

01173  
15



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

*"LA INFLUENCIA DE LA CONDUCTIVIDAD TERMICA  
VARIABLE EN EL PROCESO DE CONDENSACION"*

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERIA MECANICA  
( AREA DE TERMO FLUIDOS )**

**P R E S E N T A**

**JOSE JOAQUIN LIZARDI DEL ANGEL**

**DIRECTOR DE TESIS  
DR. CESAR TREVIÑO TREVIÑO**

**UNAM  
POSGRADO** 

**MEXICO. D. F.**

**2003**

**A**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## *Dedicada a mi Familia y Amigos*

### *Agradecimientos*

*Deseo agradecerle a mi tutor el Dr. Cesar por su confianza y apoyo incondicional durante todo este periodo. Al Dr. Federico por sus enseñanzas y la paciencia que me tuvo para trabajar.*

*Deseo agradecer a Erick y su familia por todo su apoyo, a Pedro por confiar en mí y ayudarme a terminar esta empresa en mi vida.*

*Quiero dedicar y agradecer a mi Madre y a mi Hermana por creer en mí, para ustedes una especial dedicatoria de este trabajo.*

*Agradezco a mi Familia todos ellos han tenido que ver en mi desarrollo como persona y profesionista, a todos y a cada uno de ustedes de doy mil gracias.*

*Al CONACYT por la beca que se me otorgo durante mi estudios.*

*Al IMP por la beca complementaria que se me otorgo para la realización de este trabajo.*

*A mis compañeros y amigos del cubículo que me apoyaron durante este periodo (Irais, Jorge, Anselmo y Lorenzo).*

*A la familia Arenas Del Angel, Chiquini Lizardi, Lizardi Vargas, Del Angel (todos).*

*En especial a mi Tia englantina y mi Tio Toño y a mi Tia Leni y mi Tio Toño, por el apoyo que me brindaron aquí en la Cd. de Mexico.*

*En tu memoria Julio*

• Servicio de Bibliotecas •  
• Formato electrónico e impreso el  
• mi número de identificación.  
Jose Joaquin Becerra  
Del Angel  
16/05/03

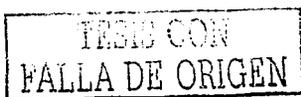


B

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>6</b>
1.1	Justificación . . . . .	6
1.2	Antecedentes . . . . .	7
1.3	Objetivo de la investigación . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Planteamiento del problema</b>	<b>12</b>
2.1	Descripción del problema . . . . .	12
2.2	Ecuaciones generales de la mecánica de fluidos y transferencia de calor . . . . .	14
2.3	Definición de aleta corta y aleta larga . . . . .	15
2.4	Análisis general de órdenes de magnitud . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Estudio y análisis del caso: Aleta corta</b>	<b>21</b>
3.1	Adimensionalización de las ecuaciones que gobiernan el problema . . . . .	21
3.1.1	Ecuación en el sólido . . . . .	23
3.1.2	Condiciones de frontera en el sólido . . . . .	23
3.1.3	Ecuación de la capa de fluido condensado . . . . .	24
3.1.4	Condiciones de frontera de la capa de fluido condensado . . . . .	24
3.2	Esquema numérico . . . . .	28
3.3	Análisis del esquema numérico cerca de los valores críticos . . . . .	30

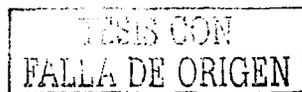


<b>4</b>	<b>Estudio y análisis del caso: Aleta larga</b>	<b>34</b>
4.1	Adimensionalización de las ecuaciones . . . . .	34
4.1.1	Valores adimensionales en la aleta . . . . .	34
4.1.2	Valores adimensionales en el fluido condensado . . . . .	35
4.2	Ecuaciones Adimensionales: Caso Aleta Larga . . . . .	36
4.2.1	Ecuación para la aleta . . . . .	36
4.2.2	Ecuación para el fluido condensado . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Resultados y conclusiones</b>	<b>42</b>



# Índice de Figuras

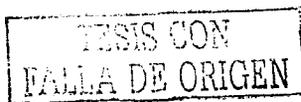
1-1	Conductividad termica vs Temperatura en el caso en el que esta disminuye.	7
1-2	Conductividad termica vs Temperatura en el caso en el que esta aumenta.	8
2-1	Esquema general del proceso de condensación en aletas. . . . .	13
3-1	Descripción grafica del caso aleta corta . . . . .	22
3-2	Perfiles de $\phi_0$ y $\phi_1$ , y sus derivada como una función de $\zeta$ para los valores críticos de $s, s_w$ . . . . .	33
4-1	Descripción grafica del caso aleta larga. . . . .	35
5-1	Soluciones asintóticas y numéricas de perfil de velocidades, $\theta_w$ como una función de la coordenada longitudinal $\chi$ , para distintos valores del parámetro $\gamma$ y $s = 2.5$ . . . . .	43
5-2	Espesor adimensional de capa de condensado $\Delta$ como una función de la coordenada $\chi$ , para diferentes valores del parámetro $\gamma$ y $s = 2.5$ . . . . .	44
5-3	Espesor de capa de condensado adimensional en la base de la aleta $\Delta_f$ , como una función del parámetro $\gamma$ , para tres valores diferentes de $s > s_w$ . . . . .	45
5-4	Solución numérica y asintótica para el valor crítico de $s, s_w$ , como una función del parámetro $\gamma$ . . . . .	46
5-5	Temperatura de la aleta adimensional y espesor de capa de condensado para tres distintos valores de $\gamma$ , en el valor crítico de $s, s_w$ . . . . .	47



- 5-6 Espesor de capa de condensado adimensional en la base de la aleta  $\Delta_j$  como función de  $s$  para diferentes valores de  $\gamma$ . Se muestran también las relaciones del análisis asintótico para aletas largas y cortas. . . . . 48
- 5-7 Valores típicos para los parámetros más importantes del grosor medio de la aleta  $h = 0.001$  m, con una longitud  $L = 0.05$  m con una diferencia de temperatura de 50 K entre la base de la aleta y el vapor de agua saturado. Las aletas están construidas con seis diferentes materiales . . . . . 49

## Letras Latinas

- $c_c$  Calor específico del fluido condensado [J/Kg\*K]
- $f_c$  Función de corriente adimensional
- $g$  Aceleración de la gravedad [m/seg<sup>2</sup>]
- $h$  Semigrosor de la aleta [m]
- $h_{fg}$  Calor latente de la condensación [J/Kg\*K]
- $Ja$  Numero de Jacob
- $L$  Longitud de la aleta [m]
- $m_c$  Flujo masico de fluido condensado [Kg/seg]
- $p$  Presión [N/m<sup>2</sup>]
- $Pr_c$  Número de Prandtl del fluido condensado
- $Re$  Número de Reynolds del fluido condensado
- $T$  Temperatura [K]
- $T_0$  Temperatura en la base de la aleta [K]
- $T_s$  Temperatura del vapor saturado [K]
- $T_w$  Temperatura en la entrecara de la aleta [K]
- $\bar{u}, \bar{v}$  Velocidades longitudinales y transversales en unidades físicas [m/seg]
- $u, v$  Velocidades longitudinales y transversales adimensionalizadas
- $u_c$  Velocidad longitudinal característica del fluido condensado [m/seg]
- $s$  Penetración Térmica de la Temperatura sobre la aleta
- $x, y$  Coordenadas Cartesianas



$z$  Coordenada transversal adimensional de la placa

## Letras Griegas

$\gamma$  Deflexión de la conductividad térmica por la temperatura

$\Delta$  Espesor de la Capa lfinite normalizada

$\delta$  Espesor de la Capa Lfinite

$\epsilon$  Razón de longitud de la placa

$\eta_c$  Coordenada adimensional para el fluido condensado

$\sigma$  Longitud adimensional

$\phi$  Función adimensional de la temperatura

$\lambda_c$  Conductividad térmica de la fase condensada [W/m\*K]

$\lambda_w$  Conductividad térmica de la aleta [W/m\*K]

$\nu_c$  Viscosidad dinámica del fluido condensado [m<sup>2</sup>/seg]

$\mu_c$  Coeficiente cinemático de viscosidad del fluido condensado [N\*seg/m<sup>2</sup>]

$\rho_c$  Densidad del fluido condensado [Kg/m<sup>3</sup>]

$\eta_w$  Temperatura adimensional de la aleta

$\eta_c$  Temperatura adimensional de la capa de condensado

$\chi$  Coordenada adimensional de reescalamiento

$\xi$  Coordenada adimensional longitudinal

$z$  Coordenada adimensional de reescalamiento

## Subíndices

$c$  Fluido Condensado

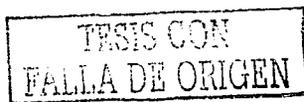
$f$  Condiciones en la base de la aleta

$w$  Condiciones en la aleta

$\omega$  Condiciones críticas

## Superíndice

\* Parametro obtenido de la longitud característica  $L^*$



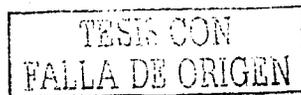
# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Justificación

El análisis de la transferencia de calor en una capa de fluido condensado representa una importante área para el diseño de sistemas de intercambiadores de calor, dentro de los cuales existe un tipo en específico que es el de aletas. Una aleta es el arreglo físico donde se tiene una placa sujeta a una temperatura de referencia constante en su base y en la cual existe una transferencia de calor a lo largo de la misma. Es de particular interés el estudio del flujo laminar de capas de fluido condensado en aletas, donde frecuentemente los aspectos físicos prácticos tienen una clara influencia en el control y desarrollo de aletas eficientes. Por ello es importante obtener un planteamiento teórico capaz de cimentar un mejor diseño de aletas de enfriamiento.

La mayoría de las investigaciones realizadas sobre transferencia de calor y condensación - que se citan en el apartado correspondiente a los antecedentes, consideran que la conductividad térmica de los materiales es constante. Esta simplificación en muchos casos prácticos no es válida. El presente estudio lleva como proposición e innovación, el estudiar la transferencia de calor en aletas donde la conductividad varíe como una función lineal de la temperatura, como puede observarse, en las gráficas que se presentan en las figuras 1-1 y 1-2 para diferentes materiales. Al comparar estas gráficas, puede notarse



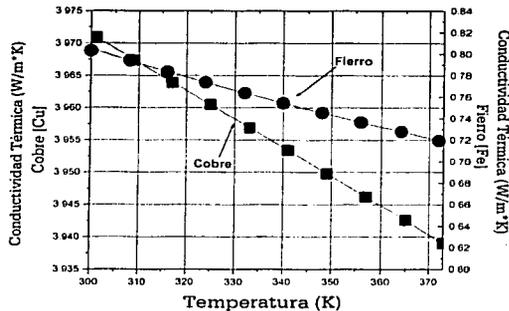


Figura 1-1: Conductividad térmica vs Temperatura en el caso en el que esta disminuye.

que esta variación puede tener tanto pendiente positiva, como pendiente negativa, hecho que va a depender de las características intrínsecas del material con que se trabaje. Por esta razón, el análisis que se presenta en este estudio toma en cuenta ambos casos, pues se considera indispensable no limitar las posibilidades de aplicación práctica al considerar tan sólo uno de los eventos. Los datos que se presentan en las figuras 1-1 y 1-2 tienen como referencia el compendio de información elaborado por Touloukian [1].

## 1.2 Antecedentes

Una de las compilaciones más recientes sobre los avances científicos y tecnológicos relacionado con la fundamentación teórico - práctica del desarrollo de transferencia de calor sobre intercambiadores de calor, es la elaborada por Sundén y Hegggs [2]. Uno de sus capítulos está enfocado específicamente, al tratamiento de este fenómeno en aletas. Los

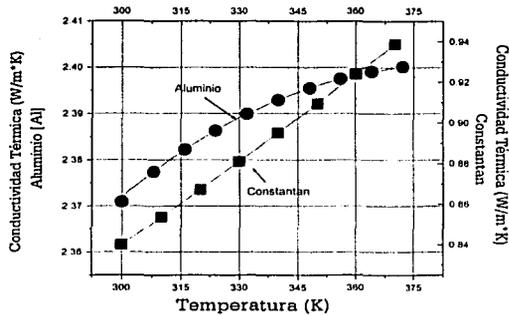
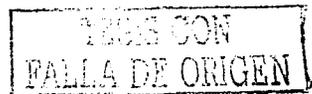


Figura 1-2: Conductividad térmica vs Temperatura en el caso en el que esta aumenta.

autores enfatizan la influencia de las variables termodinámicas (conductividad térmica, capacidad calorífica, entre otras) sobre la eficiencia del sistema. Estos investigadores llaman la atención sobre el hecho de que estas variables necesitan ser consideradas al momento de evaluar el proceso de transferencia de calor, para un amplio rango de aplicaciones prácticas en aletas.

