

20321  
30



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
"ACATLÁN"

IMPORTANCIA DEL AJUSTE DE DATOS DE  
MORTALIDAD EN EL SEGURO DE VIDA

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

MARÍA LAURA PINEDA ZAPATA

ASESOR: ACT. CONSUELO DEL CARMEN HOYO MARTÍNEZ.

ACATLÁN, EDO. DE MÉXICO. AGOSTO DE 2003



A



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Índice

## INDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>3</b>
<b>I. DESARROLLO DE LA MORTALIDAD EN MÉXICO</b>	<b>6</b>
1.1 MORTALIDAD GENERAL	7
1.2 EVOLUCIÓN SOCIOECONÓMICA DE MÉXICO	9
1.2.1 EL DECLIVE DE LA MORTALIDAD	11
1.3 EL DESCENSO DE LA FECUNDIDAD	11
1.4 CAMBIOS EN LA ESTRUCTURA POR EDAD Y EL "BONO DEMOGRÁFICO"	13
1.5 MIGRACIÓN A LOS ESTADOS UNIDOS	14
1.6 BASES DEMOGRÁFICAS UTILIZADAS EN LOS SEGUROS DE VIDA	17
1.7 TABLA DE MORTALIDAD	17
1.7.1 ELEMENTOS DE UNA TABLA DE MORTALIDAD	19
<b>II. METODOLOGÍA DE CONSTRUCCIÓN DE TASAS BRUTAS DE MORTALIDAD</b>	<b>21</b>
2.1 INTRODUCCIÓN	22
2.2 EXPOSICIÓN	23
2.3 SUPUESTOS DE MORTALIDAD	23
2.4 COMPARACIÓN DE LOS SUPUESTOS DE MORTALIDAD	25
2.5 MÉTODO SERIATIM	26
2.5.1 APLICACIÓN DEL MÉTODO	29
2.6 MÉTODO DE REGISTRO INDIVIDUAL AGRUPADO	31
2.6.1.1 APLICACIÓN DEL MÉTODO	35
2.7 FÓRMULA DE EXPOSICIÓN POR VALUACIÓN PROGRAMADA	37
2.7.1 FÓRMULAS DERIVADAS DE UNA DIAGONAL	38
2.7.2 FÓRMULAS DERIVADAS DE DIAGONAL DOBLE	41
2.7.3 FÓRMULAS COMPUESTAS	43
2.7.4 APLICACIÓN DEL MÉTODO	44
2.8 DETERMINACIÓN DEL PERIODO DE ESTUDIO	46
2.9- CÁLCULO DE LA EXPOSICIÓN EX	46
2.10 CÁLCULO DE LAS TASAS BRUTAS DE MORTALIDAD $u_x$	49
2.11 INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS	49
<b>III. GRADUACIÓN DE LAS TASAS BRUTAS DE MORTALIDAD</b>	<b>51</b>
3.1 INTRODUCCIÓN	52
3.2 CONSIDERACIONES ESTADÍSTICAS	52
3.3 MÉTODOS DE GRADUACIÓN	55
3.4 LA ACEPTABILIDAD DE LA GRADUACIÓN	56
3.5 PRUEBA DE SUAVIDAD	56
3.6 PRUEBA DE AJUSTE	57

AUTORIZA la Dirección General de Bibliotecas de UNAM a difundir en formato electrónico el contenido de mi trabajo titulado:  
 NOMBRE: MARIA LAURA PINEDA ZAPATA  
 FECHA: 11-08-03  
 FUSMA: \_\_\_\_\_

  
 1

3.7.1 AGRUPAMIENTO DE LOS DATOS	59
3.7.2 TRAZADO DE VALORES	60
3.7.3 INTERPRETACIÓN DE LA GRÁFICA	61
3.8 EL MÉTODO DE INTERPOLACIÓN	62
3.8.1 AGRUPAMIENTO DE LOS DATOS	62
3.8.2 PUNTOS PIVOTALES	63
3.8.3 INTERPOLACIÓN	64
3.9 EL MÉTODO DEL PROMEDIO MÓVIL AJUSTADO	65
3.9.1 DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES	66
3.10 GRADUACIÓN POR FÓRMULA MATEMÁTICA	68
3.10.1 FORMA GOMPERTZ	69
3.10.2 FORMA MAKEHAM	71
<b>IV. COMPARACIÓN GENERAL DE LOS MÉTODOS. CASO PRACTICO</b>	<b>74</b>
4.1 INTRODUCCIÓN	75
4.2 COMPARACIÓN DE MÉTODOS	76
4.3 PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE Y ANÁLISIS DE TABLAS DE CONTINGENCIA	77
4.3.1 LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE JI-CUADRADA	78
4.3.2 EL ESTADÍSTICO DE KOLMOGOROV-SMIRNOV	80
4.4 ELECCIÓN DEL MÉTODO	85
4.5 INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS	86
4.6 EVALUACIÓN DE PÉRDIDAS O GANANCIAS POR MORTALIDAD	87
<b>V. CONCLUSIONES</b>	<b>90</b>
<b>VI. ANEXOS</b>	<b>95</b>
ANEXO I: VALORES DE TASAS BRUTAS Y DE LOS MÉTODOS DE GRADUACIÓN	96
ANEXO II: VALORES DE CUANTILES DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA ESTADÍSTICA $D_n$ DE KOLMOGOROV-SMIRNOV	98
ANEXO III: VALORES DE CUANTILES DE LA DISTRIBUCIÓN DE JI-CUADRADA	99
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>102</b>

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Introducción

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

En los últimos años, el seguro de vida ha tomado mucha fuerza debido a la protección, ahorro y flexibilidad que otorga a quienes lo contratan. Gracias a este crecimiento, la posibilidad de contar con estadísticas e información acerca de quienes se aseguran es mayor y esto nos ofrece la oportunidad de estudiar con mayor exactitud el resultado del negocio.

En lo que concierne a estimaciones del comportamiento de la mortalidad de carteras aseguradas, los estudios que se han realizado son muy pocos y muy espaciados, lo que puede generar un alejamiento de la realidad en determinado momento.

El presente trabajo lo que pretende es, en primera instancia, mostrar algunos de los métodos de ajuste que existen y aplicarlos en una cartera hipotética para luego determinar cuál es el que mejor se ajusta a dicha población y, en base a esto, poder determinar el impacto que tiene ésta estimación al ser comparada contra la hipótesis demográfica que se utiliza en el mercado.

En el capítulo I se realiza una breve sinopsis histórica del desarrollo de la mortalidad en México, y la teoría fundamental referente a las Tablas de Mortalidad, abarcando aspectos del desarrollo de la información demográfica.

La teoría que respalda la construcción de los valores iniciales en los que se fundamenta la graduación y la estimación de las probabilidades de muerte se desarrolla en el capítulo II. Se analizan 3 de las metodologías más conocidas, a saber:

1. *El Método Seriatim*, el cual analiza la exposición al riesgo a partir del análisis individual de cada vida observada, de manera que se determine el aporte del individuo para cada intervalo de edad  $(x, x+1)$ , con el objetivo de encontrar la exposición total al riesgo en cada intervalo.
2. *El Método de Registro Individual Agrupado*, el cual es mayormente utilizado en situaciones para las cuales no está disponible el registro de nacimiento en los datos de los asegurados, entrada o salida del estudio, de manera tal que deben realizarse algunos supuestos en torno a estas variables, para poder encontrar así la exposición al riesgo en cada intervalo, y por último,
3. *Fórmula de Exposición por valuación Programada* que considera un grupo de estudio el cual es valuado periódicamente con el fin de determinar tanto las muertes del periodo, como el remanente de vidas al final del mismo.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

El capítulo III está dedicado a fundamentar la teoría que apoya el proceso de graduación, desarrollando algunos métodos paramétricos y no paramétricos, para luego en el capítulo IV, realizar el análisis de los resultados y determinar si es posible o no establecer un patrón aceptable de mortalidad para las vidas aseguradas, y con base en éstos, encontrar las posibles ganancias o pérdidas por mortalidad para la compañía, comparándolas con las hipótesis demográficas actuales.

La investigación en esta tesis muy probablemente presente una debilidad muy fuerte desde el punto de vista de la cantidad de datos que se lleguen a manejar. La teoría de la construcción de tablas y de graduación no menciona cuál debe ser la cantidad mínima de datos con los que se debe trabajar, de manera que esto representa un aspecto vulnerable de la investigación. En estas circunstancias, se hace dicha salvedad, pensando que éste es un primer intento por lograr un modelo teóricamente consistente.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## I. Desarrollo de la Mortalidad en México

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 1.1 Mortalidad General

El primer acercamiento al fenómeno de la mortalidad en México está basado en dos indicadores: la *tasa bruta de mortalidad* y la *esperanza de vida al nacimiento*<sup>1</sup>. El primero de ellos es un buen indicador de la evolución de la mortalidad en el tiempo, siempre que la estructura por edad de la población no haya sufrido cambios considerables. El segundo indicador, libre de la influencia de cualquier tipo de estructura, reforzará el análisis de la evolución de la mortalidad en México.

Los hechos ocurridos en el decenio 1911-1921 y la carencia de estadísticas no han permitido hasta el momento estimación alguna sobre los niveles de mortalidad que prevalecieron en ese periodo. No obstante, en el periodo revolucionario y en el decenio siguiente, se llevaron a cabo algunas acciones sanitarias cuyos efectos se aprecian al disponerse de información estadística.

A partir de 1930, la trayectoria descendente de la mortalidad aparece con claridad como se puede ver en el siguiente cuadro:

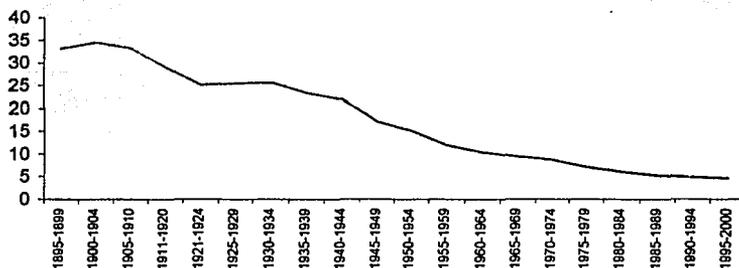
Periodo	Tasa (‰)	Periodo	Tasa (‰)
1895-1899	33.1	1950-1954	15.1
1900-1904	34.5	1955-1959	12.01
1905-1910	33.2	1960-1964	10.34
1911-1920	29.15	1965-1969	9.39
1921-1924	25.1	1970-1974	8.62
1925-1929	25.5	1975-1979	7.04
1930-1934	25.6	1980-1984	5.97
1935-1939	23.3	1985-1989	5.22
1940-1944	22	1990-1994	4.78
1945-1949	17	1995-2000	4.58

Cuadro 1.1.- Comportamiento de la mortalidad (1895-2000) en México

Fuente: INEGI y SSA

<sup>1</sup> La tasa bruta de mortalidad es la relación entre el número de defunciones que ocurren durante un periodo determinado, generalmente un año, y la población media de dicho periodo o a mitad del mismo. La esperanza de vida al nacimiento es el número medio de años que se espera vivirá un recién nacido si se mantienen constantes las condiciones de mortalidad del momento.

### Tasa de mortalidad general 1895-2000



Gráfica 1.1.- Comportamiento Gráfico de la mortalidad (1895-2000) en México

En vista de lo escaso de los datos y de su mala calidad, los autores crean diversos métodos a fin de obtener el mayor provecho de la información. Para los años anteriores a 1850, dada la ausencia de datos sobre población se calculó la relación entre el número de nacimientos y defunciones para, de esa manera, estudiar el comportamiento de la mortalidad. A medida que contaron con mayor cantidad de información, los autores construyeron tablas de mortalidad parciales, basándose en la hipótesis de que la población era estacionaria.<sup>2</sup> Así, la carencia de datos apropiados originan resultados sólo aproximados.

En suma, la deficiente calidad de los datos anteriores a 1940 y los problemas inherentes a los métodos de estimación han impedido la obtención de parámetros confiables, particularmente para el periodo de 1895 a 1921.

Los resultados obtenidos proporcionan, no obstante, las principales características de la mortalidad de la época, como:

- Elevados niveles de mortalidad sin reducción evidente antes de la primera mitad del siglo XIX
- Altos niveles, prácticamente constantes, a lo largo del Porfiriato
- Fuerte incremento de la mortalidad durante el periodo revolucionario, originado no solamente por las muertes violentas, sino también por la aparición de

<sup>2</sup> El método de cálculo incluye solamente los datos sobre defunciones después de los 5 años de edad, en vista de los graves problemas de omisión observados cuando se trata de defunciones de menores de 5 años de edad. Las defunciones observadas han sido consideradas como defunciones de tabla y, así se han construido tablas de mortalidad que comienzan a los 5 años.

diversas epidemias (influenza española especialmente) que tuvieron un efecto devastador.

- Ligera disminución de la mortalidad al término de la Revolución.

Los estudios sobre la mortalidad de la época moderna se han multiplicado; entre ellos, la construcción de las tablas de mortalidad que han sido construidas, en general a partir de los datos obtenidos de:

- **Registro Civil:** fuente más importante para el estudio de la mortalidad, ya que proporciona los datos relativos al número y características de las personas fallecidas.
- **Censos de población:** que proporcionan los datos sobre la población expuesta al riesgo, lo que permite el cálculo de las tasas de mortalidad y
- Más recientemente, y para fines específicos, de las **compañías de seguros** que nos proporciona información acerca de la población asegurada.

## 1.2 Evolución socioeconómica de México

Con el objeto de comprender mejor la evolución de la mortalidad en México, se presenta un breve análisis de la evolución socioeconómica del país.

La evolución de la mortalidad en México desde el fin de la Revolución puede dividirse en etapas:

- **Los años veinte y treinta: inicio del descenso**

A partir de esta época es posible observar en la mortalidad en México una modesta, pero evidente disminución. Después de la última crisis importante de mortalidad (efectos de la Revolución) su disminución se observa claramente. Puede decirse que ésta disminución se relaciona con las modificaciones en el nivel de vida de la población.

- **Los años cuarenta y cincuenta: disminuciones extraordinarias**

La disminución de la mortalidad durante este periodo, tiene su explicación, por un lado, en la introducción de las nuevas técnicas médicas de prevención y salud en los programas de eliminación de agentes patógenos y, por el otro, en el progreso económico y social del país. Se inician las campañas nacionales de vacunación y la utilización de insecticidas. Sin embargo, el importante progreso socioeconómico también contribuyó: se incrementó la disponibilidad de alimentos (reforma agraria y modernización de la agricultura); se pusieron en marcha diversos programas de integración y desarrollo social (IMSS) así como el desarrollo y aplicación de una legislación del trabajo más favorable a la clase obrera y programas de subsidio a ciertos productos de primera necesidad.

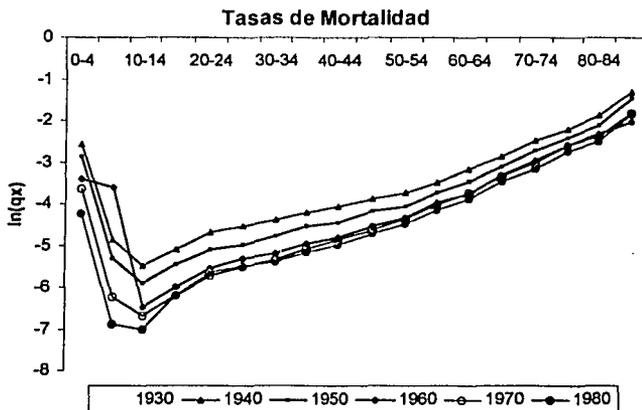
• **Los años sesenta: reducción de la velocidad del descenso**

Esta disminución se encuentra asociada al incremento proporcional de las muertes por accidentes y violencia, enfermedades circulatorias y cáncer. La desaceleración muestra también la importancia de la tecnología médica en la fuerte disminución ocurrida durante el periodo precedente, dado que al desaparecer las defunciones más fáciles de evitar, los progresos se hicieron cada vez más lentos, pues éstos pasaron a depender principalmente de los progresos del nivel de vida de la población.

▪ **Los años setenta: ¿aceleración temporal del descenso?**

La disminución coincide con nuevos avances sociales: se incrementa la población cubierta por alguna institución de seguridad social. No obstante, las crisis económicas han generado una nueva desaceleración en los ritmos de descenso de la mortalidad.

Por lo que se refiere a la edad, ha prevalecido en México, para cualquier época, el patrón universal de la mortalidad: elevadas tasas de mortalidad en el primer año de vida que descienden rápidamente hasta llegar a valores mínimos entre los 10 y 14 años; a partir de estas edades las tasas vuelven a incrementarse, de manera lenta en un principio y a mayor ritmo conforme aumenta la edad. Este hecho se presenta en la siguiente gráfica:



Gráfica 1.2.- Comparativo de Tasas centrales de mortalidad

El descenso de la mortalidad en las edades jóvenes, menos de 15 años, ha provocado que esta población incremente su importancia relativa, por lo que la población se ha rejuvenecido y la edad media ha descendido, lo cual tiene consecuencias en el desarrollo económico y social del país.

### 1.2.1 El Declive de la Mortalidad

Como ya hemos comentado la población de México atraviesa desde hace varias décadas por una fase de plena y acelerada transición demográfica. La disminución de la mortalidad ha venido ocurriendo desde la primera mitad del siglo XX. Entre 1930 y 1960, el número de defunciones se redujo de 27 a 12 individuos por cada 1,000 habitantes, respectivamente. En 1980 este mismo indicador (conocido como tasa bruta de mortalidad) se redujo a 7 defunciones por cada mil habitantes, a 5 en 1990 y a 4 en el año 2000 (INEGI 2001).

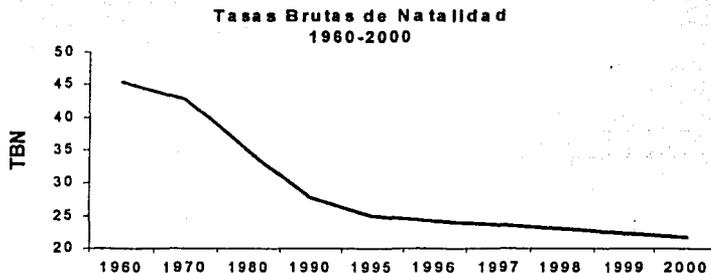
Esta tendencia a la baja en el número de defunciones es reflejo, por un lado, de la disminución de la mortalidad durante los primeros años de vida (mortalidad infantil) y de la reducción del riesgo de morir, es decir del aumento en la esperanza de vida. Respecto a la mortalidad infantil vemos que mientras que en 1930 morían 156 niños por cada mil niños que nacían, esa cifra se redujo a 53 en 1980, a 36 en 1990 y a 25 en el año 2000. Por cuanto a la esperanza de vida, en 1930 los hombres en promedio vivían 33 años y las mujeres 35 años. Las cifras aumentaron a 58 años para hombres y a 61 años para mujeres en 1970, alcanzando valores de 73 y 77 años respectivamente para el año 2000.

Esta espectacular caída de la mortalidad en México, que obedeció en buena medida al aumento en el control y regulación de enfermedades infecciosas y parasitarias, y al avance en general de la infraestructura médica y sanitaria del país, no se presenta de una forma homogénea a lo largo del territorio nacional. Como ejemplo podríamos presentar los indicadores de la mortalidad infantil para el año 2000. Se había señalado que a escala nacional, durante ese año murieron en promedio 25 niños por cada 1,000 nacidos vivos registrados. Sin embargo, esa cifra fue de 30.7 niños en Chiapas, 30.5 en Oaxaca, 28.6 en Guerrero, mientras que en el Distrito Federal fue de 19.8 muertes infantiles por cada mil nacidos vivos, 20.9 en Nuevo León y 21.9 en Aguascalientes.

### 1.3 El Descenso de la Fecundidad

La disminución en los niveles de la mortalidad antecedió a la disminución de la fecundidad. Ello explica por qué durante las décadas de 1960 y 1970, México vivió tasas de crecimiento tan elevadas, en realidad históricas. El inicio del descenso de la fecundidad en México lo podemos ubicar a mediados de los años sesenta. De acuerdo con cifras del Consejo Nacional de Población, la tasa bruta de natalidad (nacimientos por cada mil habitantes) fue de 45 en 1960 y de 41.7 en 1970. Aunque en estos diez años se presenta ya una incipiente disminución de la fecundidad, es entre 1970 y 1980 en que el descenso es mucho más marcado,

pues el número de nacimientos por cada mil habitantes bajó a 35 en 1980, a 28 en 1990 y a 23.4 en 2000.



**Gráfica 1.3.- Tasas Brutas de Natalidad 1960-2000.**  
Fuente INEGI, 2001

La disminución de la fecundidad es sin duda el principal determinante de la reducción del crecimiento de la población y de los cambios recientes en la composición por edad de la población mexicana (Gómez de León, 1999). A su vez la disminución de la fecundidad es un claro resultado (entre otros muchos factores) del prevaeciente uso de métodos anticonceptivos. Así vemos como en 1976, únicamente el 30 por ciento de las mujeres casadas o unidas en edad fértil, eran usuarias de algún método de planificación familiar. Para fines de la década de los noventa, las cosas habían cambiado radicalmente, ya que en 1997, el 68 por ciento de las mujeres unidas eran usuarias de algún método anticonceptivo, mientras que el 15 por ciento eran ex-usuarias, y sólo el 17 por ciento de estas mujeres nunca fueron usuarias.

