



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE BÓVEDAS DE MAMPOSTERÍA DE CAÑÓN CORRIDO

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL
PRESENTA:
DIEGO RIVERA BENARD

DIRECTOR DE TESIS: ING. ROBERTO SÁNCHEZ RAMÍREZ

MEXICO, DF

A
2003





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN
FING/DCTG/SEACI/UTIT/157/02

Señor
DIEGO RIVERA BENARD
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor ING. A. ROBERTO SANCHEZ RAMIREZ, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de INGENIERO CIVIL.

**"COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE BÓVEDAS DE MAMPOSTERÍA DE CAÑÓN
CORRIDO"**

INTRODUCCIÓN

- I. ASPECTOS HISTÓRICOS
- II. ARCOS Y BÓVEDAS DE MAMPOSTERÍA
- III. COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE BÓVEDAS DE CAÑÓN
CORRIDO
- IV. ANÁLISIS DE LA BÓVEDA DE ATOTONILCO EL GRANDE
COMENTARIOS Y CONCLUSIONES
REFERENCIAS
FIGURAS
ANEXOS

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Cd. Universitario a 30 Octubre 2002.

EL DIRECTOR

M.C. GERARDO FERRANDO BRAVO
GFB/GMP/mstg.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Diego Rivera Benard
FECHA: 23 junio 2003
FIRMA: [Firma]

B

ÍNDICE.

INTRODUCCIÓN.....	2
I. ANTECEDENTES	
I.1 Evolución de arcos y sistemas abovedados.....	3
I.2 Arquitectura religiosa mexicana del siglo XVI.....	7
I.2.1 Las órdenes mendicantes y su labor como constructores.....	8
I.2.2 Templos criptocolaterales.....	11
I.2.3 Templos de una nave.....	12
I.2.4 Templos de tres naves y las grandes Catedrales.....	13
II. ARCOS Y BÓVEDAS DE MAMPOSTERÍA	
II.1 Características principales de la mampostería.....	21
II.2 Tipos de arcos y bóvedas.....	25
II.3 Comportamiento de arcos y bóvedas.....	28
II.4 Métodos de análisis en estructuras de mampostería.....	29
II.5 Línea de presiones de un arco.....	30
III. ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE BÓVEDAS DE CAÑÓN CORRIDO	
III.1 Modelos de flexibilidades.....	33
III.2 Comportamiento bajo distintas cargas en los tímpanos.....	46
III.2.1 Bóveda de cañón corrido sin carga en los tímpanos $\alpha = 0^\circ$	46
III.2.2 Bóveda de cañón corrido con carga en los tímpanos $\alpha = 45^\circ$	54
III.2.3 Bóveda de cañón corrido con carga en los tímpanos $\alpha = 90^\circ$	57
III.3 Estabilidad y resistencia de bóvedas de mampostería.....	62
III.3.1 Condiciones de estabilidad considerando un comportamiento elástico..	63
III.3.2 Determinación de la línea de presiones crítica	66
III.3.3 Condiciones de estabilidad considerando un comportamiento.....	68
elasto-plástico	
IV. ANÁLISIS DE LA BÓVEDA DE ATOTONILCO EL GRANDE	
IV.1 Análisis mediante el modelo de flexibilidades.....	71
IV.2 Modelo de elementos finitos.....	80
IV.3 Resumen de resultados.....	97
COMENTARIOS Y CONCLUSIONES.....	100
ANEXOS.....	104
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	109

INTRODUCCIÓN.

Una importante labor en la que recientemente ha tenido que incurrir la ingeniería civil es la de poder proporcionar herramientas eficientes que puedan ayudar a la preservación de los monumentos históricos. En México existe un gran número de monumentos y de construcciones que fueron realizadas desde la época colonial hace ya más de 400 años, por lo que gran parte se encuentra deteriorada.

Dentro de los edificios históricos, algunos de los que han presentado mayores problemas estructurales son los templos religiosos, y en particular los templos de una nave. Los templos de una nave del siglo XVI presentan una gran variedad de sistemas de techo, que van desde las más simples, con vigas de madera y barro, hasta los techados con grandes bóvedas de mampostería de cañón corrido, de cañón con lunetos y de nervaduras. El tipo de techumbre que se proporcionó a cada templo en particular dependió principalmente de la orden que lo construyó, de la distancia a la capital y del nivel tecnológico de la mano de obra disponible.

La mayor parte de los templos con bóvedas de cañón corrido han presentado problemas de estabilidad en sus bóvedas como consecuencia de su baja rigidez y resistencia ante distintas solicitaciones que ocasionan una apertura en sus apoyos. El valor de la apertura máxima que se pueda presentar antes del colapso va a variar en cada bóveda, dependiendo de las características, tanto de los materiales con la que fue construida como de su geometría. Dicha apertura puede ser ocasionada por varios factores tales como: movimientos sísmicos, asentamientos del terreno y el mismo coceo producido por la bóveda, entre otros.

Como parte del programa de investigación que el Instituto de Ingeniería realiza en el tema de rehabilitación de monumentos históricos, se desarrolló el presente trabajo cuyos objetivos principales son:

- Conocer la evolución que han tenido los arcos y las bóvedas como elementos estructurales.
- Conocer los estilos de arquitectura religiosa que se presentaron en México durante la época de la colonia, en el siglo XVI.
- Analizar el comportamiento estructural de las bóvedas de mampostería de cañón corrido.
- Obtener las reacciones en los apoyos y las fuerzas internas de la bóveda mediante modelos simplificados.
- Determinar la apertura en los apoyos que llevaría a la falla a este tipo de bóvedas.

Metodología y alcances.

Para llevar a cabo los dos primeros objetivos se realizó una búsqueda bibliográfica sobre el tema en cuestión y se visitaron algunas construcciones representativas del estudio. Posteriormente, con el fin de alcanzar los últimos dos objetivos, se analizó el comportamiento estructural de este tipo de construcciones, para lo cual se elaboraron dos modelos: el primero mediante el método de flexibilidades y el segundo aplicando el método de elementos finitos.

Los modelos que se desarrollaron están enfocados exclusivamente al estudio de bóvedas de cañón corrido por lo que los resultados obtenidos no son extensivos a otros tipos de bóvedas.

I. ANTECEDENTES

En este capítulo se describirán algunos de los aspectos más importantes de la evolución que han tenido los arcos y las bóvedas como elementos estructurales en diversos tipos de construcciones, así como las diferentes clases, formas y materiales que estos han ido adquiriendo con el paso del tiempo. Esto, con el objetivo de situar la época y con ello los estilos arquitectónicos y constructivos que llegaron a México durante la época de la colonia, en el siglo XVI, para la construcción de templos religiosos abovedados. Posteriormente, se realizará una clasificación de los diferentes tipos de bóvedas que fueron utilizadas, además de citar algunas de sus características más importantes.

I.1 Evolución de arcos y sistemas abovedados

Desde la antigüedad la solución para los elementos de apoyo así como para la transmisión de las cargas verticales de una edificación se dio en forma relativamente directa y simple por medio de columnas y muros de diversos materiales, sin embargo, resultó más difícil encontrar soluciones simples y eficientes para la construcción de techos y pisos. Fue natural el que se haya recurrido a la madera, aprovechando su capacidad para transmitir esfuerzos de tensión, y su disponibilidad en elementos de longitud apreciable. Otra solución, más duradera e imponente fue mediante el empleo de la mampostería, sobre todo para las edificaciones de mayor importancia.

Estas soluciones a base de vigas y losas de cantera o madera sólo permitieron cubrir claros muy cortos, por su baja resistencia a la tensión, ocasionada por la flexión del elemento. Debido a esto, estas estructuras evolucionaron formando losas en V invertida, hasta llegar al arco acartelado o "falso" (fig. 1), el cual se basa en la aproximación progresiva de dos partes de un muro hasta que se encuentran en un punto medio, es decir, que las piedras se van proyectando cada vez más hacia el interior del claro, en cada hilada, trabajando en voladizo hasta que es colocada la piedra de cierre. En esta modalidad las fuerzas se van transmitiendo verticalmente hacia el apoyo, y sólo hay que lograr el suficiente contrapeso para evitar el volteo de las hiladas hacia dentro del claro.

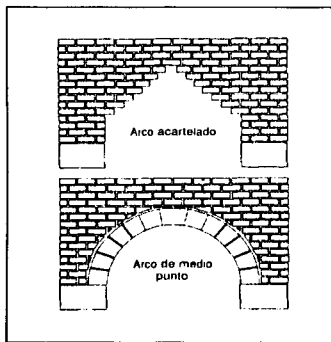


Fig. 1 Arcos acartelado y circular

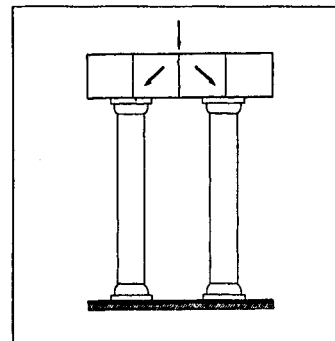


Fig. 2 Dintel y columna

No se producen problemas debido al empuje lateral sobre los apoyos (cocco), ya que, como se mencionó anteriormente, la transmisión de las fuerzas es únicamente en dirección vertical. Este tipo de arco primitivo fue utilizado por algunas civilizaciones: los egipcios, los babilonios, los mayas y los griegos, para la construcción de edificios civiles, graneros y almacenes, en algunos casos aproximadamente 3000 años antes de Cristo (Meli, 1998).

Un avance importante se logró cuando se ideó darle una geometría circular a la distribución de piedras, acuñándolas una contra la otra; se formó así el arco circular o de medio punto, en el que se modifica radicalmente la condición de esfuerzos con respecto a los casos anteriores; ahora las cargas se transmiten hacia los apoyos mediante esfuerzos de compresión que son resistidos eficientemente por la mampostería. Por esto último, el arco fue la forma más natural de cubrir claros con mampostería, lo mismo que la bóveda, la cual es una extensión natural del arco que forma una techumbre completa.

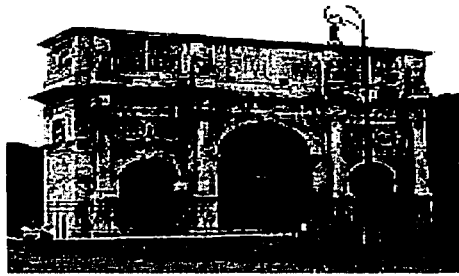
Aunque en Mesopotamia se han encontrado ejemplos primitivos de arcos circulares desde el tercer milenio a.C., fue durante el imperio romano en donde el uso del arco como elemento estructural tuvo una amplia aplicación en un gran número de obras generalmente civiles, tales como anfiteatros, palacios y acueductos. Curiosamente, los romanos siguieron la tradición griega del sistema adintelado (fig. 2), es decir, mediante columnas y dinteles, para la construcción de sus templos, a pesar de algunas excepciones como el Panteón de Agripa en Roma (construido en el siglo XXVII a.C.), el cual tiene una cúpula hemisférica con un claro de 43.5 metros (fig.3 y 4). Otros ejemplos de monumentos construidos con arcadas son: el arco de Séptimo Severo (203 d.C.) y el arco de Constantino (315 d.C.) (fig. 5).



Fig. 3 Cúpula del Pantheon de Agrippa



Fig. 4 Exterior del Pantheon.



TRICIS CON
FALEA DE ORIGEN

Fig. 5 Arco de Constantino.

Durante gran parte del imperio romano el uso de arcos en las construcciones fue muy frecuente; a pesar de esto, la bóveda no fue utilizada sino hasta varios siglos después.

La bóveda cilíndrica o de cañón corrido (fig. 6), que puede visualizarse como una sucesión de arcos adosados de medio punto, se empezó a utilizar en la construcción de iglesias y edificios civiles a finales del siglo X durante el periodo denominado románico, el cual se presentó en Europa entre el siglo X y el XIII. Su uso fue muy frecuente debido principalmente a la influencia en la construcción de arcos circulares de la arquitectura romana tardía.

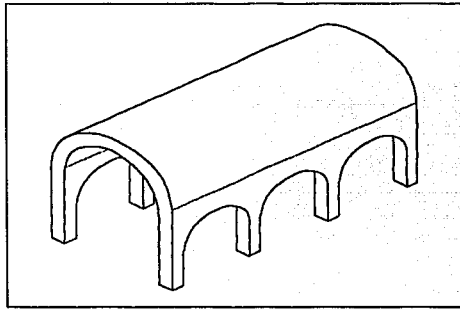


Fig. 6 Bóveda de cañón corrido (estilo románico)

En la edad media, la arquitectura bizantina del este y el románico del oeste de Europa mantuvieron el típico arco romano de medio punto. Mientras tanto, la arquitectura islámica desarrolló para sus mezquitas y palacios una gran variedad de arcos: ojivales, festoneados, lobulados y de herradura, entre otros. Algunos de ellos, como el de herradura, provienen de modelos romanos conservados y empleados por los invasores bárbaros (en este caso, por

los visigodos). En la arquitectura hispanomusulmana el arco de herradura se apoya sobre delicadas columnas, lo que da lugar a un efecto de esbeltez característico (fig. 7 y 8).



Fig. 7 Arco de Al - Hakam II. Córdoba, España.

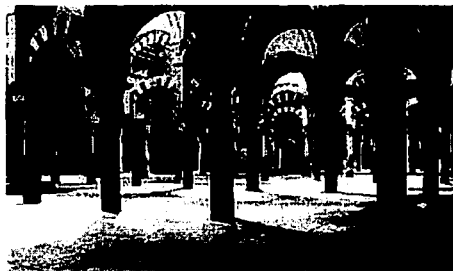


Fig.8 Arco de Abdul Al - Rahman I. Córdoba, España.

Desde el siglo XII se empezaron a utilizar un gran número de variantes de la bóveda cilíndrica, las cuales dieron lugar a formas más eficientes desde el punto de vista estructural y más elaboradas en cuanto a su construcción. Las bóvedas cruzadas o intersecadas, conformadas mediante la intersección de dos bóvedas, dieron lugar a una cubierta que permitió cubrir claros mucho mayores que con la bóveda simple. Un ejemplo de este tipo de bóvedas es la de arista o cuatrimpartita (fig. 9), que se forma mediante la intersección de dos bóvedas de cañón de la misma altura.

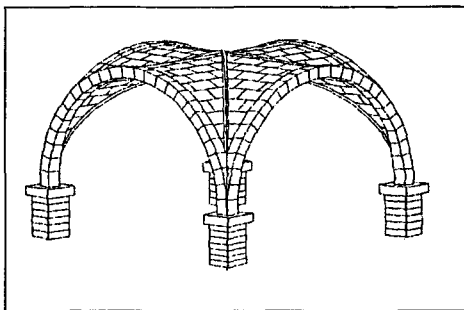


Fig. 9. Bóveda cuatrimpartita.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A pesar de que estas variantes se desarrollaron desde el principio del segundo milenio de nuestra era, durante el periodo románico, encontraron su más alto nivel de desarrollo en las cubiertas de las grandes iglesias góticas.

La arquitectura gótica surge en Francia en la primera mitad del siglo XII y se desarrolla durante 400 años a lo largo de gran parte de Europa, sucediendo a la arquitectura de estilo románico; la incursión de nuevas formas, tales como los arbotantes y los contrafuertes,

permitió disminuir el espesor de los muros laterales, así como el uso de bóvedas de ojiva y nervadas, las cuales le darían a las iglesias una gran altura (fig. 10 y 11). También aparecieron las bóvedas sextipartitas y las nervadas, las cuales transmiten el peso del techo en un número reducido de puntos de apoyo, por lo que resulta crítico el coceo que se ejerce sobre ellos. Esta situación dio lugar a la introducción de los contrafuertes y de los arbotantes tan característicos en la arquitectura gótica.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

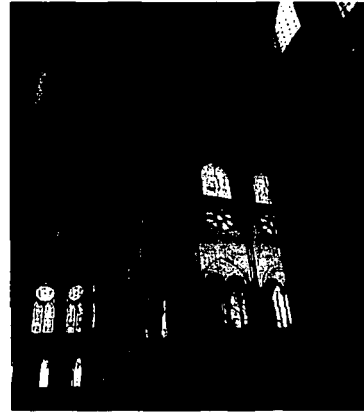


Fig. 10 Catedral de Notre Dame. Paris, Francia.

Fig. 11 Bóvedas de la Catedral de Notre Dame.

A fines del siglo XIX y durante el siglo XX se dieron varios cambios importantes en la construcción de arcos y sistemas abovedados, debido principalmente al uso de otros materiales constructivos, como el concreto reforzado y el acero, principalmente. Estos materiales presentaron muchas ventajas con respecto a la mampostería ya que permitieron que las estructuras fueran capaces de soportar esfuerzos de tensión. De esta forma, se han podido utilizar elementos arqueados y abovedados en una gran variedad de estructuras tales como: edificios, presas y puentes, entre otras.

I.2 Arquitectura religiosa mexicana del siglo XVI

Durante el siglo XVI, gran parte de Europa estuvo influenciada por la arquitectura renacentista, surgida en Italia a principios del siglo XV. Las construcciones retomaron el estilo clásico grecorromano, basado, principalmente, en proporciones geométricas de los elementos y en el uso de arcos, bóvedas y cúpulas circulares.

En otras partes de Europa, y en particular en España, la arquitectura tuvo otras influencias, además de las renacentistas, provenientes del norte de África y particularmente de Arabia, lo que le dio un estilo peculiar, caracterizado por la rica decoración de las fachadas y el uso de formas árabes en algunos de sus elementos.

Por su parte, la arquitectura religiosa (las iglesias, catedrales y demás templos) también siguió los modelos españoles de la época, sin embargo, los cambios en las ideologías religiosas que sufrió la Iglesia católica en ese entonces (surgimiento de las órdenes mendicantes) ocasionaron que las construcciones tuvieran algunos cambios importantes en el tamaño y en la forma de la estructura. Esto ocurrió en algunos lugares de España y con mayor frecuencia en las obras construidas en la Nueva España, durante el proceso de colonización.

1.2.1 Las órdenes mendicantes y su labor como constructores

Las órdenes mendicantes fueron fundadas durante las reformas religiosas de finales de la edad media. Dentro de sus ideales se encontraban el predicar la pobreza y el retorno a un estado de vida humilde, similar al de Cristo, a diferencia de la opulencia en la que vivía el clero en ese entonces.

A América fueron tres las órdenes mendicantes que llegaron, los franciscanos, los agustinos y los dominicos, como parte del proceso de evangelización en la Nueva España. Desde su llegada, a principios del siglo XVI, su labor fue parte fundamental en la colonia ya que además de encargarse de la educación y evangelización de los pueblos indígenas, también estuvieron a cargo de la mayor parte de la construcción de iglesias e inclusive llegaron a gobernar ciertas comunidades. Cabe señalar que también llegaron otras órdenes religiosas a América; sin embargo, su presencia no influyó en la arquitectura colonial del siglo XVI del mismo modo en el que lo hicieron las órdenes mendicantes.

La mayor parte de los monumentos que se realizaron durante el siglo XVI fueron construidos por los franciscanos, seguidos por los agustinos; los dominicos fueron los que menos construcciones realizaron; sin embargo, estas fueron de gran calidad y trascendencia. Los franciscanos no construyeron edificios grandes en poblaciones pequeñas y con frecuencia erigieron edificios modestos en poblaciones grandes, como en Tulancingo. En cambio, los agustinos y los dominicos frecuentemente pretendieron realizar grandes construcciones en pueblos de mediana importancia, como en Yuriria o Oaxtepec. Esto se debió, principalmente, a que los franciscanos sujetaron sus pretensiones arquitectónicas a los recursos disponibles de la población local, sobre todo en las provincias de occidente, en donde los templos provisionales de adobe y madera fueron lo más común, con algunas excepciones. En general, durante la colonia, las dimensiones de los templos dependieron de: el tamaño de la población, de su distancia a la capital y del nivel tecnológico de los habitantes de la región; de ahí que las construcciones más elaboradas se hayan realizado, en su mayoría, en la capital o en zonas cercanas a ésta.

A pesar de esto, al sur de México hay ciertas excepciones, ya que los dominicos lograron construir edificaciones muy notables como Yanhuítlán o Coixtlahuaca, debido en gran parte al dominio que ejercieron sobre los altamente civilizados pueblos mixtecos. Grandes asentamientos humanos, artesanos con tradición en el arte de labrar piedra y competentes dirigentes europeos dieron a la obra de los dominicos en el sur de México una gran calidad, difícilmente superable en la Nueva España.

Otras excepciones se encuentran en los establecimientos urbanos que fueron proyectados para el uso de los europeos, tales como Puebla o Morelia, donde el trabajo de construcción era bien pagado y la mano de obra era importada del centro.

En México no hubo una transmisión escrita del conocimiento arquitectónico hasta la segunda mitad del siglo XVI, cuando empezó la circulación de libros provenientes del viejo

mundo. El "Túmulo Imperial de Arciniegas" fue la primera obra de estilo renacentista hecha en México. Y la primera referencia a un canon clásico sobre composición arquitectónica aparece en el diálogo "Mexicus interior" de Francisco Cervantes Salazar, en el que se describen las proporciones vitrubianas de las columnas del Palacio Real (Kubler, 1948).

Puesto que la tradición escrita tardó mucho tiempo en adquirir peso en Europa, debido a que los arquitectos europeos de la época no confiaban mucho en los dibujos y planos en los cuales se especificaban las formas y dimensiones que iban a tener las construcciones, a causa de las imprecisiones gráficas en las cuales se incurría, no se tienen documentos en los cuales se diga que los planos de las obras realizadas en México vinieran de España. Es seguro, por lo tanto, que muy pocos bocetos para construir edificios en México fueron preparados en España, por lo menos durante esta época (Kubler, 1948).

Sin duda, los constructores mendicantes y del clero tuvieron en mente determinados modelos españoles, por lo que fue mucho más importante el recuerdo de edificios admirados en España, que cualquier transmisión ya sea escrita o gráfica para conformar sus aspiraciones y deseos arquitectónicos.

Para la realización de estos edificios, los colonizadores encontraron en México mano de obra disponible, que si bien no estaba adiestrada en las técnicas constructivas renacentistas, sus aptitudes provenientes de una tradición artesanal les permitió realizar ciertos dibujos y labrados, además de aprender con rapidez algunas técnicas europeas de construcción.

En una situación así, en que los primeros constructores confiaban por completo en su preparación previa, en un conocimiento nada profesional de los problemas relacionados con la construcción y en una mano de obra en vías de adiestración técnica, puede esperarse que su trabajo desarrollara divergencias profundas, tanto dentro del mismo país como con respecto a la arquitectura europea contemporánea. Estos factores, además de la ausencia de una transmisión escrita o gráfica, ayudan a explicar la riqueza de variedades e invenciones en la arquitectura mexicana del siglo XVI.

Cabe señalar, que si bien había artesanos capaces de realizar ciertos trabajos de construcción, existen documentos en donde, a mediados del siglo XVI, las autoridades y algunos mendicantes se quejaron por la falta de personal suficientemente capacitado así como de arquitectos diestros para poder realizar monumentos más ambiciosos. Por lo que para la construcción de algunos templos se mandaron traer de España arquitectos, pintores y escultores expertos en arquitectura y artes renacentistas.

Para realizar el estudio acerca de los principales templos que fueron construidos en México durante el siglo XVI, se hará la siguiente división, siguiendo una secuencia cronológica realizada por George Kubler (1948):

- I. Estructuras de tres naves con techos de vigas: 1526 - 1540.
- II. Estructuras abiertas " capillas abiertas": 1535 - 1575.
- III. Templos criptocolaterales: 1541 - 1600.
- IV. Grandes templos de una nave: 1545 - 1590.
- V. Templos de tres naves con arcadas: 1560 - 1600.
- VI. Grandes catedrales: 1560 - 1650.

Las fechas mencionadas son aproximadas y hacen referencia a los periodos de máximo desarrollo, y no pertenecen necesariamente a los primeros o últimos exponentes.

Los templos de tres naves techados con vigas, que fueron las primeras en construirse en la colonia, se vieron favorecidas por la abundancia de madera en el Valle de México y la experiencia en el trabajo con madera que tenían los artesanos de las culturas prehispánicas (fig. 12). Más tarde, a medida que aumentó el número de conversos en la década de 1530 y se fueron agotando los bosques, este tipo de templos fue desapareciendo.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 12 Templo de Zacatlán, Puebla.

Las capillas abiertas, como forma arquitectónica específica, apareció hasta los últimos años de la década de 1530 (en Tlaxcala), a pesar de que desde los comienzos de la evangelización, en los lugares con gran número de feligreses, las reuniones al aire libre debieron ser muy frecuentes a falta de suficientes locales adecuados. Este tipo de construcción estaba relacionado con la evangelización masiva, que cesó abruptamente al disminuir el número de feligreses, así como por el gran número de muertes ocasionadas por las epidemias de 1545 y 1576. Por lo tanto, se puede decir que la arquitectura tan sencilla de las capillas abiertas correspondió a las primeras necesidades de la evangelización en México.

Los templos criptocolaterales se levantaron en un principio sólo en los principales centros de población española. Dichos templos seguían el modelo de algunos templos específicos de España por lo que no resultaban prácticos en los centros de densa población indígena. Los dominicos construyeron este tipo de templos en el sur de México en la segunda mitad del siglo XVI, siempre bajo la supervisión de arquitectos europeos. En las ciudades de México y Puebla se empleó seguramente el trabajo de los indígenas adiestrados para la construcción de dichos templos desde la década de 1540. De todos los tipos de templos en México, a excepción de las catedrales tardías, las construcciones criptocolaterales son las que guardan más parecido con las obras españolas contemporáneas, tanto en la estructura como en su decoración. En general este tipo de edificios fueron raros en México debido, sobre todo, a que no eran prácticos para los fines

de los colonizadores. Por ello, su construcción se limitó para el uso de los europeos que radicaban en México.

Los templos de una nave constituyeron la modalidad arquitectónica más utilizada en la Nueva España, ya que, a diferencia de los anteriores, éstos cumplían tanto con los ideales de evangelización y de sencillez de los mendicantes, como con las posibilidades técnicas de la mano de obra disponible.

Los grandes templos de tres naves y arcadas, posteriores a 1560, representaron un gran avance en las técnicas de construcción. Reflejan las nuevas corrientes de gusto clasicista, derivada de la obra de Arciniega en la capital a fines de la década de 1550. Este estilo no podía difundirse hasta no enseñar a los indígenas las artes del cálculo exacto de magnitudes geométricas y otros aspectos referentes a la construcción precisa. Estos monumentos de construcción difícil y costosa fueron muy escasos, sin embargo, constituyeron los primeros modelos arquitectónicos para las grandes catedrales de la Nueva España, las cuales empezaron a construirse alrededor de 1560.

Las catedrales, por encima de todas las construcciones del siglo XVI, constituyeron una secuencia del estilo peninsular, más que adaptaciones coloniales o indígenas de las formas europeas (como los templos de una nave y las capillas abiertas).

A continuación se describirán algunas de estas construcciones edificadas durante la Colonia.

1.2.2 Templos criptocolaterales

Este tipo de templos fueron muy raros en México, los existentes se encuentran principalmente en la capital y en Oaxaca y fueron construidos en su mayoría por los dominicos. Entre los de mayor importancia se encuentran: San Agustín y Santo Domingo en la ciudad de México; Santo Domingo en Puebla y Santo Domingo, Coixtlahuaca y Etlá en Oaxaca. Los templos criptocolaterales presentan una arquitectura muy peculiar, donde la característica fundamental es un sistema de contrafuertes interiores a lo largo de los muros de la nave. Entre estos contrafuertes se colocaron las capillas. Estas construcciones fueron muy comunes en España así como en el suroeste de Europa, sin embargo, presentaron poco interés para los constructores de la Nueva España. Es muy probable que la transmisión de esta modalidad a América se haya logrado con la construcción de Santo Domingo (en la ciudad de México) en los primeros años del siglo XVI.

Las únicas iglesias abovedadas de planta criptocolateral del siglo XVI que se conocen son San Agustín en la ciudad de México y Santo Domingo en Oaxaca (fig. 13 y 14). La estructura de San Agustín desapareció hace bastante tiempo, y las bóvedas de cañón en Oaxaca son del siglo XVII. En las otras iglesias de este tipo los techos de madera fue lo más utilizado, ya que los constructores, inexpertos en ese tiempo, tuvieron temor de abovedar claros grandes en zonas en donde los movimientos sísmicos eran frecuentes.

Santo Domingo, en la Ciudad de México, se empezó a construir en 1558 y se concluyó en 1571, la nave tenía 16 metros de ancho por 80 de largo aproximadamente, con crucero y capillas laterales en el presbiterio; sin embargo, el templo sufrió algunas modificaciones y la iglesia actual no fue terminada sino hasta 1736; ésta consta de 12 capillas, todas con bóvedas y arcos circulares. Por su parte, la iglesia de Santo Domingo en Oaxaca, empezada en 1575, es muy similar al templo de la ciudad de México. La estructura difiere en que ésta

tiene una bóveda de cañón apoyada sobre muros extremadamente gruesos, con capillas laterales intercomunicadas.

En la zona de la alta mixteca, la iglesia de Coixtlahuaca representa uno de los logros más importantes dentro de los templos criptocolaterales así como de la arquitectura colonial, debido a la magnitud y calidad en su construcción.

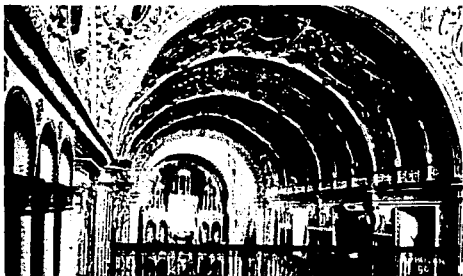


Fig. 13 Santo Domingo, Oaxaca.

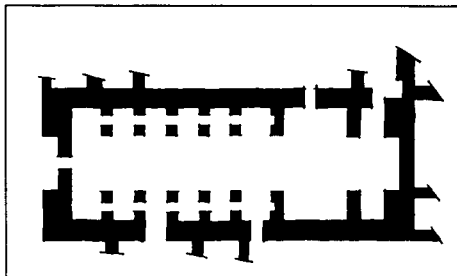


Fig. 14 Planta de Santo Domingo Oaxaca.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1.2.3 Templos de una nave

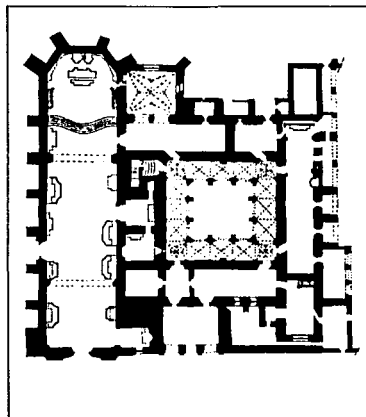
El templo de una nave fue la forma arquitectónica dominante en México durante el siglo XVI. A pesar de que hubo una gran variedad en los estilos y formas en las que éstos se construyeron, la mayoría presenta las siguientes características:

- Las construcciones muestran carácter militar defensivo y se encuentran emplazadas en el centro de un pueblo no fortificado.
- Su planta presenta una disposición sencilla y simétrica de una nave, en ocasiones con crucero y a veces también con un presbiterio poligonal en uno de sus extremos (fig. 15).
- La estructura tiene una influencia gótica en los lugares en los que los recursos locales permitían una construcción más refinada. Los templos más elevados tienen bóvedas de nervadura, ya sea en parte o en su totalidad. En las regiones que eran más pobres los techos suelen ser de bóvedas de cañón o de vigas de madera.
- Independientemente de tipo de techo, el volumen del templo se distingue por sus contrafuertes, dispuestos en forma más o menos regular, especialmente en las esquinas del edificio.
- Las ventanas son escasas y colocadas generalmente en la parte alta de los muros laterales.
- La estructura es bastante simple; una planta estrecha de gran altura.

Cabe señalar que las formas de arquitectura militar que presentan los templos fueron, casi en su totalidad, de carácter decorativo, ya que en muy contadas ocasiones desempeñaron una verdadera función de resguardo contra algún ataque.

Se piensa que el estilo sencillo y simétrico que tienen los templos de una nave se debió a que éstos representaban a la iglesia apostólica en su sencillez primitiva en un nuevo mundo intacto e incorrupto. Esta fue la ideología de las órdenes mendicantes durante la colonia, encabezadas por Fray Juan de Zumárraga, Las Casas, Vasco de Quiroga y Alonso de la Veracruz, entre otros, ideología que deriva de la influencia que estos tuvieron de algunos pensadores renacentistas, tales como Erasmo de Rotterdam y Tomás Moro (G. Román, 1595)

Debido a esto, uno de los principios dominantes de la arquitectura colonial fue la tendencia a la simplicidad de los espacios cerrados y sus volúmenes.



FALLA DE ORIGEN

Fig. 15 Planta de la nave y el claustro del templo agustino de Actopan.

El objetivo principal de dichos espacios cerrados en la arquitectura colonial era el de concentrar y unificar a la congregación. Se trataba de que todos tuvieran una vista óptima del ritual religioso desde cualquier punto del interior de la iglesia. El clero deseaba mantener constante vigilancia de la congregación, por lo que se buscaba llevar la atención de los nuevos feligreses hacia un solo punto, ya fuera al altar o al púlpito; en consecuencia, los templos de una nave resultaron muy eficientes en las ceremonias directas y sencillas de las misiones en México. Por esto, puede afirmarse que las iglesias de una nave, independientemente de sus antecedentes aislados en Europa (las iglesias post-albigenses del suroeste de Francia, las casas cartujas de Borgoña y España, entre otras), son específicamente mexicanas.

Sus elementos fundamentales son: nave, presbiterio, contrafuertes y la fachada; los cuales aparecen en varias formas dependiendo de la proporción entre la longitud y el ancho, además de la forma del presbiterio.

En España, los arquitectos, entre ellos Rodrigo Gil de Hontañón, tenían la costumbre de construir la estructura de tal manera que el ancho de la nave debía estar a la proporción de 1:5 con el largo y cada brazo de crucero debía tener una profundidad de la mitad del ancho de la nave. Las dimensiones recomendadas para la nave eran: 50 metros de largo por 10 de

ancho. A pesar de estas recomendaciones, en la práctica, la proporción entre el largo y el ancho de las construcciones en México fue de 1:4 y las dimensiones resultaron mucho mayores que las recomendadas. Estas diferencias se debieron en gran medida a la ausencia de cruceros, hasta los últimos años del siglo XVI. Los constructores, en su búsqueda de unidad de volumen prefirieron los templos de una nave continua, como los que aparecen en *la tabla 1*, en la que además se presentan, de acuerdo a Kubbler (1948), las dimensiones de su planta y la relación que existe entre la longitud y el ancho de cada una de ellas.

Tabla 1. Proporción entre el largo y ancho de los templos:

Templo	Longitud (m)	Ancho (m)	Proporción
Huejotzingo	57.3	13.02	1 : 4.4
Tula	48.8	11.90	1 : 4.2
Actopan	65.4	14.57	1:4.5
Ixmiquilpan	66.9	14.4	1 : 4.65
Atotonilco el grande	61.6	14.00	1 : 4.75
Acolman	57	12.5	1 : 4.55
Xochimilco	63	21	1 : 3
Cuitzeo	70	15	1 : 4.67
Zempoala	50.5	12.5	1 : 4
Tezontepec	50.5	12.5	1 : 4
Tepeaca	53.6	12.8	1 : 4.18
Atlixco	43.2	11.00	1 : 3.92
Santa Ana Chiautempan	50.7	10.2	1 : 4.97
Calpan	42.3	11.0	1 : 3.89
Santa María Atlhuetzia	53.44	13.25	1 : 4.02
Calpulalpan	49.95	12.02	1 : 4.15
Tehuacán	49.80	10	1 : 4.98
San Francisco, Puebla	60	13.2	1 : 4.55
Zacualtipán	46	11	1 : 4.2
Tepeyanco	48	14	1 : 3.4
Tiripitío	51	10.8	1 : 4.85
Tochimilco	47.3	11.7	1 : 4.05
San Francisco, Tlaxcala	51	11.25	1 : 4.51
Tlaquiltenango	47.3	11.1	1 : 4.3
Cholula	53.5	12	1 : 4.45
Huaquechula	46.3	11.4	1 : 4.06
Yanhuitlán	75	15	1 : 5.0
San Pedro y San Pablo Teposcula	42	12	1 : 3.5

En relación con el dimensionamiento de los templos, Rodrigo Gil de Hontañón, entre otros constructores españoles, recomendaba: que la altura de la nave fuera de 18 a 21.30 metros, con un ancho de 9 a 10 metros. Los templos mexicanos obedecen a estas proporciones, como se observa en la *tabla 2*.

Tabla 2. Relación altura/ ancho de algunos templos de una nave.

Templo	Altura interior del claro (hasta la clave)	Ancho (m)	Relación altura/ancho
Talxcala	18.6	11.25	1 : 1.65
Zempoala	19	12.5	1 : 1.52
Huaquechula	19.12	11.4	1 : 1.68
Tula	20.1	11.9	1 : 1.68
Cholula	21	12	1 : 1.75
Atotonilco el grande	21	13	1 : 1.62
Tepeaca	21.7	12.8	1 : 1.69
Huejotzingo	21.9	13.02	1 : 1.68
Actopan	22.21	14.57	1 : 1.54
Tochimilco	24.31	11.7	1 : 2.08
Ixmiquilpan	25.50	14.4	1 : 1.77

Dentro de las iglesias de una nave en México, la estructura más ambiciosa y cara fue la bóveda de nervaduras (fig. 16 y 17); una opción más económica y fácil de realizar fue la bóveda de cañón, o la techumbre de madera en los lugares con menos recursos, tanto de mano de obra como de materiales.



Fig. 16 Bóvedas nervadas. Yanhuittlán, Oaxaca.



Fig. 17 Bóvedas nervadas. Zempoala, Morelos.

En la *tabla 3* se presentan algunas características, así como el tipo de bóveda utilizado en varios templos de una nave durante el siglo XV.

Las fechas que se presentan en la *tabla 3* se obtuvieron de distintos documentos históricos, algunos de ellos del siglo XVI, por lo que en algunos casos los datos son inciertos o inclusive no existen, de acuerdo a Kubler (1948). A pesar de esto, se puede observar que las iglesias que fueron completamente abovedadas, es decir, a lo largo de toda la nave y no únicamente en el presbiterio, pertenecen a la segunda mitad del siglo XVI.

Tabla 3. Tipos de bóveda.

Templo	Orden que lo construyó	periodo de construcción	ancho [m]	Proporción: claro de la nave / suma de los espesores de los muros	tipo de bóveda
Cholula	franciscanos	1549 - 1552	12	1 : 3.55	nervaduras
Tula	franciscanos	1550 - 1554	11.90	1 : 2.82	nervaduras
Tecamachalco	franciscanos	1551 - 1557	---	---	nervaduras
Atlixco	franciscanos	después de 1550	11	1 : 2.75	nervaduras
Tepeaca	franciscanos	después de 1550	12.8	--	nervaduras
Yanhuitlán	dominicos	después de 1550	---	--	nervaduras
Huaquechula	franciscanos	antes de 1560	11.4	--	nervaduras
Tochimilco	franciscanos	1560 - 1570	11.7	1 : 3.85	nervaduras
Puebla	franciscanos	terminada antes de 1570	13.2	1 : 4.0	nervaduras
Acatzingo	franciscanos	después de 1558	---	--	nervaduras
Oaxtepec	dominicos	después de 1561	---	--	nervaduras
Zempoala	franciscanos	terminada en 1570	12.5	1 : 4.17	nervaduras
Huejotzingo	franciscanos	terminada en 1571	13.02	1 : 3.25	nervaduras
San Agustín	agustinos	---	---	--	nervaduras
Atotonilco el grande	agustinos	---	13	1 : 3.82	cañón
Yuriria	agustinos	---	13.5	1 : 3.3	cañón
Acolman	agustinos	---	12.5	1 : 3.12	cañón
Ixmiquilpan	agustinos	---	14.4	1 : 4.0	cañón
Actopan	agustinos	---	14.57	1 : 4.3	cañón
Cuitzeo	agustinos	---	15	--	cañón
Yecapixtla	agustinos	---	---	1 : 2.56	cañón
Calpan	franciscanos	---	11	1 : 5.5	cañón
Tlaquiltenango	franciscanos	---	---	1 : 2.42	cañón
Xochimilco	franciscanos	---	21	--	cañón

En la misma tabla, también puede verse que las naves cubiertas con bóvedas de nervadura, construidas generalmente por los franciscanos, apenas exceden los 13 metros de

ancho, mientras que las de bóveda de cañón fluctúan entre los 13 y 15 metros. Esto permitió que las naves con bóveda de cañón fueran, en general, más largas. Por lo tanto, durante el siglo XVI, la bóveda de cañón se utilizó para cubrir claros mayores a los 13 metros.

Otra diferencia entre los métodos constructivos de los agustinos (quienes tenían la costumbre de reservar una bóveda de nervaduras para el presbiterio y la de cañón para la nave central) y los dominicos fue la proporción entre el ancho de la bóveda y el espesor total de los muros de carga, es decir, la suma de los espesores de los dos muros que sostienen a la cúpula. Las dimensiones que se presentan en la tabla 3 son aproximadas e incompletas, sin embargo, muestran que los muros construidos por los agustinos eran más pesados que los de los franciscanos, y que el paso del tiempo provocó la reducción de su espesor, sin aumentar las dimensiones en los claros de las bóvedas.

La poca experiencia de los constructores ocasionó que en México durante el siglo XVI, las bóvedas de cañón se construyeran como largos túneles apoyados en los muros laterales, con ventanas solamente bajo el nivel de la imposta (fig. 18). El extradós sufre entonces una fuerte carga sobre el riñón de la bóveda, y el techo presenta una superficie plana, interrumpida únicamente por la elevación de la corona (fig. 19). Desde el punto de vista estructural, este tipo de bóvedas de cañón están más cerca de las bóvedas románicas que de las renacentistas, las cuales, generalmente, eran bóvedas de arista que daban mayor rigidez a la estructura y aprovechaban los lunetos laterales para un sistema más amplio de ventanas; estas no se empezaron a construir sino hasta el siglo XVII.



Fig. 18 Bóveda de cañón de San Bernardino, Xochimilco, México DF.

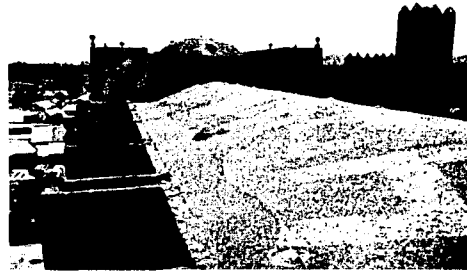


Fig. 19 Bóveda de cañón de Atotonilco el Grande, Hidalgo.

Los sistemas de contrafuertes y almenas dieron a los templos del siglo XVI su asombroso aspecto militar. En ciertas iglesias, ya sea de principios o de finales de siglo, los contrafuertes muestran un cuidadoso diseño y revelan haber sido construidos con muy buena calidad (fig 20).

Los contrafuertes, a manera de sólidas torres de mampostería, se colocaron en los puntos donde las fallas estructurales se consideraban inminentes. Dichos elementos no formaban parte del proyecto original, en la mayoría de los casos, pero es difícil asignar las fechas exactas a estas campañas de consolidación estructural, con base en los escasos datos que se conocen.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 20 Contrafuertes del templo de Xochimilco.

I.2.4 Templos de tres naves y las grandes Catedrales

Los templos construidos con una estructura de tres naves fueron el origen de las primeras catedrales en la ciudad de México, Puebla, Oaxaca y Morelia. En los primeros años de la colonia, este tipo de construcción fue común entre las órdenes mendicantes, y para la segunda mitad del siglo XVI, algunas de éstas adquirieron formas monumentales. Los primeros templos de tres naves (realizadas alrededor de 1526) fueron construidos con techumbre de vigas de madera transversales y longitudinales. Más tarde, a fines de siglo, conforme fue evolucionando la calidad en la mano de obra, fue posible realizar obras más elaboradas con arcadas y sistemas abovedados.

Los templos de tres naves estuvieron destinados, en un principio, al uso de residentes europeos durante las dos primeras décadas de la colonización. La construcción de este tipo de templos, que se extendieron en algunas comunidades indígenas antes de 1540, fue disminuyendo paulatinamente hasta que los colonizadores optaron por realizar construcciones más sencillas y menos costosas, como las capillas abiertas y posteriormente los templos de una nave. Algunos ejemplos de templos de tres naves son Tláhuac y Tlatelolco, los cuales fueron los primeros templos mendicantes de la colonia, así como las primeras catedrales en la ciudad de México, Oaxaca y Puebla, los cuales posteriormente fueron modificados. Tlatelolco fue reemplazado en 1603 por el templo actual, sin embargo, aún se pueden ver las columnas de piedra del templo original.

Las catedrales mexicanas, particularmente las iniciadas en el siglo XVI, tienen elementos góticos, sobre todo en cuanto a la distribución espacial y el diseño de las bóvedas. Algunas catedrales mexicanas también presentan influencias de los estilos románico y plateresco, estilo español de principios del Renacimiento (siglo XV) que se caracteriza por una decoración superficial abundante de adornos floridos, y en algunos casos como en San Cristóbal de las Casas, incluso la carpintería mudejar, estilo utilizado por los moros entre los siglos XII y XV, forma parte de sus elementos significantes, de forma similar que algunas catedrales españolas como Jaén o Sevilla.

Las "primitivas" catedrales de México, Puebla y Oaxaca, es decir, las primeras catedrales construidas en estas ciudades, que luego serían cambiadas o remodeladas debido a daños estructurales o únicamente para aumentar su volumen, tuvieron un programa arquitectónico similar: una planta ortogonal con tres naves, la principal limitada con capilla,

naves laterales o procesionales acompañadas de capillas hornacinas y el coro situado en la nave principal atrás del crucero. El hecho de que algunas catedrales estuvieran en construcción por más de 200 años, sintetiza en ellas el arte de un amplio periodo. Concepciones renacentistas, decoraciones barrocas y elementos neoclásicos, junto a la incorporación de formas locales dan a las catedrales mexicanas una apariencia diferente, tanto en la estructura como en los ornamentos, a las construidas en España y el resto de Europa.

La primitiva catedral de la ciudad de México se empezó a construir en 1526 y se concluyó aproximadamente en 1532. Dicha catedral contaba con tres naves techadas con una capa de tierra apisonada sostenida por medio de vigas de madera, y sus dimensiones eran mucho menores que las de la actual catedral (tenía aproximadamente 73 metros de largo). Debido a esto, Fray Juan de Zumárraga no estuvo satisfecho y decidió emprender un nuevo proyecto, en el cual se construiría una catedral de mayor tamaño. Sin embargo, esta obra se inició hasta 1573, junto a la primitiva catedral, la cual no se demolió sino hasta 1624. El proyecto original, aprobado por la Corona, de la nueva catedral era similar al de la catedral de Sevilla, de siete naves, sin embargo, debido a la falta de recursos y sobre todo a los problemas de hundimiento que tenía la estructura, el proyecto sufrió varios cambios y la construcción se alargó por mucho tiempo; el templo tiene forma de cruz latina orientada de norte a sur, y sus dimensiones, incluyendo muros, son de 127 m de largo por 58 m de ancho y 61 m de altura, medida esta última desde el nivel de plintos hasta la punta de las cruces localizadas en las torres. El templo se divide en 5 naves: la mayor o central, dos procesionales o de tránsito, y dos cerradas que están divididas por capillas y que a su vez terminan el edificio por los costados. La cubierta de la nave principal está constituida por una bóveda cilíndrica o de cañón que descansa sobre arcos torales, y que está intersecada por bóvedas cónicas transversales para formar los llamados lunetos. Las naves procesionales y las de capillas están cubiertas por bóvedas semiesféricas.

La catedral de Puebla se empezó a construir en 1536, sin embargo, esta construcción resultó insuficiente para las demandas de una ciudad en pleno crecimiento, por lo que en 1564 se da el dictamen aprobatorio para que se edificara un nuevo templo. Éste tendría una planta rectangular de 82 por 51 metros, aproximadamente, dividida en cinco crujías, cada una con ocho tramos.

El templo consta de tres naves, el transepto y las capillas colaterales, todas estas cubiertas con bóvedas y cúpulas de diferente tipo. La cúpula más importante es la del crucero, la cual es hemisférica y se encuentra apoyada sobre un tambor cilíndrico que a su vez reposa en cuatro arcos torales, las pechinchas entre ellos y los robustos pilares que los soportan. Sobre el altar de los reyes hay otra cúpula pero sin tambor. El resto de la nave mayor y el transepto, que tiene la misma altura y claro, están cubiertos por bóvedas de cañón con lunetos, es decir, tramos semicilíndricos intersecados por otros de menor altura, lo que permite abrir ventanas sobre los tímpanos resultantes. Los cañones se apoyan en arcos transversales o fajones, y sus lunetos en arcos longitudinales o formeros, incorporados a los tímpanos. Los arcos son estriados y abocelados (semicilíndricos) y descargan sus esfuerzos sobre pilastras del mismo tipo, incorporadas a los muros. Por otra parte, las bóvedas de las naves laterales son vahídas, es decir, hemisféricas con esquinas apuntadas. Por último, las capillas colaterales están cubiertas por bóvedas de arista, es decir, dos cañones cilíndricos que al intersecarse muestran aristas diagonales al claro.

En Oaxaca, se intentó seguir a los modelos realizados tanto en la catedral de México como en la de Puebla, durante la primera mitad del siglo XVI. Es sabido que durante esta época la mayor parte de las iglesias virreinales fueron destruidas, reconstruidas o ampliadas; sin embargo, en Oaxaca este fenómeno fue aún más notable, debido a la intensidad con que los sismos afectan periódicamente a las edificaciones, obligando a reconstruirlos a veces incluso en su totalidad.

Debido a esto, la primera catedral de Oaxaca, construida en 1535, sufrió muchos daños por lo que hubo que repararla varias veces. La actual catedral oaxaqueña consta de tres naves que van de poniente a oriente a lo largo de diez tramos, con sendas crujías que en los extremos están ocupadas por capillas colaterales y otros anexos. A la altura del cuarto tramo cruza la nave del transepto, en una posición relativamente adelantada si se le compara con otras estructuras de este género. Todas las bóvedas de las naves son vahídas o hemisféricas con cuatro extremos apuntados entre los arcos que la sostienen. La cúpula en el crucero es de media naranja, apoyada sobre el desplante octogonal que se forma entre los arcos torales y las pechinchas entre ellos. Por su parte, las capillas colaterales están cubiertas por bóvedas semicilíndricas o de cañón corrido en sentido transversal a las naves. Cada cañón tiene un orificio en el centro en donde se encuentra una linternilla de iluminación cenital. Las cubiertas abovedadas descansan sobre robustos apoyos de cantera labrada, los cuales transmiten su peso hasta la cimentación. Todos los arcos son de medio punto y los pilares entre la nave central y las laterales están formados por cuatro medias muestras toscanas sobre un núcleo prismático. Hay otras pilastras en los muros laterales los cuales, a su vez, ayudados por contrafuertes exteriores completan la función de apoyo y forman una sólida y rígida estructura que resiste los movimientos de los sismos. Las proporciones volumétricas de la catedral demuestran las precauciones estructurales que se han tenido a lo largo de los años debido a las terribles experiencias en Oaxaca a causa de los sismos; un ejemplo es que la fachada principal sea más ancha que alta, y que las torres de los campanarios sean de un solo cuerpo.

A fines del siglo XVI se empezó a construir la primera catedral de Morelia, dicho templo constaba de tres naves con techumbre de madera y muros y zapatas de piedra. Este templo fue demolido en 1713. La nueva catedral fue construida con una orientación de sur a norte y tiene una planta rectangular de 77 m de largo por 30 m de ancho. También consta de tres naves, las cuales están cubiertas por ocho tramos de bóvedas. En la nave central la bóveda es de cañón con lunetos. Las bóvedas laterales son de arista. Entre las naves hay siete soportes cruciformes, integrados por el adosamiento de cuatro pilastras. La cúpula tiene 40 m de altura y se localiza en el quinto tramo, partiendo de la fachada principal.

II. ARCOS Y BÓVEDAS DE MAMPOSTERÍA.

II.1 Características principales de la mampostería.

A la mampostería se le conoce como a la combinación de piedras o ladrillos con algún tipo de mortero. Dicho mortero tiene la función de llenar los huecos entre las piedras con el fin de proporcionar cierta adherencia y uniformidad entre ellas y de esta forma obtener una transmisión de cargas más uniforme. El primer material que fue utilizado para estos fines fue el barro, alrededor del año 3000 a.C. en Mesopotamia y en otras ciudades del Medio Oriente.

En la práctica, se le ha clasificado, sobre todo, tomando en consideración el arreglo y la forma que tienen las piedras que la componen. En la figura 18 se muestran algunos de los múltiples arreglos que se han empleado en la mampostería de edificios históricos.

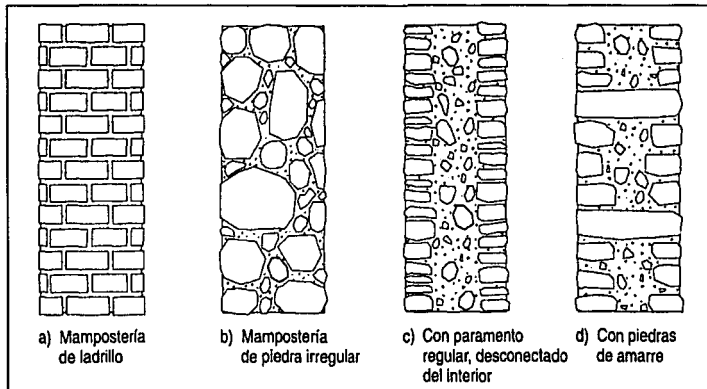


Fig.18 Tipos de mampostería.

En la figura 19 se puede ver otro tipo de mampostería que se encuentra con mucha frecuencia; los muros de limosna. Estos están formados por piedras, tezontle, pedacería de ladrillo y otros materiales provenientes de demoliciones o desperdicios.

Tanto la resistencia como las propiedades mecánicas de la mampostería dependen en gran medida del tipo y la calidad de los materiales que fueron utilizados en su fabricación, así como del arreglo que estos tengan. En la tabla 4 se muestran algunos valores de las propiedades mecánicas de ciertos tipos de mampostería utilizadas en edificios históricos, según Meli, 1998.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 19 Muros de limosna.

Tabla 4. Propiedades mecánicas de algunos tipos de mampostería de edificios históricos.

Material	peso volumétrico [t/m ³]	resistencia a compresión [kg/cm ²]	resistencia a cortante [kg/cm ²]	módulo de elasticidad [k ₃ g/cm ²]
Adobe	1.8	2-5	0.5	3 000
bloques de tepetate con mortero de cal	1.8	5-10	0.5	5 000
ladrillo con mortero de lodo	1.6	5-10	1.0	5 000
ladrillo con mortero de cal	1.6	15-20	2.0	10 000
Mampostería de piedra irregular con mortero de cal	2.0	10-15	0.5	5 000
Mampostería de piedra de buena calidad con mortero de cal	2.0	30	2.0	20 000

Por otro lado, en la tabla 5, se proporcionan algunos parámetros elásticos obtenidos en ensayos de unidades de mampostería, según Lourenso (1996).

Tabla 5. Propiedades mecánicas de la mampostería.

Módulo de elasticidad, en dirección horizontal Kg/cm ²	Módulo de elasticidad, en dirección vertical Kg/cm ²	Modulo de Poisson
25 076.5	55 657.5	0.18

Los datos de la tabla 5, al igual que los de la tabla 4, son conservadores. Esto se debe, principalmente, a que las fuentes de donde se obtuvieron los datos no mencionan las condiciones físicas en las que se realizaron los ensayos, lo cual puede resultar de gran

importancia en los valores obtenidos, debido a que los materiales que conforman la mampostería pueden presentar ciertas alteraciones ocasionadas por la filtración de agua de lluvia, por la presencia de microorganismos o por cambios considerables de humedad y temperatura. Estos agentes externos traen como consecuencia la reducción tanto en la resistencia como en el módulo de elasticidad del material, por lo que es recomendable considerar los valores más bajos que se obtengan de los ensayos.

La resistencia a fuerzas de tensión de la mampostería es muy baja y depende, principalmente, de la adherencia que exista entre el mortero y las rocas. Para fines de cálculo es recomendable considerarla igual a cero, aunque puede alcanzar valores de entre 1 y 5 kg/cm^2 .

Ante la presencia de fuerzas cortantes, provocadas por los sismos, van a regir los esfuerzos de tensión en la resistencia del material, aunque en esta ocasión, dichos esfuerzos se presentarán en planos diagonales, es decir, a aproximadamente 45° de la horizontal. Los valores que se alcanzan también son bajos, como se puede observar en la tabla 4, sin embargo, en este caso no pueden despreciarse, ya que de ellos depende la resistencia de los muros ante fuerzas laterales.

Se puede ver que la resistencia de la mampostería como conjunto es significativamente menor que la de la piedra, pero puede ser muy superior a la del mortero. Por ejemplo, cuando se trata de aparejos regulares, como en el caso de muros de ladrillos, la resistencia del conjunto es entre 30 y 40% de la del ladrillo.

Los modos de falla más comunes en la mampostería ante cargas verticales, de acuerdo a distintos arreglos de los componentes se muestran en la figura 20.

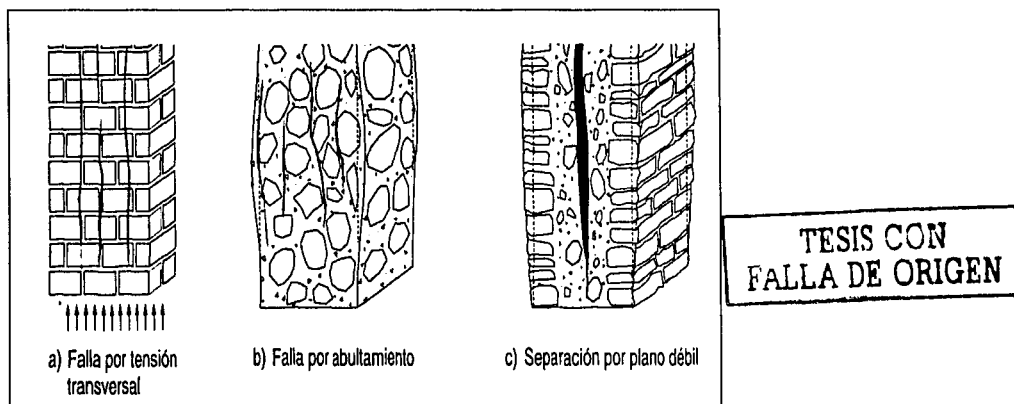


Fig. 20 Fallas típicas de la mampostería.

El primer modo de falla se presenta generalmente en muros de ladrillo, de bloques o sillares, y es debido a la tensión transversal que se presenta en el elemento a causa del "efecto Poisson". El segundo modo de falla se presenta en arreglos irregulares de piedra, y

se ocasiona por el aplastamiento del mortero y el desprendimiento de las piedras en algunas partes del elemento. El tercero se presenta en elementos en donde no existe una buena liga entre las piedras en el espesor del mismo, y se ocasiona por la laminación en placas separadas a causa también de la tensión transversal.

El comportamiento de la mampostería ante cualquier tipo de esfuerzo es frágil, es decir, que el material falla bruscamente al sobrepasarse su capacidad de carga.

Para fines de análisis es importante conocer el módulo de elasticidad de la mampostería, aunque éste sea un valor aproximado, ya que varía en intervalos sumamente amplios dependiendo de los materiales utilizados, su calidad y la intensidad de la carga. Se han obtenido valores desde 5000 kg/cm^2 para la mampostería irregular con altos contenidos de mortero, hasta de $200\,000 \text{ kg/cm}^2$ en mampostería de bloques de piedra de buena calidad con juntas de mortero muy delgadas. En una misma construcción, los módulos de elasticidad de los materiales de los distintos elementos estructurales pueden presentar grandes variaciones e influir en la distribución de cargas y deformaciones de la estructura. La curva esfuerzo – deformación típica para un elemento de mampostería se muestra en la figura 21.

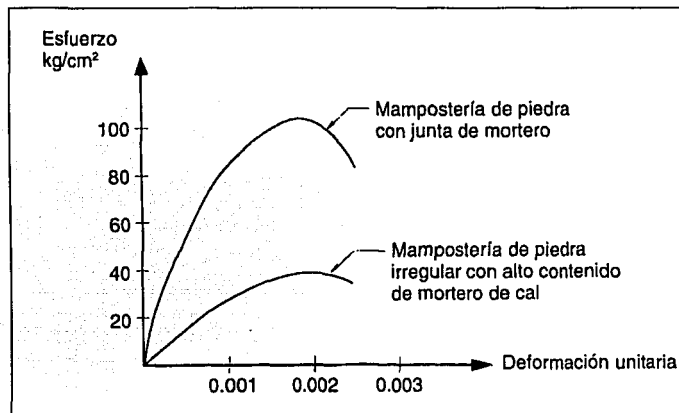


Fig. 21 Curva esfuerzo-deformación de la mampostería.

La mampostería ocasionalmente experimenta cambios volumétricos importantes a causa de la contracción de los materiales que la componen, como por ejemplo el secado del barro o el fraguado del mortero de cal. Otro fenómeno que genera cambios volumétricos es el flujo plástico, por el cual un material sometido a cargas de compresión, después de un acortamiento inicial, continua deformándose con el tiempo, mientras la carga permanezca. Las deformaciones por flujo plástico son proporcionales al volumen de mortero que se contenga. En elementos de mampostería irregular, el mortero llega a constituir hasta el 60% del volumen total, mientras que en elementos de bloques o sillares de cantera, apenas alcanza el 2 ó 3% del total; por lo tanto, los primeros experimentan deformaciones diferidas mucho mayores.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

II.2 Tipos de arcos y bóvedas.

El arco consta de numerosos elementos tanto constitutivos como geométricos (fig.22). Algunos de las más importantes se mencionan a continuación:

Propiedades geométricas:

- luz o claro: distancia horizontal medida entre arranques.
- flecha: altura del eje del arco, respecto a la línea de arranque.
- Peralte: relación flecha a luz.
- Extradós: parte superior o superficie exterior del arco.
- Intradós: parte interior del arco.
- Espesor o canto: distancia entre el extradós y el intradós.
- Eje o directriz: línea media del arco.
- Vértice: punto más alto del intradós.

Partes constitutivas:

- Dovela: pieza de piedra o ladrillo que compone al arco.
- Arranque: sección de apoyo o de inicio del arco.
- estribo o imposta: muro o macizo de mampostería que recibe al arco.
- Clave: dovela central del arco.
- Riñón: zona intermedia entre el arranque y la clave.
- Tímpano: muro de mampostería que se apoya sobre el extradós del arco
- Sálmer: dovela de arranque del arco.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

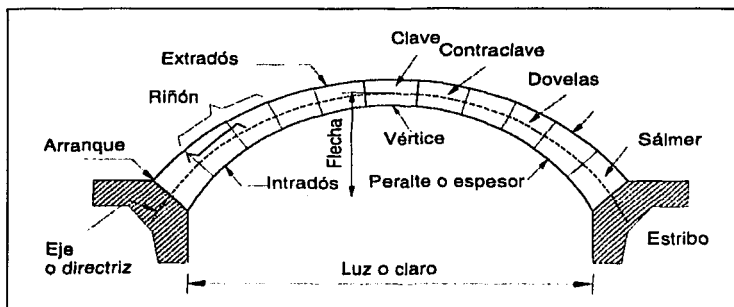


Fig. 22 Partes constitutivas de un arco.

Existe una gran variedad de tipos de arcos, de los cuales los más comunes se muestran en la figura 23.

Clasificación por forma geométrica del intradós:

- De medio punto, semicircular.
- Rebajado, circular con flecha menor que la mitad del claro.
- Peraltado, con flecha mayor que la mitad del claro.
- Deprimido, dos cuadrantes de círculo y una línea horizontal.
- Ojival, forma un ángulo en la clave
- Carpanel, formado por distintos arcos tangentes entre sí.
- Lobulado, formado por una serie de arcos que intersecan.
- Cojo, con los arranques a distinto nivel.

Clasificación por función:

- Botarel o arbotante, arco cojo que parte de un contrafuerte.
- Formero, paralelo al eje de una nave que da continuidad a la estructura de una bóveda.
- Fajón, perpendicular al eje de la nave que refuerza la bóveda.
- Toral, uno de los cuatro en que se apoya la cúpula.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

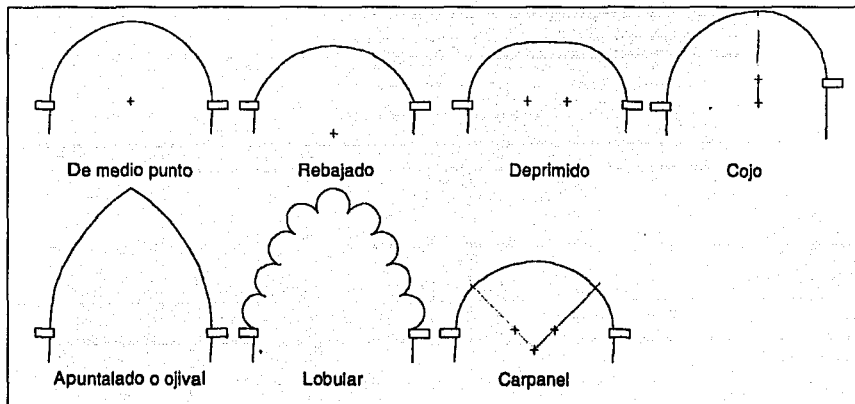


Fig. 23 Tipos de arcos.

Por su parte, las partes constitutivas de una bóveda, así como los tipos más comunes de éstas, son las siguientes (fig. 24):

Partes constitutivas:

- Espinazo, línea definida por los puntos más altos de la bóveda.
- Nervio, elemento lineal que sobresale por el intradós o por el extradós de la bóveda.
- Línea de borde, línea definida por el contorno de la bóveda.

Clasificación por forma:

- de Cañón corrido, es cilíndrica y recta en su longitud.
- de Arco apuntado
- Parabólica
- Alabeada
- Nervada (cuadripartida, sextipartida, encasetonada y estrellada).
- de Rincón, formada por la intersección de dos bóvedas de cañón.
- de Arista, formada por la intersección de dos bóvedas perpendiculares.
- Vahída, hemisferio cortado por cuatro planos verticales perpendiculares entre sí.
- Pechina, triángulo esférica que sirve de transición entre los arcos torales de una cúpula y las columnas de apoyo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

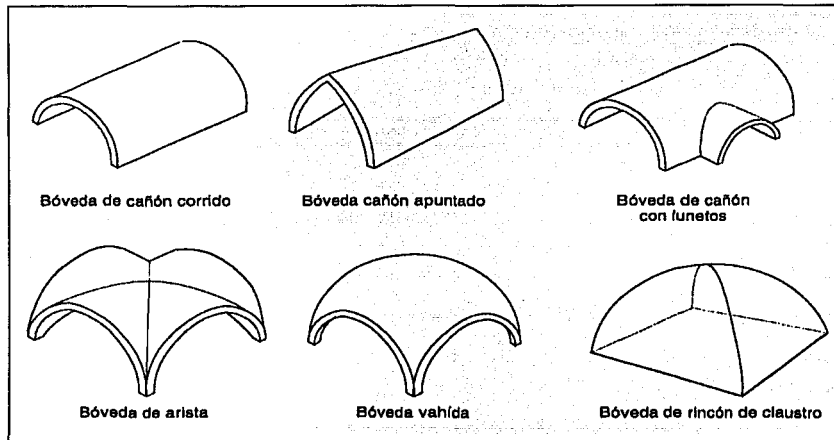


Fig. 24 Tipos de bóvedas.

II.3 Comportamiento de arcos y bóvedas.

Un arco, desde el punto de vista constructivo, es una estructura curva que cubre el espacio entre dos puntos de apoyo. Sin embargo, desde un punto de vista estructural, además de una configuración curva, un arco se caracteriza por ser un elemento que cargado verticalmente produce esfuerzos horizontales (coceos) en los arranques, a diferencia de una viga curva isostática. Debido a esto, es necesario considerar las condiciones de sustentación que se tengan, ya que de éstas dependerá el comportamiento y por consiguiente la forma del arco. El arco tradicional de piedra o ladrillo está formado por bloques dispuestos uno contra otro y sujetos por una tensión lateral. Esta estructura constructiva se utilizó para salvar una distancia mayor de lo que una sola pieza horizontal, o dintel, podía permitir. Desde el siglo XIX los arcos se han fabricado también de una sola pieza, gracias al empleo de nuevos materiales como hierro colado, acero o concreto reforzado.

Como ya se mencionó anteriormente, una particularidad del comportamiento del arco es el cocco, o sea el empuje horizontal que transmite a sus apoyos y tiende a voltearlos hacia afuera. Esto representa una situación crítica tanto para los apoyos (columnas o muros), como para el arco mismo que tiende a abrirse y puede perder estabilidad. La magnitud del cocco depende, además del peso del arco y de la sobrecarga que actúa sobre él, de la forma del mismo, y en particular de la relación entre su flecha y su claro.

Son muy pocos los casos en donde los arcos han fallado por el efecto solamente de la sobrecarga, sin que éste haya sido acompañado por el movimiento de los apoyos, ya sea por el propio cocco debido a la sobrecarga o por condiciones externas, como el asentamiento de la cimentación o movimientos sísmicos. La abertura de los apoyos provoca un patrón de agrietamiento característico que inicia por una grieta en la parte inferior del centro del arco (clave), y después por grietas en la parte superior, a la altura de los riñones. Estas grietas funcionan como articulaciones que permiten que el arco gire y se abra, sin que éste pierda su estabilidad; sin embargo, una apertura considerable puede ocasionar que se forme una articulación adicional en un punto intermedio (entre la clave y los riñones), lo cual llevaría a la estructura a perder su estabilidad y por consiguiente al colapso (fig. 25).

Al igual que en los arcos, el aspecto crítico para la estabilidad de las bóvedas es la rigidez de sus apoyos. Para esto, es necesario evitar el movimiento hacia afuera en toda la longitud de la bóveda, proporcionando apoyos continuos. Sin embargo, esta solución no permite el acceso y la iluminación a su interior. Por lo que en algunas construcciones, este problema se resolvió perforando los muros de los apoyos con arcos u otras aberturas, de manera que no afectaran significativamente su rigidez.

De esta forma, se han empleado un gran número de variantes de la bóveda cilíndrica, las cuales han dado lugar a diversas y monumentales formas arquitectónicas, así como a estructuras más eficientes desde el punto de vista estructural. Las bóvedas cruzadas o intersecadas dieron lugar a una cubierta con un trabajo propiamente tridimensional, cuya mayor rigidez le permite cubrir claros mucho mayores que con la bóveda simple. Estas variantes encontraron su más alto nivel de desarrollo en las cubiertas de las grandes iglesias góticas.

El ejemplo más simple de estas estructuras de intersección es la bóveda cuatripartita, la cual se puede visualizar como una estructura formada por arcos diagonales ubicados en las aristas de encuentro entre las formas cilíndricas. En dichos arcos de encuentro se concentran cargas elevadas, por lo que resultó natural engrosar esas partes y formar nervaduras, lo cual, a su vez, dio lugar a las bóvedas nervadas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

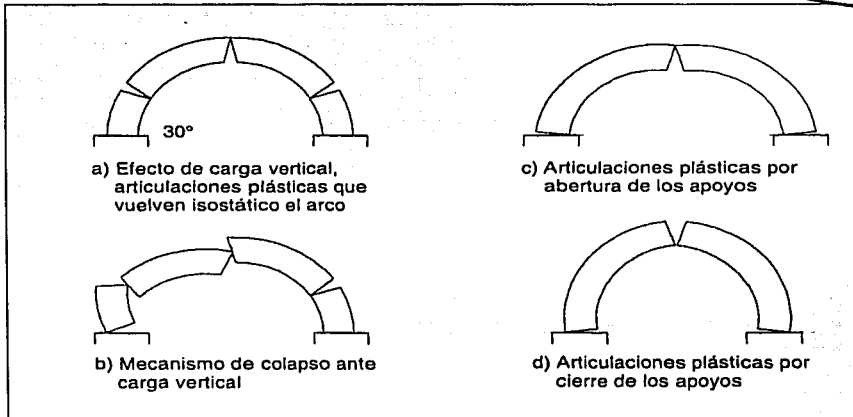


Fig. 25 Mecanismos de falla de un arco de medio punto.

II.4 Métodos de análisis en estructuras de mampostería.

Generalmente resulta sencillo determinar la trayectoria de las fuerzas en una estructura cuando ésta se puede representar como un modelo isostático, en el cual las condiciones de equilibrio son suficientes para determinar las reacciones. Resulta más complicado determinar las reacciones en una estructura hiperestática, ya que en este caso, éstas no se pueden obtener únicamente mediante las condiciones de equilibrio de la estática, sino que se requieren también condiciones de continuidad o de compatibilidad de deformaciones, así como la rigidez de la estructura.

Los arcos y las bóvedas son estructuras hiperestáticas cuando se restringe el desplazamiento o apertura en los apoyos, ya que los coseos o fuerzas horizontales que se producen en los arranques del arco no se pueden calcular simplemente con las condiciones de equilibrio.

Los métodos de análisis para estructuras hiperestáticas surgieron alrededor del siglo XVIII, y estaban basados en la aplicación de las condiciones de equilibrio, sin embargo,

contaban con algunas simplificaciones y restricciones en las posiciones de las fuerzas, con el fin de volver el problema estáticamente determinado.

Para el caso de arcos y bóvedas, el método más utilizado consistía en el trazo de la línea de presiones de la estructura, con lo que se definía la trayectoria de la resultante de esfuerzos internos a lo largo del elemento, y con ello las reacciones en los apoyos. Posteriormente, se utilizaron métodos elásticos de análisis, provenientes de la teoría de la elasticidad desarrollada en Francia en el siglo XVIII, en donde se considera que los materiales estructurales son elástico-lineales.

En realidad, el comportamiento de los materiales no es de esta forma, sin embargo, para algunos de ellos (acero, madera, entre otros) se pueden obtener buenas aproximaciones. En la mampostería las diferencias al considerarse dicho comportamiento suelen ser más radicales, principalmente porque su resistencia a esfuerzos de tensión es despreciable, por lo que se presentan agrietamientos que van a provocar deformaciones locales muy diferentes a las que presentaría un material elástico-lineal. Además, la variabilidad en las propiedades del material de una zona a otra altera significativamente la distribución de esfuerzos y el módulo de elasticidad en la estructura. Debido a esto, los resultados que se obtienen del cálculo de los esfuerzos y las deformaciones en una estructura de mampostería provenientes de un análisis elástico no suelen ser muy precisos, sobretodo si ésta está sujeta a cargas que induzcan flexiones significativas, sin embargo, pueden proporcionar aproximaciones importantes con relativa simplicidad, por lo que se siguen empleando actualmente.

A partir del siglo XX comenzaron a utilizarse distintos métodos numéricos de aproximaciones sucesivas para el análisis elástico de sistemas estructurales, los cuales tuvieron su auge cuando se pudo contar con equipos de cómputo capaces de realizar una gran cantidad de operaciones en poco tiempo.

De estos métodos el más utilizado es el del elemento finito, el cual consiste en discretizar la estructura en una serie de elementos tipo de los cuales se conocen sus propiedades mecánicas, además de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de deformación. Estos análisis implican la solución de una gran número de ecuaciones simultáneas.

II.5 Línea de presiones de un arco.

Las cargas verticales aplicadas al arco ya sea únicamente por el peso propio de la estructura o por una sobrecarga, se transmiten a los apoyos siguiendo una trayectoria que depende de la distribución de dichas cargas externas, de la geometría y del tipo de apoyo en el que esté sustentado el arco. A esta trayectoria de las fuerzas internas se le conoce como línea de presiones. Es decir, es la línea que une las partes por las que pasa la resultante de esfuerzos de compresión, a lo largo de todas las secciones del arco.

En el caso ideal, en donde la geometría del arco fuera tal que su directriz coincidiera con la línea de presiones, se presentaría un estado de esfuerzos de compresión pura, sin embargo, en la práctica esto no sucede debido a distintos factores tales como el cambio en la intensidad de las cargas, cambios de temperatura, movimiento en los apoyos, entre otros. Dichos factores ocasionan que la línea de presiones se separe del eje del arco una distancia

o excentricidad "e", lo cual generará flexión en las secciones así como fuerzas cortantes en la dirección de las juntas, además de las fuerzas axiales.

Esto puede traer muchos problemas a las estructuras de mampostería, ya que se pueden presentar esfuerzos de tensión en algunas zonas y provocar un agrietamiento, debido a que la mampostería tiene una resistencia muy baja (prácticamente nula) a este tipo de esfuerzos.

La línea de presiones de un arco se puede determinar de varias formas, ya sea de forma analítica o gráfica; una de estas últimas se muestra en el capítulo III.

III. ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE BÓVEDAS DE CAÑÓN CORRIDO.

A continuación se presenta un análisis del comportamiento estructural de una bóveda de cañón corrido. Para llevar a cabo dicho análisis, se utilizarán tres diferentes modelos que puedan representar tanto el comportamiento de la bóveda ante la apertura de sus apoyos, como ante las condiciones de carga que generalmente actúan sobre este tipo de estructuras.

La apertura en los apoyos va dar lugar a un patrón de agrietamiento característico que inicia con una grieta en la parte inferior del la clave y continua con grietas en la parte superior de los riñones. Estas grietas funcionan como articulaciones, que permiten que la bóveda gire y se abra, a pesar de que siga manteniendo su estabilidad. Sin embargo, si la apertura es considerable se puede formar una articulación adicional, entre los riñones y la clave, con la cual se perdería la estabilidad y en consecuencia se produciría el colapso. Cada uno de los tres modelos que se usarán en el análisis representa una fase de este patrón de agrietamiento:

- 1) Bóveda empotrada en sus dos extremos (fase inicial).
- 2) Bóveda con una articulación en el extremo superior (grieta en la clave).
- 3) Bóveda triarticulada (grietas en la clave y en los riñones).

Por otro lado, se plantearán las siguientes hipótesis sobre las condiciones que presentan este tipo de bóvedas, con el objetivo de simplificar la elaboración de los modelos:

- las bóvedas son estructuras cilíndricas corridas con una sección transversal constante.
- no se presentan fuerzas importantes en la dirección longitudinal de la estructura.
- los rellenos en los tímpanos tienen un peso elevado y proporcionan una gran rigidez a los extremos de la bóveda, por lo que los giros o desplazamientos angulares en las bases (uniones de la bóveda con las columnas y muros laterales), son muy pequeños, comparados con la variación del claro (de apertura o cierre) entre sus apoyos.
- no existen hundimientos diferenciales en la cimentación, ya que provocarían desplazamientos verticales desiguales en los apoyos.

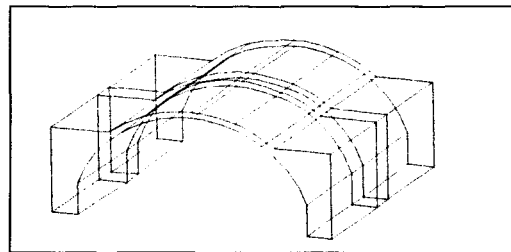


Fig. 26 Segmento de bóveda.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- el espesor de la bóveda es constante (en realidad, generalmente el espesor de la clave es ligeramente menor que el de los arranques).

Con base en estas hipótesis es posible analizar el comportamiento de toda la bóveda mediante el análisis de un solo segmento o arco, y obtener de esta forma resultados aproximados, sin tener que incluir todo el cuerpo de la estructura en el análisis (fig 26).

Para llevar a cabo los modelos se utilizará el método de flexibilidades.

ANÁLISIS CON
FALLA DE ORIGEN

III. 1 Modelos de flexibilidades

1) Bóveda empotrada.

En este caso se empleará como modelo un arco de medio punto empotrado en sus extremos. Debido a que se supuso un espesor constante, se aplicará una carga uniformemente repartida a lo largo de todo el arco. Para poder incluir en el modelo el peso de los tímpanos, se supondrá una carga vertical variable que abarque el sector de la bóveda definido por el ángulo α (fig. 27), desde el inicio del tímpano hasta el arranque del arco.

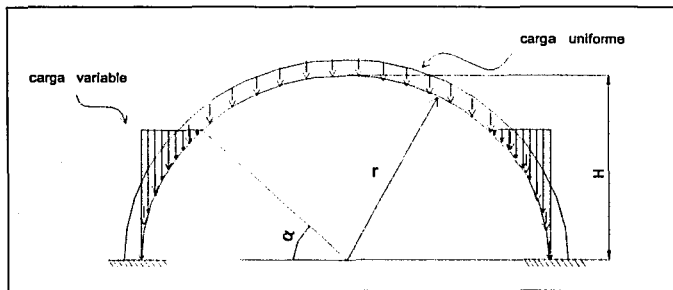


Fig. 27 Modelo.

Se puede ver que el modelo consta de 3 redundantes, es decir, que tiene una hiperestaticidad de tercer grado, por lo que habrá que obtener tres ecuaciones de equilibrio.

Para resolver este arco se utilizará el método de flexibilidades, en el cual la deformación en un punto se calcula, siguiendo el principio del trabajo virtual, aplicando una carga unitaria en dicho punto, e igualando el trabajo realizado por ésta (trabajo externo) con el trabajo interno de la estructura. Dicho trabajo interno lo efectúan, en cada tramo diferencial de longitud, la fuerza normal, el momento flexionante y la fuerza cortante que resultan de la condición de carga actuante sobre la estructura (Popov, 1997).

Para ilustrar lo anterior, en la fig. 28 se muestra la deformación en el punto A de un arco de medio punto, y posteriormente el valor que tiene dicha deformación.

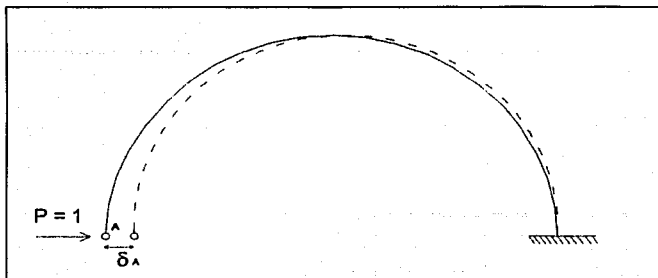


Fig. 28 Deformación en el punto A.

El valor de la deformación en el punto A es:

$$\delta_A = \int_0^l \frac{(Nn)dx}{EA} + \int_0^l \frac{(Mm)dx}{EI} + \int_0^l \frac{(kfVv)dx}{GA}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Sin embargo, para este caso se harán dos consideraciones:

- Las deformaciones ocasionadas por la fuerza normal y el momento flexionante son mayores que las provocadas por la fuerza cortante, por lo que éstas últimas se despreciarán al realizar el análisis.
- La integración se realizará a lo largo de un arco de circunferencia s , en donde para un tramo diferencial: $dx = ds = r * d\theta$.

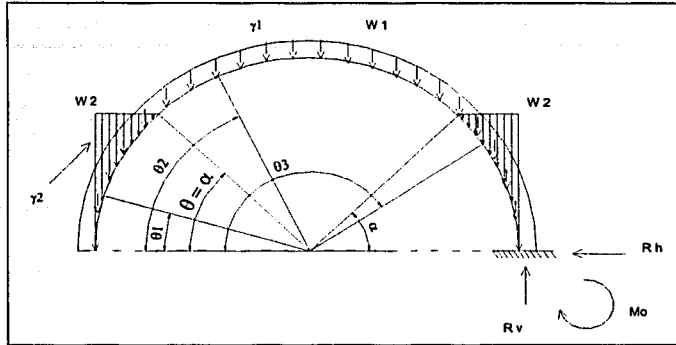
Por lo tanto, la deformación en el punto A, en este caso, será:

$$\delta_A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(Nn)rd\theta}{EA} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(Mm)rd\theta}{EI}$$

A continuación se muestra la resolución del arco:

Estado 0. Arco isostático fundamental.

Se eligió como isostática fundamental a un arco en voladizo de radio r , con una carga uniforme por peso propio w_1 y una carga variable w_2 (fig. 28-b).



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 28-b Arco isostático.

Para poder obtener los elementos mecánicos de este arco, es necesario dividirlo en tres tramos:

- primer tramo: de $\theta = 0$ a $\theta = \alpha$, es decir del arranque al final del tímpano.
- segundo tramo: de $\theta = \alpha$ a $\theta = \pi - \alpha$, es decir del final del primer tímpano al principio del segundo.
- tercer tramo: de $\theta = \pi - \alpha$ a $\theta = \pi$.

El valor del momento flexionante en cada uno de los tres tramos es :

$$Mx1 = -P_1(\theta) * \bar{x}_1(\theta) - P_2(\theta) * \bar{x}_2(\theta)$$

$$Mx2 = -P_1(\theta) * \bar{x}_1(\theta) - P_2 * [\bar{x}_2 + x_3(\theta)]$$

$$Mx3 = -P_1(\theta) * \bar{x}_1(\theta) - P_2 * [\bar{x}_2 + x_3(\theta)] - P_3(\theta) * \bar{x}_4(\theta)$$

en donde:

P_1 es el peso del arco; se obtiene multiplicando la carga uniformemente repartida por la longitud del arco a un determinado ángulo θ , es decir, $P_1 = w_1 r \theta$.

P_2 es el peso del primer tímpano; se obtiene multiplicando el volumen del prisma formado por el tímpano a un determinado ángulo θ por el peso volumétrico del material γ_2 , es decir, $P_2 = Vol(\theta) \gamma_2$.

P_3 es el peso del segundo tímpano; se obtiene igual que P_2 .

\bar{x}_1 es la distancia centroidal de P_1 a cualquier punto del arco, a un ángulo θ .

\bar{x}_2 es la distancia centroidal de P_2 a cualquier punto del primer tramo.

x_3 es la distancia del final del tímpano a cualquier punto en el segundo tramo.

x_4 es la distancia centroidal de P_3 a cualquier punto del tercer tramo.

Cabe señalar que todas estas magnitudes están en función del ángulo θ , y que en donde no aparecen como tales es debido a que para ese caso en particular son constantes; por ejemplo, en Mx_2 , P_2 no está en función de θ , ya que para el segundo tramo del arco, el peso del primer títmano va a permanecer constante, es decir, independiente de θ .

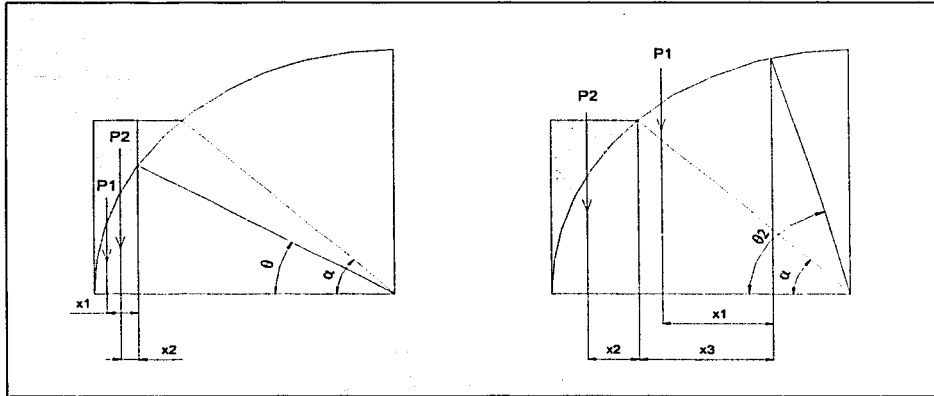


Fig. 29 Fuerzas P y distancias x para la determinación de los momentos flexionantes en los dos primeros tramos del arco.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Si se realizan las operaciones correspondientes al primer tramo del arco, las ecuaciones de los momentos flexionantes y fuerzas normales quedan de la siguiente forma (considerando que $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$):

$$Mx_1 = -r^2 w l \text{sen} \theta + r^2 w l \cos \theta - \frac{1}{2} r^3 b \gamma \text{sen} \alpha - \frac{1}{2} r^3 b \gamma \text{sen} \alpha \cos^2 \theta + \frac{1}{3} r^3 b \gamma \text{sen} \theta + \frac{1}{6} r^3 b \gamma \cos^2 \theta \text{sen} \theta + r^3 b \gamma \text{sen} \alpha \cos \theta - \frac{1}{2} r^3 b \gamma \theta \cos \theta$$

$$Nx_1 = -r^2 b \gamma \text{sen} \alpha \cos \theta + r^2 b \gamma \text{sen} \alpha \cos^2 \theta + \frac{1}{2} r^2 b \gamma \theta \cos \theta - \frac{1}{2} r^2 b \gamma \text{sen} \theta \cos^2 \theta - r w l \cos \theta$$

$$Vx_1 = -r^2 b \gamma \text{sen} \alpha \text{sen} \theta + r^2 b \gamma \text{sen} \alpha \cos \theta \text{sen} \theta - \frac{1}{2} r^2 b \gamma \cos \theta + \frac{1}{2} r^2 b \gamma \cos^3 \theta - r w l \theta \text{sen} \theta + \frac{1}{2} r^2 b \gamma \theta \text{sen} \theta$$

Las ecuaciones de las fuerzas internas para los otros dos tramos son muy similares.

Estado 1.

Se aplica una fuerza horizontal unitaria en sentido positivo.

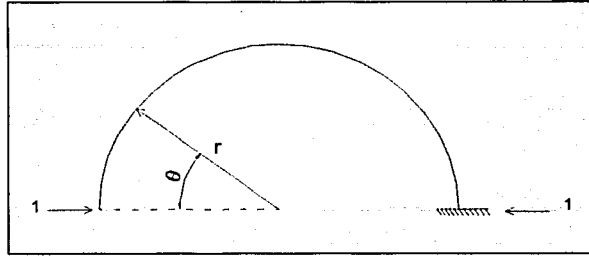


Fig. 30

Las fuerzas internas son:

$$m1 = -(1) * r \sin \theta = -r \sin \theta$$

$$v1 = -\cos \theta$$

$$n1 = \sin \theta$$

Estado 2.

Se aplica una fuerza vertical unitaria en sentido positivo.

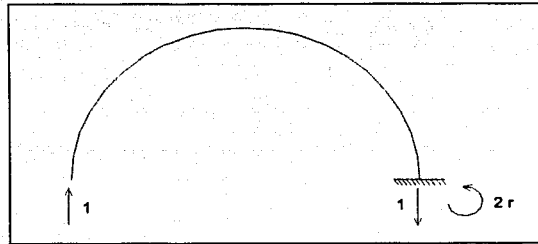


Fig. 31

$$m2 = 1(r - r \cos \theta) = r(1 - \cos \theta)$$

$$v2 = \sin \theta$$

$$n2 = \cos \theta$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Estado 3.

Se aplica un momento unitario en sentido positivo.

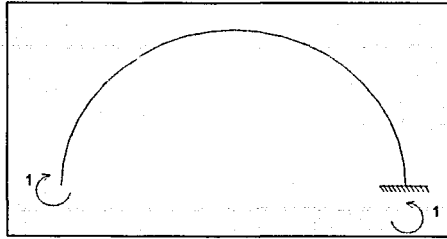


Fig. 32

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$m_3 = 1$$

$$v_3 = 0$$

$$n_3 = 0$$

Las deformaciones en el extremo del arco en voladizo, para la condición de carga que se presenta, son:

$$\delta_{01} = r \frac{r}{EA} \left(\int_0^{\alpha} (Nx_1 * n_1) d\theta + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (Nx_2 * n_1) d\theta + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} (Nx_3 * n_1) d\theta \right) + \frac{r}{EI} \left(\int_0^{\alpha} (Mx_1 * m_1) d\theta + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (Mx_2 * m_1) d\theta + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} (Mx_3 * m_1) d\theta \right)$$

$$\delta_{02} = r \frac{r}{EA} \left(\int_0^{\alpha} (Nx_1 * n_2) d\theta + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (Nx_2 * n_2) d\theta + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} (Nx_3 * n_2) d\theta \right) + \frac{r}{EI} \left(\int_0^{\alpha} (Mx_1 * m_2) d\theta + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (Mx_2 * m_2) d\theta + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} (Mx_3 * m_2) d\theta \right)$$

$$\delta_{03} = r \frac{r}{EA} \left(\int_0^{\alpha} (Nx_1 * n_3) d\theta + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (Nx_2 * n_3) d\theta + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} (Nx_3 * n_3) d\theta \right) + \frac{r}{EI} \left(\int_0^{\alpha} (Mx_1 * m_3) d\theta + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (Mx_2 * m_3) d\theta + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} (Mx_3 * m_3) d\theta \right)$$

Además:

$$f_{11} = \frac{r}{EA} \int_0^\pi (n1 * n1) d\theta + \frac{r}{EI} \int_0^\pi (m1 * m1) d\theta$$

$$f_{22} = \frac{r}{EA} \int_0^\pi (n2 * n2) d\theta + \frac{r}{EI} \int_0^\pi (m2 * m2) d\theta$$

$$f_{33} = \frac{r}{EA} \int_0^\pi (n3 * n3) d\theta + \frac{r}{EI} \int_0^\pi (m3 * m3) d\theta$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{r}{EA} \int_0^\pi (n1 * n2) d\theta + \frac{r}{EI} \int_0^\pi (m1 * m2) d\theta$$

$$f_{13} = f_{31} = \frac{r}{EA} \int_0^\pi (n1 * n3) d\theta + \frac{r}{EI} \int_0^\pi (m1 * m3) d\theta$$

$$f_{23} = f_{32} = \frac{r}{EA} \int_0^\pi (n2 * n3) d\theta + \frac{r}{EI} \int_0^\pi (m2 * m3) d\theta$$

Las tres ecuaciones de compatibilidad (equilibrio) son :

$$\delta_{01} + Hf_{11} + Vf_{12} + Mf_{13} = \delta x$$

$$\delta_{02} + Hf_{21} + Vf_{22} + Mf_{23} = 0$$

$$\delta_{03} + Hf_{31} + Vf_{32} + Mf_{33} = 0$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En donde H, V y M son la reacción horizontal, la reacción vertical y el momento de empotramiento, respectivamente. La primer ecuación no está igualada a cero, para que las reacciones en los apoyos estén en función del desplazamiento en x (apertura o cierre en los apoyos). Luego de resolver el sistema, se obtienen las reacciones: H, V y M del modelo, las cuales presentan, en su forma general, estructuras algebraicas muy extensas (ver anexo 1).

2) Bóveda con una articulación central.

Para este modelo se usarán las mismas consideraciones y condiciones de carga que en el anterior, y además se incluirá una articulación en la clave (fig. 33).

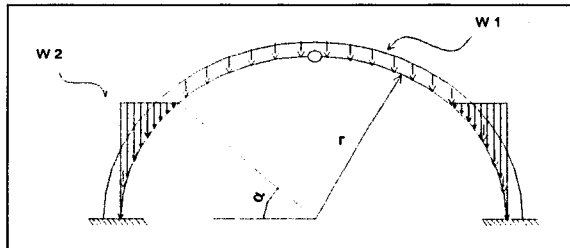
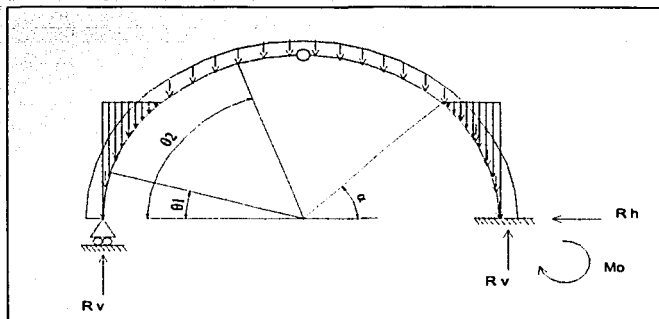


Fig. 33 Segundo modelo.

A diferencia del modelo anterior, en este caso se tiene una estructura de segundo grado de hiperestaticidad, por lo que habrá que obtener dos ecuaciones de equilibrio.

Estado 0. Isostática fundamental.

Para eliminar las dos redundantes, se colocó un apoyo libre con desplazamiento horizontal en lugar del empotramiento izquierdo (fig. 34).



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 34 Arco isostático

Los momentos flexionantes y las fuerzas normales para los dos primeros tramos, son las siguientes (considerando que $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$):

de $\theta = 0$ a $\theta = \alpha$:

$$Mx_1 = r^2 w_1 - r^2 w_1 \cos \theta - \frac{1}{3} r^3 b \gamma \text{sen} \alpha + \frac{5}{6} r^3 b \gamma \text{sen} \alpha \cos \theta - \frac{1}{6} r^3 b \gamma \text{sen} \alpha \cos^2 \alpha$$

$$+ \frac{1}{6} r^3 b \gamma \text{sen} \alpha \cos^2 \alpha \cos \theta - r^2 w_1 \text{sen} \theta + r^2 w_1 \theta \cos \theta - \frac{1}{2} r^3 b \gamma \text{sen} \alpha \cos^2 \theta + \frac{1}{3} r^3 b \gamma \text{sen} \theta$$

$$+ \frac{1}{6} r^3 b \gamma \cos^2 \theta \text{sen} \theta - \frac{1}{2} r^3 b \gamma \theta \cos \theta$$

$$Nx_1 = r w_1 \cos \theta - \frac{5}{6} r^2 b \gamma \text{sen} \alpha \cos \theta - \frac{1}{6} r^2 b \gamma \cos \theta \text{sen} \alpha \cos^2 \alpha - r w_1 \theta \cos \theta + r^2 b \gamma \cos^2 \theta \text{sen} \alpha$$

$$+ \frac{1}{2} r^2 b \gamma \theta \cos \theta - \frac{1}{2} r^2 b \gamma \cos^2 \theta \text{sen} \theta$$

de $\theta = \alpha$ a $\theta = \pi/2$ (la clave) :

$$Mx_2 = r^2 w_1 - r^2 w_1 \cos \theta + \frac{5}{6} r^3 b \gamma \text{sen} \alpha \cos \theta + \frac{1}{6} r^3 b \gamma \text{sen} \alpha \cos^2 \alpha \cos \theta - r^2 w_1 \text{sen} \theta + r^2 w_1 \theta \cos \theta$$

$$- \frac{1}{2} r^3 b \gamma \cos \theta \cos \alpha \text{sen} \alpha - \frac{1}{2} r^3 b \gamma \alpha \cos \theta$$

$$N_{x_2} = r w_1 \cos \theta - \frac{5}{6} r^2 b \gamma \operatorname{sen} \alpha \cos \theta - \frac{1}{6} r^2 b \gamma \cos \theta \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - r w_1 \theta \cos \theta$$

$$+ \frac{1}{2} r^2 b \gamma \cos \theta \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} r^2 b \gamma \alpha \cos \theta$$

Las ecuaciones para los otros dos tramos son iguales, debido a la simetría del arco.

Estado 1

Se aplica una fuerza unitaria horizontal en sentido positivo.

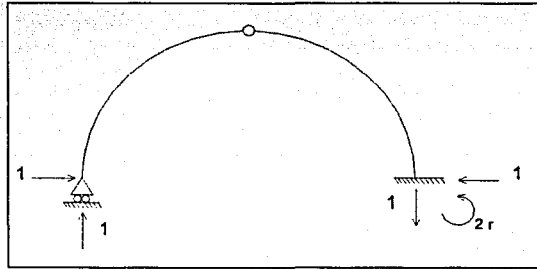


Fig. 35

Los elementos mecánicos son:

$$m1 = 1 * (r - r \cos \theta) - 1 * r \operatorname{sen} \theta = r(1 - \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$n1 = \cos \theta + \operatorname{sen} \theta$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Estado 2.

Se aplica un momento unitario en sentido positivo.

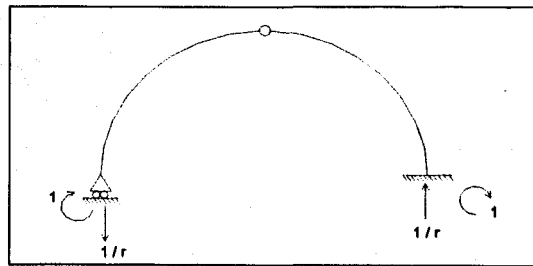


Fig. 36

$$m_2 = \frac{-1}{r}(r - r \cos \theta) + 1 = \cos \theta$$

$$n_2 = \frac{-\cos \theta}{r}$$

Siguiendo un procedimiento similar al del modelo pasado, se tiene que:

$$\delta_{01} = r \frac{r}{EA} \left(\int_0^{\alpha} (N_{x1} * n_1) d\theta + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (N_{x2} * n_1) d\theta \right) + \frac{r}{EI} \left(\int_0^{\alpha} (M_{x1} * m_1) d\theta + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (M_{x2} * m_1) d\theta \right)$$

$$\delta_{02} = r \frac{r}{EA} \left(\int_0^{\alpha} (N_{x1} * n_2) d\theta + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (N_{x2} * n_2) d\theta \right) + \frac{r}{EI} \left(\int_0^{\alpha} (M_{x1} * m_2) d\theta + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (M_{x2} * m_2) d\theta \right)$$

$$f_{11} = \frac{r}{EA} \int_0^{\pi} (n_1 * n_1) d\theta + \frac{r}{EI} \int_0^{\pi} (m_1 * m_1) d\theta$$

$$f_{22} = \frac{r}{EA} \int_0^{\pi} (n_2 * n_2) d\theta + \frac{r}{EI} \int_0^{\pi} (m_2 * m_2) d\theta$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{r}{EA} \int_0^{\pi} (n_1 * n_2) d\theta + \frac{r}{EI} \int_0^{\pi} (m_1 * m_2) d\theta$$

Las dos ecuaciones de equilibrio son:

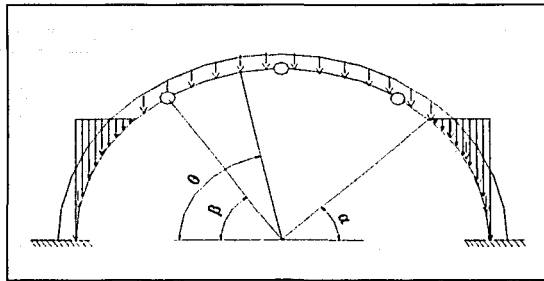
$$\delta_{01} + Hf_{11} + Mf_{12} = \delta x$$

$$\delta_{02} + Hf_{21} + Mf_{22} = 0$$

Los valores de H y M que resultan del sistema se encuentran en el anexo 1.

3) Bóveda triarticulada.

Para este modelo también se utilizarán las consideraciones que se emplearon en los otros dos, sin embargo, se incluirán, además de la articulación en la clave, otras dos en el área de los riñones a un ángulo β de la horizontal (fig. 37).



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 37 Modelo del arco triarticulado.

Se observa que este modelo es isostático, debido a la presencia de las tres articulaciones, por lo que bastarán las condiciones de equilibrio estático para obtener las reacciones.

Se va a realizar el análisis de la zona delimitada por las tres articulaciones, debido a que por el momento se va a suponer que en dicha zona se va a presentar la falla.

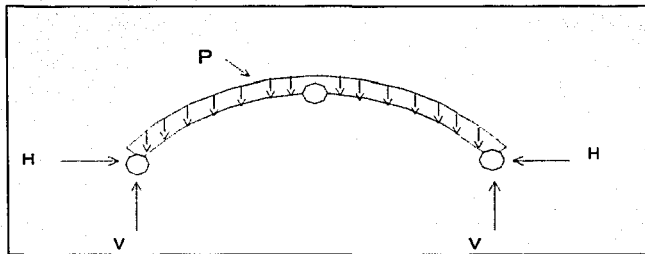


Fig. 38 Zona de análisis.

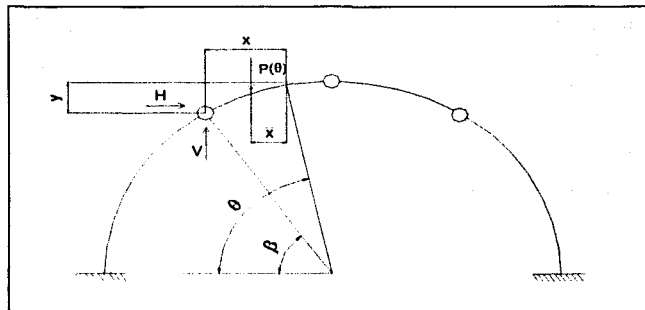


Fig. 39 Obtención de momentos a un ángulo θ .

Para poder obtener la fuerza horizontal H, se realiza la sumatoria de momentos con respecto a la articulación de la clave:

$$\sum M_o = V * r \cos \beta - H * r(1 - \text{sen}\beta) - P(\theta) * \bar{x}(\theta) = 0$$

En donde:

- V y H son las reacciones vertical y horizontal, respectivamente.
- β es el ángulo al que se encuentran las articulaciones en los riñones.
- P(θ) es el peso de la parte del arco comprendida entre la articulación en el riñón y un punto a un determinado ángulo θ ($P(\theta) = w_1 r \theta$);
- $\bar{x}(\theta)$ es la distancia centroidal sobre el eje horizontal del peso P(θ); también es función de θ .

$$\bar{x}(\theta) = \frac{2r \cos(\beta + \frac{\theta}{2}) \text{sen}(\frac{\theta}{2})}{\theta} - r \cos(\beta + \theta)$$

Se puede ver que si $\beta = 0$ y $\theta = \pi/2$, $\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$, valor que corresponde al centroide de un cuarto de circunferencia.

Para este caso, se requiere obtener el peso y la distancia centroidal del tramo completo entre las dos articulaciones por lo que: $\theta = \frac{\pi}{2} - \beta$

Los valores de V y H, resultan:

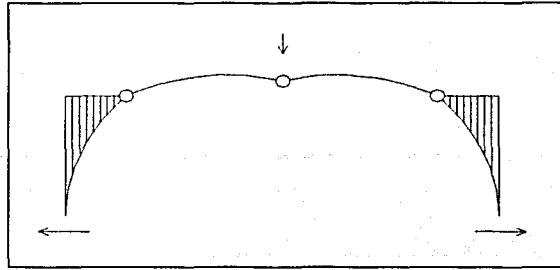
$$V = \frac{P}{2} = \frac{1}{2} w_1 r (\pi - 2\beta)$$

$$H = -\frac{1}{2} w_1 r \left[\frac{(\cos \beta)\pi - (2 \cos \beta)\beta - 2 + 2 \text{sen}\beta}{\text{sen}\beta - 1} \right]$$

Estos valores, corresponden a una condición en la cual la bóveda conserva su forma inicial, es decir, la de una circunferencia; sin embargo, esto rara vez ocurre, ya que ante la presencia de desplazamientos en los apoyos, la estructura va a deformarse cambiándose así la geometría inicial.

Debido a la suposición de que los apoyos son elementos rígidos que no giran y su desplazamiento es únicamente en dirección horizontal, se puede considerar que las articulaciones en los riñones siguen la misma trayectoria, es decir, que su apertura tiene la misma dirección y magnitud que la de los apoyos.

Además, en consecuencia de dicha apertura, en la parte central de la bóveda se presentará un desplazamiento vertical en la clave, como se muestra en la figura 40.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Fig. 40 Cambio en la geometría por la apertura de los apoyos.

Para poder calcular las reacciones así como las fuerzas internas, ante esta condición, se requiere calcular una nueva distancia centroidal, la cual dependerá, además del ángulo θ , del giro λ que tenga la zona central de la bóveda.

La relación del ángulo λ con el ángulo β y el desplazamiento $2x$ de los apoyos es la siguiente:

$$\lambda = -\text{ang} \tan \left(\frac{\text{sen} \beta - 1}{\cos \beta} \right) - \text{ang} \tan \left(\frac{\sqrt{2r^2 - 2r^2 \text{sen} \beta - r^2 \cos^2 \beta - x^2} - 2xr \cos \beta}{x + r \cos \beta} \right)$$

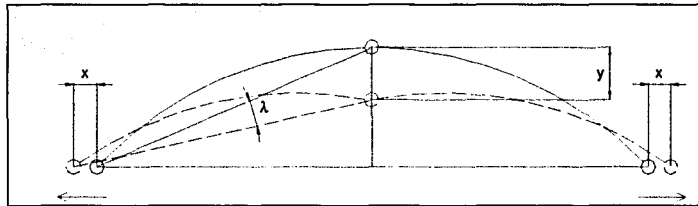


Fig. 41 Ángulo λ que gira el tramo de bóveda entre las dos articulaciones.

Considerando estos cambios en la geometría, se tiene que el valor del empuje es:

$$H_{\alpha} = -\frac{1}{2} w_l r \left[\frac{(2\beta - \pi) \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \beta + (\pi - 2) \cos \lambda \cos \beta - 4 \cos^2 \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \lambda}{\cos \lambda (\operatorname{sen} \beta - 1) + \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \beta} + \frac{4 \operatorname{sen} \lambda \cos \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\right]$$

Para el caso en donde $\lambda=0$, es decir, que la parte central de la bóveda no gira, el valor de H_{α} resulta ser igual a H.

Cabe señalar que el valor de V no cambia ante la apertura de los apoyos, debido a que el peso permanece constante, a pesar de los cambios en la geometría. Las ecuaciones de las fuerzas y momentos internos: M_x , N_x y V_x se encuentran en el anexo 1.

III. 2 Comportamiento bajo distintas cargas en los tímpanos.

A continuación se realizará el análisis para tres diferentes condiciones de carga sobre los tímpanos de una bóveda, con el fin de observar la influencia que tiene la intensidad de dicha carga en el comportamiento de la estructura. Se analizarán los casos para $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ y $\alpha = 90^\circ$, en los cuales se usarán valores promedio tanto en la geometría como en las propiedades de la mampostería de templos de una nave del siglo XVI. Estos valores son los siguientes:

- claro de la bóveda: 12 m (radio = 6m)
- espesor: 50 cm
- ancho: 1m (unitario)
- peso volumétrico γ : 1800 kg/cm^2
- módulo de elasticidad E: 20 000 kg/cm^2

III. 2.1 Bóveda de cañón corrido sin carga en los tímpanos $\alpha = 0$.

Un caso particular de una bóveda de cañón es cuando ésta no presenta carga en los tímpanos, y solamente está sujeta a su propio peso. Se trata de un caso ideal debido a que este tipo de estructuras no se realizaron con frecuencia en templos de una sola nave, durante la colonia.

A) Bóveda empuotrada.

Para este caso los valores de la reacción vertical, el empuje horizontal y el momento en los apoyos son los siguientes:

$$V_0 = \frac{1}{2} \pi r w_1$$

$$H_0 = \frac{1}{2} r w_1 \left[\frac{32r^2 EA - \pi^2 EI - 3\pi^2 r^2 EA}{\pi^2 r^2 EA - 8r^2 EA + \pi^2 EI} \right] + \frac{2\pi \delta x EA EI}{\pi^2 r^2 EA - 8r^2 EA + \pi^2 EI}$$

$$M_0 = \frac{1}{2} r^2 \pi w_1 \left[\frac{6EI - \pi^2 EI + 10r^2 EA - r^2 \pi^2 EA}{\pi^2 r^2 EA - 8r^2 EA + \pi^2 EI} \right] + \frac{4\delta x EA EI}{\pi^2 r^2 EA - 8r^2 EA + \pi^2 EI}$$

Si no hay apertura o cierre en los apoyos ($\delta x = 0$), entonces la fuerza horizontal es:

$$H_0 = \frac{1}{2} r w_1 \left[\frac{32r^2 EA - \pi^2 EI - 3\pi^2 r^2 EA}{\pi^2 r^2 EA - 8r^2 EA + \pi^2 EI} \right]$$

$$H_0 = \frac{1}{2} r w_1 A \quad \text{donde:} \quad A = \frac{32r^2 EA - \pi^2 EI - 3\pi^2 r^2 EA}{\pi^2 r^2 EA - 8r^2 EA + \pi^2 EI}$$

Para una sección transversal rectangular:

$$A_{rect} = \frac{28.7 \left(\frac{r}{h} \right)^2 - \pi^2}{22.4 \left(\frac{r}{h} \right)^2 + \pi^2}, \quad \text{Sin embargo, si } \frac{r}{h} \geq 13, \quad A \approx 1.28$$

Además, como: $w_1 = \gamma_1 b h$; en donde b y h son el ancho y el peralte de la sección transversal, respectivamente, y γ_1 el peso volumétrico del material con el que está hecho el arco. Entonces, el empuje horizontal para un arco de sección rectangular sin carga en los tímpanos se reduce a:

$$H_0 = 0.64 r \gamma_1 b h$$

Para una sección circular:

$$H_0 = \frac{1}{2} r \gamma_1 \pi R^2 A_{cir} \quad \text{donde:} \quad A_{cir} = \frac{9.56 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \pi^2}{7.48 \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \pi^2}$$

donde: r es el radio de la estructura y R el de la sección transversal.

Conociendo el valor de las reacciones es posible obtener las fuerzas internas de la estructura, en función del ángulo θ .

Luego de realizar algunas operaciones, las ecuaciones para obtener el momento flexionante y la fuerza normal, en cualquier parte del arco, cuando $\delta x = 0$, son:

$$Mx_0 = 3240000\theta \cos\theta - 5089380 \cos\theta - 5300703 \operatorname{sen}\theta + 5437181$$

$$Nx_0 = 3434.51 \operatorname{sen}\theta + 8482.30 \cos\theta - 5400\theta \cos\theta$$

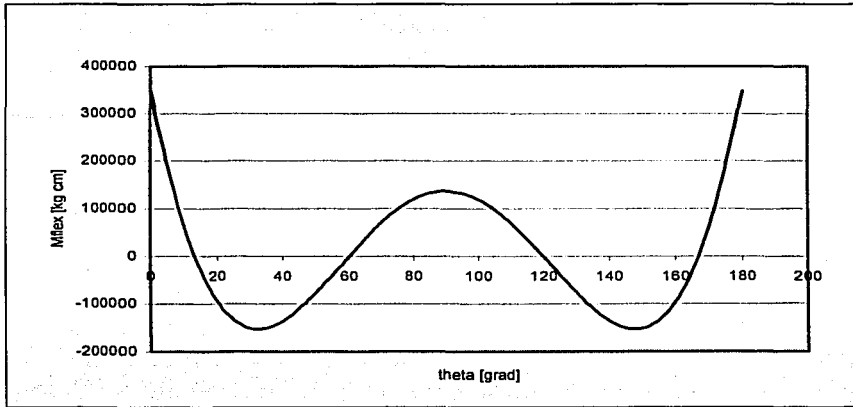


Fig. 41 Momentos flexionantes cuando $\alpha = 0$ y $\delta x = 0$.

La variación del momento flexionante y de la fuerza normal, a lo largo de todo el arco, se muestran en las figuras 41 y 42, respectivamente.

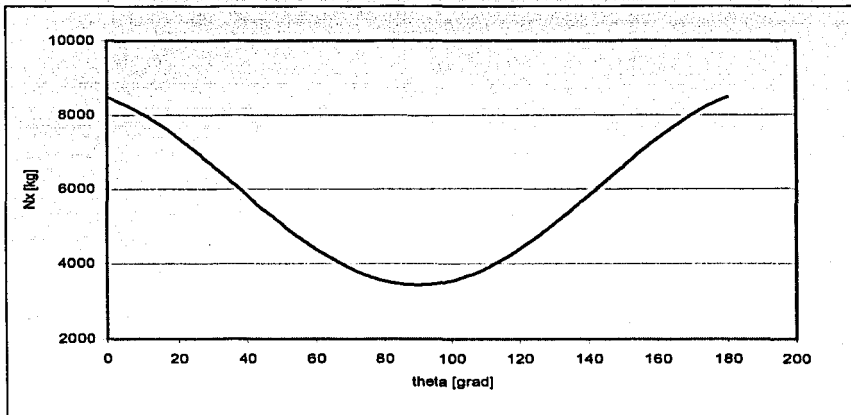
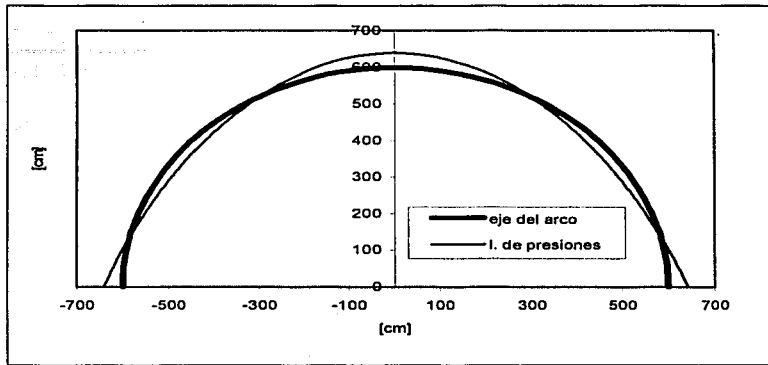


Fig. 42 Fuerza normal cuando $\alpha = 0$ y $\delta x = 0$.

Ahora, la resultante de todos los esfuerzos normales que actúan sobre la sección transversal (línea de presiones), ocasionados por la fuerza normal y los momentos flexionantes, va a tener una excentricidad "e" del eje de la sección; dicha excentricidad vale: $e = M_x / N_x$



TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Fig. 43 Línea de presiones del arco.

Se puede ver que la línea de presiones pasa por encima del eje de la sección tanto en los arranques como en la clave, lo cual podría ocasionar que se generaren tensiones en la parte inferior del arco (intradós), si la excentricidad rebasa cierto valor. En la zona de los riñones, la línea de presiones pasa por debajo del eje, por lo que las tensiones se presentarían en el extradós. La trayectoria de la línea de presiones que se muestra en la figura 43 es característica para arcos y bóvedas de medio punto, cuando no se presentan desplazamientos en los apoyos. Sin embargo, cuando estos se presentan, la estructura va a deformarse, ocasionándose una redistribución de esfuerzos, y en consecuencia un cambio en la trayectoria de la resultante de esfuerzos o línea de presiones, como se puede ver en las figuras 44 y 45.

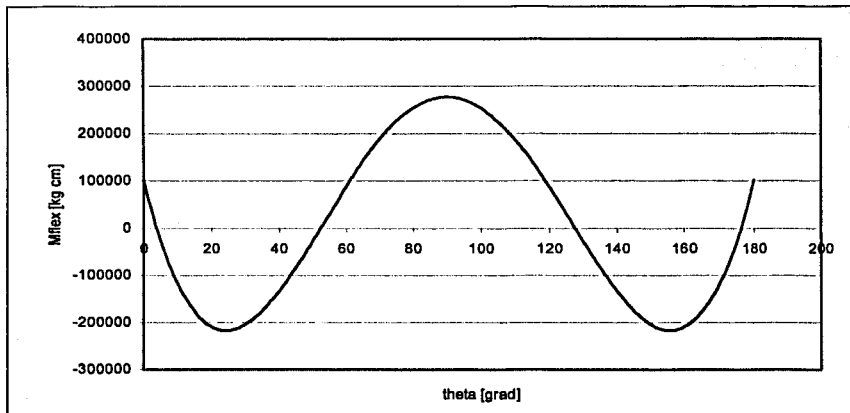


Fig. 44 Momentos flexionantes con $\Delta x = -2\text{cm}$ (apertura).

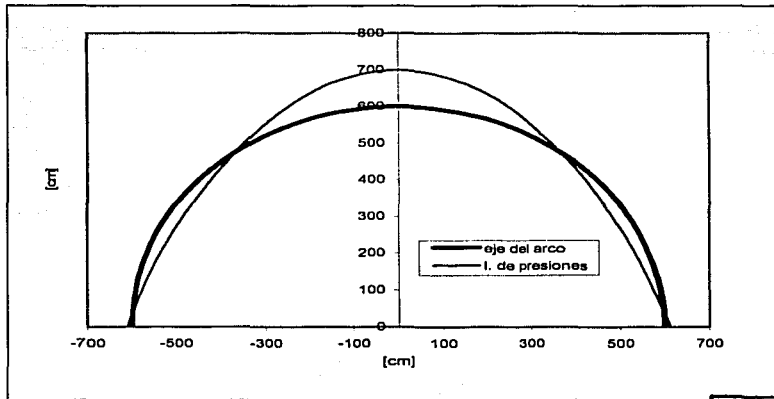


Fig.45 Línea de presiones con con $\delta x = -2\text{cm}$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Se observa que ante una apertura en los apoyos relativamente pequeña $\delta x = -2\text{cm}$ (0.17% del claro), hay un cambio considerable en el comportamiento de la estructura; los momentos flexionantes disminuyen su valor en los arranques y aumentan en la clave, provocando que la excentricidad en este sitio también aumente. Para el caso en el que se presenta un cierre en los apoyos, $\delta x = 2\text{cm}$, el comportamiento es distinto, como se aprecia en las figuras 46 y 47 .

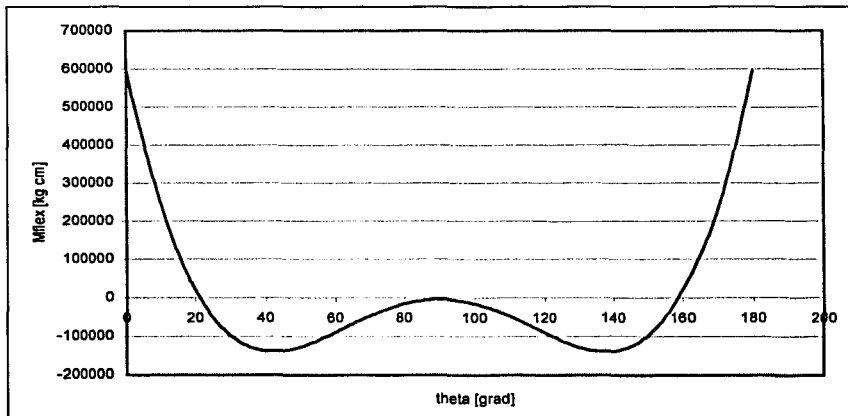


Fig. 46 Momentos flexionantes con $\delta x = 2\text{cm}$ (cierre).

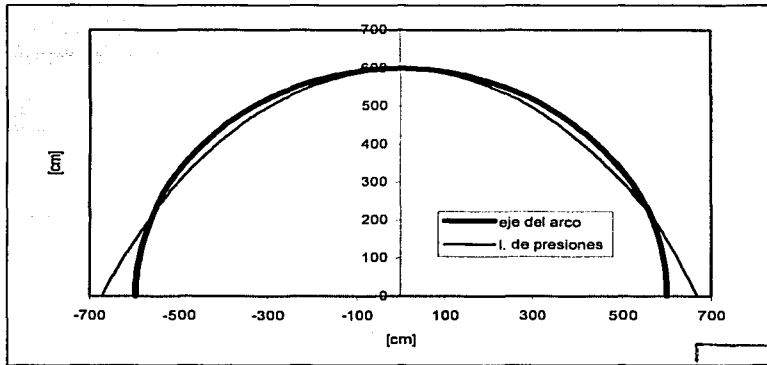


Fig. 47 Línea de presiones con $\delta x = 2$ cm.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En la tabla 6 se muestran las excentricidades máximas para los tres casos analizados:

Tabla 6.

Zona del arco	$\delta x = 0$ cm	$\delta x = -2$ cm (apertura)	$\delta x = 2$ cm (cierre)
Arranques	41.00	11.90	70.11
Riñones	24.27	32.74	23.44
clave	39.74	99.50	1.09

B) Bóveda con articulación en la clave.

Para este caso los valores de la reacción vertical, el empuje horizontal y el momento son:

$$V_0 = \frac{1}{2} \pi r w_1$$

$$H_0 = \frac{1}{2} r w_1 \left[\frac{24r^2 EA - \pi EI - 7\pi r^2 EA}{3\pi r^2 EA - 8r^2 EA + \pi EI} \right]$$

$$M_0 = \frac{1}{2} r^2 w_1 \left[\frac{\pi EI - \pi^2 EI + 8r^2 EA - 3r^2 \pi^2 EA + 7r^2 \pi EA}{3\pi r^2 EA - 8r^2 EA + \pi EI} \right]$$

Para una sección rectangular, en el caso de que no haya desplazamiento en los apoyos, la expresión para el empuje horizontal queda:

$$H_0 = 0.705r\gamma_1bh \quad \text{cuando: } \frac{r}{h} \geq 10$$

Para una sección transversal circular de radio R:

$$H_0 = 0.705r\gamma_1\pi R^2 \quad \text{cuando: } \frac{r}{h} \geq 18$$

Tanto los momentos flexionantes como la trayectoria de la línea de presiones van a tener una distribución similar a la del caso anterior; sin embargo, su valor en la clave va a ser nulo debido a la presencia de la articulación.

C) Bóveda triarticulada.

Para este modelo se va a considerar que $\beta=45^\circ$, es decir, que las articulaciones en los riñones están a 45° de la horizontal. Además, el ángulo θ se medirá a partir de la articulación del riñón izquierdo, y no desde la horizontal.

De acuerdo con ésto, la variación de los momentos flexionantes y la excentricidad de la línea de presiones se ilustran en las figuras 48 y 49.

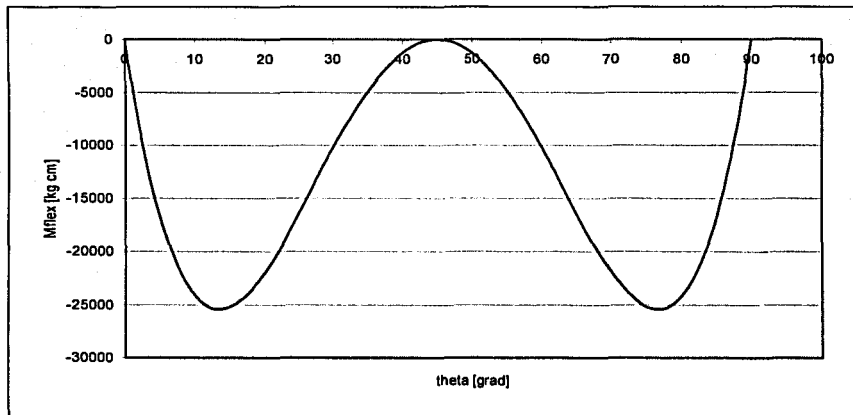


Fig. 48 Momentos flexionantes con $\beta=45^\circ$ y $\lambda=0$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

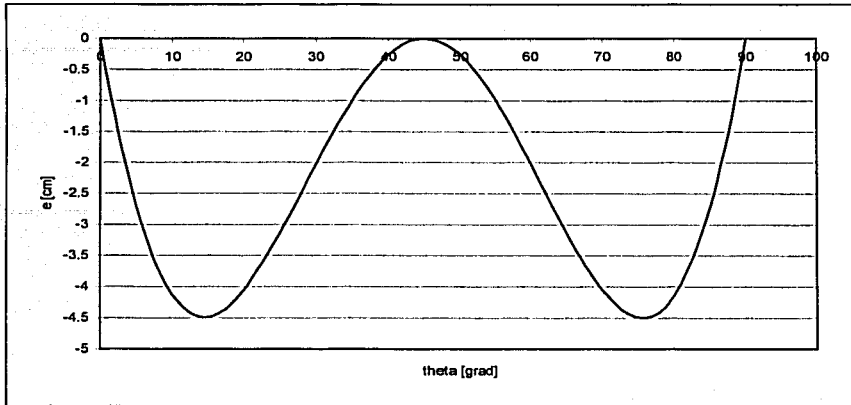


Fig. 49 Excentricidad de la línea de presiones con $\beta=45^\circ$ y $\lambda=0$.

En este modelo los desplazamientos en los apoyos no ocasionan variaciones considerables en el valor de la excentricidad, como se muestra en las figuras 50 y 51, a diferencia de los modelos pasados.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

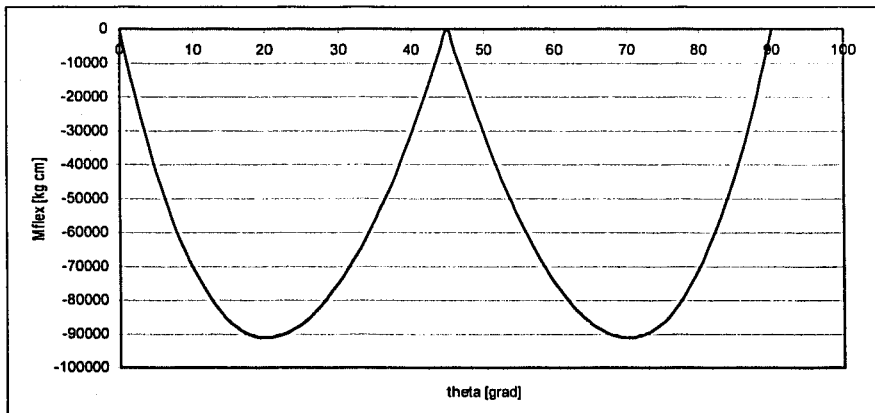


Fig. 50 Momentos flexionantes para $\beta=45^\circ$ y $\lambda=3.5^\circ$, es decir, una apertura de $\delta x = 20$ cm.

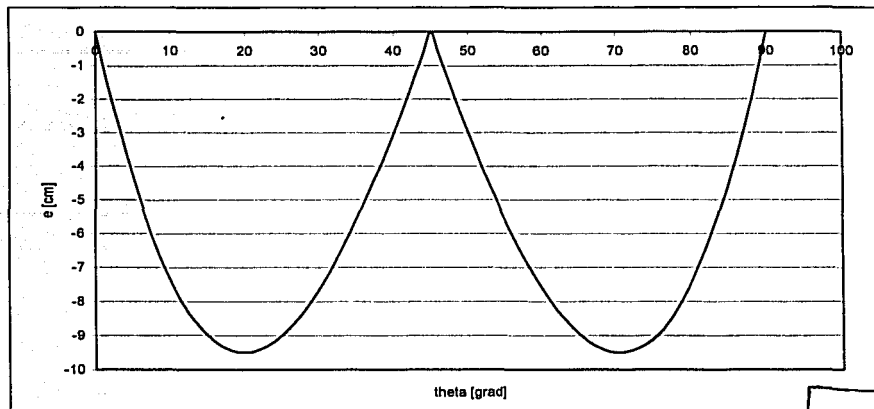


Fig. 51 Excentricidad de la línea de presiones para $\beta=45^\circ$ y $\lambda=3.5^\circ$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Cabe señalar que para este caso los valores de momento y de excentricidad resultan negativos, debido a que la línea de presiones va a pasar por debajo del eje del arco, por lo que las fuerzas de tensión ocurrirán en el extradós y las de compresión en el intradós.

III. 2.2 Bóveda de cañón corrido con carga en los tímpanos $\alpha=45^\circ$.

Otro caso particular de las bóvedas de cañón corrido, es cuando éstas presentan carga en los tímpanos hasta la zona de los riñones (la cual, generalmente, se encuentra a un ángulo que fluctúa entre los 35° y 55° , medidos desde la horizontal). Este tipo de bóvedas fueron las más utilizadas por los constructores de la época colonial, debido a algunas ventajas que se mencionarán posteriormente.

A) Bóveda empotrada.

Para este caso los valores de la reacción vertical y el empuje horizontal son los siguientes:

$$V_{45} = \frac{rby}{8} (4\pi h + 4\sqrt{2}r - 2r - \pi r)$$

$$H_{45} = \frac{rby}{144} \left(\frac{EA(C1r^3 + C2hr^2) - EI(C3r + C4h)}{EI\pi^2 + EA(\pi^2 r^2 - 8r^2)} \right)$$

donde C1, C2, C3 y C4 son cuatro constantes cuyos valores son:
 $C1=1.464$; $C2=172.165$; $C3=9.241$; $C4=710.612$

La ecuación para obtener el momento en los apoyos se encuentra en el anexo 2.

La línea de presiones y los momentos flexionantes, para este caso, siguen un comportamiento similar al anterior, es decir, al caso en el que $\alpha = 0^\circ$; sin embargo, las excentricidades van a disminuir a lo largo de todo el arco, debido a la carga en los tímpanos, como puede apreciarse en las figuras 52 y 53.

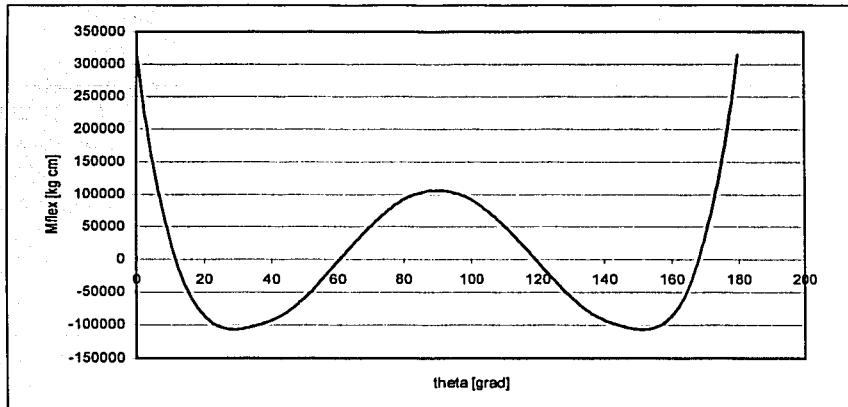


Fig. 52 Momentos flexionantes para $\alpha = 45^\circ$ y $\delta x = 0$ cm.

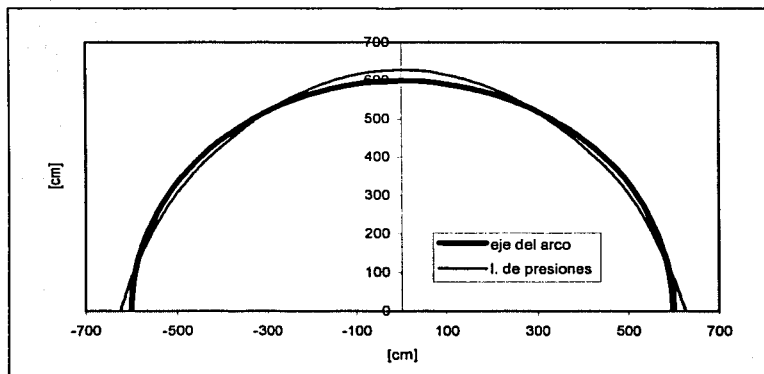


Fig. 53 Línea de presiones $\alpha = 45^\circ$ y $\delta x = 0$ cm.

Al presentarse un desplazamiento en los apoyos las fuerzas internas van a cambiar y por consiguiente la línea de presiones.

En las figuras 54 y 55 se muestran, respectivamente, el diagrama de momentos flexionantes y la línea de presiones ante una apertura de 2 cm. Se puede observar que, ante dicha apertura, en la clave se presenta un incremento en el momento, y por consiguiente en la excentricidad.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

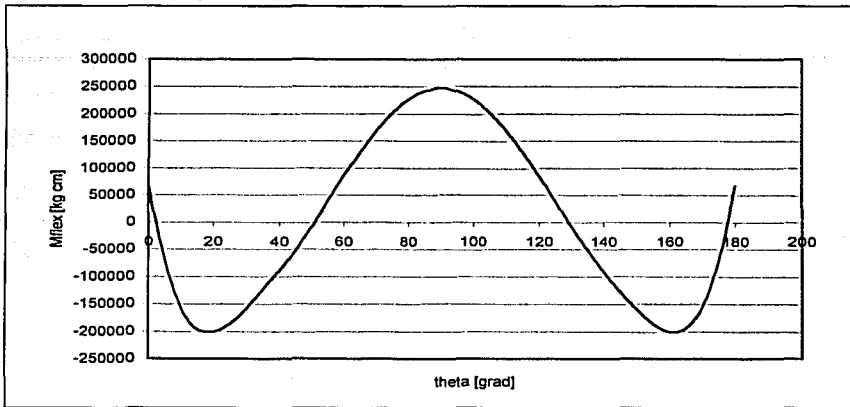


Fig. 54 Momentos flexionantes para $\alpha = 45^\circ$ y $\delta x = -2\text{cm}$ (apertura).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

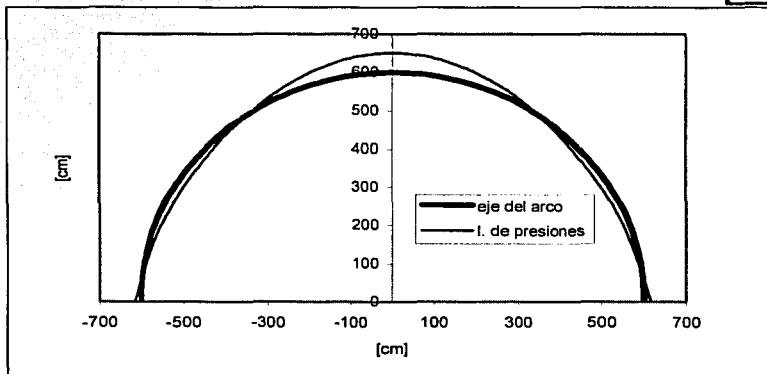


Fig. 55 Línea de presiones $\alpha = 45^\circ$ y $\delta x = -2\text{ cm}$.

En la tabla 7 se muestran los valores máximos de excentricidad para este caso:

Tabla 7. Valores máximos de excentricidad

Zona del arco	$\delta x = 0\text{ cm}$	$\delta x = -2\text{ cm}$ (apertura)	$\delta x = 2\text{ cm}$ (cierre)
Arranques	24.84	5.34	44.35
Riñones	15.16	22.38	18.83
clave	28.06	78.75	7.83

B) Bóveda con una articulación en la clave.

Para este caso los valores de la reacción vertical y del empuje horizontal son los siguientes:

$$V_{45} = \frac{rb\gamma}{8} (4\pi h + 4\sqrt{2}r - 2r - \pi r)$$
$$H_{45} = \frac{rb\gamma}{144} \left(\frac{EA(C1r^3 + C2hr^2) - EI(C3r + C4h)}{EI\pi + EA(3\pi^2 - 8r^2)} \right)$$

donde C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son constantes, cuyo valor es:
 $C_1=0.855$; $C_2=144.637$; $C_3=2.942$; $C_4=226.195$.

C) Bóveda triarticulada.

Para este caso, en donde $\alpha = 45^\circ$, el modelo de una bóveda con tres articulaciones va a ser semejante al del caso anterior, en donde $\alpha = 0^\circ$, ya que para el modelo triarticulado también se eligió un ángulo β de 45° , debido a que generalmente las articulaciones se forman en esta posición.

III. 2.3 Bóveda de cañón corrido con carga en los tímpanos $\alpha=90^\circ$.

Por último, se revisará el comportamiento de las bóvedas de cañón corrido que presentan una terraza plana en el extradós, es decir, cuando los tímpanos llegan hasta la clave. Este tipo de bóvedas también fueron utilizadas con frecuencia por los constructores de la colonia, sobre todo en los primeros templos techados completamente con bóvedas.

A) Bóveda empotrada.

Para este caso, los valores de la fuerza vertical y del empuje horizontal son:

$$V_{90} = \frac{rb\gamma}{4} (2h\pi + 4r - r\pi)$$
$$H_{90} = \frac{rb\gamma}{72} \left(\frac{EA(C1r^3 + C2hr^2) - EI(C3r + C4h)}{EI\pi^2 + EA(\pi^2 r^2 - 8r^2)} \right)$$

donde: C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son:
 $C_1=-436.602$; $C_2=86.083$; $C_3=35.114$; $C_4=355.306$

El valor para el momento se encuentra en el anexo 2.

La distribución de momentos va a presentar algunas diferencias con respecto a los casos anteriores, debido a la acción de una mayor carga sobre la bóveda.

En la figura 56 se puede ver como el valor del momento aumenta en los arranques y disminuye en la clave.

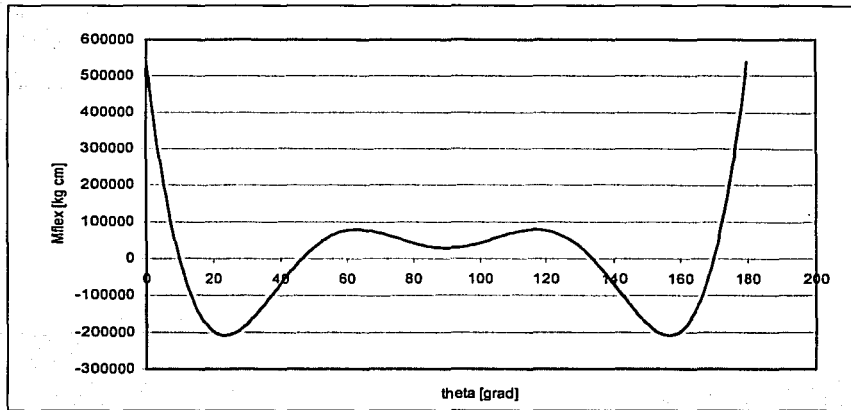


Fig. 56 Momentos flexionantes para $\alpha = 90^\circ$ y $\delta x = 0$ cm (apertura).

Por su parte, la línea de presiones va a presentar menores excentricidades, como se muestra en la figura 57.

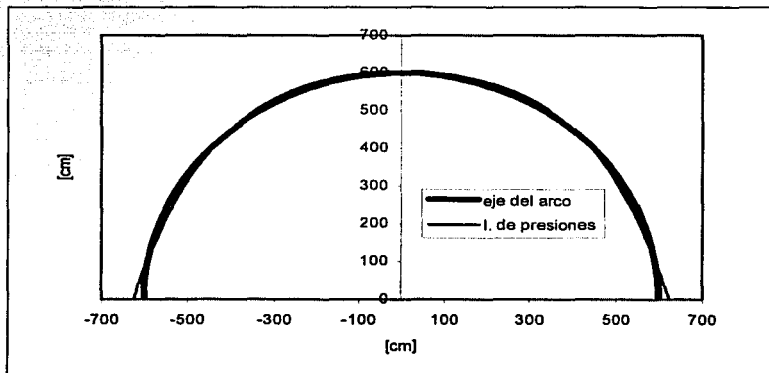


Fig. 57 Línea de presiones $\alpha = 90^\circ$ y $\delta x = 0$ cm.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Si ahora se considera una apertura de 2 cm, como en los dos casos anteriores, el valor del momento en los arranques disminuirá, aproximadamente, de 5×10^5 kg-cm a 3×10^5 kg-cm. Sin embargo, aumentará tanto en los riñones como en la clave, como se muestra en la figura 58.

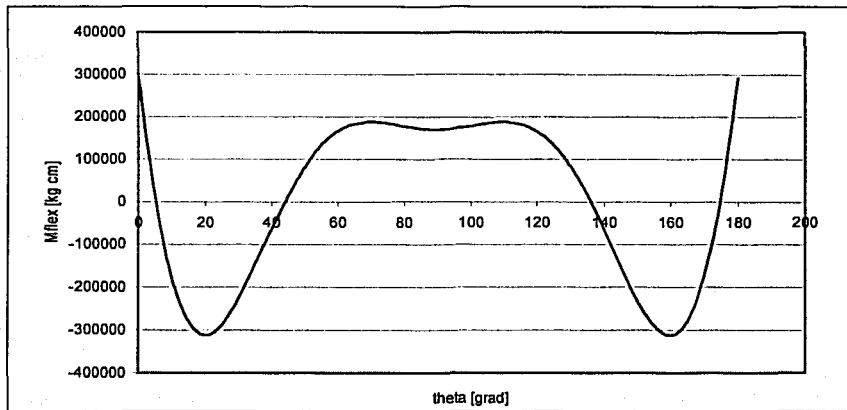


Fig. 58 Momentos flexionantes para $\alpha = 90^\circ$ y $\delta x = -2$ cm (apertura).

Con esta distribución de momentos, la línea de presiones adquiere la forma que se presenta en la figura 59. Es importante señalar que a partir de la línea de presiones de un arco se determina la excentricidad de la fuerza normal a lo largo de una bóveda.

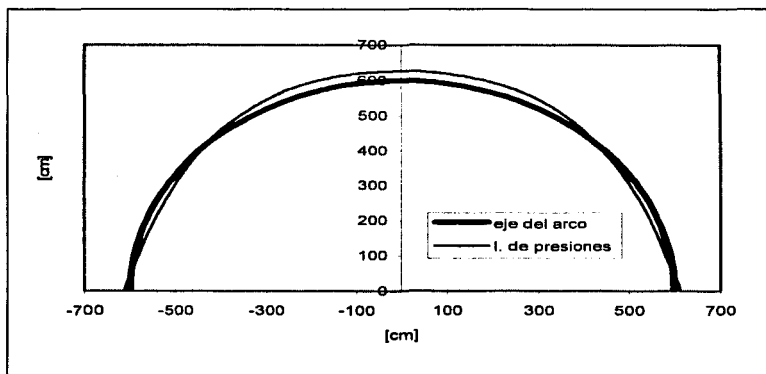


Fig. 59 Línea de presiones $\alpha = 90^\circ$ y $\delta x = -2$ cm.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Las excentricidades máximas en este caso se muestran en la tabla 8:

Tabla 8. Excentricidades máximas.

Zona del arco	$\delta x = 0$ cm	$\delta x = -2$ cm (apertura)	$\delta x = 2$ cm (cierre)
Arranques	24.08	13.06	35.11
Riñones	12.07	17.26	7.88
clave	4.13	26.6	14.55

B) Bóveda con articulación en la clave.

En este caso, la reacción vertical y el empuje horizontal en los apoyos son:

$$V_{90} = \frac{rby}{4} (2h\pi + 4r - r\pi)$$

$$H_{90} = \frac{rby}{72} \left(\frac{EA(C1r^3 + C2hr^2) - EI(C3r + C4h)}{EI\pi^2 + EA(\pi^2r^2 - 8r^2)} \right)$$

donde: C1= 5.265; C2=72.318; C3=11.177 y C4=113.097

Finalmente, para tener una visión general acerca de la influencia del peso de los tímpanos, se van a comparar los momentos flexionantes y las excentricidades obtenidas para los tres casos de carga en los tímpanos que fueron analizados.

En la figura 60 se puede ver que en la clave ($\theta = 90^\circ$) el valor máximo de momento flexionante, se presenta cuando $\alpha = 0^\circ$. Y que tanto en los riñones como en los arranques, los valores máximos se presentan cuando $\alpha = 90^\circ$.

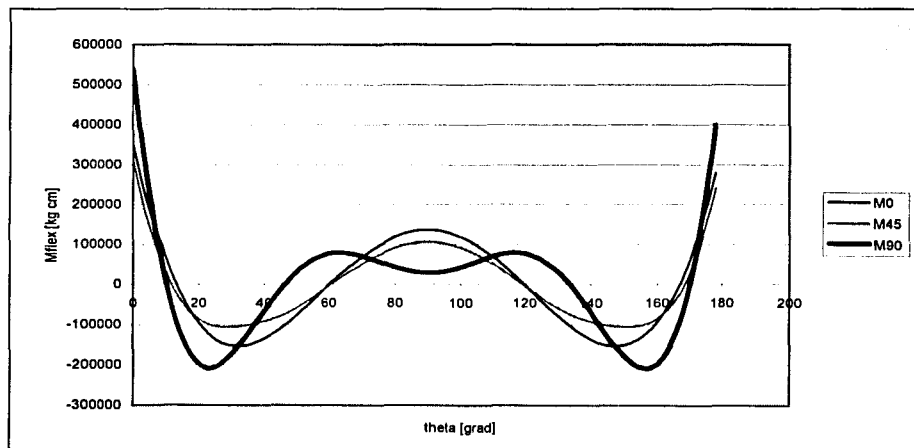


Fig. 60 Momentos flexionantes para una bóveda empotrada con $\delta x = 0$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En la figura 61 se observa, que a diferencia de los momentos, los valores máximos de excentricidad, a lo largo de todo el arco, se presentan cuando $\alpha = 0^\circ$ y disminuyen conforme el valor de α aumenta.

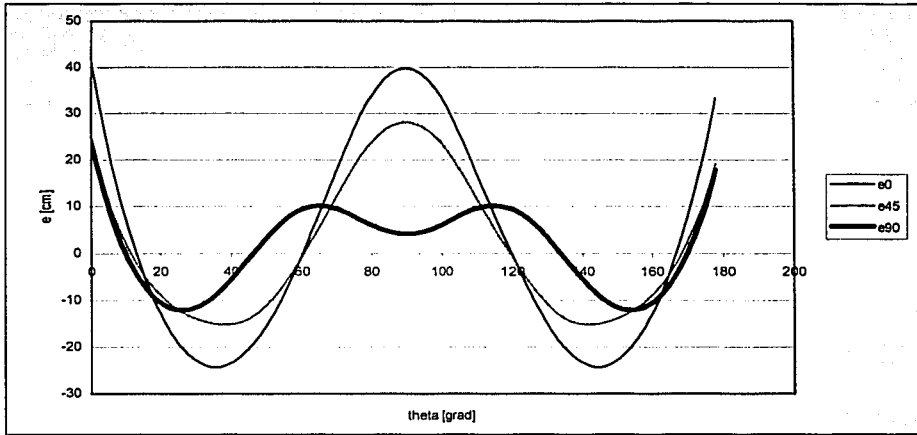


Fig. 61 Excentricidades para una bóveda empotrada con $\delta x = 0$.

En el caso de una bóveda con una articulación en la clave, las excentricidades máximas también ocurren cuando no hay carga en los tímpanos; es decir, cuando $\alpha = 0$.

En el caso de una bóveda triarticulada, los valores de la excentricidad aumentan marginalmente al presentarse una apertura considerable en los apoyos (fig. 62).

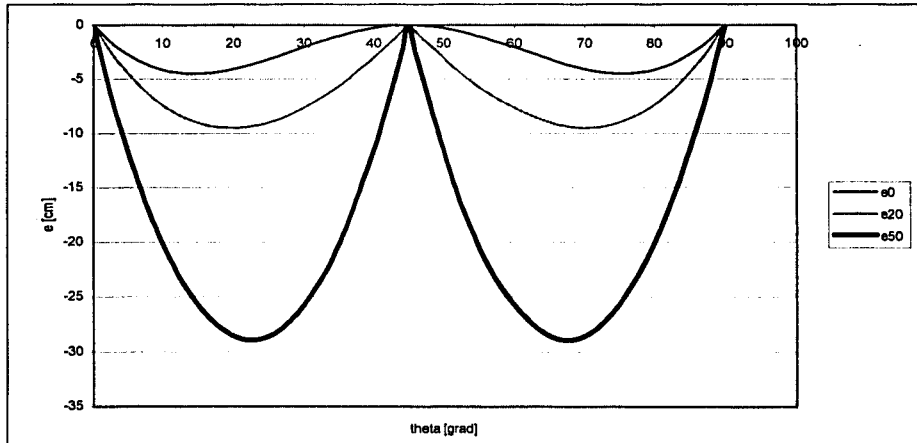


Fig. 62 Excentricidades para una bóveda triarticulada cuando $\delta x = 0$, $\delta x = 20$ cm y $\delta x = 50$ cm.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

III. 3 Estabilidad y resistencia de bóvedas de mampostería.

Para el cálculo de la resistencia de elementos de mampostería se ha recurrido normalmente a reglas empíricas; sin embargo, también se han empleado dos planteamientos acerca de su comportamiento:

- el material tiene un comportamiento lineal hasta la falla; y se utiliza la teoría de elasticidad para el cálculo de esfuerzos.
- el material tiene un comportamiento elasto-plástico, en el cual hay una etapa de comportamiento elástico, cuando la estructura se somete a niveles bajos de esfuerzo, seguida de una etapa inelástica, en la cual parte del material, al haber un incremento en los esfuerzos, alcanza su límite de resistencia a compresión, y finalmente una etapa plástica cuando todo el material llega a su límite, produciéndose así mayores deformaciones que pueden llevar a la falla del elemento estructural.

Bajo esta hipótesis, el comportamiento ante una carga que se aplica en forma creciente con una excentricidad constante se muestra en la figura 63.

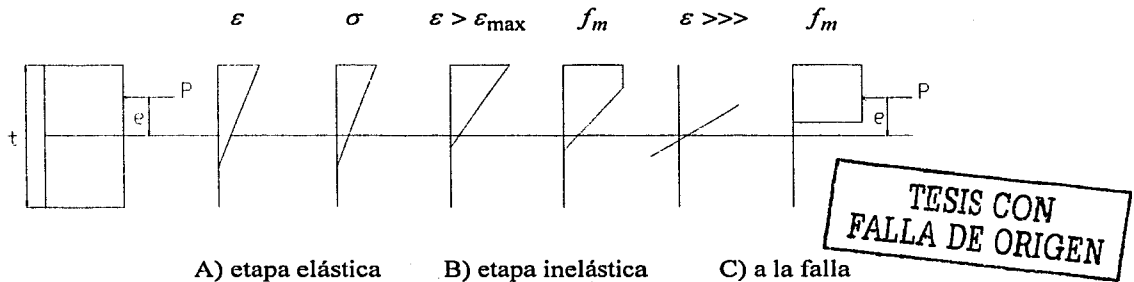


Fig. 63 Diagramas de esfuerzo - deformación

Aunque esta última hipótesis parece estar alejada del comportamiento de un material frágil, es la que permite mejores estimaciones de la resistencia, ya que la redistribución de esfuerzos que se presenta antes de la falla provoca una condición más cercana a la plastificación que a un comportamiento lineal.

Cabe señalar que para ambos planteamientos se considera que el material no resiste esfuerzos de tensión.

Con el fin de que las estructuras de mampostería se mantengan estables, es decir, dentro de los límites permisibles de esfuerzo que soporta el material, se requieren cumplir ciertas condiciones, las cuales dependerán a su vez de las hipótesis que se hayan asumido a cerca del comportamiento del material. Algunas de estas condiciones se mencionan a continuación.

III. 3.1 Condiciones de estabilidad considerando un comportamiento elástico.

Las condiciones que se deben cumplir en una estructura de mampostería para que ésta permanezca estable, bajo la consideración de que es un material elástico - lineal son las siguientes:

1. Regla del tercio medio.

La mampostería es un material que no resiste adecuadamente esfuerzos de tensión. Debido a esto, se requiere encontrar la máxima excentricidad que puede tener la resultante de los esfuerzos normales que actúan sobre la sección transversal, de tal forma que no se presenten tensiones (fig. 64).

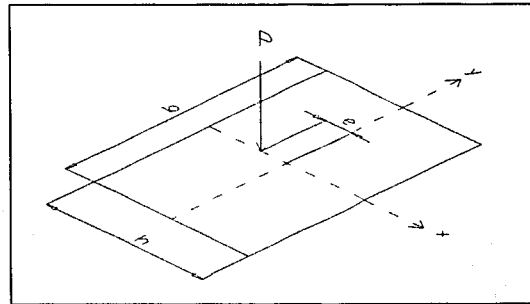


Fig. 64 Carga excéntrica sobre la sección transversal.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La expresión para calcular los esfuerzos normales de cualquier sección transversal es:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{My}{I}$$

En donde P es la resultante de esfuerzos normales, A es el área, I el momento de inercia, M es el momento flexionante y " y " es la distancia del eje neutro a cualquier punto de la sección.

Si la resultante es una fuerza de compresión, y se requieren obtener los esfuerzos normales de tensión σ_t que resultan de aplicar dicha fuerza, la expresión queda:

$$\sigma_t = -\frac{P}{A} + \frac{Pe y}{I} \quad ; \quad \text{donde } M = Pe, \text{ siendo "e" la excentricidad de la fuerza } P.$$

Ahora, si los esfuerzos de tensión son nulos:

$$\sigma_t = -\frac{P}{A} + \frac{Pey}{I} = 0 \quad ; \quad \frac{Pey}{I} = \frac{P}{A}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

finalmente, la excentricidad máxima e para que los esfuerzos de tensión sean nulos es:

$$e = \frac{I}{yA}$$

Para una sección transversal rectangular la expresión se reduce a :

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad A = bh \quad , \quad y_{\max} = \frac{h}{2}$$

$$e = \frac{2bh^3}{12h^2b} = \frac{h}{6}$$

Si se hace lo mismo en la dirección perpendicular, la excentricidad "e" será $\frac{b}{6}$. De esta forma, habrá una zona en la cual podrá actuar la resultante sin ocasionar esfuerzos de tensión (figs. 65 y 66).

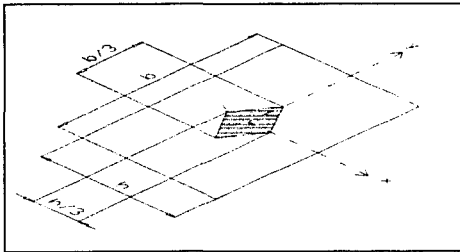


Fig. 65 Sección rectangular.

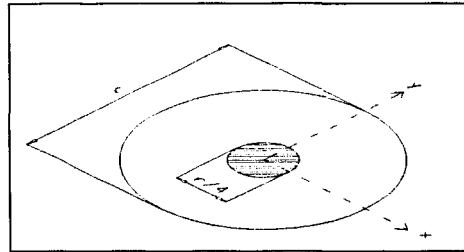


Fig. 66 Sección circular.

Para una sección circular, la excentricidad es:

$$I = \frac{\pi r^4}{4} \quad , \quad A = \pi r^2 \quad , \quad y_{\max} = \frac{r}{2} \quad ; \quad e = \frac{r}{8}$$

2. Esfuerzos normales permisibles.

Además de que no se presenten esfuerzos de tensión en la sección, también se requiere verificar que los esfuerzos de compresión estén dentro de los límites que puede resistir el material.

$$\sigma_c = -\frac{P}{A} - \frac{Pe y}{I},$$

En la posición crítica, de la condición 1, los esfuerzos de compresión son:

$$\sigma = -\frac{2P}{A}$$

Entonces, se debe cumplir que:

$$-\frac{2P}{A} \leq \sigma_{pc}$$

3. Ángulo máximo de inclinación de la resultante (cortante máximo).

Por último, se debe cumplir que la fuerza cortante T que se presente en la sección transversal no sea mayor que la resistencia a fricción de la mampostería.

Si $\mu = \tan \phi$,

donde ϕ es el ángulo de fricción interna del material y μ es el coeficiente de fricción entre mampostería y mampostería, entonces la fuerza de fricción Ff resistente es:

$$Ff = P \mu ; \quad Ff = P \tan \phi$$

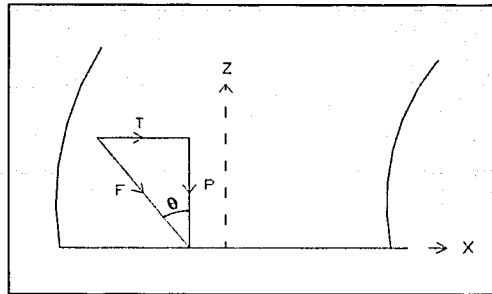
Se debe cumplir que:

$$T < Ff, \quad T < P \tan \phi, \quad T / P < \tan \phi$$

pero: $T / P = \tan \theta$, donde θ es el ángulo de inclinación de la resultante (fig. 67), por lo que:

$$\tan \theta < \tan \phi, \quad \text{ó} \quad \theta < \phi$$

Mediante pruebas de laboratorio se ha observado que los valores de ϕ varían entre 30 y 38°. Entonces, el ángulo de inclinación de la resultante P sobre la horizontal debe ser menor a estos valores.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 67 Ángulo de inclinación de la resultante.

III. 3.2 Determinación de la línea de presiones crítica mediante estática gráfica.

La determinación de la línea de presiones crítica es de suma importancia para el análisis de estabilidad de las estructuras curvas, tales como arcos y bóvedas. Esto se debe a que las fuerzas de compresión que la conforman se encuentran a una excentricidad “e” máxima de la directriz del arco en la clave y en los arranques. Si esta distancia “e” aumenta se generarían tensiones en la sección transversal, y por lo tanto agrietamientos. Por lo anterior, se puede ver que la línea de presiones crítica es la condición extrema antes de que se presenten tensiones en el arco.

El procedimiento resulta sencillo para el caso de arcos y bóvedas de cañón, y es manejable para estructuras en que se puede tener una estimación previa de la trayectoria que siguen las cargas y se puede ubicar la posición de las secciones críticas en la clave y en los arranques, ya que de lo contrario se presentaría un problema indeterminado (hiperestático), imposible de resolver mediante la estática.

A continuación se presenta el análisis de un arco rebajado, según Meli (1998), aunque el método es aplicable para arcos y bóvedas de cañón de medio punto, ovaladas, entre otras. Se procede de la siguiente forma (fig. 68):

- a) Se dibuja a escala el arco y su espesor.
- b) Se divide el arco en cierto número de sectores, o dovelas, y se calcula la carga que corresponde a cada una de ellas. La carga F, así determinada, se ubica en el centro geométrico de la dovela. Si el arco es simétrico en geometría, distribución de cargas y condiciones de apoyo, se puede trabajar con la mitad del arco.
- c) Se trazan a escala las fuerzas F, correspondientes a cada dovela, formando un polígono de fuerzas; en este caso todas las fuerzas están alineadas sobre una vertical, y la longitud de la recta obtenida será igual a la resultante de las fuerzas aplicadas. Para determinar su posición, se elige un origen arbitrario “O”, a la izquierda de la

recta y se une éste con los extremos de cada segmento correspondiente a las fuerzas F . Con paralelas a las rectas así obtenidas se traza un polígono funicular, partiendo de un apoyo hasta llegar al otro (en este caso la clave). La intersección de las líneas extremas define el punto de aplicación de la resultante.

- d) Se supone que las secciones críticas del arco son los arranques y la clave, y que la línea de presiones pasará por el extremo del tercio medio de cada una de estas secciones. Para el arranque del arco, la posición es tal que causa tensión en el extradós, y para la clave en el intradós.
- e) Por la posición supuesta de la línea de presión en la clave (B), se traza una horizontal hasta cruzar con la línea de acción de la resultante (C); se une este punto con la posición supuesta para la línea de presiones en el arranque (A). La recta AC define la línea de acción de la reacción en el apoyo.
- f) Se define un nuevo origen "O'", a la izquierda del funicular inicial, trazando del extremo superior del funicular una horizontal y del inferior una paralela a la línea AC. Se liga este nuevo origen O' con los puntos que limitan cada uno de los segmentos del funicular, y se obtienen las líneas de acción de las fuerzas internas de cada dovela.
- g) Se trazan paralelas a cada línea de acción, partiendo de uno de los puntos prefijados hasta llegar al otro; el polígono así determinado, indica la trayectoria de la línea de presiones.
- h) Si en cada sección la línea de presiones pasa dentro del tercio medio, no habrá tensiones en todo el desarrollo del arco, y los esfuerzos de compresión se pueden determinar directamente.

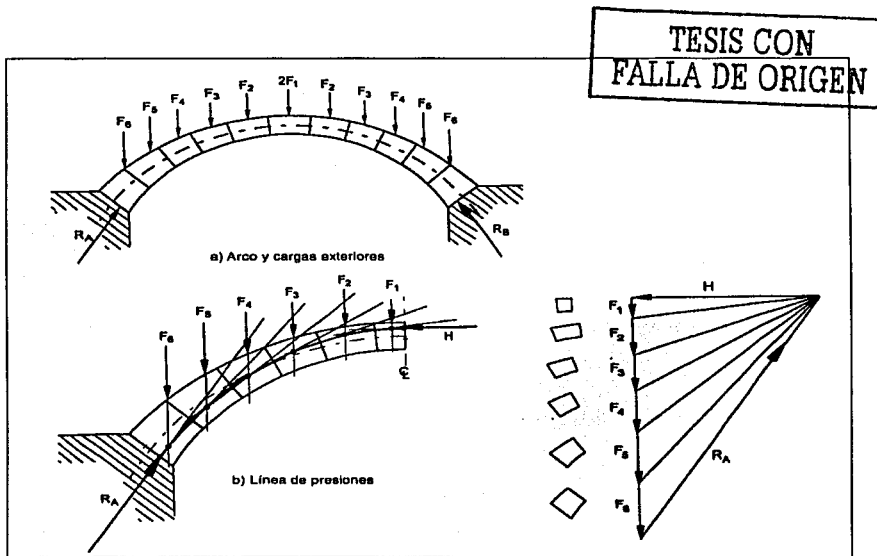


Fig. 68 Cálculo de la línea de presiones crítica y el empuje horizontal de un arco mediante estática gráfica.

III. 3.3 Condiciones de estabilidad considerando un comportamiento elasto-plástico.

Cuando se pretende estimar la estabilidad de una estructura resulta necesario analizar las condiciones límite que se presentan en los materiales que la componen. Para este caso, se asume que la mampostería tendrá un comportamiento plástico antes de llegar a la falla, por lo que es posible aplicar los conceptos de la teoría de plasticidad (que se utiliza en estructuras de acero), siempre que se cumplan las siguientes condiciones, según Heyman, 1968:

- 1) *La mampostería no resiste esfuerzos de tensión.* Esta consideración está del lado de la seguridad ya que en realidad, la mampostería es capaz de resistir esfuerzos de tensión muy bajos.
- 2) *La mampostería tiene una resistencia infinita a esfuerzos de compresión.* Esta consideración equivale a decir que los esfuerzos que van a actuar sobre la estructura serán muy bajos comparados con los esfuerzos resistentes del material, por lo que el riesgo de una falla a compresión es muy poco probable.
- 3) *No se puede presentar una falla por deslizamiento.* Se considera que la fricción entre la mampostería (resistencia a fuerzas cortantes) es lo suficientemente alta como para que se presente un deslizamiento entre las piezas que componen la estructura.

En la práctica se ha observado que en la mayoría de los casos los arcos y bóvedas de mampostería cumplen con estas tres condiciones de comportamiento, por lo que es posible aplicar los conceptos de la teoría de plasticidad.

Por otro lado, se dice que una estructura se encuentra en equilibrio estático si es posible trazar una línea de presiones o resultante de esfuerzos que esté en equilibrio con todas las cargas actuantes, incluyendo el peso propio de la estructura. Ahora bien, la estructura será estable, si dicha línea de presiones se encuentra en algún lugar dentro de la mampostería, es decir, que pase por dentro de la estructura, asegurándose así que las fuerzas se transmitan de una sección a otra únicamente por esfuerzos de compresión.

La situación límite ocurrirá cuando la línea de presiones pase por el extremo de una sección (su frontera), y la fuerza se transmita en este punto dejando al resto de la sección transversal libre de esfuerzos. Si la línea de presiones llegara a pasar por fuera de la sección se generarían esfuerzos de tensión, incapaces de ser resistidos por la mampostería, por lo que se produciría un agrietamiento. Si esto ocurre en varias secciones, se podría formar un mecanismo que hiciera inestable a la estructura, llevándola al colapso.

Con base en lo anterior, según Heyman, la estabilidad de una bóveda se convierte en un problema geométrico más que en uno de resistencia de materiales, ya que el aspecto crítico en el diseño de una de estas estructuras radica en dar un espesor suficiente para que línea de presiones no se salga de la sección transversal, suponiendo que ésta no sufrirá grandes variaciones en su trayectoria al transcurrir el tiempo.

Se han empleado varias técnicas para obtener el espesor crítico en un arco, ya sea mediante consideraciones elásticas o plásticas, siendo las primeras más conservadoras que las segundas.

Partiendo de las ideas de plasticidad, La Haire propone un método, en el cual primero se debe encontrar el ángulo crítico β en el cual la línea de presiones se encuentra al límite,

es decir, antes de salirse de la sección, tanto en la clave y los arranques como en los riñones (fig. 69). Dicho ángulo β se obtiene del equilibrio de fuerzas en el arco, considerando que la trayectoria de la línea de presiones crítica tiene la forma de una catenaria invertida. Para el caso de un arco de medio punto, como el que se muestra en la figura 69, se tiene que:

$$\beta \cot \beta \left[\frac{2\beta \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos^2 \beta + \operatorname{sen} \beta}{2\beta \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos^2 \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta} \right] = \frac{\pi}{2}$$

En donde se obtiene que $\beta = 58^\circ 49'$

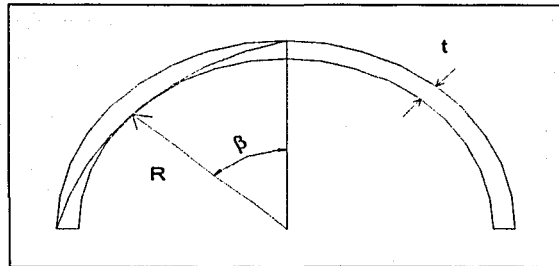


Fig. 69 Ángulo crítico β

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

De manera similar, se puede obtener la relación espesor / radio, donde t es el espesor y R el radio:

$$\frac{t}{R} = \frac{2(\beta - \operatorname{sen} \beta)(1 - \cos \beta)}{\beta(1 + \cos \beta)} \quad \text{en donde si } \beta = 58^\circ 49' \text{ entonces: } \frac{t}{R} = 0.106$$

Para el caso de arcos rebajados, es decir, que no alcanzan la curvatura completa, se utiliza la ecuación anterior reemplazando el término $\pi/2$ por $\alpha \cot \frac{1}{2}\alpha$, donde el ángulo que abarca el arco es ahora 2α en lugar de 180° .

El valor $\frac{t}{R} = 0.106$ que obtuvo La Haire resulta mayor que algunos otros valores propuestos de manera empírica, tales como el propuesto por Couplet ($\frac{t}{R} = 0.101$ considerando $\beta = 45^\circ$), o el de Boistard ($\frac{t}{R} = \frac{1}{12}$). El uso de este último valor, propuesto por Boistard, ocasionó el colapso de un puente en 1800.

Se puede ver, que basta con que un arco o una bóveda tenga un espesor suficiente, dentro del cual esté contenida la línea de presiones, para que sea estable; esto, sin embargo, presupone que las deformaciones en la estructura son muy pequeñas, lo cual no siempre ocurre.

En la mayor parte de los templos abovedados, los movimientos producidos, ya sea por sismos, asentamientos o por el mismo empuje de las bóvedas a los apoyos, han ocasionado que dichos apoyos tengan desplazamientos relativamente grandes (de apertura y de cierre). Esto, a su vez, ha ocasionado que la línea de presiones de las bóvedas cambie su trayectoria y que en algunas zonas incluso salga de la sección, generándose de esta forma un agrietamiento.

Paradójicamente, entre mayor sea la excentricidad de la línea de presiones, ocasionada por una apertura en los apoyos, menor será el empuje ejercido por la estructura en los arranques, debido a un reacomodo de los esfuerzos de compresión.

IV. ANÁLISIS DE LA BÓVEDA DE ATOTONILCO EL GRANDE.

En este capítulo se realizará el análisis de la bóveda de cañón corrido del templo de Atotonilco el Grande. Para obtener las reacciones en los apoyos y una idea del comportamiento de la estructura, se va a recurrir a los modelos de flexibilidades que se realizaron en el capítulo III. Posteriormente, se llevará a cabo un análisis por medio de elementos finitos de un tramo de la bóveda, con el objetivo de comparar los resultados de ambos métodos de análisis, así como de obtener información a cerca de las distribuciones de esfuerzos a lo largo de toda la estructura.

De acuerdo a los planos que fueron proporcionados por el CONACULTA, la bóveda tiene las siguientes medidas:

- claro : 14.07 m
- altura de la clave, desde los arranques: 5.22 m
- ancho : 60 cm en los arranques y 40 cm en la clave
- ancho de los muros: 1.50 m
- altura de los tímpanos, desde el arranque de la bóveda: 3.67 m

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

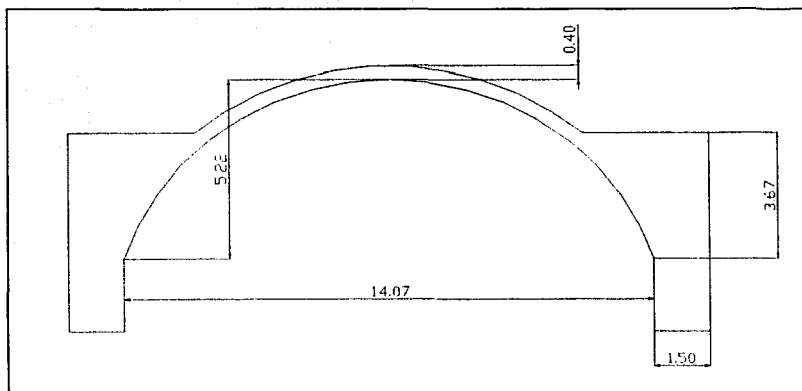


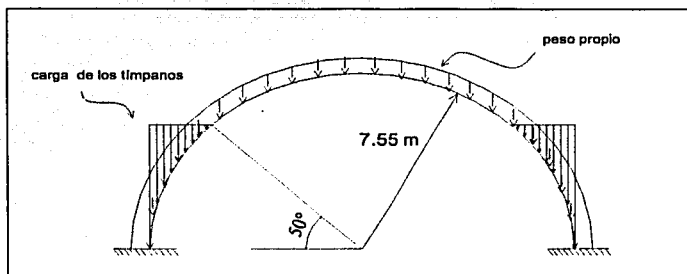
Fig. 70 Corte transversal de la bóveda. (acotaciones en m)

IV. 1 Análisis mediante el modelo de flexibilidades

La bóveda de Atotonilco el Grande es de cañón corrido, sin embargo, el cilindro no es de medio punto, sino que se encuentra rebajado aproximadamente 17° en cada arranque. Por otro lado, la estructura presenta tímpanos hasta un ángulo cercano a los 50° , medidos desde la horizontal.

Para poder emplear el modelo de flexibilidades se harán las siguientes consideraciones:

- la bóveda es de medio punto
- los tímpanos se considerarán como otra carga externa, además del peso propio, y no como parte de la estructura
- se supondrá un espesor constante de 40 cm
- el análisis se realizará a un tramo unitario de bóveda (1m).



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 71 Modelo de la bóveda

Para realizar el análisis de la bóveda, se emplearán las dimensiones mostradas en las figuras 70 y 71, así como las siguientes propiedades de la mampostería:

- peso volumétrico: $\gamma = 1800 \text{ kg/m}^3$
- módulo de elasticidad: $E = 20\,000 \text{ kg/cm}^2$

Se hará uso de estos valores promedio debido a que no se encontraron documentos que proporcionaran las características de los materiales empleados originalmente en el templo de Atotonilco. Además tampoco fue posible tomar muestras en el sitio.

Utilizando las expresiones para la obtención de las reacciones obtenidas en el capítulo III, se tiene que los valores del empuje horizontal y de la reacción vertical son, respectivamente:

$$H = 4386 \text{ kg}$$
$$V = 17\,107 \text{ kg}$$

El valor de H indica que por cada metro de bóveda se presentará un empuje horizontal de aproximadamente 4400 kilogramos, valor que corresponde al 25.6 % de la reacción vertical V, es decir, el 12.81 % del peso del tramo unitario de bóveda.

Como se pudo observar en el capítulo III, el comportamiento de una bóveda va a ser distinto si el ángulo α cambia. Con el fin de ilustrar lo anterior, en la figura 72 se muestra la variación que van a tener la reacción vertical V y el empuje horizontal H, conforme el ángulo α varía de 0 a 90°.

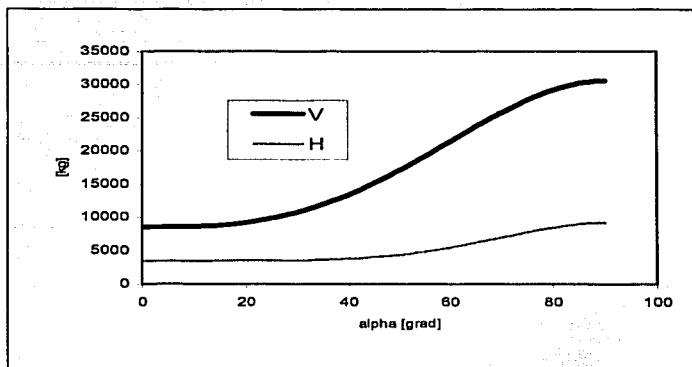


Fig. 72 Variación de H y V, ante el tamaño de los tímpanos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

El empuje H va a permanecer prácticamente constante hasta un ángulo α de 40° , a partir del cual va a empezar a aumentar su valor. La reacción V, a diferencia de H, va a aumentar a partir de un ángulo α menor.

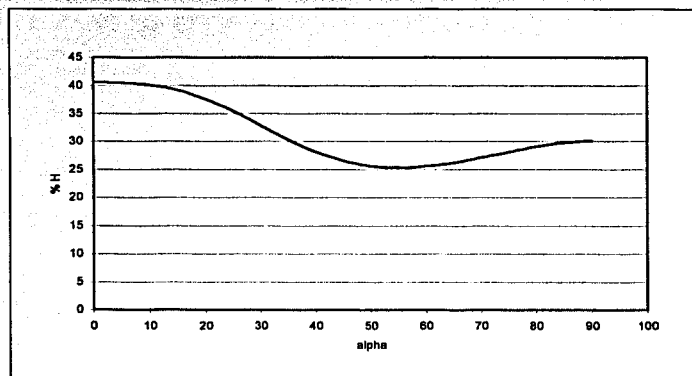


Fig. 73 Porcentaje que representa el empuje de la reacción vertical.

El porcentaje que representa H de la reacción vertical va a ser máximo (41%) cuando el ángulo α vale cero, es decir, cuando la bóveda no tiene tímpanos. Conforme dicho ángulo aumente el porcentaje disminuirá hasta llegar a un valor cercano al 25%, para un valor de $\alpha=55^\circ$, después del cual volverá a aumentar ligeramente, como se muestra en la figura 73.

En la figura 74 se muestra la variación de la resultante y del ángulo que ésta forma con la vertical conforme aumenta α . Se puede observar que para un valor de α cercano a los 57° , ambas curvas se van a cruzar. Este punto representa el peso del tímpano ante el cual el comportamiento de la bóveda resulta más adecuado, desde el punto de vista estático. Esto,

debido a que entre mayor sea el tamaño de los tímpanos (de α) y por lo tanto de la resultante R , menores serán las excentricidades a lo largo del eje de la bóveda (como se vio en el capítulo III), gracias a un incremento en la fuerza normal en la estructura; por otro lado, entre menor sea el ángulo de inclinación de dicha resultante con respecto a la vertical se van a producir menores empujes a los apoyos de la bóveda, reduciéndose de esta forma su apertura. Sin embargo, el aumento en la masa podría ocasionar a su vez un incremento en las fuerzas de inercia ante la llegada de un sismo. El valor de α real que presenta la bóveda de Atotonilco se indica con la línea vertical de la figura 74.

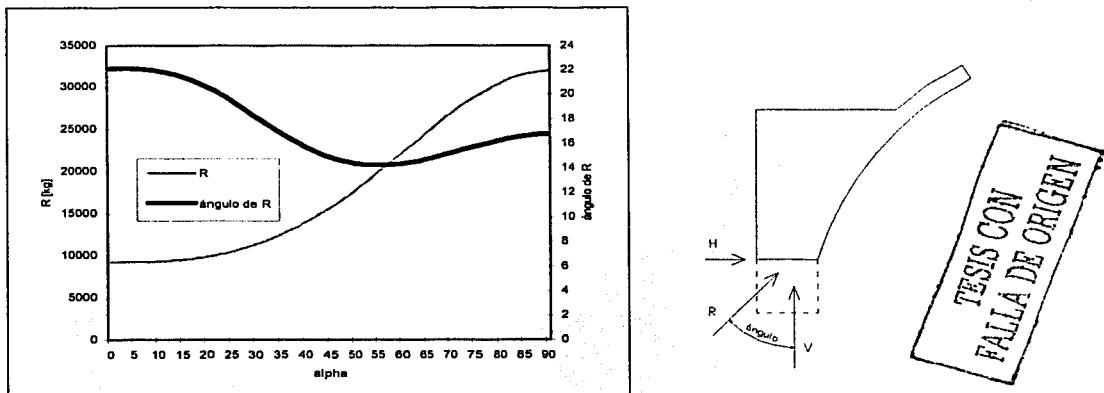


Fig. 74 Variación de la resultante R y el ángulo que ésta forma con la vertical.

El diagrama de momentos flexionantes, los valores de las excentricidades y la línea de presiones, para este modelo, se presentan en las figuras 75, 76 y 77, respectivamente;

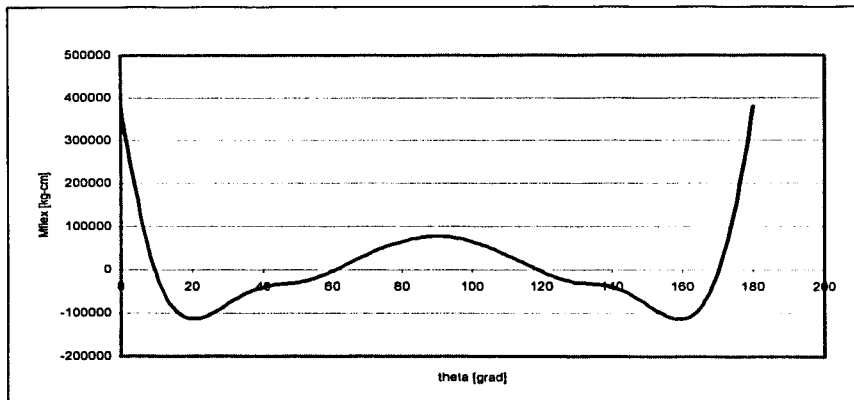


Fig. 75 Momentos flexionantes

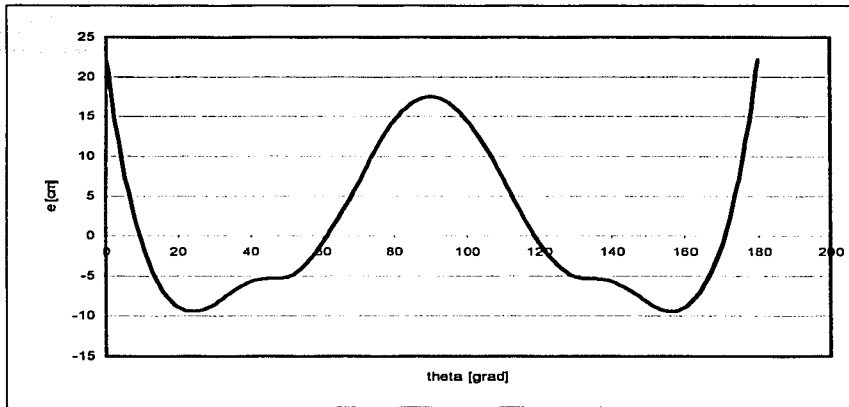


Fig. 76 Excentricidades

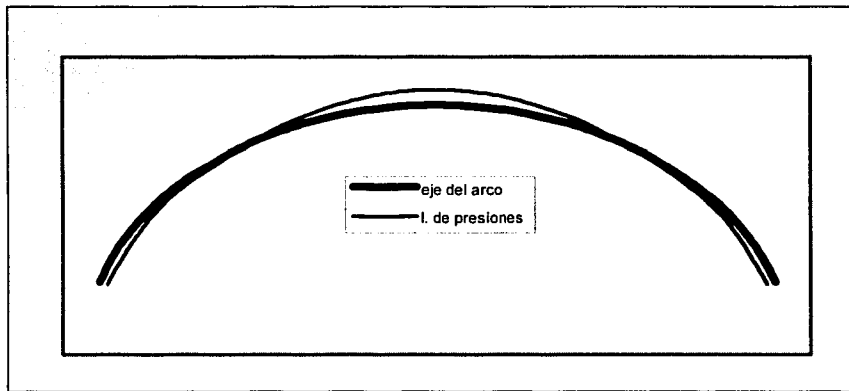


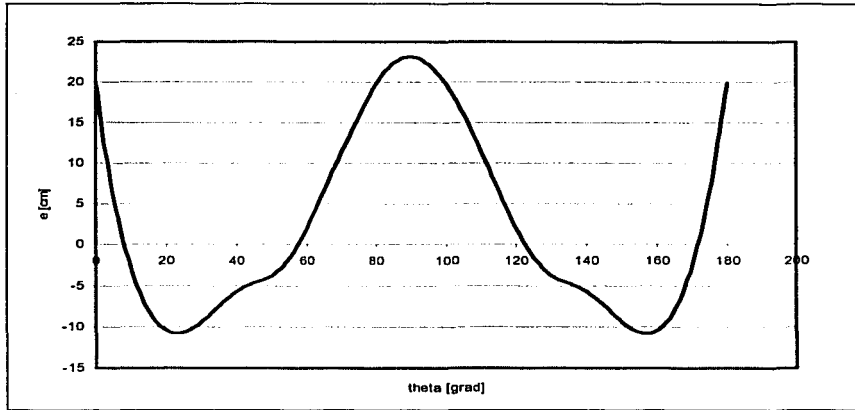
Fig. 77 Línea de presiones

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Se puede ver que los valores máximos de excentricidad se presentan en los arranques (a 0 y 180°) y en la clave (a 90°), sin embargo, en los arranques se encuentran los tímpanos, los cuales aumentan la sección de la bóveda por lo que no hay posibilidad de que ésta se agriete; entonces la zona crítica se encuentra en la clave. A esta altura la línea de presiones tiene una excentricidad de 17.5 cm, por lo que la resultante de esfuerzos pasa por dentro de la sección transversal, la cual tiene un ancho de 40 cm (20 cm del eje a cada frontera). Ante estas circunstancias, de acuerdo con las hipótesis provenientes de la teoría de plasticidad para la determinación de la resistencia de arcos de mampostería, no se presentarán tensiones en la bóveda y en consecuencia no habrá agrietamiento; sin embargo, si se considera a la mampostería como un material elástico, ante esta excentricidad su superaría

el tercio medio de la sección ($40/3 = 13.3$ cm), presentándose de esta forma tensiones en algunas zonas de la sección, y por lo tanto un agrietamiento.

Ante una apertura en los apoyos relativamente pequeña, del orden de 2 cm, la excentricidad aumenta a 23 cm, por lo que la sección se agrietará y en consecuencia se formará una articulación en dicho lugar, aún considerando un comportamiento plástico en el material. Cuando esto sucede, el comportamiento de la estructura cambia, por lo que se analizará el caso de un tramo uniaarticulada.



TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Fig. 78 Excentricidades con una apertura de 1 cm.

En la figura 79 se puede observar que los momentos flexionantes cambian debido a la articulación en la clave.

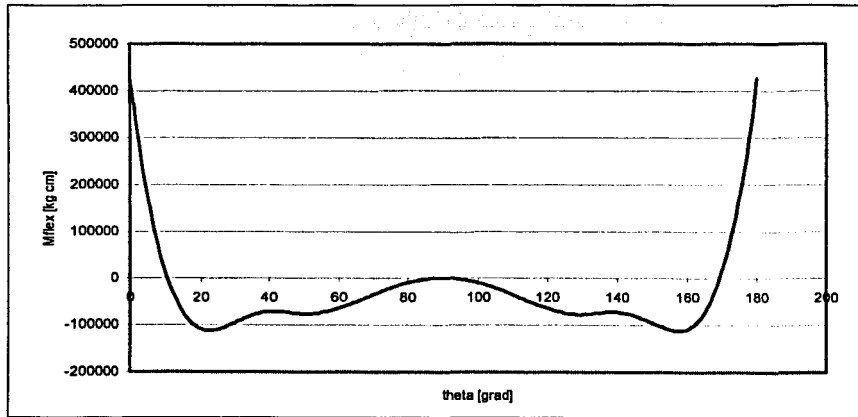
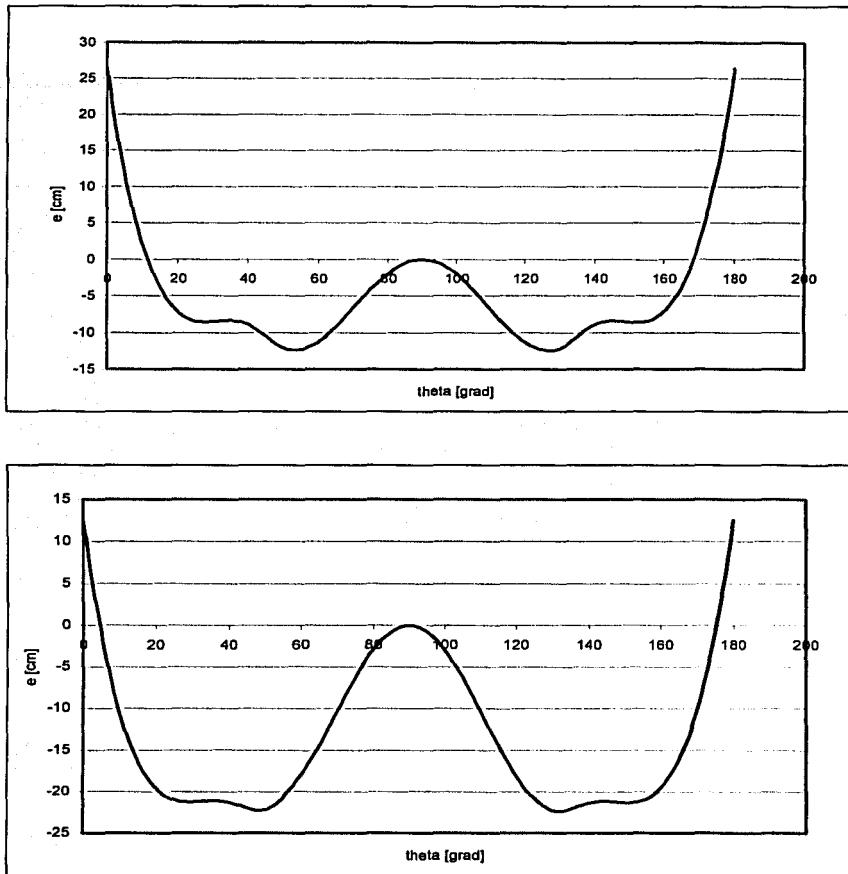


Fig. 79 Momentos flexionantes. Caso uniaarticulada.

Debido a esto, se van a presentar mayores desplazamientos en los apoyos ante menores niveles de esfuerzos, que en el caso anterior. Esto se observa en la figura 80, en la que aparecen los valores de las excentricidades ante una apertura de 2 cm y otra de 12 cm respectivamente.



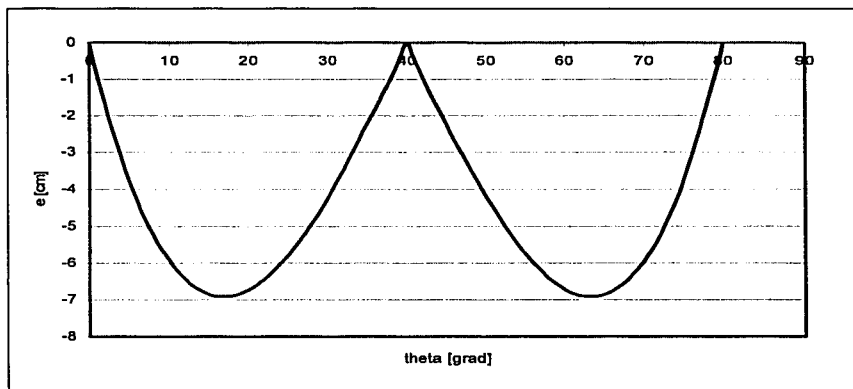
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 80 Excentricidades ante una apertura de 2 y 12 cm.

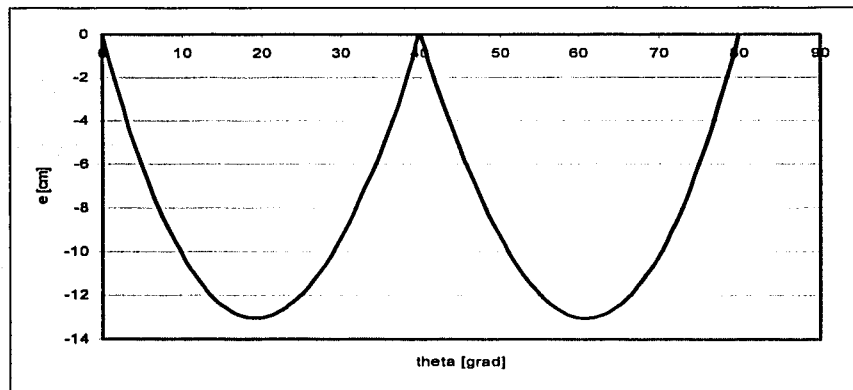
En las figuras anteriores se puede ver que la bóveda se mantiene estable ante una apertura de 2 cm, sin embargo, cuando ésta alcanza los 12 cm el valor de la excentricidad supera el valor plástico permisible de 20 cm, a la altura de los tímpanos (50°). El valor elástico permisible se supera aproximadamente a los 6 cm de apertura. En consecuencia, cuando la apertura sobrepase los 12 cm se formarán otras dos articulaciones a la altura de los rífonos, al final de los tímpanos. El comportamiento de la estructura volverá a cambiar,

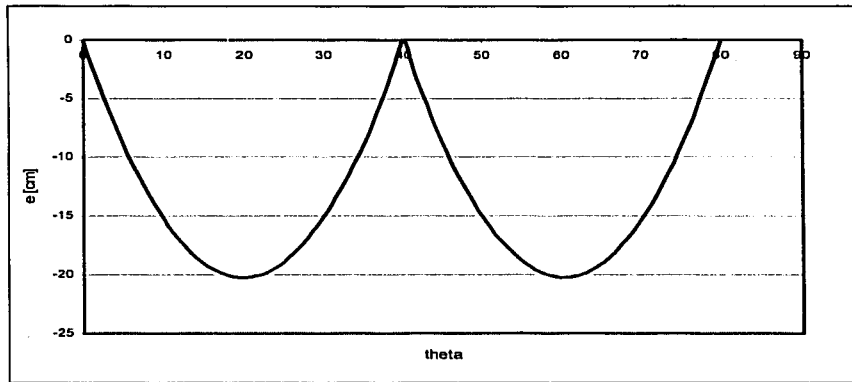
y se presentará un nuevo reacomodo de esfuerzos. Para poder analizar estos cambios se usará el modelo de una bóveda triarticulada, considerando que dichas articulaciones se van a formar a los 50° medidos desde la horizontal; esto, debido a que aproximadamente a este ángulo se presentan los valores máximos de excentricidad en la bóveda.

En la figura 81 se observa que la bóveda permanecerá estable ante un desplazamiento horizontal de 12 cm; sin embargo, al llegar a un valor de 28 cm, la resultante rebasará los 13.3 cm del tercio medio permisibles por los planteamientos elásticos. Por otro lado, la bóveda podrá presentar una apertura de 40 cm antes de que dicha resultante supere los 20 cm y salga de la sección.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN





**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Fig. 81 Excentricidades para el caso triarticulado, ante 12, 28 y 40 cm de apertura (de arriba hacia abajo)

Con base en lo anterior, dependiendo del criterio que se adopte para la determinación de la resistencia de la mampostería, la apertura máxima, es decir, la que se presenta antes de que se formen otras dos articulaciones entre los riñones y la clave y conviertan a la estructura en un mecanismo, va a ser de 28 cm de acuerdo con la teoría elástica y de 40 cm de acuerdo con la teoría elasto-plástica. Entonces, con base en este modelo, la apertura máxima probablemente se encuentra en un punto intermedio entre los valores proporcionados por ambas teorías.

Este mecanismo de falla, ocasionado por la presencia de esfuerzos de tensión en ciertas zonas en las cuales la excentricidad de la resultante de esfuerzos rebasó un valor permisible, es el más común en las bóvedas de mampostería, debido principalmente a que los esfuerzos de compresión y cortante que se presentan en el material, en este tipo de estructuras y ante este tipo de solicitaciones (apertura y cierre de apoyos) son muy bajos, para esperar una falla de esta índole.

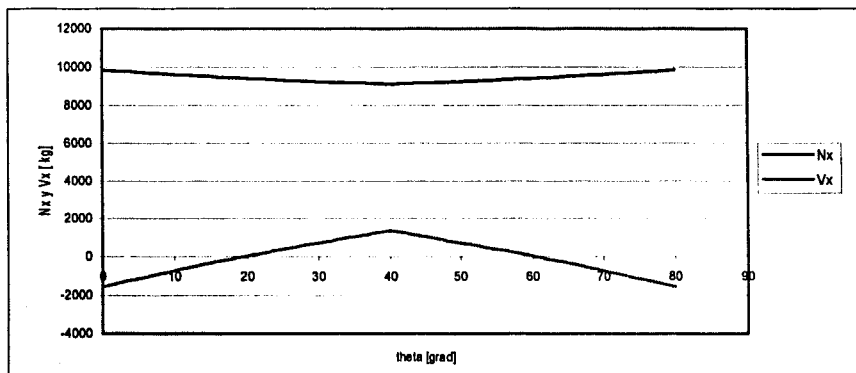


Fig. 82 Fuerzas normal y cortante para la condición crítica.

En la figura 82 se puede ver que los valores de las fuerzas normales y cortantes a lo largo de la estructura, para la situación crítica de la línea de presiones, son relativamente bajas si se comparan con las que resiste la mampostería.

IV. 2 Modelo de elementos finitos.

Para realizar este modelo se emplearán las dimensiones indicadas en los planos, además se incluye un tramo de muro en cada arranque, con el fin de ilustrar la distribución de esfuerzos en estas zonas. El ancho que se usará en este caso también será unitario (1m).

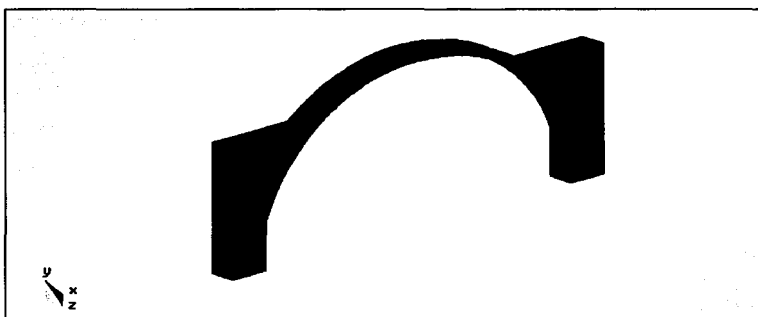


Fig. 83 Tramo de bóveda de ancho unitario.

Se realizó una malla con 6258 elementos (tetraedros) del mismo tamaño, conectados en 1800 nodos.

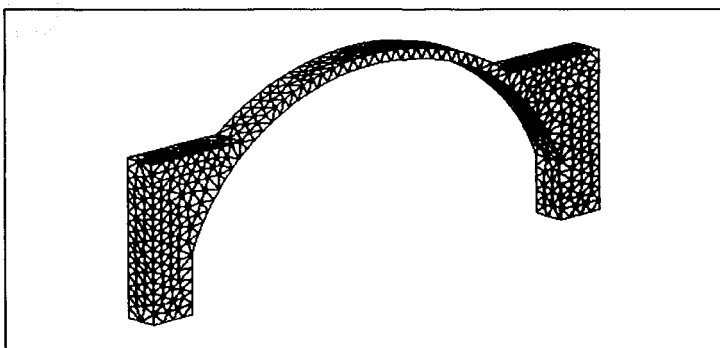


Fig. 84 Malla de elementos finitos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Para efectuar el análisis de este modelo se consideraron las mismas propiedades de la mampostería que en los modelos de flexibilidades. Primero se analizarán los esfuerzos producidos únicamente por el peso propio de la estructura, sin que haya una apertura o un cierre en los apoyos; para esto se supondrá que dichos apoyos están fijos.

En las figuras 85, 86 y 87 se muestran las distribuciones de los esfuerzos principales S1, S3 y los esfuerzos de Von Mises, respectivamente, que se presentan en el tramo de bóveda en estudio, ante la acción únicamente de su propio peso.

Para este caso, se puede apreciar que gran parte de los tímpanos están sometidos a niveles de esfuerzo relativamente bajos, por lo que la suposición que se hizo en el modelo de flexibilidades, de no considerar a los tímpanos como parte de la estructura, sino solamente el efecto que provoca su peso, resulta una aproximación al comportamiento de la estructura.

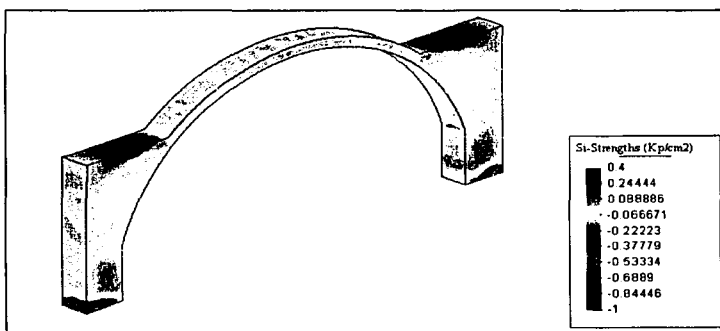


Fig. 85 Esfuerzos principales S1.

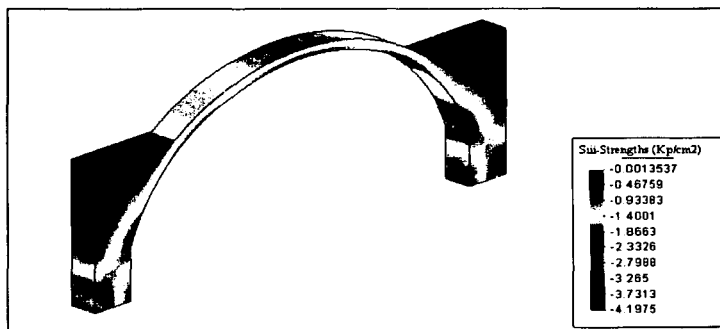


Fig. 86 Esfuerzos principales S3.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

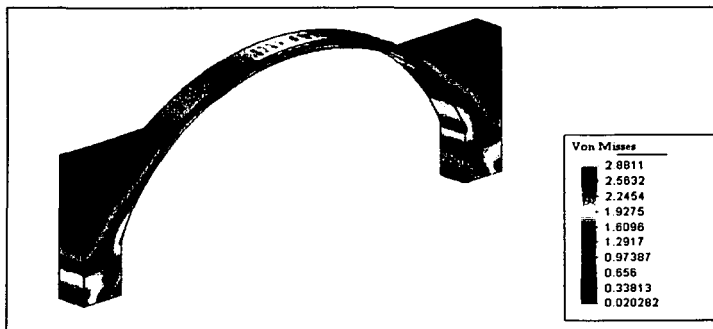


Fig. 87 Esfuerzos de Von Mises.

Al hacer la sumatoria de todas las fuerzas en los nodos en el área de los empotramientos, tanto en dirección horizontal como vertical, se obtienen las reacciones de la estructura ante la condición de carga propuesta.

Los valores del empuje horizontal H y la reacción vertical V son:

$$H = 4698 \text{ kg}$$

$$V = 25\,922 \text{ kg}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Se observa que para este modelo el valor del empuje horizontal es el 18.13% de la reacción vertical. Este valor es menor que el obtenido con el modelo de flexibilidades (el cual fue del 25.6%). Además, el valor del empuje resulta ligeramente mayor en este caso, lo cual se debe principalmente a dos razones:

- el valor de H es dependiente del peso de la estructura, es decir, que entre más pesada sea ésta mayor será el valor de H, y en el modelo de flexibilidades no se tomó en cuenta el peso de los muros.

- en el modelo de flexibilidades se hizo la suposición de que los tímpanos no trabajan como parte de la estructura.

La diferencia entre los valores de H de ambos modelos es del 6.66%, sin embargo, se debe tener en cuenta que el valor que proporciona el primer modelo está por debajo del valor del segundo, el cual es más realista.

En las figuras anteriores se puede observar que los esfuerzos principales S1, es decir, los máximos en tensión, son menores que los que es capaz de resistir la mampostería, lo que indica que la estructura se encuentra sin agrietamientos.

Para este modelo no se recurrirá a los criterios de estabilidad utilizados en los modelos de flexibilidades, derivados de las teorías de elasticidad y plasticidad. Ahora se revisará que los esfuerzos normales y cortantes no sobrepasen ciertos valores permisibles a través de toda la sección transversal.

Del análisis se obtienen tres valores de esfuerzos principales, S1, S2 y S3 en las tres direcciones principales respectivas. De estos valores, $S1 > S2 > S3$, por lo que los valores de S1 corresponden a los esfuerzos máximos de tensión, y los valores de S3 a los esfuerzos máximos de compresión (negativos) en la estructura.

En las figuras 88 y 89 se indican algunos valores de los esfuerzos principales S3 que se presentan en la clave.

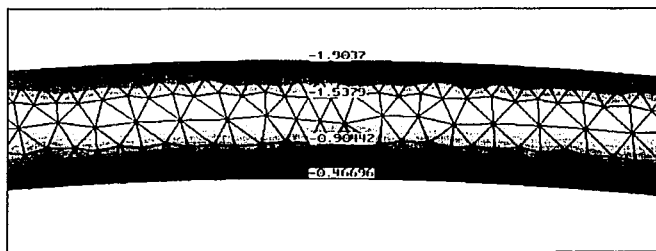


Fig. 88 Vista frontal de la clave. Valores de los esfuerzos principales S3.

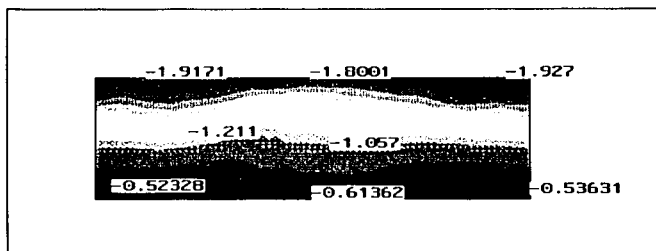


Fig. 89 Corte transversal en la clave. Esfuerzos principales S3.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En la zona de los arranques de la bóveda, desde los tímpanos, el valor de los esfuerzos es ligeramente mayor que en la clave, como se indica en la figura 90.

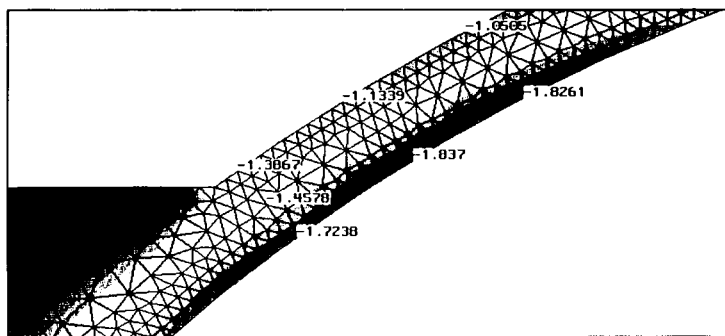


Fig. 90 Vista frontal de los esfuerzos principales S3 en los arranques de la bóveda.

El valor de los esfuerzos cortantes x-y se muestra en la figura 91:

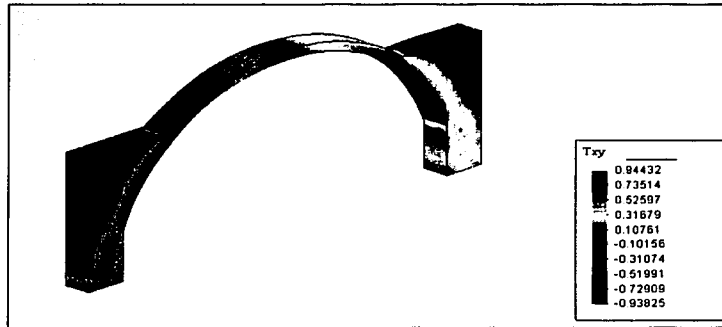


Fig. 91 Esfuerzos cortantes x -y.

La configuración deformada para esta condición de carga se muestra a continuación, en la figura 92:

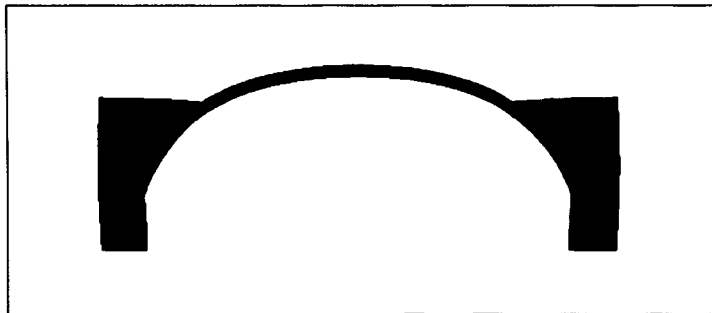


Fig. 92 Condición deformada por el peso propio

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Para esta condición de carga y sujeción en los apoyos, los niveles de esfuerzo en la estructura resultaron ser muy bajos comparados con los esfuerzos resistentes de la mampostería. Sin embargo, como ya se mencionó en capítulos anteriores, los apoyos de las bóvedas estarán sujetos a aperturas o a cierres debido a distintas causas, tales como asentamientos, movimientos sísmicos, e inclusive al peso propio de la estructura.

Por lo tanto, a continuación se hará un cambio en las condiciones de sujeción, liberando a uno de los apoyos para que pueda desplazarse libremente en dirección del eje x. De esta manera, se podrán conocer las distribuciones de esfuerzos ante distintas aperturas en los apoyos.

Para una apertura de 2.5 centímetros en cada apoyo (5 cm en total), el incremento en los esfuerzos es considerable, como se aprecia en las figuras 93 y 94:

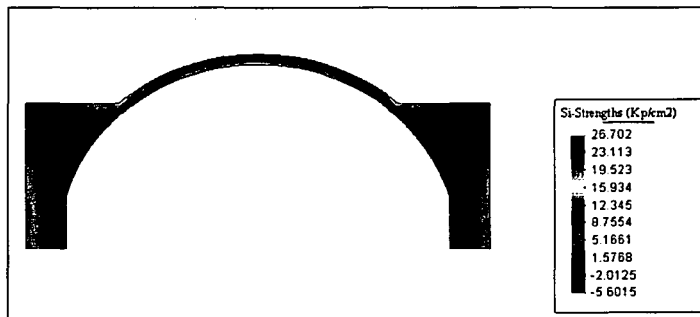


Fig. 93 Esfuerzos principales S1.

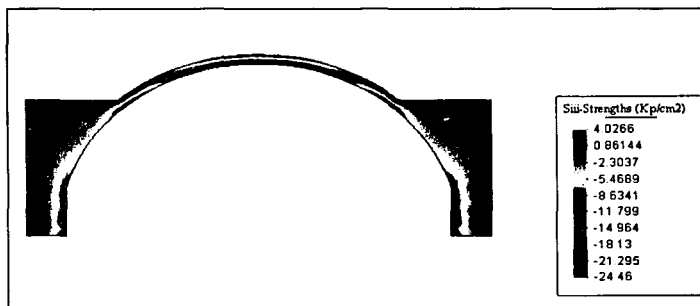


Fig. 94 Esfuerzos principales S3.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En las figuras anteriores se pueden apreciar las zonas en las cuales se presentan concentraciones de esfuerzos; los esfuerzos de tensión máximos se localizan en el intradós de la clave y en el extradós de los arranques.

Por lo tanto, las zonas críticas, es decir, en donde se van a presentar los mayores esfuerzos, se localizan en la clave y en los arranques. Para este caso, en el cual la estructura sufrió una apertura de 5 centímetros, se puede apreciar en las figuras 95, 96 y 97 que los esfuerzos de tensión, tanto en el intradós de la clave como en el extradós de los arranques, están por encima del valor que generalmente resiste la mampostería ante este tipo de esfuerzos. Debido a esto, resulta muy probable que se generen agrietamientos en estas zonas, ante aperturas relativamente pequeñas (menos del 1% del claro).

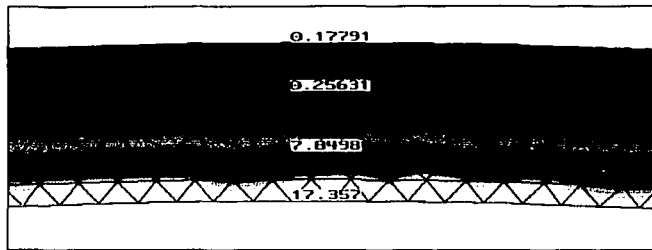


Fig. 95 Esfuerzos principales S_1 en la clave.

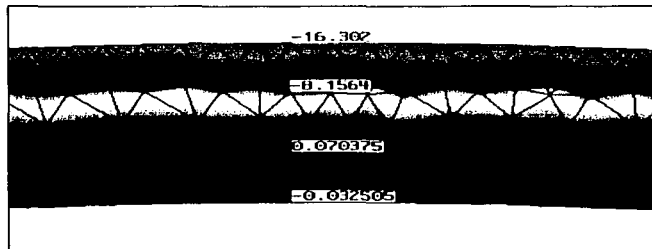


Fig. 96 Esfuerzos principales S_3 , en la clave.

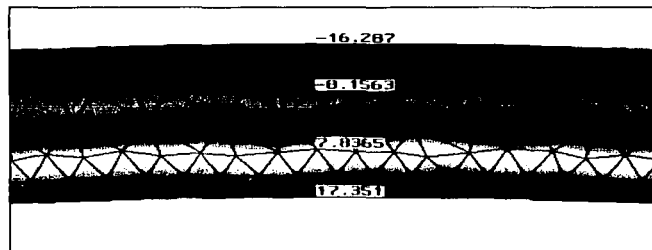


Fig. 97 Esfuerzos S_x en la clave.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

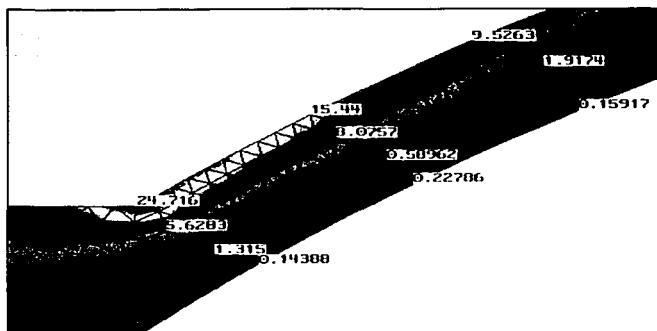


Fig. 98 Esfuerzos principales S1, en los arranques.

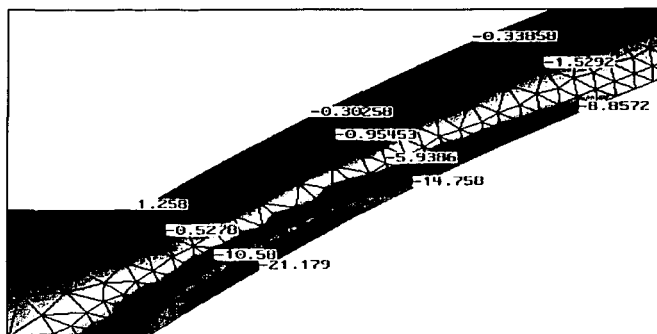


Fig. 99 Esfuerzos principales S3, en los arranques.

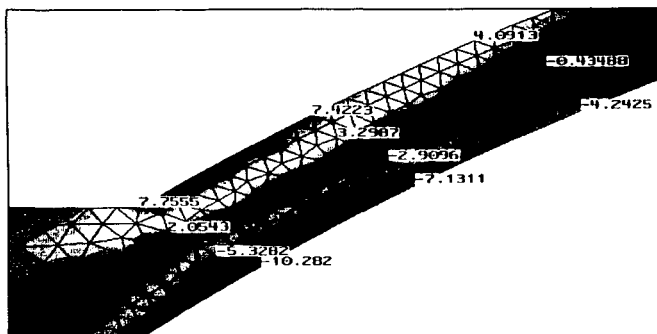


Fig. 100 Esfuerzos cortantes máximos τ_{xy} .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En consecuencia de la apertura en los apoyos habrá un incremento en los esfuerzos cortantes; el valor máximo se presentará en la zona de los arranques, como se muestra en la figura 100.

Por lo anterior, se observa que en la clave y en los arranques se van a presentar agrietamientos ocasionados por esfuerzos de tensión, ante aperturas relativamente pequeñas, comparadas con la dimensión del claro. Esto, a su vez, va a provocar un cambio en la distribución de los esfuerzos a lo largo de toda la estructura y por lo tanto un cambio en su comportamiento.

Con el objetivo de poder analizar dichos cambios, se realizarán 3 diferentes modelos, en los cuales se intentará representar la presencia del agrietamiento en las zonas sometidas a esfuerzos de tensión.

Primer modelo.

En este caso, se eliminarán algunos elementos de la malla en las zonas en donde se presentaron los esfuerzos máximos de tensión, es decir, en la clave y en los arranques.

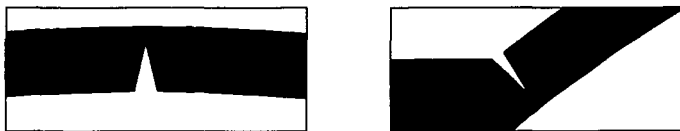


Fig. 101 Detalle de la malla en las zonas en donde se considerará la influencia de los agrietamientos.

Para una apertura de 10 centímetros en cada apoyo (20 cm en total), se presenta la siguiente distribución de esfuerzos principales S1:

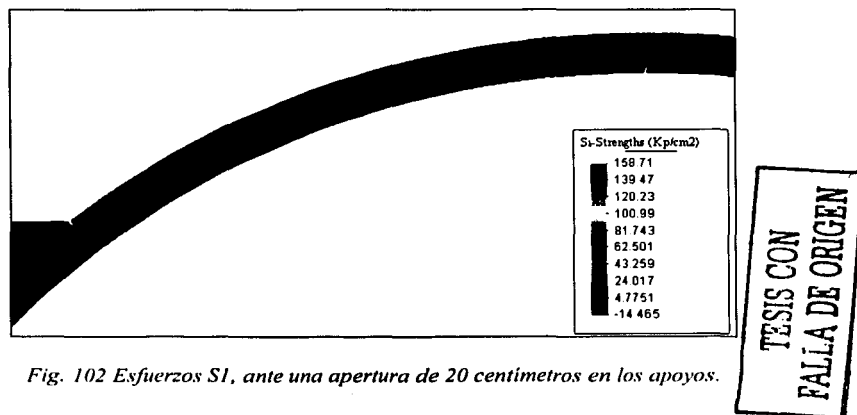


Fig. 102 Esfuerzos S1, ante una apertura de 20 centímetros en los apoyos.

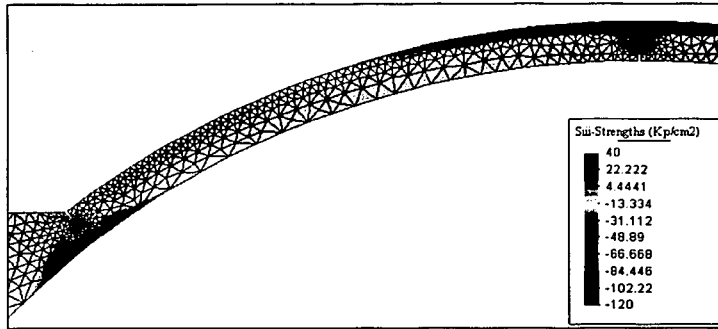


Fig. 103 Esfuerzos S3, ante una apertura de 20 cm.

Se observa que las zonas en donde se encuentran los mayores valores de esfuerzos siguen siendo la clave y los arranques.

Los esfuerzos de tensión en dichas zonas se encuentran muy por encima de los que resiste la mampostería, por lo que se formarán articulaciones, que permitan el giro de la sección. Sin embargo, en las zonas intermedias de la bóveda, entre la clave y los arranques, los esfuerzos de tensión no sobrepasaron los valores límite de resistencia en todo el peralte de la sección, sino que solamente en algunas partes. Debido a esto, en estas zonas se presentarán ligeros agrietamientos, en el intradós para las zonas cercanas a la clave y en el extradós en las zonas cercanas a los arranques, pero no se formarán articulaciones adicionales, las cuales originarían el colapso de la bóveda.

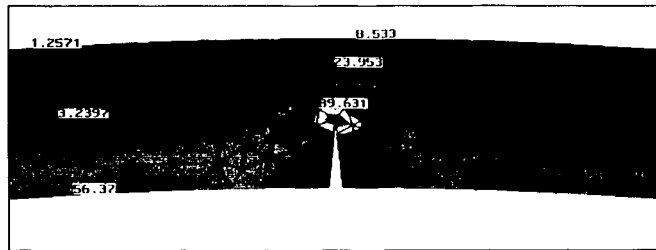


Fig. 104 Esfuerzos S1 en la clave. Apertura de 20 cm.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

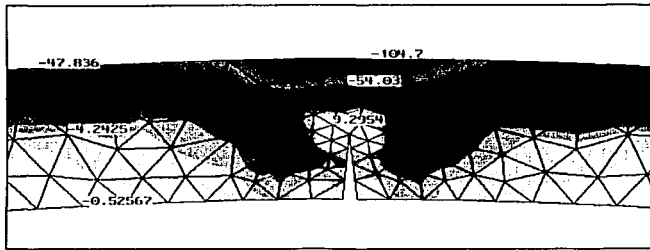


Fig. 105 Esfuerzos S3. Apertura de 20 cm.

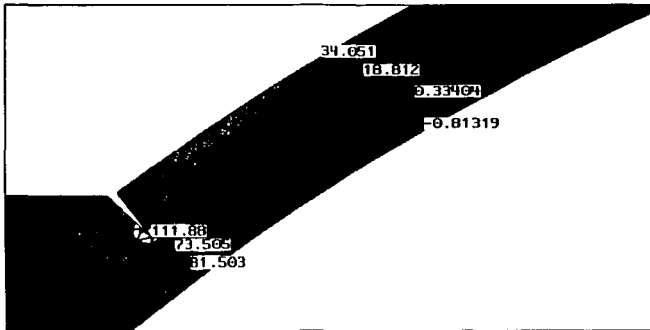


Fig. 106 Esfuerzos S1 en los arranques. Apertura de 20 cm.

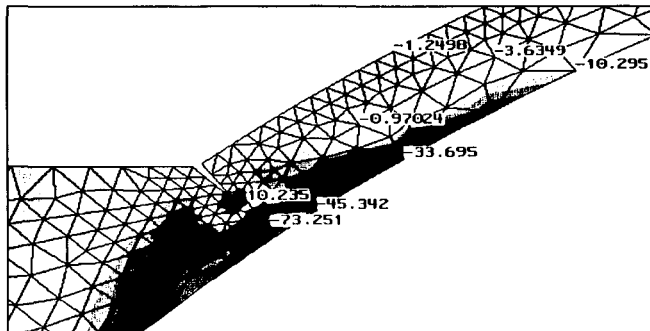


Fig. 107 Esfuerzos S3. Apertura 20 cm.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En la figuras 108 y 109 se muestran las trayectorias de los esfuerzos principales S1 (de tensión) en la zona de los riñones de una bóveda ante la apertura de sus apoyos.

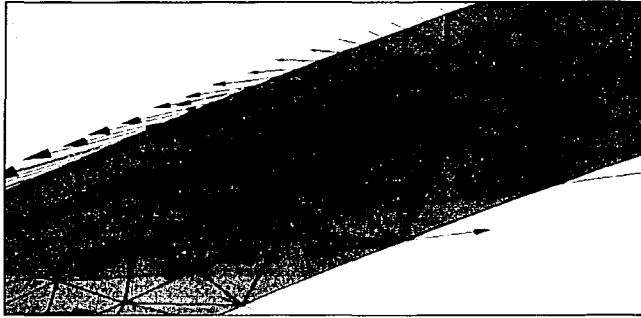


Fig. 108 Trayectoria de los esfuerzos principales S1 en los riñones.

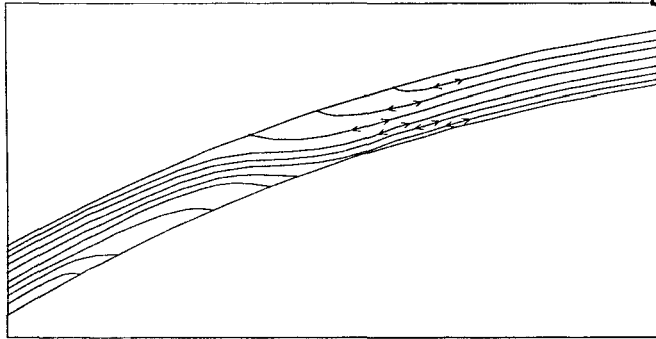
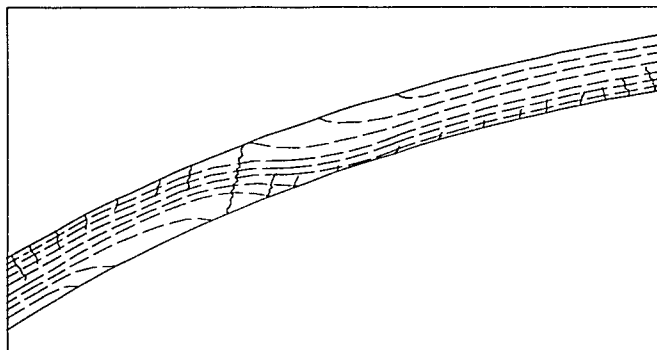


Fig. 109 Trayectoria de los esfuerzos principales S1 en los riñones.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Se observa que se van a presentar tensiones diagonales en ciertas zonas, entre la clave y los arranques, las cuales, dependiendo de los niveles de esfuerzo, podrían generar un patrón de agrietamiento a lo largo de toda la sección y en consecuencia un plano de falla aproximadamente a 45° medidos desde el intradós de la bóveda, ocasionando así el colapso de la bóveda, como se aprecia en la figura 110.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 110 Agrietamiento en los riñones

La resistencia de la mampostería a esfuerzos de tensión puede variar significativamente entre un tipo y otro, dependiendo principalmente de los materiales con los que está formada, como se vio en el capítulo II. Ocasionalmente, se considera que dicha resistencia es nula, sin embargo, puede alcanzar hasta los 5 k/cm^2 .

Para este caso, se va a considerar que la mampostería tiene una resistencia de 3 k/cm^2 a esfuerzos de tensión, y de 30 k/cm^2 a esfuerzos de compresión.

El valor de los esfuerzos de tensión diagonal va ir aumentando conforme la apertura crezca, hasta llegar a la apertura crítica, es decir, la apertura a la cual se forme un plano de falla en la zona de los riñones, debido a que los esfuerzos de tensión diagonal en dicha sección son mayores que los permisibles por la mampostería.

En las figuras 111, 112, 113 y 114 se puede apreciar el cambio en los esfuerzos ante distintas aperturas hasta llegar a la condición crítica; los esfuerzos menores a 3 kg/cm^2 (permisibles) están en color negro.



Fig. 111 Esfuerzos de tensión permisibles (color negro) ante una apertura de $\delta x = 10 \text{ cm}$

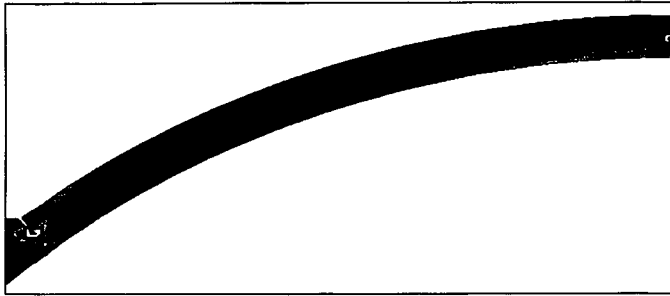


Fig. 112 Esfuerzos de tensión permisibles (color negro) ante una apertura de $\delta x = 20$ cm



Fig. 113 Esfuerzos de tensión permisibles (color negro) ante una apertura de $\delta x = 30$ cm

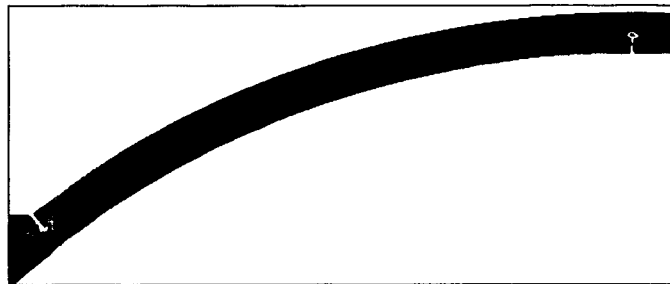


Fig. 114 Esfuerzos de tensión permisibles (color negro) ante una apertura de $\delta x = 35$ cm

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Cuando la apertura en los apoyos llega a los 35 centímetros (2.5% del claro) habrá una zona en cada lado de la bóveda (entre los arranques y la clave) en donde los esfuerzos de tensión que se presenten a través de toda la sección transversal serán mayores que los que

resiste la mampostería, por lo que se va a formar un plano de falla, como se observa en la figura 115.

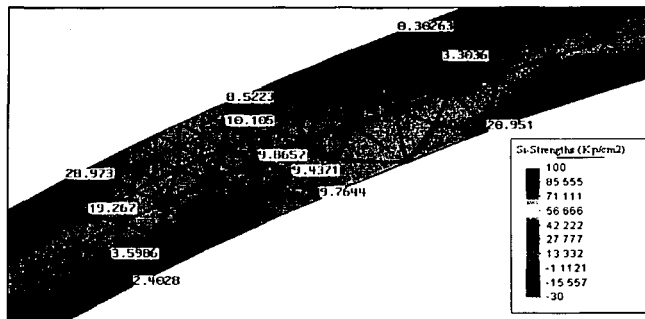


Fig. 115 Esfuerzos SI en los riñones.

A pesar de que en este modelo se representa el agrietamiento que va a sufrir la estructura tanto en la clave como en los arranques, no se consideran las demás grietas que van a aparecer en las zonas en donde los esfuerzos de tensión son superiores a los admisibles. Debido a esto, se van a presentar concentraciones muy altas de esfuerzos en algunos puntos de la bóveda cercanos a los agrietamientos.

Segundo modelo.

En este modelo se le dará un valor muy bajo (cercano a cero) al módulo de elasticidad de la mampostería en las zonas en donde se presenten esfuerzos de tensión tales que superen los valores permisibles; dichas zonas están marcadas de color amarillo en la figura 116. Con esto se podrá representar la pérdida de resistencia del material ante esfuerzos de tensión, sin que éste pierda el valor de su peso.

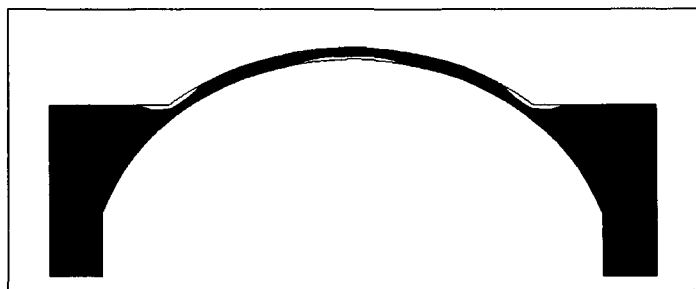


Fig. 116 Propiedades de los materiales del segundo modelo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En las figuras 117 y 118 se puede observar que ante una apertura de 25 cm la bóveda se encuentra en una condición crítica, debido a que los esfuerzos en los riñones ya han superado a los valores permisibles a lo largo de toda la sección transversal.

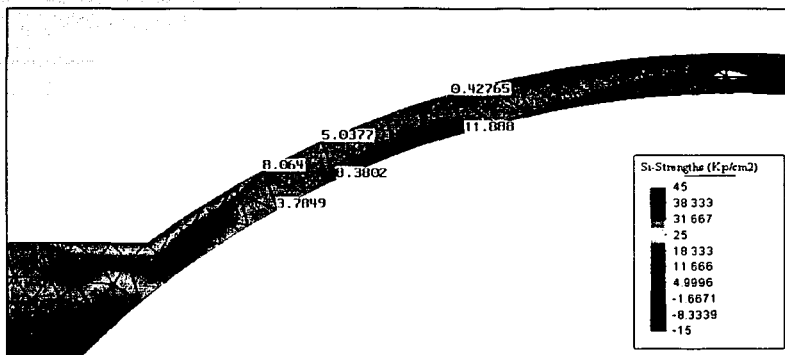


Fig. 117 Esfuerzos S1 ante una apertura de 25 cm.



Fig. 118 Esfuerzos permisibles (en color negro).

En este modelo, a diferencia del pasado, sí se va a representar la pérdida de resistencia del material en toda la sección sometida a esfuerzos de tensión (superiores a los permisibles), y en consecuencia no habrá concentraciones muy altas de esfuerzos. Sin embargo, a pesar de que los esfuerzos disminuyeron considerablemente en las zonas en donde se supuso que el módulo de elasticidad fuera prácticamente nulo, se van a seguir presentando, en algunos puntos, esfuerzos mayores que los permisibles. Esto entra en contradicción con la suposición inicial del modelo, en la cual se consideró que en dichas zonas (con módulo de elasticidad, E, cercano a cero) el material ya no tiene rigidez.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Tercer modelo.

En este modelo se retirará el material de las zonas en las cuales los esfuerzos de tensión han superado el valor permisible, en lugar de bajar el módulo de elasticidad como en el segundo modelo. Esto bajo la hipótesis de que dicho material, al encontrarse agrietado, ya no presenta resistencia, y que los cambios generados al no considerar su peso no son significativos.

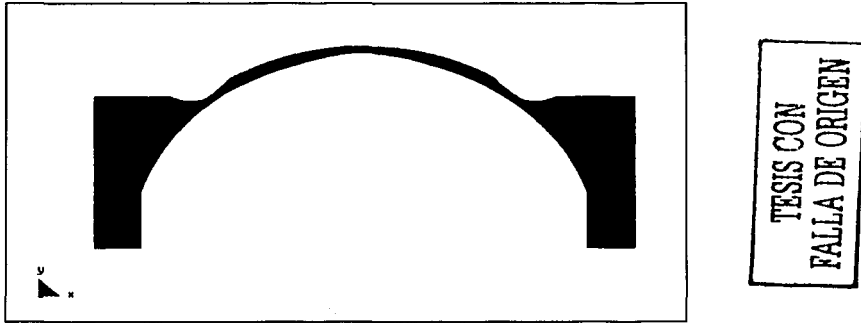


Fig. 119 Tercer modelo.

Para este modelo, la condición crítica se encuentra ante una apertura cercana a los 24 cm, como se observa en las figuras 120 y 121.

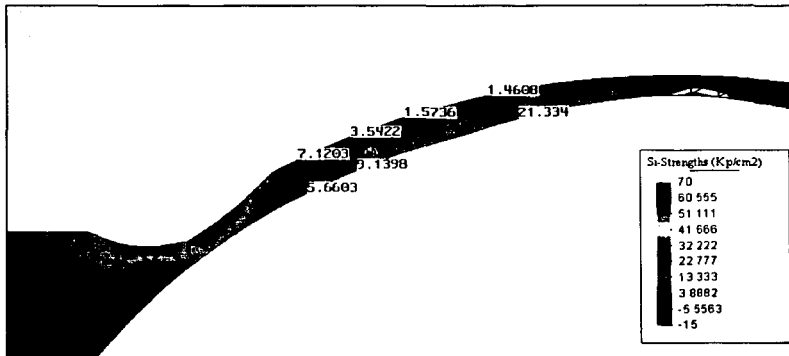
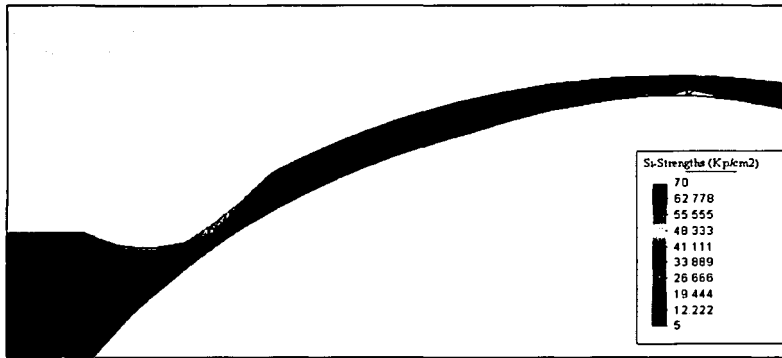


Fig. 120 Esfuerzos S1 ante una apertura de 24 cm.



TEJAS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 121 Esfuerzos permisibles (color negro).

Se puede apreciar que la distribución de esfuerzos en este modelo es muy similar a la del modelo pasado, sin embargo, se van a presentar mayores concentraciones de esfuerzos debidas a la ausencia del material.

IV. 3 Resumen de resultados

A continuación se presenta un resumen de los resultados obtenidos mediante ambos modelos.

1. Modelo de flexibilidades

Reacciones en los apoyos :

$$H = 4385.6 \text{ kg}$$

$$V = 17\ 107.4 \text{ kg}$$

El empuje lateral H es el 25.6% del peso de la bóveda.

En la tabla 9 se muestran los valores de la apertura a la cual aparecen las diferentes articulaciones en la estructura (grietas), así como el ángulo, medido a partir de la horizontal, al cual se forman.

Tabla 9. Apertura a la que se forman las articulaciones en determinadas zonas de la bóveda.

	1. Articulación en la clave	2. Articulaciones en los arranques (final de los tímpanos 50°)	3. Articulación en los riñones (falla)
Apertura (teoría elástica) [cm]	0 *	6	28
Apertura (teoría plástica) [cm]	2	12	40
Ángulo desde la horizontal [°]	90	50	70

* De acuerdo con el criterio elástico de resistencia, la articulación en la clave se forma desde que la bóveda se encuentra en su estado original (antes de la apertura en sus apoyos).

2. Modelos de elementos finitos

Reacciones en los apoyos:

$$H = 4698.65 \text{ kg}$$

$$V = 25\,922.32 \text{ kg}$$

Para este caso el empuje lateral es el 18.1% del peso de la bóveda.

En la tabla 10 se muestran los valores de la apertura ante la cual aparecen los agrietamientos en la clave y los arranques:

Tabla 10. Apertura a la cual se forman las articulaciones en la clave y los arranques.

	1. Articulación en la clave	2. Articulaciones en los arranques (final de los tímpanos 50°)
Apertura [cm]	5	5
Ángulo desde la horizontal	90	50

En la tabla 11 se muestran las aperturas que llevan a la falla a la estructura, en cada uno de los tres modelos propuestos para representar los agrietamientos:

Tabla 11. Aperturas críticas para los tres modelos de elementos finitos.

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
Apertura [cm]	35	25	24
ángulo	65	61	63

CONCLUSIONES

Desde hace ya varios miles de años que los arcos y las bóvedas son utilizados como elementos estructurales en varios tipos de edificaciones, tales como monumentos, acueductos, y templos religiosos, entre otros. Con el paso del tiempo, mejores técnicas constructivas, avances tecnológicos, un mayor conocimiento de los materiales y del comportamiento de las estructuras, así como la experiencia de construcciones previas hicieron posible una notable evolución en este tipo de estructuras. Se lograron de esta forma monumentales construcciones con diversos tipos y formas de arcadas y sistemas abovedados.

El uso de bóvedas en templos religiosos fue muy común desde la Edad Media, debido principalmente al buen comportamiento que tiene la mampostería ante esfuerzos de compresión, y al magnífico aspecto que éstas proporcionaban.

Dentro de la arquitectura colonial mexicana del siglo XVI estuvieron presentes las influencias renacentistas provenientes de Europa, sin embargo, en muchos casos se presentaron también estilos platerescos y mudéjar, entre otros. Debido a la variedad de tipos y tendencias, la tarea de definir el estilo arquitectónico en México del siglo XVI resulta muy complicada. A pesar de esto, existen ciertas características que lo distinguen de los modelos europeos contemporáneos. Un ejemplo muy significativo fueron los templos mexicanos de una nave, de apariencia militar, los cuales a pesar de haber tenido algunos exponentes similares en España, nunca fueron tan frecuentes como en México. Este tipo de construcciones estuvieron fuertemente relacionadas con los ideales de simplicidad reformadora que caracterizó a la primera generación de mendicantes constructores y con el periodo de aprendizaje de los indígenas, por lo que constituyeron la mayor parte de edificaciones de tipo religioso que se realizaron durante la época.

La mayor parte de los templos de una nave que fueron techados con bóvedas de cañón corrido han presentado agrietamientos en sus bóvedas y en algunos casos problemas de estabilidad, cuando han estado sujetos a una apertura en sus apoyos. Por esta razón resultó de gran importancia llevar a cabo un análisis del comportamiento de este tipo de estructuras, ante este tipo de sollicitaciones.

En el capítulo III se realizó el análisis de una bóveda de cañón corrido para tres diferentes condiciones de carga: el caso de una bóveda sin tímpanos, el caso de una bóveda con tímpanos a 45° y por último el caso de una bóveda con terraza plana. De acuerdo a los resultados, se pudo observar que entre mayor era el tamaño de los tímpanos menor era la excentricidad de la línea de presiones de la estructura, por lo que la situación más estable de una bóveda se presenta cuando es de terraza plana. Esto se debe principalmente a que los momentos flexionantes ocasionados por las reacciones en los apoyos se ven equilibrados por los momentos provocados por la carga de los tímpanos, además de un incremento en la fuerza normal a lo largo de toda la estructura. Es de esperarse que los constructores de la colonia hayan observado la influencia del tamaño de los tímpanos en el comportamiento de las bóvedas que techaban sus estructuras, por lo que los primeros templos completamente abovedados presentaron terrazas planas continuas (Cholula, 1552 y Tula, 1554). Sin embargo, aunque el peso de estas terrazas planas proporcionan mayor estabilidad a las bóvedas, también implica que las techumbres sean excesivamente pesadas, lo cual va a ocasionar otro tipo de problemas a las construcciones, tales como mayores esfuerzos en los

elementos de soporte, hundimientos diferenciales en la cimentación y un incremento sustancial en la masa de la estructura.

Entonces se empezaron a idear nuevas formas más eficientes desde el punto de vista estructural, que pudieran solucionar este tipo de problemas. De acuerdo a los datos sobre las fechas de construcción de la mayor parte de los templos del siglo XVI, proporcionados por Kubler (1968), se puede deducir que la primer solución que adoptaron los constructores fue disminuir el volumen de los tímpanos de tal forma que se aligeraran las bóvedas sin que éstas perdieran su estabilidad; de esta forma, los tímpanos empezaron a utilizarse con un ángulo α de entre 40 y 60°. Esto resulta razonable, ya que como se puede observar en la figura 72 (cap. V), para este intervalo del ángulo α , el incremento en el valor del empuje horizontal (H) es relativamente bajo comparado con el incremento en el peso de la bóveda (2V); además se tiene una reducción de entre el 56%, para $\alpha = 40^\circ$, y el 30%, para $\alpha = 60^\circ$, del peso con la terraza continua.

Gracias a las ventajas que se obtuvieron con la reducción, hasta un cierto nivel, del volumen de los tímpanos, gran parte de los templos de una nave se construyeron de esta forma en la segunda mitad del siglo XVI (Xochimilco, Atotonilco el Grande, entre otros). Sin embargo, a pesar de estas ventajas, la parte superior o corona de la bóveda sufrió una reducción en su espesor, por lo que en algunas zonas (clave y riñones) se presentaron agrietamientos ante movimientos relativamente pequeños, ocasionando graves problemas en algunos templos, sobre todo en aquellos ubicados en zonas de alta sismicidad.

Posteriormente, con las mejoras tanto en la mano de obra como en las técnicas constructivas, fue posible realizar construcciones aún más eficientes, mediante el uso de nervaduras y bóvedas intersecadas (de arista, vahída y de cañón con lunetos) que proporcionaron mayor rigidez a las estructuras debido a un trabajo bidimensional en la estructura.

Los modelos que se realizaron mediante el método de flexibilidades proporcionaron, en algunos casos, expresiones algebraicas muy extensas, a pesar de que se hicieron algunas simplificaciones, tanto en el comportamiento y los materiales como en la geometría de la estructura. El principal objetivo de haber considerado estas simplificaciones fue el realizar un modelo sencillo pero que al mismo tiempo proporcionara una buena idea del comportamiento de este tipo de estructuras, así como algunos valores aproximados de la apertura que lleva a la bóveda a la condición crítica de falla. Para obtener valores más aproximados de dichas aperturas así como una idea más realista del comportamiento de este tipo de bóvedas, y en especial de la de Atotonilco el Grande, se optó por realizar un modelo de elementos finitos, en el cual se representó a la estructura con su geometría original.

Cabe señalar que en ambos modelos se realizaron los respectivos análisis considerando a la mampostería como un material elástico-lineal. Esto, que si bien puede ser una buena aproximación ante niveles bajos de esfuerzos (caso sin apertura en los apoyos), no lo es cuando la estructura se someta a grandes desplazamientos que ocasionan un incremento considerable en los esfuerzos y deformaciones, y por consiguiente un agrietamiento. Debido a esto, para la obtención de la resistencia se hicieron algunas modificaciones a los modelos.

Para el modelo de flexibilidades con el que se llevó a cabo el análisis de la bóveda de Atotonilco el Grande se utilizaron dos criterios para la determinación de la resistencia de la estructura: un planteamiento elástico (regla del tercio medio) y otro elasto-plástico (Heyman, 1968). Los dos planteamientos parten de distintas hipótesis y consideraciones

sobre el comportamiento de la mampostería, por lo que los resultados obtenidos presentaron ciertas diferencias. Los valores de apertura crítica que se obtuvieron considerando un comportamiento elástico fueron menores que los obtenidos considerando un comportamiento elasto-plástico, debido principalmente a que en este caso no se le proporcióna al material ninguna capacidad para redistribuir los esfuerzos de tensión que se van a presentar en algunas zonas de la estructura, lo cual es una premisa ciertamente conservadora.

Para los modelos realizados con elementos finitos se utilizó otro criterio para determinar la resistencia de la estructura, ante la apertura de sus apoyos. En este caso se analizaron los esfuerzos principales máximos a lo largo de toda la bóveda, y se compararon con los esfuerzos de ruptura de la mampostería que fueron supuestos (5kg/cm^2). Se pudo observar que ante una apertura cercana a los 5 centímetros en las zonas cercanas a la clave y a los arranques a partir de los tímpanos se superó el valor de dichos esfuerzos permisibles, por lo que se supuso que en estas zonas se iban a presentar agrietamientos.

Con el fin de poder analizar el comportamiento de la bóveda ante la presencia de las discontinuidades provocadas por los agrietamientos, se realizaron tres diferentes modelos, cada uno de los cuales intenta representar a la estructura en su etapa de comportamiento inelástico.

En el primer modelo se cambió la geometría de la bóveda colocando grietas en la clave por el intradós, y en los arranques por el extradós. En realidad, se ha observado que las bóvedas de cañón, al sufrir una apertura en sus apoyos, presentan agrietamientos muy marcados en estas zonas y agrietamientos de menor magnitud en zonas cercanas, los cuales no fueron considerados en este modelo. Esto tuvo como consecuencia que las deformaciones al igual que los esfuerzos fueran menores, por lo que la apertura crítica fue mayor que en los otros dos modelos de elementos finitos.

En el segundo modelo se conservó la geometría original, y para poder representar el cambio en el comportamiento de la estructura debido al agrietamiento, se disminuyó el módulo de elasticidad a un valor cercano a cero en las zonas cercanas a la clave y los arranques. La ventaja que presenta este segundo modelo con respecto al primero es que al disminuir el módulo de elasticidad en las zonas en donde se supone que van a haber discontinuidades, se va a poder representar la pérdida de resistencia del material en toda esta zona, es decir, que se van a considerar en el modelo los pequeños agrietamientos además de las grietas principales en la clave y los arranques, a diferencia del primer modelo.

Es importante señalar que el hecho de representar al material agrietado por medio de una zona en la cual se proporciona un material cuyo módulo de elasticidad es prácticamente nulo es una aproximación, ya que en realidad no se sabe hasta qué punto y con qué profundidad se van a presentar los agrietamientos en la estructura.

Las deformaciones en este modelo resultaron mayores, debido a la pérdida de rigidez de algunas zonas de la bóveda, lo cual tuvo como consecuencia que los esfuerzos fueran mayores y la apertura crítica menor que en el primer modelo. Otro aspecto de importancia que se puede observar en este modelo es que en las zonas de contacto entre el material ficticio ($E \approx 0$) y el material normal ($E = 20\,000\text{ kg/cm}^2$) se presentaron, ante la apertura crítica, algunas concentraciones de esfuerzo, lo cual entra en contradicción con la hipótesis inicial de que en el material ficticio los niveles de esfuerzo son muy bajos y por lo tanto también en las zonas de contacto de ambos materiales.

En el tercer modelo, con el objetivo de eliminar estas contradicciones, se eliminó el material agrietado en lugar de disminuir su módulo de elasticidad, suponiendo que el peso que se despreceja al no haberlo considerado es muy bajo. Se puede observar en los resultados que para este caso, al igual que en el segundo modelo, la apertura crítica es menor que en el primer modelo, debido principalmente a un aumento en los esfuerzos gracias a la reducción de la sección transversal en algunas zonas de la bóveda.

Luego de haber descrito algunas de las ventajas y limitaciones de mayor trascendencia, tanto de los modelos de flexibilidades como de los modelos de elementos finitos, se puede afirmar que el modelado de estructuras que van a presentar un comportamiento inelástico, debido a la presencia de agrietamientos y plastificaciones, ante ciertas sollicitaciones en su vida útil (como por ejemplo aperturas y cierres para el caso de las bóvedas), puede llegar a ser una tarea tan compleja como se deseé. El agrietamiento es un fenómeno que va a depender de un gran número de variables, muchas de las cuales no fueron consideradas en los modelos que se realizaron en este trabajo, debido a las dificultades que esto hubiera representado. Por estas razones, se realizaron diferentes modelos con el fin de poder representar tanto el patrón de agrietamientos como la resistencia de la mampostería, de diversas maneras, y así tener una idea aproximada del comportamiento de este tipo de bóvedas.

Finalmente, mediante el análisis realizado con los diversos modelos, se pudo observar la gran fragilidad que van a presentar las bóvedas de cañón corrido ante la apertura de sus apoyos, independientemente del planteamiento que se adquiriera a cerca de su resistencia. Sin embargo, también se pudo observar que, a pesar de dicha fragilidad, la apertura que lleve a la falla a la estructura va a ser varias veces mayor que la que provoque los primeros agrietamientos, debido a una considerable redistribución de esfuerzos. Esto indica que a pesar de que una bóveda se encuentre agrietada en la clave o en los apoyos no significa que ésta se encuentre en peligro de colapso.

En caso de que la apertura sea tal que se ponga en peligro la estabilidad de la estructura, es decir, que se encuentren cercanas al valor crítico, será necesario recurrir a algún tipo de refuerzo que pueda restringirla. Las dos soluciones más utilizadas son el uso de tensores colocados en los apoyos de la bóveda y el incremento en las dimensiones o en el número de contrafuertes por fuera de los muros de la nave.

Al producirse la separación de los apoyos en las bóvedas, la mampostería con la que se encuentran construidos se agrieta y entonces es necesario realizar diversas hipótesis para entender su comportamiento ante estas condiciones. En este trabajo se abordó el problema de manera analítica, sin embargo, dada la complejidad del problema y la necesidad de conocer con mayor precisión el comportamiento de este tipo de cubiertas se sugiere elaborar un modelo experimental, el cual permitirá validar los modelos analíticos y de ser necesario realizar las adecuaciones requeridas.

ANEXO 1.

1) Bóveda empotrada

Valores de la reacción vertical V , del empuje horizontal H y del momento de empotramiento M :

$$V := -\frac{1}{2} (r C \alpha - w l \pi - 2 r C \sin(\alpha) + C r \cos(\alpha) \sin(\alpha)) r$$

$$H := \frac{1}{36} (576 r^4 EA w l - 256 r^5 EA C + 256 r^5 EA C \cos(\alpha) - 88 r^5 EA C \sin(\alpha)^2 \cos(\alpha) + 216 r^5 EA C \sin(\alpha) \alpha + 24 r^5 EA C \sin(\alpha)^3 \pi - 48 r^5 EA C \sin(\alpha)^3 \alpha + 6 r^5 EI C \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3 \pi + 21 r^5 EI C \cos(\alpha) \sin(\alpha) \pi - 18 r^2 EI w l \pi^2 - 48 r^5 EI C \sin(\alpha) \pi + 27 r^5 EI C \alpha \pi - 54 r^4 EA w l \pi^2 + 51 r^5 EA C \cos(\alpha) \sin(\alpha) \pi - 6 r^5 EA C \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3 \pi - 96 r^5 EA C \sin(\alpha) \pi + 45 r^5 EA C \alpha \pi + 72 \delta EA EI \pi) / (r(-8 r^2 EA + \pi^2 EI + \pi^2 r^2 EA))$$

$$M := -\frac{1}{18} (27 r^5 EA C \alpha - 54 r^2 EI \pi w l - 27 r^5 EI C \cos(\alpha) \sin(\alpha) + 48 r^5 EI C \sin(\alpha) + 6 r^5 EI \cos(\alpha)^3 C \sin(\alpha) + 27 r^5 EA C \cos(\alpha) \sin(\alpha) - 6 r^5 EA \cos(\alpha)^3 C \sin(\alpha) - 90 r^4 EA \pi w l - 48 r^5 EA C \sin(\alpha) - 72 EI \delta EA - 21 EI r^3 C \cos(\alpha) \pi - 11 EI r^3 C \cos(\alpha)^3 \pi + 3 r^5 C \pi^2 EA \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 - 6 EI r^3 C \alpha \pi \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 - 21 r^5 C \cos(\alpha) \pi EA - 9 r^5 EA C \alpha \pi^2 - 9 r^5 EI C \cos(\alpha) \sin(\alpha) \pi^2 + 15 r^5 EA C \sin(\alpha) \pi^2 + 9 r^2 EI w l \pi^3 + 9 r^4 EA w l \pi^3 - 9 r^5 EI C \alpha \pi^2 + 32 r^5 C \pi EA - 6 r^5 C \alpha \pi EA \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 - 11 r^5 C \cos(\alpha)^3 \pi EA + 3 EI r^3 C \pi^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 - 21 r^5 C \sin(\alpha) \alpha \pi EA - 9 r^5 EA C \cos(\alpha) \sin(\alpha) \pi^2 - 21 EI r^3 C \sin(\alpha) \alpha \pi + 32 EI r^3 C \pi + 15 r^5 EI C \sin(\alpha) \pi^2 - 27 r^5 EI C \alpha) / (-8 r^2 EA + \pi^2 EI + \pi^2 r^2 EA)$$

donde C es:

$$C = \gamma h$$

2) Bóveda uniarticulada

Valores de H y M

$$H := -\frac{1}{36} (126 r^3 EA w l \pi + 18 r^2 EI w l \pi - 6 r^3 EI C \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3 + 6 r^5 EA C \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3 - 432 r^4 EA w l + 128 r^5 EA C - 45 r^5 EA C \alpha - 27 r^3 EI C \alpha - 72 \delta x EA EI - 108 r^5 EA C \sin(\alpha) \alpha + 48 r^3 EI C \sin(\alpha) + 96 r^5 EA C \sin(\alpha) - 24 r^5 EA C \sin(\alpha)^3 + 24 r^5 EA C \sin(\alpha)^2 \alpha - 51 r^3 EA C \cos(\alpha) \sin(\alpha) - 21 r^3 EI C \cos(\alpha) \sin(\alpha) - 128 r^5 EA C \cos(\alpha) + 44 r^5 EA C \sin(\alpha)^2 \cos(\alpha)) / ((-8 r^2 EA + 3 \pi r^2 EA + \pi EI) r)$$

$$M := -\frac{1}{36} (128 r^5 EA C + 99 r^5 EA C \alpha + 6 r^3 EA C \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3 - 6 r^3 EI C \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3 + 24 r^5 EA C \sin(\alpha)^3 + 24 r^5 EA C \sin(\alpha)^2 \alpha - 18 r^2 EI \pi w l - 21 r^3 EI C \cos(\alpha) \sin(\alpha) + 18 r^2 EI w l \pi^2 + 48 r^3 EI C \sin(\alpha) + 36 r^3 EI C \sin(\alpha) \pi - 54 r^5 EA C \alpha \pi - 18 r^3 EI C \alpha \pi + 93 r^5 EA C \cos(\alpha) \sin(\alpha) - 18 r^3 EI C \cos(\alpha) \sin(\alpha) \pi - 18 r^5 EA C \sin(\alpha)^3 \pi - 6 r^3 EI C \sin(\alpha)^3 \pi + 44 r^5 EA C \sin(\alpha)^2 \cos(\alpha) + 54 r^4 EA w l \pi^2 - 128 r^5 EA C \cos(\alpha) - 54 r^5 EA C \cos(\alpha) \sin(\alpha) \pi - 126 r^4 EA \pi w l + 108 r^5 EA C \sin(\alpha) \pi - 108 r^5 EA C \sin(\alpha) \alpha - 192 r^5 EA C \sin(\alpha) - 144 r^4 EA w l - 27 r^3 EI C \alpha - 72 \delta x EA EI) / (3 \pi r^2 EA + \pi EI - 8 r^2 EA)$$

3) Bóveda triarticulada

Valores del momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal:

$$M_{flex} := \frac{1}{2} w l r^2 \left(4 \sin\left(\frac{1}{2} \theta\right) \%1 \cos(\beta) - 2 \theta \sin(\beta + \theta) \cos(\beta) - \cos(\gamma)^2 \pi \cos(\beta) - 4 \cos(\%2)^2 \cos(\gamma) \sin(\gamma) \cos(\beta + \theta) - 2 \beta \sin(\beta + \theta) \cos(\beta) + 4 \cos(\%2) \sin(\%2) \cos(\beta + \theta) - 4 \cos(\%2) \sin(\%2) \cos(\beta) + 2 \beta \sin(\beta) \cos(\beta + \theta) - 2 \beta \cos(\beta + \theta) \cos(\gamma)^2 + 4 \cos(\%2)^2 \cos(\gamma)^2 \sin(\beta) + \pi \sin(\gamma) \sin(\beta) \cos(\gamma) - 4 \cos(\%2)^2 \cos(\gamma)^2 \sin(\beta + \theta) - 2 \theta \cos(\beta + \theta) \cos(\gamma)^2 + 4 \cos\left(\beta + \frac{1}{2} \theta\right) \sin\left(\frac{1}{2} \theta\right) \cos(\gamma)^2 + 2 \cos(\gamma)^2 \beta \cos(\beta) \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\pi \sin(\gamma) \sin(\beta + \theta) \cos(\gamma) + 4 \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\beta) \cos(\gamma)^2 \\
& - 4 \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\beta + \theta) \cos(\gamma)^2 + 2 \theta \sin(\beta + \theta) \cos(\beta) \cos(\gamma)^2 \\
& - 4 \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos(\beta) \cos(\gamma)^2 - 4 \cos\left(\beta + \frac{1}{2}\theta\right) \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos(\gamma)^2 \sin(\beta) \\
& + 2 \theta \cos(\beta + \theta) \cos(\gamma) \cos(\beta) \sin(\gamma) + 2 \theta \sin(\gamma) \sin(\beta + \theta) \cos(\gamma) \\
& - 2 \theta \sin(\gamma) \sin(\beta + \theta) \sin(\beta) \cos(\gamma) + 4 \sin(\gamma) \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\beta + \theta) \cos(\gamma) \\
& - 4 \sin(\gamma) \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\beta) \cos(\gamma) + 2 \beta \sin(\gamma) \sin(\beta + \theta) \cos(\gamma) \\
& - 2 \beta \sin(\gamma) \sin(\beta) \cos(\gamma) + 4 \cos(\frac{\theta}{2})^2 \cos(\gamma) \cos(\beta) \sin(\gamma) + 2 \theta \cos(\beta + \theta) \cos(\gamma)^2 \sin(\beta) \\
& - 4 \cos\left(\beta + \frac{1}{2}\theta\right) \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos(\gamma) \cos(\beta) \sin(\gamma) + 4 \sin(\gamma) \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos(\beta) \cos(\gamma) \\
& - 4 \sin(\gamma) \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos(\gamma) + \pi \sin(\beta + \theta) \cos(\beta) - \pi \sin(\beta) \cos(\beta + \theta) + \pi \cos(\beta + \theta) \cos(\gamma)^2 \\
& \Big) / (-\cos(\gamma) + \sin(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cos(\beta))
\end{aligned}$$

$$\%1 := \sin\left(\beta + \frac{1}{2}\theta\right)$$

$$\%2 := \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\pi$$

$$\begin{aligned}
Vx := & -\frac{1}{2} w / r \left(\%2 \pi \cos(\gamma) - \%2 \pi \sin(\beta) \cos(\gamma) - \%2 \pi \sin(\gamma) \cos(\beta) - 2 \%2 \beta \cos(\gamma) \right. \\
& + 2 \%2 \beta \sin(\beta) \cos(\gamma) + 2 \%2 \beta \sin(\gamma) \cos(\beta) - 2 \%2 \theta \cos(\gamma) + 2 \%2 \theta \sin(\beta) \cos(\gamma) \\
& + 2 \%2 \theta \sin(\gamma) \cos(\beta) + \%1 \pi \sin(\gamma) \sin(\beta) - \%1 \cos(\gamma) \pi \cos(\beta) - 2 \%1 \beta \sin(\gamma) \sin(\beta) \\
& \left. + 2 \%1 \cos(\gamma) \beta \cos(\beta) + 4 \%1 \cos\left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\pi\right)^2 \cos(\gamma) \right. \\
& \left. - 4 \%1 \sin(\gamma) \cos\left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\pi\right) \sin\left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\pi\right) \right) / (-\cos(\gamma) + \sin(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cos(\beta))
\end{aligned}$$

$$\%1 := \cos(\beta + \gamma + \theta)$$

$$\%2 := \sin(\beta + \gamma + \theta)$$

$$\begin{aligned}
Nx := & -\frac{1}{2} w / r \left(\%2 \pi \cos(\gamma) - \%2 \pi \sin(\beta) \cos(\gamma) - \%2 \pi \sin(\gamma) \cos(\beta) - 2 \%2 \beta \cos(\gamma) \right. \\
& + 2 \%2 \beta \sin(\beta) \cos(\gamma) + 2 \%2 \beta \sin(\gamma) \cos(\beta) - 2 \%2 \theta \cos(\gamma) + 2 \%2 \theta \sin(\beta) \cos(\gamma) \\
& \left. + 2 \%2 \theta \sin(\gamma) \cos(\beta) - \%1 \pi \sin(\gamma) \sin(\beta) + \%1 \cos(\gamma) \pi \cos(\beta) + 2 \%1 \beta \sin(\gamma) \sin(\beta) \right)
\end{aligned}$$

$$- 2 \sin(\gamma) \cos(\beta) - 4 \cos\left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\pi\right)^2 \cos(\gamma)$$

$$+ 4 \sin(\gamma) \cos\left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\pi\right) \sin\left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\pi\right) (-\cos(\gamma) + \sin(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cos(\beta))$$

$$\%1 := \sin(\beta + \gamma + \theta)$$

$$\%2 := \cos(\beta + \gamma + \theta)$$

ANEXO 2

Momento en los apoyos para caso de la bóveda empotrada con $\alpha = 45^\circ$

$$M_{45} := -\frac{1}{72} r^2 (-360 r^2 EA w l \pi + 101 \pi r EI C + 155 r^3 EA C \pi + 36 w l \pi^3 r^2 EA + 36 w l \pi^3 EI - 216 EI w l \pi + 21 r^3 C \pi^2 EA \sqrt{2} - 48 r EI C - 53 r^3 C \sqrt{2} \pi EA - 53 r C \sqrt{2} \pi EI + 48 r^3 EA C - 18 \pi^2 r EI C - 18 r^3 EA C \pi^2 + 96 r EI C \sqrt{2} - 96 r^3 EA C \sqrt{2} - 9 r C \pi^3 EI - 9 r^3 C \pi^3 EA + 21 r C \sqrt{2} \pi^2 EI) / (-8 r^2 EA + \pi^2 EI + \pi^2 r^2 EA)$$

Momento en los apoyos para el caso de la bóveda uniarticulada con $\alpha = 45^\circ$

$$M_{45} := \frac{1}{144} (72 r^2 EI \pi w l - 216 r^4 EA w l \pi^2 + 504 r^4 EA \pi w l - 72 r^2 EI w l \pi^2 + 576 r^4 EA w l - 704 r^5 EA C + 18 r^3 EI C \pi^2 + 54 r^5 EA C \pi^2 + 63 r^3 EI C \pi + 9 r^5 EA C \pi - 150 r^5 EA C \sqrt{2} \pi + 572 r^5 EA C \sqrt{2} - 66 r^3 EI C \sqrt{2} \pi - 96 r^3 EI C \sqrt{2} + 48 r^3 EI C + 288 \delta x EA EI) / (3 \pi r^2 EA + \pi EI - 8 r^2 EA)$$

Momento en los apoyos para el caso de la bóveda empotrada con $\alpha = 90^\circ$

$$M_{90} := \frac{1}{36} r^2 (-9 \pi^2 r EI C + 108 EI w l \pi - 18 w l \pi^3 r^2 EA + 180 r^2 EA w l \pi - 91 r^3 EA C \pi - 37 \pi r EI C - 96 r EI C + 96 r^3 EA C - 9 r^3 EA C \pi^2 - 18 w l \pi^3 EI + 9 r C \pi^3 EI + 9 r^3 C \pi^3 EA) / (-8 r^2 EA + \pi^2 EI + \pi^2 r^2 EA)$$

Momento en los apoyos para el caso de la bóveda uniarticulada con $\alpha = 90^\circ$

$$M_{90} := \frac{1}{72} (36 r^2 EI w l \pi + 252 r^4 EA w l \pi + 288 r^4 EA w l - 195 r^5 EA C \pi - 33 r^3 EI C \pi + 80 r^5 EA C + 144 \delta x EA EI - 36 r^2 EI w l \pi^2 - 108 r^4 EA w l \pi^2 - 96 r^3 EI C + 54 r^5 EA C \pi^2 + 18 r^3 EI C \pi^2) / (-8 r^2 EA + 3 \pi r^2 EA + \pi EI)$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Meli, Roberto. "Ingeniería Estructural de Edificios Históricos". Fundación ICA A.C. , México, 1998.
- Kubler, George. "Arquitectura mexicana del siglo XVI". FCE. México, 1948.
- Lajous, Jaime. "Tesoros de la Alta Mixteca". Azabache, 1994
- Henestrosa, Andrés. "Catedrales de México". CVS, México, 1994.
- Popov, Edgar. "Introducción a la mecánica de sólidos". Limusa, México, 1997.
- Heyman, Jacques. "The safety of masonry arches". Artículo publicado en la Pergamon Press en noviembre de 1968. Department of Engineering, University of Cambridge. Inglaterra.
- Andrews, Ewart. "Theory and design of structures". Chapman and Hall LTD. Londres, 1958.
- Fernández, Carlos. "Cálculo de arcos". Dossat, Madrid, 1955.
- Saliger. "Estática Aplicada. Arcos, bóvedas y cúpulas". México, 1978.