k \in E$. Todos los estados son recurrentes, si, y sólo si, la única solución de $\mathbf{h} = \mathbf{Qh}$ es $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

Demostración.

Sea $A = E - \{ k \}$, como la cadena es irreducible de k podemos ir a A, y sea

$$f(i) = \lim_{n \to \infty} P_i \{ X_1 \in A, X_2 \in A, \ldots, X_{n-1} \in A, X_n \in A \}$$

Si $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ es la única solución a $\mathbf{h} = \mathbf{Qh}$, $f(i) = 0$ para todo i, esto significa que salimos del conjunto A y regresamos a k, entonces k es recurrente y como la cadena es irreducible todos los estados son recurrentes.

Ahora, si los estados son recurrentes significa que la probabilidad de quedarnos en A es cero ya que tenemos que regresar a k, por lo tanto $f(i) = 0$ para todo i, lo que es lo mismo $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

□

A continuación veremos como clasificar los estados en base a calcular $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n$.

Ejemplo 2.9. Sea X una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{0, 1, \ldots\}$ y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Esta cadena es llamada caminata aleatoria, si está en la posición i en el n-ésimo paso, el siguiente paso es a la posición $i-1$ o a $i+1$, con probabilidad q y p respectivamente, excepto cuando está en $i = 0$ es seguro que va a 1. Todos los estado pueden ser alcanzados uno del otro, lo que significa que la cadena es irreducible, si empezamos en el estado cero podemos regresar a él, en al menos 2 pasos, es decir el estado 0 es periódico con periodo $\delta = 2$, lo que significa que la cadena es periódica con periodo $\delta = 2$, lo que no podemos ver es si los estados son recurrentes positivo o bien transitorios. Para saber como son los estadôs vamos a emplear la teoría vista en esta sección.

Resolvamos primero el sistema de ecuaciones que se obtienen a partir de $\pi = \pi\mathbf{P}$, el sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\pi(0) &= q\pi(1) \\
\pi(1) &= \pi(0) + q\pi(2) \\
\pi(2) &= p\pi(1) + q\pi(3) \\
\pi(3) &= p\pi(2) + q\pi(4) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

y así sucesivamente, poniendo a $\pi(1)$ en términos de $\pi(0)$ y luego a $\pi(2)$ en términos de $\pi(0)$ y así sucesivamente tenemos que

$$\begin{aligned}
\pi(1) &= \frac{1}{q}\pi(0) \\
\pi(2) &= \frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}\pi(0) - \pi(0)\right) = \frac{p}{q^2}\pi(0) \\
\pi(3) &= \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q^2}\pi(0) - \frac{p}{q}\pi(0)\right) = \frac{p^2}{q^3}\pi(0) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

en general tendríamos que

$$\pi(j) = \frac{1}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}\pi(0) = \frac{p^{j-1}}{q^j}\pi(0) \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \ldots$$

Si $p < q$, entonces $\frac{p}{q} < 1$ y

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi(j)=\left(1+\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}\right)\pi(0)=\left(1+\frac{1}{q}\left(\frac{1}{1-p/q}\right)\right)\pi(0)=\frac{2q}{q-p}\,\pi(0)$$

haciendo $\sum_{j=0}^{\infty}\pi(j)=1$, tenemos que

$$\pi(0)=\frac{q-p}{2q}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{p}{q}\right) \tag{2.1}$$

Luego entonces para $p < q$,

$$\pi(j)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1-\frac{p}{q}\right) & \text{si } j=0\\ \frac{1}{2q}\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} & \text{si } j\geq 1\end{cases} \tag{2.2}$$

por el teorema 2.22. podemos decir que para $p < q$ los estados son recurrentes no nulos o positivos.

Si $p \geq q$ la serie converge únicamente si $\pi(0) = 0$, sabemos que para $p \geq q$ los estados no son recurrentes positivos, entonces los estados deben ser, recurrentes nulos o transitorios, para distinguir entre estos dos casos usaremos el teorema 2.27, excluyendo de **P** la fila y la columna del estado cero, obtenemos la siguiente matriz

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & . & . & . & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & .\end{pmatrix}$$

el sistema de ecuaciones que se obtiene de $\mathbf{h} = \mathbf{hQ}$ es:

$$\begin{aligned}h(1)&=ph(2)\\ h(2)&=qh(1)+ph(3)\\ h(3)&=qh(2)+ph(4)\\ &\vdots\end{aligned}$$

en general tenemos $h(i) = qh(i-1) + ph(i+1)$, de $h(i) = qh(i) + ph(i)$, sustituimos en la anterior ecuación

$$p(h(i+1) - h(i)) = q\,(h(i) - h(i-1)), \quad i = 2, 3, \ldots$$

y de la primera ecuación

$$p(h(2) - h(1)) = qh(1)$$

sustituimos para obtener $i = 2$,

$$h(3) - h(2) = \frac{q}{p}\,(h(2) - h(1)) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 h(1)$$

ahora lo hacemos para $i = 3$

$$h(4) - h(3) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 (h(2) - h(1)) = \left(\frac{q}{p}\right)^3 h(1)$$

y así sucesivamente iteramos sobre i, obtenemos que

$$h(i+1) - h(i) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} (h(2) - h(1)) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i} h(1), \quad i = 2, 3, \ldots$$

luego entonces,

$$\begin{aligned} h(i+1) &= (h(i+1) - h(i)) + (h(i) - h(i-1)) + \cdots + (h(2) - h(1)) + h(1) \\ &= \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{i} + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} + \cdots + \frac{q}{p} + 1\right) h(1) \end{aligned}$$

la solución a **h=hQ** es de la siguiente forma

$$h(i) = \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} + \cdots + \frac{q}{p} + 1\right) c, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

donde c es una constante.

Si $p = q$, entonces tenemos que $h(i) = ic$, para toda $i \geq 1$, la única forma de que para toda i se cumpla, $0 \leq h(i) \leq 1$ es que $c = 0$. Por tanto si $p = q$, la única solución de $\mathbf{h} = \mathbf{hQ}$ es $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, por el teorema 2.27 significa que los estados son recurrentes y como vimos ya anteriormente no son recurrentes no nulos, lo que significa los estados son recurrentes nulos cuando $p = q$.

Si $p > q$, entonces $0 < \frac{q}{p} < 1$, la suma de lo que está dentro de los paréntesis sería

$$S = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} + \cdots + \frac{q}{p} + 1 = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{i}}{1 - \frac{q}{p}}$$

tomando a $c = 1 - \frac{q}{p}$, se cumple que $0 \leq h(i) \leq 1$, para toda $i = 1, 2, 3, \ldots$. Tenemos que

$$h(i) = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{i}, \text{ para toda } i = 1, 2, 3, \ldots$$

entonces en este caso por el teorema 2.27 los estados son transitorios.

En este ejemplo ya vimos como clasificar los estados, ahora calculemos la distribución límite para la cadena. Para $p < q$, ya vimos que los estados son recurrentes no nulos y periódicos con periodo $\delta = 2$, tenemos dos clases de conjuntos $B_1 = \{0, 2, 4, \ldots\}$ y $B_2 = \{1, 3, 5, \ldots\}$, ya resolvimos el sistema $\pi = \pi\mathbf{P}$, la única variante que habría que hacer, es que según el teorema 2.25 $\sum_{j=0}^{\infty} \pi(j) = 2$ y no $\sum_{j=0}^{\infty} \pi(j) = 1$ como lo habíamos considerado, así de lugar de tener (2.1) tendríamos

$$\pi(0) = \frac{q-p}{q} = 1 - \frac{p}{q}$$

y de lugar de tener (2.2) tendríamos

$$\pi(j) = \begin{cases} 1-\dfrac{p}{q} & \text{si } j=0 \\ \dfrac{1}{q}\left(1-\dfrac{p}{q}\right)\left(\dfrac{p}{q}\right)^{j-1} & \text{si } j \geq 1 \end{cases}$$

luego entonces la distribución invariante para B_1 y B_2 es:

$$(\pi(0), \pi(2), \pi(4), \ldots) = \left(1-\frac{p}{q}\right)\left(1, \frac{p}{q^2}, \frac{p^3}{q^4}, \ldots\right)$$

y

$$(\pi(1), \pi(3), \pi(5), \ldots) = \left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{1}{q}, \frac{p^2}{q^3}, \frac{p^4}{q^5}, \ldots\right)$$

por tanto tendríamos que

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n} = \left(1-\frac{p}{q}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p}{q^2} & 0 & \frac{p^3}{q^4} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 & \frac{p^2}{q^3} & 0 & \frac{p^4}{q^5} & \cdots \\ 1 & 0 & \frac{p}{q^2} & 0 & \frac{p^3}{q^4} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 & \frac{p^2}{q^3} & 0 & \frac{p^4}{q^5} & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \cdots \end{pmatrix}$$

y usando el teorema 2.25, obtenemos también

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n+1} = \left(1-\frac{p}{q}\right)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q} & 0 & \frac{p^2}{q^3} & 0 & \frac{p^4}{q^5} & \cdots \\ 1 & 0 & \frac{p}{q^2} & 0 & \frac{p^3}{q^4} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{q} & 0 & \frac{p^2}{q^3} & 0 & \frac{p^4}{q^5} & \cdots \\ 1 & 0 & \frac{p}{q^2} & 0 & \frac{p^3}{q^4} & 0 & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & \cdots \end{pmatrix}$$

2.4 Ejercicios.

Ejemplo 2.10. Un artículo se almacena en una bodega de tal manera que se pueda satisfacer la demanda del artículo, la bodega puede almacenar hasta S artículos, si hay s_m artículos entonces se llena la bodega hasta S, si la cantidad de artículos está entre $[s_m+1,S]$ no se hace nada, la demanda de artículos en la semana n es de D_n, y suponemos que $\{D_n\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas e independientes de la cantidad inicial X_0 de artículos, la demanda de k unidades en la semana sucede con una probabilidad p_k y consideremos a X_n como el nivel de la bodega al principio de la semana, cada semana se realiza la inspección en la bodega y en caso de que se requiera llenar la bodega, ésta se llenará inmediatamente para iniciar la semana n con la bodega llena si es necesario. Tenemos el siguiente conjunto de estados $E = \{S, S-1, \ldots, s_m+1\}$, es decir, los valores que puede asumir el proceso en la semana $n + 1$, es;

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - D_n & X_n - D_n > s_m \\ S & X_n - D_n \leq s_m \end{cases}$$

Es claro que X_{n+1} únicamente depende de X_n y D_n es independiente de los niveles de la bodega.

La probabilidad de pasar de tener $X_n = i$ artículos en la semana n en la bodega a tener $X_{n+1} = j$ artículos la calculamos de la siguiente manera:

Para $i \neq S$:

Si $s_m + 1 \leq j \leq i$ entonces tenemos que $D_n = X_n - X_{n+1} = i - j$, por tanto $p_{ij} = p_{i-j}$ y para $X_{n+1} = j = S$ tenemos que, $X_n - D_n \leq s_m$ o bien $X_n - s_m \leq D_n$, esta ocurra con la siguiente probabilidad

$$P\{\, i - s_m \leq D_n \,\} = \sum_{k \geq i - s_m} p_k$$

Para $i = S$:

Si $s_m + 1 \leq j \leq S - 1$ entonces tenemos que $D_n = X_n - X_{n+1} = S - j$, por tanto $p_{ij} = p_{S-j}$ y para $X_{n+1} = j = S$ pueden pasar dos cosas si hay demanda, tenemos que, $X_n - D_n \leq s_m$ o bien $X_n - s_m \leq D_n$, esto ocurre con la siguiente probabilidad

$$P\{\, S - s_m \leq D_n \,\} = \sum_{k \geq S - s_m} p_k$$

y la otra es que no tengamos demanda en toda la semana y esto ocurre con probabilidad p_0 ambos eventos son disjuntos, entonces la probabilidad de que $X_{n+1} = S$ dado que $X_n = S$ es :

$$p_0 + \sum_{k \geq S - s_m} p_k$$

Las probabilidades de transición del estado i al estado j lo podemos poner de la siguiente forma:

Si $i \neq S$:

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{i-j} & \text{para } s_m \leq j \leq i \\ \sum_{k \geq i - s_m} p_k & \text{para } j = S \end{cases}$$

Si $i = S$:

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{S-j} & \text{para } s_m \leq j \leq S-1 \\ p_0 + \sum_{k \geq S - s_m} p_k & \text{para } j = S \end{cases}$$

Por construcción todos los estados se intercomunican, todos son accesibles uno del otro, tenemos que $E < \infty$, cerrado e irreducible y los estados son por tanto recurrentes positivos, esto es por el teorema 2.19.

Ejemplo 2.11. A Mark Goldman, vicepresidente de NBS TV, se le encargó determinar una política de programación para la cadena. La NBS compite para captar televidentes con las cadena ABS y CBC. Al principio de cada temporada cada una de las cadenas intenta captar una mayor cantidad de televidentes, incluyendo nuevos programas y volviendo a programar otros.

Goldman se encontraba en problemas porque la NBS había tenido un mal desempeño en las últimas dos temporadas con el formato de sus programas. También habían surgido críticas porque la cadena tendía a cancelar sus programas con mucha rapidez si el número de televidentes era inicialmente bajo. Como resultado de las críticas se había decidido no cancelar ningún programa hasta que fuera evidente que seguiría teniendo un número reducido de televidentes.

Dado que los televidentes normales con bastante frecuencia tenderían a cambiar de cadena al principio de cada temporada con el objeto de ver programas nuevos o de volver a ver programas antiguos, Goldman ha decidido esperar a que se estabilice la proporción de televidentes que ven un programa determinado, para esto decidió estudiar el periodo en el que cada cadena estará ofreciendo un programa nuevo para que determine cuáles serán las proporciones de televidentes finales. Si se pueden predecir estos valores estará en posibilidades de tomar una decisión con respecto a un nuevo programa "X" de la NBS, sin tener que esperar hasta que las preferencias de los televidentes se vuelvan obvias a través de los datos de los "ratings" o recuentos de tasa de audiencia.

Goldman considera que la selección de un televidente se ve influenciada más que nada por el programa más reciente que ha observado en ese periodo y que las proporciones finales de la realidad son valores de estados estacionarios, con base en esto, decide utilizar un enfoque de cadena de Markov para abordar el problema. Considera que el problema de selección de los televidentes se ajusta a las consideraciones de este modelo con suficiente cercanía como para permitir aplicar el modelo al problema.

El grupo de trabajo de Goldman ha elaborado la siguiente matriz de transición utilizando datos recopilados en años anteriores y referentes a la forma en que los televidentes tienden a cambiar de una cadena a otra, semana a semana, para el tipo de programas que se considera:

	NBS	CBC	ABS
NBS	0.2	0.4	0.4
CBC	0.3	0.3	0.4
ABS	0.2	0.2	0.6

En esta matriz, los valores que se muestran son la fracción de televidentes que verán el programa de cada cadena durante esta semana, dada la cadena que vieron la semana pasada. También se supone que todos los televidentes que vieron la televisión la semana pasada la verán esta semana.

Calculemos $\pi = \pi\mathbf{P}$, por definición $\pi(j) = \sum_{i \in E} \pi(i) p_{ij}$, obtenemos

$$\pi(1) = 0.2\,\pi(1) + 0.3\,\pi(2) + 0.2\,\pi(3)$$

$$\pi(2) = 0.4\,\pi(1) + 0.3\,\pi(2) + 0.2\,\pi(3)$$

$$\pi(3) = 0.4\,\pi(1) + 0.4\,\pi(2) + 0.6\,\pi(3)$$

y además

$$\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1$$

donde $\pi(1)$ es la proporción de televidentes que se mantendrán viendo la cadena NBS, $\pi(2)$ es la proporción de televidentes que se mantendrán viendo la cadena CBC y $\pi(3)$ es la proporción de televidentes que se mantendrán viendo la cadena ABS.

Al resolver el anterior sistema de ecuaciones encontramos que

$$\pi(1) = 0.227$$
$$\pi(2) = 0.273$$
$$\pi(3) = 0.5$$

lo que significa que una vez que los televidentes se han decidido con respecto a los programas que les gusta ver, 22.7 % observará lo que la NBS le ofrece.

Ejemplo 2.12. Consideremos nuevamente el ejemplo 2.1 , en el cual se consideraba que la posibilidad de que el día de mañana llueva sólo depende de la situación climatológica de hoy y no de días previos, además supusimos que si llueve hoy la probabilidad de que mañana llueva es α y si hoy no llueve la probabilidad de que llueva mañana es β, esto quiere decir que si hoy llueve entonces mañana no lloverá con probabilidad $1-\alpha$ y si hoy no llueve la probabilidad de que mañana tampoco sería $1-\beta$, consideramos que el estado 0 es que llueva y al estado 1 que no llueva, luego entonces por la definición 2.19 $\pi(0)$ y $\pi(1)$ están dadas por

$$\pi(0) = \alpha\,\pi(0) + \beta\pi(1)$$
$$\pi(1) = (1-\alpha)\,\pi(0) + (1-\beta)\pi(1)$$
$$\text{con } \pi(0) + \pi(1) = 1$$
$$\pi(0)(1-\alpha) = \beta\,\pi(1)$$

Haciendo $\pi(0) = 1$, tenemos que $\pi(1) = \dfrac{1-\alpha}{\beta}$, ambas deben sumar uno, sumamos las dos y nos da $\dfrac{\beta+1-\alpha}{\beta}$, luego para que nos sumen uno las dividimos entre su suma, nos queda,

$$\pi(0) = \frac{\beta}{1+\beta-\alpha}$$

y

$$\pi(1) = \frac{1-\alpha}{1+\beta-\alpha}$$

que es la solución a las tres ecuaciones que tenemos arriba.

Si consideramos que $\alpha = 0.7$ y $\beta = 0.4$ (como en el ejemplo 2.4), tenemos que la probabilidad estacionaria de que llueva, es $\pi(0) = \frac{4}{7} = 0.571$.

Ejemplo 2.13. Un apostador tiene $\$u$, en cada juego que apuesta tiene la probabilidad p de ganar \$1 o perder \$1 con probabilidad $1 - p$, el jugador se retirará cuando se quede sin dinero ó bien cuando haya alcanzado a obtener en total $\$N$.

Si consideramos X_n como el dinero que tienen el apostador después de la n-ésima vez que apuesta, X_n claramente es una cadena de Markov, ya que lo que va apostar únicamente dependerá del dinero que tenga actualmente y no de lo que haya jugado antes, X_n tienen espacio de estados $E = \{ 0, 1 , 2, \dots , N \}$, sus probabilidades de transición son

$$p_{ij} = p \quad \text{con } j = i+1 \text{ , } i = 1, 2, \dots , N-1$$

$$p_{ij} = 1-p \text{ con } j = i-1, i = 1, 2, \dots , N-1 \quad \text{y}$$

$$p_{00} = p_{NN} = 1$$

Esta cadena de Markov la podemos separar en tres clases $\{0\}$, $\{ 1, 2, \dots , N-1\}$, y $\{N\}$, la primera y la última (el estado 0 y N) son recurrentes y la otra es una clase de estados transitorios, esto significa que en algún momento dado el apostador o bien se queda arruinado o bien llega a ganar $\$N$ y se retira del juego.

Sea θ_i la probabilidad de empezar en i y que se alcance en algún momento el estado N, es decir, $\theta_i = P_i\{T_N < \infty\} = f_{iN}$, es claro que una vez que entremos al estado 0 no podremos llegar nunca a N, por tanto $\theta_0 = 0$, para obtener θ para el resto de los estados usaremos el teorema 2.8 que nos dice que

$$f_{iN} = p_{iN} + \sum_{k \in \{E-N\}} p_{ik} f_{kN}$$

si estamos en el estado i, únicamente podemos ir al estado $i + 1$ ó al estado $i - 1$ y la única forma de que $p_{iN} \neq 0$ es que $i = N - 1$ pero por ser N absorbente tenemos que $f_{NN} = 1$, luego entonces tenemos que:

$$\theta_i = f_{iN} = p_{i,i+1} f_{i+1,N} + p_{i,i-1} f_{i-1,N} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots , N-1$$

o bien

$$\theta_i = p_{i,i+1}\theta_{i+1} + p_{i,i-1}\,\theta_{i-1}$$

$$\theta_i = p\theta_{i+1} + q\,\theta_{i-1}$$

dado que $p + q = 1$ podemos ponerlo como sigue

$$p\theta_i + q\theta_i = p\theta_{i+1} + q\,\theta_{i-1}$$

entonces

$$\theta_{i+1} - \theta_i = \frac{q}{p}(\theta_i - \theta_{i-1})$$

dado que $\theta_0 = 0$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{q}{p}(\theta_1 - \theta_0) = \frac{q}{p}\theta_1$$

$$\theta_3 - \theta_2 = \frac{q}{p}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{q}{p}\frac{q}{p}\theta_1 = \left(\frac{q}{p}\right)^2\theta_1$$

$$\theta_{i+1} - \theta_i = \frac{q}{p}(\theta_i - \theta_{i-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\theta_1$$

$$\theta_N - \theta_{N-1} = \frac{q}{p}(\theta_{N-1} - \theta_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\theta_1$$

Ahora sumando las primeras $i-1$ ecuaciones, nos da

$$\theta_i - \theta_1 = \theta_1\left[\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

nos da que

$$\theta_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)}\theta_1 & \text{si } \dfrac{q}{p} \neq 1, \text{ o bien } p \neq \dfrac{1}{2} \\ i\theta_1 & \text{si } \dfrac{q}{p} = 1, \text{ o bien } p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ahora usando el hecho de que $\theta_N = 1$, obtenemos

$$\theta_1 = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} & \text{si } \dfrac{q}{p} \neq 1, \text{ o bien } p \neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{N} & \text{si } \dfrac{q}{p} = 1, \text{ o bien } p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

sustituyendo θ_1 en θ_i nos queda como,

$$\theta_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} & \text{si } \dfrac{q}{p} \neq 1, \text{ o bien } p \neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{i}{N} & \text{si } \dfrac{q}{p} = 1, \text{ o bien } p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

si hacemos que $N \to \infty$ tendríamos que θ_i tendería a

$$\theta_i = \begin{cases} 1-\left(\frac{q}{p}\right)^i & \text{si } p > \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si } p \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Así si $p > ½$, existe la probabilidad de que el apostador llegue a incrementar su fortuna infinitamente, pero si $p \leq ½$, éste quedará quebrado.