Al igual que en el caso de la mortalidad, la disminución de los niveles de fecundidad no se presentó de manera homogénea en todo el país. Así vemos como mientras que a escala nacional la tasa global de fecundidad (hijos por mujer en edad fértil) en el año 2000 fue de 2.4 hijos, en estados como Puebla, Guerrero, Oaxaca y Chiapas el número de hijos por mujer fue de 3, en tanto que en entidades como el Distrito Federal, Baja California Sur y Nuevo León el número promedio de hijos por mujer fue menor a 2.1.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 1.4 Cambios en la Estructura por Edad y el "Bono Demográfico"

La caída de la fecundidad significó un proceso gradual de estrechamiento de la base de la pirámide de población y el desplazamiento de generaciones numerosas hacia las edades centrales, es decir hacia las edades comprendidas entre los 15 y 64 años. De esta forma, pese a que la población menor de 15 años aumentó alrededor de 50 por ciento entre 1970 y 2000 (de 22 a 33 millones de personas), esa misma población disminuyó su importancia respecto de la población total, de 46 a 34 por ciento. En tanto el grupo de 15 a 64 años aumentó su tamaño en 2.5 veces, al pasar de 24 millones en 1970 a 59 millones en el año 2000. El aumento en la esperanza de vida significó a su vez un crecimiento notable del grupo de edad de 65 años o más, tanto en términos absolutos como relativos: mientras que en 1970 este grupo contaba con 1.8 millones de individuos, para el año 2000 aumentó a casi 5 millones de personas.

La transformación en la estructura por edad de la población mexicana ha sido asumida en círculos oficiales de México como un proceso que propiciará una relación cada vez más ventajosa entre la población dependiente (menores de 15 años y mayores de 65) y la población en edad laboral (entre 15 y 64), lo que abrirá durante las próximas tres décadas una "ventana de oportunidad transitoria" o "bono demográfico", al aumentar más rápidamente la población en edad laboral que la población dependiente" (Poder Ejecutivo Federal, 2001). El indicador que se emplea para mostrar la relación entre la población dependiente y la población en edad laboral se le conoce como "índice de dependencia"<sup>3</sup>, el cual indica una disminución entre 1970 y 2000 de 99.7 por ciento a 64.3 por ciento, respectivamente.

No cabe duda que el aumento de la población en edad productiva o "bono demográfico"<sup>4</sup> es considerado por el Estado Mexicano como un factor de gran importancia para el desarrollo. Sin embargo, la paradoja que interesa discutir aquí es la supuesta ventaja que trae consigo el aumento de la población en edad laboral, frente al hecho de que anualmente México "pierde" 310 mil individuos (o posiblemente más) en edad laboral por efecto de la emigración internacional. En ese sentido, la emigración internacional de mexicanos estaría atentando en contra de la "ventana de oportunidades transitoria" para México y favoreciendo el bono demográfico de los Estados Unidos, toda vez que ese país recibe precisamente población en edades más productivas.

<sup>3</sup> Índice de Dependencia =  $\frac{\text{Población } < 15 \text{ años} + \text{Población de 65 años y más}}{\text{Población de 15 a 64 años}} \times 100$

<sup>4</sup> De acuerdo con el Plan Nacional de Desarrollo 2001-2006 "El bono demográfico en la próxima década podría convertirse en un importante factor para el desarrollo del país si logramos crear los empleos necesarios, al propiciar una mayor capacidad de ahorro de los hogares y el despliegue de estrategias más eficaces tanto de formación y utilización de los recursos humanos disponibles, como de acumulación y movilización de activos. Sin embargo, la ventana de oportunidad empezará a cerrarse a medida que se intensifiquen las presiones para atender las demandas del envejecimiento demográfico. El eficaz aprovechamiento de esta ventana de oportunidad podría contribuir a impulsar un círculo virtuoso de más empleos, más ahorro, más inversión".

La lógica del funcionamiento del mercado transnacional de trabajo entre México y los Estados Unidos, obliga a examinar este problema desde una perspectiva más amplia, más global. Entre ambos países se ha creado una estrecha relación de dependencia laboral. Por un lado Estados Unidos ha establecido una demanda histórica de mano de obra inmigrante, y por otro, la emigración internacional para México ha permitido solventar presiones demográficas, económicas y sociales, que de otra forma hubieran dificultado el desarrollo de su proyecto nacional.

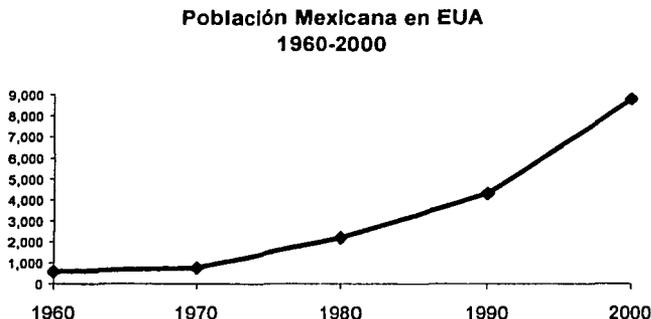
### 1.5 Migración a los Estados Unidos

Los efectos que producen los movimientos migratorios son múltiples, tanto en la población como en la estructura social y en la actitud misma de los individuos. La edad, el sexo, el estado civil, etc., asumen características particulares en los migrantes, que unidas a su volumen, modifican las condiciones demográficas, económicas y sociales que existen en el lugar de salida y en el de llegada. El volumen de los migrantes tienen una acción directa en la tasa de crecimiento de la población ya sea creciente o decreciente por lo que debe ser monitoreada constantemente y considerada dentro del análisis poblacional y no como un evento aislado.

De acuerdo con las cifras del censo norteamericano, en 1960 vivían en los Estados Unidos un poco más de medio millón de mexicanos (576 mil), alcanzando la cifra de 760 mil para 1970. Este ligero crecimiento entre 1960 y 1970 indica que la emigración internacional hacia Estados Unidos era fundamentalmente de carácter temporal, es decir, los trabajadores acudían por temporadas a laborar en la agricultura y la industria norteamericana para después retornar a su país de origen. Sin embargo, a partir de 1970 y más claramente a partir de 1980 la emigración mexicana empieza a ser más marcadamente definitiva. Así vemos que para 1980 la población de mexicanos residiendo en aquel país alcanzó la cifra de 2.2 millones de individuos, tres veces más población que la que había en 1970. A partir de 1980 podríamos decir que la migración mexicana a los Estados Unidos entra en una fase de acelerado crecimiento, pues la población mexicana residente (con o sin documentos legales) alcanzó las cifras históricas de 4.3 millones en 1990 y 8.8 millones en el año 2000.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

El siguiente gráfico muestra el comportamiento de la migración a los Estados Unidos de 1960 al 2000.



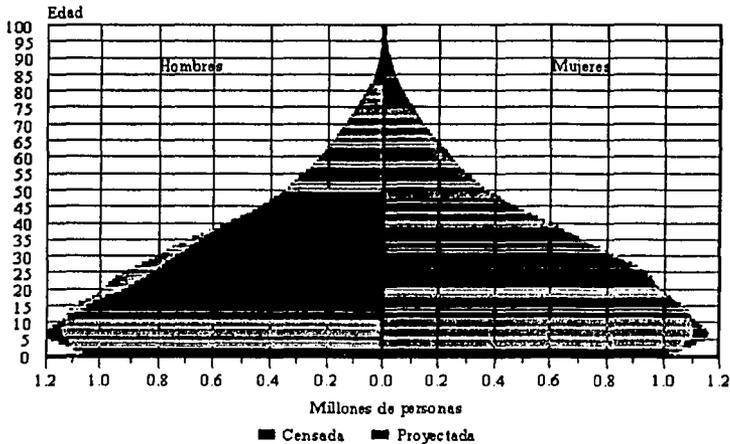
**Gráfica 1.4- Población Mexicana en EUA 1960-2000.**  
Fuente: U.S.Bureau of Census

La diferencia entre la población mexicana que había en 1990 y 2000 es de 4.5 millones, lo que significa que anualmente alrededor de 450 mil mexicanos, emigraron definitivamente a los Estados Unidos entre esos años, cifra muy por encima de la estimada por el Consejo Nacional de Población de México que ubica a este grupo en 310 mil emigrantes anuales definitivos, entre 1995 y 2000. De cualquier manera esta emigración internacional acumulada de 8.8 millones de mexicanos representa alrededor del 9 por ciento de la población de México en el año 2000, y constituiría el Estado número 33, ocupando el tercer lugar en cuanto al número de habitantes después del Estado de México y el Distrito Federal.

En virtud de que la emigración mexicana a los Estados Unidos es principalmente de carácter laboral (aunque no es la única razón de este histórico flujo migratorio) es de esperarse que en la población emigrante (sobre todo en la de emigrantes más recientes) predomine la población de edades más productivas, esto es entre 15 y 45 años. Una forma de examinar este fenómeno es comparando la estructura por edad de las proyecciones de población con la estructura por edad de la población que resultó del censo.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

El Consejo Nacional de Población de México estimó que para el año 2000 la población de México llegaría a 99 millones, considerando en esta cifra una migración neta negativa de alrededor de 300 mil emigrantes internacionales anuales. Sin embargo, el censo de 2000, arrojó una población total de 97.5 millones, alrededor de 1.5 millones menos de la población que se esperaba. En la Gráfica de abajo aparece una pirámide por edad desplegada con la población censada y proyectada para el año 2000 (Partida, 2001). Cabe señalar que la mayor discrepancia entre la población proyectada y la censada se observa precisamente en la población masculina del grupo de edad que va de 12 a 40 años. En el caso de la población femenina la discrepancia es menor. La explicación de la existencia de esos "huecos" en la pirámide de población podría ser atribuida a la pérdida de población por emigración internacional.



Gráfica 1.5- Pirámide de Población Censada y Proyectada, 2000  
Fuente: Partida, 2001

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Como se ha visto a lo largo de este capítulo, México es un país que hasta fines de la década de los setenta experimentó altas tasas de crecimiento de su población. Tan sólo entre 1960 y 1970, la tasa media anual de crecimiento fue de 3.4 por ciento. Sin embargo, es a partir de 1970 que esas tasas comenzaron a disminuir. Así vemos como en el quinquenio 1995-2000 la tasa media anual de crecimiento pasó a ser de 1.6 por ciento. A esta disminución contribuyó no sólo un menor número de hijos por mujer, sino también una fuerte emigración definitiva hacia los Estados Unidos, sobre todo durante las dos últimas décadas del siglo pasado

## 1.6 Bases Demográficas utilizadas en los Seguros de Vida

Como se ha visto, la mortalidad y la migración de México tiene un comportamiento irregular desde hace tiempo, partiendo de esto es necesario el análisis y el cálculo real de la tasa de mortalidad de cada edad, y para esto nos encontramos ante una problemática, el de manejar grandes volúmenes de información, por lo que es necesario contar con una herramienta que nos permita manejar esta situación y que de igual forma conserve las características de la población, denominada como **Tabla de Mortalidad**.

## 1.7 Tabla de Mortalidad

Las Tablas de mortalidad constituyen un elemento técnico de primera importancia en la operación de los seguros de vida. En la producción de estas tablas, la evidencia empírica observada se utiliza con el propósito de estimar la probabilidad de muerte de toda persona que contrata un seguro de vida. Diversos factores pueden afectar esta probabilidad; el caso más extensamente considerado es el de la edad pero otras características relevantes incluyen sexo, historial clínico y tabaquismo. En cualquier caso, una tabla de mortalidad habitualmente es un arreglo de probabilidades de muerte dispuestas de acuerdo con la edad de los individuos de la población. Estas probabilidades se estiman a partir de los registros demográficos de la población objetivo.

Las tablas de mortalidad no pueden ser permanentes; constituyen la medición de un fenómeno, *la mortalidad*, que necesariamente evoluciona y cambia a lo largo del tiempo. Por tanto, es indispensable disponer de los medios que permitan la revisión periódica y, en su caso, la actualización de las tablas de mortalidad que utiliza el sector asegurador mexicano.

Es importante tener especial cuidado en el análisis de la información para poder identificar las posibles desviaciones en mortalidad debidas a algún evento anormal, tales como guerras, epidemias o a algún suceso meteorológico, ajeno a la voluntad del hombre, que puedan distorsionar los resultados y que tienen que

<sup>5</sup> Elementos de Cálculo Actuarial, Act. Mario Ariaga Para y Act. José Antonio Sánchez Chibras

ser eliminadas del estudio, por ejemplo en nuestro país, La Independencia y La Revolución Mexicana son claros ejemplos de esto.

El sexo es también un factor importante a considerar, ya que la mortalidad en la mujer es considerablemente más baja que en el hombre.

En México, el sector asegurador, en conjunto con la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF), ha realizado esfuerzos muy importantes orientados a la construcción de tablas de mortalidad. Sin embargo, hasta ahora no existe un procedimiento sistemático para su evaluación y actualización periódica.

En el año de 1998 la CNSF puso en marcha un proyecto con el propósito de establecer un procedimiento para la construcción de las tablas de mortalidad, requeridas por el sector asegurador mexicano, que utilice métodos estadísticos modernos para establecer la precisión de las estimaciones y que determine el margen de exceso en la estimación de las tasas de mortalidad a partir de una valoración del riesgo de desviaciones extremas en la siniestralidad; de aquí que actualmente se utilice la tabla de mortalidad de la CNSF 2000 que comprende datos del periodo 1991 a 1998.

Por otro lado la Asociación Mexicana de Actuarios (AMA) y la Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros (AMIS) se dieron a la tarea de realizar un análisis de la siniestralidad del ramo con el objetivo de generar tablas de mortalidad que describan con exactitud el comportamiento de este fenómeno en la población asegurada de nuestro país.

Como ya se mencionó anteriormente, las tablas de mortalidad son la base de la teoría de los seguros de vida, son el instrumento a través del cual se miden las probabilidades de fallecimiento; por lo tanto, son la base para el cálculo de primas y reservas en los seguros.

Asimismo, debemos recordar que una tabla de mortalidad es un registro de experiencia pasada y es utilizada en la predicción de eventos futuros, asumiendo que la experiencia pasada se repetirá en el futuro.

La construcción de tablas de mortalidad esta dirigida a encontrar para cada edad la tasa de mortalidad, es decir la probabilidad de que una persona dada muera durante un periodo unitario de tiempo.

Las principales fuentes para la construcción de tablas de mortalidad son las estadísticas generales de población obtenidas en los censos y los registros de mortalidad de las compañías de seguros.

Asimismo, las compañías de seguros se apoyan en los resultados de los exámenes médicos que practican a sus asegurados, de esta forma determinan su estado de salud actual. Así al considerar un grupo grande de personas se puede

estimar con relativa certeza el número de personas que van a fallecer durante un periodo de tiempo determinado.

Por lo anterior, las tablas de mortalidad juegan un papel fundamental en la solvencia y la estabilidad financiera de las empresas que operan el ramo de vida, ya que ésta depende, entre otros aspectos, de la disponibilidad de tablas de mortalidad apropiadas; es decir, que reflejen una adecuada medición de la siniestralidad que se deberá enfrentar en la operación.

### 1.7.1 Elementos de una Tabla de Mortalidad

La construcción de una tabla de mortalidad, a grandes rasgos, está basada en un número muy grande de hechos estadísticos y, posteriormente, en la graduación o suavización de tales observaciones<sup>6</sup>

La función fundamental de la tabla de mortalidad es una función conocida como  $l_x$ . Esta función hipotética corresponde a la secuencia empírica  $n_x$  o grupo de personas observadas en un periodo determinado. Esta es una función no creciente que representa el número de personas que espera sobrevivir a edad  $x$ , teniendo valores no solamente enteros.

Notación actuarial utilizada:

$x$	Edad a la que se hace referencia
$(x)$	Persona con edad $x$
$\lambda_x$	Número de personas con vida en edad $x$
$dx$	Número de personas que fallecen con edad $x$
$p_x$	Probabilidad de que una persona con edad $x$ sobreviva a edad $x+1$
$q_x$	Probabilidad de que una persona con edad $x$ fallezca antes de alcanzar la edad $x+1$
${}_n p_x$	Probabilidad de que una persona con edad $x$ sobreviva a edad $x+n$
${}_n q_x$	Probabilidad de que una persona con edad $x$ fallezca en el transcurso de los siguientes $n$ años

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

<sup>6</sup> Elementos de Calculo Actuarial, Act. Mario Arriaga Parra y Act. José Antonio Sánchez Chibras

Como ejemplo de la notación anterior, la tabla quedaría de la siguiente manera:

$x$	$l_x$	$d_x$	$q_x$	$p_x$
0	10,000,000	70,800	0.00708	0.99292
1	9,929,200	17,475	0.00176	0.99824
2	9,911,725	15,066	0.00152	0.99848
3	9,896,659	14,449	0.00146	0.99854
$\hbar$	$\hbar$	$\hbar$	$\hbar$	$\hbar$
98	19,331	12,916	0.66815	0.33185
99	6,415	6,415	1.00000	0.00000
100	0			

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## II. Metodología de construcción de tasas brutas de mortalidad

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 2.1 Introducción

En el proceso de estimación de un modelo de supervivencia, la tarea primordial consiste en recolectar, a partir de una serie de datos, información suficiente que permita generar de una forma adecuada, un modelo que represente el comportamiento de la supervivencia en un grupo de individuos observados. Dicho modelo puede ser representado de forma tabular (**modelos tabulares**), o bien formulado como relación funcional con respecto a la variable tiempo ( $t$ ) o la variable edad de la muerte ( $x$ ), de las cuales se derivan las probabilidades de muerte o supervivencia, según lo que se desee (**modelos paramétricos**)<sup>7</sup>. Dicho proceso no es único de los actuarios, mas bien es un proceso estadístico y puede ser utilizado en otras áreas en donde se determinen patrones de supervivencia, como el tiempo de vida de un foco, una máquina, entre otros.

De cualquier forma, este proceso, que también está relacionado con el "proceso de graduación", no es el procedimiento inicial que lleva a la determinación de la mejor estimación. Anterior a esto, es necesario desarrollar tasas que servirán como valores iniciales y a las que se les aplicará el proceso de graduación (ajuste) con el fin de lograr mejores estimadores de las probabilidades buscadas. Dicho procedimiento será descrito en el siguiente capítulo.

Para la determinación de éstas tasas, que en lo sucesivo se determinarán como *Tasas Brutas de Mortalidad*<sup>8</sup>, tres posibles métodos podrían seguirse, dependiendo más que todo de cómo se presentan los datos, a saber:

- *Método Seriatim*,
- *Método de Registro Individual Agrupado y*
- *Método "Valuation Schedule"*.

Antes de proseguir con la descripción de los métodos anteriormente mencionados, es importante explicar algunos conceptos que serán de uso continuo de aquí en adelante en la Tesis.

<sup>7</sup> London, Dick. Survival models and their estimation Segunda edición, Winsted CT. Actex Publications 1988 pag. 6

<sup>8</sup> A pesar de que las Tasas Brutas de Mortalidad en su significado más puro son las tasas obtenidas de TODA la población, para efectos del presente trabajo se denominarán así, por ser las tasas que se obtienen de un primer cálculo.

## 2.2 Exposición

La exposición es uno de los conceptos fundamentales dentro del estudio para construir una tabla de mortalidad. Batten lo define como "el número de unidades anuales de vida humana las cuales están sujetas a la muerte, incapacidad o algún otro decremento, dentro de un periodo de observación definido"<sup>9</sup>. En nuestro caso, representa el denominador de la tasa que queremos calcular, es decir, la tasa de mortalidad. Por lo tanto, una visión conceptual de lo que es la *exposición* puede ser el periodo de tiempo bajo el cual una vida se encuentra expuesta a un determinado riesgo, dado un intervalo de análisis.

En ese sentido, cuando un individuo ingresa a un estudio, una *exposición potencial* es determinada. Si por alguna razón dicho individuo abandona el estudio antes de la finalización del mismo, se dice que hay una *exposición cancelada*.

## 2.3 Supuestos de Mortalidad

Detrás de la determinación de las tasas brutas de mortalidad y de la exposición en sí, uno de los problemas fundamentales radica en que las tasas están anualizadas, es decir, son presentadas en periodos anuales, mientras que la mayor parte de los datos pueden, por decirlo de alguna manera, cortar en dichos periodos. Así, dado un intervalo de tiempo entre una edad  $x$  y  $x+1$ , una persona podría entrar al mismo en edad  $x+t$ , siendo  $0 < t \leq 1$ , con lo cual el monto de exposición que se debe atribuir a dicho individuo, dependerá del supuesto de mortalidad que se haga para dicho intervalo. Los tres supuestos más utilizados son los siguientes:

### a). *Distribución uniforme de las muertes (U.D.D.)*

Es uno de los primeros supuestos para describir algebraicamente la mortalidad. Abraham Moivre propuso que la curva de supervivencia  $l_x$  de una tabla de mortalidad pudiera ser representada por una línea recta. Es decir, se asume que entre dos edades enteras  $x$  y  $x+1$  las muertes se dan de manera uniforme (interpolación lineal)

Una afirmación matemática de la distribución uniforme de muertes es que la función  $f(t) = {}_tq_x$  es lineal sobre el intervalo  $0 \leq t \leq 1$ .

<sup>9</sup> Batten, Robert Mortality Table Construction. Primera edición. Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc 1978 pag 2.

Es decir;

$${}_t q_x = a + bt \text{ para } (0 \leq t \leq 1).$$

Claramente

$${}_1 q_x = a + bt = q_x$$

y

$${}_0 q_x = a = 0,$$

resolviendo nos queda,

$$a = 0, \quad b = q_x$$

entonces

$${}_t q_x = tq_x \text{ en } (0 \leq t \leq 1)$$

b). *Hipótesis de Balducci:*

El segundo patrón de mortalidad, a menudo usa estimador de la distribución de muertes sobre un intervalo unitario, fue propuesto por el Actuario Italiano Gaetano Balducci en 1920 que asume que el comportamiento de las muertes entre edades es hiperbólico.