Nusselt [3], en su artículo pionero estudió el proceso de condensación producido por el contacto de una placa vertical con temperatura baja y uniforme con un vapor saturado. Consideró que el movimiento de la película de condensado tenía lugar en régimen laminar, deduciendo que el flujo de condensado sobre la superficie era generado únicamente por la fuerza de gravedad, eliminando la posible influencia de la viscosidad del vapor sobre el espesor de la película de condensado. Nusselt supuso velocidad nula sobre el condensado de la pared y velocidad máxima en la interfaz líquido - vapor, obteniendo las ecuaciones de movimiento que describen la evolución del espesor de la capa de condensado a lo



largo de la placa. Como resultado calculó los coeficientes locales de transferencia de calor, estableciendo la hipótesis de que la resistencia térmica del sistema es producida en el área que existe en la entrecara vapor - líquido de la capa de condensado y la placa, suponiendo que la diferencia de temperatura entre el vapor y la pared es constante en todos los puntos. Describió los coeficientes promedio de transferencia de calor en términos de cuatro variables físicas del sistema: la conductividad térmica, la viscosidad, la densidad del condensado y la diferencia entre la temperatura del vapor y el sólido. El modelo propuesto por Nusselt necesita ser reevaluado en términos de idealizaciones y simplificaciones, puesto que al realizar un análisis en situaciones reales su utilidad de aplicación se reduce. Por lo tanto se hace necesaria una redefinición de modelos más realistas y una selección más apropiada de las características del sistema de intercambio de calor, sobre todo para problemas de transferencia de calor conjugado, en los que el acoplamiento entre la aleta y el fluido condensado predomina.

Sparrow y Gregg [4], entre otros, resolvieron numéricamente las ecuaciones de la capa de condensado inducida por la gravedad en una placa vertical. Estos autores, emplearon la teoría de capa límite y métodos de semejanza para una placa a temperatura uniforme, mostrando que la influencia de los términos inerciales no era importante si el número de Prandtl es de orden  $\geq 10$ , y tienen una pequeña influencia cuando el número de Prandtl es de orden unidad. La importancia de estos resultados han sido recopilados y documentados por Merte [5] y extendida por Koh [6], Koh *et al.* [7] y Chen [8]. En general el estado del arte sobre el proceso de condensación en superficies isotérmicas fue resumido por Rose [9] y más recientemente por Tanasawa [10].

Estos trabajos representan una parte esencial en el estudio de flujo laminar de capa de condensado, y se reservan sólo a aquellas situaciones donde la temperatura de la superficie de la placa se mantiene uniforme. Se debe tener en cuenta que estos resultados son sólo válidos para casos ideales, tal como fue reconocido por Patankar y Sparrow [11] en su estudio numérico de capa de fluido condensado laminar sobre la aleta vertical; en este trabajo el proceso de condensación se encuentra acoplado con la conducción de calor

en la aleta. Ellos usaron un análisis similar y concluyeron que el calor calculado para la aleta es menor al predicho por el modelo de la aleta isotérmica. Wilkins [12] había mostrado que una solución analítica explícita es posible para la formulación de Patankar y Sparrow [11].

Sarma *et al.* [13] estudiaron un proceso de condensación en una aleta vertical de espesor variable acoplando las ecuaciones que gobiernan al problema de la aleta vertical y la fase de fluido condensado. En este trabajo fue analizado el efecto de la geometría de la aleta sobre el calor transferido al fluido condensado, donde la influencia de la interacción térmica aparece teniendo una primordial importancia. Para el mismo problema, pero con espesor uniforme de la aleta, Chen *et al.* [14] resolvieron la interacción acoplada en presencia del esfuerzo cortante de la entrecara líquido-vapor, remarcando la influencia de los números de Prandtl ( $Pr$ ), Jacob ( $Ja$ ) y Nusselt ( $Nu$ ).

Méndez y Treviño [15] resolvieron el problema de condensación laminar sobre una superficie en una placa delgada generada por un fluido refrigerante utilizando técnicas de perturbación y métodos numéricos. En este trabajo, ellos mostraron que los efectos de la conducción longitudinal de calor en la placa modifican sustancialmente la solución clásica de Nusselt. Resultados similares fueron reportados en trabajos posteriores [16]-[18].

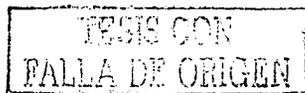
En los últimos años, se ha realizado un número importante de investigaciones sobre el fenómeno de transferencia de calor en aletas con conductividad térmica variable. Hung y Appl [19], calcularon el desarrollo de la conductividad térmica sobre la aleta con temperatura dependiente de la conductividad, así como el flujo de calor de la aleta en términos del cambio en la temperatura de ésta. Por otra parte, Aziz y Huq [20], Krane [21], Muzzio [22], Aziz y Benzies [23], y Aziz y Na [24], realizaron estudios bastante completos, utilizando técnicas de perturbaciones regulares, sobre la influencia de la conductividad térmica variable en el desempeño de la transferencia de calor en aletas para los casos estacionarios y transitorios. Más recientemente, Chiu y Chen [25] utilizaron un método de separación de variables para evaluar la eficiencia y la longitud óptima en el estudio de

la convección en aletas con conductividad térmica variable.

### 1.3 Objetivo de la investigación

Los modelos mencionados previamente permiten un mejor conocimiento del fenómeno. Sin embargo, éste resulta todavía muy limitado. Por ello, es necesario obtener nuevos resultados donde las condiciones no isotérmicas sean utilizadas para ampliar el campo de aplicación de los modelos teóricos presentados. En este trabajo se describe el proceso de condensado en una aleta vertical, cuya base se encuentra a una temperatura uniforme e inferior a la temperatura de vapor saturado en contacto con la aleta. En un trabajo previo realizado por Méndez et. al. [18], se estudió el proceso de condensación a lo largo de la aleta, pero considerando la conductividad térmica de la misma, como constante.

La base teórica que sustenta el presente trabajo, está conformada por un sistema conjugado de transferencia de calor entre la aleta y la capa de condensado, donde los efectos de conducción de calor longitudinales y transversales están fuertemente influenciados por el cambio en la conductividad térmica de la aleta, que a su vez depende del gradiente de temperatura que experimenta y del material que la constituye. Las herramientas matemáticas utilizadas para la elaboración de este modelo, son: técnicas de perturbación, análisis de capa límite, análisis asintótico y solución numérica de ecuaciones diferenciales, donde la descripción entre el fluido de condensado y la aleta depende de cinco variables principales: el número de Prandtl, el número de Jakob,  $s$  que es el parámetro de penetración térmica,  $\gamma$  que es el parámetro adimensional relacionado con la conductividad térmica de la aleta, y  $\varepsilon$  que es la razón de aspecto de la aleta. Con todo ello, se calcula el espesor final de la capa de condensado, que está relacionada con el flujo másico de condensado, en términos del cambio en la conductividad térmica del material con el que está manufacturada la aleta. El análisis del flujo másico de condensado permitirá obtener la configuración más eficiente del sistema.



# Capítulo 2

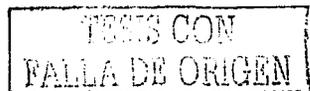
## Planteamiento del problema

### 2.1 Descripción del problema

El proceso de condensación de un fluido sobre una superficie extendida se produce cuando el vapor que se encuentra a temperatura de saturación entra en contacto con una superficie extendida a temperatura menor, lo que generará un cambio de fase de gas a líquido. El calor absorbido por este proceso provocará un cambio en la temperatura de la superficie donde se realiza la condensación, ocasionando que la relación entre la temperatura de la superficie, en este caso la aleta, y el vapor se vea alterada, este cambio estará determinado por el número de Jacob.

Dependiendo de las condiciones físicas del sistema como la presión, la rugosidad de la superficie y la velocidad del gas, entre otras, pueden generarse dos procesos distintos: condensación de capa o condensación por gota, como lo describen Rose [9] y Tanasawa [10], en sus compendios sobre el proceso de condensación. El presente trabajo estudiará el proceso de condensación laminar de capa de condensado, bajo los supuestos de que la presión en la entrecara vapor-líquido es la hidrostática y que la velocidad del fluido condensado, en la zona de contacto, igual.

Consideremos una aleta delgada de altura  $L$  y espesor  $2h$ , de manera que la relación de esbeltez dada por  $h/L$  es muy pequeña comparada con la unidad (ancho entre longitud).



Si ponemos en contacto la aleta en una atmósfera que contenga un vapor saturado a una temperatura  $T_s$ , y en la base de la aleta tenemos una fuente refrigerante de temperatura  $T_0 \ll T_s$ , se generará un flujo de calor a través de la aleta, que irá desde el vapor saturado hacia la base de ésta. Lo anterior creará una capa de fluido condensado a lo largo de ambas caras de la aleta. Por la simetría del problema se centrará la atención en un solo lado de la aleta. La capa de fluido condensado que se forma en la cara superior de la aleta es muy pequeña para aletas delgadas y su contribución al flujo másico de condensado es despreciable por lo tanto. Por simplicidad se considera esta cara de la aleta como adiabática, tal como se muestra la figura 2-1. Por el efecto de la gravedad sobre el fluido condensado, éste se almacenará en la base de la aleta aumentando el espesor de la capa de condensado en dicha región. La esquina superior derecha de la aleta se considera como el origen de las coordenadas cartesianas, donde el eje  $y$  corre en dirección perpendicular a la entrecara de la aleta y el eje  $x$  en la dirección de la gravedad.

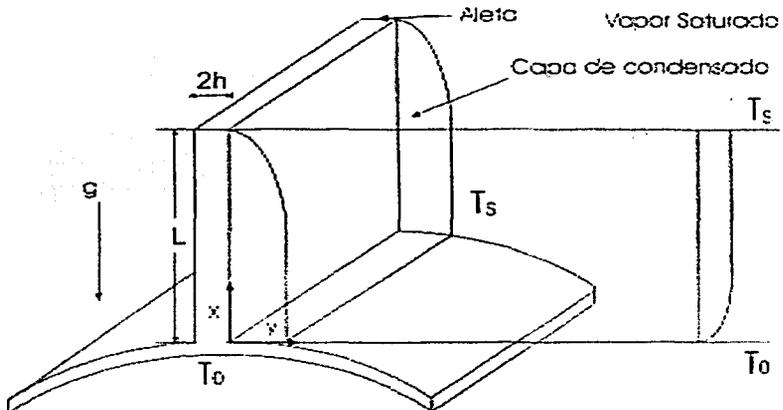


Figura 2-1: Esquema general del proceso de condensación en aletas.

## 2.2 Ecuaciones generales de la mecánica de fluidos y transferencia de calor

La representación teórica del proceso de condensación en la aleta se encuentra dada por un sistema de ecuaciones, que permite reproducir la naturaleza de la transferencia de calor entre las superficies y los fluidos. Se tiene así, por un lado, que el calor que fluye a través de la aleta se encuentra descrito por la ley de Fourier, donde se acepta que éste se distribuye a través de ella sólo por conducción; mientras que, por el otro, el vapor condensado es descrito por las ecuaciones que rigen la evolución del fluido, que son la ecuación de continuidad derivada de la ecuación de conservación de masa, la ecuación de cantidad de movimiento derivada de la segunda Ley de Newton, y la ecuación de conservación de energía derivada de la primera Ley de la Termodinámica.

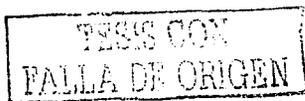
Para clarificar el presente sistema de ecuaciones se recurrió al análisis de órdenes de magnitud, donde las ecuaciones antes mencionadas serán representadas y utilizadas para encontrar las principales variables del problema y conocer los términos de éstas que describen la evolución del proceso en estudio.

El punto de partida será la ecuación de continuidad que está dada por

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

en la que se observa que  $\bar{u}_c \sim L\bar{v}_c/\delta_c$  (donde el subíndice  $c$  hace referencia a la capa de fluido condensado).