Capítulo 3.

3.- Procesos de Markov.

3.1. Procesos de Markov.

En el capítulo anterior vimos procesos estocásticos, tales que, la información de algún futuro estado X_{n+1}, únicamente depende del estado presente X_n, aquí analizaremos aquellos que tienen un espacio parametral de tiempo continuo T con $T \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ y un espacio de estados E, finito o contable infinito.

Definición 3.1. Un proceso estocástico $Y = \{Y_t\,,\, t \in \mathbb{R}^+\}$, con espacio parametral de tiempo continuo T y un espacio de estados E finito o contable infinito es un ***proceso de Markov*** si

$$P\{\, Y_{t+s} = j \mid Y_u:\ u \leq t\,\} = P\{\, Y_{t+s} = j \mid Y_t\,\}$$

para $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Definición 3.2. Si la probabilidad condicional enunciada en la definición anterior es independiente de t, es decir,

$$P\{\, Y_{t+s} = j \mid Y_u:\ u \leq t\,\} = P\{\, Y_{t+s} = j \mid Y_t = i\} = P_{ij}(s)$$

se dice que es un proceso de Markov con ***tiempo homogéneo***.

Nosotros consideraremos procesos de Markov con tiempo homogéneo.

Para valores fijos de $i, j \in E$ y $t \geq 0$, a la función $t \to P_{ij}(t)$ la llamaremos ***función de transición***.

Definición 3.3. A la familia de matrices $\mathbf{P}_t$ de la función de transición $P_{ij}(t)$ se le denomina *función de transición del proceso de Markov.*

Es claro que la función de transición $P_{ij}(t)$ cumple con $P_{ij}(t) \geq 0$ y $\sum_{k\in E} P_{ik}(t)=1$, a continuación tenemos las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov considerando el tiempo continuo.

Teorema 3.1. Si $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ es un proceso de Markov con tiempo homogéneo se cumple que

$$\sum_{k\in E} P_{ik}(t)P_{kj}(s) = P_{ij}(t+s)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\sum_{k\in E} P_{ik}(t)P_{kj}(s) &= \sum_{k\in E} P\{Y_t = k \mid Y_0 = i\}P\{Y_{t+s} = j \mid Y_t = k\} \\ &= \sum_{k\in E} P\{Y_t = k \mid Y_0 = i\}P\{Y_{t+s} = j \mid Y_t = k, Y_0 = i\} \\ &= \sum_{k\in E} P\{Y_{t+s} = j, Y_t = k \mid Y_0 = i\} \\ &= P\{Y_{t+s} = j \mid Y_0 = i\} \\ &= P_{ij}(t+s)\end{aligned}$$

□

De forma análoga podemos probar el siguiente resultado que corresponde al teorema 2.1 de cadenas de Markov

Teorema 3.2. Para $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ en $\mathbb{R}^+$ y estados $i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$, se cumple

$$P\{Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_n} = i_n \mid Y_{t_0} = i_0\} = P_{i_0 i_1}(t_1 - t_0)P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1)\cdots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

Entonces la distribución conjunta de $Y_{t_0}, \ldots, Y_{t_n}$ es especificada por la distribución inicial π de Y_0 y la función de transición , esto es;

$$P\{Y_{t_0} = i_0, Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_n} = i_n\} = \sum_{i\in E} \pi(i)P_{ii_0}(t_0)P_{i_0 i_1}(t_1 - t_0)\cdots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$

esto significa que la distribución inicial π y $\mathbf{P}_t$ caracterizan al proceso $\{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ por completo.

Ejemplo 3.1. Sea $N = \{N_t ; t \geq 0\}$ un proceso Possion, entonces por el corolario 1.10.2.

$$P\{N_{t+s} - N_t = k\} = \frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}, k = 0, 1, \ldots .$$

Ahora bien, si sabemos que $N_t = i$,

$$P\{N_{t+s} = j \mid N_u; u \leq t\} = \frac{P[N_{t+s} = j, N_u; u \leq t]}{P[N_u; u \leq t]}$$

El evento $\{N_{t+s} = j, N_u; u \leq t\}$ es igual a $\{N_{t+s} - N_t = j - i, N_u; u \leq t\}$ pero por la definición de proceso Poisson (definición 1.6) $\{N_{t+s} - N_t = j - i\}$ es independiente de $\{N_u; u \leq t\}$, con lo que

$$P\{N_{t+s} = j \mid N_u; u \leq t\} = P\{N_{t+s} - N_t = j - i\} = \frac{(\lambda s)^{j-i} e^{-\lambda s}}{(j-i)!}, j - i = 0, 1, \ldots .$$

podemos decir que

$$P\{N_{t+s} = j \mid N_u; u \leq t\} = P\{N_{t+s} = j \mid N_t = i\} = \frac{(\lambda s)^{j-i} e^{-\lambda s}}{(j-i)!}, j - i = 0, 1, \ldots .$$

lo que significa que N es un proceso de Markov.

Si hacemos $k = j - i$, tenemos que la función de transición de este proceso de Markov es:

$$\mathbf{P}_s = \begin{pmatrix} p_s(0) & p_s(1) & p_s(2) & \cdots \\ 0 & p_s(0) & p_s(1) & \cdots \\ 0 & 0 & p_s(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $p_s(k) = \dfrac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Ejemplo 3.2. Sea $X = \{X_n, n \in T\}$, una cadena de Markov, donde T es un espacio parametral discreto, con espacio de estados E y matriz de transición **Q**, y sea $N = \{N_t;\ t \geq 0\}$ un proceso Poisson con tasa λ el cual es independiente de X. Consideremos un sistema tal que, un movimiento de un estado E a otro forman una cadena de Markov y el tiempo que el sistema tarda en cambiar de estado sigue un proceso Poisson. Entonces N_t es el número de transiciones (o cambios que tiene la cadena) durante el tiempo $(0, t]$, el sistema se encuentra en el estado $Y_t = X_{N_t}$ en el tiempo t. En otras palabras, si $T_1, T_2, \ldots$ son los tiempos de llegada de N y $T_0 = 0$, entonces $Y_t = X_n$ para toda t en $[T_n, T_{n+1})$.

Ahora supongamos que estamos interesados en predecir Y_{t+s}, dado que conocemos el proceso hasta el tiempo t, si $Y_t = i$ y si suponemos que ocurren $N_{t+s} - N_t = n$ transiciones durante el intervalo de tiempo $(t, t+s]$, entonces la probabilidad de que $Y_{t+s} = j$, es la probabilidad de que la cadena de Markov X se mueva del estado $Y_t = i$, al estado j en exactamente n pasos esta probabilidad es q^n_{ij}. El número de transiciones que ocurren durante el tiempo $(t, t+s]$ son independientes de lo que ocurrió hasta t por ser N un proceso Poisson. Dado que, sabemos que ocurrió hasta t, la probabilidad de que ocurran n transiciones durante el tiempo $(t, t+s]$ es $\dfrac{(\lambda s)^n e^{-\lambda s}}{n!}$. Tenemos que si $Y_t = i$, entonces

$$P\{Y_{t+s} = j \mid Y_u :\ u \leq t\} = P\{Y_{t+s} = j \mid Y_t = i\} = P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^n e^{-\lambda s}}{n!} q^n_{ij}$$

Lo que significa que $\{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ es un proceso de Markov.

Ejemplo 3.3. (Sistema de colas M/M/1). Supongamos que la llegada de clientes a un servicio sigue un proceso Poisson. Si un cliente llega y encuentra el servicio vacío la atención al cliente empieza inmediatamente, en caso contrario, si está ocupado, él espera hasta que le toque su turno. El tiempo de atención a un cliente es independiente del tiempo de atención de cualquier otro cliente e independiente de cualquier nueva llegada al servicio. Supondremos que el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial.

Sea $\{Y_t;\ t \geq 0\}$ el proceso donde Y_t representa el número de clientes en el sistema en el tiempo t. Supongamos que hemos observado el proceso hasta el tiempo t, para predecir el número de cliente en el servicio al tiempo $t+s$ tenemos que encontrar Y_{t+s}, Y_{t+s} es igual al número de clientes en el servicio al tiempo t, más el número de llegadas en el tiempo $(t, t+s]$ menos el número de clientes atendidos durante el tiempo $(t, t+s]$.

El número de llegadas durante el tiempo $(t, t+s]$ es independiente del número de clientes que había antes de t. Los clientes atendidos durante el tiempo $(t, t+s]$ es independiente de los clientes atendidos hasta antes del tiempo t. Luego entonces el número de clientes atendidos durante el tiempo $(t, t+s]$, depende únicamente de Y_t y de las llegadas que ocurren durante el tiempo$(t, t+s]$, con el análisis que acabamos de hacer podemos decir que $\{Y_t ; t \geq 0\}$ es un proceso de Markov, después de que veamos la sección 3.4, esto quedará mucho más claro.

Definamos a W_t := el tiempo en el que Y se queda en el estado donde esta al tiempo t,

$$W_t := \inf \{s > 0 \mid Y_{t+s} \neq Y_t\}$$

Teorema 3.3. Para todo $i \in E$, $t \geq 0$, existe $\lambda(i) \in [0, \infty)$, tal que

$$P\{ W_t > u \mid Y_t = i \} = \exp^{-\lambda(i)u}$$

Demostración.

Y es homogéneo en el tiempo, entonces $P\{ W_t > u \mid Y_t = i \}$ no depende de t, sea

$$f(u) = P\{ W_t > u \mid Y_t = i \}$$

Dado que el evento $\{W_t > u + v \}$ es igual al evento $\{W_t > u , W_{t+u} > v \}$ tenemos

$$\begin{aligned} f(u +v) &= P\{ W_t > u + v \mid Y_t = i \} \\ &= P\{ W_t > u , W_{t+u} > v \mid Y_t = i \} \\ &= P\{ W_{t+u} > v \mid Y_t = i , W_t > u \} P\{ W_t > u \mid Y_t = i \} \\ &= P\{ W_{t+u} > v \mid Y_{t+u} = i \} P\{ W_t > u \mid Y_t = i \} \\ &= f(v)f(u) \end{aligned}$$

luego, entonces, f tiene que ser de la forma

$$f(u) = \exp^{-cu} \quad \text{para} \quad c \geq 0$$

□

Del teorema también podemos ver que

$$P\{ W_t \leq u \mid Y_t = i \} = 1 - \exp^{-\lambda(i)u}$$

es la probabilidad de que el proceso se quede en el estado i hasta un tiempo menor o igual a u.

Definición 3.4.

1) Un estado $i \in E$ con $\lambda(i) = 0$, se llama estado *absorbente.*
2) Un estado $i \in E$ con $0 < \lambda(i) < \infty$, se llama *estable.*
3) Un estado $i \in E$ con $\lambda(i) = \infty$, se llama *instantáneo.*

3.2. Estructura de un proceso de Markov.

Vamos a suponer que los estados son estables, $T_0, T_1, \ldots, T_n$ son los tiempos de transición del proceso de Markov $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ y $X_0, X_1, \ldots, X_n$ son los estados visitados en Y, en términos de W_t, definimos

$$T_0 = 0;\ T_{n+1} = T_n + W_{T_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

y

$$X_n = Y_{T_n} \quad , n \in \mathbb{N}$$

Enunciaremos el siguiente resultado sin demostración, para ver una demostración del siguiente teorema se puede consultar Çinlar [1975].

Teorema 3.4. Para alguna $n \in \mathbb{N}, j \in E$, y $u \in \mathbb{R}^+$, tenemos que

$$P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n > u \mid X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n = i, T_0, T_1, \ldots, T_n\} = q_{ij} \exp^{-\lambda(i)u}$$

con $q_{ij} \geq 0$, $q_{ii} = 0$ y $\sum_j q_{ij} = 1$.

□

Como se puede ver un proceso de Markov esta formado por una cadena de Markov y el tiempo en que permanece en el estado. La cadena de Markov, nos va indicar la probabilidad de pasar de un estado i a un estado j y cada vez que entra a un estado i, permanece en i por un periodo de tiempo exponencialmente distribuido con tasa $\lambda(i)$, es decir,

$$P\{W_t \leq u \mid Y_t = i\} = 1 - \exp^{-\lambda(i)u}$$

A continuación vamos a enunciar una serie de resultados que pueden ayudar a ver con mejor claridad esto.

Del teorema anterior también podemos obtener

$$P\{X_{n+1}=j\,,\,T_{n+1}-T_n \le u \mid X_0,\ldots,X_{n-1},X_n=i\,,\,T_0,T_1,\ldots,T_n\}=q_{ij}\,(1-\exp^{-\lambda(i)u})$$

es la probabilidad de, dado que conocemos lo sucedido en el proceso hasta la n-ésima transición, la siguiente transición ocurra en un tiempo menor a u.

Si del teorema anterior hacemos $u = 0$, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.4.1. La sucesión de variables aleatorias $X_0, X_1, \ldots, X_n$ es una cadena de Markov con matriz de transición **Q**, con elementos q_{ij}, $i,j \in E$.

Demostración.

Haciendo $u = 0$ del teorema anterior, tenemos

$$P\{X_{n+1}=j\,,\,T_{n+1}-T_n > 0 \mid X_0,X_1,\ldots,X_{n-1},X_n=i\,,\,T_0,T_1,\ldots,T_n\}=q_{ij}\exp^{-\lambda(i)0}$$

Si conocemos el proceso hasta Y_{T_n}, conocemos $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, $X_n = i$, $T_0, T_1, \ldots, T_n$, podemos poner la probabilidad anterior como

$$P\{X_{n+1}=j \mid Y_t=i : t=T_n\}=q_{ij}$$

pero por definición $X_n = Y_{T_n} = i$, es decir,

$$P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}=q_{ij}$$

□

Corolario 3.4.2. El tiempo de cambio entre el estado i a otro estado $j \in E$, no depende de j.

Demostración.

$$P\{X_{n+1}=j\,,\,T_{n+1}-T_n > u \mid X_n=i\}=P\{T_{n+1}-T_n > u \mid X_n=i\,,\,X_{n+1}=j\}P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}$$

$$=P\{T_{n+1}-T_n > u \mid X_n=i\,,\,X_{n+1}=j\}q_{ij}$$

del teorema anterior

$$P\{X_{n+1}=j, T_{n+1}-T_n > u \mid X_n = i\} = q_{ij}\exp^{-\lambda(i)u}$$

esto nos da,

$$P\{T_{n+1}-T_n > u \mid X_n = i, X_{n+1} = j\} = \exp^{-\lambda(i)u}$$

□

Corolario 3.4.3. Para alguna $n \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^+$ y estados $i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$, tenemos

$$P\{T_1-T_0 > u_1, T_2-T_1 > u_2, \ldots, T_{n+1}-T_n > u_n \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\}$$
$$= \exp^{-\lambda(i_0)u_1} \cdots \exp^{-\lambda(i_{n-1})u_n}$$

Demostración.

Demostremos, usando inducción.

Por el corolario anterior para $n = 1$, ya está demostrado, vamos a probar para $n = k+1$

$$P\{T_1-T_0 > u_1, \ldots, T_{k+1}-T_k > u_k, T_{k+2}-T_{k+1} > u_{k+1} \mid X_0 = i_0, \ldots, X_k = i_k, X_{k+1} = i_{k+1}\}$$

$$= P\{T_1-T_0 > u_1 \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{k+1} = i_{k+1}, T_2-T_1 > u_2, \ldots, T_{k+2}-T_{k+1} > u_{k+1}\}$$
$$P\{T_2-T_1 > u_2, \ldots, T_{k+2}-T_{k+1} > u_{k+1} \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{k+1} = i_{k+1}\}$$

$$= P\{T_1-T_0 > u_1 \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1\} P\{T_2-T_1 > u_2, \ldots, T_{k+2}-T_{k+1} > u_{k+1} \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{k+1} = i_{k+1}\}$$

por hipótesis de inducción se vale para k entre llegadas, luego entonces

$$P\{T_1-T_0 > u_1, \ldots, T_{k+1}-T_k > u_k, T_{k+2}-T_{k+1} > u_{k+1} \mid X_0 = i_0, \ldots, X_k = i_k, X_{k+1} = i_{k+1}\}$$
$$= \exp^{-\lambda(i_0)u_1} \cdots \exp^{-\lambda(i_k)u_{k+1}}$$

□

Del resultado anterior podemos decir que los tiempos entre las transiciones son condicionalmente independiente una de la otra dado los sucesivos estados visitados. Y cada tiempo de cambio entre los estados tiene una distribución exponencial con parámetro que depende del estado en el que esté, esto junto con el hecho de que los estados visitados sucesivamente forman una cadena de Markov, nos hacen ver como es la estructura de un proceso de Markov.

Supondremos siempre que $q_{ii} = 0$. cuando $\lambda(i) > 0$ para todo i.

Ejemplo 3.4. Consideremos el proceso mencionado en el ejemplo 3.3, los tiempos de transición ocurren cuando ocurre un cambio en el tamaño de la cola, si el cambio es originado por una llegada entonces la cola se incremente en uno y si el cambio es debido a una salida entonces decrece en uno.

Si $X_n = 0$ entonces el próximo cambio debe ser debido a la llegada de un cliente, lo que significa que $X_{n+1} = 1$, lo cual ocurre con probabilidad 1, $T_{n+1} - T_n$ tiene una distribución exponencial con parámetro a (los tiempos de las entre llegadas de un proceso Poisson tienen una distribución exponencial), así

$$\lambda(0) = a\,;\, q_{01} = 1,\, q_{00} = q_{02} = \cdots = 0$$

El tiempo de servicio sigue una distribución exponencial con parámetro b. Si $X_n = i$, sea A el tiempo desde T_n hasta la próxima llegada y B el tiempo desde T_n hasta que sale el próximo cliente, A y B son variables aleatorias exponenciales con parámetros a y b y además son independientes entre ellas. Por tanto

$$T_{n+1} - T_n = \min(A, B),$$

lo que significa que

$$P(\,T_{n+1} - T_n > t \mid X_n = i\,) = P\,(A > t, B > t\,) = \exp^{-at}\exp^{-bt}$$

es decir $\lambda(\,i\,) = a + b$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$

Si $X_{n+1} = i + 1$ significa que $B > A$ y si $X_{n+1} = i - 1$ entonces $B < A$, luego entonces tenemos que

$$\begin{aligned} P(\,X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i\,) &= P(\,B > A) \\ &= \mathrm{E}(P\{\,B > A \mid A\,\}) \\ &= \mathrm{E}(\exp^{-bA}) \\ &= \int_0^{\infty} a \exp^{-ax} \exp^{-bx}\, dx \\ &= \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

de manera totalmente análoga podemos obtener $P(\,X_{n+1} = i - 1 \mid X_n = i\,)$, así obtenemos para $i \geq 1$

$$q_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a}{a+b} & \text{si } j = i+1 \\ \dfrac{b}{a+b} & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

Definición 3.5. La *tasa de transición* de i a j, indicada por $\lambda(i,j)$ es definida por:

$$\lambda(i,j) = q_{ij}\lambda(i)$$

Definición 3.6. Para $i,j \in E$, a la matriz Λ, asociada con un proceso de Markov, con elementos

$$\lambda(i,j) = q_{ij}\lambda(i)$$
$$\lambda(i,i) = -\lambda(i)$$

es, la ***matriz de intensidad.***

Observemos que la suma por renglón de la matriz de intensidad suma cero

Vamos a suponer que la función de transición $P_{ij}(t)$ es continua y diferenciable para $t \geq 0$.

Teorema 3.5. Sea $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ un proceso de Markov con función de transición $P_{ij}(t)$, entonces

$$\text{a)} \quad \lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = \lambda(i)$$

$$\text{b)} \quad \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij}\lambda(i)$$

Demostración.

a) La probabilidad de que ocurran dos o más transiciones en un tiempo h, para $h \to 0$ es $o(h)$.

La probabilidad de estar en el estado i y que ocurra la siguiente transición al estado j en un tiempo menor a h es

$$P\{X_{n+1}=j,\ T_{n+1}-T_n\le h \mid X_0,\dots,X_{n-1}, X_n=i,\ T_0, T_1,\dots, T_n\}= q_{ij}\,(1-\exp^{-\lambda(i)h})$$

la probabilidad de estar en el estado i en el tiempo 0 y salir de i antes de un tiempo h es

$$\sum_{j\neq i} P\{X_1=j, T_1\le h \mid X_0=i\} = \sum_{j\neq i} q_{ij}\,(1-\exp^{-\lambda(i)h}) = 1-\exp^{-\lambda(i)h}$$

sabemos que

$$\exp^{-\lambda(i)h} = 1-\ \lambda(i)h + \frac{1}{2!}\lambda(i)h^2 - \frac{1}{3!}\lambda(i)h^3 + \cdots$$

para una h suficientemente pequeña, $P_{ii}(h)$ es la probabilidad de permanecer en i hasta un tiempo h, luego entonces, tenemos que

$$1-P_{ii}(h) = 1-\{1-\ \lambda(i)h + \frac{1}{2!}\lambda(i)h^2 - \frac{1}{3!}\lambda(i)h^3 + \cdots\} + o(h)$$

$$= \lambda(i)h - \frac{1}{2!}\lambda(i)h^2 + \frac{1}{3!}\lambda(i)h^3 - \cdots\cdots + o(h)$$

dividiendo entre h, y haciendo $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-P_{ii}(h)}{h} = \lambda(i)$$

Para el inciso b) tendríamos que

$$P_{ij}(h) = q_{ij}\,(1-\exp^{-\lambda(i)h}) = q_{ij}\,[\ \lambda(i)h - \frac{1}{2!}\lambda(i)h^2 + \frac{1}{3!}\lambda(i)h^3 - \cdots\ ]$$

dividiendo entre h, y haciendo $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij}\lambda(i)$$

□

Teorema 3.6. (Ecuación atrasada de Kolmogorov) Para todos los estados i, j y tiempo $t \ge 0$,

$$P_{ij}'(t) = \lambda(i)\left\{\sum_{k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t)\right\} - \lambda(i)P_{ij}(t)$$

Demostración.

Usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov , podemos ver que

$$P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)=\left\{\sum_{k\in E}P_{ik}(h)P_{kj}(t)\right\}-P_{ij}(t)$$

$$=\left\{\sum_{k\neq i}P_{ik}(h)P_{kj}(t)\right\}+P_{ii}(h)P_{ij}(t)-P_{ij}(t)$$

$$=\left\{\sum_{k\neq i}P_{ik}(h)P_{kj}(t)\right\}-[1-P_{ii}(h)]\,P_{ij}(t)$$

dividiendo entre h, y haciendo $h\to 0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\left\{\sum_{k\neq i}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)\right\}-\left(\frac{1-P_{ii}(h)}{h}\right)P_{ij}(t)\right]$$

$$=\left\{\sum_{k\neq i}\lambda(i)q_{ik}P_{kj}(t)\right\}-\lambda(i)P_{ij}(t)$$

obtenemos

$$P'_{ij}(t)=\lambda(i)\left\{\sum_{k\neq i}q_{ik}P_{kj}(t)\right\}-\lambda(i)P_{ij}(t)$$

□

Teorema 3.7. (Ecuación adelantada de Kolmogorov) Para todos los estados i, j y tiempo $t\geq 0$,

$$P'_{ij}(t)=\left\{\sum_{k\neq j}\lambda(k)q_{kj}P_{ik}(t)\right\}-\lambda(j)P_{ij}(t)$$

Demostración.

Usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov, podemos ver que

$$P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)=\left\{\sum_{k\in E}P_{ik}(t)P_{kj}(h)\right\}-P_{ij}(t)$$

$$= \left\{ \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) P_{kj}(h) \right\} + P_{jj}(h) P_{ij}(t) - P_{ij}(t)$$

$$= \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) P_{kj}(h) - [1 - P_{jj}(h)]\ P_{ij}(t)$$

dividiendo entre h, y haciendo $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\left\{ \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) \frac{P_{kj}(t)}{h} \right\} - \left(\frac{1 - P_{jj}(h)}{h} \right) P_{ij}(t) \right]$$

$$= \left\{ \sum_{k \neq j} \lambda(k) q_{kj} P_{ik}(t) \right\} - \lambda(j) P_{ij}(t)$$

obtenemos

$$P'_{ij}(t) = \left\{ \sum_{k \neq j} \lambda(k) q_{kj} P_{ik}(t) \right\} - \lambda(j) P_{ij}(t)$$

□

El resultado de los dos teoremas anteriores lo podemos poner en forma matricial, de la siguiente forma

$$\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t \Lambda = \Lambda \mathbf{P}_t$$

Ejemplo 3.5. Consideremos un proceso de Markov con dos estados $E = \{0,1\}$, permanece en 0 con tasa exponencial α y después cambia a 1, permanece en 1 con tasa exponencial β y después cambia a 0.

Tenemos que $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\lambda(0) = \alpha$ y $\lambda(1) = \beta$, obtengamos $\mathbf{P}_t$ a partir de las ecuaciones de Kolmogorov , usemos la ecuación adelantada para obtener

$$P'_{00}(t) = \left\{ \sum_{k \neq 0} \lambda(k) q_{k0} P_{0k}(t) \right\} - \lambda(0) P_{00}(t),$$

como sólo hay dos estados

$$P'_{00}(t) = \lambda(1) q_{10} P_{01}(t) - \lambda(0) P_{00}(t)$$

$$= \beta P_{01}(t) - \alpha P_{00}(t)$$

$$= \beta[\,1 - P_{00}(t)\,] - \alpha P_{00}(t)$$

$$= -(\alpha+\beta)P_{00}(t) + \beta$$

$$P'_{00}(t) + (\alpha+\beta)P_{00}(t) = \beta$$

Multiplicando ambos lados por $e^{(\alpha+\beta)t}$, tenemos

$$e^{(\alpha+\beta)t}[\,P'_{00}(t) + (\alpha+\beta)P_{00}(t)\,] = \beta\, e^{(\alpha+\beta)t}$$

que es igual a

$$\frac{d}{dt}[\,e^{(\alpha+\beta)t}P_{00}(t)\,] = \beta\, e^{(\alpha+\beta)t}$$

integrando de ambos lados

$$e^{(\alpha+\beta)t}P_{00}(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, e^{(\alpha+\beta)t} + c$$

dado que $P_{00}(0) = 1$, tenemos que,

$$c = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Por lo tanto tenemos que

$$P_{00}(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, e^{-(\alpha+\beta)t}$$

y

$$P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t)$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, e^{-(\alpha+\beta)t}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[1 + e^{-(\alpha+\beta)t}\right]$$

de manera semejante podemos obtener

$$P_{11}(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, e^{-(\alpha+\beta)t}$$

y

$$P_{10}(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, e^{-(\alpha+\beta)t}$$

3.3. Teoremas límites.

En analogía con las cadenas de Markov, con respecto a la distribución estacionaria que vimos en el teorema 2.21 para cierto tipo de cadenas de Markov, teníamos que

$$\pi(j) = \sum_{i \in E} \pi(i) p_{ij}, \text{ para toda } j \in E$$

$$\sum_{j \in E} \pi(j) = 1$$

y π es la distribución estacionaria y además π era igual a

$$\pi(j) = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{n} \quad \text{para todo } i, j \in E.$$

Tenemos un resultado similar para procesos de Markov, a continuación se enuncia sin demostración.

Teorema 3.8. Sea Y un proceso de Markov, recurrente positiva e irreducible, entonces para algún $j \in E$,

$$\pi(j) = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$$

existe y es independiente del estado inicial i,

$$\pi(j) = \frac{\upsilon(j)/\lambda(j)}{\sum_{i \in E} \upsilon(i)/\lambda(i)}$$

υ es la solución a

$$\upsilon = \upsilon \mathbf{Q}$$

y $\mathbf{Q}$ es la matriz de transición de la cadena de Markov asociada al proceso.

□

De este resultado podemos obtener

Corolario 3.8.1. Sea Y un proceso de Markov, recurrente e irreducible. Entonces el sistema de ecuaciones lineales

$$\mu\Lambda = 0$$

tiene una solución única μ que es estrictamente positiva. La probabilidades límites $\pi(j)$ están dadas por

$$\pi(j) = \frac{\mu(j)}{\sum_{i\in E}\mu(i)}, \qquad j \in E.$$

Demostración.

Dado que $\upsilon = \upsilon\mathbf{Q}$, tenemos

$$\upsilon(j) = \sum_{i\neq j}\upsilon(i)q_{ij}, j \in E$$

de la definición 3.6 y de $\mu\Lambda = 0$

$$\sum_{i\neq j}\mu(i)\lambda(i)q_{ij} - \lambda(j)\mu(j) = 0$$

$$\sum_{i\neq j}\mu(i)\lambda(i)q_{ij} = \lambda(j)\mu(j), \; j \in E$$

podemos ver que para que ambas igualdades se cumplan,

$$\upsilon(j) = \lambda(j)\mu(j), \; j \in E,$$

por las propiedades de υ tenemos que μ es positiva, despejando de la igualdad anterior y del teorema anterior, tenemos que

$$\pi(j) = \frac{\mu(j)}{\sum_{i\in E}\mu(i)}$$

□

Del corolario anterior podemos ver que se cumple que

$$\mu\mathbf{P}_t = \mu$$

para todo $t \geq 0$, tenemos que $\mu(j) = \pi(j) \sum_{i \in E} \mu(i)$, por tanto para probar la igualdad anterior es equivalente a

$$\pi \mathbf{P}_t = \pi \qquad (3.1)$$

$$\pi \mathbf{P}_t = \sum_{k \in E} \pi(k) P_{kj}(t)$$

del teorema 3.8 tenemos

$$\pi(j) = \lim_{s \to \infty} P_{ij}(s)$$

$$= \sum_{k \in E} \left(\lim_{s \to \infty} P_{ik}(s) \right) P_{kj}(t)$$

$$= \lim_{s \to \infty} \sum_{k \in E} P_{ik}(s) P_{kj}(t)$$

usando la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$= \lim_{s \to \infty} P_{ij}(t+s)$$

$$= \pi$$

es decir, $\pi \mathbf{P}_t = \pi$, lo que significa que también se cumple $\mu \mathbf{P}_t = \mu$.

De las ecuaciones de Kolmogorov $\mathbf{P}_t' = \mathbf{P}_t \Lambda = \Lambda \mathbf{P}_t$ podemos ve que cuando $t \to \infty$ la derivada se hace cero es decir tenemos que

$$\mathbf{P}_\infty \Lambda = \Lambda \mathbf{P}_\infty = 0$$

a partir de aquí podemos también probar el corolario 3.8.1.

Definición 3.7. Un vector μ que satisfaga $\mu \mathbf{P}_t = \mu$ es llamada *medida invariante.*

Si Y_0 tiene distribución π, entonces de la ecuación (3.1) tenemos que

$$P\{Y_t = j\} = \pi(j), \; j \in E$$

para todo t. De ahí que a veces se use el término de distribución invariante para hablar de π.

Ejemplo 3.6. Sea Y un proceso de Markov con

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

las ecuaciones de $\mu\Lambda = 0$, son

$$-5\mu(1)+2\mu(2)+3\mu(3) = 0$$
$$2\mu(1) - 3\mu(2)+4\mu(3) = 0$$
$$3\mu(1)+\mu(2) - 6\mu(3) = 0$$

Una de las ecuaciones es combinación lineal de las otras dos, quitamos del sistema la tercera ecuación,

$$-5\mu(1)+2\mu(2)+3\mu(3) = 0$$
$$2\mu(1) - 3\mu(2)+4\mu(3) = 0$$

el sistema va a depender de alguno da las $\mu(i)$, haciendo $\mu(1) = 42$, tenemos

$$2\mu(2)+3\mu(3) = 210$$
$$-3\mu(2)+4\mu(3) = -84$$

al resolver el sistema obtenemos $\mu(2) = 72$ y $\mu(3) = 33$. Entonces una solución de $\mu\Lambda=0$ y $\mu\mathbf{P}_t = \mu$ es $\mu = (42, 72, 33)$, y alguna otra solución es una constante múltiplo de está, dividiendo a μ entre $\sum_{i=1}^{3}\mu(i)$, obtenemos

$$\pi = \left(\frac{14}{49}, \frac{24}{49}, \frac{11}{49}\right)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3.4. Procesos de nacimiento y muerte.

Los procesos de nacimiento y de muerte son una clase muy importante de procesos de Markov. En estos procesos Y_t, describe el tamaño de una población al tiempo t, con $E = \{ 0, 1, 2, \dots \}$. Un nacimiento incrementa en uno el tamaño de la población y una muerte la hace decrecer en uno. Es decir un proceso de nacimiento y muerte es un proceso de Markov con cambios sólo a través de transiciones desde un estado a sus vecinos inmediatos.

Definición 3.8. Un proceso de Markov $\{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$, con espacio de estados $E = \{ 0, 1, 2, \dots \}$ y probabilidades de transición homogéneas se denomina *proceso de nacimiento y de muerte* si sus intensidades de transición satisfacen las condiciones siguientes: si i y j son estados tales que $|i - j| \geq 2$, entonces:

$$\lambda(i,j) = 0$$

y

$$\begin{aligned} \beta_i &= \lambda(i, i+1) \quad \text{para } i \geq 0 \\ \delta_i &= \lambda(i, i-1) \quad \text{para } i \geq 1 \\ \beta_i + \delta_i &= \lambda(i) \quad \text{para } i \geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

con $\delta_0 = 0$.

De la definición β_i es la *intensidad de nacimiento* del proceso y δ_i es la *intensidad de muerte.*

Podemos poner las igualdades de 3.2 más explícitamente de la siguiente forma usando la definición 3.6 y el teorema 3.5

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ii+1}(h)}{h} = \beta_i$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ii-1}(h)}{h} = \delta_i$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = \beta_i + \delta_i$$

Luego entonces podemos decir que un proceso de nacimiento y de muerte es un proceso de Markov $\{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$, donde Y_t es el tamaño de la población al tiempo t. En un intervalo de tiempo $(t, t+h)$ pequeño, Y_t se incrementa en uno con probabilidad $\beta_i h + o(h)$ y decrece en uno con probabilidad $\delta_i h + o(h)$, o no cambia con probabilidad $1-(\beta_i+\delta_i)+o(h)$, esto lo podemos poner de la siguiente forma, para $h \to 0$

$$P\{Y_{t+h}=j \mid Y_t = i\} = \begin{cases} \beta_i h + o(h) & j=i+1 \\ 1-(\delta_i+\beta_i)h+o(h) & j=i \\ \delta_i h + o(h) & j=i-1 \\ o(h) & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

A partir de la definición de un proceso de nacimiento y de muerte podemos ver que la matriz de intensidad asociada con un proceso de nacimiento y de muerte es

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_1 & -\delta_1-\beta_1 & \beta_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_2 & -\delta_2-\beta_2 & \beta_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Usando el teorema 3.5, obtenemos la matriz de transición asociada al proceso de nacimiento y de muerte

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \dfrac{\delta_1}{\delta_1+\beta_1} & 0 & \dfrac{\beta_1}{\delta_1+\beta_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \dfrac{\delta_2}{\delta_2+\beta_2} & 0 & \dfrac{\beta_2}{\delta_2+\beta_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

hacemos

$$p_i = \frac{\beta_i}{\beta_i+\delta_i}$$

$$q_i = \frac{\delta_i}{\beta_i+\delta_i}$$

Ejemplo 3.7. Un modelo para el cual

$$\beta_i = i\beta + \theta, \quad i \geq 0$$

$$\delta_i = i\delta\,,\quad i \geq 1$$

es llamado un *proceso de crecimiento lineal con inmigración.* Cada individuo se asume que nace a una tasa β , además hay una tasa exponencial θ de crecimiento de la población , debido a una situación externa, por eso la tasa total de nacimientos cuando hay i personas es $i\beta + \theta$. Las muertes ocurren con una tasa exponencial δ para cada miembro de la población y entonces $\delta_i = i\delta$.

Un proceso de nacimiento y de muerte se dice que es, un *proceso de nacimiento puro* si, $\delta_i = 0$, para todo i. Un ejemplo de un proceso de nacimiento puro es el proceso Poisson.

Teorema 3.9. La cadena de Markov $\{X_t\}$, asociada al proceso de nacimiento y de muerte, es recurrente si, y sólo si, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_1\cdots\delta_n}{\beta_1\cdots\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n} = \infty.$

Demostración.

Aplicamos el teorema 2.25 quitamos la fila y la columna asociados al estado 0 de la matriz **Q**.

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & q_3 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

resolvamos el siguiente sistema $\mathrm{h} = \widetilde{\mathbf{Q}}\,\mathrm{h}$, si $\mathrm{h} = \mathbf{0}$ son recurrentes los estados pero si $\mathrm{h} \neq 0$ serán transitorios, resolvamos el sistema, para cada $i \neq 0$.

$$h_i = \sum_{j\neq 0} q_{ij} h_j$$

$$\begin{aligned} h_1 &= p_1 h_2 \\ h_2 &= q_2 h_1 + p_2 h_3 \\ h_3 &= q_3 h_2 + p_3 h_4 \\ &\vdots \\ h_n &= q_n h_{n-1} + p_n h_{n+1} \end{aligned}$$

como $b_n = (q_n + p_n)b_n$ aplicando lo anterior a la primera ecuación

$$(q_1 + p_1)b_1 = p_1 b_2$$
$$q_1 b_1 = p_1 (b_2 - b_1)$$
$$\frac{q_1}{p_1} b_1 = b_2 - b_1$$

en general

$$(q_n + p_n)b_n = q_n b_{n-1} + p_n b_{n+1}$$
$$q_n (b_n - b_{n-1}) = p_n (b_{n+1} - b_n)$$
$$\frac{q_n}{p_n} (b_n - b_{n-1}) = b_{n+1} - b_n$$

tenemos una fórmula de recurrencia, así que

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{q_n}{p_n} (b_n - b_{n-1}) \\ &= \frac{q_n}{p_n} \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} (b_{n-1} - b_{n-2}) \\ &= \frac{q_n q_{n-1} \cdots q_2}{p_n p_{n-1} \cdots p_2} (b_2 - b_1) \\ &= \frac{q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1}{p_n p_{n-1} \cdots p_2 p_1} b_1 \end{aligned}$$

Entonces hay una solución acotada, no cero si, y sólo si, $\sup_n b_n < \infty$, como se puede observar b_n es una sucesión creciente, por lo que $\sup_n b_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, luego

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n &= b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_{n+1} - b_n \right) \\ &= b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1}{p_n p_{n-1} \cdots p_2 p_1} b_1 \\ &= b_1 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1}{p_n p_{n-1} \cdots p_2 p_1} \right) \end{aligned}$$

como $\sup_n b_n < \infty$ esto se cumple sólo si $\frac{q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1}{p_n p_{n-1} \cdots p_2 p_1} < \infty$, lo que significa que esto sucede si, y sólo si, los estados son transitorios, lo que significa que los estados son recurrentes si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty$, por último de

$$p_i = \frac{\beta_i}{\beta_i + \delta_i} \quad \text{y} \quad q_i = \frac{\delta_i}{\beta_i + \delta_i}$$

tenemos que

$$\frac{q_i}{p_i} = \frac{\delta_i}{\beta_i}$$

por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty$$

□

Teorema 3.10. Para un proceso de nacimiento y de muerte hay una solución μ o proporcional a ella para,

$$\mu\Lambda = 0$$

y

$$\mu(n) = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \mu(0) \quad n = 1, 2, \ldots$$

Demostración.

Haciendo el producto de $\mu\Lambda$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mu(0)\beta_0 = \mu(1)\delta_1$$

$$(\delta_n + \beta_n)\mu(n) = \beta_{n-1}\mu(n-1) + \delta_{n+1}\mu(n+1) \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

luego

$$\mu(1) = \frac{\beta_0}{\delta_1} \mu(0)$$

$$\delta_{n+1}\mu(n+1) - \delta_n\mu(n) = \beta_n\mu(n) - \beta_{n-1}\mu(n-1)$$

como se puede ver tenemos un sistema recursivo, cuya solución depende de $\mu(0)$, dado $\mu(0)$ el sistema tiene una y solamente una solución.

Probemos por inducción que $\mu(n) = \dfrac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}\mu(0) \quad n = 1, 2, \ldots$,

Para $n = 1$, $\mu(1) = \dfrac{\beta_0}{\delta_1}\mu(0)$, se cumple, ahora verifiquemos si se cumple para $n = k+1$

$$\delta_{k+1}\mu(k+1) - \delta_k\mu(k) = \beta_k\mu(k) - \beta_{k-1}\mu(k-1)$$

por hipótesis de inducción

$$\delta_{k+1}\mu(k+1) - \delta_k\frac{\beta_0 \cdots \beta_{k-1}}{\delta_1 \cdots \delta_k}\mu(0) = \beta_k\frac{\beta_0 \cdots \beta_{k-1}}{\delta_1 \cdots \delta_k}\mu(0) - \beta_{k-1}\frac{\beta_0 \cdots \beta_{k-2}}{\delta_1 \cdots \delta_{k-1}}\mu(0)$$

se eliminan entre si los dos términos con signo negativo

$$\delta_{k+1}\mu(k+1) = \beta_k\frac{\beta_0 \cdots \beta_{k-1}}{\delta_1 \cdots \delta_k}\mu(0)$$

luego entonces

$$\mu(k+1) = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{k-1}\beta_k}{\delta_1 \cdots \delta_k\delta_{k+1}}\mu(0)$$

es la única ya que para cualquier $\mu(0)$ seguirá siendo proporcional.

□

Corolario 3.10.1. Sea $\{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ un proceso de nacimiento y de muerte, si la cadena de Markov $\{X_n\}_{n\geq 1}$ asociada al proceso es recurrente, la medida estacionaria de $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es

$$\upsilon(n) = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n}\upsilon(0)\ ,\ n = 1, 2, \ldots$$

Demostración.

Del corolario 3.8.1

$$\upsilon(n) = \lambda(n)\mu(n), \quad n \in E,$$

y del teorema anterior

$$\mu(n) = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \mu(0)$$

luego entonces

$$\upsilon(n) = \lambda(n) \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \mu(0)$$

y como $\lambda(n) = \beta_n + \delta_n$

$$= (\beta_n + \delta_n) \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \mu(0)$$

$$= (\beta_n + \delta_n) \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \frac{\upsilon(0)}{\lambda(0)}$$

$$= (\beta_n + \delta_n) \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \frac{\upsilon(0)}{\beta_0}$$

como $p_i = \dfrac{\beta_i}{\beta_i + \delta_i}$ y $q_i = \dfrac{\delta_i}{\beta_i + \delta_i}$

$$= (\beta_n + \delta_n) \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_{n-1}} \frac{\upsilon(0)}{\delta_n}$$

$$= \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_{n-1}} \frac{1}{\dfrac{\delta_n}{\beta_n + \delta_n}} \upsilon(0)$$

por lo tanto $\upsilon(n) = \dfrac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \upsilon(0)$, $n = 1, 2, \ldots$

□

Sea $S = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}$

Corolario 3.10.2. Sea $\{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ un proceso de nacimiento y de muerte, $\{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ tiene una distribución estacionaria si, y sólo si, $S < \infty$, y en este caso

$$\pi(0) = \frac{1}{S}$$

$$\pi(n) = \frac{1}{S}\frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}$$

Demostración.

Para poder obtener una distribución estacionaria del corolario 3.8.1, $\sum_{n\in E} \mu(n) < \infty$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) &= \mu(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \\ &= \mu(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}\mu(0) \\ &= \mu(0)S\end{aligned}$$

entonces $\{Y_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ tiene una distribución estacionaria si, y sólo si, $S < \infty$.
Del corolario 3.8.1 $\pi(j) = \dfrac{\mu(j)}{\sum_{i\in E}\mu(i)}$, $j \in E$ y del teorema 3.10 $\mu(n) = \dfrac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}\mu(0)$ $n \in E$, tenemos que

$$\pi(0) = \frac{1}{S}$$

$$\pi(n) = \frac{1}{S}\frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}$$

□

3.5. Ejercicios.

Ejemplo 3.8. (M/M/1/∞) Del ejemplo 3.3 y 3.4, la llegada de los clientes se comporta como un proceso Poisson con parámetro a y el tiempo de los servicios sigue una distribución exponencial con parámetro b, consideramos que sólo hay un servicio y no hay ninguna restricción con respecto al número de clientes permitidos en la espera del servicio (en la cola). El proceso $Y = \{Y_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ nos indica el número de clientes en la cola al tiempo t, como podemos ver es el proceso Y es un proceso de nacimiento y de muerte con

$$\beta_0 = \beta_1 = \cdots = a \text{ y } \delta_1 = \delta_2 = \cdots = b$$

y

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{b}{a+b} & 0 & \frac{a}{a+b} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{b}{a+b} & 0 & \frac{a}{a+b} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \end{pmatrix}$$

haciendo $r = \frac{a}{b}$, teneos que S (del corolario 3.10.2) es:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } a \geq b \\ \frac{1}{1-r} & \text{si } a < b \end{cases}$$

Entonces si $r < 1$, tiene el proceso una distribución límite, usando el resultado del corolario 3.10.2

$$\pi(j) = (1-r)r^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Si $r \geq 1$, entonces $P[\, Y_t = j \,] \to 0$ cuando $t \to \infty$. La razón r es llamada la *intensidad de tráfico* del sistema.

Ejemplo 3.9. (M/M/1/m) Vamos a considerar el sistema de colas del ejemplo anterior pero con una variante, que tiene una capacidad finita de únicamente m clientes (incluyendo el que esta siendo atendido), lo que quiere decir esto es que si en el sistema hay m clientes, entonces al llegar el próximo cliente no se quedará a esperar, el cliente se va y no regresa. Los elementos de la matriz de intensidad son:

$$\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{m-1} = a, \beta_m = 0 \text{ y } \delta_1 = \cdots = \delta_m = b$$

la intensidad de tráfico es $r = \frac{a}{b}$,

$$S = \sum_{n=0}^{m} r^{n} = \frac{1-r^{m+1}}{1-r} \cdot \text{ si } r < 1$$

Entonces si $r < 1$, tiene el proceso una distribución límite, usando el resultado del corolario 3.10.2.

$$\pi(j) = \frac{1}{\frac{1-r^{m+1}}{1-r}} r^{j}$$

$$= \frac{1-r}{1-r^{m+1}} r^{j} \quad , \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

si $r = 1$

$$\pi(j) = \frac{1}{m+1}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo 3.10. (M/M/m/∞) Consideremos un proceso igual al del ejemplo 3.8, pero ahora consideremos que de lugar de un servidor se tienen m, es decir, las llegadas al servicio son un proceso Poisson con parámetro a y los tiempos de los servicios se distribuyen como una exponencial con parámetro b, hay m servidores, el tiempo que tarda cada uno en atender a un cliente son independientes uno de los otros.

Si hay $i < m$ clientes en el sistema entonces i servidores están trabajando independientemente uno del otro, entonces

$$\lambda(i) = a + ib$$

si $i \geq m$ entonces m servidores están ocupados y

$$\lambda(i) = a + mb$$

y

$$\beta_0 = \beta_1 = \cdots = a \text{ y } \delta_1 = b, \delta_2 = 2b, \ldots, \delta_m = mb, \delta_{m+1} = mb, \ldots$$

o bien, para la intensidad de salida

$$\delta_i = \begin{cases} ib & \text{si } i < m \\ mb & \text{si } i \geq m \end{cases}$$

la intensidad de tráfico $r = \dfrac{\beta_i}{\delta_i}$ seria

$$r = \begin{cases} \dfrac{a}{ib} & \text{si } i < m \\ \dfrac{a}{mb} & \text{si } i \geq m \end{cases}$$

usando el teorema 3.9, el proceso es recurrente, si, y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} = \infty$$

$$\Leftrightarrow r \leq 1 .$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} &= 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{m-1}}{\delta_1 \cdots \delta_m} \frac{\beta_m \cdots \beta_{n-1}}{\delta_{m+1} \cdots \delta_n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a^n}{n! b^n} + \frac{a^m}{m! b^m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\beta_m \cdots \beta_{n-1}}{\delta_{m+1} \cdots \delta_n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a^n}{n! b^n} + \frac{a^m}{m! b^m} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \end{aligned}$$

$S < \infty \Leftrightarrow r < 1$, r en este caso es $r = \dfrac{a}{mb}$

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a^n}{n! b^n} + \frac{a^m}{m! b^m} \frac{1}{1-r}$$

El proceso tiene una distribución estacionaria si $r < 1$, y del corolario 3.10.2, $\pi(n)$ es

$$\pi(n) = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}$$

$$\pi(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}\dfrac{a^n}{n!b^n} & 0\le n\le m\\[2ex] \dfrac{1}{S}\dfrac{a^m}{m!b^m}\dfrac{a^{n-m}}{(mb)^{n-m}} & m\le n<\infty\end{cases}$$

$$\pi(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}\dfrac{a^n}{n!b^n} & 0\le n\le m\\[2ex] \dfrac{1}{S}\dfrac{a^n}{m!m^{n-m}b^n} & m\le n<\infty\end{cases}$$

Ejemplo 3.11. En una central telefónica, con m líneas, las llamadas llegan a la central telefónica como un proceso Poisson con parámetro a, el tiempo que dura cada llamada tiene una distribución exponencial con media $1/b$, las llamadas que llegan cuando las m líneas están ocupadas se pierden, consideramos el proceso $Y = \{Y_t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$, donde Y_t representa el número de líneas que están ocupadas al tiempo t, el espacio de estados de este procesos es $E = \{0, 1, \ldots, m\}$, bajo las hipótesis que se han hecho, es claro que el proceso Y, es un proceso de nacimiento y de muerte, con

$$\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{m-1} = a\,,\ \beta_m = 0 \ \text{ y } \ \delta_1 = b,\ \delta_2 = 2b\,,\ \ldots\,,\ \delta_m = mb$$

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{k}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} = \sum_{n=0}^{k}\frac{a^n}{n!b^n}$$

Luego entonces su distribución estacionaria es;

$$\pi(n) = \frac{1}{S}\frac{a^n}{n!b^n}$$

la igualdad anterior se denomina fórmula de pérdida de Erlang.

Así conociendo π podemos saber cual es la probabilidad estacionara de que el sistema se encuentre lleno

$$\pi(m) = \frac{a^m/m!b^m}{1+a/b+a^2/2!b^2+\cdots+a^m/m!b^m}$$

Ejemplo 3.12. Una fábrica consta de m máquinas y una sola persona para repararlas, el tiempo que tarda una máquina antes de descomponerse sigue una distribución exponencial con media $1/a$, cada máquina funciona sin fallas independientemente una de la otra, cuando esta falla se manda a reparar el tiempo de reparación se comporta como una distribución exponencial con media $1/b$. El proceso $Y = \{Y_t\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\}$, donde Y_t representa el número de máquinas que se encuentran descompuestas al tiempo t, el espacio de estados de este procesos es $E = \{\ 0\ ,\ 1,\ \ldots,\ m\}$, si $Y_t = i$, significa entonces que hay $m - i$ máquinas funcionando, el tiempo de la próxima falla será una exponencial con parámetro $(m - i\,)a$. Es claro que el proceso Y, es un proceso de nacimiento y de muerte, con

$$\beta_0 = ma,\ \ \beta_1 = (m-1)a\ ,\ \ldots, \beta_{m-1} = a\ , \beta_m = 0\ \ \text{y}\ \ \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_m = b$$

El proceso Y es finito y por tanto recurrente,

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \\ &= 1 + \frac{ma}{b} + \frac{m(m-1)a^2}{b^2} + \cdots + \frac{\left(m(m-1)\cdots(2)(1)\right)a^m}{b^m}. \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{m!}{(m-n)!}\left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned}$$

Entonces Y tiene la siguiente distribución límite

$$\pi(j) = \left(\frac{1}{S}\right)\left(\frac{m!}{(m-j)!}\left(\frac{a}{b}\right)^j\right) \qquad\qquad j = 0\ , 1,\ \ldots,\ m$$

De aquí podemos calcular el número promedio de máquinas que estarán descompuestas

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m} j\pi(j) &= \sum_{j=0}^{m} j\left(\frac{1}{S}\right)\left(\frac{m!}{(m-j)!}\left(\frac{a}{b}\right)^j\right) \\ &= \left(\frac{1}{S}\right)\sum_{j=0}^{m} j\left(\frac{m!}{(m-j)!}\left(\frac{a}{b}\right)^j\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.13. Sea $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{R}^+\}$, un proceso de nacimiento y de muerte tal que,

$$\beta_i = ia\ ,\ i \geq 0$$

y

$$\delta_i = 0 \text{ para toda } i.$$

como se puede observar es un proceso de nacimiento puro, aquí cada uno de los miembros de la población actúa independientemente y los nacimientos ocurren con una tasa exponencial a. Este proceso de nacimiento puro se le denomina *proceso de Yule.*

Supongamos que el proceso de Yule empieza con un individuo al tiempo cero es decir $Y_0 = 1$ y sea T_i, $i \geq 1$ el tiempo entre el $(i-1)$-ésimo nacimiento y el i-ésimo nacimiento, por como hemos planteado nuestro proceso, tenemos que, los T_i son independientes con distribución exponencial con parámetro ia. Luego entonces

$$P\{T_1 \leq t\} = 1 - \exp^{-at}$$

$$\begin{aligned}
P\{T_1 + T_2 \leq t\} &= \int_0^t P\{T_1 + T_2 \leq t \mid T_1 = x\} a \exp^{-ax}\, dx \\
&= \int_0^t \left(1 - \exp^{-2a(t-x)}\right) a \exp^{-ax}\, dx \\
&= a \int_0^t \left(\exp^{-ax} - \exp^{-2at} \exp^{ax}\right) dx \\
&= \left(1 - \exp^{-at}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\{T_1 + T_2 + T_3 \leq t\} &= \int_0^t P\{T_1 + T_2 + T_3 \leq t \mid T_1 + T_2 = x\} 2a \exp^{-ax}(1 - \exp^{-ax}) dx \\
&= \int_0^t \left(1 - \exp^{3a(t-x)}\right) 2a \exp^{-ax}(1 - \exp^{-ax}) dx \\
&= \left(1 - \exp^{-at}\right)^3
\end{aligned}$$

y en general se puede demostrar por inducción

$$P\{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_j \le t\} = \left(1-\exp^{-at}\right)^j$$

El evento $\{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_j \le t\}$ es igual que el evento $\{Y_t \ge j+1 \mid Y_0 = 1\}$, es decir, $P\{T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_j \le t\} = P\{Y_t \ge j+1 \mid Y_0 = 1\}$, de aquí obtenemos

$$\begin{aligned} P_{1j}(t) &= \left(1-\exp^{-at}\right)^{j-1} - \left(1-\exp^{-at}\right)^j \\ &= \exp^{-at}\left(1-\exp^{-at}\right)^{j-1} \end{aligned}$$

Así hemos encontrado que, cuando la población comienza con un individuo, el tamaño de la población al tiempo t tiene una distribución geométrica con media $\exp^{at}$. Entonces si la población comienza con i individuos el tamaño de la población a tiempo t es la suma de i variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas geométricamente, lo que nos da una binomial negativa,

$$P_{ij}(t) = \binom{j-1}{i-1}\exp^{-ati}\left(1-\exp^{-at}\right)^{j-i} \qquad j \ge i \ge 1$$

Si usamos las ecuaciones adelantadas de Kolmogorov (teorema 3.7)

$$P'_{ij}(t) = \left\{\sum_{k \ne j} \lambda(k) q_{kj} P_{ik}(t)\right\} - \lambda(j) P_{ij}(t)$$

para el proceso de Yule obtendríamos que

$$P'_{ii}(t) = -ia\, P_{ii}(t)$$

$$P'_{ij}(t) = (j-1)a\, P_{ij-1}(t) - ja\, P_{ij}(t)$$

para la primera ecuación, multiplicando ambos lados por $\exp^{iat}$, tenemos

$$\exp^{iat}\left[\, P'_{ii}(t) + ia\, P_{ii}(t)\,\right] = 0$$

que es igual a

$$\frac{d}{dt}\left[\exp^{iat} P_{ii}(t)\right] = 0$$

integrando de ambos lados

$$\exp^{iat} P_{ii}(t) = c$$

como $P_{ii}(0) = 0$ entonces $c = 1$,

$$P_{ii}(t) = \exp^{-iat}$$

Para la siguiente ecuación, multiplicando ambos lados por $\exp^{jat}$, tenemos

$$\exp^{jat}\ [\ P'_{ij}(t) + ja\,P_{ij}(t)\ ] = \exp^{jat}\ (j-1)a\,P_{ij-1}(t)$$

que es igual a

$$\frac{d}{dt}[\exp^{jat} P_{ii}(t)] = \exp^{jat}\ (j-1)a\,P_{ij-1}(t)$$

integrando de ambos lados

$$\exp^{jat} P_{ii}(t) = \int_0^t \exp^{jas}(j-1)aP_{ij-1}(s)ds$$

$$P_{ii}(t) = (j-1)a\,\exp^{-jat}\int_0^t \exp^{jas} P_{ij-1}(s)ds$$

Podemos obtener $P_{ii}(t)$ recursivamente, y podemos verificar que este resultado coincidirá con

$$P_{ij}(t) = \binom{j-1}{i-1}\exp^{-ati}\left(1-\exp^{-at}\right)^{j-i} \qquad j \geq i \geq 1$$

obtenido anteriormente.

108

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Conclusión.

Como mencione al inicio, cubrir en un solo trabajo todas las aplicaciones y la teoría desarrollada de los procesos estocásticos, es prácticamente imposible, por lo que en este trabajo nos enfocamos a dar los conceptos básicos de los procesos estocásticos, así como enfocarnos al manejo de un tipo de procesos muy importantes como es el proceso de Markov, para tiempo discreto (cadenas de Markov) y continuo (procesos de Markov). El presente trabajo cubre entre un 85% a un 90% el temario de la materia de procesos estocásticos I de la carrera de Actuaría, en esta tesina al ver el capítulo tres, referente a los procesos de Markov, permite a su vez dar un vistazo al curso de procesos estocásticos II.

Muy seguramente harán falta incluir más ejemplos al trabajo, ya que a final de cuentas es por medio de ellos como se llega a conceptualizar mejor las aplicaciones y dada la gran cantidad de aplicaciones de los procesos estocásticos definitivamente nunca serán suficientes los ejemplos contemplados en cualquier texto. Pero considero que con los ejemplos presentados se cumple con el objetivo, de que está tesina sirva de apoyo a la materia. Muchos de los ejemplos aquí presentados se resolvieron en forma general, para poder acostumbrarse al nivel teórico que se requiere para entender los temas subsiguientes, además de que permite al lector buscar aplicaciones directas sobre dichos ejemplos, así como, a modelar problemas planteados desde una forma general.

El capítulo uno, se puede cubrir dentro de los siguientes capítulos, por lo que no es indispensable empezar con él, salvo algunos conceptos que se requieren como son los que están en el primer punto de dicho capítulo, como ya se menciono, la intención de su desarrollo fue para empezar con el manejo de modelos más sencillos y que posiblemente hasta ya se hayan visto en algún curso anterior y que esto ayude a entender mejor lo que son los procesos estocásticos.

El capítulo dos de cadenas de Makov, es el más desarrollando y también es el tema más completo que se presenta en está tesina. Para un estudio más profundo y detallado sobre la teoría y la aplicación de las cadenas de Markov, se recomienda consultar, el Parzen, el Brémaud, el Çinlar o el Hoel, Port y Stone.

En el capítulo tres (procesos de Markov), no se profundiza mucho en la parte teórica, como se hizo con las cadenas de Markov, ya que sólo se buscó dar el equivalente a las cadenas de Markov pero considerando el tiempo continuo, si bien no se profundiza tanto, si se ven aspectos importantes referentes a su teoría y su uso en los procesos de nacimiento y muerte. Además se puede consultar para un estudio más detallado el Ross[1996], Karlin y Taylor, el Isaacson y Madsen y el Çinlar los dos últimos más teóricos que los dos primeros.

En general, el trabajo aquí presentado sirve para poder seguir el estudio de los procesos estocásticos a más detalle o en textos más avanzados.

En esta tesina pretendo que sirva como material de apoyo para un primer curso de procesos estocásticos I de la carrera de Actuaría, por supuesto que el material que aquí se presenta no deja de ser susceptible a mejorarse, de hecho, espero que sea el comienzo de un material más serio y profundo.

Bibliografía.

[1987] S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, John Wiley and Sons,Chichester.

[1981] B. R. Bhat, *Modern Probability Theory An Intoductory Textbook*, John Wiley and Sons, New York.

[1998] P. Brémaud, *Markov Chains Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues*, Springer, New York.

[2000] Z. Brzezniak y T. Zastawniak, *Basic Stochastic Processes*, Springer-Verlang, New York.

[1988] Y.S.Chow y H. Teicher, *Probability Theory, Independence, Interchangeability, Martingales*, Springer Verlag, New York.

[1974] K.L Chung, *A Course in Probability Theory*, Academic Press, New York.

[1983] K.L. Chung, *Teoría Elemental de la Probabilidad y Procesos Estocásticos*, Reverté, España.

[1975] E. Çinlar, *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall, New Jersey.

[1976] R.Coleman, *Procesos Estocásticos*, Limusa,México.

[2001] J.I. Domínguez, *Diseño y Análisis de Modelos de Probabilidad*, Iberoamérica, México.

[1980] W. Feller, *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones Vol. I, Vol. II*, Limusa, México.

[1976] D.L.Isaacson y R.W. Madsen, *Markov Chains Theory and Applications*, John Wiley & Sons, New York.

[1972] P.G.Hoel, S.C. Port, C.J. Stone, *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton

Mifflin, Boston.

[1975] S. Karlin y M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York

[1994] J. Medhi, *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, New York.

[1974] A.M.Mood, F.A. Graybill y D.C. Boes, *Introduction to the Theory of Statistics*, Mc.Graw-Hill, New York.

[1972] U. Narayan Bhat, *Elements of Applied Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, New York.

[1999] E. Parzen, *Stochastic Process*, S.I.A.M. Philadelphia.

[1987] E. Parzen, *Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones*, Limusa, México.

[1992] S. Ross, *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Dover, New York.

[1980] S. Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, New York

[1996] S. Ross, *Stochastic Processes*, Wiley, New York.

[1973] Y. Rozanov, *Procesos Aleatorio*, Mir, México