La función matemática de este supuesto es  $f(t) = {}_{1-t} q_{x+t}$  y es lineal sobre el intervalo  $0 \leq t \leq 1$ . Bajo este supuesto,

$${}_{1-t} q_{x+t} = a + bt \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Claramente,

$${}_1 q_x = a = q_x,$$

y

$${}_0 q_{x+1} = a + b = 0,$$

resolviendo,

$$a = q_x, \quad b = -q_x,$$

y entonces

$${}_t q_x = \frac{{}_1 q_x}{1 - (1-t)q_x} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

c). *Fuerza constante de mortalidad*

Un tercer supuesto de mortalidad, el cual es, en un sentido el intermedio de los dos supuestos anteriores, asume que la fuerza de mortalidad  $\mu_x$  es la misma dentro de cualquier año de edad, y que por lo tanto las muertes se comportan exponencialmente (interpolación exponencial)

$$\mu_{x+t} = \mu \quad (0 \leq t \leq 1),$$

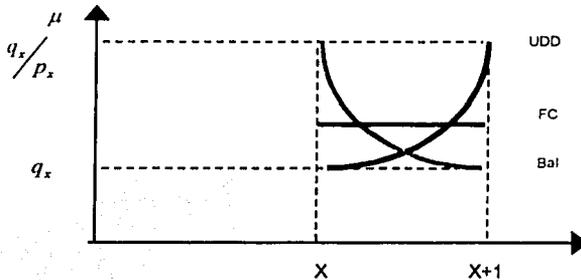
De esto se desprenden las siguientes fórmulas

$${}_tq_x = 1 - e^{-\mu t}$$

$${}_{1-t}q_{x+t} = 1 - e^{-\mu(1-t)}$$

2.4 Comparación de los supuestos de mortalidad

Una comparación de los supuestos desarrollados- distribución uniforme de muertes, la hipótesis de Balducci y el supuesto de una fuerza constante de mortalidad, en función del intervalo unitario de edad  $x$  a  $x+1$ - se muestra a continuación:



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

De aquí que la fuerza de mortalidad para cualquier edad incrementada bajo UDD, decrece bajo Balducci y se mantiene constante bajo Fuerza Constante de Mortalidad

En resumen, cualquiera de los supuestos permitiría realizar el cálculo de las probabilidades en edades fraccionadas, utilizando el valor de la probabilidad de muerte de un individuo de edad  $x$  antes de  $x + 1$ ,  $(q_x)$ . La diferencia del resultado en cada uno de estos casos es relativamente pequeña, por lo que la elección del supuesto o modelo que respalde los cálculos depende de la facilidad de cálculo que de factores de exactitud<sup>10</sup>

En este sentido, resulta más factible el cálculo de probabilidades a edades fraccionadas cuando se supone que las muertes se comportan de acuerdo a la hipótesis de Balducci que cuando se aplica alguno de los otros supuestos, ya que mientras en este supuesto el resultado es el cociente entre las muertes y la exposición, al calcular las tasas brutas basados en los otros supuestos implica la utilización de métodos numéricos para su solución.

A continuación se explicarán los métodos fundamentales para la consecución de las tasas mencionadas.

## 2.5 Método Seriatim

El factor fundamental en el uso de este método para el cálculo de la exposición y tasas brutas de mortalidad es el análisis individual de cada vida observada en el estudio, de manera que se determina el aporte del individuo para cada intervalo de edad  $(x; x + 1)$ , que en combinación con el resultado de todas las vidas, produce el nivel de exposición para cada intervalo unitario.

Para poder aplicar el método, es necesario contar con la edad a la cual cada individuo en el estudio comienza su exposición, así como la edad que tiene al momento de terminar su exposición, ya sea por retiro, terminación o muerte. El monto total de exposición es la diferencia entre ambas edades.

En el caso particular de las muertes, bajo la hipótesis de Balducci, la edad a la muerte es llevada hasta el final del intervalo unitario, dicho argumento puede verse a continuación.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

<sup>10</sup> Batten, Robert Mortality Table Construction, Primera edición Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc. 1978 pag 17

Sea:

$s$  = Número de vidas con edad exacta  $x$

$n$  = Número de nuevos ingresos con edad exacta  $x+r$

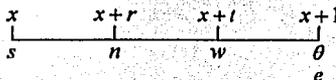
$w$  = Número de retiros con edad exacta  $x+t$

$e$  = Número de vidas que sobreviven a edad  $x+1$

$\theta$  = Número de muertes entre  $x$  y  $x+1$

${}_{1-r}q_{x+r}$  = probabilidad de que un individuo de edad  $x+r$  fallezca antes de alcanzar la edad  $x+1$

Puesto en la línea del tiempo, se observa lo siguiente:



$$e = s + n - w - \theta$$

Queremos encontrar  $q_x$ , por lo que

$$\theta = sq_x + n({}_{1-r}q_{x+r}) - w({}_{1-t}q_{x+t})$$

Bajo UDD:

$$\theta = sq_x + n \frac{(1-r)q_x}{1-rq_x} - w \frac{(1-t)q_x}{1-tq_x}$$

Bajo Fuerza Constante:

$$\theta = sq_x + n[1-(1-q_x)^{1-r}] - w[1-(1-q_x)^{1-t}]$$

Bajo estos dos supuestos, se obtendrían ecuaciones que podrían resolverse únicamente con métodos numéricos. Esto se evita adoptando el supuesto de Balducci.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Bajo Balducci:

$$\theta = sq_x + n(1-r)q_x - w(1-t)q_x$$

de donde,

$$q_x^{bal} = \frac{D}{s + n(1-r) - w(1-t)} = \frac{D}{E}$$

donde E representa la exposición asociada con  $q_x$ , y D representa los muertos en  $x$

Dado que para aquellos que entran es necesario substraer aquella parte para la cual no están contribuyendo,  $1 - r$ , y para aquellos que se retiran la parte que no contribuye a la exposición,  $1 - t$ , debería de suceder lo mismo para aquellos que mueren. Sin embargo, la fórmula anterior como tal no está deduciendo nada del intervalo unitario para los individuos que han fallecido y se ubican como si hubiesen aportado hasta el final del intervalo unitario, es decir a edad  $x + 1$ .

De esto se concluye que en el método Seriatim, lo adecuado para calcular la exposición de aquellos que fallecen es llevar la muerte hasta el final del intervalo unitario en donde ésta se produce. Este es el método desarrollado en esta tesis, con el fin de encontrar las tasas brutas de mortalidad, dada la presentación de los datos. Esta sería calculada como la razón entre el número de muertes que se dan en el intervalo unitario  $(x; x+1)$ , y la correspondiente exposición en ese periodo:

$$q_x = \mu_x = \frac{\theta_x}{E_x}$$

Donde  $\theta_x$  es el número de fallecidos antes de alcanzar la edad  $x + 1$ . Debe entenderse aquí a  $q_x$  como una tasa y no como a una probabilidad en sí, toda vez que el proceso de graduación completará el proceso para la obtención de dichas probabilidades.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 2.5.1 Aplicación del Método

Claramente el método de tabulación de muertes debe ser seleccionado antes de la exposición de la fecha de termino de muertes. Como ya se vió al principio de este capítulo, que las muertes contribuyen a la exposición al final del intervalo unitario cuando es asumida la hipótesis de Balducci.

Una vez que la exposición total para cada persona ha sido obtenida, el problema sustancial de asignación de la exposición a varios intervalos unitarios de edad debe ser tratado. Para un mejor entendimiento, observemos el siguiente ejemplo:

Asumamos que, para un periodo de observación de 1972-1978 años calendario, las muertes han sido tabuladas por la edad más cercana a la fecha de cumpleaños. Puesto que  $\theta_x$  es usado para describir las muertes ocurridas entre las edades  $x-1/2$  y  $x+1/2$ , adoptaremos la notación  $E_x$  para denotar la exposición entre estas mismas edades.

Sean seis empleados de una organización dada, con los siguientes datos:

Empleado	Nacimiento	Ingreso	Status	Fecha Status
A	01/03/50	01/10/70	Retiro	01/02/75
B	01/08/51	01/06/71	Muerte	01/09/72
C	01/07/50	01/04/73	Muerte	01/02/74
D	01/11/50	01/02/74	Muerte	01/01/75
E	01/04/51	01/09/73	Activo	01/06/79
F	01/02/51	01/12/76	Muerte	01/10/78

Periodo de Observación: 1/Junio/1972 a 31/Diciembre/1978

La exposición total de los empleados A y E es fácil de obtener. El empleado A fue expuesto desde el comienzo del estudio hasta la fecha en el cual el empleo termina, un total de 2.67 años. Similarmente, el empleado E contribuye desde su fecha de contratación hasta la fecha del término del estudio, ó 5.33 años.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Las 2.67 unidades expuestas del empleado de A cubren el intervalo de edad de 22.27 a 24.92. Su contribución a  $E_{22}$  es por lo tanto 0.23 de un año (de 22.27 a 22.5). Puesto que A es expuesto continuamente desde la edad de 22.5 a edad de 24.5, él contribuye una unidad completa a  $E_{23}$  y  $E_{24}$ . Los 0.42 restantes (de 24.5 a 24.92) son parte de  $E_{25}$ .

El empleado E, de edad 22.44 en la fecha de contratación, contribuye solamente 0.06 de un año al valor de  $E_{22}$ , pero contribuye completamente a cada  $E_{23}$ ,  $E_{24}$ ,  $E_{25}$ ,  $E_{26}$ , y  $E_{27}$ . Puesto que obra en el riesgo hasta la edad de 27.77, también contribuye 0.27 de un año para  $E_{28}$ , proporcionando la exposición total correcta de 5.33 años.

Los empleados B,C,D y F, para los cuales la fecha de muerte fue observada, nos permiten considerar el efecto de la hipótesis de Balducci dentro del intervalo unitario, para los cuales los puntos finales, no son enteros. Recordaremos que la determinación de la fecha en la cual la exposición contribuye requiere de gran cuidado en el caso de las muertes, la exposición continua posteriormente a la fecha de muerte.

El empleado B a edad  $20\frac{3}{12}$  en el comienzo del estudio, claramente contribuyen  $\frac{3}{12}$  de año en el valor de  $E_{20}$ . En el 1 de Febrero de 1972, en la fecha en la cual B alcanza la edad de  $20\frac{1}{2}$ , él tuvo el potencial para contribuir a la exposición de un año completo de  $E_{21}$ . Aunque la muerte ocurrió 8 meses después.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 2.6 Método de Registro Individual Agrupado

Este método tendrá una mayor utilización en el caso de un número de datos o registros, los cuales no tienen información completa sobre nacimiento, entrada al estudio o salida del mismo, y por lo tanto, se deben de realizar una serie de supuestos en torno a estas variables, con el fin de determinar la exposición inherente a cada intervalo unitario de edad.

Para ello deben establecerse las llamadas "reglas de tabulación" de los registros de manera tal que se produzca un "agrupamiento" de los mismos en clases, y finalmente puedan establecerse las edades para las cuales se produce el inicio y fin de la contribución a la exposición.

Las reglas de tabulación deben asumirse buscando que se disminuya con alto grado, el sesgo producido en el cálculo de la exposición por la falta de exactitud. En cuanto al agrupamiento se refiere, cinco categorías básicas pueden definirse, dependiendo principalmente del objeto y de la forma en que se entra o se sale del estudio. Para el caso de vidas aseguradas factibles son:

*Iniciales* ( $s_x$ ), se refiere a aquellos que se encuentran en el grupo de estudio al inicio del mismo.

*Nuevos entrantes* ( $n_x$ ), se refiere a aquellos individuos que entran al grupo de estudio luego iniciado el mismo.

*Retiros* ( $w_x$ ), que son todos aquellos individuos que salen del estudio antes del fin del período de observación por una razón distinta de la muerte.

*Muertes* ( $\theta_x$ ), aquellos que fallecen dentro del periodo de observación.

*Finalistas* ( $e_x$ ), aquellos que se encuentran en el grupo de estudio al fin del periodo de observación.

De esto se desprende que cada vida puede ser evaluada de acuerdo a la forma en que se ingresa al grupo y a la forma en que se sale, formando pares ordenados para cada intervalo unitario de edad en análisis: por ejemplo,  $(s, e)$  es un par ordenado que representa a un individuo que está en el grupo cuando inicia el periodo de observación, y es finalista, es decir se encuentra todavía en el grupo cuando la observación termina;  $(n, w)$  es el par ordenado que representa a un individuo que entra al grupo luego de iniciada la observación y se retira antes de finalizar la misma.

A cada uno de dichos pares ordenados debe asignarse un subíndice que muestra la edad en que se inicia y termina la observación (y por lo tanto a que intervalo de edad es asignado a la entrada y a la salida). Como ejemplo,  $(s_{35}, w_{37})$  es el par ordenado que representa al individuo que inició el estudio como inicial a edad 35, y que se retiró del estudio a edad 37.

Esto no significa sin embargo, que este individuo tuviese edad exacta de 35 años al momento de iniciar el estudio. La asignación de los subíndices depende del establecimiento de las reglas de tabulación en el estudio.

- a) **Muertes.** El establecimiento de esta primera regla define las edades a las cuales las tasas de mortalidad se determinan, y afectan por lo tanto las reglas para las otras categorías. Pueden definirse como **edad calendario, edad al cumpleaños más cercano, edad al siguiente cumpleaños o edad al cumpleaños anterior.**
- b) **Iniciales y Finalistas, Nuevos entrantes y retiros:** Para estos casos, la notación de rango no es utilizada, sino más bien una notación con subíndice, para diferenciar a la categoría muerte de las demás. Aquí pueden considerarse estudios **año calendario, estudios de cumpleaños a cumpleaños, y otros.**

Una vez establecidas las reglas y generados los pares ordenados, el siguiente paso es establecer una fórmula de exposición que considere las diferencias por entrar luego del inicio del intervalo unitario o bien salir antes de la finalización del mismo.

### 2.6.1 Fórmula de Exposición en intervalo unitario

La exposición total con un intervalo unitario es determinada considerando todos los pares de vidas, ninguno de los cuales entra o deja el estudio antes o durante el intervalo unitario de vida en cuestión. Solo algunas parejas producen exposición potencial y cancelada. Para formalizar el supuesto de registro de exposiciones donde grandes cantidades de datos agrupados están disponibles, será necesario formular algunas definiciones y derivar las fórmulas básicas de exposición.

Asumiremos que las reglas tabuladas son seleccionadas de tal forma que los subíndices  $i$  para cada categoría no de muerte tabulada en edad  $x$  cae en el rango  $a \leq i \leq b$ , donde  $a$  y  $b$  son los límites inferior y superior respectivamente en el rango de las muertes definidas por  $\theta_x$ . Por ejemplo, si la regla tabulada para muertes produce

$$\theta_x \Big|_{x-(1/3)}^{x+(2/3)}$$

asumiremos que las reglas tabuladas son seleccionadas para  $s_x, n_x, w_x$  y  $e_x$  tal que los subíndices asociados con cada categoría caerá en el intervalo de  $x-1/3$  a  $x+2/3$  inclusive. Si esto es verdad, los subíndices de cada pareja  $x-1$  o menos será necesariamente menor o igual a  $x-1/3$ .

Ahora será necesario proceder a la consideración de la exposición potencial de todos los iniciales y los nuevos entrantes, en la edad con subíndice  $x-1$  o menos, para el intervalo unitario definido para las muertes  $\theta_x$ . Puesto que todos los vivos entran al estudio antes del comienzo del intervalo unitario de edad en cuestión, cada uno tiene un potencial para el intervalo de un año completo,

$$\sum_{y=a}^{x-1} (s_y + n_y),$$

donde  $a$  es la edad más joven para los cuales los datos tabulados están disponibles. Similarmente todos los retiros, finalistas, y muertes en edades tabuladas  $x-1$  y menos son necesariamente eliminados del grupo de observación previo al comienzo del intervalo unitario representado por  $\theta_x$ . Los vivos, pueden hacer cualquier contribución para  $E_x$ .

El monto total de exposición cancelada para aquellos con vida es

$$\sum_{y=a}^{x-1} (w_y + e_y + \theta_y).$$

Por lo tanto considerando solo aquellos con vida en las parejas  $x-1$  o menos la fórmula de exposición para  $E_x$  es

$$E_x = \sum_{y=a}^{x-1} (s_y + n_y - w_y - e_y - \theta_y),$$

Para completar la fórmula  $E_x$ , necesitamos considerar aquellos vivos en las parejas cuyos subíndices son  $x$ . Desde nuestro supuesto tentativo, sabemos que tales vivos entran y dejan el estudio dentro del intervalo unitario de edad para el cual la exposición es buscada. Suponemos que el símbolo de la muerte es

$$\theta_x \Big|_{x1}^{x2}$$

y los símbolos para las otras categorías son

$$s_x^{x2-\alpha}, n_x^{x2-\beta}, w_x^{x2-\gamma} \text{ y } e_x^{x2-\delta},$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$ , y  $\delta$  están dentro del intervalo de 0 a 1.

La pareja  $s_x$ , entonces tiene un potencial para  $E_x$  de  $\alpha$  unidades. Similarmente, los  $n_x$  tiene  $\beta$  unidades potenciales, mientras que las parejas  $w_x$ , y  $e_x$  generan  $\gamma$  y  $\delta$  unidades de cancelación para cada vida entonces incluida. Finalmente, basada en la hipótesis de Balducci, los vivos en la pareja  $\theta_x$  genera exposición no cancelada con respecto al intervalo unitario de edad definido por  $\theta_x$ .

Sea,

$${}^s f_x = \alpha,$$

$${}^n f_x = \beta,$$

$${}^w f_x = \gamma,$$

$${}^e f_x = \delta,$$

y

$$f_x = {}^s f_x * s_x + {}^n f_x * n_x - {}^w f_x * w_x - {}^e f_x * e_x.$$

Los valores  ${}^s f_x$ ,  ${}^n f_x$ ,  ${}^w f_x$ , y  ${}^e f_x$  son conocidos como los factores- $f$  para las categorías apropiadas, los cuales representan el tiempo futuro desde la entrada o salida al final del intervalo unitario de edad definido como  $\theta_x$ .

$$E_x = \sum_{y=a}^{x-1} (s_y + n_y - w_y - e_y - \theta_y) + f_x$$

$$E_x = \sum_{y=a}^{x-1} j_y + f_x$$

y por simplicidad,

$$j_y = s_y + n_y - w_y - e_y - \theta_y.$$

a la expresión anterior se le conoce como la fórmula de exposición para el intervalo unitario de  $E_x$ .

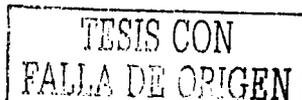
Para un mejor entendimiento, planteamos el siguiente ejemplo

### 2.6.1.1 Aplicación del Método

Suponemos que las reglas tabuladas han sido seleccionadas para un estudio de mortalidad, produciendo

$$s_x^{x+(1/4)}, n_x^{x+(1/2)}, w_x^{x-(5/8)}, e_x^{x+(3/4)} \text{ y } \theta_x \Big|_x^{x+1}$$

Calcularemos las exposiciones y tasas de mortalidad las cuales se obtendrán de la siguiente tabla



x	$s_x$	$n_x$	$w_x$	$e_x$	$\theta_x$
30	300	400	50	100	10
31	450	200	60	200	20
32	270	300	70	160	20
33	300	200	50	100	30
34	600	400	100	200	20

Retomando las consideraciones y fórmulas expuestas en el transcurso de esta tesis, sabemos que;

$$E_x = \sum_{y=30}^{x-1} j_y + \frac{3}{4} * s_x + \frac{1}{2} * n_x - \frac{3}{8} * w_x - \frac{1}{4} * e_x.$$

Sustituyendo los valores de edad por edad, obtenemos los siguientes datos

$$E_{30} = \frac{3}{4}(300) + \frac{1}{2}(400) - \frac{3}{8}(50) - \frac{1}{4}(100) = 381\frac{1}{4},$$

$$E_{31} = 540 + \frac{3}{4}(450) + \frac{1}{2}(200) - \frac{3}{8}(60) - \frac{1}{4}(200) = 905,$$

$$E_{32} = 540 + 370 + \frac{3}{4}(270) + \frac{1}{2}(300) - \frac{3}{8}(70) - \frac{1}{4}(160) = 1196\frac{1}{4}$$

$$E_{33} = 540 + 370 + 320 + \frac{3}{4}(300) + \frac{1}{2}(200) - \frac{3}{8}(50) - \frac{1}{4}(100) = 1511\frac{1}{4}$$

$$E_{34} = 540 + 370 + 320 + 320 + \frac{3}{4}(600) + \frac{1}{2}(400) - \frac{3}{8}(100) - \frac{1}{4}(200) = 2112\frac{1}{2}$$

La solución sistemática esta representada en el siguiente cuadro

X	$s_x$	$n_x$	$w_x$	$e_x$	$\theta_x$	$j_x$	$\sum_{y=30}^{x-1} j_y$	$f_x$	$E_x$
30	300	400	50	100	10	540	0	$381\frac{1}{4}$	$381\frac{1}{4}$
31	450	200	60	200	20	370	540	365	905
32	270	300	70	160	20	320	910	$286\frac{1}{4}$	$1196\frac{1}{4}$
33	300	200	50	100	30	320	1230	$281\frac{1}{4}$	$1511\frac{1}{4}$
34	600	400	100	200	20	380	1550	$562\frac{1}{2}$	$2112\frac{1}{2}$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Considerando, por ejemplo, el registro de  $E_{30}^z$ ,  $S_{30}$ ,  $n_{30}^z$ ,  $W_{30}^z$ ,  $e_{30}$  son asumidas a entrar o dejar el estudio a edades  $30 \frac{1}{4}$ ,  $30 \frac{1}{2}$ ,  $30 \frac{5}{8}$  y  $30 \frac{3}{4}$  respectivamente.

## 2.7 Fórmula de exposición por valuación programada

Este tipo de metodología es mayormente utilizada en estudios en donde la información no es tan precisa, sobre todo en ausencia de información sobre nuevos entrantes o retiros. Los cálculos de exposición por medio de las "valuaciones programadas", consideran a un grupo de estudio el cual es "valuado" periódicamente con el fin de determinar las muertes en el periodo, así como el remanente de vidas al final del periodo de valuación. Los estudios demográficos estarían enmarcados dentro de este género. El diagrama de Lexis combina la dimensión del tiempo de calendario (abscisa) con la dimensión de la edad de los individuos (ordenada).

A esta situación, se utilizará además de la notación común actuarial, la notación demográfica siguiente:

$P_x^z$  = El número de personas quienes al principio del año  $z$  están entre las edades  $x$  y  $x+1$ ,  $x$  entero. Su año calendario de nacimiento es  $z-x-1$ .

$E_x^z$  = El número de personas que durante el año  $z$  alcanzan la edad  $x$ . Su año calendario de nacimiento es  $z-x$

${}_a D_x^z$  = El número de muertes observadas con edad alcanzada  $x$  entre el inicio y el fin del año  $z$ . Su año calendario de nacimiento es  $z-x$

${}_s D_x^z$  = El número de muertes observadas entre el inicio del año  $z$  y la fecha en el año  $z$  para la cual la edad  $x+1$  debió haber sido alcanzada. Su año calendario de nacimiento es  $z-x-1$ .

$D_x^z$  = El número de muertes observadas a edad de último cumpleaños  $x$  durante el año calendario  $z$  es decir  ${}_a D_x^z + {}_s D_x^z$

Del mismo modo se definen las variables correspondientes a nuevos entrantes ( ${}_a n_x^z, {}_s n_x^z$ ) y retiros ( ${}_a w_x^z, {}_s w_x^z$ ). También se pueden definir las variables  ${}_a m_x^z$  y  ${}_s m_x^z$  las cuales muestran el exceso de nuevos entrantes sobre

retiros en los períodos indicados. El siguiente diagrama es una ilustración de dónde están colocadas en el tiempo dichas variables para un periodo de un año calendario (1975). Se supone que los nacimientos suceden en un mismo día o mitad del periodo (1 julio)

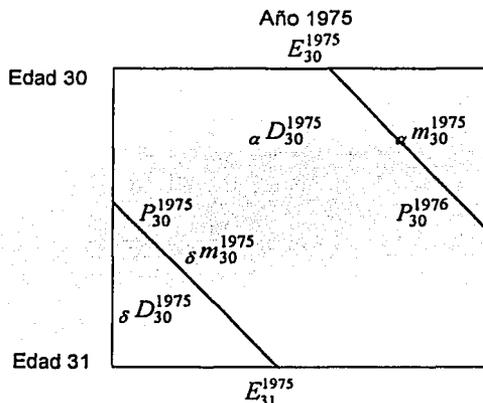


Diagrama 1.- Diagrama de Lexis

La mayor parte del desarrollo teórico de esta metodología está basado en la hipótesis de Balducci, y en su mayoría las fórmulas desarrolladas son compuestas de fórmulas de una o dos diagonales, como en el diagrama anterior. Aquí se dará una breve explicación del funcionamiento de dichas fórmulas de exposición.

### 2.7.1 Fórmulas derivadas de una diagonal

Este tipo de fórmulas está basado en un conjunto de vidas con un año común de nacimiento<sup>11</sup>. La determinación de una diagonal depende en gran parte del periodo de observación escogido así como de la forma de agrupamiento de las muertes. Una primera generalización estaría definida por aquellos **estudios de año calendario con muertes tabuladas por edad calendario**. Si se supone que los nacimientos ocurren el 1 de julio, por ejemplo significa que a mitad del estudio los individuos del grupo estarían cumpliendo año, o de otra manera, al inicio del estudio el grupo tendrían edad  $x-(1/2)$ , y los que llegasen al final del año tendrían edad  $x+(1/2)$ . Por lo tanto el intervalo unitario a considerar aquí es  $(x - 1/2; x + 1/2]$ .

<sup>11</sup> Este es el desarrollo presentado por Batten, "Mortality Table Construction" Prentice Hall, 1978.

El siguiente diagrama muestra la situación comentada.

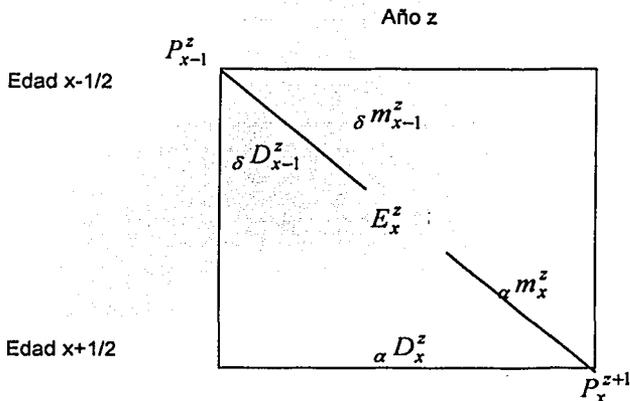


Diagrama 2.- Diagrama de Lexis de una diagonal para el año z

Como se puede ver, al principio del año se estaría contabilizando al número de personas que, al principio del año z, están entre edades  $x-1$  y  $x$ , según indica el subíndice, mientras que a mitad del periodo, se tendría el número de personas que durante el año z alcanzaron la edad  $x$ . Al final del año z se tendría al número de personas que estarán entre edades  $x$  y  $x+1$  en el año  $z+1$ .

Si las muertes están agrupadas según edad calendario, esto significa que existirán algunas muertes que serán tabuladas antes de edad  $x$  y otras después de esa edad. Todas aquellas muertes observadas con edad alcanzada  $x$  estarían en la parte inferior del diagrama ( $\alpha D_x^z$ ), mientras que las muertes ocurridas antes de alcanzar la edad  $x$  estarían en la parte superior del diagrama ( $\delta D_x^z$ ). Con respecto a la migración (nuevas entradas menos retiros), éstas estarán ubicadas de acuerdo con el supuesto de migración que se esté realizando. Si la migración  $\delta$  ocurre  $m$  meses después del límite inferior ( $x-1/2$ ), y la migración  $\alpha$  ocurre  $n$  meses antes del límite superior ( $x+1/2$ ), con  $0 \leq m \leq 6$ ,  $0 \leq n \leq 6$ ,

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

La expresión de la fórmula de exposición quedaría de la siguiente manera:

$$E_x|_{x-1/2}^{x+1/2} = \frac{m}{12} P_x^z + \frac{12-m-n}{12} E_x^z + \frac{n}{12} P_x^{z+1} + \frac{12-m}{12} {}_\delta D_x^z + \frac{n}{12} D_x^z$$

Este resultado, funciona cuando estrictamente se aplica el supuesto de migración tanto para las que se dan antes de  $x$  como las que se dan después de  $x$ . Ahora bien, el intervalo unitario puede variar dependiendo del supuesto de nacimientos que se haga, como por ejemplo 1 de mayo. Con esto, el intervalo correría de  $(x-1/3; x+2/3)$  y la edad  $x$  se encontraría más cerca del límite inferior del intervalo, por lo que  $E_x^z$  se correría a la izquierda y hacia arriba en el diagrama.

Si el periodo de observación fuese de cumpleaños a cumpleaños, tabulando las muertes a edad al último cumpleaños, suponiendo nacimientos el 1 de julio, los límites del intervalo serían ahora desde  $x$  hasta  $x+1$ . Gráficamente, se deberá observar el comportamiento entre dos periodos.

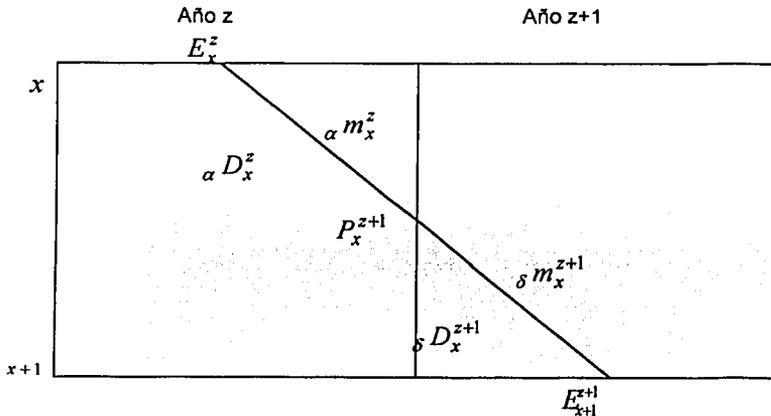


Diagrama 3.- Diagrama de Lexis: cumpleaños a cumpleaños

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

En términos generales, la expresión del tiempo expuesto para este caso sería la que se muestra a continuación con  $0 \leq m \leq 6$ ,  $0 \leq n \leq 6$ :

$$E_x|_x^{x+1} = \frac{m}{12} E_x^z + \frac{12 - m - n}{12} P_x^{z+1} + \frac{n}{12} E_{x+1}^z + \frac{12 - m}{12} {}_\delta D_x^z + \frac{n}{12} {}_\alpha D_x^{z+1}$$

### 2.7.2 Fórmulas derivadas de diagonal doble

Las fórmulas de una diagonal doble se presentan cuando en el estudio se presumen vidas que surgen de dos años- calendario adyacentes, es decir, continuos. A manera de ejemplo, si las muertes se agrupan por edad al último cumpleaños y se realiza una observación para el año  $z$ , con un supuesto de que los nacimientos ocurren el 1 de julio, se tendría lo siguiente para el intervalo unitario  $(x; x+1)$ <sup>12</sup>

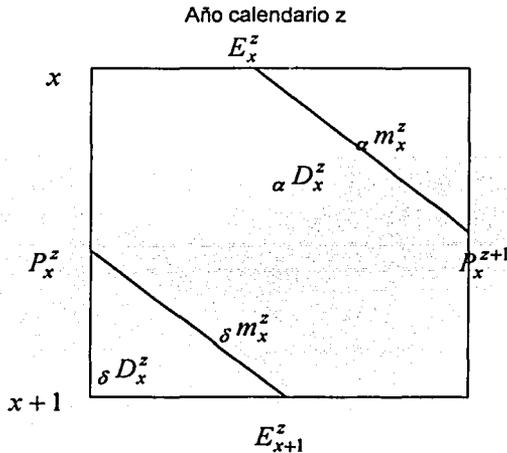


Diagrama 4.- Diagrama de Lexis de diagonal doble

<sup>12</sup> En este caso, dado que las edades surgen de dos años calendario adyacentes, debe ser claro que al tabularse existirá un grupo que alcanzaría edad  $x$  en julio 1 y otro que tendría  $x+1/2$  al iniciar el estudio, y que alcanzaría  $x+1$  a julio 1 del año de estudio. Por esto es que debe realizarse el análisis para el intervalo que va de  $x$  a  $x+1$

Si se supone también que las muertes se distribuyen de acuerdo con la hipótesis de Balducci, además de que las migraciones  $\alpha$  se dan a los  $m$  meses antes de alcanzar  $x+1/2$ , y que las migraciones  $\delta$  se dan a los  $n$  meses antes de alcanzar  $x+1$ ,  $0 \leq m \leq 6$ ,  $0 \leq n \leq 6$ , entonces la exposición en este intervalo unitario será:

$$E_x \Big|_x^{x+1} = E_x^z + \frac{12-m}{12} {}_a m_x^z - \frac{1}{2} P_x^{z+1} + \frac{1}{2} P_x^z + \frac{n}{12} {}_\delta m_x^z$$

Dado que las migraciones están dadas por:

$${}_a m_x^z = P_x^{z+1} + {}_a D_x^z - E_x^z$$

$${}_\delta m_x^z = E_x^{z+1} + {}_\delta D_x^z - P_x^z$$

La ecuación quedaría de la siguiente manera:

$$E_x \Big|_x^{x+1} = \frac{m}{12} E_x^z + \frac{12-m}{12} {}_a D_x^z + \frac{6-m}{2} P_x^{z+1} + \frac{6-n}{2} P_x^z + \frac{n}{12} {}_\delta D_x^z + \frac{n}{12} E_x^{z+1}$$

Esta expresión del monto de años-vida expuestos en el intervalo unitario estará determinada entonces por los supuestos de migración que se asuman, tanto para aquellos que tienen edad alcanzada  $x$  entre el inicio y fin del año observado ( $\alpha$ ), como de los que debieron alcanzar la edad  $x+1$  ( $\delta$ ).

Como idea principal podemos definir que la determinación y cálculo de la exposición por medio de este método está relacionado también con la forma en que se encuentra la información, así como la cantidad disponible de los mismos, toda vez que estos sean agrupables de acuerdo a consideraciones que tienen que ver con la percepción del comportamiento de los nacimientos y migraciones, así como de la forma en que las muertes deben ser tabuladas. Sobre este último, debe recalcar que su fundamento teórico yace en la presunción de que las muertes tienen un comportamiento exponencial para edades fraccionadas, es decir, entre  $x$  y  $x+1$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 2.7.3 Fórmulas Compuestas

En las fórmulas de una y doble diagonal, las cuales ya han sido analizadas en esta tesis, solo hemos considerado el periodo de un año, o un año calendario de 12 meses. En realidad, la mayor parte de los estudios de mortalidad son desarrollados sobre un periodo de observación de varios años. Afortunadamente las fórmulas de una y doble diagonal han sido parte de una generalización y se han diseñado las fórmulas compuestas o multianuales.

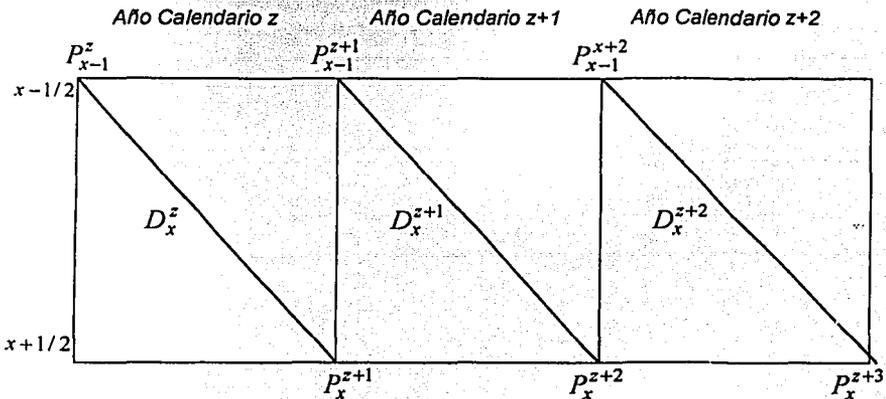
Para el análisis de este punto, supongamos la situación de una diagonal en la cual las muertes son agrupadas por año calendario, la migración ocurre en 1 de Julio y el periodo de observación es de tres años calendario de  $z$  a  $z+2$ . Puesto que ya conocemos, o fácilmente podemos determinar, que la fórmula apropiada para la exposición  $E_x$ , en año calendario  $z$ , es

$$E_x \Big|_{x-(1/2)}^{x+(1/2)} = \frac{1}{2} * (P_{x-1}^z + P_x^{z+1} + D_x^z),$$

La fórmula compuesta simplificada es

$$E_x \Big|_{x-(1/2)}^{x+(1/2)} = \frac{1}{2} * \sum_{k=z}^{k=z+2} (P_{x-1}^k + P_x^{k+1} + D_x^k),$$

Para ilustrar esta fórmula, planteamos el siguiente diagrama



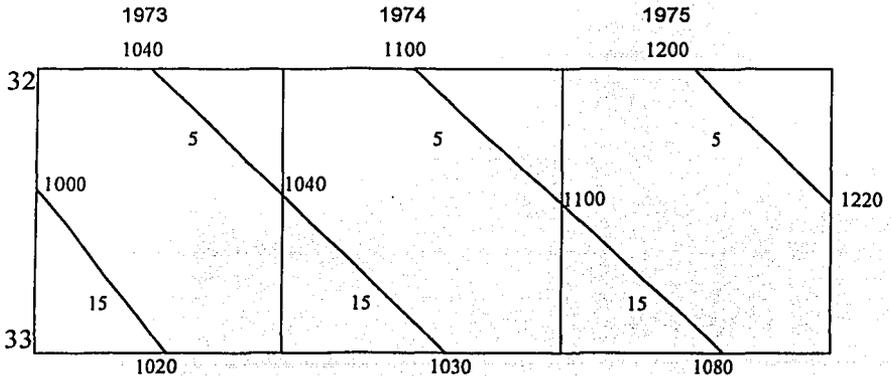
### 2.7.4 Aplicación del método

A continuación, para un mejor entendimiento, planteamos la siguiente situación

Un estudio de mortalidad desarrollado con un grupo de personas aseguradas, son observadas en un periodo de tres años calendario de 1973 a 1975. Se asume que todas las pólizas tienen como fecha de emisión el 1 de Septiembre, de igual manera asumimos que la migración  $\alpha$  y  $\delta$  ocurrieron el 1 de Octubre y 1 de Abril, respectivamente. Si las muertes son tabuladas asumiendo la hipótesis de Balducci, determinamos el valor de  $q_{32}$  de los siguientes datos:

$$\begin{aligned} E_{32}^{1973} &= 1040, & P_{32}^{1973} &= 1000, \\ E_{32}^{1974} &= 1100, & P_{32}^{1974} &= 1040, \\ E_{32}^{1975} &= 1200, & P_{32}^{1975} &= 1100, \\ E_{33}^{1973} &= 1020, & P_{32}^{1976} &= 1220, \\ E_{33}^{1974} &= 1030, & \alpha D_{32}^x &= 5, \quad \forall x \\ E_{33}^{1975} &= 1080, & \delta D_{32}^x &= 15, \quad \forall x \end{aligned}$$

El agrupamiento de las muertes en el periodo de observación y con los datos anteriores llegamos al siguiente diagrama



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Basado en el diagrama, la fórmula de exposición para el año 1973 sería:

$$E_{32} \Big|_{32}^{32} = \frac{1}{4} * P_{32}^{1973} + \frac{1}{12} * E_{33}^{1973} + \frac{1}{12} * E_{32}^{1973} + \frac{1}{4} * P_{32}^{1974} + \frac{11}{12} * D_{32}^{1973} + \frac{5}{12} * D_{32}^{1973} .$$

Queda simplemente registrar las exposiciones para los tres años separadamente o efectuar un compendio formal de las bases de la fórmula de doble diagonal.

El segundo, probablemente, en cierto modo el más eficiente, produce

$$E_{32} \Big|_{32}^{33} = \frac{1}{4} * 3140 + \frac{1}{12} * 3130 + \frac{1}{12} * 3340 + \frac{1}{4} * 3360 + \frac{11}{12} * 15 + \frac{5}{12} * 45 = 3240 .$$

Finalmente, tenemos

$$q_{32} = \frac{60}{3240} .$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 2.8 Determinación del Período de Estudio

Para la selección del periodo de observación en un estudio sobre mortalidad, se deben tomar en consideración muchos factores, como aquellos que tienen que ver con el comportamiento de la salud y enfermedades en el tiempo, principalmente lo relativo a cambios o mejoras en las condiciones de salud de los individuos afectados en el grupo de estudio, o bien por parte de otros factores naturales, sociológicos y económicos, tales como migraciones o crisis económicas. Además, si se decidiera tratar de minimizar el efecto de estas variables mediante la selección de un periodo corto de análisis, se podría tener la gran limitante de un número pequeño de datos de estudio.

En cuanto a periodos de tiempo, por ejemplo, el resultado de un estudio poblacional de fallecimientos sobre un periodo de 20 años puede verse severamente afectado, si durante ese periodo ocurrieron eventos como guerras, terremotos, huracanes, o enfermedades virales, o bien altos índices de criminalidad y pobreza. Si las condiciones durante ese mismo periodo son estables, los patrones de deceso no se verían altamente afectados por lo que el estudio tendría una mayor validez.

Por lo tanto en la elección del periodo de observación debe prevalecer el hecho de que éste no sea tan largo como para incluir influencias por los factores mencionados, ni tan corto como para no tener suficientes datos.

## 2.9- Cálculo de la Exposición Ex

Como ya se ha expresado, las condiciones bajo las cuales se encuentran los datos, permiten la determinación de las edades de entrada y salida al estudio, y de modo más exacto, encontrar la exposición individual, es decir, el número de años-vida que un individuo estuvo expuesto al riesgo de muerte durante un periodo determinado. La utilización del método Seriatim en este caso es importante, ya que no es necesaria la agrupación de datos, además de que las herramientas de cómputo y principalmente hojas de cálculo como Excel, facilitan el trabajo de determinación de la exposición.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

A manera de ejemplo sobre el procedimiento seguido, supóngase que para el período indicado se tienen los siguientes asegurados:

Asegurado	Nacimiento	Entrada	Salida	Condición
A	21/10/65	01/01/88	15/11/90	Muerte
B	29/03/67	20/03/90	31/12/00	Activo
C	19/08/65	03/05/88	10/04/95	Retiro
D	29/11/66	01/06/89	31/12/00	Activo
E	23/03/69	02/07/91	20/11/00	Muerte
F	20/05/70	01/04/93	25/06/00	Retiro

**Descripción de asegurados hipotéticos, según nacimiento, entrada, salida y condición**

Las edades de entrada y de salida para cada uno de los asegurados, así como su exposición total son:

Asegurado	Edad Entrada	Edad Salida	Exposición Total
A	22.21	25.08	2.87
B	22.99	33.78	10.79
C	22.72	29.66	6.94
D	22.52	34.11	11.59
E	22.29	31.68	9.39
F	22.88	30.12	7.24

**Exposición total por asegurado**

Las fechas que se están considerando son:

*Inicio de estudio:* 01/01/1988

*Terminación de estudio:* 31/12/2000

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

A continuación se muestra el cuadro resumen de la exposición en cada intervalo unitario:

Asegurado	Edad (x)												
	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
A	0.79	1.00	1.00	0.06	-	-	-	-	-	-	-	-	-
B	0.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.76	-
C	0.28	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.66	-	-	-	-	-
D	0.48	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.11
E	0.71	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.68	-	-	-
F	0.12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.12	-	-	-	-
Exposición Total	2.39	6.00	6.00	5.06	6.00	6.00	6.00	4.86	3.12	2.68	2.00	1.76	0.11

De esta forma se ha obtenido el aporte individual a la exposición total en cada uno de los intervalos unitarios de edad, con lo que sumando verticalmente para cada una de las edades, se agrupa el total de exposición por edad. Esto ya permite el cálculo de las tasas brutas de mortalidad  $u_x$  tomando en cuenta que las muertes son tabuladas entre edades  $x$  y  $x+1$ :  $\theta_x^{x+1}$

No obstante, dentro de este ejemplo, tal y como sucede para los datos reales, no hay suficientes fallecimientos como para calcular la tasa para cada una de las edades.

Los fallecimientos para este ejemplo ocurren en los intervalos (25,26) y (31,32), por lo tanto

$$q_{25} = u_{25} = \frac{\theta_{25}}{E_{25}} = \frac{1}{5.08} = 0.197685032$$

$$q_{31} = u_{31} = \frac{\theta_{31}}{E_{31}} = \frac{1}{2.68} = 0.37313433$$

Este es el mismo procedimiento utilizado para la obtención de los valores iniciales  $u_x$ , de acuerdo con los datos obtenidos mediante el proceso de depuración.

## 2.10 Cálculo de las tasas brutas de mortalidad $u_x$ .

Ya se ha mencionado de qué manera es que surgen las tasas brutas o valores iniciales  $u_x$  cuando se realizó el ejemplo anterior. Sin embargo la determinación de las mismas surge del supuesto de mortalidad que se está asumiendo: la hipótesis de Balducci, así como el tratamiento que se le dé a las muertes, es decir, la manera en que las mismas son tabuladas. Asimismo, suponemos que las mismas ocurren al final del intervalo unitario.

Se ha supuesto además, que el intervalo unitario corre desde edad  $x$  hasta edad  $x+1$  por lo que asumimos que el rango para las muertes es el mismo. Así,

$$\theta_{x|x}^{x+1}$$

Con esto, la tabulación en el año de muerte está en relación con la regla de tabulación de edad al último cumpleaños e inclusive a todas las personas que cuya edad a la muerte está entre  $x$  y  $x+1$ .

## 2.11 Interpretación de los resultados

De acuerdo con lo anterior los resultados de la construcción de las tasas  $u_x$  pueden interpretarse a la luz de algunos puntos mencionados por Batten<sup>13</sup>:

- *Razonabilidad.*- El comportamiento general no debe ser muy diferente al comportamiento esperado en lo que concierne a las tasas de mortalidad con respecto a la variable edad.
- *Suficiencia de datos.*- Se ha comentado el hecho de que la cantidad de datos de fallecidos durante el periodo de observación es relativamente bajo, lo que haría que se esperaran fluctuaciones importantes desde el punto de vista estadístico, o sea, una alta variabilidad. Esto también causa complicaciones cuando se desea establecer intervalos de confianza para cada una de las edades estudiadas.
- *Homogeneidad de los datos.*- En este caso, la homogeneidad de los datos está asegurada, pues se trata de datos provenientes de una misma fuente.
- *Madurez de los datos.*- Se argumenta que datos con una marcada influencia de nuevos entrantes causarían un efecto no deseado en el resultado de las tasas.

<sup>13</sup> Batten, "Mortality Table Construction", Prentice Hall, 1978.

- **Antiselección.**- Un efecto sumamente negativo sobre la exposición y sobre las muertes principalmente, está en los niveles importantes de vidas antiselectas, que puedan estar involucradas en el estudio
- **Amplitud del período de observación.**- A este respecto, ya se ha comentado que es posible que un período de observación muy largo involucra efectos distorsionantes producidos por cambios en las condiciones de salud, sociales y económicas que afectan a los individuos observados.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### III. Graduación de las Tasas Brutas de Mortalidad

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.1 Introducción

Una vez generados los valores iniciales que servirán de base para la obtención de mejores estimadores, el siguiente paso es utilizar el proceso de "graduación" que permite hallar a aquellos valores que representen mejor las probabilidades de muerte, a partir de los datos que se utilizarán. Más que un proceso puramente actuarial, las bases a utilizar pueden ser una aplicación de los procedimientos de ajuste y regresión. Sin embargo, a medida que se sometan a la "graduación" los resultados iniciales, la búsqueda de una serie similar a la que dicta la experiencia con respecto al comportamiento de la variable estudiada, reflejará aún más la profunda conexión con el mundo actuarial.

A partir de lo anterior, debe conceptualizarse la graduación como un proceso que permita la mejor representación de la ley o fenómeno analizado, a partir de una serie irregular de observaciones de dicho fenómeno. A manera de ejemplo, la idea *a priori* sobre el comportamiento de las muertes conforme se incrementa la edad, haría que el proceso de graduación de una serie de datos observados sobre el fenómeno buscara eliminar las irregularidades propias de los datos, tratando de alcanzar un comportamiento suave y creciente hacia las edades más elevadas, además de que el resultado corregido no fuera demasiado diferente de los valores observados.

Por lo tanto, el proceso de graduación no es otro que el método mediante el cual se logra una serie de datos que representan una estimación del verdadero comportamiento del fenómeno observado, a partir de una serie irregular derivada de dicho fenómeno.

### 3.2 Consideraciones estadísticas

En este caso, se desea estimar las tasas reales de mortalidad o probabilidad de muerte, a partir de las tasas brutas o valores iniciales. De hecho, las tasas brutas representan una estimación del verdadero valor de las probabilidades de muerte, toda vez que las mismas surgen de aplicar la teoría de la estimación por el método de momentos.

El método de estimación por momentos no es otra cosa que igualar el número esperado de muertes en un intervalo unitario de edad con las muertes realmente observadas.<sup>14</sup> A partir de esta definición, para una muestra de tamaño 1, el número esperado de muertes se expresaría por:

$$E[D_x] = 1 * {}_{s_i-r_i} q_{x+r_i} + 0 * {}_{s_i-r_i} p_{x+r_i} = {}_{s_i-r_i} q_{x+r_i}$$

<sup>14</sup> London, "Graduation, the Revision of Estimates", ACTEX Publications, 1984

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

para una persona que ingresa al intervalo unitario  $(x; x+1)$  con edad  $x+r$  y está programado para salir en  $x+s$ ,  $0 \leq r \leq s \leq 1$ . Apoyándose en la hipótesis de Balducci, y ahora para una muestra de tamaño  $n$  se tendría una expresión para el estimador de momentos de la probabilidad  $q_x$ .

$$E[D_x] = \sum_{i=1}^n s_i - r_i q_{x+r_i} = \sum_{i=1}^n (s_i - r_i) q_x = \theta_x$$

Por lo tanto, despejando para  $q_x$ , el estimador de momentos de la probabilidad de muerte sería:

$$q_x = \frac{\theta_x}{\sum_{i=1}^n (s_i - r_i)}$$

el cual es en principio, idéntico al método Seriatim anteriormente expuesto, siendo el denominador de la expresión igual al tiempo total de años-vida expuestos al riesgo de muerte dentro del intervalo unitario.

Regresando al concepto de graduación, lo que justifica continuar con un proceso de esta naturaleza, dado que el fenómeno ya ha sido "estimado" a partir de los datos observados por medio de un procedimiento estadístico, es la idea "a priori" o la percepción empírica del fenómeno observado. De acuerdo con dicha percepción, entonces, es necesario "mejorar" los resultados obtenidos a la luz de la ley que se encuentra bajo análisis; en este caso el fenómeno de *mortalidad*.

La concepción apriorística del comportamiento de la mortalidad es de una serie de valores que se comportan de manera suave y creciente conforme se incrementa la edad, de tal manera que los estimadores de la verdadera probabilidad de muerte a cada intervalo de edad no solamente deben guardar una cierta relación con las tasas vecinas (lo cual tiene que ver con el concepto de *suavidad*), sino también que los resultados finales no se desvíen demasiado de los valores iniciales (*ajuste*).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

En cuanto a la suavidad se refiere, un indicador válido de la suavidad de una serie de datos graduados  $v_x$  es la suma de cuadrados de las diferencias de grado cuatro de dichos valores<sup>15</sup>:

$$S = \sum_i (\Delta^4 v_i)^2$$

donde  $v_i$  es el valor final graduado o estimador final.

Este indicador sería válido en situaciones donde se espera que el comportamiento del fenómeno observado siga una función de orden cúbico. Existen otras medidas válidas para S cuando se trata de funciones exponenciales como Gompertz ó Makeham, lo cual se comentará más en detalle cuando se analicen los resultados de la graduación por métodos paramétricos.

También se pueden formular uno o varios indicadores del nivel de ajuste que tienen los datos graduados sobre los iniciales. Una medida posible para medir el nivel de ajuste puede ser:

$$F_2 = \sum_x w_x (v_x - u_x)^2$$

donde  $w_x$  representa un peso específico de ponderación para cada edad  $x$  y  $u_x$  los estimados iniciales. Dichos pesos pueden ser calculados como:

$$w_x = \frac{n_x}{v_x (1 - v_x)}$$

siendo  $n_x$  el tamaño de muestra en el intervalo unitario. De esta forma, un valor de  $F_2$  pequeño significaría que los valores graduados son muy similares a los estimados iniciales y por lo tanto se está obteniendo un buen ajuste. La utilización de las diferencias al cuadrado de dichas variables permite eliminar la posibilidad de diferencias negativas que anulen a las positivas y entonces den una falsa percepción del ajuste logrado.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

<sup>15</sup>  $S=0$ , en este caso, implica la aceptación de un polinomio de tercer grado como estándar de suavidad. Por lo tanto al minimizar S se busca acercarse lo más posible a un polinomio de dicho grado.

Algunos procedimientos de graduación necesitan del valor  $w_x$  antes de la obtención de los estimados finales, de tal manera que el ponderador podría calcularse utilizando los estimados iniciales  $u_x$  en vez de  $v_x$ . Sin embargo, en intervalos unitarios en donde no existe el estimado inicial, dicho ponderador no podría ser calculado. Por esta razón es posible también aproximar el peso relativo por medio de:

$$w_x = \frac{n_x}{\bar{n}_x}$$

siendo el denominador el promedio aritmético del tamaño de muestra para todo  $x$ . Esto facilita enormemente el cálculo de los valores finales en aquellos métodos para los cuales es necesario una medida de peso específico.

En general el concepto de graduación refleja el hecho de mejorar una serie de valores estimados de una variable aleatoria, con el fin de hacer dichos resultados más compatibles con una concepción apriorística del comportamiento de dicha variable. En lo que se refiere a mortalidad, dicha percepción está basada en la experiencia de que las muertes guardan un comportamiento suave y creciente conforme la edad aumenta.

A continuación se presentan los métodos más representativos dentro del proceso de graduación, incorporando una explicación breve de los pasos a seguir en cada uno de ellos.

### 3.3 Métodos de Graduación

- a) *El Método Gráfico:* En este método, los valores observados son debidamente trazados en un papel milimétrico y entre estos valores es trazada una curva suave y continua.
- b) *El Método de Interpolación:* En este método, los datos son unidos o agrupados dentro de intervalos de edad y la serie graduada es obtenida por interpolación entre puntos determinados como representativos de los intervalos.
- c) *El Método del Promedio Móvil Ajustado:* En este método, cada término de la serie graduada es un peso promedio de un número determinado de términos de la serie observada.
- d) *Graduación por fórmula matemática:* En este método, la serie graduada es representada por una curva matemática ajustada a los datos.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.4 La aceptabilidad de la Graduación

Cuando la graduación ha sido realizada, el ajuste no ha sido completado. Cada graduación o valor graduado debe ser probado para ser aceptado y ser considerado como tal.

Como distinción de los problemas matemáticos más familiares, la graduación no tiene una solución numérica única. Ya que depende de la elección del método, en las proporciones en las cuales el ajuste y la suavidad son combinados y en la habilidad y experiencia del graduador.

Entonces, ¿cómo se debe probar o determinar que la graduación es aceptable o satisfactoria o si un método de graduación es preferible que otro método? La respuesta radica en dos características (i) **suavidad** y (ii) **ajuste**.

### 3.5 Prueba de Suavidad

La función en la cual estamos interesados, deberá exhibir una progresión suave y continua de término a término. La prueba de suavidad es, por lo tanto, aplicada a las tasas graduadas de mortalidad.

La suavidad es probada inspeccionando la progresión y tamaño de algún grado de las diferencias de los valores graduados.  $q_x$ 's

La progresión de las diferencias es analizada y se observa el grado de regularidad de edad a edad.

Las medidas numéricas usuales del tamaño de las diferencias son basadas en diferencias cúbicas.

- a)  $\sum (\Delta^3 q_x)^2$ , La suma cuadrada de las diferencias cúbicas, o alternativamente.
- b)  $\sum |\Delta^3 q_x|$ , la suma de sus valores absolutos.

A la suma más pequeña se le considerará como la suma o factor que suaviza la graduación. Ordinariamente, las diferencias son tomadas sobre intervalos unitarios, pero es donde los errores pueden tener algún efecto esencial, las diferencias sobre los intervalos de dos o cinco unidades pueden ser comparados de igual manera.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Las medidas numéricas de suavidad en su naturaleza son más comparativas que pruebas absolutas, facilitando la comparación entre dos o más graduaciones de los mismos datos. En el caso de una sola graduación, la prueba de suavidad es por consiguiente limitada a una consideración de la progresión de las diferencias de varios grados.

Cuando una graduación es realizada por el ajuste de una curva matemática, por ejemplo curva Makeham, las series graduadas tienen la suavidad inherente de una curva matemática y son casi invariablemente consideradas satisfactorias sin llamar una prueba.

### 3.6 Prueba de Ajuste

Las tasas de ajuste son comúnmente aplicadas a las muertes. Las muertes esperadas de la tabla de tasas graduadas de mortalidad aplicadas a las exposiciones actuales (o simplemente las muertes esperadas) son comparadas con las tasas observadas:  $O_x^n - O_x$ , (en otra manera se trata esta diferencia como las desviaciones). Cuando las exposiciones no están disponibles, las pruebas son aplicadas directamente a las diferencias entre los valores graduados y sin graduar de  $q_x$ .

Puesto que las observaciones en algunos puntos incluyen más datos que otros, estos son más confiables y por lo tanto decimos que estos puntos tienen mayor peso o significancia.

La serie de los valores graduados deberá entrelazarse con la serie sin graduar, por lo que deberá existir un ajuste satisfactorio durante toda la tabla. Por orden, para establecer este hecho, las pruebas de ajuste deberán ser aplicadas a subgrupos de los datos de las series enteras.

Un número de diferentes pruebas de ajuste, de varios grados de complejidad, están disponibles pero no todas ellas son necesarias para aplicarlas en cualquier graduación. El alcance y la complejidad de las pruebas usadas dependen del propósito para el cual la tabla graduada es destinada además del volumen de datos observados.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Algunas de las pruebas más simples basadas en las muertes son descritas a continuación:

- a) La suma de las desviaciones,  $\sum(\theta_x'' - \theta_x)$ , y el primer momento,  $\sum x(\theta_x'' - \theta_x)$ , deberán aproximarse a cero, el cual es su valor esperado o promedio de acuerdo con la teoría de probabilidad matemática. En otras palabras, el total de muertes esperadas deberá aproximarse o estar cerca de las muertes actuales y el promedio de edad en la tabla graduada deberá corresponder muy cercanamente al promedio de edad de los datos observados.
- b) El número de alternaciones en los signos de las desviaciones y la norma de tales signos también es una medida de proximidad de ajuste de una graduación. Teniendo en mente el entrelazado de la serie graduada y no graduada, los cambios frecuentes en los signos de las desviaciones deberán ser exhibidos y a lo largo del recorrido deberán ser examinados. Una serie con un mismo signo en las desviaciones indica que en esta área de curvas de las series graduadas y no graduadas está totalmente por arriba o por debajo de la otra.

Para una serie de  $n$  términos, el número esperado de cambios de signo en las desviaciones es aproximadamente  $(n-1)/2$ , esto es, si una graduación exhibe el mismo número de cambios de signo como continuaciones de signo, en la columna de desviaciones, la graduación es considerada satisfactoria. Para asegurar la proximidad del ajuste por todas las series, las desviaciones acumuladas también deberán ser expuestas como los cambios de signo.

- c) Una comparación de los valores de funciones financieras es a veces usada en conexión con tablas importantes. Valores de anualidades o primas son calculados usando la tasa de mortalidad graduada y comparados con aquellos basados en las tasas de mortalidad observadas.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.7 El Método Gráfico

El método gráfico fue el primer método desarrollado y aplicado por Joshua Milne<sup>16</sup>. Dicho método consistía en censos de población y muertes registradas en dos municipios en Carlishe. La graduación fue desarrollada por separado de la población y muertes organizada en quinquenios y decenios.

En el método gráfico, los valores observados son trazados en un papel milimétrico y entre estos puntos se traza una curva suave y continua, considerando a los puntos de esta curva como los puntos de la serie graduada.

Los pasos a seguir en este método se enlistan a continuación.

- a) Agrupar los datos
- b) Seleccionar un papel milimétrico aceptable y de una escala apropiada
- c) Trazar los valores observados con la indicación de su peso relativo, si ésta información esta disponible.
- d) Dibujar una curva suave y continua entre los valores observados
- e) Interpretar los valores graduados del diagrama

#### 3.7.1 Agrupamiento de los datos

A menos que los datos sean extensos, las fluctuaciones más grandes probablemente estén presentes en edades donde se encuentren gran número de observaciones y esto puede provocar confusión en el proceso de la graduación. Consecuentemente una parte casi necesaria de la aplicación del método gráfico es la combinación de los datos en grupos de tamaño adecuado, si es que estos no están agrupados.

Una serie de valores agrupados será por lo tanto más suave, consistente y regular que la serie de valores individuales. Cada uno de los valores agrupados asume un peso mayor que cualquier observación individual.

El número de edades en cada grupo puede ser igual o puede variar, pero ningún grupo debe mostrar fluctuaciones extremas ni pequeñas como para eliminar esas características de los datos.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

<sup>16</sup> Actuario de "Sun Life Office", Londres, fue uno de los primeros en aplicar la graduación en Tablas de Mortalidad, "The Carlishe Table of Mortality" publicada en 1815

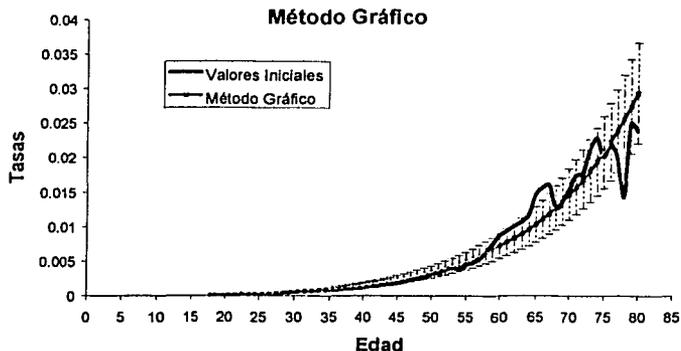
La pregunta ahora es ¿dónde localizar el punto de cada grupo de edad?, éste se conoce como el promedio de la tasa de mortalidad para cada grupo de edad, y se calcula de la siguiente manera; las muertes esperadas de la tabla estándar son aplicadas a la exposición en cada edad; entonces el total de muertes esperadas es dividido por la correspondiente exposición total y de esta manera se obtiene la tasa promedio de muerte para cada grupo.

### 3.7.2 Trazado de valores

Cuando los valores observados son graficados o trazados, es importante mantener la suavidad y el ajuste de la curva. Un sistema útil es registrar las desviaciones estándar,  $\sigma_x$ , correspondientes a cada tasa de mortalidad expuesta y observada,

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{q_x^n (1 - q_x^n)}{E_x}}$$

y por lo tanto cada punto es trazado como un par de puntos, cuya distancia entre estos puntos es la desviación estándar  $\sigma_x$ , estos dos puntos son unidos por una línea, como se muestra en la gráfica



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.7.3 Interpretación de la gráfica

Uno de los problemas más frecuentes al usar el método gráfico es la dificultad de interpretar los valores graduados con precisión de la gráfica. En el caso de las tasas de mortalidad la legibilidad puede mejorarse al escoger diferentes escalas para diferentes secciones de la tabla, pero aún así este método no es tan recomendable para el proceso de graduación.

A pesar de lo anterior la suavidad de la serie graduada puede ser considerablemente mejorada haciendo pequeños ajustes en los valores graduados. Esto usualmente es obtenido, usando la diferencia mayor entre la tasa bruta y el valor graduado y posteriormente haciendo ajustes en esta.

Cuando realmente una serie de valores graduados es deseada, siempre es posible hacer graduaciones por algún método matemático. Estos métodos son analizados posteriormente en esta tesis.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.8 El Método de Interpolación

El método de interpolación fue el primer método de graduación desarrollado posterior al método gráfico. Este fue desarrollado principalmente en relación con las estadísticas de la población donde estas eran extensivamente usadas.

Bajo éste método, la serie graduada es obtenida interpolando entre puntos especialmente determinados como representativos de los grupos de edad, dentro de los cuales los datos son asociados o combinados.

Puesto que la graduación supone el reemplazo de una serie irregular observada por una serie regular, consistente y suave con tendencia a los valores verdaderos u observados, claramente el método de la interpolación de graduación incluye más que una interpolación única o de un solo valor.

El método de interpolación comprende tres características

- a) Agrupamiento de los datos
- b) El aseguramiento de la suavidad, series de puntos de confianza, uno por cada grupo, representando a los datos.
- c) El registro de los valores graduados por interpolación basados en estos puntos

#### 3.8.1 Agrupamiento de los datos

El primer paso en el método de la interpolación es la agrupación de los datos en grupos de tamaño y número adecuado. Una función de graduación es representada por este grupo.

En el caso de las estadísticas de población, los datos son usualmente extensos, para el agrupamiento de estos, recurrimos a reducir los errores de observación, pero aún después de esto los errores reportan alguna evidencia en edades específicas. Tales errores son de diferente tipo e introducen un sesgo sistemático. Los datos son agrupados con la esperanza de que la distribución de los datos de la población no presenten errores o que estos sean grandemente reducidos.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.8.2 Puntos Pivotales

El segundo paso en la aplicación del método es el cálculo de la interpolación de puntos. Puesto que la interpolación es el soporte para éstos puntos, ésta es de gran importancia para el éxito de este método dado que los segmentos de la curva interpolada son construidos entre los puntos pivotales o centrales formado una curva suave.

El método más simple para obtener los puntos pivotales es asumir que la razón de muertes expuestas en cada grupo de edad es la tasa de mortalidad para la edad central en cada grupo.

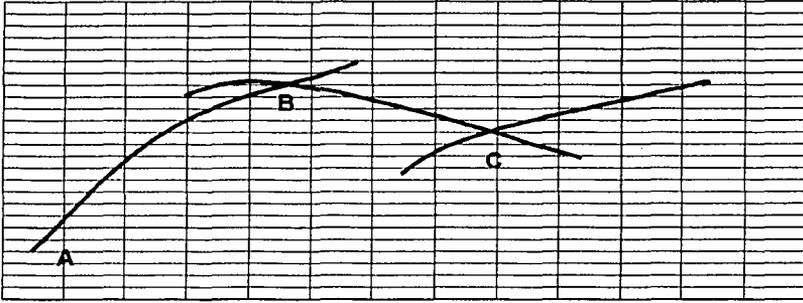
El método de King es un método que ha sido usado y proporciona los valores pivotales y son obtenidos calculando los puntos pivotales  $\mu_x$ , sumando grupos de tres o cinco quinquenios,  $w_x$ , en los cuales los datos se asumen agrupados. La fórmula está basada en la suma de tres quinquenios,  $w_{x-5}$ ,  $w_x$ , y  $w_{x+5}$ . es decir;

$$u_x = 0.2w_x - 0.008(w_{x-5} - 2w_x + w_{x+5}).$$

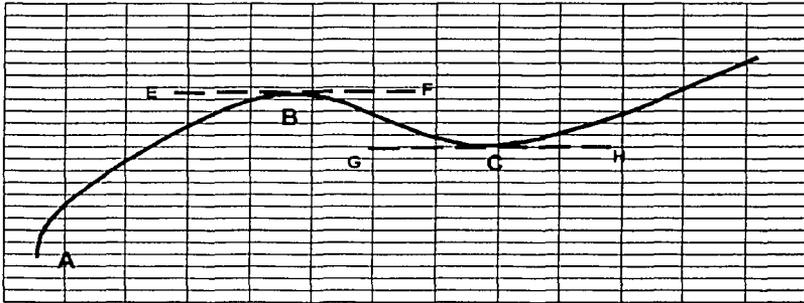
La fórmula, corrige las irregularidades, implica  $w_{x-10}$ ,  $w_{x-5}$ ,  $w_x$ ,  $w_{x+5}$  y  $w_{x+10}$ . Estas fórmulas pueden ser derivadas por los métodos de la teoría de las diferencias finitas. La fórmula de King puede ser aplicada por separado a las exposiciones y muertes. Los puntos pivotales de las tasas de mortalidad son obtenidos como el cociente de las exposiciones pivotales y muertes.

El método de King generalmente no nos proporciona satisfactoriamente puntos pivotales a menos que los datos agrupados formen una relativa serie suave como el caso de las estadísticas de población donde los datos son muy extensos. En cualquier evento, si la serie de puntos pivotales no parece ser suficientemente suave, esta suavidad puede ser aumentada graduando gráficamente los valores pivotales antes de proceder con el método de interpolación.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Datos sin Interpolación



Datos Interpolados en los puntos pivotaes

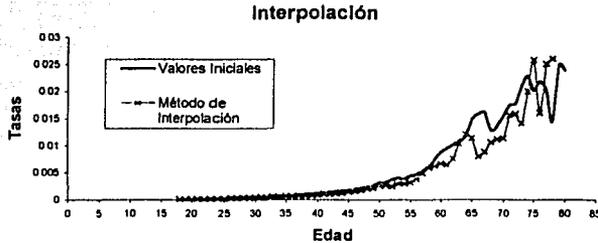
### 3.8.3 Interpolación

El tercer paso del método de interpolación es la representación de los puntos pivotaes. Estos valores pueden ser considerados como parte de segmentos de curvas interpoladas, como se muestran en el gráfico siguiente, estos valores serán asumidos como numéricamente consecutivos.

Históricamente, el progreso de la teoría de la interpolación ha sido motivada por el deseo de incrementar la suavidad de la serie de valores interpolados, dado que los segmentos de la curva no tienen la misma pendiente y/o derivada y las discontinuidades se presentan en los puntos pivotaes.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

A continuación se muestra el efecto anterior con los datos reales:



Como se puede apreciar, la curva graduada no es muy suave, es por ello que este método ha sido parte de modificaciones y alteraciones, tales como la fórmula de Karup-King, pero a pesar de ello, este método no es muy recomendable para datos muy pequeños.

### 3.9 El método del promedio móvil ajustado

Dentro de los métodos de promedio móvil ajustado se incluyen dos conjuntos de fórmulas de graduación: fórmulas lineales compuestas y fórmulas compendio, en cada uno de los conjuntos mencionados, cada término graduado es determinado con un peso promedio del número fijo de términos sin graduar.

#### Promedios Ajustados

Las posibilidades de tomar un promedio como una graduación es un recurso que puede ser ilustrado numéricamente con este pequeño ejemplo. Sea la serie irregular  $V_x = 2,4,6,8,10, \dots$ , y asumiremos que la serie de errores  $e_x$  introducen irregularidades de  $-1, +1, -1, +1, \dots$ , y así sucesivamente tal que la serie actualmente observada (igual a la suma de la serie  $V_x$  y la serie  $e_x$ ) es  $u_x^n = 1,5,5,9,9, \dots$  promediando la serie  $u_x^n$ , en conjuntos de tres, nos da la serie  $u_x^a = 3\frac{2}{3}, 6\frac{1}{3}, 7\frac{2}{3}, \dots$  correspondiendo a  $4,6,8, \dots$  de la serie regular original. La serie  $u_x^a$  es vista como una buena representación de la serie regular subyacente, con los errores reducidos.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Los promedios ajustados en los dos métodos son una generalización del proceso del promedio. El término  $u_x$  de la serie graduada es expresado por un promedio simétrico de  $u_{x+n}^n$  a  $u_{x-n}^n$  de  $2n+1$  valores sin graduar, es decir;

$$u_x = a_n u_{x+n}^n + a_{n-1} u_{x+n-1}^n + \dots + a_0 u_x^n + \dots + a_{n-1} u_{x-n+1}^n + a_n u_{x-n}^n$$

Los  $a_n$  son multiplicadores numéricos, que establecen la proporción en la cual los términos sin graduar entran en el promedio. Los valores numéricos de los coeficientes son determinados como seguridad por parte de las fórmulas para obtener una satisfactoria graduación.

### 3.9.1 Determinación de los coeficientes

Los supuestos hechos por la determinación de los valores de los coeficientes de este método pueden ser mejor considerados por un análisis de la manera en la cual tales fórmulas funcionan.

La serie sin graduar esta compuesta por la serie subyacente,  $V_x$ , y el término error de la serie  $e_x$ . Los coeficientes numéricos de una útil fórmula de promedio móvil ajustado como la fórmula de graduación debe ser tal que, cuando es aplicada a la serie sin graduar, se observa que,

- I. El componente  $V_x$ , de la serie será relativamente invariable
- II. El error  $e_x$ , en un término en particular sin graduar será reducido.

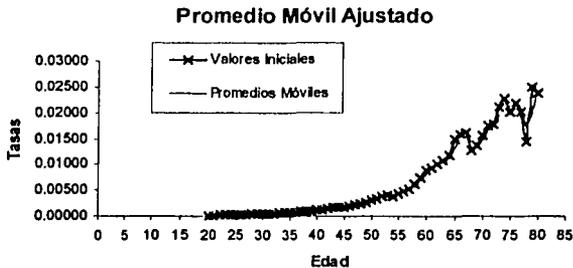
El efecto de este último punto permite errores parciales positivos y negativos y la compensación entre estos.

Si la serie suave  $V_x$ , es considerada por ser una serie sin graduar y es graduada posteriormente por la aplicación o método de la fórmula lineal compuesta o fórmula compendio, los términos resultantes de la serie graduada no deberán ser diferentes de los términos  $V_x$ ,

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

La graduación por el método del promedio móvil ajustado tiene éxito como método porque, mientras el promedio permite la suavización de errores en la serie subyacente. Puesto que hay un gran número de fórmulas tanto lineales como compendio disponibles, la aplicación del método en la práctica se reduce a la selección de la fórmula apropiada para el problema en particular.

El comportamiento comentado, lo podemos apreciar en el gráfico anexo.



Una desventaja que presenta este método es el tener que resolver sistemas de ecuaciones que involucran cálculos algebraicos.

Los valores estimados  $V_x$  se presentan en el Anexo 1 en la parte final de esta tesis.

Como conclusión de este método es que elegimos aquellos  $V_x$  que suavicen mas la curva.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.10 Graduación por fórmula matemática

En el método de graduación por fórmulas matemáticas, la serie graduada es representada por una curva matemática apropiada a los datos. La aplicación del método envuelve dos pasos:

- a) La selección de la forma de la curva para representar la serie graduada.
- b) La determinación de las constantes de la curva

Las curvas son escogidas de manera tal que sean suaves, continuas y diferenciables.

El encontrar cuál es la verdadera representación matemática depende de cuál sea nuestra idea intuitiva sobre la ley que "gobierna" el comportamiento de nuestra variable independiente. A este respecto, mucho se ha estudiado sobre cuál es la mejor representación del fenómeno de la mortalidad.<sup>17</sup>

Por ejemplo, Abraham De Moivre realizó la propuesta más simple sobre el comportamiento de la mortalidad, más que todo expresando la función de supervivencia como una función lineal de las edades.

Una propuesta más elaborada es la de Benjamín Gompertz, quien parte de la premisa de que la resistencia del hombre a la muerte decrece proporcionalmente, conforme avanza el tiempo. Dado que la susceptibilidad del hombre a la muerte podría definirse como la "fuerza de mortalidad", esta propuesta se traduciría en expresar dicha fuerza como que se incrementa en progresión geométrica, es decir, la fuerza de mortalidad es una función exponencial de  $x$ .

W.M. Makeham amplió el modelo de Gompertz sobre el fenómeno de la mortalidad, incorporando adicionalmente a la resistencia del hombre a la muerte, otros factores que influyen en la ocurrencia de la mortalidad y que son externos al comportamiento humano. En otras palabras, mientras que el deterioro físico se incrementa con la edad, y por lo tanto la mencionada resistencia del hombre a la muerte se ve disminuida, otros factores aleatorios como la muerte accidental, por ejemplo, tienen efectos sobre la mortalidad. Estos factores aleatorios, a los cuales Gompertz calificó como la "suerte", se incorporan en el modelo de Makeham como una constante, y se adiciona a los resultados del modelo exponencial de Gompertz.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

<sup>17</sup> Los comentarios sobre estas leyes de mortalidad surgen de Jordan, C.W. Life Contingencies

### 3.10.1 Forma Gompertz

La expresión matemática de la función de mortalidad expresada por Gompertz es:

$$\mu_x = Bc^x \quad B > 0, c > 1$$

Es decir, el comportamiento de la fuerza de mortalidad es exponencial. Dado que en este caso interesa la graduación de fuerzas de mortalidad, los estimados iniciales  $\mu_x$  también deben serlo. De esta forma, y bajo el supuesto de que las muertes se comportan según la hipótesis de Balducci, los valores iniciales deben transformarse de acuerdo con lo siguiente.

$$\mu_x = \frac{u_x}{1 - u_x} = u'_x$$

Dado que la función de Gompertz también puede expresarse en términos lineales, es posible la aplicación de técnicas de regresión lineal que permitan la determinación de los parámetros de Gompertz:

$$\ln u'_x = \ln B + x \ln c$$

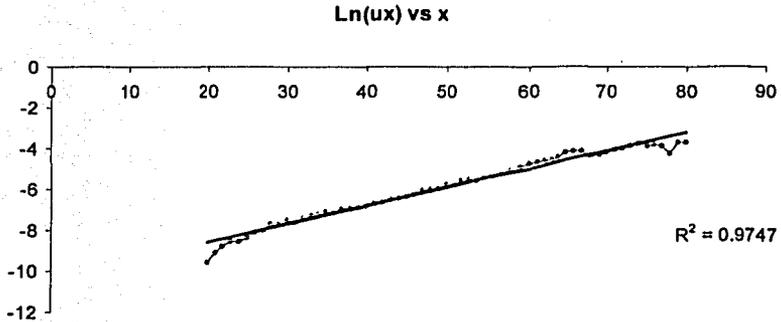
Es importante notar que ahora el proceso de graduación se reduce a un problema de ajuste, ya que la suavidad está definida de antemano por la forma funcional.

El ajuste puede ser reexpresado en términos de una regresión de mínimos cuadrados.

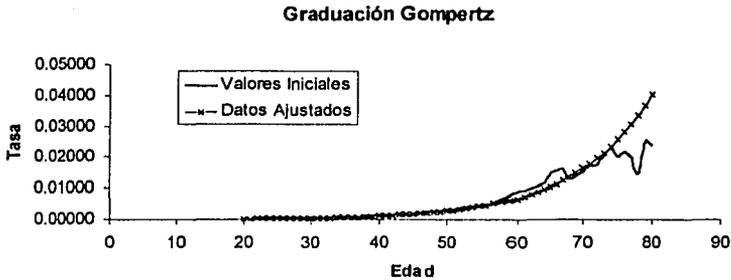
La condición necesaria para saber si nuestros datos son susceptibles al uso o aplicación de la forma de Gompertz es que su tendencia tenga un comportamiento lineal, es decir, se grafica  $\ln u'_x$  contra  $x$  y si se observa un comportamiento lineal, se puede emplear el método.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

La gráfica que resulta es la siguiente:



Teniendo conocimiento de esta condición procedemos al gráfico del modelo de Gompertz, cuyos datos se muestran en el Anexo I.



La gráfica nos muestra un comportamiento que representa muy bien el comportamiento que a priori conocemos de una tabla de mortalidad y el ajuste  $R^2$  resulta también bastante bueno para esta prueba.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

### 3.10.2 Forma Makeham

Como ya se ha comentado, la ampliación más importante al modelo de Gompertz la realizó Makeham en 1860, sugiriendo que la variable "suerte" fuera incorporada como una constante de adición:

$$\mu_x = A + Bc^x \quad A > -B, B > 0, c > 1$$

Las restricciones aquí indicadas son las que menciona Bowers<sup>18</sup> aunque otros autores como Jordan son más restrictivos en cuanto a los valores que pueden tomar dichos parámetros.<sup>19</sup>

Dado que el modelo de Makeham no puede ser reexpresado en términos de una transformación lineal, debe seguirse una técnica de regresión no lineal un poco más elaborada que la anterior, mezclando la determinación de estimados iniciales para A, B y c, digamos A<sub>0</sub>, B<sub>0</sub> y c<sub>0</sub>. Primero, se debe aproximar a la función de Makeham por medio de series de Taylor, hasta la primera derivada, y despreciando el resto de la serie por ser un valor pequeño:

$$\mu_x = \mu_x^0 + (A - A_0) \frac{\partial \mu_x}{\partial A} + (B - B_0) \frac{\partial \mu_x}{\partial B} + (c - c_0) \frac{\partial \mu_x}{\partial c}$$

Utilizando ahora la fórmula de mínimos cuadrados anteriormente mencionada, y sustituyendo para los valores graduados, se tiene:

$$SS = \sum w_x [(u_x - \mu_x^0 - (A - A_0) - (B - B_0)c_0^x - (c - c_0)B_0xc_0^{x-1})^2]$$

El siguiente paso es sustituir las diferencias por incógnitas, y finalmente determinar las derivadas parciales con respecto a dichas incógnitas, e igualarlas a cero, para obtener la minimización de SS, generándose un sistema de ecuaciones simultáneas con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} d_A &= (A - A_0), \\ d_B &= (B - B_0) \\ d_c &= (c - c_0), \text{ y } \mu_x^0 = A_0 + B_0c_0^x. \end{aligned}$$

<sup>18</sup> Bowers, et. Actuarial Mathematics. Segunda Edición, Pag. 78

<sup>19</sup> Jordan, sugiere los rangos para los parámetros de Makeham:  
 $0.001 < A < 0.003$   
 $0.000001 < B < 0.001$   
 $1.08 < c < 1.12$



Una vez determinados los valores de las diferencias, se despeja para el valor A, B y c, y se obtienen las siguientes expresiones

$$\frac{\partial SS}{\partial d_A} = \sum_{x=1}^n w_x (u_x - \mu_x^0)$$

$$\frac{\partial SS}{\partial d_B} = \sum_{x=1}^n w_x c_0^x (u_x - \mu_x^0)$$

$$\frac{\partial SS}{\partial d_C} = \sum_{x=1}^n w_x B_0 x c_0^{x-1} (u_x - \mu_x^0)$$

Estos últimos se convierten en los nuevos  $A_1$ ,  $B_1$  y  $c_1$ . El procedimiento se repite de manera iterativa, buscando la convergencia de los valores estimados, y el proceso se detendrá cuando alguno de los valores  $d_A$ ,  $d_B$  o  $d_C$  sean menores de  $0.000001^{20}$

Sin embargo para el desarrollo de este procedimiento deben generarse los parámetros iniciales ya descritos. Para ello, se toman las diferencias de tamaño r de los valores iniciales. Sea:

$$\Delta_r \mu_x = \mu_{x+r} - \mu_x = B c_0^x (c_0^r - 1)$$

$$\Delta_r \mu_{x-r} = \mu_x - \mu_{x-r} = B c_0^{x-r} (c_0^r - 1)$$

Luego dividiendo ambos se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta_r \mu_x}{\Delta_r \mu_{x-r}} = c_0^r \quad \text{de donde} \quad c_0 = \sqrt[r]{\frac{\Delta_r \mu_x}{\Delta_r \mu_{x-r}}}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

<sup>20</sup> London, "Graduation, the Revision of estimates", ACTEX Publications, 1985

A partir de esto, podemos obtener el valor de  $B_0$  dado que

$$\Delta\mu_x = \mu_{x+1} - \mu_x = Bc_0^x(c_0 - 1)$$

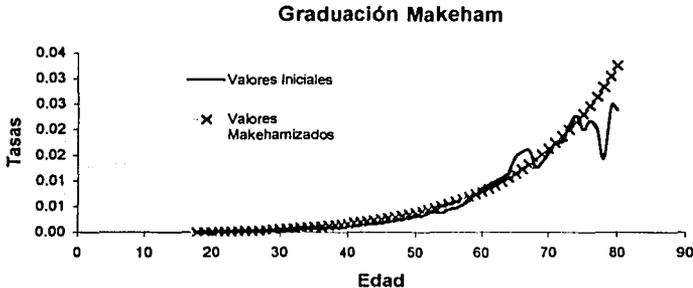
$$B_0 = \frac{\Delta\mu_x}{c_0^x(c_0 - 1)}$$

Por último, dado  $\mu_x$  se puede determinar  $A_0$  por cuanto

$$A_0 = \mu_x - B_0c_0^x$$

Ya obtenido esto, sustituimos con los valores iniciales a las fuerzas de mortalidad, y obtenemos los parámetros iniciales para realizar el proceso de iteración, los cuales deben ser consistentes con las restricciones del modelo.

El siguiente gráfico muestra el resultado de las iteraciones en el proceso de ajuste por el método mencionado con los valores iniciales.



Como podemos observar, el ajuste de la curva no es malo. El inconveniente es que si las variables no cumplen con las restricciones, reflejan resultados negativos para algunos valores.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

#### **IV. Comparación General de los Métodos. Caso Practico**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

#### 4.1 Introducción

Una vez estudiados algunos de los métodos de graduación que existen, debemos compararlos entre sí para poder determinar cuál es el que mejor representa el comportamiento de la mortalidad de los datos obtenidos de una Compañía de Seguros correspondientes a pólizas individuales<sup>21</sup>.

En principio, al tratar de modelar el comportamiento de un fenómeno en particular debe tomarse en cuenta que siempre surgirán discrepancias entre la observación del fenómeno y lo que se espera del mismo, entendiéndose esto último como las discrepancias aleatorias que aparecen por la utilización de una muestra en la estimación del modelo. Es decir, a partir de la muestra se obtienen los estimados de los parámetros, los cuales a su vez determinan los valores esperados que deben ser comparados con los observados en el fenómeno, ya que lo que se desea es medir qué tan bien concuerdan los datos con el modelo probabilístico.

Como parámetro básico para la determinación del mejor modelo, se tomará en consideración tanto el resultado gráfico del modelo y qué tanto se refleja el comportamiento esperado según la experiencia respecto de la variable mortalidad.

Cada método de graduación siempre envuelve el compromiso entre proximidad para los datos observados y suavidad.

- a) En el **método gráfico**, el graduador es libre de dibujar la curva graduada, por lo tanto él tiene pleno control del ajuste. La cantidad de suavidad dependerá de la habilidad para dibujar una curva suave y de igual manera será la interpretación de los datos y el ajuste de los mismos.
- b) En el **método de Interpolación**, el grado de ajuste es mucho más estable en los puntos pivotaes o centrales, mientras la elección de la fórmula de interpolación afecta básicamente la suavidad de los resultados
- c) Para el **método del promedio móvil ajustado**, el control de la relación entre ajuste y suavidad es en forma arreglo-promedio. Esta depende de dos elementos o factores, el rango de la fórmula dada y el modelo de los coeficientes lineales compuestos.
- d) En las aplicaciones del **método de graduación por fórmula matemática**, las series graduadas siempre tendrán la suavidad inherente de una curva matemática. El grado de ajuste depende de la forma graduada, la cual puede ser o no un modelo semejante al de los datos observados, y entonces la forma en la cual los valores de las constantes son calculados.

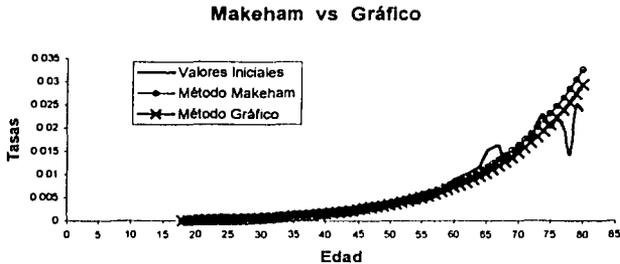
<sup>21</sup> Se denominan como Tasas Brutas en el Anexo I

## 4.2 Comparación de Métodos

La aplicabilidad de los métodos de graduación bajo diferentes circunstancias con las ventajas y desventajas de cada uno de ellos, serán discutidas en esta parte de la Tesis, para tener un panorama más general de la optimización del uso de cada método.

- a) **El Método Gráfico** es un método fácil de aplicar y rápido. El método probablemente no será seleccionado con una tabla destinada para calcular primas, reservas y cálculos similares. En particular este método es útil para comparar rápidamente conjuntos de datos, en el cual los resultados no se justifiquen con grandes procesos matemáticos. El Método es aplicable para datos de cualquier tipo y forma. Algunas dificultades pueden presentarse al trazar una curva suave ya que hay que asegurar una adecuada escala para el rango completo de los datos y la interpretación de estos. En este método la suavidad siempre puede ser mejorada reevaluando los valores gráficos por otros.
- b) **El Método de Interpolación**, es el único método, aparte del Método Gráfico el cual nos da valores intermedios directamente de los datos agrupados. Principalmente este es un método para grupos de datos, donde los valores intermedios son deseados, aunque este método también es usado en edades individuales. El método tiene su mejor aplicación donde los datos son suficientemente extensos para el cálculo de una graduación y la suavización de estos.
- c) **El Método de Promedio Móvil Ajustado** es aplicable a un gran número de términos a ser graduados y entre mayor sea el número de estos, mayor será la efectividad de este método y se puede asegurar su suavidad. Esto hace que el método sea inaplicable en todas las situaciones ya que usualmente el agrupamiento de datos reduce el número de términos y esto genera una serie ingraduable. Métodos especiales son necesarios en los extremos, donde los valores de la serie graduada no son obtenidos por la fórmula o procedimiento de este método. Por lo tanto si la variación al final es de particular importancia, el método particularmente no puede ser elogiado o recomendado.
- d) **La Graduación por fórmula matemática**, es de amplio uso. Requiere conocimientos técnicos considerables; es usado en cualquier caso y su aplicación depende del conocimiento de una curva matemática adecuada para representar la serie subyacente para que el ajuste satisfactorio pueda ser obtenido. Si la curva no puede ser obtenida, el método no puede ser aplicado. Esta es una ventaja definitiva, teórica y práctica, de tener expresada la variable en términos de la fórmula matemática, con la inherente suavidad asociada a una serie definida como una función. En particular con las funciones

actuariales, las curvas de Makeham y Gompertz permiten la aplicación del método, lo que lo convierte en el método más satisfactorio de los comentados en esta tesis. Para una mejor comprensión vemos el siguiente comparativo entre el método gráfico y la curva de Makeham, en donde para el primero, las tasas graduadas son trazadas por el graduador mientras que para el segundo método, las tasas son calculadas. La semejanza es mucha entre estos métodos



### 4.3 Pruebas de bondad de ajuste y análisis de tablas de contingencia

Las pruebas de bondad de ajuste son herramientas que permiten comparar resultados de una muestra aleatoria con los resultados que se esperan obtener, si la hipótesis nula de prueba es correcta. Si las diferencias existentes entre lo observado y lo esperado son pequeñas, la hipótesis nula no puede ser rechazada, dado que no existen argumentos que señalen que el modelo propuesto no es una real representación del fenómeno analizado.

Vale la pena notar que para situaciones de este tipo la hipótesis alternativa es compuesta y, en muchas ocasiones, no se encuentra identificada en forma explícita. En consecuencia, una prueba de bondad de ajuste no debe usarse por sí misma para aceptar la afirmación de la hipótesis nula. La decisión es no rechazar  $H_0$  (más que aceptarla) si la diferencia que existe entre las frecuencias observadas y esperadas es, en forma relativa, pequeña.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Como parámetro básico para la determinación del mejor modelo, se tomará en consideración el resultado gráfico y el reflejo del comportamiento esperado respecto a la variable mortalidad, sin pasar por alto el resultado obtenido del coeficiente de  $R^2$  en cada uno de los modelos analizados en esta tesis y posteriormente se verificará la bondad de ajuste del modelo por medio de los estadísticos mencionados.

Uno de los métodos más utilizados para la estimación del comportamiento de una variable aleatoria es la de tratar de asimilar el mismo a una relación funcional de carácter lineal. Sin embargo, dada la dispersión de los datos observados, una vez estimado el modelo es posible también determinar las discrepancias entre los valores observados y los estimados por el modelo, y por tanto, obtener una medida de qué tan buen ajuste es el modelo propuesto. Esta medida es conocida como el coeficiente de determinación, el cual representa la razón de la suma de cuadrados de las diferencias de los valores estimados por el modelo respecto de la media de los datos sobre la suma de cuadrados de los valores observados respecto a su media.

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - Y)^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

En términos estadísticos, dicho coeficiente mide la proporción de la variación total de los valores observados explicada por el modelo de regresión. Dado que es una proporción su resultado se encuentra entre 0 y 1. Se obtendrá un ajuste perfecto si el resultado del cálculo del coeficiente es igual a 1.

#### 4.3.1 La prueba de bondad de ajuste Ji-cuadrada

Una prueba de bondad de ajuste se emplea para decidir cuándo un conjunto de datos se apega a una distribución de probabilidad dada, permite determinar la validez de la hipótesis nula, de acuerdo con el número de parámetros involucrados en la distribución que se quiere probar, es decir;

$$H_0 : F(x) = F_0(x),$$

en donde el modelo de probabilidad propuesto  $F_0(x)$  se encuentra especificado, de manera completa, con respecto a todos los parámetros. De esta forma la hipótesis nula es sencilla.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

En lo concerniente a los modelos de supervivencia, esta prueba de bondad de ajuste es aplicable a modelos paramétricos únicamente tales como el método de Gompertz y Makeham desarrollados anteriormente en el capítulo III de esta tesis. Para ello establezcamos la hipótesis nula de la siguiente manera:

$$H_0 : S(t) = \hat{S}(t)$$

ya que deseamos determinar que tan buen ajuste resulta el modelo analizado, para obtener dicho resultado es comparando los resultados esperados con los resultados observados, es decir;

$$\hat{E}_i = n[\hat{S}(i) - \hat{S}(i+1)]$$

considerando el intervalo  $(i, i+1)$ , el estadístico para dicha prueba sería de la siguiente manera;

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\hat{E}_i - d_i)^2}{\hat{E}_i}$$

en donde  $d_i$  es el número observado de muertes en el intervalo mencionado.

El estadístico tiene una distribución Ji-cuadrada con  $k-1$  grados de libertad, siendo  $k$  el número de intervalos analizados. Por lo tanto comparando el resultado del estadístico calculado con uno de la tabla de valores Ji-cuadrada, puede determinarse si se rechaza o no la hipótesis nula y decidir si el modelo es una buena representación del verdadero modelo.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

### 4.3.2 El estadístico de Kolmogorov-Smirnov

Como refuerzo a nuestros resultados obtenidos en la prueba de Ji-cuadrada para determinar la validez de la hipótesis nula, utilizaremos el estadístico de Kolmogorov-Smirnov dado que en muestras pequeñas es posible que la prueba anterior no sea la adecuada, y esperamos obtener mejores resultados en la utilización de este estadístico.

Dicho estadístico se define entonces como la máxima diferencia absoluta encontrada, entre las tasas brutas y los valores graduados o estimados en el modelo en cuestión, es decir;

$$D_n = \max |S_0(t) - \hat{S}(t)|$$

donde  $n$  es el tamaño de la muestra, este juega un papel importante en el cálculo de este estadístico, dado que si el tamaño de la muestra es mayor a 50, como lo es en nuestra muestra, la forma de determinar el valor tabulado con el que se compara  $D_n$  lo observamos en el anexo II, de la siguiente forma:

$$\frac{c}{\sqrt{n}} \text{ donde}$$

$$c = 1.36 \text{ si } \alpha = 0.05, \text{ con } \alpha = \textit{nivel de significancia}$$

Si deseamos encontrar el estadístico para nuestra muestra de tamaño 61 con un error tipo I<sup>22</sup> de 0.05, el cálculo es  $1.36/\sqrt{61} = 0.17413016$ , si el resultado de  $D_n$  es menor a 0.17413016, no existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

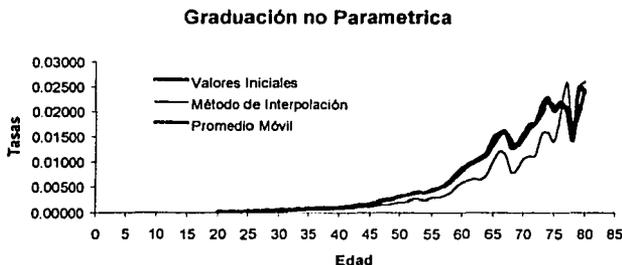
<sup>22</sup> La probabilidad de rechazar  $H_0$ , dado que  $H_0$  es cierta, se define como la probabilidad o tamaño del error de tipo I

#### 4.3.3.-Criterios para decidir el modelo a aplicar

Como se ha mencionado anteriormente, los criterios que se pueden utilizar para seleccionar el mejor modelo de graduación a los datos observados o tasas brutas consisten en el resultado gráfico y en la aplicación del coeficiente de determinación  $R^2$ . En lo que respecta a la parte gráfica, el comportamiento de la serie graduada debe ser suave y consistente con la serie subyacente de manera que el calculo de las primas de seguro, factores de reserva y otros valores asociados con la mortalidad y el orden progresivo de los mismos se mantenga.

Esto ultimo significa que es de esperar que las probabilidades de mortalidad tengan no sólo el comportamiento suave ya comentado sino también un comportamiento creciente.

En este sentido, la observación de los resultados gráficos obtenidos no paramétricos muestran una tendencia irregular, tanto para el método de promedios móviles como para el método de interpolación, tal como se muestra en el siguiente gráfico, en donde se puede observar las tendencias de los valores así como de los valores graduados por uno y otro método no paramétrico.



Los resultados gráficos con respecto al método de Promedios Móviles muestran una tendencia sumamente irregular y poco suave. Esto contradice la percepción a priori de un comportamiento suave y consistente en edades de las probabilidades de muerte. Por otro lado puede observarse que la tendencia representada por la graduación por el método de interpolación es menos suave y ajustada que el de promedios móviles, de manera que no sería preferido sobre el otro método.

Sin embargo, la curva ajustada de Interpolación se mantiene debajo de la serie observada o de tasas brutas. Debe aclararse que esto puede deberse al tamaño pequeño de la muestra, así como del hecho que en algunos intervalos de edades no hubo registro de muerte alguna observada.

Como acotación adicional, si se comparan entre estas dos graduaciones el resultado estadístico de medición de suavidad  $S$  comentado en capítulos anteriores para las edades analizadas puede observarse un mayor valor de  $S$  para la graduación por el método de Interpolación.

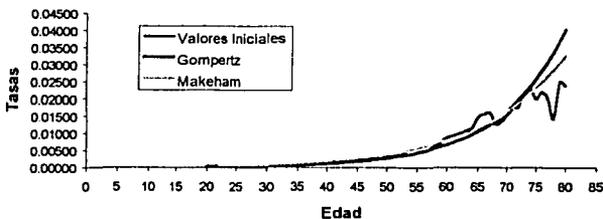
### Resultados de suavidad para los métodos no paramétricos

Promedios Móviles	0.000000011803
Interpolación	0.000000023852

Al ser menor el valor del estadístico para el caso de la graduación por el método de promedios móviles, se presenta una mayor relación entre tasas, como es de esperarse en un comportamiento suave, mientras que un mayor valor del mismo es indicativo de una menor relación entre tasas y por lo tanto, una graduación menos suave.

En otro lado el análisis gráfico de los métodos paramétricos, nos permite observar cuál es la tendencia de ajuste y suavidad entre los métodos de graduación estudiados.

### Graduación por métodos paramétricos



Los métodos muestran una tendencia suave para el rango de edades 20 - 72 años lo cual es concordante con nuestra idea principal de que las probabilidades de muerte sigan dicho comportamiento. Adicionalmente, tanto el método de graduación que sigue la ley de Gompertz, como que sigue la ley de Makeham tienen una tendencia a crecer conforme se incrementa la edad, de manera que desde el punto de vista gráfico no podría determinarse o tomarse una decisión sobre que método representa mejor a los datos de la serie subyacente.

Con respecto a la aplicación de los estadísticos de medida de ajuste y suavidad utilizados con los métodos paramétricos, se obtuvieron los siguientes resultados

**Resultados de suavidad para métodos paramétricos**

Gompertz	0.000000242340619
Makeham	0.000000047865018

Los valores obtenidos en los cálculos de los estadísticos de suavidad y ajuste muestran poca diferencia entre los métodos paramétricos, toda vez que alcanzan valores muy cercanos a cero en lo que concierne a la relación entre valores graduados, así como valores muy pequeños respecto al nivel de ajuste a los valores iniciales. Es importante notar sin embargo, que es más notoria la suavidad para los modelos que están respaldados en una ley conocida (Gompertz y Makeham) que en los modelos no paramétricos.

Con respecto al cálculo del coeficiente de determinación  $R^2$  pese a que éste es más utilizado en la estimación de modelos lineales, puede servir aquí como un parámetro adicional para tomar la decisión de cuál es la mejor graduación aplicada a los datos utilizados, dado que este coeficiente busca encontrar las discrepancias entre valores observados y valores estimados. Los resultados de este coeficiente se presentan en el siguiente cuadro.

**Resultados del cálculo del coeficiente  $R^2$  en los métodos paramétricos**

Gompertz	0.87330626
Makeham	0.92556857

Comparando este último resultado con el anterior, se demuestra un mejor ajuste por parte de la graduación Makeham de una mayor cantidad de datos analizados mientras que la graduación de Gompertz disminuye su efectividad en el ajuste en edades mayor a 70 años. Por lo tanto entre los métodos paramétricos el que presenta un mejor coeficiente de determinación es el modelo que sigue a la ley de Makeham, por lo que sería preferido a cualquiera de las otras graduaciones.

El siguiente paso sería entonces plantear la hipótesis nula de que las tasas de mortalidad analizadas siguen el patrón derivado de la ley de Makeham, para un determinado nivel de significancia. Para rechazar o no dicha hipótesis, será entonces necesario aplicar los estadísticos de bondad de ajuste que se mencionan en puntos anteriores.

El sugerir que las tasas graduadas siguen el patrón de Makeham es realmente conveniente, ya que el mismo puede traducirse fácilmente de su representación como función de la tasa de riesgo, a la función de sobrevivencia, la

función de distribución acumulativa y a su función de densidad de probabilidad, y con ello realizar las pruebas de significancia que anteriormente se indicaron.

Así pues, las siguientes son las expresiones funcionales derivadas de la estimación de las probabilidades de muerte por medio de una graduación Makeham:

$$\lambda(x) = A + Bc^x = 0.000501 + 0.0001477 * 1.071^x$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \exp\left[\frac{\mu}{\ln c} (1 - c^x) - Ax\right] \\ &= \exp\left[0.00218254(1 - 1.071^x) - 0.000501x\right] \end{aligned}$$

$$F(x) = 1 - S(x)$$

A partir de estas expresiones, es posible calcular los estadísticos de bondad de ajuste indicados, con el fin de rechazar o no la hipótesis nula de que las tasas pueden seguir el patrón Makeham.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

#### 4.4 Elección del método

A pesar de que un método de graduación no es uniformemente mejor que otro, hay varias razones para usar ciertos métodos. El propósito de la tabla graduada puede no justificar a la vez el supuesto de utilizar el método. El alcance de los datos puede ser demasiado pequeño comparado con el uso de un método elaborado.

En general la elección del método debe basarse en los siguientes puntos:

- a) El propósito de la graduación de la tabla de datos
- b) La forma y características en la cual los datos están dados
- c) El alcance de los datos
- d) La experiencia técnica y conocimientos de quien realiza la graduación

Estos factores, por supuesto, no son completamente separables pero bastante independientes.

En cualquier evento, la aceptabilidad de los resultados finales de cualquier graduación debe ser considerable. En todos los casos las pruebas de suavidad y ajuste deben ser aplicadas a los valores numéricos de las series graduadas, a menos que las series graduadas sean consideradas como satisfactorias en base a estas pruebas.

Los criterios que se utilizaron para la selección del mejor modelo de graduación a las tasas brutas o datos observados consisten en el comportamiento gráfico y el coeficiente  $R^2$ . En lo que respecta al primero y como ya se ha comentado en el transcurso de esta tesis, el comportamiento entre los valores observados y los valores graduados debe ser suave y consistente y esto acarrea un orden progresivo en el calculo de primas de seguros, factores de reserva y valores asociados con la mortalidad.

En esta parte, es necesario comentar que en los métodos no paramétricos, los resultados gráficos muestran una tendencia irregular, tanto en el método de interpolación y de promedio móvil ajustado

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

#### 4.5 Interpretación de los resultados

A partir de lo anterior, se obtuvieron los resultados, dados distintos niveles de significancia, de los estadísticos de Ji-cuadrada y Kolmogorov-Smirnov.

<b>Prueba de Ji-Cuadrada</b>	
<i>Datos Estadísticos</i>	
Estadístico de Ji-Cuadrada	1.0000

De los cálculos anteriores se puede detectar el hecho de que la prueba de Ji-cuadrada no es favorable a la hipótesis de que los datos graduados siguen la ley de Makeham, dado que el estadístico no sugiere un comportamiento continuo.

En el caso particular de la prueba de Kolmogorov-Smirnov, la misma se adaptó a verificar las mismas diferencias entre los valores iniciales y los valores graduados.

<b>Prueba de Kolmogorov-Smirnov</b>		
<i>Datos Estadísticos</i>		
	<b>Tasas Brutas</b>	<b>Tasa Makeham</b>
Media	0.0066395	0.0123085
Desviación Estandar	0.0075531	0.0167535
Máxima Diferencia		0.0431315
Nivel de Significancia		95%
<b>Kolmogorov-Smirnov</b>		<b>0.171343894</b>

Como consecuencia de esto, el estadístico resulta ser bastante más grande que los tabulados para el nivel de significancia analizado, cayendo dicho valor en la región crítica, y haciendo que se deba rechazar la hipótesis nula.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

#### 4.6 Evaluación de Pérdidas o Ganancias por Mortalidad

Esta parte está dedicada a determinar las posibles diferencias entre tablas de mortalidad utilizadas como hipótesis demográficas en el desarrollo de los productos de vida individual en la CNSF, con respecto al resultado obtenido por medio de la población Makeham, partiendo de la premisa de que dicha graduación representa correctamente el comportamiento de las muertes para la población asegurada. Asimismo se podrán determinar las ganancias o pérdidas provenientes del riesgo de mortalidad.

Para esto último, sin embargo, deben plantearse algunos supuestos sobre el comportamiento de una cartera hipotética, particularmente en lo referente al periodo de la proyección de muertes, población analizada, montos asegurados y tasa de interés técnico. Este último concepto tiene particular importancia, pues permitirá determinar el valor presente de los siniestros tanto esperados según la hipótesis de mortalidad involucrada en los productos de vida individual, como la mortalidad derivada de la graduación que sigue la ley de Makeham.

Los supuestos que respaldan la estimación de ganancias por mortalidad parten de la premisa de que la mortalidad real sigue el patrón de la ley de Makeham, a los que se observarán algunos porcentajes de mortalidad, que van desde el 75% de la mortalidad de Makeham hasta el 100%. De igual manera se analizará una cartera hipotética y con un monto de suma asegurada determinada y por último se considerará un interés técnico de 3.5% anual efectivo, con el objetivo de poder determinar el valor presente de los siniestros pagados durante un periodo determinado.

Por otra parte se realizó un proceso de simulación de 200 iteraciones tipo "Montecarlo"<sup>23</sup> donde se busca determinar el monto esperado de siniestros pagados dependiendo del porcentaje de mortalidad que se analiza, básicamente asumiendo que el promedio de las 200 iteraciones se aproxima al monto esperado de siniestros reales pagados.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

---

<sup>23</sup> Véase el Método de Transformación Inversa: en Ross, Sheldon: Introduction to Probability Models, Octava Edición San Diego, CA

El proceso de simulación de MonteCarlo nos ayuda a obtener las muertes "simuladas", las cuales multiplicadas por el monto asegurado, brindan el costo de los reclamos en cada intervalo unitario. Para lo concerniente al costo de los reclamos esperados, los mismos surgen de multiplicar la probabilidad de muerte según la hipótesis demográfica utilizada por el número de individuos vivos a edad  $x$ .

Al obtener el valor presente de los reclamos esperados según la tabla de la CNSF-2000, y compararlo con el valor presente de los reclamos "reales" derivados de la graduación Makeham, puede entonces obtenerse la correspondiente razón de utilidad por mortalidad para la compañía.

#### Metodología para la determinación de las ganancias por mortalidad.

A continuación, se hace un resumen del proceso que se siguió para determinar las ganancias por mortalidad, a partir de la comparación entre una hipótesis demográfica representada por la CNSF-2000 y la simulación de muertes basada en el patrón de Makeham.

Como ya se ha mencionado, para llevar a cabo esta comparación, se asumieron varios supuestos con respecto a una cartera hipotética que servirá de base para observar el comportamiento de los siniestros por muerte tanto esperados como los simulados, los cuales a su vez, suponemos que son una buena representación de las verdaderas muertes que se darán en un periodo analizado.

El porcentaje de ganancia por mortalidad estará dado por

$$\% \text{ ganancia} = 1 - \frac{S}{VPSE}$$

donde

$$S = \frac{\sum_{k=12}^{100} (Z * \sigma_D + \mu_D) * MA}{200 (1+i)^k}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### Resultados de la simulación

Con respecto a los resultados de la comparación del valor presente de los siniestros esperados para la población hipotética, con respecto a la simulación utilizando la graduación de Makeham, se tiene lo siguiente:

$$VPSE = \sum_{k=1}^{100} \frac{d_{x+k} * MA}{(1+i)^k} = \sum_{k=1}^{100} \frac{l_{x+k} * q_{x+k}^{CNSF-2000} * MA}{(1+i)^k}$$

Mortalidad	Promedio del valor presente Makeham	Promedio del valor presente CNSF	Ganancia Mortalidad
75%	308,795,754.88	344,805,964.30	11.6615%
80%	329,252,755.82	367,640,302.02	11.6590%
100%	411,024,734.49	457,594,759.82	11.3302%

De aquí se deriva que aún si se compara el 100% del valor presente de los siniestros esperados bajo el modelo de Makeham contra la tabla de la CNSF-2000, la compañía obtendría ganancias por mortalidad.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## V. Conclusiones

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

A la luz de los alcances y limitaciones que se han indicado en la presente tesis, se pueden resaltar las siguientes conclusiones y comentarios:

Es de vital importancia definir el periodo en el que se va a realizar el estudio así como la población que será sujeta de análisis. Como se comentó, necesitamos "asegurar" que no se presenten "fenómenos" externos que nos devíen nuestros resultados.

Los resultados obtenidos para el cálculo de las tasas brutas de mortalidad pueden corroborarse como adecuados desde el punto de vista de razonabilidad, suficiencia, homogeneidad, y madurez de los datos. Con respecto a la razonabilidad de los datos, la misma está en función del resultado de las tasas, ya que concuerdan con el comportamiento de los datos.

Una vez encontrados los valores iniciales por el método Seriatim, se procedió a determinar la metodología que mejor serviría para estimar el comportamiento de las probabilidades de muertes, por medio de un proceso de graduación de las tasas brutas encontradas. La elección del mejor método estuvo sustentada en la concepción a priori que se tiene sobre el comportamiento de las probabilidades de muerte: un comportamiento suave y creciente conforme la edad aumenta. Esto está ligado estrechamente con los conceptos de suavidad de la graduación (es decir, que los estimados guarden cierta relación con las tasas vecinas), y ajuste de la graduación (que los estimados no se alejen demasiado de los valores iniciales).

En este sentido se valoraron métodos no paramétricos, en donde no se presenta una relación funcional entre edad y probabilidad de muerte que se puede describir en términos matemáticos, y métodos paramétricos, donde se plantea la existencia de una relación funcional entre los valores graduados como variable dependiente de la edad o el tiempo.

Al realizar la valoración de los métodos no paramétricos, se analizaron dos en específico: el método de promedios móviles ajustados y el método de interpolación. Con respecto al primer método de graduación no paramétrica, lo que se busca es obtener valores graduados a partir del promedio ponderado de una serie de valores iniciales que se encuentran alrededor del valor a graduar, lo cual es concordante con el concepto de lograr suavidad en la graduación.

Para ésto, se asumió que el promedio del valor a graduar se obtendría ponderando 7 valores iniciales por encima y por debajo del valor a graduar. Los coeficientes de ponderación se obtuvieron a partir de las ecuaciones de restricción y del sistema con incógnitas (por la propiedad de simetría) correspondiente a las derivadas parciales de la variable R con respecto a cada ponderador.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

El resultado obtenido por el método de promedio móvil ajustado sigue de forma muy similar el comportamiento de los valores iniciales, según se mostró en el capítulo correspondiente, sin embargo, para algunas edades, el valor graduado no es realmente el esperado, esto posiblemente a consecuencia de que algunos valores iniciales son muy próximos a cero.

En cuanto al método de interpolación, éste busca incorporar desde el inicio tanto la suavidad como el ajuste a la hora de graduar. Para la realización de los cálculos necesarios, se trabajó con el método de King. En el gráfico los valores graduados guardan cierto ajuste razonable, mientras que la suavidad no es tan aceptable como lo dice la teoría sobre este método.

En cuanto a los métodos paramétricos se refiere, las formas de Gompertz y Makeham, y sus respectivas formas funcionales entre la fuerza de mortalidad como función de la edad, y para poder trabajar en términos de la fuerza de mortalidad, se debieron modificar los valores iniciales bajo el supuesto de que las muertes siguen el patrón de Balducci. En el primer caso se realizó una transformación lineal de la expresión exponencial de la función de Gompertz, con el objetivo de estimar los parámetros B y c, a partir de los valores iniciales. El resultado final fue la siguiente relación funcional:

$$\mu_x = 0.00003 * 1.094302^x$$

En el segundo caso, la deducción de los estimados A, B y c en la función Makeham se desarrolló a partir de la técnica de regresión no lineal, y la fórmula de mínimos cuadrados, obteniendo la siguiente expresión:

$$\mu_x = 0.000501 + 0.0001477.x1.07^x$$

En particular, se aplicaron dos criterios de bondad de ajuste: el resultado gráfico y el coeficiente de determinación  $R^2$  y el estadístico de suavidad. En cuanto al primer criterio, se encontrará un buen ajuste del modelo a los datos iniciales si se cumple con la percepción a priori de que las probabilidades de muerte siguen un patrón suave y creciente. En ese sentido los modelos no paramétricos mostraron una tendencia irregular creciente, cuyo comportamiento puede explicarse esto posiblemente a consecuencia de que algunos valores iniciales son muy próximos a cero.

Del análisis gráfico de los modelos paramétricos, los métodos analizados siguen la concepción a priori del comportamiento suave y creciente, de manera que la decisión del método por el análisis gráfico estaría supeditando a los estadísticos de suavidad y ajuste.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

En términos de la elección del mejor método de graduación, debe pesar el hecho de que existe un comportamiento que se considera es el que mejor representa el fenómeno de la mortalidad. Los modelos de Gompertz y Makeham muestran una suavidad y un ajuste concordante con esta concepción, y dado que, para el mismo rango de edades, Makeham tiene un mejor coeficiente de determinación que la graduación Gompertz, el modelo que sigue la ley de Makeham sería preferido a cualquiera de las otras graduaciones analizadas en esta tesis.

El siguiente paso es plantear la hipótesis de que las tasas analizadas siguen el patrón de Makeham, dado un nivel de significancia adecuado. Para ello, se estudiaron los valores correspondientes a dos estadísticos de bondad de ajuste: la prueba de Ji-cuadrada y el coeficiente de Kolmogorov-Smirnov.

La prueba de hipótesis consiste en calcular los estadísticos de bondad de ajuste y compararlos con el resultado para niveles de significancia del 95%. Si los resultados del cálculo son mayores a los valores tabulados, la hipótesis nula es rechazada.

El estadístico Ji-cuadrada falla en aceptar como válida la hipótesis de que las tasas iniciales siguen la Ley de Makeham. En cuanto al estadístico de Kolmogorov-Smirnov, el resultado del cálculo muestra un rechazo a la hipótesis nula.

Ahora bien, la graduación de Makeham como una correcta representación de la mortalidad, el siguiente objetivo es evaluar cuál es la ganancia o pérdida económica generada por la aplicación de algunas hipótesis demográficas en el desarrollo de los seguros de vida.

Con base en el modelo de Makeham estimado, se realizó un proceso de simulación de 200 iteraciones del número de muertes "reales" a partir de un proceso de simulación de "Montecarlo" y asumiendo distintos porcentajes de mortalidad real, y comparando esto con la tabla de mortalidad CNSF-2000.

De las conclusiones más importantes de este estudio se encuentra el hecho de que, si el 100% de la mortalidad derivada del modelo Makehamizado se comparara con los siniestros esperados, es de esperar ganancias por concepto de mortalidad para la compañía de seguros.

Después de todas estas conclusiones queda claro que a pesar del intento por encontrar el verdadero comportamiento de la mortalidad de la cartera de estudio, quedan todavía por superar lagunas importantes, estadísticamente hablando, ya que es requerido un mayor número de vidas expuestas que permitan la eliminación del problema de la inestabilidad de las probabilidades estimadas.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Es posible decir entonces, que si la mortalidad de las vidas aseguradas en los seguros individuales siguiera el patrón conformado por la graduación Makeham a un 100% es de esperar un margen de ganancias por mortalidad en aquellos productos tarificados utilizando la tabla de mortalidad de CNSF-2000.

Así pues, el análisis de estos requerimientos debe incorporar un estudio amplio de qué tablas de mortalidad van a ser utilizadas, acompañándose de estudios de rentabilidad que respalden de una manera más sólida las hipótesis planteadas por el actuario especializado en el desarrollo de nuevos productos.

A pesar de que en el presente trabajo no se menciona el modo de calcular primas y reservas, el análisis realizado nos presenta la problemática en la que incurriremos si aceptáramos a las tasas brutas como la base de cálculo para poder tarificar el riesgo. Una vez que graduamos (ajustamos) dichas tasas, el problema desaparece y la estimación del riesgo mejora.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## VI. Anexos

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Anexo I: Valores de tasas brutas y de los métodos de graduación

Edad x	Tasas Brutas	Valores Graduados			
		Makeham	Gompertz	Promedios Moviles	Interpolación
18	0.00005	0.000002	0.000152	0.000000	0.000031
19	0.00006	0.000033	0.000166	0.000145	0.000061
20	0.00007	0.000070	0.000181	0.000193	0.000102
21	0.00011	0.000110	0.000199	0.000234	0.000119
22	0.00015	0.000153	0.000217	0.000236	0.000105
23	0.00019	0.000199	0.000238	0.000306	0.000157
24	0.00019	0.000248	0.000260	0.000373	0.000164
25	0.00024	0.000300	0.000285	0.000410	0.000204
26	0.00030	0.000356	0.000311	0.000575	0.000308
27	0.00032	0.000416	0.000341	0.000563	0.000316
28	0.00046	0.000480	0.000373	0.000644	0.000348
29	0.00046	0.000549	0.000408	0.000623	0.000304
30	0.00053	0.000623	0.000446	0.000752	0.000404
31	0.00051	0.000701	0.000488	0.000873	0.000470
32	0.00060	0.000786	0.000534	0.000894	0.000504
33	0.00071	0.000876	0.000585	0.000995	0.000529
34	0.00073	0.000972	0.000640	0.000983	0.000516
35	0.00082	0.001075	0.000700	0.001186	0.000662
36	0.00080	0.001186	0.000766	0.001227	0.000668
37	0.00096	0.001304	0.000838	0.001283	0.000681
38	0.00101	0.001430	0.000917	0.001416	0.000760
39	0.00105	0.001565	0.001003	0.001560	0.000814
40	0.00115	0.001710	0.001098	0.001692	0.000914
41	0.00127	0.001865	0.001201	0.001926	0.001059
42	0.00137	0.002030	0.001314	0.001987	0.001042
43	0.00157	0.002207	0.001438	0.002172	0.001114
44	0.00163	0.002397	0.001574	0.002482	0.001305
45	0.00176	0.002600	0.001722	0.002802	0.001504
46	0.00200	0.002817	0.001884	0.003044	0.001561
47	0.00227	0.003049	0.002062	0.003336	0.001793
48	0.00248	0.003298	0.002256	0.003870	0.002058
49	0.00269	0.003564	0.002468	0.003994	0.002104
50	0.00315	0.003848	0.002701	0.004600	0.002662
51	0.00325	0.004153	0.002955	0.004840	0.002647
52	0.00373	0.004479	0.003233	0.004664	0.002469
53	0.00402	0.004827	0.003538	0.005475	0.002915
54	0.00383	0.005200	0.003871	0.005830	0.002928
55	0.00444	0.005599	0.004235	0.006631	0.003213
56	0.00474	0.006027	0.004634	0.007876	0.003846
57	0.00532	0.006483	0.005071	0.009404	0.004923
58	0.00627	0.006972	0.005548	0.010834	0.005901

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Edad x	Tasas Brutas	Valores Graduados			
		Makeham	Gompertz	Promedios Moviles	Interpolación
59	0.00750	0.007496	0.006071	0.011512	0.006274
60	0.00877	0.008055	0.006642	0.012295	0.006629
61	0.00942	0.008654	0.007268	0.013243	0.006456
62	0.01006	0.009295	0.007952	0.014815	0.007568
63	0.01080	0.009981	0.008701	0.018371	0.010295
64	0.01181	0.010715	0.009520	0.019087	0.012068
65	0.01478	0.011500	0.010417	0.018731	0.011348
66	0.01574	0.012340	0.011398	0.014932	0.007903
67	0.01601	0.013239	0.012471	0.016838	0.008733
68	0.01276	0.014201	0.013646	0.019235	0.010590
69	0.01366	0.015230	0.014931	0.021292	0.011163
70	0.01552	0.016331	0.016337	0.021907	0.011343
71	0.01744	0.017509	0.017876	0.026073	0.015586
72	0.01777	0.018770	0.019559	0.027210	0.015803
73	0.02105	0.020119	0.021401	0.023992	0.014132
74	0.02280	0.021563	0.023417	0.026226	0.020000
75	0.02012	0.023107	0.025622	0.022889	0.025800
76	0.02186	0.024760	0.028035	0.018039	0.016000
77	0.02008	0.026528	0.030675	0.031347	0.025000
78	0.01439	0.028420	0.033564	0.000000	0.026000
79	0.02485	0.030445	0.036724	0.000000	0.000000
80	0.02384	0.032611	0.040183	0.000000	0.000000

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**Anexo II: Valores de cuantiles de la distribución de la estadística  $D_n$  de Kolmogorov-Smirnov**

$n$	$1-\alpha$				
	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.733
5	0.446	0.474	0.510	0.565	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.410	0.490
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.210	0.220	0.240	0.270	0.320
30	0.190	0.200	0.220	0.240	0.290
35	0.180	0.190	0.210	0.230	0.270
Fórmula para una $n$ mayor	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Anexo III: Valores de cuantiles de la distribución de ji-cuadrada

V	X <sub>0.005</sub>	X <sub>0.010</sub>	X <sub>0.025</sub>	X <sub>0.050</sub>	X <sub>0.100</sub>	X <sub>0.900</sub>	X <sub>0.950</sub>	X <sub>0.975</sub>	X <sub>0.990</sub>	X <sub>0.995</sub>
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
31	14.46	15.66	17.54	19.28	21.43	41.42	44.99	48.23	52.19	55.00
32	15.13	16.36	18.29	20.07	22.27	42.58	46.19	49.48	53.49	56.33
33	15.82	17.07	19.05	20.87	23.11	43.75	47.40	50.73	54.78	57.65
34	16.50	17.79	19.81	21.66	23.95	44.90	48.60	51.97	56.06	58.96
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27
36	17.89	19.23	21.34	23.27	25.64	47.21	51.00	54.44	58.62	61.58
37	18.59	19.96	22.11	24.07	26.49	48.36	52.19	55.67	59.89	62.88
38	19.29	20.69	22.88	24.88	27.34	49.51	53.38	56.90	61.16	64.18
39	20.00	21.43	23.65	25.70	28.20	50.66	54.57	58.12	62.43	65.48
40	20.71	22.18	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

V	X <sub>0,005</sub>	X <sub>0,010</sub>	X <sub>0,025</sub>	X <sub>0,050</sub>	X <sub>0,100</sub>	X <sub>0,900</sub>	X <sub>0,950</sub>	X <sub>0,975</sub>	X <sub>0,990</sub>	X <sub>0,995</sub>
41	21.42	22.91	25.21	27.33	29.91	52.95	56.94	60.56	64.95	68.05
42	22.14	23.65	26.00	28.14	30.77	54.09	58.12	61.78	66.21	69.34
43	22.86	24.40	26.79	28.96	31.63	55.23	59.30	62.99	67.46	70.62
44	23.58	25.15	27.57	29.79	32.49	56.37	60.48	64.20	68.71	71.89
45	24.31	25.90	28.37	30.61	33.35	57.51	61.66	65.41	69.96	73.17
46	25.04	26.66	29.16	31.44	34.22	58.64	62.83	66.62	71.20	74.44
47	25.77	27.42	29.96	32.27	35.08	59.77	64.00	67.82	72.44	75.70
48	26.51	28.18	30.75	33.10	35.95	60.91	65.17	69.02	73.68	76.97
49	27.25	28.94	31.55	33.93	36.82	62.04	66.34	70.22	74.92	78.23
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
51	28.73	30.48	33.16	35.60	38.56	64.30	68.67	72.62	77.39	80.75
52	29.48	31.25	33.97	36.44	39.43	65.42	69.83	73.81	78.62	82.00
53	30.23	32.02	34.78	37.28	40.31	66.55	70.99	75.00	79.84	83.25
54	30.98	32.79	35.59	38.12	41.18	67.67	72.15	76.19	81.07	84.50
55	31.73	33.57	36.40	38.96	42.06	68.80	73.31	77.38	82.29	85.75
56	32.49	34.35	37.21	39.80	42.94	69.92	74.47	78.57	83.51	86.99
57	33.25	35.13	38.03	40.65	43.82	71.04	75.62	79.75	84.73	88.24
58	34.01	35.91	38.84	41.49	44.70	72.16	76.78	80.94	85.95	89.48
59	34.77	36.70	39.66	42.34	45.58	73.28	77.93	82.12	87.17	90.72
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
61	36.30	38.27	41.30	44.04	47.34	75.51	80.23	84.48	89.59	93.19
62	37.07	39.06	42.13	44.89	48.23	76.63	81.38	85.65	90.80	94.42
63	37.84	39.86	42.95	45.74	49.11	77.75	82.53	86.83	92.01	95.65
64	38.61	40.65	43.78	46.59	50.00	78.86	83.68	88.00	93.22	96.88
65	39.38	41.44	44.60	47.45	50.88	79.97	84.82	89.18	94.42	98.10
66	40.16	42.24	45.43	48.31	51.77	81.09	85.96	90.35	95.63	99.33
67	40.93	43.04	46.26	49.16	52.66	82.20	87.11	91.52	96.83	100.55
68	41.71	43.84	47.09	50.02	53.55	83.31	88.25	92.69	98.03	101.78
69	42.49	44.64	47.92	50.88	54.44	84.42	89.39	93.86	99.23	103.00
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21
71	44.06	46.25	49.59	52.60	56.22	86.64	91.67	96.19	101.62	105.43
72	44.84	47.05	50.43	53.46	57.11	87.74	92.81	97.35	102.82	106.65
73	45.63	47.86	51.26	54.33	58.01	88.85	93.95	98.52	104.01	107.86
74	46.42	48.67	52.10	55.19	58.90	89.96	95.08	99.68	105.20	109.07
75	47.21	49.48	52.94	56.05	59.79	91.06	96.22	100.84	106.39	110.29
76	48.00	50.29	53.78	56.92	60.69	92.17	97.35	102.00	107.58	111.50
77	48.79	51.10	54.62	57.79	61.59	93.27	98.48	103.16	108.77	112.70
78	49.58	51.91	55.47	58.65	62.48	94.37	99.62	104.32	109.96	113.91
79	50.38	52.72	56.31	59.52	63.38	95.48	100.75	105.47	111.14	115.12
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
81	51.97	54.36	58.00	61.26	65.18	97.68	103.01	107.78	113.51	117.52
82	52.77	55.17	58.84	62.13	66.08	98.78	104.14	108.94	114.69	118.73
83	53.57	55.99	59.69	63.03	66.98	99.88	105.27	110.09	115.88	119.93
84	54.37	56.81	60.54	63.88	67.88	100.98	106.39	111.24	117.06	121.13
85	55.17	57.63	61.39	64.75	68.78	102.08	107.52	112.39	118.24	122.32

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

V	X <sub>0.005</sub>	X <sub>0.010</sub>	X <sub>0.025</sub>	X <sub>0.050</sub>	X <sub>0.100</sub>	X <sub>0.900</sub>	X <sub>0.950</sub>	X <sub>0.975</sub>	X <sub>0.990</sub>	X <sub>0.995</sub>
86	55.97	58.46	62.24	65.62	69.68	103.18	108.65	113.54	119.41	123.52
87	56.78	59.28	63.09	66.50	70.58	104.28	109.77	114.69	120.59	124.72
88	57.58	60.10	63.94	67.37	71.48	105.37	110.90	115.84	121.77	125.91
89	58.39	60.93	64.79	68.25	72.39	106.47	112.02	116.99	122.94	127.11
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
91	60.00	62.58	66.50	70.00	74.20	108.66	114.27	119.28	125.29	129.49
92	60.81	63.41	67.36	70.88	75.10	109.78	115.39	120.43	126.46	130.68
93	61.63	64.24	68.21	71.76	76.01	110.85	116.51	121.57	127.63	131.87
94	62.44	65.07	69.07	72.64	76.91	111.94	117.63	122.72	128.80	133.06
95	63.25	65.90	69.92	73.52	77.82	113.04	118.75	123.86	129.97	134.25
96	64.06	66.73	70.78	74.40	78.73	114.13	119.87	125.00	131.14	135.43
97	64.88	67.56	71.64	75.28	79.63	115.22	120.99	126.14	132.31	136.62
98	65.69	68.40	72.50	76.16	80.54	116.32	122.11	127.28	133.48	137.80
99	66.51	69.23	73.36	77.05	81.45	117.41	123.23	128.42	134.64	138.99
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Bibliografia

---

## Bibliografia

LONDON, Dick  
**"Graduation: the revision of estimates"**  
ACTEX Publications  
Winsted, Connecticut, 1985

MILLER, M.D.  
**"Elements of Graduation"**  
Actuarial Society of America an American Institute of Actuaries  
New York, 1946

BATTEN, Robert W  
**"Mortality Table Construction"**  
Prentice Hall, Inc.  
New Jersey, 1978

JORDAN, C.W.  
**"Life Contingencies"**  
Society of Actuaries  
USA, 1967

BOWERS, et al  
**"Actuarial Mathematics"**  
Society of Actuaries  
USA, 1997

LONDON, Dick  
**"Survival Models and their estimation"**  
ACTEX Publications  
Winsted, Connecticut

MACLEAN, Joseph B.  
**"El seguro de Vida"**  
MacGraw-Hill,  
USA, 1985

CAMPOSORTEGA, Cruz Sergio  
**"Análisis demográfico de la Mortalidad en México 1940-1980"**  
El Colegio de México  
México, 1992

**"Dinámica de la Población de México"**  
El Colegio de México  
México, 1970

CANAVOS, George C.  
**"Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos"**  
Mc Graw Hill  
1988