Por otra parte, las ecuaciones de cantidad de movimiento estacionarias para un fluido incompresible, con viscosidad dinámica  $\mu$ , densidad  $\rho$ ,  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  son las componentes del vector de velocidad en dirección  $x$  y  $y$  respectivamente,  $g$  es la aceleración de la gravedad, y  $p$  es la presión:



$$\rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_c g + \mu \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right] \quad (2.2)$$

$$\rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right] \quad (2.3)$$

La ecuación de la energía en el fluido

$$\rho_c c_p \left[ \bar{u} \frac{\partial T_c}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial T_c}{\partial y} \right] = \lambda_c \left[ \frac{\partial^2 T_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} \right] \quad (2.4)$$

Donde  $T_c$  es la temperatura,  $\rho_c$  es la densidad del fluido condensado y  $\lambda_c$  la conductividad térmica.

La ecuación que rige la temperatura aleta esta descrita por la ecuación de conducción, esta es presentada con la dependencia de la conductividad térmica del material y en dos dimensiones,

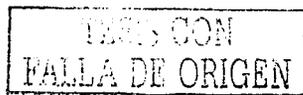
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.5)$$

para este caso  $T_w$  es la temperatura de la aleta y  $\lambda_w$  la conductividad térmica.

## 2.3 Definición de aleta corta y aleta larga

En los trabajos anteriores se consideraba el régimen de pared térmicamente delgada y el régimen de pared térmicamente gruesa, como los parámetros que nos permitían determinar la eficiencia de la aleta medida en términos del espesor de capa de condensado, tomando a priori que la conductividad térmica del material era igual a infinito, caso para el cual la temperatura de la base de la aleta era exactamente la temperatura en toda la aleta. Este caso ideal no se verificaba jamás en la práctica, por lo que se hizo necesaria una redefinición de los parámetros que miden la eficiencia de la aleta.

Al plantear el problema y las ecuaciones fundamentales que rigen el proceso de con-



densación en aletas, se hizo evidente que las variables físicas mencionadas en el párrafo anterior ya no eran adecuadas, por lo que es necesario redefinir el concepto de régimen de transferencia de calor, bajo el cual trabajan las aletas, para enunciarlo en términos de la longitud de penetración térmica que se explica a continuación.

Si la conductividad térmica del material con el que está manufacturado la aleta es grande, la penetración térmica del enfriamiento de la base de la aleta se verá reflejada hasta la parte superior de la aleta cuando llegue al estado estacionario, para ese caso la longitud de penetración térmica  $L^*$  será mayor o igual a la longitud total de la aleta  $L$ . Este caso se define como aleta corta 2-1.

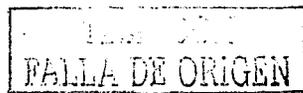
$$L \leq L^* \quad (2.6)$$

Sin embargo, no todos los materiales tienen la misma conducción térmica, para el caso de aquellos cuya conductividad es menor, la penetración térmica de la temperatura de la base no alcanzará la parte superior de la aleta, lo que generará que ésta tome la temperatura del vapor saturado evitando la generación de fluido de condensado, a esta región se le denomina zona seca. En este caso la longitud de penetración térmica es menor a la longitud de la aleta, por lo que se define como aleta larga.

$$L > L^* \quad (2.7)$$

Se observa entonces que la longitud de penetración térmica se puede definir de dos maneras, por simplicidad invocamos una variable que nos unificará ambos conceptos y que denominaremos  $s$ , donde  $s = L^*/L$ , de tal manera que el análisis teórico y numérico del proceso de condensación nos permita obtener los valores indicados de  $s$  que determinan si se está trabajando bajo el régimen de aleta corta o de aleta larga.

No hay que perder de vista que el objetivo de esta tesis es determinar el efecto de la conductividad térmica variable sobre el proceso de condensación, por lo que debemos tener en cuenta que  $s$  cambiará no sólo en términos de la conductividad térmica ( $\lambda$ ), sino



también de la temperatura, pues ésta influye en  $\lambda$ , y ambas nos ayudan a determinar el espesor de capa de condensado, que finalmente afectará la eficiencia de la aleta, es decir, la máxima penetración térmica en términos de la conductividad, para el material del que está hecha la aleta.

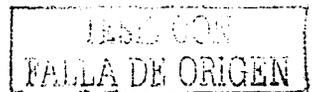
## 2.4 Análisis general de órdenes de magnitud

Retomando la descripción del problema de la sección 2.1, consideraremos primero una aleta de longitud  $L$ , que tendrá asociada una longitud de penetración  $L^*$ , caso para el que se tendrá que definir el punto en el cual la temperatura de la aleta sea igual a la temperatura de saturado, es necesario estimar la transferencia de calor que se da sobre el sistema completo y la energía que se necesita para producir la capa de condensado. Si consideramos que  $\delta$  es el espesor de condensado generado en el proceso de condensación y que ésta es pequeña en comparación con  $L^*$  podemos obtener el balance energético sobre la entrecara de la aleta y el fluido condensado, considerando el balance del flujo de calor en la entrecara de la aleta tomando en cuenta que el flujo de calor en ese punto es igual para el fluido y energía absorbida por el cambio de fase y para la cara de la aleta, tal como se muestra a continuación.

$$\frac{\lambda_c L^* (T_s - T_0)}{\delta} \sim \frac{\lambda_w h (T_s - T_0)}{L^*} \sim h_{fg} \rho_c U_c \delta. \quad (2.8)$$

Aquí  $\lambda_c$  y  $\lambda_w$  son las respectivas conductividades térmicas del fluido condensado y de la aleta,  $h_{fg}$  es el calor latente de condensación para el vapor saturado,  $\rho_c$  es la densidad del fluido condensado.  $U_c$  la podemos obtener de la ecuación de cantidad de movimiento definida en (2.2) en términos del espesor de la capa de fluido condensado tal como lo muestra el siguiente análisis de órdenes de magnitud. Invocamos a la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en dirección  $x$ ,

$$\rho_c \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho_c g + \mu \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right]. \quad (2.9)$$



Asignamos a cada uno de los términos una magnitud que nos caracterice el valor de cada uno de los términos de la ecuación en razón de la física del problema,

$$\rho_c \left( \frac{U_c^2}{L^*} + \frac{U_c^2}{L^*} \right) \simeq -\frac{\bar{p}}{L^*} + \rho_c g + \mu \left[ \frac{U_c}{\delta^2} + \frac{U_c}{(L^*)^2} \right]. \quad (2.10)$$

Considerando el hecho  $L^*$  es grande en comparación de  $h$  los términos que están divididos por  $L^*$  son pequeños y por lo tanto en orden de magnitud son despreciables, por lo que el balance de fuerzas de la ecuación 2.10 se reduce a la siguiente expresión

$$\rho_c g \sim \frac{\mu U_c}{\delta^2}, \quad (2.11)$$

por lo que,

$$U_c \sim (g/\nu_c) \delta^2. \quad (2.12)$$

Para este caso  $\nu_c$  corresponde a la viscosidad cinemática del fluido condensado. Retomando la relación (2.8), podemos sustituir la velocidad característica  $U_c$  en el tercer término de ésta y obtener una relación entre el espesor de capa de condensado y la longitud de penetración térmica  $L^*$ , quedando como

$$\delta \sim [\lambda_c \nu_c (T_s - T_0) L^* / \rho_c h_{fg} g]^{1/4}. \quad (2.13)$$

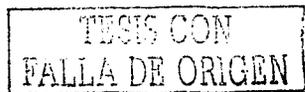
A partir de este orden de magnitud de la ecuación (2.13) se puede encontrar una relación explícita para la longitud de penetración térmica, la cual es descrita por la siguiente ecuación.

$$L^* = 4^{1/7} \frac{\nu_c^{2/7}}{g^{1/7}} [h]^{4/7} \left( \frac{Ja}{Pr_c} \right)^{1/7}, \quad (2.14)$$

donde  $Ja$  es el número de Jakob definido como  $Ja = c_c(T_s - T_0)/h_{fg}$ .

Dentro de esta relación también aparece el número de Prandtl para el fluido condensado, esta definido por  $Pr_c = \rho_c \nu_c c_c / \lambda_c$ .

En términos de la longitud de penetración, el análisis de órdenes de magnitud nos



permite observar la cantidad de flujo másico de condensado correspondiente al problema, el cual es descrito independientemente de la longitud de la aleta y tal como se había mencionado antes debe depender solamente de la longitud de penetración, por lo tanto el flujo másico de condensado está dado por

$$m_c^* \sim \rho_c U_c \delta \sim \rho_c g^{1/4} \nu_c^{1/2} J a^{3/4} L^{3/4} / P r_c^{3/4} \quad (2.15)$$

El valor mostrado por la ecuación es la producción del flujo másico máximo que se puede obtener para el caso de que la longitud de penetración sea igual es total de la aleta, de manera análoga es posible también obtener el flujo máximo de condensado en términos de la longitud real de la aleta, esta relación es obtenida también del análisis de órdenes de magnitud y es

$$m_c \sim \rho_c g^{1/4} \nu_c^{1/2} L^{3/4} J a^{3/4} / P r_c^{3/4}. \quad (2.16)$$

Estos valores son importantes ya que nos permiten obtener el desarrollo de la eficiencia de la aleta en términos de la cantidad de flujo condensado que se genera en la entrecara, por lo que este valor será importante al momento de comparar el flujo de condensado para materiales con distintas conductividades térmicas y distintos parámetros  $\gamma$ .

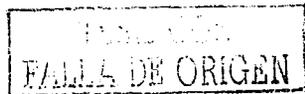
Un parámetro importante en el planteamiento del problema es precisamente  $\gamma$ , que es una variable que describe la deflexión de la conductividad térmica en términos del cambio de la temperatura. A continuación se presenta la definición de esta variable a través de expansiones de la linealización de la serie Taylor alrededor de  $\lambda_{w0}$ ,

$$\lambda_w = \lambda_{w0} + \frac{d\lambda_w}{dT} \Delta T, \quad (2.17)$$

por lo tanto

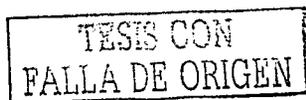
$$\lambda_w = \lambda_{w0} \left( 1 + \gamma \frac{(T - T_0)}{\Delta T} \right), \quad (2.18)$$

donde  $\gamma$  es definida como



$$\gamma = \frac{d\lambda_w}{dT} \frac{\Delta T_w}{\lambda_{w0}} \quad (2.19)$$

En este caso  $\gamma$  es el parámetro asociado con la conductividad térmica de la aleta en términos de la temperatura, lo que significa que cuando aumenta la temperatura y  $\gamma$  es positiva la conductividad aumenta, dándose el caso contrario cuando  $\gamma$  es negativa. La influencia de este parámetro se mostró en la figura 1 y 2 del capítulo introductorio de la presente tesis.



## Capítulo 3

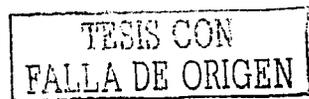
# Estudio y análisis del caso: Aleta corta

En este capítulo se aplican técnicas asintóticas con el fin de resolver el sistema de ecuaciones no lineales que rige al problema. El tratamiento se realiza en el caso estacionario. Las técnicas de perturbación asintótica se utilizan en los intervalos paramétricos que propone el análisis de orden de magnitud del apartado anterior, comenzando por el límite para el cual  $s \gg 1$ . La figura del problema 3-1 muestra el caso de la aleta corta para el cual la longitud de penetración  $L^*$  es igual a la longitud total de la aleta, por lo tanto el condensado se desarrolla a lo largo de la aleta.

### 3.1 Adimensionalización de las ecuaciones que gobiernan el problema

En esta sección utilizaremos el concepto de adimensionalización, consistente en reescribir las variables del problema en parámetros universales que permitan al sistema describirlo independientemente de las magnitudes físicas del problema.

Para adimensionalizar un sistema de ecuaciones tomamos las variables que definen el



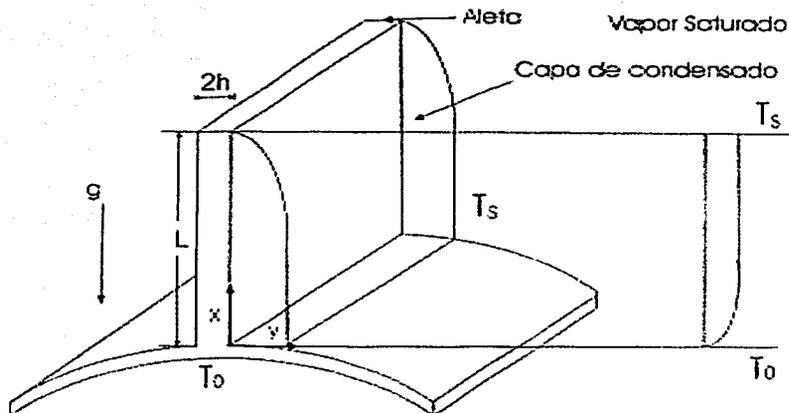


Figura 3-1: Descripción grafica del caso aleta corta

problema y las redefinimos en términos de los parámetros característicos y los sustituimos de nuevo en el sistema de ecuaciones 2.1-2.4. Finalmente se presenta el sistema completo de ecuaciones para el fluido y la aleta, que junto con las condiciones de frontera definen completamente el sistema físico. Se utilizan los siguientes cambios de variable para adimensionalizar las ecuaciones y reescalar según el análisis de órdenes de magnitud de la sección anterior:

a) Para el sólido donde definimos la temperatura y las coordenadas longitudinales y transversales.

$$\theta_w(\chi, z) = \frac{T_s - T_w(x, y)}{T_s - T_0}, \quad (3.1)$$

$$\chi = \frac{L - x}{L},$$

$$z = \frac{y - h}{h}$$

b) En el flujo de fluido condensado definimos además el espesor adimensional de la capa de fluido condensado

$$\theta_c(x, \eta_c) = \frac{T_s - T_c(x, y)}{T_s - T_0}, \quad (3.2)$$

$$\Delta = \frac{\delta_c(x)}{L(J\alpha/\Omega)^{1/4}}, \quad (3.3)$$

$$\eta_c = \frac{y}{\delta_c(x)}. \quad (3.4)$$

### 3.1.1 Ecuación en el sólido

Usando la adimensionalización arriba descrita, la ecuación de conducción de calor adimensional para la aleta corta que se encuentra descrita como:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ (1 + \gamma(1 - \theta_w)) \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \right] + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1 + \gamma(1 - \theta_w)) \frac{\partial \theta_w}{\partial z} \right] = 0. \quad (3.5)$$

### 3.1.2 Condiciones de frontera en el sólido

Cabe recalcar que las variables con subíndice  $c$  se refieren a las de la fase condensada, mientras que la que contiene subíndice  $w$  corresponde a la aleta. Las condiciones de frontera, en dirección longitudinal están dada por:

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial X} \right|_{X=0} = 0 \text{ y } \theta_w = (1, z) = 1, \quad (3.6)$$

mientras que en dirección transversal, las condiciones de frontera toman la forma:

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \text{ y } [1 + \gamma(1 - \theta_w)] \left. \frac{\partial \theta_w}{\partial z} \right|_{z=1} = \frac{\varepsilon^2}{s^{7/4} \Delta} \left. \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \right|_{\eta_c=0} \quad (3.7)$$

### 3.1.3 Ecuación de la capa de fluido condensado

Ahora se define la función de corriente adimensional,  $f_c$ , que contendrá a las variables  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  en una sola variable, permitiendo eliminar la ecuación de continuidad. Así, las componentes de velocidad toman la forma:

$$u = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gLJa}} = \Delta^2 \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c}; \quad v = \frac{\bar{v}\gamma^{1/4}}{Ja^{3/4}\sqrt{gL}} = -\frac{\partial(\Delta^3 f_c)}{\partial \chi} + \eta_c \Delta^2 \frac{\partial f_c}{\partial \chi} \frac{\partial \Delta}{\partial \chi}, \quad (3.8)$$

Sustituyendo las variables en las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de energía para el fluido condensado, usando aproximación de capa límite, toman la forma:

$$\frac{\partial^3 f_c}{\partial \eta_c^3} + 1 = Ja \Delta^4 \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \chi \partial \eta_c} - \frac{\partial f_c}{\partial \chi} \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} + \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\chi} \left[ 2 \left( \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \right)^2 - 3 f_c \frac{\partial^2 f_c}{\partial \eta_c^2} \right] \right\} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_c}{\partial \eta_c^2} = Ja Pr_c \Delta^4 \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \frac{\partial \theta_c}{\partial \chi} - \frac{\partial f_c}{\partial \chi} \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} - \frac{3}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\chi} f_c \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \right\}. \quad (3.10)$$

### 3.1.4 Condiciones de frontera de la capa de fluido condensado

Las condiciones de frontera asociadas con las ecuaciones que gobiernan al fluido condensado son

$$\theta(\chi, 0) - \theta_w(\chi) = f_c(\chi, 0) = \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \Big|_{\eta_c=0} \quad \text{a } \eta_c = 0, \quad (3.11)$$

$$\theta(\chi, 1) = \frac{\partial^2 f_c}{\partial \eta_c^2} \Big|_{\eta_c=1} = 0 \quad \text{a } \eta_c = 1. \quad (3.12)$$

La segunda condición de la ecuación salió del balance tangencial en la entrecara [9], donde se desprecian los efectos viscosos en el vapor. El espesor de la capa de fluido condensado normalizada y adimensionalizada es desconocida y debe ser obtenida del análisis del problema. De el balance energético en la interfaz del vapor fluido condensado se obtiene

la ecuación de evolución de la capa de condensado adimensional  $\Delta$ , dada por

$$4\Delta \frac{d(\Delta^3 f_c(\chi, 1))}{d\chi} = -\frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \Big|_{\eta_c=1}, \text{ con } \Delta(\chi=0) = 0. \quad (3.13)$$

En la solución del problema definido por las ecuaciones (3.7-3.13) resulta que la temperatura en la aleta debe ser de la forma

$$\theta_c = \theta_w(\chi, z : s, \varepsilon, Pr, Ja). \quad (3.14)$$

Lo que se presentará de aquí en adelante es un análisis tomando valores de  $Ja$  y  $\varepsilon^2$  muy pequeños comparados con la unidad. En este límite la solución a la ecuación que gobierna a la fase condensada con las ecuaciones (3.9) y (3.10) con sus respectivas condiciones de frontera, queda como

$$\theta_c = \theta_w(\chi)(1 - \eta_c) \text{ y } f_c(\eta_c) = \frac{1}{2}\eta_c^2 \left(1 - \frac{\eta_c}{3}\right). \quad (3.15)$$

Por lo tanto la ecuación adimensional del balance de energía de la entrecara de vapor y fluido condensado se transforma en

$$\frac{d\Delta^4}{d\chi} = \theta_w, \quad (3.16)$$

con la condición inicial de que  $\Delta(0) = 0$ .

Para valores de  $\varepsilon$  pequeño comparado con la unidad, la ecuación de conducción de calor para la aleta puede ser integrada en el límite de aleta térmicamente delgada; puede aplicarse a ésta las condiciones de frontera (3.11) y junto con el perfil de temperatura adimensional del fluido condensado obtenido en la ecuación (3.15), se llegó a

$$s^{\frac{3}{4}} \frac{d}{d\chi} \left[ \left(1 + \gamma(1 - \theta_w) \frac{d}{d\chi}\right) \right] = \frac{\theta_w}{\Delta}, \quad (3.17)$$

con las condiciones de frontera dadas por la ecuación 3.6.

El sistema de ecuaciones (3.16) y (3.17) y la correspondiente condición de frontera, se



resuelven utilizando técnicas de perturbación, usando el inverso de  $s^{\frac{1}{4}}$  como un pequeño parámetro de expansión.

Para valores muy grandes del parámetro  $s$ , la temperatura adimensional de la placa  $\theta_w$  cambia muy poco ( del orden de  $s^{-\frac{1}{4}}$ ) en la dirección longitudinal. Para poder obtener la solución en este límite se propone el siguiente desarrollo:

$$\theta_w(\chi) = \theta_0(\chi) + \sum_{j=1}^{\infty} s^{-j\frac{1}{4}} \theta_j(\chi), \quad (3.18)$$

$$\Delta(\chi) = \Delta_0(\chi) + \sum_{j=1}^{\infty} s^{-j\frac{1}{4}} \Delta_j(\chi). \quad (3.19)$$

Introduciendo las siguientes relaciones en las ecuaciones (3.16) y (3.17), obteniendo el orden cero de éstas, el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\frac{d}{d\chi} \left[ (1 + \gamma(1 - \theta_0)) \frac{d\theta_0}{d\chi} \right] = 0, \quad \frac{d\Delta_0}{d\chi} = \theta_0, \quad \text{para } s^0. \quad (3.20)$$

Este sistema se puede integrar de manera directa, aplicando sus correspondientes condiciones iniciales y de fronteras(3.14) a que los valores  $\theta_0 = 1$  y  $\Delta_0 = \chi^{1/4}$ , que son los que representan la solución clásica de Nusselt[3] para una placa isotérmica. Estos resultados son sustituidos en la ecuación de orden uno, obteniendo el siguiente sistema:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\chi^2} = \frac{1}{\chi^{1/4}}, \quad \frac{4d(\chi^{3/4}\Delta_1)}{d\chi} = \theta_1, \quad \text{para } s^{-\frac{1}{4}} \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2\theta_2}{d\chi^2} + \frac{\Delta_1}{\chi^{1/4}} \frac{d^2\theta_1}{d\chi^2} - \gamma \left( \frac{d\theta_1}{d\chi} \right)^2 + \gamma\theta_1 \frac{d^2\theta_1}{d\chi^2} = \frac{\theta_1}{\chi^{1/4}}, \quad (3.22)$$

$$\frac{d(4\chi^{3/4}\Delta_2 + 6\chi^{1/2}\Delta_1^2)}{d\chi} = \theta_2, \quad \text{para } s^{-\frac{1}{2}}$$



Este sistema se resuelve integrando en dos ocasiones, y de este orden en adelante las condiciones iniciales y de frontera se encuentran dadas por:

$$\Delta_i(0) = \theta_0(1) - 1 = \left. \frac{d\theta_i}{dX} \right|_{X=0} = 0, \text{ para toda } i \quad (3.23)$$

y

$$\theta_i(1) = 0, \text{ para toda } i > 0. \quad (3.24)$$

El resultado de la integración son los siguientes valores de  $\theta_1$  y  $\Delta_1$ :

$$\theta_1 = \frac{16}{21} (X^{7/4} - 1), \quad (3.25)$$

$$\Delta_1 = \frac{4}{21} \left( \frac{4}{11} X^2 - X^{1/4} \right). \quad (3.26)$$

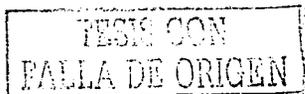
De manera similar encontramos los términos de segundo orden:

$$\theta_2 = \frac{64}{35} \left( \frac{10}{231} + \frac{30\gamma}{189} \right) (X^{7/2} - 1) - \frac{64}{441} (3 + 4\gamma) (X^{7/4} - 1), \quad (3.27)$$

$$\Delta_2 = \left[ \frac{32}{315} \left( \frac{10}{231} + \frac{30\gamma}{189} \right) - \frac{384}{53361} \right] X^{15/4} \quad (3.28)$$

$$- \left[ \frac{16}{35} \left( \frac{10}{231} + \frac{30\gamma}{189} \right) - \frac{8}{441} (3 + 8\gamma) \right] X^{1/4} - \frac{256}{4851} \gamma X^2$$

Con lo anterior queda determinado, a nivel teórico, el espesor de capa de condensado y la temperatura a lo largo de la aleta, este resultado será comparado en las conclusiones con el resultado numérico de las ecuaciones que gobiernan el problema. Es importante hacer notar que la perturbación de la conductividad térmica producida por el parámetro  $\gamma$ , aparece hasta la expansión a segundo orden de las ecuaciones señaladas. Un resultado importante dentro de los objetivos del problema es el de determinar el espesor final de



capa de condensado, por lo que dicho resultado queda indicado, para cualquier  $s$ , por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\Delta_f = \Delta(1) &= 1 - \frac{1}{s^{7/4}} \frac{4}{33} + \frac{1}{s^{14/4}} \left( \frac{104}{3267} + \gamma \frac{32}{891} \right) + \dots \\ &= 1 - \frac{.1212}{s^{7/4}} + \frac{.0318(1 + 1.1282\gamma)}{s^{14/4}}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

### 3.2 Esquema numérico

Los resultados obtenidos con el método de perturbación se validaron numéricamente a través del método de Runge-Kutta al cuarto orden descrito en el Apéndice, con lo que se obtuvo el perfil de temperaturas y el desarrollo de la capa de condensado para cualquier  $\gamma$ .

Considerando el problema de condensación en el regímen de aleta corta con conductividad variable se realizó una transformación de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales a una ecuación diferencial ordinaria, donde el sistema de condiciones iniciales y de frontera será transformando a un sistema de ecuaciones de condiciones iniciales, para utilizar el método de Runge-Kutta de un solo disparo.

Como se había visto con anterioridad el sistema de ecuaciones acopladas entre la aleta y fluido condensado son:

Para el sólido:

$$s^{7/4} \frac{d}{d\chi} \left\{ [1 + \gamma(1 - \theta_w)] \frac{d\theta_w}{d\chi} \right\} = \frac{\theta_w}{\Delta}. \quad (3.30)$$

Para el fluido:

$$\frac{d\Delta^3}{d\chi} = \theta_w. \quad (3.31)$$

La condiciones iniciales y de frontera para ambas ecuaciones son:

$$\Delta(\chi = 0) = 0, \quad (3.32)$$

$$\left. \frac{d\theta_w}{d\chi} \right|_{\chi=0} = 0, \quad (3.33)$$

$$\theta_w(\chi = 1) = 1. \quad (3.34)$$

Si se desarrolla la ecuación 3.30 realizando la multiplicación de las derivadas se obtiene el siguiente resultado,

$$[1 + \gamma(1 - \theta_w)] \frac{d}{d\chi} \left( \frac{d\theta_w}{d\chi} \right) + \frac{d\theta_w}{d\chi} \frac{d}{d\chi} [1 + \gamma(1 - \theta_w)] = \frac{\theta_w}{s^{7/4} \Delta}, \quad (3.35)$$

$$[1 + \gamma(1 - \theta_w)] \frac{d^2 \theta_w}{d\chi^2} + \frac{d\theta_w}{d\chi} \frac{d}{d\chi} [(1 + \gamma) - \gamma \theta_w] = \frac{\theta_w}{s^{7/4} \Delta}, \quad (3.36)$$

$$[1 + \gamma(1 - \theta_w)] \frac{d^2 \theta_w}{d\chi^2} - \gamma \left( \frac{d\theta_w}{d\chi} \right)^2 = \frac{\theta_w}{s^{7/4} \Delta}, \quad (3.37)$$

de donde se despeja la derivada de mayor orden, obteniendo:

$$\frac{d^2 \theta_w}{d\chi^2} = \frac{\frac{\theta_w}{s^{7/4} \Delta} + \gamma \left( \frac{d\theta_w}{d\chi} \right)^2}{[1 + \gamma(1 - \theta_w)]}, \quad (3.38)$$

y se propone entonces el cambio de variable

$$\zeta = \frac{\chi}{s}, \quad \phi = \frac{\Delta^4}{s}. \quad (3.39)$$

Tomando en cuenta este cambio la ecuación diferencial parcial no lineal se convierte en una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, la cual se puede resolver con el

método numérico Runge-Kutta de un solo disparo

$$\frac{d^3 \phi}{d\zeta^3} = \frac{\phi^{1/4} \left( \frac{d\phi}{d\zeta} \right) + \gamma \left( \frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} \right)^2}{1 + \gamma \left( 1 - \frac{d\phi}{d\zeta} \right)} \quad (3.40)$$

que tiene como condiciones iniciales:

$$\zeta(0) = \begin{cases} \frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} = \phi = \frac{d\phi}{d\zeta} - \frac{d\phi_f}{d\zeta} \\ \frac{d\phi_f}{d\zeta} \leq 1 \end{cases} \quad (3.41)$$

Una vez reescrita la ecuación diferencial se utiliza el método de Runge-Kutta para obtener el perfil de temperaturas y el desarrollo de la capa de condensado, así como los valores finales de éstos.

### 3.3 Análisis del esquema numérico cerca de los valores críticos

El análisis teórico del problema y el método numérico utilizado muestran un punto crítico que corresponde al valor de  $s$  en el cual se abandona el régimen de aleta corta para entrar al régimen de aleta larga. Esta sección muestra cómo se obtuvo el valor crítico de  $s$  y el análisis asintótico que apoyó al esquema numérico para obtener los valores correspondientes de  $s$  en términos de la variación del parámetro de conductividad térmica variable  $\gamma$ . Para la resolución numérica del problema se realizó un programa en Fortran 90 utilizando el método de Runge-Kutta.

Retomando la ecuación (3.40) y reescribiéndola se obtiene

$$\left[ 1 + \gamma \left( 1 - \frac{d\phi}{d\zeta} \right) \right] \frac{d^3 \phi}{d\zeta^3} = \frac{1}{\phi^{1/4}} \left( \frac{d\phi}{d\zeta} \right) + \gamma \left( \frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} \right)^2, \quad (3.42)$$

con condiciones iniciales

$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2} = \frac{d\phi}{d\zeta} - a_I = \phi = 0 \text{ en } \zeta = 0, \quad (3.43)$$

para valores iniciales de  $a_I < 1$ . El cálculo, en el programa, se desarrolla hasta alcanzar el valor de  $d\phi/d\zeta|_{\zeta_I} = 1$ . Para valores diferentes de  $\zeta_I(a_I, \gamma)$  dependiendo del parámetro  $\gamma$ , se obtiene el valor apropiado de  $s$  tal que  $s = 1/\zeta_I$ . El problema de valor inicial representa una ecuación diferencial de tercer orden, tal como se había visto en la ecuación (3.42) con condiciones iniciales dadas por (3.43). Los valores críticos de  $s$ ,  $s\omega$ , pueden ser obtenidos utilizando la idea de que el valor inicial de  $a_I = 0$ . Para valores de  $s$  más pequeños que  $s\omega(\gamma)$ , no se produce capa de condensado en el tope de la aleta, obteniéndose una zona seca en esa región. La temperatura en el tope de la aleta es exactamente la misma que la temperatura de  $T_s$ . El análisis de este fenómeno es explicado de forma más completa en el siguiente capítulo.

La función  $s\omega(\gamma)$  puede ser obtenida utilizando este método numérico. Cerca del tope de la aleta, el comportamiento asintótico de  $\phi$  se encuentra dado por  $\phi \sim \zeta^8/42^4 + \dots$  para  $\zeta \rightarrow 0$ . Este comportamiento necesita iniciar a través de una integración numérica. Sin embargo, para valores de  $\gamma$  muy pequeños en comparación con la unidad, se puede encontrar una expansión en serie de potencias utilizando técnicas de perturbación y obtener una solución que contenga la siguiente forma  $\phi = \phi_0(\zeta) + \gamma\phi_1(\zeta) + \dots$ . La solución de esta ecuación nos lleva a que para orden cero, ésta es reducida a  $\phi_0 = \zeta^8/42^4$ , mientras que el orden  $\phi_1(\zeta)$  está dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{d^3\phi_1}{d\zeta^3} - \frac{1}{\phi_0^{1/4}} \frac{d\phi_1}{d\zeta} + \frac{\phi_1}{4\phi_0^{5/4}} \frac{d\phi_0}{d\zeta} = \left( \frac{d^2\phi_0}{d\zeta^2} \right)^2 - \frac{d^3\phi_0}{d\zeta^3} \left( 1 - \frac{d\phi_0}{d\zeta} \right), \quad (3.44)$$

para resolver con condiciones iniciales  $\phi_1(0) = 0$ . De hecho, el comportamiento asintótico de la solución de  $\phi_1 \sim -4\zeta^8/42^4$ , para  $\zeta \rightarrow 0$ . La temperatura adimensional de la aleta es  $\theta_w = d\phi_0/d\zeta + \gamma d\phi_1/d\zeta + \dots = 8\zeta^7/42^4 + \gamma d\phi_1/d\zeta + \dots$ . Hasta la base de la aleta  $\zeta = \zeta_I = \zeta_{f0} + \gamma\zeta_{f1}$ ,  $\theta_w = 1$ , con  $\zeta_{f0} = 42^{4/7}/8^{1/7} = 6.2887$ . Además el valor  $\zeta_{f1}$  está



dado por

$$\zeta_{f1} = -\frac{42^4}{56} \frac{d\phi_1/d\zeta|_{\zeta_{f0}}}{\zeta_{f0}^6} = 3.1444. \quad (3.45)$$

El valor crítico de  $s$ ,  $s\omega$ , es entonces en la forma (3.45),

$$s\omega = 1/\zeta_f = 0.159 - 0.0795\gamma + \dots \quad (3.46)$$

El valor crítico de  $s$  decrece con  $\gamma$ . La figura (3-2) muestra  $\phi_0$  y  $\phi_1$  y sus derivadas correspondientes en función de la coordenada longitudinal reescalada  $\zeta$ .

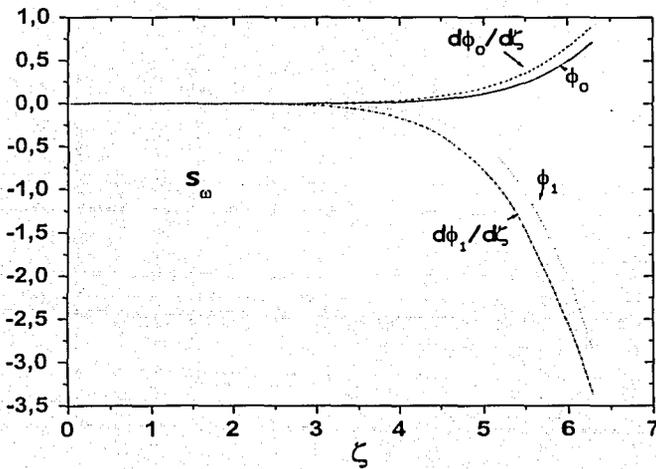


Figura 3-2: Perfiles de  $\phi_0$  y  $\phi_1$ , y sus derivada como una función de  $\zeta$  para los valores críticos de  $s$ ,  $s_w$ .

## Capítulo 4

# Estudio y análisis del caso: Aleta larga

Para aletas largas la longitud total de la aleta es irrelevante, por lo que el análisis de orden de magnitud debe introducir como referencia la longitud de penetración térmica  $L^*$  y no la longitud total de la aleta. El esquema que representa este caso es el siguiente

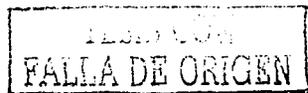
### 4.1 Adimensionalización de las ecuaciones

Se presenta otra vez la adimensionalización del sistema de ecuaciones ahora en términos de la longitud de penetración térmica de la aleta.

#### 4.1.1 Valores adimensionales en la aleta

Se muestran los valores adimensionales de la aleta para la temperatura y para las coordenadas longitudinales y trasversales, en dirección longitudinal tomando como referencia la longitud de penetración térmica y en dirección trasversal el ancho de la aleta.

$$\theta_w(\chi, z) = \frac{T_s - T_w(x, y)}{T_s - T_0}; \sigma = \frac{x}{L^*}, z = \frac{y - h}{h}, \quad (4.1)$$



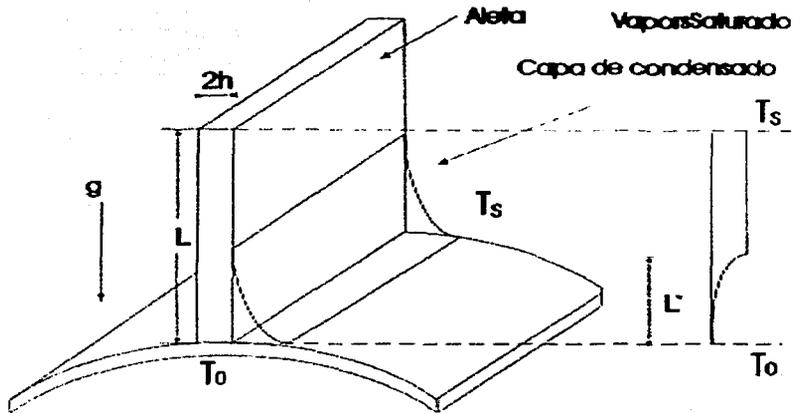


Figura 4-1: Descripción gráfica del caso aleta larga.

#### 4.1.2 Valores adimensionales en el fluido condensado

Se exponen los valores adimensionales del fluido condensado de la temperatura y de las coordenadas longitudinales y trasversales, adimensionalizando en dirección longitudinal la penetración térmica y los valores obtenidos del flujo másico de condensado, mientras que en dirección trasversal el espesor de capa de condensado.

$$\theta_c(\chi, \eta_c) = \frac{T_s - T_c(x, y)}{T_s - T_0}, \Delta^*(\chi) = \frac{g^{1/4} \delta_c(x) Pr_c^{1/4}}{4^{1/4} L^{1/4} \nu_c^{1/2} Ja^{1/4}}, \eta_c = \frac{y}{\delta_c(x)}, \quad (4.2)$$

$$u = \frac{\bar{u} Pr_c^{1/2}}{2(gL^3 Ja)^{1/2}} = \Delta^* \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c}; \quad v = \frac{Pr_c^{3/4} L^{1/4}}{4^{3/4} Ja^{3/4} g^{1/4} \nu_c^{1/2}} \bar{v} = -\frac{\partial(\Delta^3 f_c)}{\partial \chi} + \Delta^{*2} \eta_c \frac{d\Delta^*}{d\chi} \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c}, \quad (4.3)$$

los parámetros utilizados en esta adimensionalización son exactamente los mismos que se usaron en el capítulo anterior, salvo aquellos con superíndice de asterisco, que representan

valores relacionados con la longitud térmica de penetración.

## 4.2 Ecuaciones Adimensionales: Caso Aleta Larga

Se presentan a continuación las ecuaciones que rigen al proceso de condensación para el caso de aleta larga, éstas se encuentran acopladas en la entrecara de la aleta a través del flujo de calor:

### 4.2.1 Ecuación para la aleta

Invocamos la ecuación de conducción de calor bidimensional en la aleta donde se muestra la influencia del parámetro  $\gamma$  sobre dicho fenómeno

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ (1 + \gamma(1 - \theta_w)) \frac{\partial \theta_w}{\partial \sigma} \right] + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1 + \gamma(1 - \theta_w)) \frac{\partial \theta_w}{\partial z} \right] = 0, \quad (4.4)$$

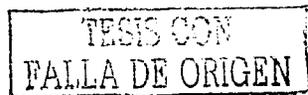
### 4.2.2 Ecuación para el fluido condensado

Se muestran las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento y la ecuación de la energía para el fluido condensado tomando en cuenta los términos inerciales y viscosos del problema.

$$\frac{\partial^3 f_c}{\partial \eta_c^3} - 1 = \frac{4 \text{Ja}}{\text{Pr}_c} \Delta^* \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \sigma \partial \eta_c} - \frac{\partial f_c}{\partial \sigma} \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} + \frac{1}{\Delta^*} \frac{d\Delta^*}{d\sigma} \left[ 2 \left( \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \right)^2 - 3 f_c \frac{\partial^2 f_c}{\partial \eta_c^2} \right] \right\} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_c}{\partial \eta_c^2} = 4 \text{Ja} \Delta^* \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} \frac{\partial \theta_c}{\partial \sigma} - \frac{\partial f_c}{\partial \sigma} \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} - \frac{3}{\Delta^*} \frac{d\Delta^*}{d\sigma} f_c \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \right\}. \quad (4.6)$$

Los parámetros adimensionales de la deflexión de la conductividad térmica en términos de temperatura y la razón de aspecto del tamaño de la aleta quedan definidos como se muestra a continuación.



$$\gamma = \frac{(T_x - T_0)}{\lambda_{w0}} \frac{d\lambda_w}{dT} \Big|_{\sigma=0} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{h}{L^*}. \quad (4.7)$$

La constante  $\lambda_{w0}$  corresponde a la conductividad térmica del material con que está construida la aleta, referenciada a la temperatura en la base de ésta. El efecto de la conductividad térmica variable se representa por  $\gamma$ , que puede tomar un valor positivo o negativo, lo que significa que la conductividad del material puede aumentar o disminuir dependiendo del signo de ésta, situación que se muestra de manera gráfica en la introducción de este trabajo. Para cualquier caso,  $|\gamma| \ll 1$ .

Las condiciones de frontera en la aleta son las siguientes

$$\theta_w \Big|_{\sigma \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{y} \quad \theta_w(0, z) = 1 \quad (4.8)$$

y

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{y} \quad [1 + \gamma(1 - \theta_w)] \frac{\partial \theta_w}{\partial z} \Big|_{z=1} = \frac{\varepsilon^2}{\Delta^*} \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \Big|_{\eta_c=0} \quad (4.9)$$

Las condiciones de frontera asociadas al fluido condensado quedan descritas de la siguiente manera

$$\theta_c(\sigma, 0) - \theta_w(\sigma) = f_c(\sigma, 0) = \frac{\partial f_c}{\partial \eta_c} = 0 \quad \text{a} \quad \eta_c = 0 \quad (4.10)$$

$$\theta_c(\sigma, 1) = \frac{\partial^2 f_c}{\partial \eta_c^2} = 0 \quad \text{a} \quad \eta_c = 1. \quad (4.11)$$

Hasta este momento el espesor de capa de condensado adimensional es desconocido, a través del análisis de órdenes de magnitud, presentado en el capítulo dos, obtenemos el flujo másico total de condensado medido en términos de la base de la aleta, quedando definido como lo muestra el siguiente análisis.

$$m_c^* = \rho_c \int_0^{\xi_c} \bar{n} dy = \frac{4^{3/4}}{3} g^{1/4} \rho_c \nu_c^{1/2} L^{*3/4} \left( \frac{Ja}{Pr} \right)^{3/4} \Delta^*{}^3(0). \quad (4.12)$$

Trabajaremos ahora con el balance de energía en la entrecara vapor-líquido, representado a través de la ecuación diferencial obtenida que se encuentra asociada con la evolución espacial del espesor de capa de condensado, tal como se muestra en la siguiente ecuación

$$4\Delta^* \frac{d[\Delta^* f_c(\sigma, 1)]}{d\sigma} = \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \Big|_{\eta_c=1}, \quad (4.13)$$

la condición de frontera nos dice que el espesor de capa de condensado es cero en algún punto sobre la aleta, y que es desconocido, pero se puede escribir como si estuviera en infinito tal como lo muestra dicha condición

$$\Delta^*(\sigma \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.14)$$

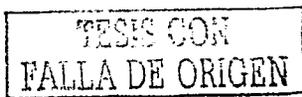
Para resolver el problema se debe observar que existen dos variables principales, que se encuentran descritas a través de las ecuaciones, en términos de los parámetros que muestran la siguiente relación (4.4) - (4.13),

$$\theta_w = \theta_w(\varepsilon, Pr_c, Ja, \gamma : \sigma, z) \quad \text{y} \quad \Delta = \Delta(\varepsilon, Pr_c, Ja, \gamma : \sigma). \quad (4.15)$$

Una de las consideraciones dentro del problema es que el fluido condensado se encuentra estático, por lo que los términos inerciales dentro de la ecuación de la energía son despreciables, bajo esta premisa el número de Jakob es pequeño, y se considera igualmente que la razón de aspecto en la aleta es también despreciable para valores del orden unidad del número de Prandtl. En términos de la función de corriente la condición de frontera en la entrecara de la aleta y el fluido queda descrita por las siguientes relaciones.

$$\theta_c = \theta_w(\sigma, 1)(1 - \eta_c) \quad \text{y} \quad f_c(\eta_c) = -\frac{1}{2}\eta_c^2(1 - \frac{\eta_c}{3}). \quad (4.16)$$

Bajo estas consideraciones, la ecuación de balance entre el vapor y el fluido (4.13) queda descrita de la siguiente forma:



$$\frac{d\Delta^{*4}}{d\sigma} = -\theta_w(\sigma, 1). \quad (4.17)$$

Para aletas delgadas se considera  $h \ll L^*$ , esta aproximación se encuentra perfectamente justificada en el trabajo [18]. En este régimen las variaciones de temperatura transversal en la aleta son muy pequeñas comparadas con la diferencia de temperatura global, por lo tanto la temperatura de la aleta en este régimen puede ser considerada con la dependencia sólo en la coordenada longitudinal, con esta idea se puede integrar la ecuación de la energía (4.4) y aplicando las condiciones de frontera se puede obtener la siguiente relación

$$\frac{d}{d\sigma} \left[ \{1 + \gamma(1 - \theta_w)\} \frac{d\theta_w}{d\sigma} \right] = \frac{\theta_w}{\Delta^*}. \quad (4.18)$$

Esta ecuación se puede resolver junto con la ecuación (4.17) con las condiciones iniciales y de frontera apropiadas, y se puede representar como un sistema autónomo. Tomando como base esta idea podemos escribir al espesor de capa de condensado como función de la temperatura  $\theta_w(\phi)$ , esto es realizar un cambio al espacio-fase de la función, donde el espesor queda definido como  $\phi^* = \Delta^{*4}$ . Bajo estas consideraciones la ecuación (4.18) queda transformada de la siguiente manera

$$\phi^{*1/4} \frac{d}{d\phi^*} \left[ (1 + \gamma(1 - \theta_w)) \theta_w \frac{d\theta_w}{d\phi^*} \right] = 1, \quad (4.19)$$

y debe ser resuelta con las siguientes condiciones de frontera

$$\theta_w = 0 \text{ a } \phi^* = 0 \quad (4.20)$$

$$\theta_w = 1 \text{ a } \phi = \phi_f, \quad (4.21a)$$

donde  $\phi_f$  corresponde al valor de  $\phi^*$  en la base de la aleta.

Integrando en dos ocasiones la ecuación en el espacio-fase es posible encontrar una ecuación algebraica para la temperatura y el espesor de capa de condensado, dicha rela-

ción se muestra a continuación

$$\theta_w^2 - \frac{2\gamma}{3(1+\gamma)}\theta_w^3 = \frac{32}{21(1+\gamma)}\phi^{*7/4}. \quad (4.22)$$

La solución a esta ecuación en términos de la condición de frontera (4.21a), es la siguiente

$$\phi_f^* = \left[ \frac{21}{32} \left( 1 + \frac{\gamma}{3} \right) \right]^{4/7}. \quad (4.23)$$

Realizando una regresión en los cambios de variable podemos obtener el espesor de capa de condensado adimensional en la base de la aleta  $\Delta_j^*$ ,

$$\Delta_j^* = \phi_f^{*1/4} = \left[ \frac{21}{32} \right]^{1/7} \left( 1 + \frac{\gamma}{3} \right)^{1/7}. \quad (4.24)$$

Para valores positivos de  $\gamma$ , el espesor de capa de condensado adimensional en la base de la aleta se incrementa, tal como lo muestra la ecuación (4.24). Utilizando este hecho es posible linealizar la relación considerando que  $\gamma$  es muy pequeño comparada con la unidad, por lo tanto podemos obtener una relación más general

$$\phi^* = \left( \frac{21}{32} \right)^{4/7} \theta_w^{8/7} \left[ 1 + \frac{4\gamma}{7} \left( 1 - \frac{2}{3}\theta_w \right) \right] + O(\gamma^2). \quad (4.25)$$

Integrando esta ecuación dentro de la relación (4.17), se obtiene una ecuación diferencial de primer orden cuya solución se encuentra a través de los métodos de perturbación y se muestra a continuación

$$\sigma = \left( \frac{21}{32} \right)^{4/7} \left\{ 8 \left( 1 - \theta_w^{1/7} \right) + \frac{32\gamma}{7} \left( 1 - \theta_w^{1/7} \right) - \frac{5\gamma}{7} \left( 1 - \theta_w^{8/7} \right) \right\} + O(\gamma^2). \quad (4.26)$$

De esta ecuación (4.26), se puede encontrar la longitud característica para la cual se desprende la capa de condensado, esto es posible utilizando sus correspondientes condi-

ciones de frontera,

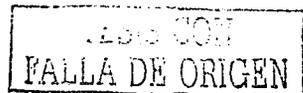
$$\sigma_{\omega} = 8 \left( \frac{21}{32} \right)^{4/7} \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \right) = 6.2887 \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \right). \quad (4.27)$$

Para valores de  $\sigma > \sigma_{\omega}$ , no existe fluido condensado sobre toda la aleta, por lo que la zona mojada se incrementa con el incremento de  $\gamma$ . Así la generación de flujo de condensado total en la base de la aleta (4.12) queda definida:

$$m_c^* = \frac{4^{6/7}}{3} \left[ \frac{21}{32} \right]^{1/7} g^{1/7} \rho_c \nu_c^{6/7} \left( \frac{\lambda_w h}{\lambda_c} \right)^{3/7} \left( \frac{J_R}{Pr_c} \right)^{6/7} \left( 1 + \frac{\gamma}{3} \right)^{1/7}. \quad (4.28)$$

Este análisis es válido para cualquier aleta que cumpla la condición

$$L \geq L_{\omega} = 6.2887 \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \right) L^* \text{ o } s \leq s_{\omega} = \left[ 6.2887 \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \right) \right]^{-1}. \quad (4.29)$$



## Capítulo 5

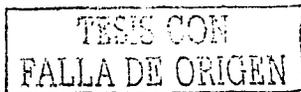
### Resultados y conclusiones

Para una representación más clara de los resultados numéricos y analíticos del problema, se utilizarán gráficas con la información condensada de los mismos. Las figuras 5-1 y 5-2 muestran las soluciones numéricas y asintóticas de la temperatura adimensional en la aleta  $\theta_w$ , y el espesor de capa de condensado  $\Delta$ , para tres valores distintos de  $\gamma$ : -0.5, 0 y 0.5, con un valor de  $s=2.5$ , en el régimen de pared térmicamente delgada.

La figura 5-1 muestra que el incremento del valor de  $\gamma$  se ve reflejado en el incremento de la temperatura en la aleta.

La influencia de  $\gamma$  sobre la temperatura se mantiene para valores de  $\chi$  mayores que 0.7, para valores grandes de  $s$  comparados con la unidad. Las soluciones tienden a la bien conocida solución de Nusselt,  $\theta_w \simeq 1$ ,  $\Delta \simeq \chi^{1/4}$ , la cual está representada por la ecuación (3.20).

En la figura 5-2 se muestra la evolución de la capa de condensado en función de la coordenada longitudinal  $\chi$ , donde se observa que la influencia de  $\gamma$  es prácticamente despreciable para valores de  $s=2.5$ . Es notorio que la solución asintótica se mantiene en un rango de validez *del orden* de  $\gamma/s^{7/2} \sim 10^{-2}$ . Por lo tanto, para valores de  $s$  de orden unidad o grandes, el parámetro  $\gamma$  no juega un papel importante al no modificar sustancialmente el espesor de capa de condensado. El resultado para el caso  $\gamma = 0$  coincide con el ya descrito en el artículo [18].



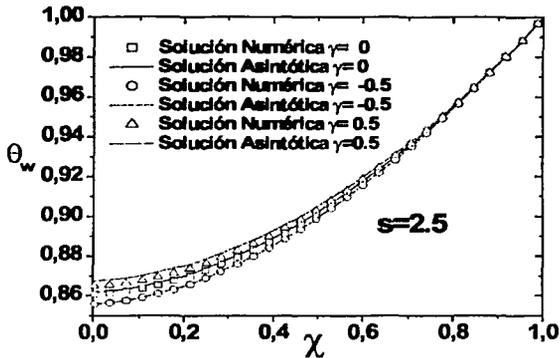
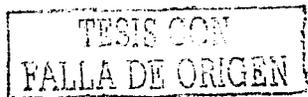


Figura 5-1: Soluciones asintóticas y numéricas de perfil de velocidades,  $\theta_w$  como una función de la coordenada longitudinal  $\chi$ , para distintos valores del parámetro  $\gamma$  y  $s = 2.5$ .

Por su parte, la figura 5-3 muestra las curvas del espesor final de capa de condensado en función del parámetro de conductividad térmica  $\gamma$  para los tres valores distintos que se muestran en la gráfica. Cuando el valor de  $s$  decrece, las variaciones de la temperatura a lo largo de la coordenada longitudinal se incrementan, produciendo un decremento sobre el flujo masico de condensado en la base de la aleta. Esta figura muestra también que para valores pequeños de  $s$  la influencia de  $\gamma$  resulta significativa. En caso opuesto, cuando los valores de  $s$  son mayores,  $\Delta_j$  tiene una mayor independencia con relación al valor que tome  $\gamma$ , confirmando lo observado en las figuras 5-3 y 5-2.

La figura 5-4 muestra los valores obtenidos para el valor crítico de  $s$ ,  $s_w$ , como una función de  $\gamma$ . En esta figura se observa también la solución asintótica lineal dada en la ecuación 3.46. Esta aproximación da excelentes resultados para valores de  $|\gamma| < 0.1$ . En la figura 5-5 se muestran las soluciones numéricas para la temperatura adimensional de la aleta y el flujo másico de condensado, como una función de la coordenada longitudinal  $\chi$ ,



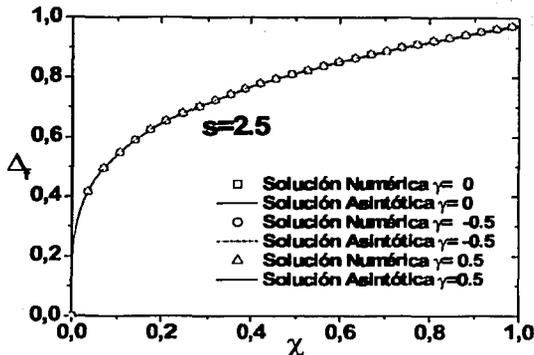


Figura 5-2: Espesor adimensional de capa de condensado  $\Delta$  como una función de la coordenada  $\chi$ , para diferentes valores del parámetro  $\gamma$  y  $s = 2.5$ .

para tres valores diferentes de  $\gamma = -0.5, 0$  y  $0.5$ , con sus correspondientes valores críticos de  $s_w$  (0.217, 0.159, 0.129), respectivamente.

La figura (5-6) muestra distintos valores de  $\gamma$  como función del espesor de capa de condensado en la base de la aleta y la longitud de penetración térmica. Se observa que la influencia de  $\gamma$  no es importante para valores grandes de  $s$ , ( $s > 10$ ) pero sí es muy importante para el caso de aletas largas ( $s \leq s_w$ ), donde  $\gamma$  muestra una enorme influencia sobre el espesor de capa de condensado.

La figura (5-7) muestra los valores típicos adimensionales de  $s$  y  $\gamma$  para aletas manufacturadas con distintos materiales. Los valores típicos de  $\gamma$  para éstas son aluminio ( $\gamma = -0.00505$ ), cobre ( $\gamma = 0.01048$ ), alúmel ( $\gamma = 0.125$ ), cromel ( $\gamma = 0.0765$ ), acero ( $\gamma = -0.19$ ) y vidrio ( $\gamma = 0.00465$ ). Se observa que para estos materiales, el parámetro  $\gamma$  puede tener valor positivo o negativo con lo que queda justificado el análisis para  $\gamma$  negativos dado que en la práctica existen material que disminuyen su conductividad

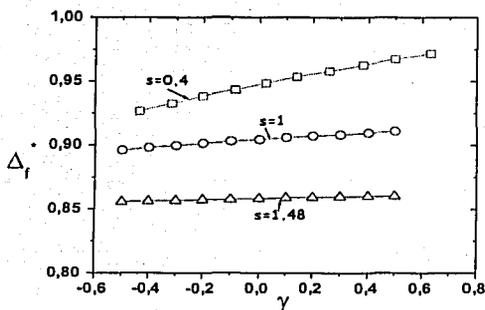
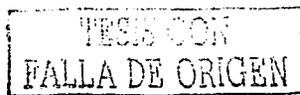


Figura 5-3: Espesor de capa de condensado adimensional en la base de la aleta  $\Delta_f$ , como una función del parámetro  $\gamma$ , para tres valores diferentes de  $s > s_{\omega}$ .

térmica al aumentar su temperatura.

Esta misma figura muestra también los valores típicos de los parámetros calculados para los materiales antes mencionados  $s$ ,  $s_{\omega}$ ,  $L^*$ ,  $\varepsilon$  y  $m_c$ , donde se observa que el rango de operación de los materiales industriales se encuentran en el régimen de aleta larga y muy cercanos a la criticalidad de aleta corta, con lo que el análisis realizado queda plenamente justificado para las aplicaciones directas a los problemas de ingeniería.

En este trabajo, se estudió el proceso de transferencia de calor conjugado de un vapor en contacto con una aleta vertical que tiene conductividad térmica variable. Las soluciones numéricas y asintóticas muestran que la influencia del parámetro  $\gamma$  se ve reflejada principalmente en la producción de flujo másico condensado en el límite de aleta larga. La sensibilidad del espesor de capa de condensado se ve mayormente reflejada para valores de  $s$  pequeños, donde el parámetro  $\gamma$  toma mayor relevancia. En caso contrario, para valores grandes de  $s$ , el parámetro  $\gamma$  muestra poca influencia sobre la generación de



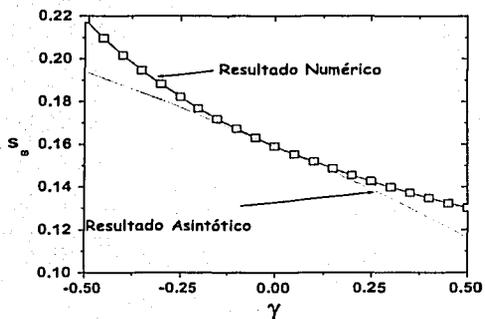


Figura 5-4: Solución numérica y asintótica para el valor crítico de  $s$ ,  $s_w$ , como una función del parámetro  $\gamma$ .

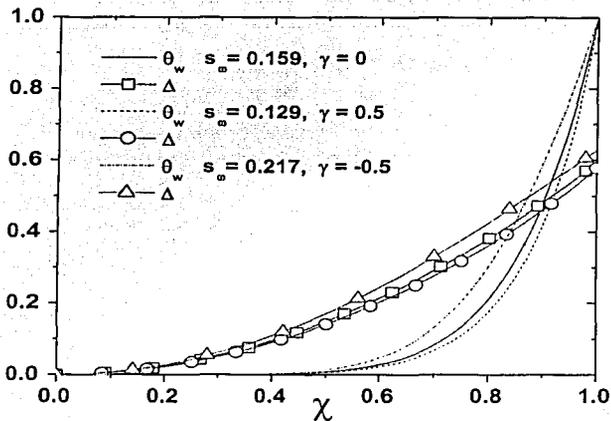
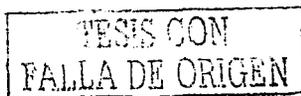


Figura 5-5: Temperatura de la aleta adimensional y espesor de capa de condensado para tres distintos valores de  $\gamma$ , en el valor crítico de  $s$ ,  $s_o$ .

capa de condensado y en la temperatura de la aleta.

Finalmente, se hace énfasis en la aplicabilidad del enfoque revisado en este documento, al establecer condiciones más cercanas a la realidad para evaluar la eficiencia de las aletas. Esto se logró mediante un análisis profundo de las condiciones en que las aletas trabajan, lo que permitió redefinir conceptos para adecuarlos mejor a las circunstancias que imperan en los intercambiadores de calor. El presente análisis puede ayudar a determinar el tamaño adecuado de la aleta tomando como base los factores analizados, así como también calcular adecuadamente el flujo másico de condensado para cada caso específico.



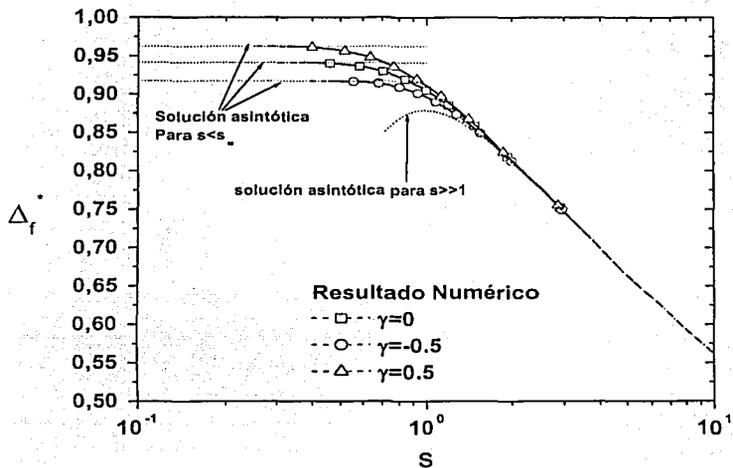


Figura 5-6: Espesor de capa de condensado adimensional en la base de la aleta  $\Delta_f$  como función de  $s$  para diferentes valores de  $\gamma$ . Se muestran también las relaciones del análisis asintótico para aletas largas y cortas.

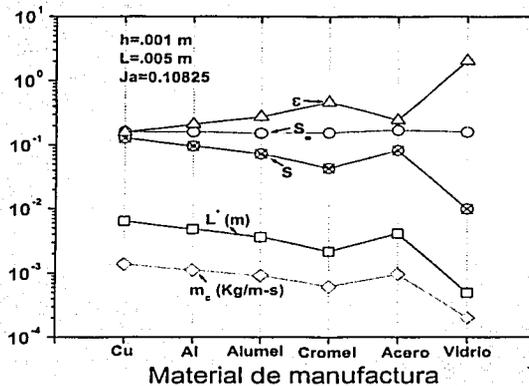
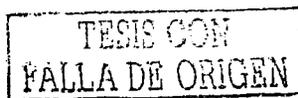


Figura 5-7: Valores típicos para los parámetros más importantes del grosor medio de la aleta  $h = 0.001 \text{ m}$ , con una longitud  $L = 0.05 \text{ m}$  con una diferencia de temperatura de  $50 \text{ K}$  entre la base de la aleta y el vapor de agua saturado. Las aletas están construidas con seis diferentes materiales

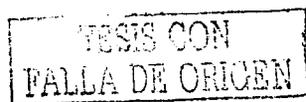
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Referencias

- [1] Y.S. Touloukian, R.W. Powell, C.Y. Ho & P.G. Klemens, Thermophysical Properties of Matter, v1, IFI/Plenum, NY,(1970).
- [2] B. Sundén and P. J. Heggs, Recent Advances in Analysis of Heat Transfer in Fin Type Surfaces, WIT Press Southampton, Boston, (2000).
- [3] W. Nusselt, Z., Die ober flächenkondensation des wasserdampfes, Z. Ver. Dt. Ing. 60, 541-546, 569-575 (1916).
- [4] E. M. Sparrow and J.L. Gregg, A boundary layer treatment of laminar-film condensation, trans. Am. Soc. Mech. Engrs 81, 13-17 (1959).
- [5] H. Merte, Jr., Condensation heat transfer, Adv. Heat Transfer 15, 181- 272 (1973).
- [6] J. C.Y. Koh, E. M. Sparrow and J.P. Hartnett, the two-phase boundary layer in laminar film condensation, International J. Heat Mass Transfer 2, 69- 82 (1961).
- [7] J. C.Y. Koh, On integral treatment of two-phase boundary layer in film condensation, J. Heat Transfer, 83, 359-362 (1961).
- [8] M. M. Chen, An analytical study of laminar film condensation , Part 1 Flat plates, J. Heat Transfer 83, 48-54 (1961).
- [9] J. W. Rose, Fundamentals of condensation heat transfer: Laminar film condensation, JSME Int. J., Ser. 2 31, 357-375 (1988).



- [10] I. Tanasawa, Advances in condensation heat transfer, Adv. Heat Transfer 21, 55-139 (1991).
- [11] S. V. Patankar and E. M. Sparrow, Condensation on an Extended Surface, J. Heat Transfer 101, 434-440 (1979).
- [12] J. E. Wilkins, Condensation on an Extended Surface, J. Heat Transfer 102, 186-187 (1980).
- [13] P. K. Sarma, S.P. Chary and V. Dharma Rao, Condensation on a vertical plate fin of variable thickness, Int. J. Heat Mass Transfer, 37, 2592-2597, (1994).
- [14] H. T. Chen, Z. Lan and T.I. Wang, Study of conjugate conduction- laminar film condensation for a vertical plate fin, Int. J. Heat Mass Transfer, 37, 2592-2597, (1994).
- [15] F. Méndez and C. Treviño, film condensation generated by a forced cooling fluid. Eur. J. Mech. B/Fluids, 15, no.2, 217-240, (1996).
- [16] C. Treviño, G. Becerra and F. Méndez, laminar film condensation on a thin finite thickness plate, AIAA Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 11, 119-121 (1997).
- [17] F. Méndez, C. Treviño, Film condensation induced by a natural convective flow: steady-state analysis, Internacional Journal of Heat and Mass Transfer, 40, 1279-1289 (1997).
- [18] F. Méndez, J.J. Lizardi and C. Treviño, Laminar Film Condensation along a vertical Fin. Int. J. Heat Mass Transfer, 43 2859-2868, (2000).
- [19] H. M. Hung and F. C. Appl, Heat transfer of thin fins with temperature dependent thermal properties and internal heat generation, J. Heat Transfer Trans. ASME 89 (1967) 155-161.



- [20] A. Aziz and S. M. Enamul Hug, Perturbation solution for convecting fin with variable thermal conductivity, *J. Heat Transfer Trans*, ASME 97, 300-301,(1975).
- [21] R. J. Krane, Discussion on a previously published paper by A. Aziz and S. M. Enamul Hug, *J. Heat Transfer Trans*, ASME 98 685-686, (1976).
- [22] A. Muzzio, Approximate solution for convective fins with variable thermal conductivity, *J. Heat Transfer Trans*, ASME 98 680-682, (1976).
- [23] A. Aziz and Y. Benziez, Application of perturbation techniques to heat-transfer problems with variable thermal properties, *Int. J. Heat Mass Transfer* 19 (1976) 271-276.
- [24] A. Aziz and T. A. Na, Periodic heat transfer in fins with variable thermal parameters, *Int. J. Heat Mass Transfer* 24 (1981) 1397-1404.
- [25] Ching-Huang Chiu and Cha'o-Kuang Chen, A decomposition method for solving the convective longitudinal fins with variable thermal conductivity, *Int. J. Heat Mass Transfer* 45, (2002) 2067-2075.
- [26] Frank M.WhiteViscous Fluids Flow, editorial Mc Graw Hill.
- [27] Bejan A. Convection Heat Transfer, segunda edición, editorial Jonh Wiley and Sons.

En esta parte final se muestra esquema numérico utilizado en la tesis, este es el código de un runge-kutta de cuarto orden, las subrutinas utilizadas fueron obtenidas del libro Numerical Recipes y modificadas para el lenguaje Fortran 90.

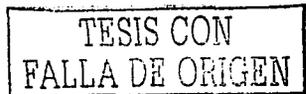
PROGRAM RUNGE

IMPLICIT NONE

INTEGER (4) NMAX,NVAR,NSTEP,mxstep

REAL (8) VSTART,X1,X2,XX,Y,ALF

PARAMETER ( NMAX=5, nvar=3, NSTEP=500000, mxstep=500000)



```

DIMENSION VSTART(NVAR)
EXTERNAL DERIVS
CALL NET (X1,X2,NSTEP)
VSTART(1)=0.00000000001D0
VSTART(2)=0.711D0
VSTART(3)=0.D0
CALL RKDUMB (vstart,nvar,X1,X2,nstep, DERIVS)
CALL SALIDA (NSTEP)
END PROGRAM RUNGE

```

```

!-----
SUBROUTINE RKDUMB(VSTART,NVAR,X1,X2,NSTEP,DERIVS)
INTEGER (4) NSTEP,NVAR,NMAX,NSTPMX
PARAMETER (NMAX=5,NSTPMX=500000)
REAL (8) X1,X2,VSTART(NVAR),XX(NSTPMX),Y(NMAX,NSTPMX)
EXTERNAL DERIVS
COMMON /PATH/XX,Y,ALF
INTEGER I,K
REAL (8) H,X,DV(NMAX),V(NMAX),M,B,ALF,X3
DO I=1,NVAR
  V(I)=VSTART(I)
  Y(I,1)=V(I)
END DO
XX(1)=X1
X=X1
H=(X2-X1)/NSTEP
DO K=2,NSTEP-1
  CALL DERIVS(X,V,DV)
  CALL RK4(V,DV,NVAR,X,H,V,DERIVS)

```

```

IF (X+H .eq. X) PAUSE
X=X+H
XX(K+1)=X
DO I=1,NVAR
Y(I,K+1)=V(I)
END DO
IF (Y(2,K) > 1.D0) THEN
GO To 101
END IF
END DO
101 M=(Y(2,K)-Y(2,K-1))/(XX(K)-XX(K-1))
B=Y(2,K)-M*XX(K)
X3=(1.D0-B)/M
ALF=1/(X3)**(7.D0/4.D0)
RETURN
END SUBROUTINE RKDUMB

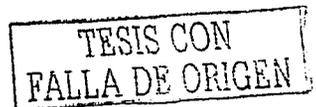
```

---

```

SUBROUTINE RK4(Y,DYDX,N,X,H,YOUT,DERIVS)
INTEGER (4) N,NMAX
PARAMETER (NMAX=5)
REAL (8) H,X,DYDX(N),Y(N),YOUT(N)
EXTERNAL DERIVS
INTEGER (4) I
REAL (8) H6,HH,XH,DYM(NMAX),DYT(NMAX),YT(NMAX)
HH=H*0.5D0
H6=H/6.D0
XH=X+HH
DO I=1,N

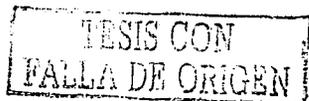
```



```

YT(I)=Y(I)+HH*DYDX(I)
END DO
CALL DERIVS (XH,YT,DYT)
DO I=1,N
YT(I)=Y(I)+HH*DYT(I)
END DO
CALL DERIVS (XH,YT,DYM)
DO I=1,N
YT(I)=Y(I)+HH*DYM(I)
DYM(I)=DYT(I)+DYM(I)
END DO
CALL DERIVS (X+H,YT,DYT)
DO I=1,N
YOUT(I)=Y(I)+H6*(DYDX(I)+DYT(I)+2.D0*DYM(I))
END DO
RETURN
END SUBROUTINE RK4
subroutine net(x1,x2,nstep)
!* -----
!* Se forma la red
!* -----
implicit none
integer nstpmx,nstep,i,nmax
real*8 x1,x2,XX,Y
real(S) eta,S,Q,p1,deta,p,tq
parameter (nstpmx=500000, nmax=5 )
common /path/ XX(nstpmx),Y(nmax,nstpmx)
x1 = 0.d0

```



```

x2 = 7.d0
do i = 1,nstep
  XX(i) = ((x2-x1)*float(i))/nstep
! WRITE(*,*) XX(i)
end do
end subroutine net
!*
-----
subroutine DERIVS(x,y,dydx)
!*
-----
!* Aqui se dan las nvar EDO's: *
!* dy(i)/dx = f(y(i),x) *
!* el maximo de EDO's es nmax *
!*
-----
implicit none
real (8) y,dydx,x,beta
integer nmax,nstpmx
parameter (nmax=5,nstpmx=500000)
dimension y(nmax),dydx(nmax)
beta = 0.5d0
dydx(1) = y(2)
dydx(2) = y(3)
dydx(3) = ((1.d0/(y(1)**.25d0)*y(2))+beta*y(3)**2)/ &
(1.d0+beta*(1.d0-y(2)))
x = x
end subroutine DERIVS
subroutine SALIDA(nstep)
implicit none
integer(4) nstep,i,nmax,mxstep

```

```

real(8) xx,y,ALF, gama,ultimo
parameter ( nmax = 5, mxstep=50000)
common /path/ xx(mxstep),y(nmax,mxstep),ALF
open(8,file='alfa2p5.dat')
!write(8,*)nstep-1
do i=2,nstep-1,100
write(8,100)xx(i)*ALF**(4.D0/7.d0),y(2,i), &
( y(1,i)*(ALF**(4.D0/7.d0)) )**25d0
ultimo= (y(1,i)*(ALF**(4.D0/7.d0)) )**25d0
if( xx(i)*ALF**(4.D0/7.d0) >= 1.d0) exit
100 format (6e24.16)
end do
close(8)
WRITE(*,*) ALF,xx(i)*ALF**(4.D0/7.d0), (y(1,i)*(ALF**(4.D0/7.d0)) )**25d0
END SUBROUTINE SALIDA

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN