

50521
75

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**



**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ZARAGOZA**

**MODELADO MATEMATICO DE UN SEPARADOR
LIQUIDO-LIQUIDO DE ARABIO Y ESCORIA.**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO QUIMICO
P R E S E N T A :
ZARATE VILLA EDSON

ASESOR: M. EN I. ALEJANDRO RANGEL RAMIREZ

JUNIO DE 2003.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**TESIS
CON
FALLA DE
ORIGEN**

PAGINACIÓN DISCONTINUA



**FACULTAD DE ESTUDIOS
SUPERIORES ZARAGOZA**

**JEFATURA DE LA CARRERA
DE INGENIERIA QUIMICA**

OFICIO: FESZ/JCIQ/044/03

ASUNTO: Asignación de Jurado

ALUMNO: ZÁRATE VILLA EDSON
P r e s e n t e .

En respuesta a su solicitud de asignación de jurado, la jefatura a mi cargo, ha propuesto a los siguientes sinodales:

 **Presidente:**

Vocal:

Secretario:

Suplente:

Suplente:

I.Q. Eduardo Vázquez Zamora

M. en I. Alejandro Rogel Ramírez

Fisc. Carlos Javier Martínez Gómez

Mtro. Genaro García Altamirano

M. en C. Néstor Noé López Castillo

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E

“POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU”
México, D. F., 3 de Abril de 2003

EL JEFE DE LA CARRERA

M. en C. ANDRÉS AQUINO CANCHOLA



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Z

A mis padres:

Por su cariño, apoyo e impulso en la realización de este trabajo, que sin su apoyo económico y moral no hubiera podido lograr llegar hasta este punto.

Al profesor Alejandro Rogel:

Por la ayuda prestada en la realización de esta tesis, que permite la culminación de esta carrera.

A mi hermana y a su familia:

Que me ayudo y apoyo en los momentos en que mas lo necesite, que me impulso y que sin su ayuda no hubiera podido concluir esta tesis.

A todos los que de una forma u otra contribuyeron en la construcción de esta tesis, gracias por su tiempo invertido en esta tesis.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ÍNDICE

Resumen	
Introducción.	i
1. Modelado.	
1.1.-Modelos	1
1.2.-Tipos de modelos	2
1.2.1.-Modelos matemáticos	3
1.2.1.1.-Principios de la formulación	5
1.2.1.2.-Pasos involucrados en los estudios de simulación	6
1.2.1.3.-Ventajas del modelado y simulación de procesos	8
1.2.1.4.-Desventajas del modelado y simulación de procesos	9
1.2.2.-Modelos físicos	11
1.3.-Aplicaciones	11
2. Flujo laminar.	
2.1.-Fluidos	13
2.2.-Tipos de flujo	13
2.3.-Ecuación de continuidad	15
2.4.-Ecuación de movimiento	18
2.4.1.-Simplificaciones de la ecuación de movimiento	20
2.5.-Ecuación de energía total	21
2.5.1.-Simplificaciones de la ecuación de energía	26
2.6.-La forma vortice-corriente	27
2.6.1.-Función corriente	28
2.6.2.-Función vorticidad	29
2.6.3.-El potencial de velocidad	31
2.6.4.-Ecuaciones de Navier-Stokes escritas como ecuaciones de transporte de vorticidad.	32
2.7.-Condiciones a la frontera	35
2.7.1.-Condiciones a la frontera	36
2.7.1.1.-Condiciones a la frontera comunes para usarse con la ecuación general de transporte	37
2.7.2.-Condición inicial	39

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3. Flujo turbulento.	
3.1.-Turbulencia	40
3.2.-Remolinos en flujo turbulento	42
3.3.-Conceptos de la teoría estadística de la turbulencia	43
3.3.1.-Componentes de velocidad alisados a lo largo del tiempo (time-smoothed) y fluctuantes	43
3.3.2.-Las tres zonas del flujo turbulento	45
3.4.-Ecuaciones diferenciales del flujo turbulento	46
3.4.1.-Ecuación de continuidad en flujo turbulento	46
3.4.2.-Ecuación de movimiento	48
3.5.-Modelos de transporte turbulento	50
3.5.1.-Tipos de modelos	50
3.5.2.-Concepto de Boussinesq de la viscosidad de remolino	51
3.5.3.-Modelo de Prandtl de la longitud de mezclado.	51
3.5.4.-Modelos de una ecuación	54
3.5.5.-Modelos de dos ecuaciones	57
3.5.5.1.-El modelo $k - \epsilon$	58
3.5.5.1.1.-El modelo de ecuación de transporte para ϵ	59
3.7.-Transferencia de energía	60
3.7.1.-Ecuación de transferencia de energía en flujo turbulento	60
3.7.2.-La difusividad de eddy de momentum y energía	62
3.8.-Aplicaciones	63
4. Discretización de la ecuación de transferencia.	
4.1.-Solución de la ecuación de transferencia	63
4.2.-Métodos de diferencias finitas	65
4.2.1.-Aproximación por el desarrollo de Taylor	65
4.2.2.-La ecuación de transferencia a régimen no permanente	70
4.2.2.1.-Método explícito	70
4.2.2.2.-Método implícito	72
4.2.2.3.-Crank-Nicolson	73
4.3.-Método del elemento finito	73
4.4.-Método del volumen de control	74
4.5.-Otros métodos	75
4.6.-Métodos de solución de las ecuaciones discretizadas	76
4.6.1.-Método de Gauss-Siedel	77

5. Problema de ejemplo.	
5.1.-Problema de ejemplo	78
5.2.-Suposiciones	80
5.3.-Condiciones a la frontera	80
5.4.-Ecuaciones gobernantes	81
5.5.-Modelo turbulento	82
5.6.-Desarrollo del método	83
5.7.-Discretización del sistema	84
5.8.-Implementación de un programa de computo	85
Resultados	91
Análisis de resultados	99
Conclusiones	104
Apéndice	
A1.-Discretización de las ecuaciones gobernantes	A1-1
-Momentum axial	
-Ecuación de continuidad	
-Ecuación de transferencia de energía total	
-Ecuación de transferencia de energía cinética turbulenta	
-Ecuación de transferencia de disipación de energía cinética turbulenta	
A2.-Listado del programa del separador líquido-líquido	A2-1
A3.-Resultados de las iteraciones del programa del separador líquido-líquido	A3-1
Bibliografía.	B-1
Simbología	

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

RESUMEN

El resolver la ecuación de transferencia de momentum y de energía que involucren términos con derivadas parciales resulta una tarea complicada, tal dificultad se encuentra en la no linealidad de estas ecuaciones.

Obtener la solución de esta ecuación por un método analítico para una geometría dada es algo muy difícil de hacer si no se cuenta con amplios conocimientos de matemáticas y aún así el resolver esta ecuación es una tarea que no siempre se puede realizar; resolver este mismo problema con un método numérico es relativamente sencillo y los conocimientos aplicados para su manipulación son simples. Uno de los principales métodos aplicados a la solución de estas ecuaciones es el método de diferencias finitas (MDF) que junto con el método del elemento finito (MEF) y el método del volumen de control han hecho que los estudios de la dinámica de fluidos sea algo muy común.

En este trabajo se realizó un modelo matemático de un separador líquido-líquido de arrabio y escoria utilizando el método de diferencias finitas (FDM) para obtener la discretización de las ecuaciones de transferencia, la elección de este método se realizó, en base a que es un método fácil de entender y que nos permite tener una clara idea del modelado matemático usando métodos de discretización; el modelado para este sistema se construye de acuerdo a los siguientes pasos:

1. Descripción del sistema.
2. Suposiciones que permitan la simplificación del sistema en estudio.
3. Condiciones a la frontera.
4. Ecuaciones que rigen el fenómeno en estudio
5. Discretización del sistema (paso que incluye el uso del método de diferencias finitas para la discretización de las ecuaciones gobernantes)
6. Implementación de un programa de cómputo.
7. Y como paso final la interpretación de los resultados, presentando los resultados en forma gráfica para una mejor comprensión.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

INTRODUCCIÓN

Los procesos de flujos de fluidos están asociados con la mayor parte de los procesos industriales relacionados con la extracción y refinación de metales, debido a que los metales o las menas en proceso se encuentran en estado líquido. Estos además requieren simulación numérica por transferencia simultánea de calor, masa y/o momentum, en dos o tres dimensiones. Excepto en casos particulares, las ecuaciones en derivadas parciales no pueden ser resueltas analíticamente pero pueden resolverse numéricamente.

En las operaciones de procesamiento de metales las situaciones físicas básicas que podemos encontrar son: agitación con burbujas, chorros incidentes, flujos turbulentos recirculantes en cavidades y otros, siendo en general bastante diferentes de los problemas que se encuentran usualmente en la práctica de la ingeniería de modo que la experiencia previa no es inmediatamente aplicable.

Durante los últimos años se aprecia un interés creciente en la aplicación de los conceptos de flujo de fluidos a las operaciones de procesamiento de metales. Se pueden citar muchos otros ejemplos de operaciones de procesamiento de metales en los cuales los fenómenos de flujo de fluidos desempeñan un papel importante o bien predominante.

Los principales sistemas gas-sólido incluyen al alto horno, la sintetización y la tostación de menas. Entre los sistemas gas-sólido se encuentra la desgasificación al vacío, la conversión de cobre, la desoxidación gaseosa del cobre y la agitación con argón, además del proceso de fabricación de acero con oxígeno³⁵.

Los sistemas líquido-líquido implican la fusión de chatarra, fenómenos de flujo de fluidos en la solidificación (macrosegregación), junto con la fusión de desoxidantes y otras adiciones aleantes durante la parte final de la secuencia de procesamiento de metales. Entre los sistemas líquido-líquido se encuentra el amplio espectro de interacciones escoria-metal, tales como la transferencia de masa escoria-metal en la fabricación de acero, la coalescencia y flotación de inclusiones, etc³⁵.

Los problemas encontrados en estos sistemas pueden clasificarse dentro de dos amplias categorías:

-
- a) Sistemas en los que el objetivo es desarrollar alguna relación global entre varios parámetros agrupados, tales como que la velocidad de flujo dependa de la diferencia de presión impuesta, el tiempo requerido para vaciar el cazo, la forma y tamaño de boquillas para producir una velocidad de flujo dada y varios factores más. En la mayoría de los casos, estos cálculos se realizan fácilmente aplicando los principios fundamentales de los equilibrios globales de masa, de energía y de la cantidad de movimiento. Los recursos matemáticos necesarios para resolver tales problemas por lo general son simples; implican el manejo de ecuaciones algebraicas o de ecuaciones diferenciales simples.
- b) El segundo grupo de problemas implica la búsqueda de información más detallada acerca del sistema, tal como perfiles de velocidad en vez de velocidades volumétricas de flujo, los patrones de disipación de energía turbulenta en vez de la pérdida total de energía, y así sucesivamente. Los problemas en esta segunda categoría son mucho más complicados y para abordarlos pueden necesitarse herramientas matemáticas bastante complejas tales como la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Mientras que los métodos utilizados en la formulación y resolución de problemas de este tipo ya están bien establecidos, su aplicación a las operaciones de procesamiento de metales es una empresa más novedosa pero, según se considera, muy prometedora dado el importante papel que los movimientos de fluidos desempeñan en estos sistemas.

En 1941, A. N. Kolmogorov propone un método de predecir el comportamiento de los flujos turbulentos que es remarcablemente similar a las "técnicas de modelado turbulento" que hoy en día son usadas. En un artículo publicado en 1942 Kolmogorov sugería el uso de dos ecuaciones para describir el movimiento turbulento dentro de un fluido, pero no pudo ser puesta en práctica por la cantidad de operaciones matemáticas a realizar^{42, 43, 44, 45}.

En 1972, Jones y Launder⁴⁶ desarrollaron un método de cálculo para flujos turbulentos descrito por dos ecuaciones adicionales, el cual posee la misma estructura que el modelo propuesto por Kolmogorov; muchos modelos fueron propuesto en estos años la mayoría de ellos usaban el modelo k para

la primera ecuación pero eran diversos los cambios para la segunda, en su forma matemática eran diferentes pero no en contenido.

En 1972, Patankar y Spalding⁴⁸ describen un procedimiento de cálculo para flujos parabólicos tridimensionales. Un flujo parabólico, puede ser un flujo en el interior de una tubería, donde el perfil de velocidades se obtiene siguiendo la dirección principal del flujo.

Una técnica particularmente interesante que es desarrollada a través de la presión es llamada SIMPLE⁵¹ (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations). Este procedimiento aplica todavía con gran éxito a una amplia variedad de problemas.

Aunque aún no se ha logrado comprender cuantitativa y completamente los mecanismos detallados de los procesos turbulentos; la teoría del flujo de fluidos en combinación con los experimentos de modelado físico, han ayudado mucho para mejorar los procesos.

CAPITULO UNO
MODELADO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

12

1.1.-Modelos.

Para estudiar un proceso debe ser posible experimentar con el mismo. Sin embargo, el objetivo de muchos estudios de procesos es predecir la manera en como se comportará antes de que sea construido. Es claro que no es factible experimentar con un proceso mientras está todavía en su forma hipotética. Incluso con un proceso existente, es seguro que sea imposible o impráctico experimentar con el proceso real.

Una opción que se utiliza a veces es construir una cantidad de prototipos y probarlos, lo que puede ser muy costoso y dilatado. Por lo general los estudios de procesos se realizan con un modelo del proceso. Puesto que seguramente es imposible incluir dentro de una sola definición las diferentes acepciones de la palabra "modelo", se presenta a continuación algunas de las más frecuentes: Coloquialmente, por modelo se entiende la representación de algo, generalmente un objeto físico.

Definimos a un modelo como el cuerpo de información relativa a un sistema recabado para fines de estudiarlo. Ya que el propósito del estudio determina la naturaleza de la información que se reúne, no hay un modelo único de un sistema. Los distintos analistas producirán distintos modelos del mismo proceso según cambie su comprensión del proceso.

Existen ciertas características de los procesos industriales que las diferencian de otros tipos de industrias, debido esencialmente a que hay una compleja estructura de muchas etapas, cada una de las cuales consta a su vez de numerosos subcomponentes. Teniendo en cuenta que interviene un elevado flujo de materiales con un valor económico relativamente alto, se comprende que pequeñas modificaciones en las características de diseño y operación pueden tener una importante repercusión económica. Debido a que un cambio en la operación de una planta puede significar un ahorro de miles de pesos, y el hecho de que el experimentar con plantas es una tarea imposible de realizar, una muy buena opción lo constituye el modelado.

La tarea de obtener un modelo de un proceso se dividirá en forma genérica en dos subtareas: la determinación de la estructura del modelo y proporcionar los datos. La determinación de la estructura, fija la frontera del proceso e identifica las entidades, atributos y actividades del proceso. Los datos suministran los valores de los atributos que pueden tener y define las relaciones involucradas en las actividades. Las dos tareas de crear una estructura y suministrar los datos se definen como partes de una tarea más

que como dos tareas por separado, debido a que no se pueden hacer una sin la otra.

Las suposiciones relativas al proceso orientan la recolección de datos, y el análisis de estos confirma o refuta las suposiciones. Es común que los datos recolectados revelen una relación no sospechada que cambie la estructura del modelo.

¿Cómo se puede evaluar un modelo? En primer lugar el ingeniero puede recoger datos y ver la forma en que dichos datos se ajustan a las predicciones del modelo. Si el ingeniero dispone de dos series de datos (una correspondiente al proceso real y la otra al modelo) para un modelo poco complicado, suele ser preciso introducir una cantidad considerable de subjetividad en el análisis a la hora de establecer la concordancia entre las dos series de datos. En cualquier caso, si la respuesta del modelo concuerda satisfactoriamente con los resultados experimentales, aumenta la confianza del ingeniero en la aptitud de las descripciones matemáticas. Si la concordancia es mala, tal vez convenga revisar el modelo o bien intentar otro método de ataque.

1.2.-Tipos de modelos.

La clasificación de los modelos no está muy bien definida, ya que se ha encontrado que diversos autores manejan diferentes clasificaciones^{13, 14, 15, 16}. En ocasiones la clasificación se realiza en términos de la naturaleza del sistema que se modela tal como continuo versus discreto o determinista versus estocástico.

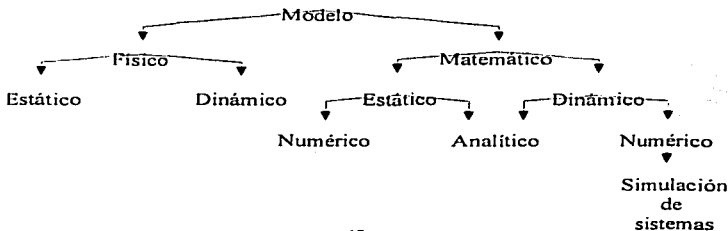


Figura 1.1 Clasificación de los modelos¹⁵.

Para fines de este estudio, se considera a los modelos como modelos físicos o modelos matemáticos¹⁵.

Una segunda distinción la constituyen su desarrollo en el tiempo, una tercera distinción es la técnica que se emplea para resolver el modelo. Y se establece una distinción entre los métodos analítico y numérico, como se muestra en la figura 1.1.

Esta distinción depende de la naturaleza del modelo y esto hace que sea posible resolverlo analíticamente o numéricamente.

Se considera que la simulación de sistemas es una técnica numérica utilizando los modelos matemáticos dinámicos, de manera que la simulación de un sistema se muestra bajo el encabezado del cómputo numérico¹⁵;

Otra clasificación dentro de los modelos matemáticos los divide en tres tipos: modelos de fenómenos de transporte, modelos empíricos y modelos de balance de población¹⁶.

Los modelos de fenómenos de transporte son las ecuaciones fenomenológicas de variación, es decir, las ecuaciones que describen la conservación de materia, cantidad de movimiento y de energía¹⁶.

Los modelos de balance de población fueron desarrollados para describir procesos que tienen propiedades distribuidas, como son el tamaño de partícula en miles de ellas¹⁶.

Las distribuciones de tiempo de residencia y otras distribuciones temporales constituyen ejemplos de modelos de balance de población¹⁶.

Por un modelo empírico se entiende una caracterización estadística del sistema basada en mediciones realizadas en un sistema real^{16, 16}.

1.2.1.-Modelos matemáticos.

Con frecuencia se desea describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida real en términos matemáticos; dicho sistema puede ser físico, sociológico o económico.

Quando el proceso que se ha de evaluar no se puede ensayar en una forma totalmente operacional (debido al costo, tiempo, riesgo, etc.), la base de evaluación debe desplazarse hacia ensayos de algunas aproximaciones del sistema, estudios en planta piloto, o bien los ensayos se pueden llevar a cabo modificando las condiciones de operación del proceso real. En primer lugar, es muy difícil que la dirección de la empresa permita a los ingenieros introducir arbitrariamente cambios en una instalación que opera satisfactoriamente por el simple hecho de ver qué es lo que ocurre. En el caso de la planta piloto a pesar que es el proceso a escala, representa un gasto que muchos no están dispuestos a hacer ya que representan una inversión económica muy grande.

Aquí es donde los modelos matemáticos de los procesos nos pueden ayudar ya que se pueden manipular mucho más fácilmente que las plantas reales. Por ejemplo, se puede simular la operación fuera de las condiciones o intervalos normales y también se puede hacer trabajar el sistema a condiciones extremas con el fin de encontrar las condiciones de operación prohibidas.

La descripción matemática mediante un conjunto de ecuaciones que intentan explicar un sistema o fenómeno se llama modelo matemático y se forma con ciertos objetivos en mente. Esta es una idealización matemática de un fenómeno real, idealización limitada por los conocimientos del modelador. En el proceso de idealización se deben hacer algunas simplificaciones. Por lo tanto, el modelo matemático es menos real que el sistema que representa. Sin embargo, representa un paso esencial de la construcción de una teoría. El objetivo de realizar un modelo matemático es generar la representación repetitiva y sucesiva del fenómeno.

Dado que las hipótesis acerca de un sistema implican con frecuencia la razón o tasa de cambio de una o más de las variables, el enunciado matemático de todas las hipótesis es una o más ecuaciones donde intervienen derivadas.

Todo lo que requiere el ingeniero para efectuar el análisis de un proceso es seleccionar la complejidad necesaria en la aproximación de la descripción, expresar las ecuaciones para cada parte del equipo, y posteriormente, resolver el sistema de ecuaciones que resulta, para distintas condiciones de operación, hasta que se alcanzan las condiciones óptimas. Por supuesto que, en la práctica, todo esto no es tan fácil como puede parecer a primera vista.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Se requieren muchas horas de trabajo para realizar toda esta tarea y, a cada paso, el ingeniero ha de superar grandes obstáculos.

En el caso de modelos matemáticos dinámicos, una técnica específica que se ha llegado a identificar como simulación de sistemas, es aquella en que se resuelven simultáneamente todas las ecuaciones del modelo con valores continuamente crecientes del tiempo¹⁵.

Por lo tanto definimos la simulación de sistemas como la técnica de resolver problemas siguiendo los cambios en el tiempo de un modelo dinámico de un sistema. La definición es suficientemente amplia para que incluya el uso de modelos dinámicos, en cuyo caso se evalúan las variables del modelo por mediciones físicas en lugar de cálculos numéricos basados en el computo. Ya que la técnica de simulación no pretende resolver analíticamente las ecuaciones de un modelo, por lo general un modelo matemático construido para fines de simulación es de naturaleza distinta a uno formado para técnicas analíticas.

La técnica de simulación no intenta específicamente aislar las relaciones entre determinadas variables; en vez de ello, observa la manera en que cambian todas las variables del modelo con el tiempo.

En los sistemas, en que los cambios son predominantemente suaves, se les conoce como sistemas continuos. Por otra parte, a los sistemas en que los cambios son predominantemente discontinuos, se les conoce como sistemas discretos.

Los cálculos numéricos no constituyen simulación, ya que los cálculos no siguen el movimiento de un sistema en el tiempo.

1.2.1.1.-Principios de la formulación.

La formulación de un modelo matemático de un sistema se inicia con los siguientes elementos:

Identificación de variables. Mediante la identificación de las variables causantes del cambio al sistema. Podremos elegir y no incorporar todas las variables en el modelo desde el comienzo. En este paso especificamos el nivel de resolución del modelo.

Leyes. Las bases para los modelos matemáticos son las leyes fundamentales físicas y químicas, como la ley de la conservación de la masa, energía y momentum. Para el estudio dinámico se debe incluir en la forma general las derivadas respecto al tiempo.

Suposiciones. Probablemente el papel vital que juegan los ingenieros en el modelado es la aplicación de suposiciones. Obviamente un modelo extremadamente riguroso que incluye todo el fenómeno detallado bajo el microscopio tendría que ser complejo, tomaría mucho tiempo en desarrollar y puede ser imposible de resolver.

Las suposiciones que son hechas deben ser cuidadosamente consideradas y enumeradas. Estas imponen limitaciones al modelo en las que hay que ser cuidadoso para obtener los resultados pronosticados.

Alcances y/o limitantes. A continuación, se establecen las limitantes y/o alcances acerca del sistema que tratamos de describir. Estas nos definen la aproximación de nuestro modelo hacia el sistema.

Para algunos fines quizá baste contar con modelos de baja precisión, por ejemplo, en los cursos básicos de física se habrá advertido que al modelar el movimiento de un cuerpo que cae cerca de la superficie de la tierra, al realizar el cálculo si el que hace este modelado es un científico cuyo objeto es predecir con exactitud la trayectoria de vuelo de un proyectil de largo alcance, deberá tener en cuenta la resistencia del aire y demás factores, como la curvatura de la tierra.

1.2.1.2.-Pasos involucrados en los estudios de simulación.

La aplicación de la simulación a muchos tipos de sistemas junto con los distintos tipos de estudios producen muchas variaciones en la forma como se desarrolla un estudio de simulación. Sin embargo se pueden identificar determinados pasos básicos en el proceso¹⁵.

Los principales pasos que deben de considerarse son:

- 1) Definición del problema
- 2) Plan de estudio
- 3) Formulación de un modelo matemático
- 4) Construcción de un programa para el modelo

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

-
- 5) Diseño de experimentos
 - 6) Alcance del modelo
 - 7) Repetición del procedimiento de simulación y análisis de resultados

Los dos primeros pasos son definir el problema y plantear el estudio. Aunque estos pasos pueden parecer obvios, no dejan de ser importantes. No debe desarrollarse ningún estudio o simulación sino hasta que enuncie claramente el problema y los objetivos del estudio. Luego se pueden hacer las estimaciones del trabajo por realizar y del tiempo requerido. La utilidad del plan tampoco concluye cuando se inicia el estudio; el plan puede controlar el desarrollo del trabajo e impedir que el estudio se desbalancee concentrándose en un aspecto del problema a costa de otro.

El tercer paso consiste en construir un modelo, tarea que se puede considerar que cae dentro de dos subtareas. Es necesario establecer la estructura del modelo decidiendo los aspectos del comportamiento del sistema que son significativos para el problema de que se trata y es necesario reunir los datos para proporcionar parámetros correctos para el modelo.

Dado un modelo matemático, inicia la construcción de un programa de computadora para resolver el modelo, el cuarto paso, es una tarea relativamente bien definida. No es de necesidad una tarea fácil y puede ser sumamente dilatada, pero el modelo establece las especificaciones de lo que debe de programarse. En la práctica, una regla que no se debe de olvidar al programar un modelo y que se debe tener en cuenta es la forma en como se construye.

Es probable que las tareas de producir un modelo y un programa de computadora se realicen en paralelo más que en serie.

El quinto paso es el diseño de un conjunto de experimentos que satisfagan los objetivos del estudio. Un factor que debe de considerarse es el costo de procesar el modelo de computadora que se recaba sin plan determinado. La presencia de eventos aleatorios en una simulación complica el diseño de los experimentos ya que debe de considerarse el significado estadístico de los resultados.

El sexto paso, el alcance del modelo sustenta la validación requerida del modelo, esto es contrastar los datos del modelo matemático con los datos obtenidos del proceso real, esto significa qué tan fielmente nos interpreta el

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

sistema nuestro modelo, además en este paso sabremos si el camino elegido fué el correcto y conclusión que tan confiable resulta ser nuestro modelo.

El séptimo paso en el estudio de un sistema es repetir el procedimiento de simulación e interpretar físicamente los resultados. En un estudio bien planeado se habrá planteado un conjunto bien definido de preguntas y el análisis tratará de responderlas.

1.2.1. 3.-Ventajas del modelado y simulación de procesos.

Desde el punto de vista más general el modelado y simulación de un proceso presentan las ventajas que se señalan a continuación:

1.- *Experimentación económica:* Es posible estudiar procesos existentes de una forma más rápida, económica y completa que en una planta real. La simulación puede aumentar o reducir el tiempo real de una forma análoga a como una cámara cinematográfica acelera o retarda las imágenes; de esta forma se puede observar más fácilmente la operación del sistema.

2.- *Extrapolación:* Con un modelo matemático se pueden ensayar intervalos extremos de las condiciones de operación, que pueden ser impracticables o imposibles de realizar en una planta real. También es posible establecer características de funcionamiento.

3.- *Estudios de conmutabilidad y evaluación de otros planes de actuación:* Se pueden introducir nuevos factores o elementos de un sistema y suprimir otros antiguos al examinar el sistema con el fin de ver si estas modificaciones son compatibles. La simulación permite comparar distintos diseños y/o procesos antes de llevarlos a la práctica.

4.- *Repetición de experimentos:* La simulación permite estudiar el efecto de la modificación de las variables y parámetros con los resultados reproducibles al realizar la simulación. En el modelo matemático se pueden introducir o retirar variables, lo que no es posible en la planta real.

5.- *Control de cálculo:* La simulación constituye una importante ayuda material para el estudio de los sistemas de control con lazos abiertos y cerrados.

6.- *Ensayo de sensibilidad*: Se puede ensayar la sensibilidad de los parámetros de costos y los parámetros básicos del sistema.

7.- *Estudio de la estabilidad del sistema*: Se puede examinar la estabilidad de sistemas y subsistemas frente a diferentes perturbaciones.

Además los modelos matemáticos pueden ser usados en todas las fases de la Ingeniería Química, en la investigación y desarrollo de las operaciones en planta y en estudios económicos y de negocios.

1.2.1.4.-Desventajas del modelado y simulación de procesos.

Es preciso reconocer que al analizar un proceso se tienen algunas limitaciones importantes.

La primera de ellas reside en la disponibilidad y exactitud de los datos: es decir, el éxito del análisis de un proceso depende grandemente de la información básica disponible para el análisis. Los estudios que se pueden realizar con el sistema son solamente en el modelo. En muchos casos el ingeniero se encuentra con una relativa insuficiencia de datos y una vez que se ha planteado el modelo, una de sus principales tareas consiste en evaluar los parámetros del modelo a base de datos experimentales. En diversos tipos de operaciones básicas casi todo el esfuerzo se dirige hacia una estimación más exacta de los parámetros de unos modelos cuyas formas están ya bien establecidas.

Unos de los campos de gran importancia para los ingenieros químicos es el de cinética de procesos, y en él existe una gran incertidumbre sobre la "verdadera cinética" del proceso. Generalmente estos coeficientes cinéticos se obtienen operando en un reactor a pequeña escala, de forma que los efectos secundarios pueden ser muy importantes. La falta de información sobre estos efectos secundarios puede conducir a unos coeficientes inadecuados para el diseño del reactor comercial. Otro problema también frecuente, consiste en que las impurezas presentes en la planta industrial no siempre se encuentran en el laboratorio, lo cual puede dar lugar a sorpresas en la eventual operación de la planta.

En algunos procesos de separación, tales como la destilación, absorción y evaporación, la eficiencia de los aparatos es muy incierta, y la mayor parte de los modelos macroscópicos que se han desarrollado y que se encuentran

descritos en los manuales más frecuentes resultan de poca utilidad sino se dispone de una razonable estimación de la eficiencia. Por ejemplo, al calcular el número de platos perforados que deben tener una torre de destilación, la exactitud de los métodos disponibles para estimar la eficacia real en comparación con la etapa teórica. La eficacia de los platos depende de propiedades del sistema tales como difusividades en las fases líquida y gaseosa, densidades y viscosidades de ambas fases, velocidades de flujo de masa y relaciones de equilibrio. Esto no quiere decir que la eficacia dependa exclusivamente de estas variables ni que las mismas afecten siempre a la eficacia, puesto que las características reales de mezcla y transferencia de materia, en la columna dependen de otras variables imposibles de medir sobre una base macroscópica.

Estas consideraciones dan idea de las dificultades que se presentan en la aplicación real de los modelos matemáticos. Los modelos se aplican tanto al paso de escala desde los datos de laboratorio a planta piloto como en el análisis de una planta comercial. La exactitud con la que es preciso conocer los parámetros depende en cierto modo de su influencia sobre el proceso global. En una forma se puede establecer que el conocimiento debe ser tanto más exacto cuanto mayor sea su influencia.

La segunda limitación reside en los recursos disponibles para la manipulación de los planteamientos matemáticos, que ya de por sí son limitados. Hay estructuras que son fáciles de definir y describir matemáticamente pero que no se pueden manipular con los conocimientos matemáticos actuales, debido a limitaciones teóricas o de las técnicas de cálculo. En estas condiciones, aunque el modelo esté bien definido y resulte adecuado para la situación real no resultaría un método razonable para el desarrollo de predicciones. Además de las dos limitaciones anteriormente descritas, sino resultan físicamente realizables los bloques de construcción para el modelo, cabe el peligro de que un concepto introducido simplemente como una técnica de análisis pueda llegar a asimilarse con una realidad física no pretendida por el constructor del modelo y para la cual no existe evidencia. Se puede así, adjudicar al modelo una validez general que en realidad no posee, lo cual constituye uno de los fallos de los modelos matemáticos. Los modelos originalmente sometidos a drásticas simplificaciones, se utilizan a veces como si su validez estuviese comprobada a priori, lo que evidentemente no ocurre. Este riesgo es evidente, aún cuando se suele prestar poca atención a esta posibilidad. Otro riesgo en la utilización de modelos consiste en suponer que representan al sistema real fuera del intervalo de las variables para el que

el modelo ha sido originalmente propuesto. Dicha extrapolación puede constituir un aspecto valioso del modelo pero puede conducir también a errores. Estos riesgos que acabamos de listar se pueden poner de manifiesto utilizando constantemente el sentido común en la interpretación de los modelos matemáticos.

1.2.2.-Modelos físicos.

Al estudiar los modelos de sistemas en las secciones anteriores, no se pretende implicar que un modelo es necesariamente una descripción matemática del sistema. Podemos decir que la mayoría de las veces es posible formar un modelo físico cuyo comportamiento representa el sistema que se estudia. Los atributos de las entidades del sistema se representan mediante medidas físicas tales como un voltaje o la posición de un eje o una flecha. Las interacciones del sistema se reflejan en las leyes físicas que subyacen al modelo.

Los ejemplos mejor conocidos de los modelos físicos son modelos a escala que se utilizan en los túneles de viento y tanques de agua para el diseño de aeronaves y naves acuáticas. Las leyes bien establecidas de la similitud permiten realizar deducciones exactas relativas al comportamiento de un sistema a escala natural a partir del modelo a escala¹⁵.

Se han descrito otros tipos de modelos físicos como modelos icónicos: modelos que semejan al sistema que modelan cuyo propósito es representar físicamente al sistema que modela en términos de la limitación humana; por ejemplo, los modelos de las estructuras moleculares formados a partir de esferas que representan a los átomos con varillas que representan los enlaces atómicos. Tanto los modelos a escala como los icónicos son ejemplos de modelos físicos estáticos.

Los modelos físicos dinámicos se apoyan en una analogía entre el sistema que se estudia y algún otro sistema de alguna naturaleza distinta, por lo general la analogía depende de una similitud.

1.3.-Aplicaciones.

Dentro de las aplicaciones de los modelos tanto físicos como matemáticos encontramos una gran variedad de ellos. Para el modelado matemático dinámico las aplicaciones se dividen principalmente en dos^{15, 16}:

-
- a) La simulación para análisis de un sistema; que pretende comprender la manera en que opera un sistema existente o propuesto, investigando el comportamiento del modelo.
 - b) La simulación para el diseño de sistemas; cuyo propósito es producir un sistema que satisfaga algunas especificaciones. Esto se hace eligiendo una combinación determinada de componentes para la construcción de un sistema. Este sistema se modela y se predice su comportamiento en base al conocimiento del comportamiento del modelo. Si el comportamiento predicho se compara favorablemente con el deseado, se acepta el diseño. En caso contrario, se rediseña el sistema y se repite todo el proceso.

Una de las aplicaciones más utilizadas de los modelos físicos es la llamada planta piloto que es una planta a baja escala, que tiene como objetivo proveer datos de diseño para una planta a gran escala¹⁶.

Otro objetivo de la planta piloto es el de estudiar el comportamiento de una planta existente del que la pequeña unidad es una reproducción, y su principal función es exhibir los efectos del cambio en las condiciones de operación más rápida y económicamente posible por los experimentos en el prototipo.

CAPITULO DOS
FLUJO LAMINAR

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2.1.-Fluidos.

Definiremos a un fluido como aquella sustancia que cambia de forma continuamente en tanto esté sometida a un esfuerzo cortante, aunque este sea pequeño³⁵.

Al considerar condiciones estáticas, en diversos tipos de fluidos, se encuentra que ciertos fluidos varían muy poco de densidad a pesar de estar sometidos a grandes presiones. Los fluidos que se comportan de tal manera están invariablemente en estado líquido. Bajo tales circunstancias, el fluido se llama incompresible y durante los cálculos se supone constante su densidad.

En la dinámica de fluidos, la cuestión de cuando un fluido puede tratarse como de densidad constante involucra otros conceptos distintos además de la naturaleza del fluido. Realmente, depende primordialmente de un cierto parámetro del flujo (número de Mach). Siempre que las variaciones de densidad en un problema no tengan importancia los gases y los líquidos se someterán al mismo tipo de análisis. Los fluidos se componen de moléculas, que se mueven y entran en colisión constantemente. Para un análisis riguroso, habría que tener en cuenta la acción de cada molécula o grupo de moléculas en el flujo. Estos procedimientos se utilizan en la teoría cinética de los gases y en la mecánica estadística, pero son, en general demasiado complicados para aplicarlos a la técnica. En la mayor parte de los cálculos técnicos se está interesando en los valores medios de las manifestaciones susceptibles de medida de muchas moléculas, llamada el continuo, en lugar de en el conglomerado real de moléculas complejo y discreto. El concepto del continuo proporciona una gran simplificación en el análisis y se ha utilizado ya, como una idealización, en los cursos de mecánica en las formas de cuerpo rígido o de sólido perfectamente elástico.

2.2.-Tipos de flujo.

La existencia de dos formas de movimiento fue observada desde un principio por los investigadores experimentales. Por ejemplo, en 1839 Hagen llamó la atención sobre el hecho de que la forma del flujo en un tubo cilíndrico cambia cuando la velocidad excede a un cierto límite. Observó que para velocidades inferiores a dicho límite, la superficie del chorro fluyente era lisa como la barra de vidrio sólida, por encima de ese límite, la superficie del chorro oscilaba y el flujo salta a borbotones. Estas fueron las

primeras evidencias respecto a los flujos laminares y turbulentos, familiares en los estudios respecto a fluidos en movimiento.

En 1883 Osborne Reynolds [Szekely, 1988], demostró las dos modalidades muy claramente y presentó el parámetro (que ahora lleva su nombre) como un criterio para determinar el régimen bajo el cual ocurre un movimiento del fluido. Para determinar el parámetro citado, inyectó una fina corriente de tintura al agua, que fluía desde un gran tanque hacia dentro de un tubo de vidrio. La corriente de tintura se conservaba como una línea recta, si el gasto a través del tubo era pequeño; mostrando que el agua se movía en líneas de corriente paralelas o láminas. Las velocidades de las láminas adyacentes no eran las mismas, pero no había una mezcla macroscópica entre ellas. Este es el caso más simple de flujo laminar. Al incrementar el gasto, por encima de cierto valor crítico, la corriente de tintura de la demostración de Reynolds se rompía en vórtices irregulares y se mezclaba lateralmente a través de la sección transversal del tubo. Esta mezcla era la evidencia del flujo turbulento.

En general, el flujo laminar se presenta cuando las capas adyacentes de un fluido se mueven unas con relación a otras, formando líneas de corrientes lisas, no necesariamente rectas, sin mezclarse macroscópicamente. Esta es la forma que se encuentra cuando los esfuerzos tangenciales viscosos, causados por el fluido, es la influencia predominante al establecer el campo de flujo.

El flujo turbulento se caracteriza porque las partículas del fluido tienen movimientos irregulares, casi al azar, siguen trayectorias fluctuantes y erráticas. La mezcla macroscópica que así resulta, es tanto lateral como en la dirección del flujo principal; este fenómeno se presenta cuando las fuerzas viscosas tangenciales son secundarias respecto a las fuerzas inerciales, al establecer el campo de flujo. Podemos notar, que tanto los movimientos laminares como los turbulentos son el resultado de la propiedad llamada viscosidad, mientras que la turbulencia da por resultado una fuerza tangencial efectiva debida a un intercambio de cantidad de movimiento entre las partículas que fluctúan lateralmente, esta fuerza turbulenta tangencial es evidencia de los efectos de la viscosidad.

Muchos problemas en Ingeniería involucran la evaluación de una cantidad física desconocida que depende de otras cantidades físicas. La solución del problema involucra la determinación de una relación funcional entre las variables físicas. En muchos casos, uno esta relacionado con la rapidez de cambio de la función con respecto a las variables. En flujo de fluidos son

varias las ecuaciones diferenciales que resultan de la aplicación de varias leyes físicas.

En estas ecuaciones las variables independientes son usualmente las coordenadas espaciales x , y , z , y el tiempo t . Las variables dependientes son velocidad, temperatura, presión y propiedades del fluido.

Las ecuaciones diferenciales importantes de flujo de fluidos son:

- 1.- La ecuación de continuidad, basada en la ley de la conservación de la masa.
- 2.- La ecuación de momentum, basada en la segunda ley de Newton del movimiento.
- 3.- La ecuación de energía, basada en la ley de conservación de la energía.

2.3.-Ecuación de continuidad.

La ecuación de continuidad se basa en el principio de conservación de la masa aplicado al movimiento de fluidos.

Consideremos un elemento de volumen estacionario, cúbico, $\Delta x \Delta y \Delta z$, a través del cual pasa un fluido. Ver figura 2.1.

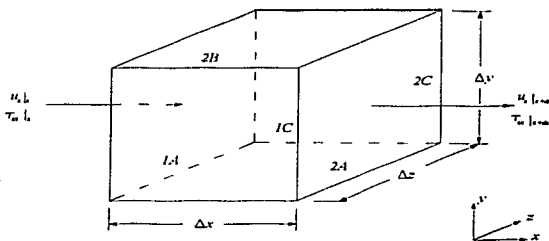


Figura 2.1 Volumen de control para la ley de conservación de la masa.

La ecuación de continuidad expresa la conservación de la masa en todo el volumen, en otras palabras.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rápidex de} \\ \text{entrada de} \\ \text{masa} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Rápidex de} \\ \text{salida de} \\ \text{masa} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Rápidex de} \\ \text{acumulaci3n} \\ \text{de masa} \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

la entrada o salida de materia a través de estas caras se calcula fácilmente construyendo el producto $\Delta y \Delta z$ (área transversal) por u (velocidad del fluido) por ρ (densidad del fluido).

Esto es para la entrada en x es $(\rho u)|_x \Delta y \Delta z$ y la velocidad de salida en la cara $x + \Delta x$ es $(\rho u)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$.

La rapidez de entrada neta de material en dirección x está dada como

$$\rho u \Delta y \Delta z|_x - \rho u \Delta y \Delta z|_{x+\Delta x} \quad (2.2)$$

Entrada a través de la cara 1A - salida a través de la cara 2A

Al escribir ecuaciones similares para la entrada neta en las direcciones y y z , y notando que la acumulación de masa dentro del elemento está dada por

$$\text{Acumulaci3n} = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.3)$$

el balance de masa se puede escribir como

$$\Delta y \Delta z [\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x}] + \Delta x \Delta z [\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [\rho w|_z - \rho w|_{z+\Delta z}] = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.4)$$

al dividir ambos lados entre $\Delta x \Delta y \Delta z$ y al aplicar el límite cuando $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ y $|\Delta z| \rightarrow 0$ y si se recuerda la definición de la primera derivada, que es en

$$\frac{u|_{x+\Delta x} - u|_x}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (2.5)$$

luego la ecuación (2.4) puede ser expresada como

$$-\left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.6)$$

o utilizando la notación vectorial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho u) \quad (2.7)$$

Esta es la ecuación de continuidad la cual es aplicable tanto para flujo compresible como para flujo incompresible.

Aquí ∇ es un operador diferencial vectorial, denominado "del" o "nabla", que se define en coordenadas cartesianas como

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.8)$$

Donde i , j y k son vectores unitarios en la dirección x , y y z respectivamente. Se debe notar que el producto "punto" de dos vectores (∇ y u en este caso) es una cantidad escalar. La cantidad $\nabla \cdot (\rho u)$ se llama a veces divergencia de (ρu) , véase que el vector (ρu) es la densidad de flujo de materia y que su divergencia tiene un significado sencillo: representa la velocidad neta con que disminuye la densidad de flujo de materia por unidad de volumen.

Por lo tanto, la ecuación establece simplemente que la velocidad con que aumenta la densidad en el interior de un pequeño elemento de volumen fijo en el espacio, es igual a la velocidad neta de entrada de densidad de flujo de materia en el elemento dividida por su volumen.

Para la condición de estado estacionario, esto es que las propiedades del fluido permanecen constantes o que no cambian respecto al tiempo, lo cual hace que el término $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, y la ecuación de continuidad, se da como

$$\nabla \cdot \rho u = 0 \quad (2.9)$$

Pero, como el fluido a manejar es incompresible, lo cual indica que la densidad permanece constante, entonces esta ecuación se simplifica aún más, y queda de la siguiente manera

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

dada en coordenadas cartesianas, obsérvese que para que la ecuación de continuidad sea válida, solo es necesario que ρ permanezca constante para un elemento de fluido que se mueva a lo largo de una línea de corriente, es decir $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

2.4.-Ecuación de movimiento.

Para un elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, se puede escribir un balance de cantidad de movimiento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{acumulación} \\ \text{de} \\ \text{cantidad} \\ \text{de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{entrada de} \\ \text{cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{salida de} \\ \text{cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Suma de las} \\ \text{fuerzas que} \\ \text{actúan sobre} \\ \text{el sistema} \end{array} \right\} ; \quad (2.11)$$

Considerando en primer lugar las velocidades de flujo del componente x de la cantidad de movimiento que entra y sale del elemento de volumen como se indica en la figura 2.2 y escribiendo el balance de cantidad de movimiento como se ve en la ecuación (2.11).

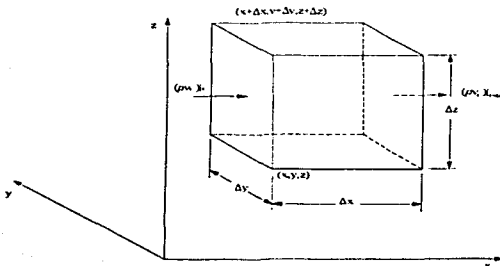


Figura 2.2 Volumen de control usado en el balance de movimiento.

La cantidad de movimiento que entra y sale del elemento de volumen en virtud de dos mecanismos: por convección (es decir, debido al flujo global del fluido) y por transporte molecular (es decir, a causa de los gradientes de velocidad).

La velocidad con la que entra por convección el componente x de la cantidad de movimiento por la cara situada en x es $\rho u u|_x \Delta y \Delta z$, y la velocidad con la que sale por $x + \Delta x$ es $\rho u u|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. La velocidad a la que entra por y es $\rho v u|_y \Delta x \Delta z$ que es preciso considerar el flujo convectivo neto, de la cantidad de movimiento x , en el elemento de volumen es:

$$\Delta y \Delta z (\rho u u|_x - \rho u u|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (\rho v u|_y - \rho v u|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\rho w u|_z - \rho w u|_{z+\Delta z}) \quad (2.12)$$

de igual forma, la velocidad con la que el componente x de la cantidad de movimiento entra por transporte molecular por la cara situada en x es $\tau_{xx}|_x \Delta y \Delta z$, y con la que sale por $x + \Delta x$ es $\tau_{xx}|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. La velocidad con que entra por y es $\tau_{yx}|_y \Delta x \Delta z$; para las otras tres caras se pueden obtener expresiones similares. Téngase en cuenta que τ_{xx} es la densidad de flujo de cantidad de movimiento x a través de una cara perpendicular al eje y . Sumando estas contribuciones, se obtiene

$$\Delta y \Delta x (\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}) \quad (2.13)$$

Obsérvese que, estas densidades de flujo de cantidad de movimiento pueden considerarse como esfuerzos. Por lo tanto, τ_{xx} es el esfuerzo normal que actúa sobre la cara x , y τ_{yx} es el esfuerzo tangencial (o cortante) que actúa sobre la cara y en la dirección x , y que resulta como consecuencia de las fuerzas viscosas.

En la mayor parte de los casos, las únicas fuerzas importantes serán las procedentes de la presión del fluido p y la fuerza gravitacional por unidad de masa g .

La resultante de estas fuerzas en la dirección x será, evidentemente.

$$\Delta y \Delta z (p|_x - p|_{x+\Delta x}) + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.14)$$

La presión de un fluido en movimiento está definida por la ecuación de estado $p = p(\rho, T)$, y es una magnitud escalar.

Finalmente, la velocidad de acumulación de cantidad de movimiento x en el elemento es $\Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} \right)$. Dividiendo toda la ecuación que resulta por $\Delta x \Delta y \Delta z$, y tomando el límite cuando Δx , Δy y Δz , tienden a cero, se obtiene el componente x de la ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho u u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v u + \frac{\partial}{\partial z} \rho w u \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (2.15)$$

Los componentes y y z , pueden obtenerse de una forma análoga, son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho u v + \frac{\partial}{\partial y} \rho v v + \frac{\partial}{\partial z} \rho w v \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad ; \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho w = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho u w + \frac{\partial}{\partial y} \rho v w + \frac{\partial}{\partial z} \rho w w \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (2.17)$$

Rara vez se utilizan estas ecuaciones en su forma completa para el planteamiento de problemas de flujo, sino que generalmente resulta más conveniente emplear formas restringidas de las mismas.

2.4.1.-Simplificaciones de la ecuación de movimiento.

Para ρ y μ constantes, las ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.17) pueden simplificarse mediante la ecuación de continuidad (2.10) para obtener

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g \quad (2.18)$$

La ecuación (2.18) es la ecuación de Navier-Stokes, obtenida inicialmente por Navier en Francia, en 1826³⁵, mediante consideraciones moleculares.

Para $[\nabla \cdot \tau] = 0$, la ecuación (2.18) se reduce a:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \rho g \quad (2.19)$$

Esta es la famosa ecuación de Euler. Deducida por primera vez en 1775³⁵, y que ha sido muy utilizada para describir sistemas de flujo para los cuales los efectos viscosos son despreciables.

2.5.-Ecuación de energía total.

Para resolver las ecuaciones de transferencia de momentum en un fluido no isotérmico es necesaria la adición de una ecuación de transferencia de energía, dentro de la cual consideraremos se transfiere por tres mecanismos principalmente: por convección, por conducción y por radiación.

En esta sección se resume la derivación del balance de energía que se aplica tanto a flujo compresible como flujo incompresible, el cual nos sirve para conocer la distribución de la temperatura en un sistema cualquiera.

Para ello se parte, como antes, de un elemento estacionario de volumen a través del cual fluye un líquido puro, como se muestra en la figura 2.3, en los cual los dos principales mecanismos para transferir esta energía es por convección y por difusión; se escribe la ley de la conservación de la energía (1ª ley de la termodinámica) para el fluido contenido en el interior de este elemento de volumen en un determinado instante:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Velocidad} \\ \text{de} \\ \text{acumulación} \\ \text{de energía} \\ \text{cinética e} \\ \text{interna} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{entrada de} \\ \text{energía} \\ \text{cinética e} \\ \text{interna por} \\ \text{convección} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad} \\ \text{de salida} \\ \text{de energía} \\ \text{cinética e} \\ \text{interna por} \\ \text{convección} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad} \\ \text{neta} \\ \text{de adición} \\ \text{de calor por} \\ \text{conducción} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Velocidad} \\ \text{neta de} \\ \text{trabajo} \\ \text{comunicado} \\ \text{por el} \\ \text{sistema} \\ \text{a los} \\ \text{alrededores} \end{array} \right\} \quad (2.20)$$

Cuando el flujo es no isotérmico, la temperatura del fluido es una variable dependiente que es función de x , y , z y t .

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

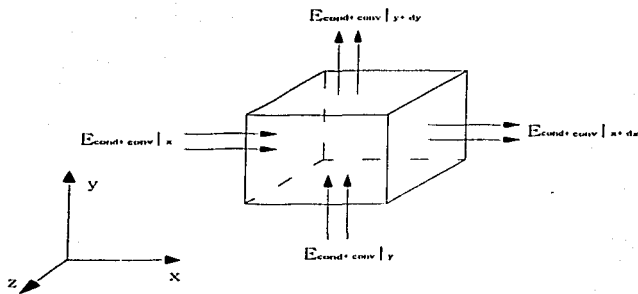


Figura 2.3 Volumen de control para el balance de energía en dirección x e y .

Haciendo un balance de energía en un elemento espacial de dimensiones Δx , Δy , Δz (como el mostrado en la figura 2.3) las siguientes formas de energía pueden ser consideradas^{29, 33}.

1. Interna, o intrínseca, energía del fluido E . Esta energía no incluye la energía de posición o energía de movimiento.
2. Energía Cinética
3. Energía de Presión-Volumen
4. Calor transferido por conducción
5. Energía de posición o energía potencial
6. Energía disipada en el fluido por acción viscosa
7. Energía generada por reacción química o corriente eléctrica

En la ecuación (2.20) la energía cinética corresponde a la energía relacionada con el movimiento observable del fluido. La energía interna corresponde a la energía relacionada con los movimientos fortuitos de translación e internos de las moléculas; es decir, que la energía interna depende de la temperatura local y de la densidad del fluido. La energía potencial del fluido no aparece de forma explícita en la ecuación (2.20) ya que se ha preferido incluirla en el término de trabajo.

Ahora para un elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$. La velocidad de acumulación de energía cinética e interna en el volumen de control es:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \bar{n} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \quad (2.21)$$

siendo \bar{n} la energía interna por unidad de masa de fluido contenido en el elemento, el término $1/2 \rho v^2$ representa el término de energía cinética en donde v es la velocidad local del fluido.

La velocidad neta de entrada de energía interna y cinética en el elemento por convección es:

$$\Delta y \Delta z \left[u \left(\rho \bar{n} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_x - u \left(\rho \bar{n} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Big|_{x+\Delta x} \right] \quad (2.22)$$

la velocidad neta de entrada de energía por conducción es:

$$\Delta y \Delta z [q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}] + \Delta x \Delta z [q_y|_y - q_y|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [q_z|_z - q_z|_{z+\Delta z}] \quad (2.23)$$

siendo q_x , q_y , q_z , los componentes x , y , z del vector de densidad de flujo de calor q .

El trabajo realizado por el elemento de fluido contra los alrededores consta de dos partes: el trabajo contra las fuerzas de volumen (por ejemplo, la gravedad) y el trabajo contra las fuerzas de superficie (por ejemplo, las fuerzas viscosas y de presión).

La velocidad de producción de trabajo contra los tres componentes de la fuerza de gravitación por unidad de masa, g , es:

$$-\rho \Delta x \Delta y \Delta z (u g_x + v g_y + w g_z) \quad (2.24)$$

El signo menos se debe a que el trabajo se realiza contra la gravedad, siendo v y g opuestos. La velocidad de producción de trabajo contra la presión estática p en las seis caras de $\Delta x \Delta y \Delta z$, es:

$$\Delta y \Delta z [(p u)_{x+\Delta x} - (p u)_x] + \Delta x \Delta z [(p v)_{y+\Delta y} - (p v)_y] + \Delta x \Delta y [(p w)_{z+\Delta z} - (p w)_z] \quad (2.25)$$

Análogamente, la velocidad de producción de trabajo contra las fuerzas viscosas es:

$$\Delta y \Delta z \left[(\tau_{xx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w)_{x+\Delta x} - (\tau_{xx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w)_x \right] \quad (2.26)$$

$$\Delta x \Delta z \left[(\tau_{yx} u + \tau_{yy} v + \tau_{yz} w)_{y+\Delta y} - (\tau_{yx} u + \tau_{yy} v + \tau_{yz} w)_y \right] \quad (2.27)$$

$$\Delta x \Delta y \left[(\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \tau_{zz} w)_{z+\Delta z} - (\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \tau_{zz} w)_z \right] \quad (2.28)$$

Substituimos ahora las expresiones anteriores en la ecuación (2.20) y dividimos toda la ecuación por $\Delta x \Delta y \Delta z$. Tomando el límite de la expresión que resulta cuando Δx , Δy y Δz tienden a cero, se obtiene una forma de la ecuación de energía:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \bar{n} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} u \left(\rho \bar{n} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} v \left(\rho \bar{n} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} w \left(\rho \bar{n} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \right) - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \rho (u g_x + v g_y + w g_z) \quad (2.29)$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} u + \tau_{yy} v + \tau_{yz} w) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \tau_{zz} w) \right)$$

Esta ecuación puede expresarse en una forma más compacta empleando la notación vectorial-tensorial.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\bar{n} + \frac{1}{2} v^2 \right) = - \left(\nabla \cdot \rho v \left(\bar{n} + \frac{1}{2} v^2 \right) \right) - (\nabla \cdot q) + \rho (v \cdot g) - (\nabla \cdot p v) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v]) \quad (2.30)$$

Ahora reordenando la ecuación de energía con ayuda de las ecuaciones de movimiento y continuidad.

Comenzamos por efectuar las derivadas indicadas en el primer miembro de la ecuación (2.30) y de la contribución convectiva, para obtener:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{n} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \left(v \cdot \nabla \left(\bar{n} + \frac{1}{2} v^2 \right) \right) \right] + \left(\bar{n} + \frac{1}{2} v^2 \right) \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho v) \right] = - (\nabla \cdot q) + \rho (v \cdot g) - (\nabla \cdot p v) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v]) \quad (2.31)$$

El primer término del primer miembro de la ecuación (2.31) es la densidad local del fluido multiplicada por la derivada sustancial de $\left(\eta + \frac{1}{2}v^2\right)$ con ayuda de la ecuación de continuidad se puede observar que el segundo término es cero. Por lo tanto, se puede escribir como:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\eta + \frac{1}{2}v^2 \right) = -(\nabla \cdot q) + \rho(v \cdot g) - (\nabla \cdot p v) - (\nabla \cdot [r \cdot v]) \quad (2.32)$$

hasta ahora no se ha hecho mención de la energía potencial Φ . Si la fuerza externa g se expresa en función del gradiente de una función escalar (por ejemplo, $g = -\nabla\Phi$ resulta:

$$\rho(v \cdot g) = -\rho(v \cdot \nabla\Phi) = -\rho \frac{D\Phi}{Dt} + \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (2.33)$$

Si Φ es independiente del tiempo, el último término desaparece, y la ecuación (2.33) se transforma en:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\eta + \Phi + \frac{1}{2}v^2 \right) = -(\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot p v) - (\nabla \cdot [r \cdot v]) \quad (2.34)$$

Esta es una ecuación de transferencia para $E = \eta + \Phi + \frac{1}{2}v^2$, que se denomina energía total.

Para la mayor parte de las aplicaciones ingenieriles es conveniente expresar la ecuación de energía calorífica en función de la temperatura y del calor específico del fluido en vez de la energía interna. Describiendo la ecuación (2.34) en estos términos, y teniendo en cuenta que la energía interna puede considerarse como una función de p y T :

$$d\eta = \left(\frac{\partial\eta}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial\eta}{\partial T} \right)_v dT = \left[-P + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \right] dv + C_v dT \quad (2.35)$$

En esta expresión de C_v es el calor específico a volumen constante por unidad de masa.

Por lo tanto, el producto de ρ por la derivada sustancial de η , será:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \left[-P + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_p \right] \rho \frac{DT}{Dt} + \rho C_v \frac{DT}{Dt} \quad (2.36)$$

mediante la ecuación de continuidad y haciendo sustituciones y simplificaciones se obtiene

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_p (\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v) \quad (2.37)$$

que es la ecuación de energía en función de la temperatura del fluido T .

Esta ecuación (2.37) entre derivadas parciales describe el transporte de energía en un sólido o fluido homogéneo.

2.5.1.-Simplificaciones de la ecuación de energía.

La primera simplificación de la ecuación (2.37) se obtiene expresando q en función de los gradientes de temperatura y τ en función de los gradientes de velocidad. Según esto, para un fluido newtoniano de conductividad calorífica constante, la ecuación (2.37) resulta:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_p (\nabla \cdot v) + \mu \Phi_v \quad (2.38)$$

Esta ecuación establece que la temperatura de un elemento móvil de fluido varía debido a:

- a) conducción de calor.
- b) efectos de expansión y
- c) calentamiento viscoso.

La función Φ se denomina función de disipación, y su forma en coordenadas rectangulares es

$$\Phi_v = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (2.39)$$

Otras cuatro simplificaciones de la ecuación de energía que son muy utilizadas, en las cuales se omitirá el término de disipación viscosa, que sólo es necesario en casos especiales y suponiendo también que la conductividad calorífica es constante.

i) Para un gas ideal $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{p}{T}$, y se obtiene

$$\text{(gas ideal)} \quad \rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - p(\nabla \cdot v) \quad (2.40)$$

ii) Para un fluido a presión constante, la ecuación (2.37) puede modificarse para dar:

$$dn = -pd\delta + \hat{C}_p dT \quad (2.41)$$

manipulando esta expresión igual que para llegar a la ecuación (2.40) se obtiene (despreciando la disipación viscosa):

$$\text{(fluido a presión constante)} \quad \rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (2.42)$$

iii) Para fluidos incompresibles ($\rho = \text{constante}$), $\hat{C}_p = \hat{C}_v$ y $(\nabla \cdot v)$ es cero. Por lo tanto la ecuación (2.40) se reduce a:

$$\text{(fluido incompresible)} \quad \rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (2.43)$$

2.6.-La forma vortice-corriente.

Mientras que la forma adecuada de la ecuación de Navier-Stokes representa el punto lógico de partida en la formulación de problemas del paso de fluidos, con frecuencia es más conveniente trabajar en términos de algunas cantidades derivadas, las cuales son la función de corriente y vorticidad³⁵.

Para flujos tridimensionales, el campo de velocidades puede ser representado utilizando el vector velocidad o sus tres componentes u , v y w .

El flujo bidimensional plano incompresible y estable representa uno de los tipos más simples de flujo que reviste importancia práctica, el que puede ser

resuelto más fácilmente si la ecuación de Navier-Stokes se expresa utilizando la función de corriente y vorticidad.

2.6.1.-Función corriente.

Tenemos disponible una representación alternativa con frecuencia más conveniente, mediante el uso de la función de corriente.

Para flujos bidimensionales, la función de corriente se define como:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (2.45)$$

para el sistema cartesiano de coordenadas y entonces la ecuación de continuidad se cumple idénticamente. Esta conclusión se puede comprobar sustituyendo simplemente las expresiones para u y v en la ecuación de continuidad de modo que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (2.46)$$

Así, siempre que las componentes de la velocidad se definan en términos de la función corriente se sabe que se cumplirá la conservación de la masa. Por supuesto, todavía no se sabe de cual $\psi(x,y)$ se trata para un problema particular, pero por lo menos se ha simplificado el análisis a tener que determinar sólo una función desconocida, $\psi(x,y)$, en vez de las dos funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$.

Otra ventaja particular de usar la función corriente está relacionada con el hecho de que las líneas a lo largo de las cuales es constante son líneas de corriente, estas son líneas en el campo de flujo que son tangentes en todas partes a las velocidades. Por la definición de línea de corriente se concluye que la pendiente en cualquier punto a lo largo de una línea de corriente está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (2.47)$$

El cambio en el valor de ψ a medida que se efectúa un desplazamiento de un punto (x,y) a un punto próximo $(x+dx, y+dy)$ está dado por la relación:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy \quad (2.48)$$

A lo largo de una línea de ψ constante se tiene $d\psi = 0$, de modo que

$$-v dx + u dy = 0 \quad (2.49)$$

Y, en consecuencia, a lo largo de una línea de constante ψ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (2.49)$$

Que es la ecuación definición para una línea de corriente. Por lo tanto, si se conoce la función $\psi(x,y)$ es posible trazar líneas de constante ψ para obtener la familia de líneas de corriente útiles para representar un patrón de flujo. Existe una infinidad de líneas de corriente que forman un campo de flujo particular, ya que para cada valor constante asignado a ψ se puede trazar una línea de corriente.

El valor numérico real asociado con una línea de corriente particular carece de importancia específica, pero el cambio en el valor de ψ está relacionado con el flujo volumétrico.

2.6.2.-Función vorticidad.

En sentido matemático, la vorticidad se define como³⁵

$$\Omega = \text{curl } u = \text{rot } u = \nabla \times u \quad (2.50)$$

que puede ser expresada como

$$\nabla \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (2.51)$$

o bien,

$$j \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] + j \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right] + k \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2.52)$$

En sentido material $\Omega_z = \nabla \times u$ es el vector de la rotación del elemento de fluido.

La velocidad angular ω en un punto dado del fluido, se define como la velocidad con la cual una pequeña rueda hipotética de paletas, montada sobre cojinetes sin fricción, rotaría en caso de ser colocado ahí.

Puede mostrarse que exista la siguiente relación este $\nabla \times u$ y ω :

$$\omega = \frac{1}{2} (\nabla \times u) = \frac{1}{2} \Omega_z \quad (2.53)$$

La figura 2.4 muestra un número de situaciones físicas que podemos examinar con respecto a la velocidad angular.

La figura 2.4 muestra también un campo de velocidades uniforme por ejemplo, un punto alejado de superficies de frontera.

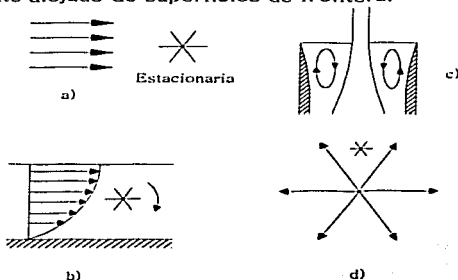


Figura 2.4. Situaciones típicas de flujo, ilustrando el concepto de vorticidad: a) flujo paralelo, b) flujo en canal abierto, c) flujo en la región del molde de un sistema de colada continua y d) flujo desde una fuente puntual.

Dado que todas las paletas de la rueda experimentarían la misma velocidad, bajo estas circunstancias no ocurriría rotación.

Así

$$\omega = 0 \quad \text{ó} \quad \text{curl } u = 0 \quad (2.54)$$

Tales flujos se denominan irrotacionales. En la figura 2.4 b) y c) corresponden a casos en los que la rueda imaginaria de paletas rotaría, debido a las diferentes velocidades experimentadas por las distintas aspas. En la figura 2.4 d) se muestra el campo de flujo producido por una fuente puntual, por ejemplo, un fluido que sale por un orificio pequeño hacia un recipiente grande. Se ve fácilmente que la rueda de paletas imaginarias, no rotaría si fuera colocada en tal campo de flujo, así, el campo de velocidades producido por una fuente puntual (o sumidero puntual) es irrotacional.

El establecer una hipótesis adicional, que el flujo irrotacional, se simplifica todavía más el análisis de los problemas de flujo no viscoso. Ya que la vorticidad, ω , se define como $\nabla \times u$, también se concluye que en un campo de flujo irrotacional la vorticidad es cero.

2.6.3.-El potencial de velocidad.

Para un flujo irrotacional, los gradientes de velocidad están relacionados a través de las ecuaciones siguientes

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.57)$$

En este caso los componentes de velocidad se pueden expresar en términos de una función escalar $\phi = (x, y, z, t)$ como

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.58)$$

donde ϕ se denomina potencial de velocidad. Sustituyendo directamente con estas expresiones las componentes de la velocidad en las ecuaciones (2.55), (2.56) y (2.57) se comprueba que un campo de velocidad definido por las ecuaciones (2.58) es, en efecto, irrotacional. En forma vectorial, las ecuaciones (2.58) se pueden escribir como $v = \nabla \phi$.

De modo que para un flujo irrotacional la velocidad es expresable como el gradiente de una función escalar ϕ .

El potencial de velocidad es una consecuencia de la irrotacionalidad del campo de flujo, en tanto que la función corriente es una consecuencia de la conservación de la masa. Sin embargo, se debe observar que el potencial de velocidad se puede definir para un flujo tridimensional general, en tanto que la función corriente está restringida a flujos bidimensionales.

Para un fluido incompresible, por la conservación de la masa se sabe que $\nabla \cdot v = 0$.

Y, en consecuencia, para un flujo irrotacional incompresible $v = \nabla\phi$ se concluye que $\nabla^2\phi = 0$.

Donde $\nabla^2(\) = \nabla \cdot \nabla(\)$ es el operador Laplaciano cuyo desarrollo es en diversos sistemas coordenados y aquí solo se desarrolla en coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.59)$$

Esta ecuación diferencial se presenta en muchas áreas diferentes de ingeniería y física, y se denominan ecuación de Laplace.

Así, los campos de flujo irrotacionales, incompresible y no viscosos están gobernados por la ecuación de Laplace. Este tipo de flujos se denomina potencial.

En coordenadas cilíndricas r , θ y z ; el operador gradiente es

$$\nabla(\) = \frac{\partial(\)}{\partial r}i + \frac{1}{r} \frac{\partial(\)}{\partial \theta}j + \frac{\partial(\)}{\partial z}k \quad (2.60)$$

2.6.4.—Ecuaciones de Navier-Stokes escritas como ecuaciones de transporte de vorticidad.

Considere un campo de flujo que se establece en el sistema bosquejado en la figura 2.5, en el que un líquido se mantiene en un recipiente rectangular

que se extiende desde $x=0$ hasta $x=L$ y desde $y=0$ hasta $y=H$ y que es grande en la dirección z .

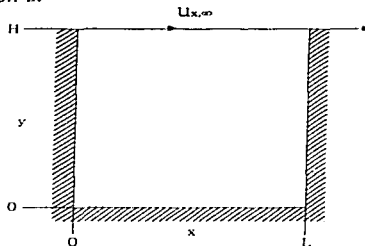


Figura 2.5. Recipiente rectangular que esta en contacto con una hoja sólida que se mueve a una velocidad $U_{x,\infty}$.

La superficie superior del recipiente está cubierta por una hoja sólida que está en contacto con el líquido y que se mueve con velocidad constante. Se procede a enunciar las formas apropiadas de las ecuaciones de Navier-Stokes y se indican las posibles manipulaciones para expresarla en forma adecuada.

La ecuación de continuidad está dada como sigue para un fluido incompresible y para condiciones de estado estacionario:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.61)$$

Los dos componentes de la ecuación de movimiento están dados como

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.62)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2.63)$$

En muchas aplicaciones es conveniente reescribir las ecuaciones (2.62) y (2.63) en términos de la vorticidad Ω , definida por las ecuaciones (2.50)-

(2.52). Para un sistema cartesiano bidimensional el componente z de Ω_z se define como

$$\Omega_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.64)$$

Ahora se diferencia la ecuación (2.62) con respecto a y y la ecuación (2.63) con respecto a x . Después de realizar estas operaciones, se resta luego la ecuación (2.62) de la (2.63); se utiliza la ecuación (2.64) y se obtiene lo siguiente³⁵:

$$u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial y^2} \right] \quad (2.65)$$

La ecuación (2.65) es la ecuación de transporte de vorticidad y expresa la conservación de vorticidad.

Con frecuencia es conveniente incluir la función de corriente definida como se explico antes,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.66)$$

se muestra fácilmente que trabajando en términos de la función de corriente, la ecuación de continuidad se satisface automáticamente.

La vorticidad y la función de corriente están relacionadas por la siguiente expresión:

$$\Omega_z = -\nabla^2 \psi = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (2.67)$$

En muchos esquemas prácticos de cálculo es conveniente reemplazar las ecuaciones (2.62), (2.63) y (2.61) por las ecuaciones (2.65) y (2.66). Por supuesto que se trabajaría completamente en términos de vorticidad y de la función de corriente si se pusiera la ecuación (2.65) en la forma siguiente³⁵:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial y} \right) = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial y^2} \right] \quad (2.68)$$

Al formular el problema en una forma adecuada para el cálculo, las condiciones a la frontera tienen que expresarse en términos de vorticidad o de la función de corriente. En este caso esto se puede hacer con bastante facilidad, puesto que las velocidades nulas estipuladas en las paredes sólidas requieren que la función de corriente sea una constante que puede considerarse como cero. Sin importar el hecho de que el movimiento laminar no es muy común en la mayoría de las operaciones de procesado en donde intervienen altas temperaturas los conceptos fundamentales, tales como la definición de la función de corriente y vorticidad; son aplicables tanto al movimiento laminar como al turbulento.

2.7.-Condiciones iniciales y a la frontera.

El hecho de asumir la hipótesis del continuo en la solución del problema, tiene como resultado la generación de ecuaciones diferenciales parciales cuyo grado de complejidad depende de la naturaleza del problema.

El modo de ajustar el fenómeno observado es insertando un cierto número de coeficientes en las ecuaciones diferenciales parciales, en principio, pueden ser calculados a partir de teorías moleculares, sin embargo, en la práctica se determinan a partir de observaciones experimentales. La solución del sistema de ecuaciones diferenciales debe de satisfacer además de las condiciones específicas para el análisis matemático un cierto número de condiciones físicas determinadas del problema en si.

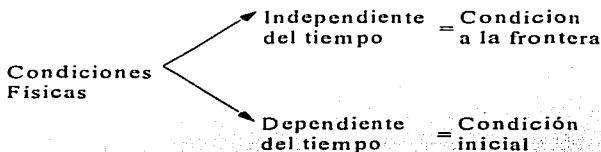


Figura 2.6 Clasificación de las condiciones físicas de un problema.

Para una ecuación diferencial parcial es necesario un grupo de " condiciones a la frontera por cada derivada de orden " con respecto a una variable espacial, y/o una condición inicial por cada derivada respecto al tiempo.

Por ejemplo; la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} = A(X) \frac{\partial C}{\partial t} \quad (2.69)$$

Requiere dos condiciones a la frontera en C concerniente a X y una condición inicial concerniente a t .

2.7.1.-Condiciones a la frontera.

Dependiendo de las características del proceso físico a modelar y de las circunstancias que rodean al proceso de estudio, se tendrán en general tres tipos de condiciones de frontera^{7, 12, 16, 25, 28}.

1. Condiciones de Dirichlet. Se dan estas condiciones cuando la variable dependiente es conocida en todos los puntos de frontera.
2. Condiciones de Von Neumann. Cuando se conoce la derivada de la variable dependiente en los puntos de frontera se dice que se tiene las condiciones de Von Neumann. En un problema de conducción de calor estas condiciones pueden obtenerse físicamente, por ejemplo; aislando térmicamente una frontera, ya que en este caso,

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0, \quad (2.70)$$

es decir no habría cambio de temperatura en la frontera. O bien si se tiene una frontera en contacto con un fluido (que puede ser aire), la ley de enfriamiento de Newton proporcionaría esta condición.

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h(T - T_0), \quad (2.71)$$

donde h es el coeficiente de transmisión de calor y T_0 la temperatura del fluido.

3. Condiciones combinadas o condición de Robin. Está condición aparece cuando se tienen una combinación de las dos anteriores.

Las condiciones a la frontera se dan a menudo de la siguiente forma general:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \alpha \phi = \beta \quad (\text{tipo mixto}) \quad (2.72)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde α y β son constantes y $\frac{\partial}{\partial \eta}$ es la derivada normal hacia fuera de la frontera. En un dominio rectangular, $\frac{\partial}{\partial \eta}$ tiene la siguiente interpretación para cada frontera:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{para la frontera izquierda} \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{para la frontera superior} \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{para la frontera derecha} \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{para la frontera inferior} \quad (2.76)$$

La ecuación (2.72) es una forma universal de las condiciones en la frontera, ya que los tres tipos de condiciones (de Dirichlet, Von Neumann y de Robin) se pueden representar de esa manera. Si $\alpha = 0$, se reduce a la condición de frontera de Neumann (con derivada), $\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \beta$. Por otro lado, si cambiamos β por $\gamma \alpha$ y α crece a infinito, entonces se reduce al tipo de Dirichlet (con un valor fijo, $\phi = \gamma$ constante).

2.7.1.1.-Condiciones a la frontera comunes para usarse con la ecuación general de transporte.

Balance de momentum¹.

1. Velocidad en el límite especificada (en la interfase sólido-fluido $v=0$).
2. a) Flux de momentum con un límite continuo (en una interfase líquido-líquido τ es continuo), esto es $\tau_x^+ = \tau_x^-$ de acuerdo con la figura 2.7.
b) La velocidad es igual en ambos límites.
3. El flux de momentum es especificado (en una interfase líquido-gas el flux de momentum es cero).

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Balance de energía¹.

1. La temperatura de la superficie puede ser conocida, por ejemplo $T = T_0$ (ver figura 2.8).
2. La densidad de flujo de calor en la superficie puede estar determinada, por ejemplo $q = q_0$.
3. En la frontera la densidad de flujo de calor se puede determinar mediante la ley de enfriamiento de Newton ($q = h(T - T_{\text{fluido}})$).

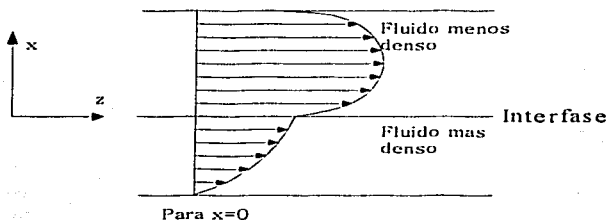


Figura 2.7. Flujo de dos fluidos inmiscibles entre dos laminas paralelas debido a un gradiente de presión.

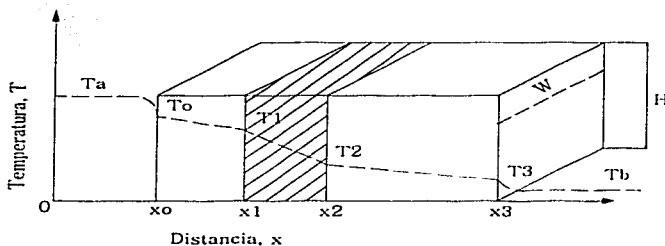


Figura 2.8. Conducción de calor a través de una pared compuesta situada entre dos corrientes de fluidos a temperaturas T_a y T_b , donde apreciamos las condiciones a la frontera para el balance de energía.

Estas condiciones en la frontera se pueden resumir en los siguientes enunciados:

- a) En la interfase sólido-fluido, la velocidad del fluido es igual a la velocidad con que se mueve la superficie misma; es decir, que se supone que el fluido está adherido a la superficie sólida con la que se halla en contacto.
- b) En las interfases líquido-gas, la densidad de flujo de cantidad de movimiento, y por consiguiente, el gradiente de velocidad en la fase líquida, es extraordinariamente pequeño, y en la mayor parte de los cálculos puede suponerse igual a cero.
- c) En las interfaces líquido-líquido, tanto la densidad de flujo de cantidad de movimiento como la velocidad son continuas a través de la interfase; es decir, que son iguales a ambos lados de la interfase.

2.7.2.-Condición inicial.

Muchos de los problemas con condiciones iniciales dependen del tiempo: en ellos, las condiciones para la solución están dadas en el tiempo inicial.

La condición inicial siempre es parte de la definición del problema, debido que la solución de un problema con condiciones iniciales sólo se puede determinar de manera única si dicha solución inicial está dada. Se exige con frecuencia, que la función satisfaga condiciones iniciales y a la frontera. Tales condiciones están determinadas por los mismos problemas físicos o biológicos, se les elige de modo que garanticen la existencia de una solución única de la ecuación.

Se aclara que estas condiciones físicas llamadas condiciones a la frontera y/o inicial se usan de igual manera en los problemas de flujo laminar y turbulentos y que para evitar redundar en este tema solo se trata en este capítulo asumiendo que el mismo tratamiento se aplica en las condiciones físicas en el caso del flujo en régimen turbulento.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPITULO TRES
FLUJO TURBULENTO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

39-A

3.1.-Turbulencia.

En las paginas anteriores se resumió la obtención de las ecuaciones de transferencia de flujo de fluidos, estas expresiones se limitaron a sistemas laminares, y a las ecuaciones desarrolladas para representar un intervalo de problemas de flujo de fluidos.

Este rango esta definido por el número de Reynolds, los flujos son laminares para números menores a 2300, para flujos en tubos; 10^5 para capas fronterizas laminares; 20 para capas laminares que caen^{1, 35}.

En muchas situaciones prácticas se observa que estas restricciones no se cumplen, ya sea porque la velocidad es grande o quizá con más frecuencia debido al gran tamaño del equipo (valores grandes de longitud características en el número de Reynolds); bajo estas condiciones el flujo es turbulento.

La turbulencia se asocia con la existencia de fluctuaciones aleatorias en el fluido y, al menos en pequeña escala, el flujo es inherentemente inestable.

Es bien conocido que las pequeñas perturbaciones asociadas con distorsiones en las líneas de fluido de un flujo laminar finalmente conducen a condiciones turbulentas. Estas perturbaciones se pueden originar desde el flujo libre, ocurren de manera natural o se inducen por la aspereza de la superficie. El comienzo de la turbulencia depende de si estas perturbaciones se amplían o se atenúan en la dirección de flujo de fluido, que a su vez depende de la razón de la fuerza de inercia a la viscosa (número de Reynolds).

Hay que recordar que si el número de Reynolds es pequeño, las fuerzas de inercia son pequeñas en relación con las fuerzas viscosas. Sin embargo, para un número de Reynolds grande, las fuerzas de inercia son suficientemente grandes para amplificar las perturbaciones, y ocurre una transición a la turbulencia.

La existencia de flujo turbulento será ventajosa en el sentido de que proporciona transferencia de calor y de masa aumentadas.

Si el problema que interesa se centra en algún comportamiento global, tal como el desarrollo de una relación entre la caída de presión y la rapidez volumétrica de flujo a través de un conducto, o el cálculo de la fuerza de

arrastré sobre un cuerpo, el uso de un balance global puede ser el método más satisfactorio³⁵.

En contraste, si se desea estudiar los perfiles de velocidad detallados y la estructura fina del campo de flujo, existen diferencias sustanciales en el comportamiento laminar y turbulento.

Físicamente estas diferencias se deben al hecho de que aun en una situación macroscópicamente estacionaria, las fluctuaciones en los parámetros clave tales como velocidad, presión, etc., que asociadas inherentemente con la turbulencia, son fenómenos basados en ellas juegan un papel crucial en la determinación del comportamiento de los sistemas turbulentos.

La consecuencia matemática de estas fluctuaciones turbulentas es que en estos sistemas la transferencia de la cantidad de movimiento ya no puede definirse en términos de los gradientes de velocidad y la definición Newtoniana de viscosidad, sino que se apoyan en relaciones mucho más complejas, y que son claramente menos satisfactorias, para relacionar la densidad de flujo de la cantidad de movimiento con el gradiente de velocidad local.

Como consecuencia, los fenómenos de flujo turbulento son mucho más complicados que el comportamiento del flujo laminar; más aún, los fenómenos de turbulencia se entienden menos.

El trabajo que se ha realizado sobre el estudio de los fenómenos de flujo turbulento puede dividirse en tres grupos, que son^{31, 35}:

- a) Estudio experimental de flujos turbulentos, centrados tanto en la medición de los campos de velocidad como en los parámetros que caracterizan el comportamiento turbulento.
- b) Estudio estadístico de la turbulencia, dirigido hacia el desarrollo de las herramientas matemáticas para representar la naturaleza fluctuante, aleatoria de la turbulencia y finalmente para predecir el comportamiento de los campos de los flujos turbulentos a partir de primeros principios.
- c) Técnicas de cálculo semiempíricas enfocadas a la predicción de los campos de velocidad y la dispersión en flujos turbulentos de interés para la ingeniería.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3.2.-Remolinos en flujo turbulento.

Una característica fundamental de los flujos turbulentos, es la existencia de elementos de fluido en los que ocurre flujo rápido, circulante. Se observa que estos elementos formados y destruidos continuamente, se denominan remolinos (eddies). A cierta distancia de la pared se aprecia que existen remolinos grandes y que mucha de la energía cinética del fluido se encuentra asociada con los remolinos de grande y mediano tamaño.

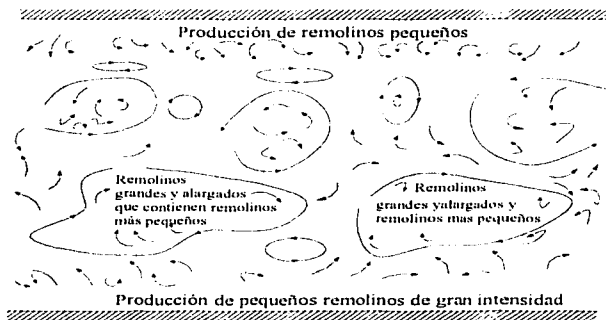


Figura 3.1. Idealización de la distribución de los remolinos en una tubería cilíndrica.

En el movimiento de los remolinos grandes, la disipación viscosa es despreciable; así, la degradación de energía ocurre cuando los remolinos grandes transfieren su energía a los más pequeños en los que la energía cinética se consume entonces debido a la disipación viscosa.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3.3.-Conceptos de la teoría estadística de la turbulencia.

3.3.1.-Componentes de velocidad alisados a lo largo del tiempo (time-smoothed) y fluctuantes.

En la figura 3.2 se muestra una medición puntual en un flujo turbulento, podemos observar fluctuaciones apreciables en la velocidad a lo largo del tiempo. Estas fluctuaciones, cuya frecuencia puede ser de varios cientos de miles por segundo, es la representación cuantitativa del comportamiento del flujo turbulento y requiere que se caracterice tanto la velocidad media (o sea promediada a lo largo del tiempo) como la naturaleza de las fluctuaciones (esto es su amplitud y frecuencia), el valor promediado a lo largo del tiempo (o alisado a lo largo del tiempo) (time-averaged; time-smoothed) de la componente de velocidad en la dirección z , se define como sigue:

$$\bar{w} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} w(t) dt \quad (3.1)$$

en donde el largo del intervalo de tiempo t_0 se escogió de manera que fuese grande comparado con el recíproco de la frecuencia de las oscilaciones turbulentas.

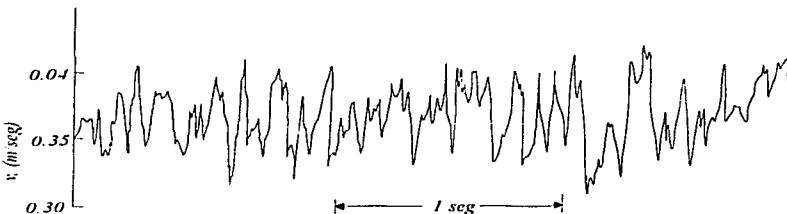


Figura 3.2. Mediciones reales de las fluctuaciones del componente axial de velocidad de flujo en un tubo.

La velocidad instantánea w se puede expresar como la suma de una velocidad suavizada a lo largo del tiempo y un componente fluctuante como se ilustra en la figura 3.3^{1, 2, 5, 20, 31}.

$$w = \bar{w} + w' \quad (3.2)$$

Se puede aplicar el mismo criterio a los otros componentes de velocidad y a la presión dentro del sistema. Así se tendrá:

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = \bar{v} + v'; \quad p = \bar{p} + p'. \quad (3.3)$$

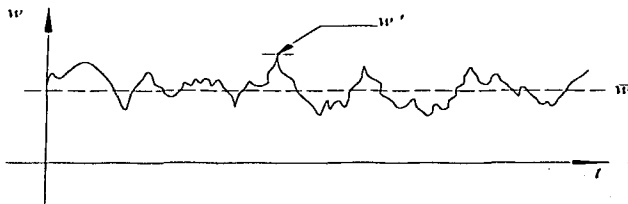


Figura 3.3. Gráfica que muestra la velocidad puntual compuesta por un elemento fluctuante y una velocidad promedio.

Por definición, el valor alisado a lo largo del tiempo del componente fluctuante debe ser igual a cero, esto es,

$$\bar{w}' = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} w' dt = 0 \quad (3.4)$$

Sin embargo, el valor promedio en el tiempo del cuadrado del componente fluctuante, o sea

$$\overline{(w')^2} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} (w')^2 dt \quad (3.5)$$

no necesariamente tiene que ser igual a cero³⁵; además, el valor alisado en el tiempo de los productos cruzados de los componentes fluctuantes, como \overline{uw} , \overline{vw} , \overline{uv} , tampoco necesariamente deben ser cero. Estas cantidades juegan un papel importante en la caracterización de los flujos turbulentos.

Las cantidades $\overline{p'u'v'}$, $\overline{p'w'u'}$, etc., poseen dimensiones de tensión y se llaman tensiones de Reynolds. Estas tensiones de Reynolds designan la transferencia de la cantidad de movimiento en el sistema debido a las fluctuaciones turbulentas.

3.3.2.-Las tres zonas del flujo turbulento.

Utilizando como base el flujo en un tubo circular, podemos diferenciar tres zonas arbitrarias en el interior del tubo. A cierta distancia de la superficie, se ve que el perfil de velocidades es relativamente aplanado; esta región se llama comúnmente núcleo turbulento en la que los efectos estrictamente laminares son despreciables. En la vecindad inmediata de la pared, las fuerzas viscosas predominan lo que resulta en un pronunciado gradiente de velocidad; esta región generalmente se llama subcapa laminar donde se utiliza la ley de la viscosidad de Newton para describir el flujo, si bien ciertos estudios muestran que los remolinos turbulentos penetran en esta zona.

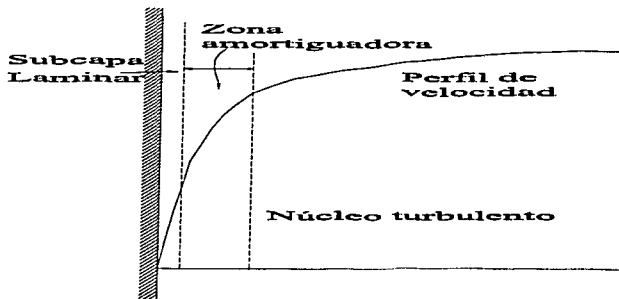


Figura 3.4. Las tres zonas del flujo turbulento.

Finalmente, existe una región intermedia, denominada capa amortiguadora (buffer), en la que tanto los efectos turbulentos como los viscosos son importantes.

3.4.-Ecuaciones diferenciales del flujo turbulento.

En esta sección se desarrollarán las ecuaciones diferenciales del flujo turbulento; estas expresiones se asemejan bastantes a las ecuaciones de Navier-Stokes que se usaron en la descripción del flujo laminar en la sección anterior. Sin embargo, existen dos diferencias principales. Las fluctuaciones turbulentas, o sea, los componentes fluctuantes de velocidad, introducen términos adicionales en la ecuación de movimiento, más aún, la definición Newtoniana de la viscosidad que se usó para relacionar los componentes de tensión con los gradientes de velocidad en flujo laminar, tendrá que ser reemplazada por relaciones mucho más complicadas y menos satisfactorias.

3.4.1.-Ecuación de continuidad en flujo turbulento.

Se toma un elemento cúbico de fluido, estacionario, $\Delta x \Delta y \Delta z$, tal como la que se muestra en la figura 3.5, a través del cual pasa un fluido.

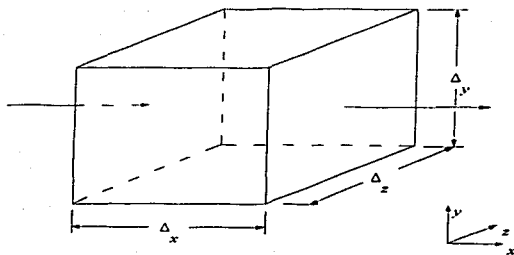


Figura 3.5. Volumen de control para la ecuación de continuidad en flujo turbulento.

Se procede escribiendo la ecuación de continuidad, esto es, la ecuación (2.10), representando los componentes de velocidad como la suma de las cantidades alisada en el tiempo y fluctuante, así

$$u = (\bar{u} + u') \quad v = (\bar{v} + v') \quad y \quad w = (\bar{w} + w') \quad (3.6)$$

Para el sistema cartesiano de coordenadas y suponiendo comportamiento incompresible, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} + v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w} + w') = 0 \quad (3.7)$$

Después de alisar cada término a lo largo del tiempo, esto es, al aplicar el operador lineal $\left(\frac{1}{t_0}\right) \int_0^{t_0} (\) dt$, los componentes fluctuantes desaparecerán puesto que: $\left(\frac{1}{t_0}\right) \int_0^{t_0} (w') dt = 0$, entonces la ecuación (3.7) queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

ó

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (3.9)$$

Naturalmente también se tiene que $\nabla \cdot \bar{u}' = 0$ ^{31, 32, 35}.

Entonces se ve que la ecuación de continuidad alisada en el tiempo es idéntica a la desarrollada para el flujo laminar; esta identidad es válida, por supuesto, independientemente del sistema de coordenadas que se utilice. Este descubrimiento es razonable desde el punto de vista físico, siempre que el volumen de control sea grande comparado con el tamaño promedio del remolino³⁵.

Esta estipulación es, por supuesto, bastante más restrictiva que la limitación análoga utilizada en el flujo laminar; en éste, al menos de que se consideren gases a muy bajas presiones absolutas, es posible dar por sentado que el volumen de control seleccionado será muy grande en comparación con la trayectoria libre media de las moléculas.

3.4.2.-Ecuación de movimiento.

Tomando como punto de partida la ecuación (2.18), el componente x de la ecuación de movimiento para un fluido incompresible en flujo laminar se escribe de nuevo, y reemplazando los términos de velocidad y presión instantáneos por la suma de los componentes alisados en el tiempo y fluctuante. Tenemos así

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} + u') &= \mu \nabla^2 (\bar{u} + u') \\ - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u')(\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} + v')(\bar{v} + v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w} + w')(\bar{w} + w') \right] \\ &- \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') + \rho (\bar{F}_x + F_x') \end{aligned} \quad (3.10)$$

Después de suavizar en el tiempo ambos lados de la ecuación (3.10), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}\bar{u}) \right] \\ - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}'u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}'v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w}'w') \right] - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho \bar{F}_x \end{aligned} \quad (3.11)$$

Si se revisa la ecuación (3.11) se ve que es muy similar (en términos de cantidades alisada en el tiempo) a las ecuaciones de Navier-Stokes dadas previamente, salvo por el hecho de que debido al alisamiento en el tiempo surgen términos adicionales. Estas cantidades $\rho \bar{u}'u'$, $\rho \bar{v}'v'$ y $\rho \bar{w}'w'$ que poseen las dimensiones de tensión o densidad de flujo de cantidad de movimiento generalmente se llaman tensiones de Reynolds. Los componentes del tensor de tensión turbulento $\bar{\tau}^{(t)}$, se define como

$$\bar{\tau}_{xx}^{(t)} = \rho \bar{u}'u', \quad \bar{\tau}_{xy}^{(t)} = \rho \bar{u}'v', \quad \bar{\tau}_{xz}^{(t)} = \rho \bar{u}'w', \text{ etc.}$$

entonces la ecuación de movimiento para fluidos incompresibles se puede escribir como

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\nabla \bar{p} - \nabla \cdot \bar{\tau}^{(t)} - \nabla \cdot \bar{\tau}^{(v)} + \rho \bar{F}_x \quad (3.13)$$

donde $\tau^{(l)}$ es el tensor de tensión laminar que es definido en la ecuación (3.14) para flujo laminar, mientras que $\bar{\tau}^{(t)}$ es el tensor de tensión turbulento.

$$\tau = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

$$\bar{\tau}^{(t)} = \begin{vmatrix} \overline{\tau_{xx}^{(t)}} & \overline{\tau_{xz}^{(t)}} \\ \overline{\tau_{yx}^{(t)}} & \overline{\tau_{zz}^{(t)}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{\rho u' u'} & \overline{\rho u' w'} \\ \overline{\rho w' u'} & \overline{\rho w' w'} \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

Para los problemas de flujo laminar, la etapa siguiente después del enunciado de la ecuación de movimiento del tipo dado por la ecuación (2.15), (2.16) y (2.17), fue sustituir los componentes del tensor de tensión utilizando la ley de Newton de la viscosidad, lo que produjo luego una ecuación diferencial que relacionaba las derivadas de velocidad con el campo de presión y el campo de fuerza de cuerpo en el sistema.

Esta operación es menos directa para los flujos turbulentos puesto que no existe una relación unívoca o universal entre los componentes del tensor de tensión turbulento y los gradientes de velocidad alisados en el tiempo. Para el flujo laminar esta relación estuvo bien definida y la constante de proporcionalidad fue la viscosidad newtoniana que fue una propiedad del fluido.

Para los sistemas turbulentos, la relación entre los componentes de $\bar{\tau}^{(t)}$ y los gradientes de velocidad alisados en el tiempo es mucho más complicada a la vez que una propiedad del sistema.

De la exposición precedente se sigue que antes de que podamos avanzar en la integración de las ecuaciones turbulentas de Navier-Stokes, se necesitan modelos o relaciones funcionales para relacionar $\bar{\tau}^{(t)}$ y los gradientes de velocidad.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3.5.-Modelos de transporte turbulento.

3.5.1.-Tipos de modelos.

Una cantidad clave en las ecuaciones de Navier-Stokes suavizadas en el tiempo es la tensión de Reynolds, que es proporcional a $\overline{u'u'}$. Los productos suavizados en el tiempo como $\overline{u'u'}$ son llamados correlaciones o momentos. y los modelos para la turbulencia son clasificados parcialmente de acuerdo a los tipos de correlaciones usadas. Las correlaciones son clasificadas de acuerdo al número de cantidades involucradas y su localización en el espacio y tiempo^{5, 32}.

El tensor $\overline{u'u'}$ es una correlación de segundo orden, ya que ambas cantidades (ambas $u's$) son evaluadas en el mismo tiempo y posición. Se argumenta que la turbulencia puede ser descrita usando más tipos generales de correlaciones en que las cantidades individuales son evaluadas en dos ó más puntos en el espacio y/o instantes en el tiempo^{5, 32}.

Todas las formulaciones estadísticas para la turbulencia encuentran alguna forma de aproximar los problemas. Esto es, el número de incógnitas en las formulaciones estadísticas siempre exceden el número de ecuaciones que son "fundamentales" o "exactas" (por ejemplo, las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes). Consecuentemente, el grupo de ecuaciones exactas puede ser aumentado con relaciones aproximadas basadas en modelos.

En lo que se puede llamar métodos de primer orden, las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes suavizadas son resueltas para \bar{v} y \bar{p} , y un modelo es llamado para las tensiones de Reynolds, o $\overline{u'u'}$. El ejemplo más familiar es el modelo para $\overline{u'u'}$ que consiste de una ecuación algebraica especificada para μ_t ^{5, 32}.

La idea de la difusividad de remolino es preservada en otros métodos de primer orden, pero μ_t es evaluada para resolver una o más ecuaciones diferenciales adicionales. Los métodos de primer orden son comúnmente llamados como modelos de ecuación cero, de una ecuación o de dos ecuaciones de acuerdo al número de ecuaciones diferenciales adicionales que pueden ser resueltas para computar μ_t . En la terminología la aproximación de la longitud de mezclado de Prandtl es un modelo de primer orden, de ecuación cero. La aproximación ampliamente usada para cálculos ingenieriles en flujos turbulentos es un método de dos ecuaciones llamado el

modelo $k-\varepsilon$. En los métodos de segundo orden, una ecuación diferencial es resuelta para \bar{u} ; las correlaciones de tercer orden $\bar{u'u'v'}$, que aparecen en esta ecuación, también son modeladas. Los métodos de segundo orden parecen ser desventajosos para ciertos flujos, pero estos métodos no son ampliamente usados.

3.5.2.-Concepto de Boussinesq de la viscosidad de remolino.

El primer intento de relacionar la tensión de corte turbulenta con el gradiente de velocidad se debió a Boussinesq, quién en 1877 propuso la siguiente expresión:

$$\bar{\tau}_{yx}' = \rho \bar{u}'v' = -\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.16)$$

aquí μ_t es la viscosidad de remolino o viscosidad turbulenta aparente, que depende primordialmente del lugar. Entonces se espera que

$$\mu_t \gg \mu \quad (\text{en el núcleo turbulento}) \quad (3.17)$$

y

$$\mu_t \ll \mu \quad (\text{en la vecindad de la pared}) \quad (3.18)$$

Esta propuesta de Boussinesq es muy importante, puesto que proporciona un armazón racional para el análisis del flujo turbulento, mediante el desarrollo de este tipo de relaciones³⁶.

3.5.3.-Modelo de Prandtl de la longitud de mezclado.

En 1925 Prandtl propuso la siguiente expresión para definir μ_t , la viscosidad turbulenta de remolino que aparecía en el modelo de Boussinesq³⁵.

$$\mu_t = \rho l_m \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right| \quad (3.19)$$

Aquí l_m es la longitud de mezclado que al interpretarse, analógicamente desempeña el mismo papel en el movimiento de los remolinos que la trayectoria libre media en el movimiento de las moléculas de un gas. Mientras que físicamente esta analogía no es muy buena, a través del uso de expresiones adecuadas para l_m se alcanza un éxito considerable en la representación de los perfiles de velocidad turbulenta de ciertos flujos simples. Antes de proseguir, puede ser instructivo examinar con más detalle las hipótesis que condujeron al modelo de la longitud de mezclado de Prandtl.

En estas consideraciones se encuentra implícito el postulado de que el corte total es:

$$\overline{\tau_{yx}} = \tau_{yx} + \overline{\tau_{yx}^{(t)}} \quad (3.20)$$

esto es,

$$\overline{\tau_{yx}} = \mu_{eff} \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \quad (3.21)$$

en donde

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t \quad (3.22)$$

Prandtl propuso que la viscosidad turbulenta μ_t podría representarse por

$$\mu_t = \rho l_m^2 u_t \quad (3.23)$$

En donde u_t es alguna velocidad turbulenta aleatoria, y que puede estimarse de

$$u_t = l_m \left| \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \right| \quad (3.24)$$

Se ve fácilmente que combinando las ecuaciones (3.23) y (3.24) se obtiene el modelo original de la "longitud de mezclado". Sin embargo, es posible utilizar expresiones diferentes a la ecuación para definir u_t y está es en verdad la trayectoria seguida por los modelos más complicados de la turbulencia.

Ahora la ecuación (3.19) definió la viscosidad turbulenta en términos del valor absoluto y de la longitud de mezclado. Antes de proseguir se requiere una relación adicional a través de la cual pueda definirse l_m .

En su publicación original Prandtl³⁵ propuso que l_m podría estar relacionada con la distancia desde la pared, o sea:

$$l_m = 0.4y \quad (3.25)$$

En donde y representa la distancia normal desde la superficie sólida. Mientras que esta expresión simple es muy atractiva desde el punto de vista del cálculo, se encontró que los resultados obtenidos mediante su uso no estuvieron muy de acuerdo con las mediciones. En una reseña Launder y Spalding⁴⁸ sugirieron, que el modelo de la longitud de mezclado de Prandtl puede utilizarse con éxito en el modelado de un rango de flujos básicamente unidireccionales (no recirculantes), tales como el flujo a través de un tubo, flujo en capa fronteriza, comportamiento de chorros libres, etc., puesto que se utilizan expresiones apropiadas para definir a l_m . Estos autores proporcionaron numerosas relaciones recomendadas para l_m junto con una reseña crítica de la comparación de las predicciones basadas en estos modelos con mediciones reales.

Para un estudio más detallado de las diferentes fórmulas disponibles para la estimación de la longitud de mezclado para un rango de situaciones de flujo, se recomienda consultar los textos de Spalding y colaboradores^{48, 50, 51}. El modelo simple de longitud de mezclado que se describió en las páginas precedentes, es atractivo puesto que capacita para calcular ciertos flujos básicamente unidireccionales con bastante precisión, sin necesidad de recurrir a un trabajo excesivo de cálculo. Con todo, el modelo tiene algunos inconvenientes básicos que se enumeran enseguida:

- 1) Se requieren expresiones específicas para la longitud de mezclado, las que pueden no estar disponibles para el sistema que interese.
- 2) El modelo de longitud de mezclado implica una viscosidad turbulenta nula y así la difusividad de remolino es nula por analogía en posiciones en donde el gradiente de velocidad es cero. Esto es contrario a la experiencia (por ejemplo, el modelo simple de la longitud de mezclado sugeriría que no hay transporte de materia ni térmico debido a los remolinos en la línea central del tubo en flujo turbulento, y esto claramente no es verdad).
- 3) Los remolinos de la longitud de mezclado no son satisfactorios para la representación de campos complejos de flujo, esto es, flujos recirculatorios.

Estas deficiencias en los tipos de modelos de la longitud de mezclado, se pueden superar utilizando ecuaciones más complejas de modelado para la viscosidad turbulenta.

3.5.4.-Modelos de una ecuación.

Las ecuaciones (3.20), (3.21) y (3.22) representan el punto de partida en los denominados "modelos de una ecuación" del flujo turbulento.

Además, la viscosidad turbulenta μ_t , está dada por la expresión siguiente:

$$\mu_t = \rho l_m k^{1/2} \quad (3.26)$$

Aquí l_m es la longitud de mezclado previamente definida y k es la energía cinética debida a las fluctuaciones turbulentas en la velocidad. Más específicamente k esta definida como³⁵

$$k = \frac{1}{2} [\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2] \quad (3.27)$$

O sea, como la mitad de la suma de los cuadrados de los valores alisados en el tiempo de los componentes fluctuantes de velocidad. La dimensión de $k^{1/2}$ es la de velocidad, de modo que formalmente las ecuaciones (3.26) y (3.19) son equivalentes. Sin embargo en vez de postular como se hizo en el modelo de la longitud de mezclado, que k (o u_t) puede relacionarse con el gradiente de la velocidad alisada en el tiempo, ahora k se calculará a partir de una ecuación diferencial que expresa la conservación de esta cantidad. El concepto de definir la viscosidad turbulenta como producto de la longitud de mezclado y la energía de turbulencia, fue sugerido independientemente por Kolmogorov y Prandtl^{42, 43, 44, 45}. Con todo, estas ideas no pudieron ser puestas en uso práctico hasta que las poderosas computadoras digitales estuvieron en uso. Una buena explicación de los esquemas específicos de cálculo subsecuentes y de los desarrollos de base, se halla disponible en la monografía de Launder y Spalding⁴⁴.

Las consideraciones que conducen a establecer un balance diferencial en la energía turbulenta no son tan evidentes o rigurosas como las ecuaciones de balance en flujo laminar. En un campo turbulento puede desprejarse la transferencia difusiva en la dirección del flujo, si bien en este caso el

mecanismo para la transferencia difusiva no es molecular sino que se encuentra asociado con las fluctuaciones turbulentas. Para condiciones de estado estacionario, la ecuación alisada en el tiempo se puede escribir como

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial K}{\partial x} + \bar{v} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} [\rho \bar{v}'k' + \bar{v}'p'] - \bar{u}'\bar{v}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \mu \sum \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.28)$$

Sin embargo, antes de avanzar, las cantidades fluctuantes que aparecen en la ecuación (3.28) han de ser reemplazadas por parámetros medibles o predecibles. Según Prandtl, el componente difusivo puede ser aproximado mediante.

$$-(\rho \bar{v}'k' + \bar{v}'p') \approx (\mu_t \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial y} \quad (3.29)$$

En donde σ_k es el número turbulento de Prandtl para la difusión de k , tomado generalmente como igual a la unidad^{31, 35, 48}. El término de producción es la tensión de Reynolds previamente para el flujo unidimensional; así, podemos escribir

$$-\bar{\rho u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.30)$$

Si se considera que la disipación (viscosa) toma lugar en los remolinos más pequeños cercanos a la pared, es razonable suponer que estos remolinos no se ven muy afectados por la dirección o la posición; así, después de suponer isotropía, utilizando la ecuación se puede escribir

$$\mu \sum \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right) = C_D \left(\frac{\rho k^{\frac{3}{2}}}{l_m} \right) \quad (3.31)$$

donde C_D es un coeficiente.

Así, resumiendo las suposiciones hechas, la ecuación de balance de energía de turbulencia para flujos del tipo de capa fronteriza, puede expresarse como

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - C_D \frac{\rho k^{\frac{3}{2}}}{l_m} \quad (3.32)$$

Así, para un problema del tipo de capa fronteriza turbulenta, la ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento han de resolverse conjuntamente con la definición de la viscosidad turbulenta y la ecuación de balance para la energía de turbulencia.

Estas ecuaciones se encuentran acopladas puesto que la viscosidad turbulenta aparece en la ecuación de movimiento y los términos de velocidad aparecen en la ecuación de balance para la energía turbulenta, cuyo valor (dependiente de la posición) se necesita para definir μ_t .

La tarea de cálculo es complicada puesto que las ecuaciones a resolver son ecuaciones diferenciales parciales no lineales y simultáneas; sin embargo en la literatura se encuentran numerosos programas bien documentados disponibles.

Para usar el "modelo de una ecuación" antes que la formulación del problema se complete, se requiere información acerca de: a) las condiciones a la frontera para la ecuación y b) se debe especificar la longitud de mezclado.

Spalding y sus colaboradores sugirieron que en la vecindad de paredes sólidas, la convección y la difusión de la energía de turbulencia pueden ser despreciables; así, después de igualar la producción de la energía de turbulencia y su disipación tenemos

$$\left(\frac{\tau}{\rho k} \right)_{\text{pared}} \approx C_D \frac{1}{2} \quad (3.33)$$

en donde $C_D \equiv 0.08$ y $\tau = \tau_0$ la tensión de corte en la pared.

La desventaja de los "modelos de una ecuación" es el hecho de que aún tiene que especificarse la longitud de mezclado y es improbable que pueda disponerse o se puedan desarrollar relaciones simples para la descripción de la longitud de mezclado en campos complejos. Sin embargo los modelos de una ecuación se utilizan para calcular el comportamiento de capas fronterizas turbulentas.

Hacemos notar que la forma relativamente simple de la ecuación (3.32) se debió al hecho de que se emplean las suposiciones simplificadas asociadas generalmente con las ecuaciones de capa fronteriza.

El inconveniente antes mencionado de los modelos de una ecuación, esto es, el que la longitud de mezclado deba especificarse, los hace inaplicables a un amplio intervalo de campos más difíciles de flujo, incluyendo los flujos recirculatorios turbulentos, que son de importancia práctica considerable para muchas operaciones de metales. Estos problemas se pueden abordar mediante el uso de modelos bastante más complicados, en los que la longitud de mezclado, o alguna cantidad equivalente, no se especifica mediante el uso de una ecuación algebraica sino que tiene que calcularse de una ecuación diferencial adicional.

3.5.5.-Modelo de dos ecuaciones.

Kolmogorov fue el primero que sugirió que la viscosidad turbulenta se determinara como el producto de dos factores: una energía característica y el recíproco de una frecuencia característica, ambos debían de ser evaluados como una solución de ecuaciones diferenciales^{32, 35, 44, 51}.

Los postulados principales de los modelos de dos ecuaciones se resumen en lo siguiente:

$$a) \quad \mu_t = \rho k v^{-\frac{1}{2}} \quad (3.34)$$

donde:

$$l_m = \left(\frac{k}{w} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.35)$$

y w es el cuadrado medio de la frecuencia de los remolinos turbulentos o el gradiente de la aceleración del campo turbulento³².

b) k , es la energía de turbulencia se calcula resolviendo la ecuación de conservación que corresponde, o sea la ecuación (3.32) para flujo del tipo de capa fronteriza³².

c) w , el cuadrado de la frecuencia media se obtiene a través de la solución de una ecuación diferencial de conservación. Spalding propuso la siguiente ecuación para definir w ³²:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = C_1 \mu_t (\nabla \bar{\xi}_z)^2 \quad (3.36)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$+ C_3 \frac{w}{k} 2\mu_t \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right] - C_2 \rho w^3 \quad (3.37)$$

Aquí $C_1 \cong 3.5$, $C_2 \cong 0.17$, $C_3 \cong 1.04$ y $\sigma_w \cong 1$ ^{31, 32, 35, 48}.

Históricamente, muchos han sido propuestos. En muchos de estos, k es tomada como una de las variables, pero son diversos los cambios para la segunda.

Ejemplos de estos modelos: el modelo $k-kl$ (Rotta 1951), el modelo $k-w$ (Kolmogorov 1942), el modelo $k-w^2$ (Saffman 1970), el modelo $k-r$ (Speziale, Abid y Anderson 1992)⁴⁸.

Para flujos homogéneos, el cambio de la segunda variable es indiferente, como esta es una correspondencia exacta entre las ecuaciones, y su forma es esencialmente la misma⁴⁸.

El modelo $k-\varepsilon$ es el modelo más simple y completo de la turbulencia, y con más intervalo de aplicabilidad. Este es incorporado en muchos códigos comerciales de CFD, y pueden ser aplicados a diversos problemas incluyendo transferencia de calor, combustión y flujo multifásico.

El modelo de dos ecuaciones se prefiere porque 2 es el número mínimo de ecuaciones que bastan para la predicción de la escala de longitud.

3.5.5.1.-El modelo $k-\varepsilon$.

EL modelo $k-\varepsilon$ son de la clase de modelos de 2 ecuaciones, en que el modelo de 2 ecuaciones de transporte son resueltas para 2 cantidades turbulentas, es decir k y ε en el modelo $k-\varepsilon$. De estas dos cantidades pueden ser formados una escala de longitud ($L = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$), una escala de tiempo ($\tau = \frac{k}{\varepsilon}$), una cantidad de dimensión $v_t \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \right)$, etc. Como una consecuencia, el modelo de dos ecuaciones puede ser completamente especificado.

En resumen, a la hipótesis de la viscosidad turbulenta, el modelo $k-\varepsilon$ consiste de³²:

- i) El modelo de ecuación de transporte para k (que es igual que en el modelo de una ecuación);
- ii) El modelo de ecuación de transporte para ε ; y
- iii) La especificación de la viscosidad turbulenta como

$$\mu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

donde $C_\mu = 0.09$ es una de las cinco constantes.

Las ecuaciones de Navier-Stokes que gobiernan el movimiento del fluido son aumentadas por ecuaciones diferenciales adicionales que significa representar como la turbulencia es creada por la influencia ejercida del movimiento del fluido y como disipa o una medida de las fluctuaciones de la vorticidad, o una combinación de estas cantidades que hacen posible computar la escala de la longitud de la turbulencia.

7

3.5.5.1.1.-El modelo de ecuación de transporte para ε .

En este modelo, la rapidez de la disipación de la energía turbulenta, ε (que para isotropía local y altos números de Reynolds es igual a la viscosidad por las fluctuaciones de vorticidad, $\mu_t \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2$) es expresado en la forma de una ecuación de transporte turbulento.

Para la energía de disipación turbulenta ε :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_{\varepsilon j}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} (\rho) - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.46)$$

Para la energía de transporte turbulento:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_{kj}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + v_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (3.47)$$

donde

$$v_i = \frac{\mu_t}{\rho}$$

y

$$\mu_t = \left(\rho k^{1/2} l \right) = C_D \frac{\rho k^2}{\varepsilon} \quad (3.48)$$

Valores recomendados para las constantes empíricas que aparecen en la ecuación (3.46) y (3.47) son^{31, 34, 36, 40, 48}

$$C_1 = 1.44$$

$$C_2 = 1.92$$

$$C_D = 0.09$$

$$\sigma_t = 1.0$$

$$\sigma_\epsilon = 1.3$$

3.7.-Transferencia de energía.

En el núcleo turbulento la energía calorífica se transporta muy rápidamente de un lugar a otro debido a la vigorosa actividad de los remolinos. Este mecanismo del rápido paso de energía calorífica da lugar a que la temperatura de tiempo ajustado varíe poco en todo el núcleo turbulento. Por otra parte, la actividad de remolino junto a la pared es despreciable, y es conveniente considerar una región laminar en la que la energía se transporta exclusivamente por conducción de calor, que es un proceso lento en comparación con el transporte por remolino. Por tanto, es de esperar que se produzca una gran caída de temperatura a través de la delgada película laminar. En la zona de transición se prevé una situación intermedia entre la del núcleo turbulento y la de la subcapa laminar, siendo importantes en esta región tanto el transporte de energía por conducción como por remolinos.

3.7.1.-Ecuación de transferencia de energía en flujo turbulento.

Como vimos anteriormente la velocidad instantánea en punto en un campo de flujo turbulento se expresa como

$$u = \bar{u} + u' \quad (3.49)$$

donde las cantidades con barra representan los componentes medios independientes del tiempo, y las cantidades con comilla, los componentes fluctuantes de alta frecuencia. Igualmente la temperatura instantánea en un punto en el flujo turbulento se puede expresar como una suposición de una media temporal y un componente fluctuante.

$$T = \bar{T} + T' \quad (3.50)$$

La ecuación de energía para flujo laminar puede ser convertida a su versión en flujo turbulento, cambiando las velocidades y temperaturas en estas ecuaciones por las velocidades instantáneas y temperaturas del campo turbulento.

Partiendo de la ecuación (2.42), tenemos la ecuación de transferencia de energía en dos dimensiones como

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) = \frac{1}{\rho C_p} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (3.51)$$

Y cuando el flujo es turbulento, las temperaturas en las ecuaciones son cantidades instantáneas.

Sustituyendo la ecuación (3.49) y (3.50) en la ecuación (3.51) se nota que para este caso especial de flujo en 2 dimensiones, el componente \bar{T} varía con (x, y, t) , pero los componentes fluctuantes v' y T' varían con (x, y, z, t) . En otras palabras, el flujo medio puede ser en dos dimensiones, pero las fluctuaciones turbulentas en un punto son en tres dimensiones. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{T} + T') + \frac{\partial}{\partial x}[(\bar{u} + u')(T' + T'')] + \frac{\partial}{\partial y}[(\bar{v} + v')(T' + T'')] = \\ \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial}{\partial x} (\bar{T} + T') \right] + \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial}{\partial y} (\bar{T} + T') \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

Tomando el tiempo promedio de esta ecuación igual que el tiempo promedio de cada término. Se nota de la definición que el tiempo promedio de las cantidades fluctuantes debe ser cero, esto es $\bar{T}' = 0$. Así, $\bar{v}T' = \bar{v}$; $\bar{T}'' = 0$.

Sin embargo, $\bar{v}'' \neq 0$.

Todos los términos de la ecuación (3.52) son promediados, rearrreglando la ecuación (3.52) y usando la ecuación de continuidad, esta queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{1}{\rho C_p} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \rho C_p \bar{u}'' \bar{T}' \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho C_p \bar{v}'' \bar{T}' \right) \right] \quad (3.53)$$

Esta ecuación contiene dos términos adicionales en el lado derecho, que expresan el flux de entalpía asociados con el movimiento fluctuante en las direcciones x y y .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Estos términos emplean un concepto clave del fenómeno de transferencia turbulenta, debido a que las propiedades fluctuantes propias en el sistema turbulento produce un incremento aparente en los flux de transferencia. Cada flux aparente consiste de un flux de difusión molecular (como en el flujo laminar) y un flux de remolino.

3.7.2.-La difusividad de eddy de momentum y de energía.

El flux de momentum $\rho \bar{u}'\bar{v}'$ es interpretado como una tensión cortante turbulenta en la misma forma que la tensión cortante molecular es interpretada y del concepto de viscosidad de remolino de Boussinesq:

$$\bar{\tau}'_{yx} = \rho \bar{u}'\bar{v}' = -\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.54)$$

En forma similar, el flux de entalpía $\rho C_p \bar{v}'T'$ en la ecuación (3.53) sugiere el uso del concepto de una difusividad de eddy para la transferencia de energía donde:

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{eddy} = \rho C_p \bar{v}'T' = -\rho C_p k_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (3.55)$$

interpretando $\rho C_p k_t$ como una conductividad de eddy, el coeficiente molecular de viscosidad μ definido en el flujo laminar, es independiente del número de Reynolds, la geometría del flujo, la posición del fluido y para los fluidos newtonianos la rapidez cortante. La viscosidad de eddy, al contrario es dependiente de cada uno de estos parámetros.

El concepto de la viscosidad de eddy reemplaza una incógnita por otra. En la teoría de Prandtl se expresan las tensiones de eddy en términos de una longitud que es característica al grado de la turbulencia, el cual como ya vimos puede no ser fácil de obtener.

3.8.-Aplicaciones.

El modelo $k-\epsilon$ en la forma descrita anteriormente, ha sido aplicado exitosamente a problemas de capa de frontera en dos dimensiones, flujo en ductos, flujos de recirculación, y también en problemas de capa de frontera en tres dimensiones, flujos confinados y jets⁴⁸.

CAPITULO CUATRO
DISCRETIZACION DE LA ECUACION DE
TRANSFERENCIA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.1.-Solución de la ecuación de transferencia.

El resolver las ecuaciones de transferencia que son del tipo de ecuaciones diferenciales parciales de varias variables se hace de dos maneras principalmente: el método analítico y el método numérico.

El método analítico implica obtener una solución matemática exacta a la ecuación de transferencia.

Aunque se dispone de varias técnicas para resolver estas ecuaciones, las soluciones implican típicamente series y funciones matemáticas complicadas que es posible obtener sólo para un conjunto restringido de geometrías simples y condiciones de frontera.

Estas soluciones son de un valor considerable, puesto que la variable dependiente se determina como una función continua de las variables independientes. Siendo útil para el cálculo de la variable dependiente en cualquier punto de interés en el medio.

Una solución analítica de un problema de conducción de calor debe satisfacer tanto la ecuación de transferencia como las condiciones limitantes especificadas por las condiciones físicas del problema particular.

Un ejemplo del método analítico es el método de separación de variables. Existen problemas que implican geometrías y condiciones de frontera complejas, o propiedades variables que no es posible resolver de manera analítica, la opción es resolverlos mediante métodos de análisis numérico.

Los métodos de solución analítica resuelven las ecuaciones diferenciales correspondientes, proporcionando una solución para cada punto de espacio y tiempo dentro de los límites del problema. Por el contrario, los métodos numéricos proporcionan soluciones solamente para puntos discretos de los límites del problema y ofrecen una aproximación extremadamente precisa de la solución exacta.

El primer paso en cualquier análisis numérico debe ser, por lo tanto, seleccionar estos puntos. Esto se hace al subdividir el medio de interés en un número de pequeñas regiones y asignar a cada una un punto de referencia en su centro^{17, 31}. El punto de referencia suele denominarse punto

nodal (o simplemente nodo), y el agregado de puntos se conoce como red nodal, malla o rejilla como se muestra en la figura 4.1.

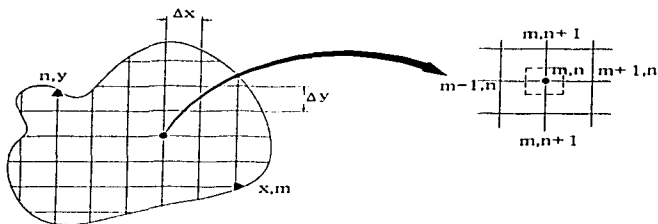


Figura 4.1. División del sistema de estudio en puntos discretos donde se aprecia la distribución de la malla.

La selección de puntos nodales rara vez es arbitraria y, a menudo, depende de cuestiones como la conveniencia geométrica y la precisión que se desea. La precisión deseada de los cálculos depende en gran medida del número de puntos nodales designados.

Si este número es grande (una malla fina) es posible obtener soluciones extremadamente precisas.

Al ocuparse de la solución para un número finito de puntos discretos, el método se simplifica, al resolver ahora un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas, en vez de la ecuación diferencial. Además de reemplazar la ecuación diferencial con un sistema de ecuaciones algebraicas, proceso llamado discretización, existen otras consideraciones importantes para una solución numérica completa. Una de ellas es el discretizar las condiciones a la frontera o iniciales especificadas para el problema. La otra consideración a tener en cuenta es que, como aproximación de la solución exacta, el método numérico introduce errores en la solución, por ello se debe saber cómo calcular y reducir al mínimo estos errores. Por último, en algunas condiciones el método numérico puede tener una solución que oscila en el tiempo o en espacio, por lo que resulta necesario conocer cómo evitar estos problemas de estabilidad.

Existen varios métodos para discretizar las ecuaciones diferenciales de transferencia. Entre ellos se cuentan los de diferencias finitas, el elemento finito y el de volumen de control; cada uno de ellos tiene sus ventajas y desventajas.

4.2.-Método de diferencias finitas.

La diferenciación numérica o aproximación por diferencias, se utiliza para evaluar las derivadas de una función por medio de sus valores dados en los puntos de una retícula.

La aproximación por diferencias finitas de una ecuación diferencial parcial consiste de aproximar las derivadas en la ecuación diferencial parcial vía una serie de Taylor truncada^{12, 25, 28}.

Existen tres tipos de enfoque para obtener aproximaciones por diferencias. El primero se basa en el desarrollo de Taylor de la función alrededor de un punto de la retícula, el segundo utiliza los operadores de diferencia y el tercero deriva los polinomios de interpolación²⁸.

En este caso nos referiremos al esquema de diferencias finitas mediante el desarrollo de Taylor por simplicidad.

4.2.1.-Aproximación por el desarrollo de Taylor.

Para una derivada de orden p , el número mínimo de datos necesario para obtener una aproximación por diferencias finitas es $p+1$. Por ejemplo, una aproximación por diferencias para la primera derivada de una función necesita al menos dos puntos.

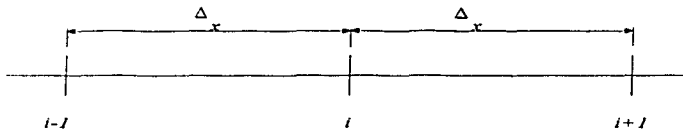


Figura 4.2. Nodos para el desarrollo de Taylor en una dimensión.

Considerando los puntos de malla en la figura 4.2. Para el punto 2, localizado entre los puntos 1 y 3, tal que, el desarrollo de Taylor de $f(i+1)$ alrededor de x_i es

$$f(i+1) = f(i) + hf'(i) + \frac{h^2}{2} f''(i) + \frac{h^3}{6} f'''(i) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(i) \quad (4.1)$$

Al despejar $f'(i)$ en la ecuación (4.1) se obtiene

$$f'(i) = \frac{f(i+1) - f(i)}{h} - \frac{1}{2} hf''(i) - \frac{1}{6} h^2 f'''(i) - \dots \quad (4.2)$$

Si truncamos después del primer término, obtenemos

$$f'(i) = \frac{f(i+1) - f(i)}{h} + O(h) \quad (4.3)$$

donde

$$O(h) = -\frac{1}{2} hf''(i) - \frac{1}{6} h^2 f'''(i) - \dots \quad (4.4)$$

$O(h)$ es el error de truncamiento, ya que estos términos se anulan muy rápido cuando h decrece.

El término $O(h)$ indica que el error es aproximadamente proporcional al intervalo h de la retícula.

A la ecuación (4.3) se le conoce como la aproximación por diferencias hacia adelante.

Ahora el desarrollo de $f(i-1)$ alrededor de x_i , esta dado de la siguiente forma

$$f(i-1) = f(i) - hf'(i) + \frac{h^2}{2} f''(i) - \frac{h^3}{6} f'''(i) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(i) - \dots \quad (4.5)$$

despejando $f'(i)$, se obtiene lo siguiente

$$f'(i) = \frac{f(i) - f(i-1)}{h} + O(h) \quad (4.6)$$

donde

$$O(h) = \frac{1}{2}hf''(i) - \frac{1}{6}h^2f'''(i) + \frac{1}{24}h^3f''''(i) - \dots \quad (4.7)$$

Siendo la ecuación (4.6) la aproximación en diferencias hacia atrás.

Pero restando las ecuaciones (4.6) y (4.3), obtenemos

$$f(i+1) - f(i-1) = 2hf'(i) + \frac{1}{3}h^3f'''(i) + \dots \quad (4.8)$$

despejando de aquí $f'(i)$ tenemos

$$f'(i) = \frac{f(i+1) - f(i-1)}{2h} - \frac{1}{6}h^2f'''(i) + \dots \quad (4.9)$$

Y expresándola de la siguiente forma obtenemos la aproximación por diferencias centrales.

$$f'(i) = \frac{f(i+1) - f(i-1)}{2h} + O(h^2) \quad (4.10)$$

donde

$$O(h) = -\frac{1}{6}h^2f'''(i) \quad (4.11)$$

Se observa que, debido a la cancelación del término $f''(i)$, el error de aproximación por diferencias centrales es proporcional a h^2 en vez de h .

Al decrecer h , el error decrece más rápido que en las otras dos aproximaciones.

Como se dijo antes, una aproximación por diferencias de $f^{(p)}(i)$ necesita al menos $p+1$ puntos. Si se utilizan más datos, se puede obtener una aproximación por diferencias más exactas.

Para la segunda derivada pasa exactamente lo mismo, y en el caso de la aproximación por diferencias hacia delante queda de la siguiente forma.

$$f''(i) = \frac{f(i+2) - 2f(i+1) + f(i)}{h^2} + O(h) \quad (4.12)$$

donde

$$O(h) = -hf'''(i) \quad (4.13)$$

Y en el caso de la aproximación por diferencias centrales

$$f''(i) = \frac{f(i+1) - 2f(i) + f(i-1)}{h^2} + O(h^2) \quad (4.14)$$

donde:

$$O(h^2) = -\frac{1}{12}h^2 f''''(i) \quad (4.15)$$

La sustitución de tales expresiones en la ecuación diferencial lleva a la ecuación en diferencias finitas.

Ejemplificando la discretización por el método de diferencias finitas aplicado a un problema de conducción de calor, el cual se rige por la ecuación de transferencia de energía, la cual contiene términos en derivadas parciales¹⁷.

Considerando régimen permanente en dos dimensiones sin generación y con una conductividad térmica constante, la ecuación que rige el sistema es de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4.16)$$

Discretizando el sistema de acuerdo con la figura 4.3 en coordenadas rectangulares.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

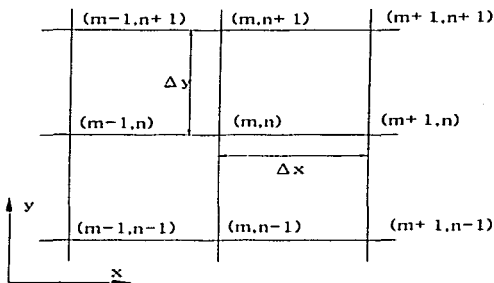


Figura 4.3. Nodos para un sistema en dos dimensiones en coordenadas rectangulares.

Utilizando la ecuación (4.14) para aproximar las derivadas:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \quad (4.18)$$

Sustituyendo (4.17) y (4.18) en (4.16) queda de la siguiente manera:

$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (4.19)$$

Con una red para la que $\Delta x = \Delta y = 1$ tenemos que:

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{m,n} = 0 \quad (4.20)$$

Esta forma aproximada en diferencias finitas de la ecuación de calor se aplica a cualquier nodo interior que sea equidistante de sus cuatro nodos vecinos. Simplemente requiere que la suma de las temperaturas asociadas con los nodos vecinos sea cuatro veces la temperatura de interés, claro esta

que el ejemplo utilizado aquí contiene muchas simplificaciones y la ecuación discretizada resultante por lo tanto es muy simple, logrando con esto mostrarnos algo tan sencillo.

4.2.2.-La ecuación de transferencia a régimen no permanente.

Dentro de los problemas de transferencia los que están a régimen no permanente son los más difíciles de resolver, ya que no solo se busca conocer las incógnitas en el espacio sino también su desarrollo en el tiempo, mediante el desarrollo de Taylor se distinguen dos metodologías para la solución de este tipo de problemas; el método explícito y el método implícito, que a continuación se explican brevemente^{17, 19}.

4.2.2.-Método explícito.

Considerando un problema de conducción de calor unidimensional, el cual se encuentra a régimen transiente con propiedades constantes y sin generación interna de energía, esta gobernada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.21)$$

Para obtener la forma en diferencias finitas de esta ecuación, podemos usar la aproximación de Taylor por diferencias centrales. Sin embargo, además de discretizarse en el espacio, el problema debe discretizarse en el tiempo. La parcial respecto al tiempo en forma de diferencias finitas queda de la siguiente manera:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{m,n} \approx \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} \quad (4.22)$$

El superíndice p se utiliza para denotar la dependencia con respecto al tiempo de T , y la derivada con respecto al tiempo se expresa en términos de la diferencia en temperaturas asociadas con el tiempo nuevo $p+1$ y el tiempo anterior p . Por ello los cálculos deben llevarse a cabo en tiempos sucesivos y separados por el intervalo Δt , y como una solución en diferencias finitas restringe la determinación de temperaturas a puntos discretos en el espacio, también la restringe a puntos discretos en el tiempo.

El término dependiente del tiempo es discretizado en una manera "hacia adelante" en el tiempo. Este método es referido también como una técnica de Euler hacia adelante.

Sustituyendo la ecuación (4.22) y (4.12) en la ecuación (4.21) queda

$$\frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{m+1}^p - 2T_m^p + T_{m-1}^p}{(\Delta x)^2} \quad (4.23)$$

$$T_m^{p+1} - T_m^p = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{m+1}^p - 2T_m^p + T_{m-1}^p) \quad (4.24)$$

$$T_m^{p+1} = T_m^p + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{m+1}^p - 2T_m^p + T_{m-1}^p) \quad (4.25)$$

Como podemos ver en la ecuación (4.25). En el método explícito, todas las temperaturas se evalúan en un tiempo anterior p y se tiene que solo un término es desconocido, el término T_m^{p+1} siendo directo el cálculo de este término.

La mayor desventaja del método explícito es el paso en el tiempo, Δt , que debe ser restringido mediante requerimientos de estabilidad numérica. Una característica inconveniente del método explícito es que no es incondicionalmente estable. En un problema a régimen transiente, la solución para las temperaturas nodales deben aproximarse de forma continua a los valores finales al aumentar el tiempo.

Sin embargo con el método explícito esta solución se caracteriza por oscilaciones numéricas, que son físicamente imposibles. Las oscilaciones se vuelven inestables, lo que ocasiona que la solución difiera de las condiciones de estado estable reales. Para evitar este tipo de resultados erróneos, el valor establecido de Δt debe de mantenerse por debajo de cierto límite, el cual depende de Δx y otros parámetros del sistema. Esta dependencia se denomina criterio de estabilidad y se obtiene matemáticamente.

4.2.2.2.-Método implícito.

El método explícito sufre de limitaciones en la selección de Δt . Para un incremento de espacio dado, el intervalo de tiempo debe ser compatible con los requisitos de estabilidad. Con frecuencia, ésta dicta el uso de valores extremadamente pequeño de Δt , y se necesita un número muy grande de intervalos de tiempo para obtener una solución.

Considerando un problema de conducción de calor unidimensional. Que es gobernado por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.26)$$

La forma implícita de una ecuación en diferencias finitas se deriva del uso de la ecuación (4.12) y (4.2) en la ecuación

$$\frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{m+1}^{p+1} - 2T_m^{p+1} + T_{m-1}^{p+1}}{(\Delta x)^2} \quad (4.27)$$

y esta es la forma de la ecuación ya discretizada, donde se evalúan todas las temperaturas en el nuevo tiempo ($p+1$) en lugar del tiempo (p). Se considera entonces que la ecuación (4.27) proporciona una aproximación en diferencias hacia atrás para la derivada con respecto al tiempo.

Reacomodando la ecuación (4.27)

$$T_m^p = T_m^{p+1} - \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{m+1}^{p+1} - 2T_m^{p+1} + T_{m-1}^{p+1}) \quad (4.28)$$

$$T_m^p = \left[1 + \frac{2\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] T_m^{p+1} - \left[\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] T_{m+1}^{p+1} - \left[\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] T_{m-1}^{p+1} \quad (4.29)$$

En la ecuación (4.29) la temperatura nueva en el nodo (m, n) depende de las temperaturas nuevas de sus nodos contiguos que, en general, se desconocen. Por tanto, para determinar las temperaturas nodales deben resolverse simultáneamente. La solución consecutiva implicaría entonces resolver de forma simultánea las ecuaciones nodales en cada tiempo $t = \Delta t, 2\Delta t, \dots$ hasta que se alcanza el tiempo final deseado.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Con relación al método explícito, la formulación implícita tiene la ventaja importante de ser incondicionalmente estable.

Es decir, la solución permanece estable para todos los intervalos de espacio y tiempo, en cuyo caso no hay restricciones en Δx y Δt .

Como los valores más grandes de Δt pueden utilizarse, por tanto, con un método implícito, los tiempos de cálculo suelen reducirse con poca pérdida de precisión.

No obstante, para maximizar la precisión, Δt debe ser suficientemente pequeña para asegurar que los resultados sean independientes de reducciones adicionales en su valor.

4.2.2.3.-Crank-Nicolson.

El método de Crank-Nicolson es un esquema implícito que promedia los nuevos y viejos valores en el tiempo. La ecuación en diferencias finitas es

$$\frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2(\Delta x)^2} [(T_{m+1}^{p+1} - 2T_m^{p+1} + T_{m-1}^{p+1}) + (T_{m+1}^p - 2T_m^p + T_{m-1}^p)] \quad (4.30)$$

Existen 3 valores desconocidos como en el método implícito, T_{m+1}^{p+1} , T_m^{p+1} y T_{m-1}^{p+1} . En este caso, promediamos los valores desconocidos (implícitos) con los valores previamente calculados (explícitos) en la misma localización nodal. Este promediado nos da una solución que es incondicionalmente estable en el tiempo, con la ventaja de que es muy preciso.

4.3.-Método del elemento finito.

El procedimiento emplea subdivisiones del dominio solución en muchas pequeñas regiones de intervalo definido, como triángulos o cuadrados, y usa una teoría de aproximación para cuantizar el comportamiento en cada elemento finito.

Las coordenadas disponibles son especificadas para cada elemento, y la acción de la ecuación diferencial es reemplazada aproximadamente usando valores de las variables dependientes en estos nodos. Usando un principio variacional, o un método pesos-residuales, las ecuaciones gobernantes

diferenciales son entonces transformadas en ecuaciones del elemento finito para cada elemento aislado. Estas ecuaciones locales son reunidas en un sistema de ecuaciones algebraicas incluyendo su propia colección de condiciones a la frontera. Los valores nodales de las variables dependientes son determinados de la solución de un sistema de ecuaciones.

4.4.-Método del volumen de control.

Un método numérico que se encuentra entre el convencional diferencias finitas y el elemento finito es el método del volumen de control. En alguna forma, este método tiene más aproximación que el método de diferencias finitas, pero tiene la flexibilidad del método del elemento finito³⁵.

En este esquema en particular, la ecuación diferencial es integrada en el intervalo $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$, donde x_i es el nodo localizado en el centro de la malla.

Para ilustrar el método, consideraremos una ecuación diferencial simple:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d\phi}{dx} - \phi = 0 \quad (4.31)$$

integrando en el intervalo $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{d\phi}{dx} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi dx = 0 \quad (4.32)$$

resolviendo se obtiene

$$\frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} + \phi \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi dx = 0 \quad (4.33)$$

los términos en la derivada son aproximados usando una diferencial central y queda como:

$$\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\phi_{i+1} + \phi_i}{2} - \frac{\phi_i + \phi_{i-1}}{2} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi dx = 0 \quad (4.34)$$

donde $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{(\phi_{i+1} + \phi_i)}{2}$, etc.

Se evalúa la integral restante conteniendo ϕ usando la regla trapezoidal:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \phi dx = \frac{\Delta x}{8} (\phi_{i-1} + 6\phi_i + \phi_{i+1}) \quad (4.35)$$

sustituyendo la ecuación (4.34) en la ecuación (4.35) y combinando todos los términos, nos da la expresión final,

$$\frac{1}{8} (\phi_i + 6\phi_i + \phi_{i+1}) + \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (4.36)$$

si el valor de ϕ es uniformemente distribuido en el volumen de control, la ecuación (4.34) se reduce exactamente a la forma en diferencias central.

La mejora en el método del volumen de control se debe principalmente a su habilidad para aproximar una distribución en un intervalo finito mediante una malla no uniforme. La discretización del término que incluye el tiempo sigue exactamente como en el método de diferencias finitas.

4.5.-Otros métodos.

Esquemas compactos como son el de Padé, Chapeau y Splines Cúbicos, recientemente han emergido como esquemas competitivos³⁵.

Los métodos compuestos requieren solo una solución de una matriz triagonal. Además de poder ser derivados de varias formas.

En la técnica del spline cúbico, una formula implícita de tres puntos son usadas para evaluar la primera y segunda derivada de ϕ .

La ecuación $\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$ es expresada como $\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + u\phi' - D\phi'' = 0$

donde ϕ' es la primera derivada y ϕ'' es la segunda derivada. La expresión para ϕ' y ϕ'' puede ser derivada de la clásica aproximación de diferencias finitas mediante un polinomio de tercer grado como lo es el spline cúbico.

El método de Chapeau es actualmente basado en un elemento finito lineal ensamblado en dos elementos adyacentes. La ecuación resultante tiene la apariencia de una expresión en diferencias finitas implícita. Sin embargo, la región a ser modelada debe ser regular, un caso común en los métodos clásicos de diferencias finitas.

4.6.-Métodos de solución de las ecuaciones discretizadas.

La derivación de las ecuaciones y su solución puede considerarse como dos funciones distintas y no hay necesidad de influenciar el uno con el otro. En un programa de computadora, las dos opciones pueden realizarse convenientemente en secciones separadas, y cada sección puede ser independientemente modificada.

Así podemos obtener las ecuaciones discretizadas multidimensionales por una extensión de la situación en una dimensión.

Un procedimiento que no puede ser fácilmente extendido a múltiples dimensiones es el algoritmo de matriz tridiagonal (TDMA).

El resolver un sistema de ecuaciones algebraicas se hace de dos formas:

- 1) Métodos directos (es decir, aquellos que no requieren iteraciones), para resolver las ecuaciones algebraicas en 2 ó 3 dimensiones son mucho más complicados y requieren de grandes cantidades de almacenamiento y tiempos muy largos. Para un problema lineal, requiere la solución de las ecuaciones algebraicas solo una vez, un método directo puede ser aceptable; pero un problema no lineal, requiere que sea resuelto repetidamente con actualización de coeficientes y el uso de los métodos directos es usualmente antieconómico.
- 2) La alternativa son los métodos iterativos para la solución de ecuaciones algebraicas. Este método inicia con valores supuestos de la variable incógnita y se usan las ecuaciones algebraicas para obtener valores más cercanos a la solución. Sucesivas repeticiones del algoritmo finalmente llevan a una solución que es suficientemente próxima a la solución correcta de las ecuaciones algebraicas.

Los métodos iterativos requieren muy pequeñas cantidades de almacenamiento en la computadora, y son muy usados para problemas no lineales.

Con un grupo de valores supuestos y algunas iteraciones las ecuaciones pueden converger a la solución.

Existen muchos métodos iterativos para resolver un sistema de ecuaciones algebraicas entre los que podemos destacar el método de Gauss-Jordan, el algoritmo de la matriz tridiagonal (TDMA) y el método de Gauss-Siedel.

4.6.1.-El método de Gauss-Siedel.

En este método los valores de las variables son calculados en cada punto en cierto orden y solo un grupo de esos valores son almacenados en la computadora.

En el inicio estos son los valores supuestos o los valores de las iteraciones previas. Como cada punto es calculado independiente entonces el valor nuevo es almacenado en lugar del valor supuesto o de la iteración previa, siendo actualizado conforme se van calculando los valores. Cuando todos los puntos de malla han sido calculados de esta manera, una iteración del método de Gauss-Siedel ha sido completada.

Para ilustrar el funcionamiento del método de Gauss-Siedel consideremos las siguientes ecuaciones:

$$P1 = 0.4P2 + 0.2 \quad (4.35)$$

$$P2 = P1 + 1 \quad (4.36)$$

y su solución con este método será:

Número de iteración	0	1	2	3	4	5	n
P1	0	0.2	0.68	0.872	0.949	0.980	1.0
P2	0	1.2	1.68	1.872	1.949	1.980	2.0

Como podemos ver iniciamos las iteraciones con valores arbitrarios supuestos para aproximarnos a la solución, la cual después de n iteraciones convergerá a la solución de estas ecuaciones.

CAPITULO CINCO
PROBLEMA DE EJEMPLO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

5.1.-Problema de ejemplo.

El sistema a modelar dentro del proceso del horno oxidópula, se encuentra justo después del crisol, el cual tiene la función de separar las dos fases (el arrabio y la escoria) líquidas.

Como podemos ver en la figura 5.1 el sifón es un recipiente cilíndrico que opera a presión interna.

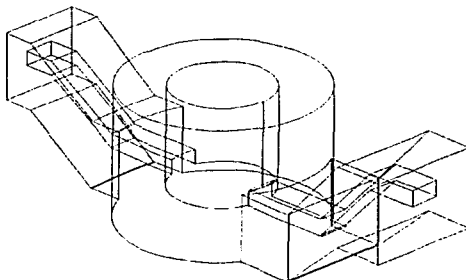


Figura 5.1. Separador líquido-líquido, mostrando las salidas del arrabio y de la escoria, la alimentación se lleva a cabo por la parte superior.

En el vaciado del crisol al sifón la velocidad es muy baja, haciendo que el chorro de metal fundido caiga como una corriente compacta a través de la capa de escoria, impactando al fondo del sifón.

El impacto con el sifón no ocurre en el centro, este es más bien desplazado hasta unos cuantos centímetros de la pared.

Cuando la corriente líquida sale de la piquera, su velocidad vertical es aumentada por la aceleración gravitacional, produciendo un flujo turbulento en el baño líquido.

Después de la penetración del chorro líquido a través de la capa de escoria, comienza la separación de las escorias emulsionadas, provocando cierta turbulencia en el baño de escoria.

Durante el proceso de llenado del sifón a presión, las partículas líquidas de escoria son emulsionadas en el arrabio líquido, como resultado de las condiciones de flujo que ocurren en el metal fundido.

Cuando se está llenando el sifón, que actúa como una superficie de impacto, transformando la velocidad axial en velocidad radial. Este proceso desarrolla una región de recirculación (remolinos), cuya expansión espacial alcanza un máximo a medida que el nivel del líquido en el sifón aumenta. En este punto, la relación entre el nivel del líquido y el diámetro del sifón es muy próximo a $H/D = 0.5$. A medida que el nivel del líquido rebasa esta relación, la estructura de los remolinos se perturba. Se forman pequeñas áreas de recirculación en la parte cercana a la superficie libre, mientras el remolino pierde intensidad.

El proceso de separación de las gotas de escoria emulsionadas que acompañan al arrabio en la corriente de entrada, está ligado íntimamente a las características del flujo mencionado. Puede esperarse que mientras el llenado del sifón se realiza, las gotas de escoria se encuentran inicialmente en el remolino, circulando junto con el arrabio. Una vez que se rebasa la relación $H/D = 0.5$, la separación de la escoria es facilitada por las perturbaciones y pérdida de intensidad de las turbulencias.

La eficiencia de esta operación es controlada, a menudo, por las velocidades de los procesos de transferencia de masa y calor, y está muy relacionado con la naturaleza del flujo de la emulsión de escoria y arrabio dentro del sifón. Consecuentemente, un conocimiento detallado de los parámetros de flujo (distribución espacial de los componentes de velocidad, energía cinética turbulenta y su disipación) es un prerrequisito para un análisis significativo y eficiente del proceso.

Las altas temperaturas de operación junto con la opacidad del arrabio, y el hermetismo del sifón hacen que la experimentación directa en el recipiente sea virtualmente imposible, para una observación visual directa.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

5.2.-Suposiciones.

- a) El proceso es a régimen permanente. Después de un pequeño período inicial, los parámetros del proceso no cambian respecto al tiempo.
- b) La escoria y el arrabio forman una sola fase continua.
- c) La fase continua es incompresible y es un fluido Newtoniano.
- d) La pérdida de calor por radiación es despreciable.
- e) El flujo es totalmente turbulento
- f) En la pared es impuesta la condición de no deslizamiento
- g) La velocidad de impacto del chorro de arrabio es regido por la ecuación de caída libre y por simplicidad se considera que el impacto del chorro de metal líquido da justo en el centro geométrico de la base del separador.

5.3.-Condiciones a la frontera.

Eje de simetría.

En el eje de simetría la velocidad en dirección radial es cero, siendo la velocidad en dirección axial calculada mediante la ecuación de caída libre, la pérdida de energía por disipación hacia el aire por el chorro de arrabio es despreciable entonces y todas las variables restantes son cero en el eje de simetría.

Superficie y piso del cilindro.

En el piso y la pared del sifón, la condición de no deslizamiento es aplicado.

Superficie del cilindro.

En la superficie del cilindro se diferencian dos tipos de condiciones.

La primera de $0 \leq r \leq R_{\text{chorro}}$ donde la velocidad en dirección axial esta dada por la ecuación de caída libre, y la temperatura es la misma que la temperatura de impacto esto es: $T = 2073.15 \text{ K}$ en el eje de simetría y las otras variables tienen un valor de cero en esa zona.

La segunda condición de $R_{chom} \leq r \leq R_{afin}$ que utiliza la condición de no deslizamiento entonces u , v , k y ε tienen un valor de cero en la superficie del fluido, y su correspondiente temperatura es de 1873.15 K.

5.4.—Ecuaciones gobernantes.

Las ecuaciones que rigen el sistema, son la ecuación de continuidad, la ecuación de transferencia de momentum, la ecuación de transferencia de energía y para modelar la turbulencia se usa el modelo de dos ecuaciones de la turbulencia de Jones y Launder, en el que se modela la turbulencia mediante una ecuación de transferencia de la energía cinética turbulenta y otra para su disipación.

Todas las ecuaciones son mostradas considerando que el movimiento se lleva a cabo en dos dimensiones en la dirección radial y axial, suponiendo poco significativa la contribución del componente tangencial. Además, se considera que el sistema se encuentra a régimen permanente.

Ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0 \quad (5.1)$$

Ecuación de transferencia de momentum en dirección axial.

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v u) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \rho g_z \quad (5.2)$$

Ecuación de transferencia de momentum en dirección radial.

$$\rho \left[v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v v) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (5.3)$$

Ecuación de energía total.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho u T - \Gamma_{\sigma} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left[r \left(\rho v T - \Gamma_{\sigma} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (5.4)$$

5.6.-Modelo turbulento.

El modelo de 2 ecuaciones de la turbulencia de Jones y Launder fue usado para las consideraciones turbulentas^{31, 32, 48}.

Las ecuaciones de transporte turbulento constituido por la ecuación para la energía cinética, k y su disipación, ϵ son escritas como sigue:

Ecuación de energía cinética turbulenta:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho u k) + \frac{1}{r} (\rho v k) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_{\sigma}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) + S_k \quad (5.5)$$

donde S_k , es el término neto de generación, puede representarse como

$$S_k = G - \rho \epsilon \quad (5.6)$$

donde G , es el término de generación de la energía cinética turbulenta, y esta dado por:

$$G = \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (5.7)$$

La ecuación de rapidez de disipación de la energía cinética turbulenta ϵ :

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho u \epsilon) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v \epsilon) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_{\sigma}}{\sigma_{\epsilon}} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_{\sigma}}{\sigma_{\epsilon}} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) + S_{\epsilon} \quad (5.8)$$

donde S_{ϵ} esta dada por:

$$S_{\epsilon} = \frac{C_1 \epsilon G}{k} - \frac{C_2 \rho \epsilon^2}{k} \quad (5.9)$$

La viscosidad efectiva es calculada con la siguiente ecuación:

$$\mu_e = \mu_1 + \mu_2 \quad (5.10)$$

en la cual,

$$\mu_2 = \frac{C_\mu \rho k^2}{\epsilon} \quad (5.11)$$

las cinco constantes, en este modelo turbulento, tienen el siguiente valor:

$$C_1 = 1.44 \quad C_2 = 1.92 \quad C_\mu = 0.09 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

5.6.-Desarrollo del Método.

Para resolver el problema del separador líquido-líquido de arrabio y escoria, se utilizó el método de diferencias finitas desarrollado mediante la aproximación de Taylor, para la primera y segunda derivada; en donde la primera derivada se sustituyó usando la aproximación por diferencias hacia adelante además de la aproximación por diferencias hacia atrás, se considero la aproximación por diferencias centrales en el caso de la segunda derivada; desarrollando los términos para los puntos cercanos al nodo central obtenemos una ecuación de transferencia discretizada (procedimiento mostrado en el apéndice A1), esta solo es la forma general mientras que para el modelado matemático se exige tenerla en su forma puntual; esto se hace al sustituir el valor de los nodos (i,j) en cada una de las ecuaciones discretizadas con sus correspondientes nodos de los alrededores para obtener una ecuación de transferencia discretizada mediante diferencias finitas para cada punto de la malla, este procedimiento nos genera tantas ecuaciones como puntos nodales se consideren y que además tenemos que resolver de manera conjunta, este procedimiento nos genera una matriz de tamaño $((n * m) - 1)^2$ (donde n es el número de nodos en dirección radial y m es el número de nodos en dirección axial), iterando las ecuaciones discretizadas utilizando el método de Gauss-Siedel punto por punto, en donde después de calcular el nuevo valor de cada nodo es actualizado para utilizarlo en el cálculo del próximo nodo reduciendo mediante este procedimiento el tiempo de cómputo, acelerando la convergencia de la solución.

5.7.-Discretización del sistema.

Para la discretización del sistema, se considera al separador líquido-líquido como un recipiente cilíndrico, el cual es discretizado como se muestra en la figura 5.2.

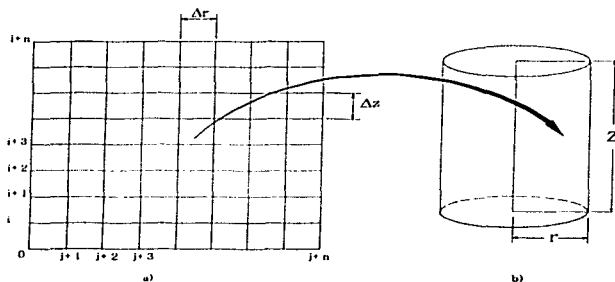


Figura 5.2. División del sistema para la discretización de las ecuaciones de transferencia. a) Ubicación de los puntos nodales en la malla, b) Sifón de forma cilíndrica mostrando la ubicación de la malla.

Para la discretización del sistema se considera que los nodos 1's se encuentran en el piso del recipiente en el caso de la coordenada z , y cerca del eje de simetría para el caso de la coordenada radial; la división del sistema se realiza en puntos discretos escogiendo el mismo número de divisiones en el radio y la altura si así se desea.

Por la suposición de que el sistema es simétrico y por el impacto del chorro de entrada que ocurre sobre el eje de simetría del cilindro, solo se discretiza un cuarto del sistema, por supuesto considerando que la contribución de la coordenada θ en el sistema es despreciable, solo se discretizó el sistema en dirección radial y axial.

En este ejemplo analizado el número máximo de divisiones es de 17 para el radio y 17 para la altura.

Las ecuaciones diferenciales parciales se convierten en ecuaciones algebraicas utilizando el método de diferencias finitas, que nos genera un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que se resuelven por un método iterativo en este caso el método de Gauss-Siedel, detalles de este método pueden encontrarse en Patankar [1980].

5.8.-Implementación de un programa de cómputo.

Después de llegar a las ecuaciones (A1-3), (A1-7), (A1-11), (A1-16) y (A1-20) refiriéndonos al apéndice A1-1; el diagrama de flujo de la figura 5.3 representa la forma de desarrollar el programa de cómputo, el que fue escrito en el lenguaje Fortran, encontrado en el apéndice A2-1 de este trabajo el listado del código fuente.

Este diagrama ilustra el uso del método de diferencias finitas para la solución de un problema de flujo turbulento, aplicado al problema de ejemplo descrito en la sección 5.1.

Dando por obvia la declaración de variables, en el diagrama de flujo podemos distinguir entre los primeros pasos la parte de introducción de datos teniendo entre las opciones el poder elegir las divisiones en el sentido radial y axial; aclarando, las divisiones se hacen en números enteros que van desde 2 divisiones radiales y 2 divisiones axiales hasta 17 divisiones en sentido radial y 17 en el sentido axial, también podemos elegir la longitud del cilindro así como su diámetro además de poder especificar el diámetro del chorro de metal líquido que impacta con el sistema, para poder apreciar las iteraciones realizada por el programa las cantidades calculadas se almacenan en un archivo de datos de nombre resultado.dat, la inicialización de las variable no se considera un paso del programa en particular, mas bien se considera un paso general dentro de los procedimientos Fortran y aquí no se considera dentro del diagrama de flujo.

Las condiciones a la frontera aplicadas para el sistema que se analiza nos permiten llegar a la solución particular y estas se deben adicionar al cuerpo del programa de forma también discretizadas, estas se aplican mucho antes de que el programa comience con las iteraciones y solo se realiza una sola vez, las condiciones a la frontera para la velocidad a la que impacta en el fondo del cilindro el chorro de metal líquido se considera obedece la fórmula de caída libre.

Las propiedades físicas se calculan en base a los valores actuales de la temperatura, los principales cálculos en este paso son: el cálculo de la densidad de la fase continua, el cálculo de la viscosidad efectiva se obtiene adicionando la viscosidad laminar y la viscosidad turbulenta, se asume que la viscosidad laminar en este caso se

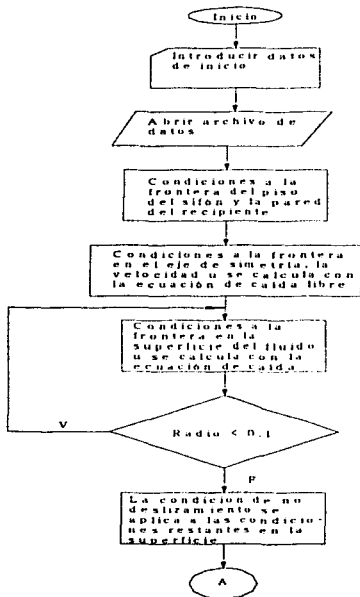
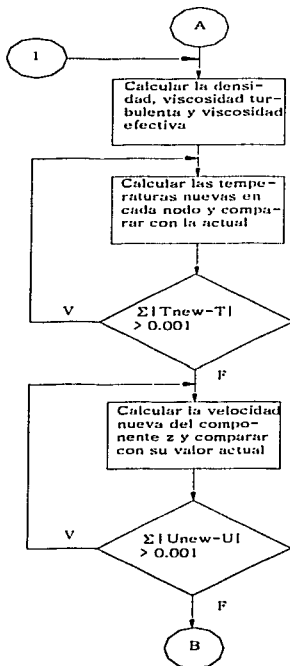


Figura 5.3. Diagrama de flujo para el desarrollo del programa en Fortran.

considera como una constante que corresponde al valor de la viscosidad laminar del acero a 1800 °C [Szekely, 1980], el valor de la viscosidad turbulenta es función de la energía cinética



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 5.3. Diagrama de flujo para el desarrollo del programa en Fortran (continuación).

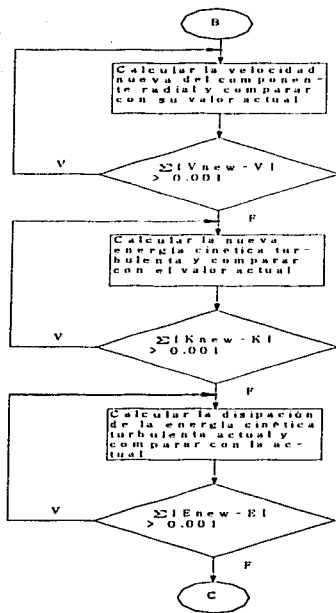


Figura 5.3. Diagrama de flujo para el desarrollo del programa en Fortran (continuación).

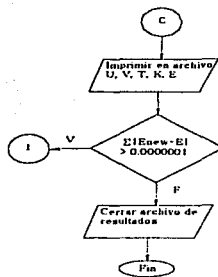


Figura 5.3. Diagrama de flujo para el desarrollo del programa en Fortran (continuación).

turbulenta y de la disipación de la energía cinética turbulenta que se actualiza en cada iteración global.

Las temperaturas se calculan de forma puntual, esto es se calcula el nuevo valor de cada nodo y después de hacer una comparación con el valor anterior se actualiza, para usarse en el cálculo del próximo nodo y así sucesivamente hasta terminar con el último nodo; dentro de estos cálculos se usa un término que compara los valores actuales con los valores anteriores, este funciona como una condición para decidir cuando detener las iteraciones, esto se realiza cuando los valores actuales y los anteriores posea una pequeña diferencia que podemos definir dentro del programa el control del programa pasa al cálculo de la próxima ecuación.

Después de calcular las temperaturas, se actualiza esta para calcular el valor de la velocidad del componente axial. En el paso siguiente se calcula la velocidad del componente radial, este procedimiento y el cálculo del componente en dirección axial se realiza de la misma forma que en el caso de la temperatura con excepción de que para el cálculo de este componente de la velocidad se usa la ecuación de continuidad. Para cada ecuación de transferencia se realizan las iteraciones necesarias que cumplan con el factor de comparación que a nuestro criterio se considere cercano a los

valores reales, en estos pasos no se asignó un contador que permita conocer la cantidad de iteraciones individualmente realizadas para cada ecuación de transferencia.

Con los valores de la velocidad y de la temperatura ya actualizados se procede a calcular la energía cinética turbulenta y su disipación. Después de calcular todas estas cantidades la suma de las diferencias de las cantidades actuales y los valores anteriores es menor o igual a $1 \cdot 10^{-6}$ entonces se considera que se ha llegado a la convergencia en caso contrario el programa retorna hasta el cálculo de las propiedades físicas con los nuevos valores de la velocidad, la temperatura, la energía cinética turbulenta y su disipación y se calculan las nuevas propiedades que utilizaremos en la próxima iteración hasta convergencia.

Una iteración global se considera cuando se ha pasado por la ecuación de energía, por los componentes axial y radial de la velocidad, y por las ecuaciones de transferencia de la energía cinética turbulenta y su disipación entonces decimos que hemos realizado una iteración global.

El método iterativo usado para obtener las soluciones de las ecuaciones de transferencia para la temperatura, los componentes de la velocidad, la disipación de la energía cinética turbulenta y su disipación es el método de Gauss-Siedel punto por punto, el que se basa en obtener los valores de las variables en un solo punto a la vez que se actualiza después de cada iteración para el uso del cálculo del próximo punto obteniendo una convergencia rápida de las variables, reduciendo el tiempo de computo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

RESULTADOS Y ANÁLISIS
DE RESULTADOS

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

RESULTADOS.

En esta sección se presentan los resultados obtenidos para un separador líquido-líquido en las tablas R-1, R-2, R-3, R-4 y R-5. Estos resultados son obtenidos considerando un sistema discretizado de 17 nodos en dirección radial y 17 nodos en dirección axial, que después de 18 iteraciones globales realizadas por el programa cilindro (mostrando en el apéndice A2 el listado de este programa) en un tiempo de 10 minutos son almacenadas en el archivo datos.dat para una posterior consulta esto debido a la rapidez de los cálculos, permitiéndonos seguir el desarrollo de la convergencia de la solución.

En los resultados de estas tablas hacemos notar que los valores de las columnas de la izquierda corresponden a la parte central del sifón (es decir, al eje de simetría del recipiente) y que los valores de la columna del lado derecho corresponden a los valores en la frontera cercana a la pared del recipiente, obviamente los valores de la primera fila de la tabla corresponden a la superficie del fluido, y que los valores de la última fila corresponden al fondo del sifón.

En la descripción del flujo turbulento en este sistema el modelo de Jones y Launder es el que se considera, adicionándose a las ecuaciones de transferencia de momentum y de energía en flujo turbulento.

El sistema modelado posee la forma de un cilindro perfecto de dimensiones 1.5 m de alto por 0.5 m de radio, dentro del cual impacta un chorro de metal líquido más bien desplazado del centro el que se deja caer desde una altura de 2.0 metros que no recibe un impulso adicional y su velocidad de impacto se rige por la ecuación de caída libre, este chorro se considera que posee la forma de un cilindro de diámetro 0.20 m que para la solución de este sistema decimos que el impacto ocurre en el centro geométrico del fondo del cilindro.

Debido a la consideración de que el chorro impacta en el centro geométrico del recipiente y por simetría solo se consideró la mitad del sistema en la discretización, como bien se planteó antes la contribución en el sentido tangencial se considera despreciable, todas las ecuaciones consideran el sentido radial y el axial sus principales términos. Además de esta consideración se toma el sistema como una fase continua para no trabajar un sistema bifásico el cual complica la solución de este ejemplo, el sistema es adiabático lo que considera la pérdida de energía por radiación despreciable logrando de esta manera que no se utilice una ecuación más

para la solución de este sistema, el flujo está desarrollado, es totalmente turbulento y sus parámetros no cambian respecto al tiempo. En la pared y la superficie del líquido se aplica la condición de no deslizamiento lo que nos permite decir que las velocidades en cualquier dirección en este punto tienen el valor de cero.

Las condiciones a la frontera para este sistema deben discretizarse incluyéndose los valores puntuales para cada nodo localizado en la frontera del recipiente y para los nodos localizados en el eje de simetría.

La densidad es calculada de la siguiente fórmula:

$$\rho = 7010.0 - 0.0833 * (T - 1808.0)$$

[Szekely, 1988], la viscosidad efectiva se obtiene de la suma de la viscosidad turbulenta y la viscosidad laminar, donde a la viscosidad laminar se le asigna el valor de $0.0067 \frac{Kg}{m \cdot s}$ [Szekely, 1988].

Con todos estos parámetros, suposiciones y consideraciones se iteran las ecuaciones discretizadas utilizando el método de Gauss-Siedel, el porque del uso de este método para las iteraciones son varios: primero el método posee una rápida convergencia hacia la solución que disminuye el tiempo de cómputo, segundo como el sistema de ecuaciones algebraicas generado es una matriz de dominancia diagonal, el método aquí considerado almacena solo los valores distintos de cero disminuyendo la memoria necesaria para la ejecución del programa y por último la facilidad de programación de este método.

Para cada ecuación de transferencia se obtiene un sistema de ecuaciones de 289 ecuaciones con 289 incógnitas, iterando un sistema a la vez actualizando en cada iteración los valores de los puntos nodales hasta convergencia. Pasando al siguiente sistema de ecuaciones hasta lograr la convergencia de todos los valores incógnitas. Actualizando las propiedades físicas de cada punto nodal después de una iteración global permitiendo la aproximación a los valores reales a cada iteración. El número de iteraciones se decide en base un factor que compara los valores actuales con los valores anteriores decidiendo si su diferencia es menor o igual al error permitido concluir las iteraciones concluyendo la solución del problema de ejemplo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FALLA DE ORIGEN
 TEMA 10

17	-3.132092	-3.132092	-3.132092	0.00E+00	0.00E+00	-0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
16	-3.413118	-2.308434	-1.658356	-1.00716	-0.6562678	-0.4517176	-0.3249241	-0.2416912	-0.1843322	-0.143122	-0.1127811	-0.09E-02	-7.44E-02	-6.45E-02	-6.20E-02	-6.89E-02	0.00E+00	0.00E+00
15	-3.872704	-2.436923	-1.812859	-1.381563	-1.069425	-0.8371078	-0.661849	-0.5296594	-0.4197495	-0.333518	-0.2623561	-0.202448	-0.1507819	-0.1251215	-0.10E-02	-2.45E-02	0.00E+00	0.00E+00
14	-3.915115	-2.657839	-2.030088	-1.612918	-1.304383	-1.064296	-0.8712511	-0.7132234	-0.5814943	-0.4699762	-0.3742323	-0.2927555	-0.2165687	-0.1651033	-0.13E-02	-3.42E-02	0.00E+00	0.00E+00
13	-4.143368	-2.855224	-2.212223	-1.785497	-1.488205	-1.217778	-1.012872	-0.8411078	-0.6945333	-0.5678495	-0.4584328	-0.3578493	-0.2695226	-0.1895815	-0.11E-02	-4.87E-02	0.00E+00	0.00E+00
12	-4.359888	-3.02908	-2.364593	-1.923008	-1.593533	-1.323228	-1.116655	-0.9342008	-0.7768345	-0.6391292	-0.5171276	-0.4207851	-0.3094248	-0.2193899	-0.137299	-6.10E-02	0.00E+00	0.00E+00
11	-4.56877	-3.185833	-2.496503	-2.037545	-1.697397	-1.422781	-1.197163	-1.005344	-0.8260791	-0.6927662	-0.5625465	-0.4454154	-0.3331873	-0.2425549	-0.1526542	-6.99E-02	0.00E+00	0.00E+00
10	-4.782943	-3.326538	-2.619423	-2.136873	-1.787658	-1.496752	-1.281412	-1.081228	-0.8969327	-0.7335248	-0.5969593	-0.4781975	-0.3609926	-0.2682599	-0.1638846	-7.59E-02	0.00E+00	0.00E+00
9	-4.962272	-3.482264	-2.717915	-2.220339	-1.851552	-1.558447	-1.311895	-1.103662	-0.9228117	-0.76395	-0.621048	-0.4927931	-0.3762968	-0.2843078	-0.1708972	-7.94E-02	0.00E+00	0.00E+00
8	-5.134525	-3.585358	-2.811298	-2.299277	-1.911318	-1.604829	-1.351005	-1.135008	-0.9477826	-0.7828745	-0.6369437	-0.5037248	-0.3837278	-0.2743069	-0.1730174	-7.96E-02	0.00E+00	0.00E+00
7	-5.31072	-3.69588	-2.895196	-2.353949	-1.953695	-1.636631	-1.37292	-1.150139	-0.9578719	-0.7886609	-0.62974	-0.5043481	-0.382923	-0.2720669	-0.1702892	-7.64E-02	0.00E+00	0.00E+00
6	-5.491181	-3.79229	-2.948596	-2.38848	-1.971537	-1.641623	-1.372678	-1.142151	-0.9469398	-0.77521	-0.6246294	-0.4952024	-0.3999749	-0.2806894	-0.1680839	-6.88E-02	0.00E+00	0.00E+00
5	-5.684859	-3.883213	-2.973426	-2.38443	-1.949045	-1.627397	-1.329987	-1.099328	-0.9020867	-0.7331542	-0.585883	-0.4562269	-0.3432312	-0.2361912	-0.1415534	-5.48E-02	0.00E+00	0.00E+00
4	-5.807054	-3.889397	-2.934484	-2.308394	-1.85326	-1.522942	-1.224557	-0.996833	-0.8263957	-0.6485472	-0.5117775	-0.3929252	-0.2879872	-0.1942314	-0.1096784	-3.22E-02	0.00E+00	0.00E+00
3	-5.993326	-3.896252	-2.749398	-2.079443	-1.612778	-1.26995	-1.0087	-0.8329226	-0.6939563	-0.5041275	-0.3905076	-0.2933582	-0.2083653	-0.1326228	-6.38E-02	-1.98E-04	0.00E+00	0.00E+00
2	-6.115605	-3.322384	-2.123268	-1.478694	-1.07522	-0.8081926	-0.6177393	-0.4783677	-0.3714459	-0.2854327	-0.2165157	-0.1570522	-0.1046741	-5.88E-02	-1.11E-02	3.44E-02	0.00E+00	0.00E+00
1	-6.264164	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	

Tabla R-1. Resultados del programa del apéndice A2 que muestra la velocidad puntual para el componente z del sistema ejemplo discretizado de 17 por 17 nodos en dirección radial y axial respectivamente.

TESIS COM
 FALLA DE ORIGEN

17	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
16	0.00E+00	-2.74E-02	4.88E-02	0.1299342	0.2139627	0.265355	0.3428825	0.3813725	0.4287556	0.4255025	0.4317244	0.4293858	0.4264175	0.4229216	0.3765747	0.33924	0.00E+00
15	0.00E+00	-3.88E-02	-7.28E-02	0.1125715	0.192307	0.1924947	0.2233038	0.2492182	0.2698165	0.2837787	0.2916936	0.2945367	0.2922514	0.2854849	0.2747734	0.2605201	0.00E+00
14	0.00E+00	-3.29E-02	6.24E-02	-8.95E-02	0.1566457	0.1390068	0.1595664	0.1769959	0.1908254	0.2010375	0.2076707	0.2129582	0.2162691	0.2077789	0.2022011	0.1843225	0.00E+00
13	0.00E+00	-2.90E-02	5.32E-02	-7.43E-02	9.29E-02	0.1091715	0.1232278	0.1349765	0.1443646	0.1513871	0.1555488	0.1583355	0.1584104	0.1564035	0.1524442	0.146639	0.00E+00
12	0.00E+00	-2.61E-02	-4.67E-02	-6.39E-02	-7.82E-02	9.03E-02	0.1003664	0.1265668	0.1449734	0.1595817	0.1724738	0.1823078	0.1893505	0.1924786	0.1918768	0.1835365	0.00E+00
11	0.00E+00	-2.40E-02	-4.19E-02	-5.62E-02	-6.77E-02	-7.69E-02	-8.40E-02	-9.00E-02	-9.42E-02	-9.70E-02	-9.85E-02	-9.89E-02	-9.79E-02	-9.59E-02	-9.29E-02	-8.90E-02	0.00E+00
10	0.00E+00	-2.21E-02	-3.79E-02	-4.97E-02	-5.87E-02	-6.55E-02	-7.00E-02	-7.42E-02	-7.66E-02	-7.78E-02	-7.82E-02	-7.77E-02	-7.64E-02	-7.44E-02	-7.17E-02	-6.83E-02	0.00E+00
9	0.00E+00	-2.05E-02	-3.45E-02	-4.45E-02	-5.15E-02	-5.64E-02	-5.95E-02	-6.12E-02	-6.18E-02	-6.15E-02	-6.04E-02	-5.87E-02	-5.65E-02	-5.39E-02	-5.10E-02	-4.77E-02	0.00E+00
8	0.00E+00	-1.85E-02	-2.99E-02	-3.88E-02	-4.06E-02	-4.25E-02	-4.27E-02	-4.19E-02	-4.00E-02	-3.78E-02	-3.52E-02	-3.24E-02	-2.97E-02	-2.69E-02	-2.43E-02	-2.19E-02	0.00E+00
7	0.00E+00	-1.59E-02	-2.39E-02	-2.93E-02	-2.94E-02	-2.32E-02	-1.92E-02	-1.45E-02	-9.44E-03	-4.46E-03	-2.24E-04	4.45E-03	6.04E-03	1.12E-02	1.32E-02	1.45E-02	0.00E+00
6	0.00E+00	-1.19E-02	-1.34E-02	9.11E-03	-1.29E-02	6.43E-03	1.89E-02	2.89E-02	3.91E-02	4.78E-02	5.52E-02	6.11E-02	6.56E-02	6.85E-02	6.99E-02	6.99E-02	0.00E+00
5	0.00E+00	-4.29E-03	5.80E-03	2.33E-02	4.42E-02	6.59E-02	8.86E-02	0.1025841	0.1215506	0.1347778	0.1445913	0.1522122	0.1586124	0.1639793	0.1677973	0.1649172	0.00E+00
4	0.00E+00	1.38E-02	5.04E-02	9.52E-02	0.1402668	0.1815933	0.2171816	0.2482987	0.2689992	0.2853442	0.2961219	0.3016884	0.3021113	0.3005203	0.2947801	0.2893836	0.00E+00
3	0.00E+00	8.06E-02	0.1907864	0.2932821	0.3779585	0.443617	0.4918463	0.5254265	0.5464119	0.5537091	0.5591907	0.5544255	0.5435116	0.5261678	0.5093583	0.4883395	0.00E+00
2	0.00E+00	0.5537387	0.6430259	1.001945	1.068281	1.131001	1.145927	1.142291	1.125356	1.05875	1.064474	1.023758	0.9772127	0.9049331	0.8687729	0.8018453	0.00E+00
1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Tabla R-2. Resultados mostrando la velocidad del componente en dirección radial para el sistema en estudio dividido en 17 nodos en dirección radial y 17 nodos en dirección axial.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

17	2073 15	2073 15	2073 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15
16	2073 15	2007 786	1971 525	1939 676	1920 388	1907 882	1899 344	1893 256	1888 748	1865 294	1862 567	1862 35	1878 501	1876 92	1875 534	1874 292	1873 15
15	2073 15	2006 848	1973 489	1961 023	1934 656	1922 23	1912 814	1904 939	1898 736	1893 637	1889 375	1885 755	1882 629	1879 854	1877 433	1875 207	1873 15
14	2073 15	2009 863	1977 974	1958 277	1941 447	1929 296	1919 477	1911 356	1904 528	1886 722	1882 67	1880 272	1865 38	1861 856	1879 729	1875 842	1873 15
13	2073 15	2011 498	1980 717	1960 285	1945 084	1933 069	1923 213	1914 824	1907 825	1901 856	1896 221	1891 425	1887 078	1883 154	1879 562	1876 244	1873 15
12	2073 15	2012 534	1962 252	1962 117	1947 048	1935 143	1925 28	1918 915	1908 885	1903 342	1897 709	1892 665	1889 078	1883 896	1880 052	1876 484	1873 15
11	2073 15	2013 092	1883 076	1963 122	1948 182	1936 28	1926 396	1917 695	19107	1904 266	1898 524	1893 348	1889 855	1884 316	1880 328	1876 819	1873 15
10	2073 15	2013 359	1883 474	1963 674	1948 678	1936 796	1929 932	1918 516	1911 19	1904 714	1898 92	1893 682	1889 907	1884 52	1880 452	1876 866	1873 15
9	2073 15	2013 423	1983 57	1963 638	1948 823	1938 626	1927 093	1918 643	1911 31	1904 824	1899 217	1893 765	1889 974	1884 571	1880 456	1876 702	1873 15
8	2073 15	2013 306	1983 397	1963 451	1948 578	1936 693	1926 83	1918 418	1911 098	1904 831	1899 845	1893 021	1889 858	1884 484	1880 439	1876 874	1873 15
7	2073 15	2012 954	1982 891	1962 58	1947 823	1936 016	1928 155	1917 767	1910 488	1904 077	1899 359	1893 208	1889 526	1884 235	1880 274	1876 593	1873 15
6	2073 15	2012 274	1891 871	1961 87	1948 809	1934 663	1924 815	1916 481	1909 291	1902 994	1897 411	1892 428	1887 884	1883 758	1879 659	1876 439	1873 15
5	2073 15	2010 956	1979 83	1959 382	1944 147	1932 152	1922 354	1914 145	1907 137	1901 085	1895 737	1891 009	1886 769	1882 929	1879 417	1876 174	1873 15
4	2073 15	2008 369	1878 151	1954 89	1939 504	1927 514	1917 9	1910 002	1903 391	1897 769	1892 921	1888 885	1884 938	1881 581	1878 538	1875 748	1873 15
3	2073 15	2002 877	1968 078	1945 978	1930 386	1918 766	1908 85	1902 782	1897 068	1892 357	1888 424	1885 03	1882 122	1879 52	1877 208	1875 1	1873 15
2	2073 15	1965 501	1948 964	1925 177	1911 438	1902 166	1895 588	1890 727	1887 011	1884 084	1881 715	1879 751	1878 285	1876 642	1875 385	1874 212	1873 15
1	2073 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15	1873 15
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Tabla R-3. Resultados de las iteraciones que muestra la distribución de la temperatura para el sistema en estudio de 17 nodos en dirección axial por 17 nodos en dirección radial.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

17	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	
16	0.00E+00	-7.782143	-11.69561	-15.16117	-18.33672	-22.07479	-26.56153	-32.32658	-42.09234	-44.89365	-56.73105	-59.38251	-28.83254	-19.29386	-12.7206	-5.84349	
15	0.00E+00	-11.07288	-16.7807	-20.93149	-24.52943	-27.895	-31.56466	-35.36565	-39.29737	-44.02541	-45.91222	-54.05261	-35.04395	-28.35357	-19.37155	-11.18182	
14	0.00E+00	-11.29877	-17.00562	-20.91953	-23.94912	-26.57484	-29.82183	-30.76545	-32.34725	-33.37168	-34.10266	-32.52035	-32.81932	-20.02691	-10.68594	-4.002552	
13	0.00E+00	-10.49021	-15.75435	-19.29753	-21.98897	-24.15878	-25.94342	-27.37631	-28.4234	-28.81268	-28.69829	-27.76178	-23.42438	-19.95751	-15.90278	-9.67992	
12	0.00E+00	-9.339069	-14.04732	-17.26556	-19.6224	-21.9668	-24.05161	-25.15493	-26.47515	-27.12531	-24.62091	-23.90001	-18.46727	-16.82055	-12.62232	-8.42023	
11	0.00E+00	-7.490982	-11.25058	-13.7856	-15.72117	-17.3307	-18.72058	-19.98267	-21.14524	-22.20571	-23.13668	-23.79655	-23.91247	-18.81268	-19.56472	-10.44574	
10	0.00E+00	-5.388787	-8.067458	-9.820507	-11.06634	-12.03178	-12.72933	-13.25585	-13.45667	-13.4556	-13.15485	-12.4927	-11.27303	-9.495711	-6.954978	-3.999148	
9	0.00E+00	-3.568991	-5.32678	-6.442769	-7.201802	-7.708273	-8.007852	-8.117201	-8.038555	-7.765221	-7.28311	-6.577766	-5.638238	-4.495822	-3.085772	-1.560492	
8	0.00E+00	2.258888	3.328881	4.007333	4.448194	4.712674	4.83069	4.819384	4.684685	4.428845	4.054206	3.569152	2.979504	2.229622	1.554351	0.7748459	
7	0.00E+00	-1.351888	-2.009443	-2.411061	-2.661821	-2.801491	-2.848794	-2.814247	-2.702478	-2.524256	-2.295496	-1.976861	-1.632201	-1.242278	-0.822378	-0.412179	
6	0.00E+00	0.7957818	1.126633	1.42012	1.562903	1.638205	1.657155	1.627144	1.553249	1.439283	1.290868	1.112125	0.9095074	0.6854487	0.4552734	-0.226802	
5	0.00E+00	0.4534869	0.6617659	0.8224959	0.9034481	0.9445235	0.9520335	0.9320569	0.8902195	0.8180004	0.7304778	0.6229017	0.517420	0.3859685	0.2565113	0.1264796	
4	0.00E+00	0.2625166	0.3642015	0.4653226	0.5105705	0.5303108	0.5368447	0.5242249	0.4971489	0.457834	0.4079373	0.3493164	0.2842653	0.2143018	0.1422319	-7.01E-02	
3	0.00E+00	0.1422332	0.2076719	0.2494116	0.2722959	0.284142	0.2858017	0.2787738	0.2641854	0.2429716	0.2182161	0.18644	0.150227	0.1124213	7.51E-02	-3.73E-02	
2	0.00E+00	-0.06E-02	-9.01E-02	0.1075962	0.1179493	0.1228938	0.1236424	0.1205383	0.1141508	0.1049931	9.33E-02	-7.88E-02	-6.48E-02	-4.88E-02	-3.24E-02	-1.59E-02	
1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Tabla R-4. Resultados que muestran la distribución de la energía cinética turbulenta para el sistema en estudio de 17 por 17 nodos, en dirección radial y axial respectivamente.

17	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	
16	0.00E+00	-1.05E-20	1.76E-18	9.59E-19	1.42E-16	8.72E-15	-2.34E-13	3.91E-12	-1.47E-11	5.60E-11	2.75E-11	9.42E-12	-2.14E-12	3.79E-13	-4.35E-14	-3.45E-16	0.00E+00
15	0.00E+00	4.45E-23	7.43E-21	6.53E-19	2.11E-17	1.24E-15	2.79E-14	3.22E-13	3.03E-12	-1.36E-11	9.76E-11	1.07E-10	6.83E-11	-2.35E-11	5.43E-12	-1.63E-13	0.00E+00
14	0.00E+00	3.37E-23	4.40E-21	2.67E-19	4.62E-18	4.78E-17	-1.90E-15	2.75E-14	-2.47E-13	1.55E-12	-6.65E-12	4.25E-11	-3.95E-11	1.70E-11	-3.62E-12	8.22E-14	0.00E+00
13	0.00E+00	2.43E-23	2.74E-21	1.42E-19	1.59E-18	8.62E-18	3.17E-17	-1.61E-15	1.72E-14	1.15E-13	5.37E-13	-1.77E-12	7.65E-12	-5.67E-12	1.67E-12	-4.49E-14	0.00E+00
12	0.00E+00	1.76E-23	1.83E-21	8.84E-20	8.22E-19	2.76E-18	5.56E-18	2.69E-18	-7.72E-15	6.94E-15	-3.41E-14	1.13E-13	-2.42E-13	6.62E-13	-3.25E-13	1.18E-14	0.00E+00
11	0.00E+00	1.22E-23	1.21E-21	5.36E-20	4.86E-19	1.41E-18	1.63E-18	8.49E-19	-4.76E-16	2.27E-15	1.77E-15	6.67E-15	1.42E-14	-1.84E-14	2.53E-14	-1.25E-15	0.00E+00
10	0.00E+00	8.18E-24	7.77E-22	3.29E-20	2.83E-19	8.14E-19	8.45E-19	1.33E-19	-3.89E-19	-2.25E-18	4.32E-17	2.97E-16	6.29E-16	1.14E-15	-7.10E-16	4.35E-17	0.00E+00
9	0.00E+00	5.32E-24	5.07E-22	2.21E-20	1.24E-19	3.97E-19	5.29E-19	5.62E-20	-1.53E-19	-1.53E-19	4.61E-15	5.30E-15	3.22E-17	6.49E-17	4.32E-17	-3.07E-18	0.00E+00
8	0.00E+00	3.18E-24	2.63E-22	1.10E-20	1.01E-19	2.76E-19	2.99E-19	1.42E-19	-7.96E-20	-3.53E-20	-1.73E-20	5.14E-20	4.11E-19	1.96E-19	2.49E-19	1.81E-19	0.00E+00
7	0.00E+00	1.79E-24	1.53E-22	5.82E-21	5.62E-20	1.78E-19	2.11E-19	7.39E-20	-1.36E-20	-1.49E-20	8.84E-22	-7.34E-22	3.19E-21	-1.93E-20	5.35E-20	6.72E-21	0.00E+00
6	0.00E+00	8.94E-25	7.31E-23	2.71E-21	2.70E-20	9.35E-20	1.29E-19	5.78E-20	-4.84E-21	5.83E-21	1.22E-21	5.67E-22	6.69E-23	5.84E-23	5.49E-22	4.14E-23	0.00E+00
5	0.00E+00	3.72E-25	2.93E-23	1.04E-21	1.12E-20	4.22E-20	8.42E-20	3.72E-20	1.19E-21	-3.32E-21	6.99E-22	5.24E-22	3.97E-22	5.73E-21	1.68E-20	-2.67E-22	0.00E+00
4	0.00E+00	1.22E-25	9.79E-24	3.87E-22	4.21E-21	1.73E-20	3.04E-20	2.14E-20	7.72E-22	-1.05E-20	5.02E-21	-1.23E-20	5.78E-20	9.21E-19	2.74E-18	2.69E-20	0.00E+00
3	0.00E+00	3.45E-26	3.39E-24	1.77E-22	2.13E-21	8.36E-21	2.23E-20	-1.56E-20	1.78E-19	1.51E-19	-9.06E-19	1.82E-18	8.25E-18	-1.36E-16	4.10E-16	-2.92E-16	0.00E+00
2	0.00E+00	2.97E-26	7.37E-24	9.91E-22	2.80E-21	8.33E-20	-4.69E-19	3.13E-18	-2.17E-17	-1.84E-18	1.07E-18	-1.90E-18	8.37E-18	1.42E-14	-4.33E-14	2.23E-16	0.00E+00
1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Tabla R-5. Resultados de las iteraciones que muestran la distribución de la disipación de la energía cinética turbulenta para el sistema en estudio de 17 por 17 nodos, en dirección axial y radial respectivamente.

La validación de un modelo matemático se realiza comparando resultados obtenidos de estudios experimentales realizados con parámetros de flujo definidos a diferentes condiciones de operación, pero que en este caso no se pudo realizar por carecer de estudios concretos en sistemas con las características aquí indicadas; otra forma de validar un modelo matemático es la realización de estudios experimentales en modelos llamados de agua en donde por leyes de similitud se realizan estudios en modelos a escala utilizando agua como fluido de proceso a regimenes de flujo decididos igualmente por estas leyes, la cual no se llevó acabo porque la realización de un modelo de agua es material concerniente a otro tema de tesis y en cambio se sugiere la tesis aquí realizada como base para la realización estudios experimentales dirigidos a la optimización del cilindro separador de arrabio y escoria líquidos

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados numéricos obtenidos con el programa cilindro, listados en las tablas R-1, R-2, R-3, R-4 y R-5, han sido graficados mediante el software Matemática en su versión 4.

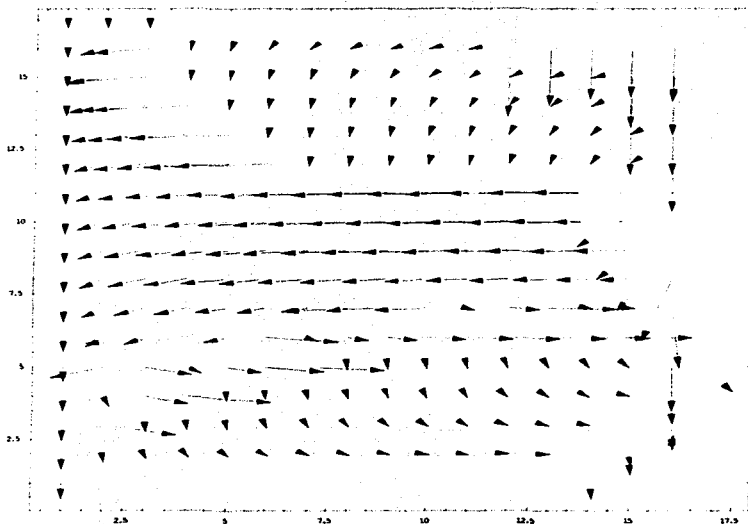


Figura R-1.- Figura que muestra la gráfica del perfil de velocidades considerando las contribuciones en dirección z y r .

En la figura R-1 apreciamos el perfil de velocidades generado por las contribuciones de los componentes axial y radial; en esta grafica podemos ubicar dos puntos de estancamiento: el primero localizado en el punto de impacto del chorro de metal con el fondo del recipiente el cual obliga al fluido a formar una corriente asintótica alejándose del punto de impacto,

forzando al flujo en el centro del chorro a formar un punto de rápida recirculación. Después el fluido se proyecta hacia la pared del recipiente; siguiendo una trayectoria contraria a la fuerza de gravedad obligado por la verticalidad de la misma formándose en este vértice otro punto de estancamiento.

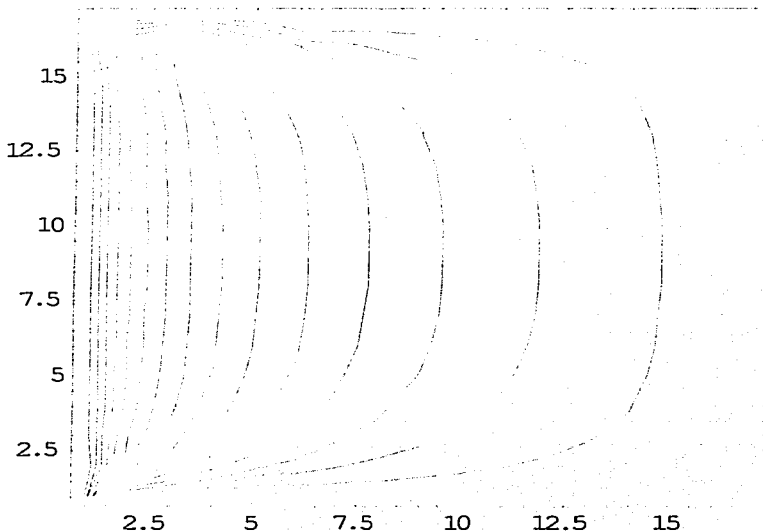


Figura R-2.- Gráfica de contorno para la distribución de las temperaturas en el sistema de arrabio y escoria.

La proyección del fluido en forma vertical permite la formación de un rizo viscoso de metal líquido en la superficie del fluido generándose un remolino que físicamente generará disturbios en la superficie pero que gráficamente no se aprecia por la condición de no deslizamiento aplicada a la superficie

del fluido; otro remolino se genera en el corazón mismo del sistema cercano al fondo del recipiente como consecuencia del movimiento global que se lleva a cabo en un cuerpo cilíndrico.

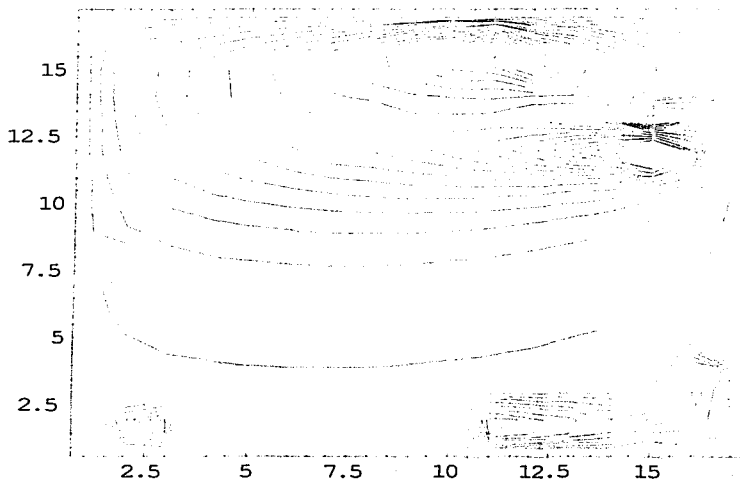


Figura R-3.- Distribución de la energía cinética turbulenta mostrando el contorno de las cantidades para el sistema de arrabio y escoria (k).

En la figura R-2 se muestra la gráfica de contorno para la distribución de la temperatura, en ella podemos ver que el flujo turbulento favorece el mezclado apreciando este fenómeno por la distribución uniforme de la temperatura, ocurriendo de distinta forma en un perfil de temperatura generado por un flujo laminar donde en regiones de baja temperatura podemos encontrar zonas de temperaturas más altas que nos confirman que el mezclado no se lleva a cabo de forma uniforme; esta gráfica nos muestra un perfil de temperaturas cuya distribución se encuentra en el rango de los

1600-1800° C localizándose las temperaturas más altas cercanas al eje de simetría, disminuyendo hacia las paredes, piso del cilindro y hacia la superficie del fluido.

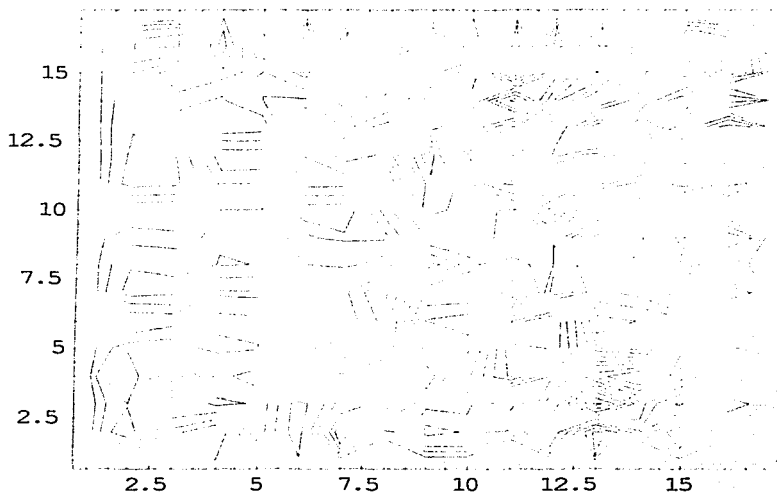


Figura R-4.- Gráfica que muestra la distribución de la disipación de la energía cinética turbulenta (ϵ).

La figura R-3 nos muestra la gráfica de contorno para la energía cinética turbulenta, contornos que nos indican las zonas donde se están formando los remolinos de mayor tamaño principalmente, usando un tamaño de malla más fino podremos apreciar las distintas zonas de formación de remolinos.

En la figura R-4 podemos observar la gráfica de contorno de la disipación de la energía cinética turbulenta en la cual podemos observar una gráfica muy uniforme en su distribución pero distinguiéndose a pesar de ello las

regiones de mayor disipación de la energía cinética turbulenta, las cuales se localizan en las zonas cercanas a la pared del recipiente ocurriendo esta disipación por viscosidad y encontrando en las zonas de impacto del chorro de metal con el fluido muy poca disipación debido principalmente a que el régimen de flujo en esa zona es mas cercano al flujo de tipo laminar.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CONCLUSIONES

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

103-A

CONCLUSIONES

El analizar un proceso permite optimizarlo, este análisis implica conocer los puntos finos del sistema basados en la transferencia de momentum y/o energía y/o especies químicas que ocurren de manera aumentada en el flujo turbulento, muchos problemas de interés práctico son generalmente de este tipo.

Un problema real se analiza utilizando un modelo de proceso, este se genera de distintas; el modelado matemático es una de las formas económica, sencilla y flexible, de realizar, un modelo matemático es la descripción de un fenómeno físico utilizando ecuaciones. Las ecuaciones que nos describen un fenómeno físico generalmente implican ecuaciones en derivadas parciales, integrales o algebraicas, las ecuaciones de transferencia involucran términos en derivadas parciales, resolverlas de forma analítica en geometrías en tres dimensiones es algo difícil y puede ser imposible de realizar; sin embargo la obtención de una solución numérica puede resultar relativamente sencillo.

En el problema del separador líquido-líquido de arrabio y escoria se utilizó el método de diferencias finitas en la ecuación de transferencia para generar un sistema de ecuaciones algebraicas que resueltas de manera iterativa nos permiten obtener el perfil de velocidades, el perfil de temperaturas, el perfil de energía cinética y el perfil de la disipación de la energía cinética turbulenta, estas dos últimas cantidades que caracterizan el movimiento turbulento.

Como consecuencia de la solución de este problema se concluye lo siguiente:

Se propone el uso del modelo $k-\epsilon$ para la descripción de flujos turbulentos apoyados en la gran versatilidad demostrada en la solución de problemas en flujo turbulento reportados en la literatura, ofreciendo en el capítulo 3 una breve introducción a este modelo.

Se sugiere el uso del método de diferencias finitas (MDF) como una introducción a la solución numérica de la ecuación de transferencia por su sencillez y su facilidad de manipulación.

Se utilizó el método de Gauss-Siedel como método iterativo para la solución de las ecuaciones discretizadas obtenidas al aplicar el método de diferencias finitas y se propone el uso de este método en la solución de este

tipo de ecuaciones debido a que las ecuaciones resultantes del proceso de discretización son del tipo de sistemas de ecuaciones tri o pentadiagonal acelerando la convergencia hacia la solución mediante el uso de este método.

La utilización de un programa de cómputo que nos permita resolver estas ecuaciones es inminente esto es por la gran cantidad de cálculos a realizar y por lo repetitivo de los mismos, siendo prohibitivo el tiempo de cálculo al realizar estos de forma manual.

Para la discretización de la geometría de un problema en estudio, el considerar los ejes de simetría permite la reducción de los cálculos en la mitad o menos traduciéndose en una disminución del tiempo de computo sin perder casi nada de precisión en los resultados.

La consideración de ejes de simetría en el sistema en estudio es una opción útil que permite la disminución de los cálculos a realizar y el aumento de los puntos nodales que se pueden conocer como resultado de este procedimiento.

No por el hecho de usar un método numérico en la solución de la ecuación de transferencia podemos dejar fuera los conocimientos en los fenómenos de transporte que son parte fundamental en el análisis de un fluido.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

PAGINACIÓN DISCONTINUA

DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES GOBERNANTES

Momentum axial.

La ecuación de la que se parte para discretizar el componente z , es la ecuación (A1-1), en la que se ha considerado régimen permanente y en la cual los componentes de velocidad considerados son en el sentido axial y el radial.

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho uv) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r uv) = -\frac{\partial p}{\partial z} \left(\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \rho g \quad (A1-1)$$

para las derivadas parciales se considera una aproximación de Taylor hacia adelante, y las segundas derivadas parciales se considera una aproximación en diferencias finitas centrales, los términos donde intervienen la gravedad y la presión no se discretizan.

$$\begin{aligned} & \rho u \frac{u(i+1, j) - u(i, j)}{\Delta z} + \rho v \frac{u(i, j+1) - u(i, j)}{\Delta r} + \frac{\rho v}{r} u(i, j) = -\frac{\partial p}{\partial z} \\ & + \mu_{ef} \frac{u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)}{(\Delta z)^2} + \mu_{ef} \frac{u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1)}{(\Delta r)^2} \\ & + \frac{\mu_{ef}}{r} u(i, j+1) - u(i, j) + \mu_{ef} \frac{u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)}{(\Delta z)^2} \\ & + \mu_{ef} \frac{v(i+1, j+1) - v(i+1, j) - v(i, j+1) + v(i, j)}{\Delta r \Delta z} + \frac{\mu_{ef}}{r} \frac{v(i+1, j) - v(i, j)}{\Delta z} - \rho g \end{aligned} \quad (A1-2)$$

Reagrupando y dejando en términos de la velocidad en dirección z , tenemos la ecuación discretizada final

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\rho u}{\Delta z} - \frac{\rho v}{\Delta r} + \frac{\rho v}{r} + \frac{4\mu_{ef}}{(\Delta z)^2} + \frac{2\mu_{ef}}{(\Delta r)^2} + \frac{\mu_{ef}}{r \Delta r} \right] u(i, j) = \\ & \left[-\frac{\rho u}{\Delta z} + \frac{2\mu_{ef}}{(\Delta z)^2} \right] u(i+1, j) + \left[\frac{\rho v}{\Delta r} + \frac{\mu_{ef}}{(\Delta r)^2} + \frac{\mu_{ef}}{r \Delta r} \right] u(i, j+1) \\ & + \left[\frac{2\mu_{ef}}{(\Delta z)^2} \right] u(i-1, j) + \left[\frac{\mu_{ef}}{(\Delta r)^2} \right] u(i, j-1) + \rho \beta g (T - T_w) \\ & + \left[\frac{\mu_{ef}}{\Delta z \Delta r} \right] [v(i+1, j+1) - v(i+1, j) - v(i, j+1) + v(i, j)] + \left[\frac{\mu_{ef}}{r \Delta z} \right] [v(i+1, j) - v(i, j)] \end{aligned} \quad (A1-3)$$

donde el término $\rho\beta g(T - T_w)$ es la aproximación de Boussinesq que corresponde a los términos $-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$, esta sustitución es realizada debido al hecho de que el considerar el término de la presión como una variable más dentro del proceso iterativo nos generaría un campo de presión desconocido que se tendría que actualizar en cada nueva iteración lo que significaría reducir el número de nodos dentro de la malla del sistema a iterar, adicionándose como una ecuación más dentro del proceso iterativo.

Ecuación de continuidad.

El término en dirección radial se discretiza de la ecuación de continuidad. Esto se hace para reducir la cantidad de términos involucrados en las operaciones que realiza el programa que al hacer esta elección la reducción de términos involucrados para el cálculo es obvio.

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \quad (A1-4)$$

resolviendo la diferenciación indicada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \left[r \frac{\partial v}{\partial r} + v \right] = 0 \quad (A1-5)$$

sustituyendo las aproximaciones de Taylor en diferencias centrales de la siguiente forma

$$\frac{u(i, j) - u(i-1, j)}{\Delta z} + \frac{v(i, j) - v(i, j-1)}{\Delta r} + \frac{v(i, j)}{r} = 0 \quad (A1-6)$$

dejando la ecuación (A1-6) en términos de la velocidad en dirección radial

$$v(i, j) = \frac{r\Delta r [u(i-1, j)u(i, j)]}{(r\Delta z + \Delta r\Delta z)} + \frac{rv(i, j-1)}{(r + \Delta r)} \quad (A1-7)$$

siendo la ecuación (A1-7) la ecuación discretizada para el componente radial de la velocidad.

Ecuación de transferencia de energía total.

Partiendo de la ecuación de transferencia de energía total en dos dimensiones, sin generación de energía y considerando que los mecanismos de convección y difusión son los mecanismos predominantes; la transferencia de calor por radiación se desprecia, quedando la ecuación de transferencia de calor para un flujo turbulento en coordenadas cilíndricas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho u T - \Gamma_{ef} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left[r \left(\rho v T - \Gamma_{ef} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (\text{A1-8})$$

Desarrollando los términos convectivos y difusivos para las dos coordenadas, queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho u T) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_{ef} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v T) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_{ef} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{A1-9})$$

Sustituyendo la aproximación por diferencias finitas dentro de la ecuación (A1-9).

$$\begin{aligned} & \rho u \frac{T(i+1, j) - T(i, j)}{\Delta z} - \Gamma_{ef} \frac{T(i+1, j) - 2T(i, j) + T(i-1, j)}{(\Delta z)^2} + \rho v \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta r} \\ & + \frac{\rho v}{r} T(i, j) - \Gamma_{ef} \left[\frac{T(i, j+1) - 2T(i, j) + T(i, j-1)}{(\Delta r)^2} \right] - \frac{\Gamma_{ef}}{r} \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta r} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A1-10})$$

Despejando la ecuación (A1-10) y dejando en términos de $T(i, j)$, la ecuación (A1-8) queda expresada en la forma discretizada con el método de diferencias finitas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\rho u}{\Delta z} + \frac{2\mu_{ef}}{(\Delta z)^2} - \frac{\rho v}{\Delta r} + \frac{\mu_{ef}}{r\Delta r} + \frac{\rho v}{r} + \frac{2\mu_{ef}}{(\Delta r)^2} \right] T(i, j) = \\ & \left[\frac{\mu_{ef}}{(\Delta z)^2} - \frac{\rho u}{\Delta z} \right] T(i+1, j) + \left[\frac{\mu_{ef}}{(\Delta r)^2} + \frac{\mu_{ef}}{r\Delta r} - \frac{\rho v}{\Delta r} \right] T(i, j+1) \\ & + \left[\frac{\mu_{ef}}{(\Delta z)^2} \right] T(i-1, j) + \left[\frac{\mu_{ef}}{(\Delta r)^2} \right] T(i, j-1) \end{aligned} \quad (\text{A1-11})$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Energía cinética turbulenta.

Usando la ecuación para k del modelo de dos ecuaciones en coordenadas cilíndricas, a régimen permanente y en dos dimensiones (componentes en dirección r y z):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(\rho u k) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v k) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \\ + \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 \right\} &- \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{A1-12})$$

considerando la viscosidad y la densidad constantes, estas salen de la diferenciación de tal forma que se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial k}{\partial z} + \frac{\rho v}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r k) &= \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial k}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial k}{\partial r} \right) \\ + \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 \right\} &- \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (13)$$

resolviendo la diferenciación indicada

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial k}{\partial z} + \frac{\rho v}{r} \left[r \frac{\partial k}{\partial r} + k \right] &= \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} + \frac{\mu_t}{r \sigma_k} \left[r \frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + \frac{\partial k}{\partial r} \right] \\ + \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} &- \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{A1-14})$$

e introduciendo la aproximación por diferencias finitas, en la ecuación (A1-14) se expresa de la siguiente forma, y considerando los términos sin derivadas parciales como un término lineal medido en el nodo actual quedaría expresado de la siguiente forma:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
& \rho u \frac{k(i+1, j) - k(i, j)}{\Delta z} + \rho v \frac{k(i, j+1) - k(i, j)}{\Delta r} + \frac{\rho v}{r} k(i, j) = \\
& \frac{\mu_{ef}}{\sigma_k} \frac{k(i+1, j) - 2k(i, j) + k(i-1, j)}{(\Delta z)^2} + \frac{\mu_{ef}}{\sigma_k} \frac{k(i, j+1) - 2k(i, j) + k(i, j-1)}{(\Delta r)^2} \\
& + \frac{\mu_{ef}}{r\sigma_k} \frac{k(i, j+1) - k(i, j)}{\Delta r} \tag{A1-15} \\
& + \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{u(i+1, j) - u(i, j)}{\Delta z} \right)^2 + \left(\frac{v(i, j+1) - v(i, j)}{\Delta r} \right)^2 + \left(\frac{v(i, j)}{r} \right)^2 \right] \right. \\
& \left. + \left(\frac{u(i, j+1) - u(i, j)}{\Delta r} + \frac{v(i+1, j) - v(i, j)}{\Delta z} \right)^2 \right\} \\
& - \rho \varepsilon
\end{aligned}$$

reagrupando y dejando en términos de $k(i, j)$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{\rho u}{\Delta z} + \frac{2\mu_{ef}}{\sigma_k(\Delta z)^2} - \frac{\rho v}{\Delta r} + \frac{\rho v}{r} + \frac{2\mu_{ef}}{\sigma_k(\Delta r)^2} + \frac{\mu_{ef}}{\sigma_k r \Delta r} \right] k(i, j) = \\
& \left[\frac{\mu_{ef}}{\sigma_k(\Delta r)^2} + \frac{\mu_{ef}}{r\sigma_k \Delta r} - \frac{\rho v}{\Delta r} \right] k(i, j+1) \\
& + \left[\frac{\mu_{ef}}{\sigma_k(\Delta z)^2} - \frac{\rho u}{\Delta z} \right] k(i+1, j) + \frac{\mu_{ef}}{\sigma_k(\Delta z)^2} k(i-1, j) + \frac{\mu_{ef}}{\sigma_k(\Delta r)^2} k(i, j-1) \tag{A1-16} \\
& + \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{u(i+1, j) - u(i, j)}{\Delta z} \right)^2 + \left(\frac{v(i, j+1) - v(i, j)}{\Delta r} \right)^2 + \left(\frac{v(i, j)}{r} \right)^2 \right] \right. \\
& \left. + \left(\frac{u(i, j+1) - u(i, j)}{\Delta r} + \frac{v(i+1, j) - v(i, j)}{\Delta z} \right)^2 \right\} \\
& - \rho \varepsilon
\end{aligned}$$

esta es la forma discretizada para cada punto interior dentro de un sistema de forma cilíndrica.

Ecuación de transferencia de disipación de energía cinética turbulenta.

La ecuación para la disipación de la energía cinética turbulenta ε expresada en coordenadas cilíndricas, en donde se consideran contribuciones importantes solo en la dirección radial y axial, la ecuación para la disipación de la energía cinética turbulenta esta expresada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho u \varepsilon) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_{ef}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_{ef}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) \quad (A1-17)$$

$$+ \frac{C_1 \varepsilon}{k} \mu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} - \rho \varepsilon$$

diferenciando la ecuación (A1-17) y considerando la viscosidad y la densidad constantes salen de la diferenciación

$$\rho \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \rho v \left[r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \varepsilon \right] = \frac{\mu_{ef}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} + \frac{\mu_{ef}}{\sigma_\varepsilon} \left[r \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] \quad (A1-18)$$

$$+ \frac{C_1 \varepsilon \mu_t}{k} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} - \frac{C_2 \rho \varepsilon}{k}$$

sustituyendo la aproximación por diferencias finitas en la ecuación (A1-18)

$$\rho \mu \frac{u(i, j) - u(i-1, j)}{\Delta z} + \rho v \frac{v(i, j) - v(i, j-1)}{r} + \frac{v(i, j)}{r} = \frac{\mu_{ef}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\varepsilon(i, j) - \varepsilon(i, j-1)}{(\Delta z)^2} + \frac{\mu_{ef}}{\sigma_\varepsilon} \left[r \frac{\varepsilon(i, j) - \varepsilon(i, j-1)}{(\Delta r)^2} + \frac{\varepsilon(i, j)}{r} \right]$$

$$+ \frac{C_1 \mu_t \varepsilon(i, j)}{k} \left\{ 2 \left[\frac{u(i, j) - u(i-1, j)}{\Delta z} \right]^2 + \frac{v(i, j) - v(i, j-1)}{r} \right\} + \frac{v(i, j)}{r} - \frac{C_2 \rho \varepsilon(i, j)}{k}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
 & \left[-\frac{\rho u}{\Delta z} - \frac{\rho v}{\Delta r} + \frac{\rho v}{r} + \frac{2\mu_{ef}}{\sigma_e(\Delta z)^2} + \frac{2\mu_{ef}}{\sigma_e(\Delta r)^2} + \frac{\mu_{ef}}{r\sigma_e\Delta r} \right. \\
 & \left. - \frac{2C_1\mu_i}{k} \left[\left(\frac{u(i+1,j) - u(i,j)}{\Delta z} \right)^2 + \left(\frac{v(i,j+1) - v(i,j)}{\Delta r} \right)^2 + \left(\frac{v(i,j)}{r} \right)^2 \right] \right] c(i,j) = \\
 & \left[-\frac{C_1\mu_i}{k} \left(\frac{u(i,j+1) - u(i,j)}{\Delta r} + \frac{v(i+1,j) - v(i,j)}{\Delta z} \right)^2 + \frac{C_2\rho E}{k} \right. \\
 & \left. \left[\frac{\mu_{ef}}{\sigma_e(\Delta z)^2} - \frac{\rho u}{\Delta z} \right] c(i+1,j) + \left[\frac{\mu_{ef}}{r\sigma_e\Delta r} + \frac{\mu_{ef}}{(\Delta r)^2} - \frac{\rho v}{\Delta r} \right] c(i,j+1) \right. \\
 & \left. + \left[\frac{\mu_{ef}}{\sigma_e(\Delta z)^2} \right] c(i-1,j) + \left[-\frac{\mu_{ef}}{\sigma_e(\Delta r)^2} \right] c(i,j-1) \right] \quad (A1-20)
 \end{aligned}$$

Todas las ecuaciones discretizadas fueron trabajadas bajo el supuesto de que las propiedades físicas como lo son la viscosidad, la densidad y la viscosidad efectiva tienen un valor que es calculado en cada punto de la malla de acuerdo a su temperatura.

Las ecuaciones (A1-3), (A1-7), (A1-11), (A1-16) y (A1-20) fueron la base final para hacer un programa para resolver el problema del separador líquido-líquido de arrabio y escoria.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

LISTADO DEL PROGRAMA DEL SEPARADOR.

PROGRAM LIQ_LIQ
IMPLICIT NONE

```
C      DECLARANDO VARIABLES USADAS EN LAS ITERACIONES DEL SEPARADOR
      REAL DIMENSION(1:17,1:17)::U,V,T, DENSIDAD, VISCOSURB,
+ VISCOSPEC, UNNEW, VNEW, TNEW, UCOCF, TCOCF, KCOEF, K, KNEW, ECOEF, E, ENEW
      REAL DIMENSION(1:17)::RADIO CAIDA
      REAL::NODOSAXIALES, DELTAZ, RADIOACUM, RADIO1, DELTA R, NODOSFINAL1, COMP
      REAL::NODOSRADIALES, RADIOTOT, LONGITUD, LIMITE, NODOSRA, NODOSAX, ITER
      INTEGER::IJ
      REAL::PARAMETER::GRAVEDAD=9.81, SIGMAK=1.3, SIGMAE=1.0, CI=1.44,
+ C2=1.92, VISCLAM=0.0067, BETA=0.00027, CMU=0.09, EPSILON=0.000001
      PRINT*,'.....'
      PRINT*,'
      PRINT*,'
      PRINT*,' PROGRAMA PARA CALCULAR PROPIEDADES ITERATIVAMENTE
      PRINT*,' SIMULANDO UN SEPARADOR LIQUIDO-LIQUIDO, MEDIANTE-
      PRINT*,' EL MODELO DE DOS ECUACIONES K-E, DE LAUNDER Y ---
      PRINT*,' SPALDING.
      PRINT*,'
      PRINT*,'
      PRINT*,'.....'
      PRINT*,'INTRODUCE NUMERO DE NODOS EN EL EJE Z'
      PRINT*,'NUMERO DE NODOS MAXIMOS 16'
      READ *,NODOSAX
      PRINT*,'INTRODUCE EL NUMERO DE NODOS EN EL EJE R'
      PRINT*,'NUMERO DE NODOS MAXIMOS 16'
      READ *,NODOSRA
      PRINT*,'RADIO DEL CILINDRO A SIMULAR '
      PRINT*,'EL RADIO ESTA DADO EN METROS(m)'
      READ *,RADIOTOT
      PRINT*,'ALTURA DEL CILINDRO '
      PRINT*,'ALTURA DEL CILINDRO EN METROS(m)'
      READ *,LONGITUD
      PRINT*,'RADIO DEL CILINDRO DEL CHORRO'
      PRINT*,'RADIO EN METROS(m)'
      READ *,RADIO1
```

```
C      INICIALIZANDO VARIABLES USADAS EN EL PROGRAMA CILINDRO
C      CALCULANDO LOS INCREMENTOS EN DIRECCION Z Y R
      I=0.0
      J=0.0
      COMP=0.0
      NODOSRADIALES=NODOSRA+ 1
      NODOSAXIALES=NODOSAX+ 1
      LIMITE=NODOSAXIALES
      DELTAZ=LONGITUD/NODOSAX
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

DELTAR=RADIOTOT/NODOSRA
ITER=0.0

! INICIALIZANDO VELOCIDADES Y TEMPERATURAS

DO 5 I=1,NODOSAXIALES
DO 5 J=1,NODOSRADIALES
U(I,J)=0.0
V(I,J)=0.0
T(I,J)=1500
DENSIDAD(I,J)=0.0
VISCTURB(I,J)=0.0
VISCFEFC(I,J)=0.0
UNEW(I,J)=0.0
VNEW(I,J)=0.0
TNEW(I,J)=1500
UCOEF(I,J)=0.0
TCOEF(I,J)=0.0
KCOEF(I,J)=1.0
K(I,J)=1.0
E(I,J)=1.0
ECOEF(I,J)=1.0
ENEW(I,J)=1.0
KNEW(I,J)=1.0

5 CONTINUE

C INICIALIZANDO EL RADIO

DO 10 J=1,NODOSRADIALES
RADIO(J)=0.0

10 CONTINUE

C INICIALIZANDO LA CAIDA

DO 11 I=1,NODOSAXIALES
CAIDA(I)=0.0

11 CONTINUE

.....
C ABRIENDO UN ARCHIVO DONDE GUARDAR LOS VALORES DE LAS ITERACIONES
OPEN(UNIT='1',FILE='DATOS.DAT',STATUS='NEW')

.....
C CONDICIONES A LA FRONTERA

C CONDICIONES A LA FRONTERA EN EL RADIO=0 Y $0 < Z < L$

C CONDICIONES DE FRONTERA EN EL EJE DE SIMETRIA DEL CILINDRO

DO 12 I=1,NODOSAXIALES
CAIDA(I)=0.5+DELTAZ*(LIMITE-I)
U(I,1)=(-1)*(SQRT(2.0*9.81*CAIDA(I)))
V(I,1)=0.0
T(I,1)=2073.15
K(I,1)=0.0
E(I,1)=0.0
WRITE(1,*)CAIDA(I) U(I,1) V(I,1) T(I,1) K(I,1) E(I,1)
WRITE(1,*)CAIDA(I), U(I,1), V(I,1), T(I,1), K(I,1), E(I,1)
WRITE(1,*)

12 CONTINUE

WRITE(1,*)VELOCIDAD DE LOS NODOS EN EL EJE DE SIMETRIA'

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN


```

WRITE(1,*) (U(I,1),I=1,NODOSAXIALES)
WRITE(1,*)
C   CALCULANDO VELOCIDADES EN LA FRONTERA EN  $0 < R < R_1$  Y EN  $Z = L$ 
C   SIENDO  $R_1 =$  RADIO DEL CHORRO DE ACERO
C   CONDICIONES A LA FRONTERA EN LA SUPERFICIE DEL CILINDRO DEL CHORRO
J=0.0
RADIOACUM=0.0
DO WHILE (RADIOACUM .LE. 0.1)
J=J+1.0
U(NODOSAXIALES,J)=(SQRT(2.0*9.81*0.5))*(-1)
T(NODOSAXIALES,J)=2073.15
IF (J .EQ. 1) THEN
RADIOACUM=0.0+RADIOACUM
ELSE
DELTAR=RADIOTOT/NODOSAX
RADIOACUM=DELTAR+RADIOACUM
END IF
NODOFINAL1=J
WRITE(1,*)VELOCIDAD EN LA PARTE SUPERIOR *
WRITE(1,*)RADIOACUM'
WRITE(1,*)RADIOACUM
WRITE(1,*)NODOFINAL1
WRITE(1,*)NODOFINAL1
WRITE(1,*)NODOS EN EL EJE Z'
WRITE(1,*)NODOSAX
WRITE(1,*)NODOS EN EL EJE R'
WRITE(1,*)NODOSRA
WRITE(1,*)
END DO

C   PARA EL RADIO2 LAS TEMPERATURAS Y VELOCIDADES SON
C   CONDICIONES DE FRONTERA EN LA SUPERFICIE
DO 13 J=(NODOFINAL1-1),NODOSRADIALES
U(NODOSAXIALES,J)=0.0
T(NODOSAXIALES,J)=1873.15
WRITE(1,*)U(NODOSAXIALES,J)
WRITE(1,*)T(NODOSAXIALES,J)
WRITE(1,*)T(NODOSAXIALES,J)
WRITE(1,*)T(NODOSAXIALES,J)
13 CONTINUE

C   CALCULANDO LAS VELOCIDADES EN DIRECCION R EN LA SUPERFICIE
C   CONDICIONES A LA FRONTERA FALTANTES EN LA SUPERFICIE
DO 14 J=1,NODOSRADIALES
V(NODOSAXIALES,J)=0.0
E(NODOSAXIALES,J)=0.0
K(NODOSAXIALES,J)=0.0
RADIO(J)=DELTAR*(J-1)
WRITE(1,*)RADIO(J)
WRITE(1,*)RADIO(J)
WRITE(1,*)V(NODOSAXIALES,J)
WRITE(1,*)V(NODOSAXIALES,J)
WRITE(1,*)E(NODOSAXIALES,J)
WRITE(1,*)E(NODOSAXIALES,J)
WRITE(1,*)K(NODOSAXIALES,J)

```

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

```

WRITE(1,*)K(NODOSAXIALES,J)
WRITE(1,*)
14 CONTINUE
WRITE(1,*) ' CALCULO DEL RADIO EN FUNCION DE LAS COORDENADAS'
C   CALCULANDO CONDICIONES A LA FRONTERA EN LA PARED DEL CILINDRO
C   SIENDO R=R2 Y 0<=Z<=L
DO 15 I=2,NODOSAXIALES
  U(I,NODOSRADIALES)=0.0
  V(I,NODOSRADIALES)=0.0
  E(I,NODOSRADIALES)=0.0
  K(I,NODOSRADIALES)=0.0
  T(I,NODOSRADIALES)=1873.15
15 CONTINUE
C   CALCULANDO VELOCIDADES Y TEMPERATURAS (CONDICION A LA FRONTERA) EN EL
C   PISO DEL CILINDRO
C   SIENDO Z=0 Y EL RADIO 0<=R<=R2
DO 16 J=2,NODOSRADIALES
  U(1,J)=0.0
  V(1,J)=0.0
  E(1,J)=0.0
  K(1,J)=0.0
  T(1,J)=1873.15
16 CONTINUE
C   CALCULANDO LOS VALORES DE E Y K EN LA FRONTERA. EJE DE SIMETRIA DEL
C   CILINDRO
C   CONDICIONES A LA FRONTERA EN R=0 0<=Z<=L
DO 17 J=2,NODOSRADIALES
  E(NODOSAXIALES,J)=0.0
  K(NODOSAXIALES,J)=0.0
17 CONTINUE
.....
.....
..... INICIANDO LAS ITERACIONES DEL SEPARADOR
.....
.....
.....
.....
C   CALCULANDO LAS DENSIDADES, VISCOSIDAD TURBULENTA Y EFECTIVA DEL ACERO
EN CADA NODO
20 DO 26 I=2,NODOSAX
  DO 26 J=2,NODOSRA
    DENSIDAD(I,J)=7010.0-0.0833*(T(I,J)-1808.0)
    VISCTURB=(CMU*DENSIDAD(I,J)+K(I,J)*K(I,J))/E(I,J)
    VISCFEFC(I,J)=VISCLAM+VISCTURB(I,J)
26 CONTINUE

WRITE(1,*) 'DETERMINACION DE LAS PROPIEDADES DEL ACERO'
WRITE(1,*) (((DENSIDAD(I,J), VISCTURB(I,J), VISCFEFC(I,J)),J=1,
+ NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)
WRITE(1,*) DENSIDAD(I,J), VISCTURB(I,J), VISCFEFC(I,J)
WRITE(1,*) 'TERMINACION DE LAS PROPIEDADES DEL ACERO'

```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

C CALCULANDO LAS TEMPERATURAS, VELOCIDADES, ENERGIA CINETICA TURBULENTA
Y SU DISIPACION

C CALCULO DE LOS COEFICIENTES DEL NODO T(I,J) Y EL VALOR DE T(I,J) COMO

TNEW(I,J)

27 COMP=0.0

PRINT*, 'CALCULO DE LA TEMPERATURA'

DO 28 I=2,NODOSAX

DO 28 J=2,NODOSRA

TCOEF(I,J)=(-(DENSIDAD(I,J)*U(I,J))/DELTAZ+(2*VISCEFEC(I,J))
+/(DELTAZ**2)-(DENSIDAD(I,J)*V(I,J))/DELTAR+ VISCEFEC(I,J)/(RADIO)**2
+/(DELTAR*(DENSIDAD(I,J)*V(I,J)/RADIO)+(2*VISCEFEC(I,J))
+/(DELTAR**2))

TNEW(I,J)=(VISCEFEC(I,J)/(DELTAZ**2)-(DENSIDAD(I,J)*U(I,J))
+/(DELTAZ)/TCOEF(I,J)*T(I+1,J)+(VISCEFEC(I,J)/(DELTAR**2)
+ VISCEFEC(I,J)/(RADIO)**2*DELTAR)-(DENSIDAD(I,J)*V(I,J))/DELTAR
+TCOEF(I,J)*T(I,J+1)+VISCEFEC(I,J)/(DELTAZ**2)*TCOEF(I,J)
+T(I-1,J)+VISCEFEC(I,J)/(DELTAR**2)*TCOEF(I,J)*T(I-1)

COMP=COMP+ ABSCT(I,J)-TNEW(I,J)

T(I,J)=TNEW(I,J)

28 CONTINUE

PRINT*, 'IMPRESION DE LA TEMPERATURA'

PRINT *,(T(I,J),J=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)

PRINT *, 'T(I,J)'

PRINT *, COMP'

WRITE(I,*) 'TEMPERATURA'

WRITE(I,*) (T(I,J),J=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)

WRITE(I,*) 'TERMINACION DE LA TEMPERATURA'

IF (COMP .GE. 0.001) GOTO 27

C CALCULANDO LOS COEFICIENTES DE LA VELOCIDAD EN U DE LOS NODOS U(I,J) Y SU
VELOCIDAD COMO

C UNEW(I,J)

30 COMP=0.0

PRINT*, 'CALCULO DE LAS VELOCIDADES EN DIRECCION Z'

DO 31 I=2,NODOSAX

DO 31 J=2,NODOSRA

UCOEF(I,J)=(-(DENSIDAD(I,J)*U(I,J))/DELTAZ-(DENSIDAD(I,J))
+V(I,J))/DELTAR+(DENSIDAD(I,J)*V(I,J)/RADIO)**2+(4*VISCEFEC(I,J))
+/(DELTAZ**2)+(2*VISCEFEC(I,J)/(DELTAR**2)+VISCEFEC(I,J)/(RADIO)**2
+DELTAR)

UNEW(I,J)=(-(DENSIDAD(I,J)*U(I,J))/DELTAZ+(2*VISCEFEC(I,J))
+/(DELTAZ**2)/UCOEF(I,J)*U(I+1,J)+(DENSIDAD(I,J)*V(I,J))/DELTAR
+VISCEFEC(I,J)/(DELTAR**2)+VISCEFEC(I,J)/(RADIO)**2*DELTAR))
+UCOEF(I,J)*U(I,J+1)+((2*VISCEFEC(I,J)/(DELTAZ**2))/UCOEF(I,J))
+U(I-1,J)+VISCEFEC(I,J)/(DELTAR**2)
+UCOEF(I,J)*U(I,J-1)+(DENSIDAD(I,J)*BETA*GRAVEDAD
+*(T(I,J)-1873.15)/UCOEF(I,J)+VISCEFEC(I,J)/(DELTAZ*DELTAR

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```
+*UCOEFF(I,J))*(V(I+1,J+1)-V(I+1,J)-V(I,J+1)+V(I,J))+VISCEFEF(I,J)
+/(RADIOJ)*DELTAZ*UCOEFF(I,J)*(V(I+1,J)-V(I,J))
```

```
COMP=COMP+ABS(U(I,J))-UNEW(I,J)
U(I,J)=UNEW(I,J)
```

```
31 CONTINUE
```

```
PRINT *'VELOCIDAD EN LA DIRECCION U'
```

```
PRINT *,(U(I,J),J=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)
```

```
PRINT *, COMP
```

```
IF (COMP .GE. 0.001) GOTO 30
```

```
WRITE(1,*)'VELOCIDAD EN DIRECCION AXIAL'
```

```
WRITE(1,*) (U(I,J),J=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)
```

```
WRITE(1,*) 'TERMINACION DE LA VELOCIDAD EN DIRECCION AXIAL'
```

```
PRINT *, (U(I,J),J=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)
```

```
PRINT *, COMP
```

```
C CALCULANDO LA VELOCIDAD EN V EN LA DIRECCION R MEDIANTE LA ECUACION DE CONTINUIDAD
```

```
33 COMP=0.0
```

```
PRINT *'CALCULO DE LAS VELOCIDADES EN LA DIRECCION R'
```

```
DO 34 I=2,NODOSAX
```

```
DO 34 J=2,NODOSRA
```

```
VNEW(I,J)=(RADIOJ)*V(I,J-1)/(DELTAZ+RADIOJ)+((U(I-1,J)-U(I,J))
```

```
+*RADIOJ)*DELTAZ/(DELTAZ*DELTAZ+(RADIOJ)*DELTAZ))
```

```
COMP=COMP+ABS(V(I,J)-VNEW(I,J))
```

```
V(I,J)=VNEW(I,J)
```

```
34 CONTINUE
```

```
PRINT *, (V(I,J),J=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)
```

```
PRINT *, COMP
```

```
WRITE(1,*) 'VELOCIDAD EN DIRECCION RADIAL'
```

```
WRITE(1,*) (V(I,J),J=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)
```

```
WRITE(1,*) 'TERMINACION DE LA VELOCIDAD EN DIRECCION RADIAL'
```

```
PRINT *, COMP
```

```
IF (COMP .GE. 0.001) GOTO 33
```

```
C CALCULANDO LOS COEFICIENTES DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTA Y SUS VALORES EN LOS NODOS
```

```
C COMO KNEW(I,J)
```

```
71 COMP=0.0
```

```
PRINT *'CALCULO DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTA'
```

```
DO 100 I=2,NODOSAX
```

```
DO 100 J=2,NODOSRA
```

```
KCOEF(I,J)=(-(DENSIDAD(I,J)*U(I,J))/DELTAZ+(2*VISCEFEF(I,J))
```

```
+/(SIGMAK*(DELTAZ**2))-(DENSIDAD(I,J)*V(I,J))/DELTAZ
```

```
+/(DENSIDAD(I,J)*V(I,J))/RADIOJ)+(2*VISCEFEF(I,J))/(SIGMAK
```

```
+*(DELTAZ**2))+VISCEFEF(I,J)/(SIGMAK*RADIOJ)*DELTAZ))
```

```

      KNEW(I,J)=(VISCTURB(I,J)/KCOEF(I,J))*((U(I,J+1)-2*U(I,J)+U(I,J-1))
+/(DELTA R**2))+ (VISCTURB(I,J)/(RADIO(I))*KCOEF(I,J))*((U(I,J)
+U(I,J-1))/DELTA R)-(DENSIDAD(I,J)*E(I,J)/KCOEF(I,J))
+*(U(I+1,J)-2*U(I,J)+U(I-1,J))/(DELTA Z**2)/KCOEF(I,J))
+*(VISCFEFC(I,J)/SIGMAK*(DELTA R**2)-VISCFEFC(I,J)
+/(RADIO(I))*SIGMAK*DELTA R-(DENSIDAD(I,J)*V(I,J)/DELTA R)
+KCOEF(I,J)*K(I+1,J)+(VISCFEFC(I,J)/SIGMAK*(DELTA Z**2))
+-(DENSIDAD(I,J)*U(I,J)/DELTA Z)/KCOEF(I,J)*K(I+1,J)+VISCFEFC(I,J)
+/(SIGMAK*(DELTA Z**2))*KCOEF(I,J))*K(I-1,J)+VISCFEFC(I,J)/(SIGMAK
+*(DELTA R**2))*KCOEF(I,J))*K(I,J-1)

```

```

      COMP=COMP+ABS(K(I,J)-KNEW(I,J))
      K(I,J)=KNEW(I,J)

```

100 CONTINUE

```

      PRINT *, 'ENERGIA CINETICA TURBULENTA'
      PRINT *, ((K(I,J),J=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)
      PRINT *, COMP
      WRITE(I,*) 'ENERGIA CINETICA TURBULENTA'
      WRITE(I,*) ((K(I,J),J=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)
      WRITE(I,*) 'TERMINACION DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTA'

```

```

      IF (COMP.GE.0.001) GO TO 71

```

```

      PRINT *, 'ENERGIA CINETICA TURBULENTA'
      PRINT *, ((K(I,J),J=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)
      PRINT *, COMP

```

C CALCULAR LOS COEFICIENTES DE LA DISIPACION DE LA ENERGIA CINETICA
TURBULENTA Y SUS VALORES

C EN LOS NODOS COMO ENEW(I,J)

101 COMP=0.0

```

      PRINT *, 'CALCULANDO DISIPACION DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTA'

```

```

      DO 120 I=2,NODOSAX
      DO 120 J=2,NODOSRA
      ECOEF(I,J)=(DENSIDAD(I,J)*U(I,J))/DELTA Z-(DENSIDAD(I,J)*V(I,J)
+/(DELTA R*(DENSIDAD(I,J)*V(I,J)/RADIO(I)-(2*VISCFEFC(I,J)/SIGMAE
+*(DELTA Z**2)+(2*VISCFEFC(I,J)/SIGMAE*(DELTA R**2))+VISCFEFC(I,J)
+/(RADIO(I))*SIGMAE*DELTA R)-(C1*VISCTURB(I,J)/K(I,J))*((U(I,J+1)
+2*U(I,J)+U(I,J-1))/DELTA R**2)-(C1*VISCTURB(I,J)/K(I,J))
+*(U(I+1,J)-2*U(I,J)+U(I-1,J))/(DELTA Z**2))
+-(VISCTURB(I,J)*C1)/RADIO(I))*K(I,J))*((U(I,J)
+U(I,J-1))/DELTA R)+(DENSIDAD(I,J)*E(I,J)*C2)/K(I,J)

```

```

      ENEW(I,J)=(VISCFEFC(I,J)/SIGMAE*(DELTA Z**2)-(DENSIDAD(I,J)
+*U(I,J)/DELTA Z)/ECOEF(I,J)*E(I+1,J)+(VISCFEFC(I,J)/RADIO(I)
+*SIGMAE*DELTA R)+VISCFEFC(I,J)/SIGMAE*(DELTA R**2)-(DENSIDAD(I,J)
+*V(I,J)/DELTA R)/ECOEF(I,J)*E(I,J+1)+VISCFEFC(I,J)/SIGMAE
+*(DELTA Z**2))*ECOEF(I,J)*E(I-1,J)+VISCFEFC(I,J)/SIGMAE
+*(DELTA R**2))*ECOEF(I,J))*E(I,J-1)

```

```

      COMP=COMP+ABS(E(I,J)-ENEW(I,J))
      E(I,J)=ENEW(I,J)

```

120 CONTINUE

```
PRINT * 'DISIPACION DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTA'  
PRINT * '(E(I,J)=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)  
PRINT * 'FINAL DISIPACION DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTA'  
PRINT * , COMP'
```

```
WRITE(1,*) (E(I,J),J=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)  
WRITE(1,*)
```

```
IF (COMP .GE. 0.001) GOTO 101  
PRINT * 'DISIPACION DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTA'  
PRINT * '(E(I,J)=1,NODOSRADIALES),I=1,NODOSAXIALES)  
PRINT * 'FINAL DISIPACION DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTA'  
PRINT * , COMP'
```

.....
.....
.....
.....

C FINALIZA LAS OPERACIONES DE U, V, T, K, E.....

```
129 DO 130 I=NODOSAXIALES,1,-1  
DO 130 J=NODOSRADIALES,1,-1  
PRINT * , U(I,J), V(I,J), T(I,J), K(I,J), E(I,J)
```

130 CONTINUE

```
PRINT * , COMP  
WRITE(1,*) 'ITERACION FINAL MOSTRANDO LOS RESULTADOS '
```

```
DO 131 I=NODOSAXIALES,1,-1  
DO 131 J=1,NODOSRADIALES  
WRITE(1,*) U(I,J),V(I,J),T(I,J),K(I,J),E(I,J)
```

131 CONTINUE

```
ITER=ITER+ 1  
PRINT * ,ITER  
PRINT * ,ITER  
WRITE(1,*)ITER  
WRITE(1,*)ITER
```

```
IF (COMP .GE. EPSILON ) THEN  
COMP=0.0  
GOTO 20  
END IF
```

END

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

BIBLIOGRAFÍA.

LIBROS.

1. Bird, R. Byron et al., *Fenómenos de Transporte*. Edi. Reverté S. A., Impreso en España, 1980.
2. Beek, W. J., *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Great Britain, 1975.
3. Borse, G.J., *Numerical Methods with Matlab*, PWS Publishing Company, New York, 1997.
4. Böhme, G., *Non-Newtonian Fluid Mechanics* Elsevier Science Publishers, New York, USA, 1987.
5. Brodkey, Robert S., *Transport Phenomena. A Unified Approach*, McGraw-Hill Book Company, 1989.
6. Burden, Richard L., *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, D. F., 1985.
7. Carnahan, B. y Luther, H. A., *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, USA, 1969.
8. Chorlton, F., *Vector & Tensor Methods*, Edi. Ellis Horwood Limited, London, 1976
9. Daily, J. W. et al., *Fluid Dynamics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Massachusetts, 1865.
10. Euler, L., *Introductio in Analysin Infinitorum. English Translation: Introduction to Analysis of the Infinite, Book I, II*, Springer-Verlag, New York, 1988.
11. Evans, J. Blackledge g., *Numerical Methods in Heat Transfer*, John Wiley & Sons, Great Britain, 1981.
12. Gerald, Curtiss F., *Análisis Numérico*, Alfaomega, México. D. F., 1991.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

-
13. Giedt, Warren H., *Principles of Engineering Heat Transfer*, D. Van Nostrand Company, USA, 1957.
 14. Giordano, Frank R., et al., *A First Course in Mathematical Modeling*, Brooks/Cole Publishing Company, USA, 1997.
 15. Gordon, Geoffrey, *Simulación de Sistemas*, Edi. Diana, México, D. F., 1980.
 16. Himmelblau, David M., et al., *Análisis y Simulación de Procesos*, Edi. Reverté, Barcelona, España, 1992.
 17. Incropera, P. Frank y DeWitt, David P., *Fundamentos de Transferencia de Calor*, Prentice Hall, México, D. F., 1999.
 18. Kobayashi, Hisashi, *Modeling and Analysis. An Introduction to System Performance Evaluation Methodology*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1981.
 19. Kreith, Frank y Bohn, Mark S., *Principles of Heat Transfer*, PWS Publishing Company, USA, 1997.
 20. Lamb, H., *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, London, 1932.
 21. Levenspiel, O., *Flujo de Fluidos e Intercambiadores de Calor*, Editorial Reverté, México, D. F., 1998.
 22. Levi, Enzo, *Mecánica del Medio Continuo*, Editorial Limusa, México, D. F., 1991.
 23. Lewis, R. W., *Numerical Methods in Heat Transfer*, John Wiley & Sons, Great Britain, 1981.
 24. Luthé, Rodolfo et al., *Métodos Numéricos*, Edi. Limusa, México, D. F., 1988.
 25. Marón, Melvin J., *Análisis Numérico un Enfoque Práctico*, Compañía Editorial Continental, México, D. F., 1995.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

-
26. Minicowycz, W. S. and Sparrow, E. M., *Handbook of Numerical Heat Transfer*, Hohn Wiley & Sons, Inc., USA, 1988.
27. McOwen, Robert C., *Partial Differential Equations Methods and Applications*, Prentice-Hall, USA, 1996.
28. Nakamura, Shoichiro, *Métodos Numéricos Aplicados con Software*, Prentice Hall Hispanoamericana, México, D. F., 1992.
29. Necati, Özisik M., *Heat Transfer. A Basic Approach*, McGraw-Hill, Singapore, 1985.
30. Nieves H., Antonio y C. Dominguez, F., *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*, Editorial Continental, México, D. F., 1995.
31. Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and FluidFlow*, Hemisphere, Washington, D. C., 1980.
32. Pope, Stephen B., *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000
33. Rohsenow, M. Warren, *Heat, Mass and Momentum Transfer*, Prentice Hall, Inc., New York, 1961.
34. Sissom, E., *Elements of Transport Phenomena*, Mc Graw-Hill, 1972.
35. Szekely, J., *Fenómenos de Flujo de Fluidos en Procesamiento de Metales*, Noriega Editores, México, D. F., 1988.
36. Szekely, J., et al., *Mathematical Modeling of Materials Processing Operations*, The Metallurgical Society, USA, 1987.
37. Welty, James R., et al., *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons, USA, 1984.
38. Wrobel, L. C., et al., *Advanced Computational Methods in Heat Transfer, Vol. 2: Natural and Forced Convection*, Springer-Verlag, Great Britain, 1990.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

REVISTAS.

39. Bahadir, A. R. (2002). A fully implicit finite-difference scheme for two-dimensional Burgers' equations. Applied Mathematics and Computation, Article in press.
40. Brazier, P. H. (1974). An optimum sor procedure for the solution of elliptic partial differential equations with any domain or coefficient set. Methods Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, 335-347.
41. Choudhary, S. K. and Mazundar, D. (1995). Mathematical modelling of fluid flow, heat transfer and solidification phenomena in continuous casting of steel. Steel Research, Vol. 66, No.5, 199-205.
42. Cortés-Molina, A. (2002). A direct finite-difference scheme for solving PDEs over general two-dimensional regions. Applied Numerical Mathematics, 40, 219-233.
43. Damle, C. and Sahai, Y. (1996). A criterion for water modeling of non-isothermal melt flows in continuous casting tundishes. ISIJ International, Vol. 36, No. 6, 681-689.
44. Dehghan, M. (2001). Crank-Nicolson finite difference method for two-dimensional diffusion with an integral condition. Applied Mathematics and Computation, 124, 17-27.
45. Dehghan, M. (2002). Fully explicit finite-difference methods for two-dimensional diffusion with an integral condition. Nonlinear Analysis, 48, 637-650.
46. Deng, G. B. et al. (2001). A new fully coupled method for computing turbulent flows. Computers & Fluids, 30, 445-472.
47. Gupta, M. and Sahai, Y. (2000). Mathematical modeling of fluid flow, heat transfer and solidification in two-roll melt drag thin strip casting of steel. ISIJ International, Vol. 40, No. 2, 144-152.
48. Hunt, J. C. and Vassilicos, J. C. (1991). Kolmogorov's contributions to the physical and geometrical understanding of small-scale turbulence and recent developments. Proc. R. Soc. London Ser. A, 434, 183-210.

-
49. Kolmogorov, A. N. (1941a). Disipation of energy in locally isotropic turbulence. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 32, 19-21 [En Ruso]
50. Kolmogorov, A. N. (1941a). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 30, 299-303 [En Ruso]
51. Kolmogorov, A. N. (1942). The equations of turbulence motion in an incompressible fluid. Izvestia Acad. Sci., USSR; Phys. 6, 56-58 [En Ruso].
52. Kolmogorov, A. N. (1991). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds Numbers. Proc. R. Soc. London Ser. A, 434, 9-13.
53. Kraichnan, R. H. (1991). Turbulent cascade and intermittency growth. Proc. R. So. London Ser. A, 434, 65-78.
54. Kriventsev, V. and Ninokata, H. (2000). An effective finite-difference scheme for problems of turbulent heat and mass transfer. Nuclear Engineering and Design, 200, 11-21.
55. Launder, B. E. and Spalding, D. E. (1974). The numerical computation of turbulens flows. Comp. Meth. Mech. Eng., 3, 269-278.
56. Sahai, Y. and Emi, T. (1996). Criteria for water modeling of melt flow and inclusion removal in continuous casting tundishes. ISIJ International, Vol. (36), No. 9, 1166-1173.
57. Spalding, D. B. (1981). A general purpose computer program for multi-dimensional one and two-phase flow. Mathematics and Computer in Simulation, Vol. XXIII, 267-276.
58. Spalding, D. B. (1991). Kolmogorov's two-equation model of turbulence. Proc. R. Soc. London Ser. A, 434, 211-216.
59. Sreenivasan, K. R. (1991). On local isotropy of passive scalars in turbulent shear flows. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 434, 165-182.

TESIS CON

FORN

-
60. Sun, T. and Yang, D. (2002). The difference streamline diffusion methods for Sobolev equations with convection-dominated term. Applied Mathematics and Computation, 125, 325-345.
61. Xie, Z. et al. (2002). An explicit fourth-order staggered finite-difference time-domain method for Maxwell's equations. Journal of Computational and Applied Mathematics. En prensa.
62. Yokaya, S. et al. (1998). Numerical analysis of transient flow in a water bath contained in a cylindrical vessel suddenly set in rotation. ISIJ International, No. 5, 421-429.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

SIMBOLOGÍA

Δx = tamaño de paso en la dirección x

α = difusividad térmica

a_1, a_2, a_3, etc = coeficientes de la ecuación discretizada

β = coeficiente térmico de expansión volumétrica

$C_1, C_2, C_3, \dots, C_N$ = Término independiente de la ecuación discretizada

C_V = calor específico a volumen constante

C_p = calor específico a presión constante

$\frac{D}{Dt}$ = derivada sustancial o total respecto a t

div = divergencia de un vector

E = energía interna térmica

ϵ = error

F = fuerza

$f'(x)$ = derivada respecto a x

$f(x)$ = función respecto a x

g_c = factor de conversión de unidades

g_x, g_y, g_z = componentes de la aceleración gravitacional

i = nodo especificado en x

j = nodo especificado en y

k = nodo especificado en z

k = conductividad térmica

k = número de iteración

m = masa

m = número de nodos en x

n = número de nodos en y

N = número en general

p = presión estática

ρ = densidad

ρ_m = densidad media

q = razón de generación de calor por unidad de volumen

T = temperatura

T_∞ = temperatura del fluido

T_w = temperatura en la pared

t = tiempo

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ = componentes del esfuerzo normal

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, etc.$ = componentes del tensor esfuerzo tangencial

μ = viscosidad absoluta

u = velocidad en la dirección x

v = velocidad en la dirección y

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

w = velocidad en la dirección z

x = coordenada

y = coordenada

z = coordenada

Δx = incremento en x

Δy = incremento en y

Δz = incremento en z

∇^2 = operador laplaciano

∇ = operador nábla

$| |$ = valor absoluto

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN