



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

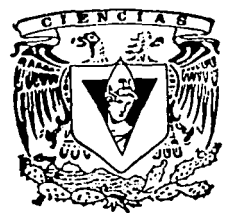
FACULTAD DE CIENCIAS

MECANICA CUANTICA CON DISIPACION EN CAMPOS MAGNETICOS

T E S I S

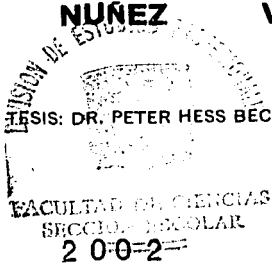
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE F I S I C A P R E S E N T A :

MARIBEL NUÑEZ VALDEZ



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. PETER HESS BECHSTEDT





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Núñez Valdez

Maribel

FECHA: 29/Nov/2002

FIRMA: [Signature]



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MÉXICO

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: Mecánica cuántica con  
dispiciación en campos magnéticos.

realizado por Maribel Núñez Valdez

con número de cuenta 9531958-6 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

**A t e n t a m e n t e**

Director de Tesis

Propietario Dr. Peter Otto Hess Bechsted

Propietario Dr. Shahen Hacyan Saleryan

Propietario Dra. Myriam Mondragón Ceballos

Suplente Dr. Gastón García Calderón

Suplente Dr. Salvador Gódoz Salas

**Consejo Departamental de Física**

[Signature]  
DRA. PATRICIA GOLDBSTEIN MENACHE

## AGRADECIMIENTOS

*Por permitirme aprender a su lado, sus explicaciones, las interesantes discusiones, palabras de aliento y comprensión, pero sobre todo por su enorme paciencia y porque aún teniendo asuntos más importantes que tratar, encontró tiempo para disipar parte de mis dudas y producir otras, agradezco infinitamente al Dr. Peter Hess el haber dirigido este trabajo tan puntualmente y porque de no haber sido por todo su apoyo yo no estaría presentando esta tesis. Danke schön Doc.*

*De la misma manera, le expreso mi gratitud al Dr. Dieter Schuch por destinar parte de su tiempo a explicarme y discutir conmigo algunos de sus artículos estudiados en esta tesis. Dr. Dieter Schuch, danke für Ihre Zeit und Ihre Erklärungen.*

*Igualmente agradezco la disponibilidad y revisión, así como sus sugerencias y comentarios respecto de este trabajo a los sinodales:*

*Dr. Shahan Hacyan Saleryan  
Dra. Myriam Mondragón Ballesteros  
Dr. Gastón García Calderón  
Dr. Salvador Godoy Salas*

*Gracias también, a los amigos con los que entendí muchas tareas y tuvieron un momento para desearme buena suerte.*

*Por último, mi agradecimiento a la música, porque siempre me permitió mezclarla con la física y me hizo menos difícil tanto concluir la carrera como terminar de escribir este trabajo.*



# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>iv</b>
<b>1 Derivación de las ecuaciones de campo</b>	<b>1</b>
1.1 Sistemas sin disipación	1
1.2 Sistemas sin disipación con campo magnético	4
1.3 Sistemas con disipación y campo magnético	7
<b>2 Soluciones a la ENLS</b>	<b>13</b>
2.1 Soluciones tipo-onda	13
2.2 Soluciones tipo solitón	16
2.3 Principio de incertidumbre	17
2.4 Sobre el operador de fricción	20
<b>3 Solución en un sistema bidimensional</b>	<b>22</b>
3.1 Movimiento en un campo magnético	22
3.2 Solución de las ecuaciones tipo-Riccati	27
3.2.1 Caso supercrítico: $\gamma > \omega_c$	30
3.2.2 Caso de resonancia: $\gamma = \omega_c$	31
3.2.3 Caso subcrítico: $\gamma < \omega_c$	33
3.3 Efectos de fricción en las corrientes	35
3.4 Sobre la energía del sistema	36
<b>4 Predicciones</b>	<b>43</b>
4.1 Condiciones experimentales	43
4.2 Amortiguamiento supercrítico	46
4.3 Resonancia	56
4.4 Amortiguamiento subcrítico	63
4.4.1 Potencia disipada	71
<b>5 Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>A</b>	<b>78</b>
A.1 Ecuación sin disipación	78
A.2 Sin disipación con campo magnético	79
A.3 Con disipación y campo magnético	83

<b>B</b>		<b>89</b>
B.1	Solución tipo-onda . . . . .	89
B.2	Solución tipo-soltón . . . . .	92
B.3	Principio de incertidumbre . . . . .	95
<b>C</b>		<b>97</b>
C.1	Movimiento en campo magnético . . . . .	97
C.2	Ecuaciones tipo-Ricatti . . . . .	98
C.2.1	$\gamma > \omega_c \Rightarrow A = \mp \sqrt{\gamma^2 - \omega_c^2}$ . . . . .	98
C.2.2	$\gamma = \omega_c \Rightarrow A = 0$ . . . . .	100
C.2.3	$\gamma < \omega_c \Rightarrow A = +i\tilde{\omega}$ . . . . .	101
C.3	Fricción en las corrientes . . . . .	103
C.4	Energía cuántica . . . . .	105
<b>Bibliografía</b>		<b>109</b>

# Índice de Figuras

3.1	Movimiento en el plano- $xy$ . . . . .	24
4.1	$\gamma > \omega_c$ : $\eta_x(t)$ y $\eta_y(t)$ . . . . .	49
4.2	$\gamma > \omega_c$ : $\dot{\eta}_x(t)$ y $\dot{\eta}_y(t)$ . . . . .	50
4.3	$\gamma > \omega_c$ : $L_x(t)$ y $L_y(t)$ . . . . .	51
4.4	$\gamma > \omega_c$ : $\alpha_x^2(t)$ y $(\dot{\alpha}_x/\alpha_x)(t)$ . . . . .	52
4.5	$\gamma > \omega_c$ : $\langle E_q \rangle$ y $\langle \tilde{E}^2 \rangle^{1/2}$ . . . . .	53
4.6	$\gamma > \omega_c$ : $\langle E_q \rangle$ y $\langle \tilde{E}^2 \rangle^{1/2}$ con $-A_{1/2}$ . . . . .	54
4.7	$\gamma > \omega_c$ : $\langle V_{\perp x} \rangle_S$ y $\langle V_{\perp y} \rangle_S$ . . . . .	55
4.8	$\gamma \simeq \omega_c$ : $\eta_x(t)$ y $\eta_y(t)$ . . . . .	57
4.9	$\gamma \simeq \omega_c$ : $\dot{\eta}_x(t)$ y $\dot{\eta}_y(t)$ . . . . .	58
4.10	$\gamma \simeq \omega_c$ : $L_x(t)$ y $L_y(t)$ . . . . .	59
4.11	$\gamma \simeq \omega_c$ : $\alpha_x^2(t)$ y $(\dot{\alpha}_x/\alpha_x)(t)$ . . . . .	60
4.12	$\gamma \simeq \omega_c$ : $\langle E_q \rangle$ y $\langle \tilde{E}^2 \rangle^{1/2}$ . . . . .	61
4.13	$\gamma \simeq \omega_c$ : $\langle V_{\perp x} \rangle_S$ y $\langle V_{\perp y} \rangle_S$ . . . . .	62
4.14	$\gamma < \omega_c$ : $\eta_x(t)$ y $\eta_y(t)$ . . . . .	65
4.15	$\gamma < \omega_c$ : $\dot{\eta}_x(t)$ y $\dot{\eta}_y(t)$ . . . . .	66
4.16	$\gamma < \omega_c$ : $L_x(t)$ y $L_y(t)$ . . . . .	67
4.17	$\gamma < \omega_c$ : $\alpha_x^2(t)$ y $(\dot{\alpha}_x/\alpha_x)(t)$ . . . . .	68
4.18	$\gamma < \omega_c$ : $\langle E_q \rangle$ y $\langle \tilde{E}^2 \rangle^{1/2}$ . . . . .	69
4.19	$\gamma < \omega_c$ : $\langle V_{\perp x} \rangle_S$ y $\langle V_{\perp y} \rangle_S$ . . . . .	70
4.20	Dipolo eléctrico oscilante. . . . .	71

# Introducción

La descripción de los fenómenos disipativos ha abierto un importante campo de investigación [1], en la medida que en física se presentan problemas esenciales como, los procesos de disipación en fisión y en la dinámica de iones pesados, que no han podido ser tratados en forma totalmente satisfactoria hasta ahora. En la mecánica clásica de partículas, existen ecuaciones *tipo-Newton* que determinan la dinámica del sistema, donde intervienen fuerzas conservativas (derivadas de algún potencial), fuerzas disipativas de fricción (generalmente proporcionales a la velocidad) y fuerzas puramente aleatorias [2] (de tratamiento estadístico). En pocos casos de potencial externo –por ejemplo, el de oscilador armónico– es posible encontrar las soluciones exactas de la ecuación clásica, inclusive con fuerzas de fricción, pero tomando en cuenta las fuerzas aleatorias el problema se vuelve muy complicado. Una alternativa a esta descripción, se encuentra dentro de la teoría de campos usando una ecuación apropiada. En la literatura se reportan diferentes métodos y aproximaciones para derivar una descripción cuántica de disipación, sin embargo, la mayoría de ellos sufre de serias dificultades.

En algunas derivaciones, se utiliza cuantización canónica para conseguir un operador hamiltoniano dependiente del tiempo, o se introduce un potencial de amortiguamiento sobre la base de una función hamiltoniana clásica que no representa la energía del sistema [3], lo cual lleva a la violación del principio de incertidumbre [4, 5]. Modificaciones y variantes a tales hamiltonianos se han estudiado para salvar las dificultades, resultando partículas de masa variable [6].

En otros métodos, que intentan sortear los problemas de los hamiltonianos sin una representación física definida, se hace una segunda aproximación para tratar de introducir términos adicionales de fricción en la ecuación lineal de Schrödinger, como consecuencia se obtienen *ecuaciones de Schrödinger no-lineales* (ESNL) [7], de las cuales algunas muestran no-linealidades de clase logarítmica, y la inherente dificultad de que no cumplen el principio de superposición, válido en la mecánica cuántica lineal y “ortodoxa”, pero esta propiedad no las excluye como soluciones de la interpretación física en el sentido probabilístico de la función de onda, si describen la dinámica de los sistemas sin inconsistencias y de acuerdo con el empirismo a nivel microscópico.

Como se ha notado, los intentos por obtener una ecuación de campo que describa sistemas disipativos, a través de los métodos de derivación para la ecuación lineal de Schrödinger no han sido completamente exitosos.



No obstante, se han encontrado en la literatura procedimientos diferentes a los anteriores para conseguir la ecuación lineal de Schrödinger [8, 9], donde la mecánica clásica interviene solamente en la formulación de Newton. Estas ideas, se retoman en artículos recientes [10, 12, 14] suponiendo como base substancial el hecho de que las cantidades físicas pueden ser asociadas al campo, en virtud de la definición de valores promedio y operadores.

Con la exposición de las ideas anteriores, el objetivo principal del presente trabajo se centra en la revisión y estudio de las teorías desarrolladas en las referencias [10]-[16], donde se muestra la derivación de una ecuación no-lineal de campo correspondiente a la ecuación clásica de Langevin para sistemas disipativos. La motivación esencial para ello, radica en exponer clara y explícitamente, dado lo reciente de la teoría, los procedimientos matemáticos seguidos en la obtención de las diferentes ecuaciones. Se revisa en particular, el método que introduce la fricción en el sistema y la no-linealidad de tipo logarítmico que se obtiene en la ecuación de Schrödinger, así como la consistencia de las interpretaciones físicas a cada uno de los resultados. Se pone especial énfasis en aquellos puntos donde la mayoría de las ecuaciones desarrolladas anteriormente falla --por ejemplo, en la validez del principio de incertidumbre de Heisenberg--. Entonces, se consigue una recopilación de ecuaciones que describen sistemas con disipación en acuerdo con la física y de aplicación abierta. Se observa el efecto de rompimiento de la simetría temporal, resultado del ambiente disipativo, en el estado base. Así mismo, se estudia analíticamente en detalle el efecto cuántico originado por la fricción y la no linealidad, sobre la corriente y la energía de un sistema bidimensional de partículas cargadas, inmerso en un campo magnético uniforme y constante.

Se muestra que con las ecuaciones de campo obtenidas, para diferentes condiciones iniciales y de resonancia en el sistema, es posible conseguir un *aumento en la corriente y la energía* o una *corriente y energía pulsadas* en el tiempo, lo anterior según sea el caso de amortiguamiento supercrítico, subcrítico o resonancia, aquí debe notarse que *ninguno de los fenómenos estudiados tiene contraparte clásica*. Finalmente se hace el cálculo para determinar la variación de la energía dada por efecto cuántico.

Por lo tanto, siguiendo las ideas básicas para la construcción de la ecuación de campo, en el capítulo 1 se hace la deducción de las ecuaciones tipo-Newton para el movimiento bajo la influencia de fuerzas conservativas y se construye la ecuación de campo correspondiente a la ecuación de Schrödinger sujeta a las mismas fuerzas. Entonces, se introducen un término disipativo y un campo magnético como nuevas condiciones, y mediante algunas "hipótesis extra" se expresan las nuevas ecuaciones de campo. El capítulo termina con la obtención de una ENSL, con una no-linealidad logarítmica, que incorpora la disipación --representada por fricción-- y la presencia de un campo magnético. En el capítulo 2, la ENSL encontrada se resuelve de manera exacta para un sistema bidimensional de partículas cargadas en un campo magnético homogéneo. Las soluciones encontradas son comparadas con las correspondientes de mecánica cuántica para el problema sin amortiguamiento. El tercer capítulo lo constituye un estudio de la solución de una ENSL para el movimiento de partículas de "carga puntual"

en un sistema bidimensional con fricción y campo magnético. La solución propuesta tipo-paquete de ondas, contiene información de carácter corpuscular y ondulatorio que varía de acuerdo a las condiciones iniciales y de resonancia para el sistema. Para terminar, se muestra el efecto cuántico en el tiempo sobre la corriente y la energía con su variación. El capítulo 4 está dedicado a una enumeración de los factores que intervienen para la posible observación de los principales resultados predichos por las ecuaciones encontradas en el tercer capítulo, para un sistema disipativo. Se presentan las gráficas para el comportamiento de la corriente y la energía estudiados en el sistema de partículas sometido a tres diferentes tipos de condiciones.

Por último, se incluyen las conclusiones sobre el trabajo desarrollado y finalmente 3 apéndices en los cuales se muestran explícitamente la mayoría de los cálculos realizados en el formalismo matemático de la deducción de cada una de las ecuaciones de campo.

# Capítulo 1

## Derivación de las ecuaciones de campo

En este capítulo se siguen, básicamente, las ideas desarrolladas por Madelung y Mrowka [8, 9] hace poco más de 50 años, pero desde el punto de vista de autores más contemporáneos como Schuch, Chung y Hartmann [10]-[16]. Su método permite "rederivar" la ecuación de Schrödinger como es conocida, así como las ecuaciones de campo apropiadas a cada sistema tratado<sup>1</sup>.

### 1.1 Sistemas sin disipación

En la teoría de la dinámica conservativa [10], existe ya un formalismo matemático establecido sobre una *base axiomática*, dada por tres principios generales y empíricos:

1. El principio de incertidumbre de Heisenberg;
2. los fenómenos de interferencia; y
3. el teorema de Ehrenfest o principio de correspondencia.

Entonces, cualquier modelo matemático que se desarrolle para la derivación de una ecuación de campo sin términos disipativos, tomando en cuenta el conocimiento empírico, sigue de la estructura de tales axiomas.

Si se acepta el principio de incertidumbre, un conjunto de condiciones iniciales en el sentido de la mecánica clásica no puede ser dado, sin embargo, es posible desarrollar una teoría donde los valores promedio,  $\langle A \rangle = \int \rho A dr$ , de las cantidades  $A$  son determinados con la ayuda de una función de distribución  $\rho$ , que se encuentra directamente relacionada con la densidad material del campo. Se dice que  $\rho$  es la *densidad de probabilidad* [20].

<sup>1</sup>Para seguir los cálculos que se llevan a cabo, véase el Ap. A.

En el orden de garantizar la conservación de  $\rho$ ,  $\int \rho d^3x = \text{constante}$ , en un medio sin disipación, se asume que  $\rho$  (con  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \text{densidad de flujo}$ ) cumple la ecuación de continuidad (EC), es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.1)$$

Luego, tomando en cuenta el segundo axioma y en analogía a la óptica (donde la intensidad es una función cuadrática de las amplitudes) se propone el *ansatz* bilineal

$$\rho = \alpha \beta \geq 0, \quad (1.2)$$

donde  $\alpha = \alpha(\mathbf{r}, t)$  y  $\beta = \beta(\mathbf{r}, t)$  (funciones clase  $C^2$  en  $\mathbf{r}$  y  $t$  [21]) son las amplitudes del campo, ambas funciones del vector de posición  $\mathbf{r}$  y del tiempo  $t$ . Así mismo, con  $\alpha$  y  $\beta$  se puede hacer un *ansatz* en forma bilineal (vectorial), para definir la densidad de flujo [9],  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ . Esto es

$$\mathbf{j} = C_1 \beta \nabla \alpha + C_2 \alpha \nabla \beta + \dots \text{otros términos bilineales vectoriales} + \dots, \quad (1.3)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes a determinar vía la contraposición con algún experimento. Sin embargo, sin pérdida de generalidad, se puede escoger

$$C_1 = -C_2 = C, \quad (1.4)$$

y cortar el desarrollo de (1.3), de tal manera que

$$\Rightarrow \mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = C (\beta \nabla \alpha - \alpha \nabla \beta), \quad (1.5)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = C \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} - \frac{\nabla \beta}{\beta} \right). \quad (1.6)$$

Por lo tanto, la velocidad de la densidad de flujo puede ser caracterizada por la función

$$\mathbf{v} = C \nabla \ln \left( \frac{\alpha}{\beta} \right), \quad (1.7)$$

con  $C$  una constante que tiene la posibilidad de ser compleja.

Finalmente, el tercer axioma -dado por el teorema de Ehrenfest- permite asumir que en promedio, la ecuación clásica de movimiento es válida para un cuerpo de masa  $m$ , vector de posición  $\mathbf{r}$  y velocidad  $\mathbf{v}$ , es decir,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F} \rangle &= m \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{r} \rangle = m \frac{d}{dt} \langle \mathbf{v} \rangle = m \frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{v} d^3x, \\ \Rightarrow \langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} d^3x. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Pero a partir de la definición de la densidad de flujo  $\mathbf{j}$ , Ec. (1.5), se puede encontrar su evolución en el tiempo y sustituirse en (1.8), denotando la derivada temporal,  $\partial g/\partial t$  como  $\dot{g}$ , se consigue

$$\langle \mathbf{F} \rangle = 2mC \int (\dot{\beta} \nabla \alpha - \dot{\alpha} \nabla \beta) d^3x + mC \int \nabla (\dot{\alpha} \beta - \alpha \dot{\beta}) d^3x,$$

sin embargo, para todo sistema finito la última integral es nula cuando se efectúa sobre todo el espacio (se supone que no hay partículas en el infinito). Por lo tanto,

$$\langle \mathbf{F} \rangle = 2mC \int (\dot{\beta} \nabla \alpha - \dot{\alpha} \nabla \beta) d^3x. \quad (1.9)$$

De la expresión anterior se observa que para la determinación de la fuerza promedio, las amplitudes del campo,  $\alpha$  y  $\beta$  deben ser conocidas, lo cual implica resolver la EC (1.1). Para ello, se sustituyen las definiciones de  $\rho$  y  $\mathbf{j}$  en (1.1) y se introduce una función  $f = f(\mathbf{r}, t)$  de clase  $C^2$  en  $\mathbf{r}$  y  $t$  [21], independiente de  $\alpha$  y  $\beta$ , esto con el fin de separar la EC en dos ecuaciones, cada una función de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, es decir,

$$\dot{\alpha} = -C\Delta\alpha - \alpha f, \quad (1.10)$$

$$\dot{\beta} = +C\Delta\beta + \beta f. \quad (1.11)$$

Luego, reemplazando  $\dot{\alpha}$  y  $\dot{\beta}$  en la Ec. (1.9) con las cantidades definidas por las Ecs. (1.10) y (1.11), se obtiene que la fuerza promedio es,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F} \rangle &= 2mC \int (\beta \nabla \alpha + \alpha \nabla \beta) f d^3x = 2mC \int f \nabla (\alpha \beta) d^3x \\ &= 2mC \left[ \int \nabla (\rho f) d^3x - \int \rho \nabla f d^3x \right]. \end{aligned}$$

Consecuentemente, se consigue que

$$\langle \mathbf{F} \rangle = m \int \rho [-\nabla (2Cf)] d^3x. \quad (1.12)$$

No obstante, la fuerza promedio también se puede expresar como

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \int \rho \mathbf{F} d^3x, \quad (1.13)$$

aceptando la ecuación promedio de Newton para el movimiento bajo la influencia de una fuerza conservativa, que se identifica con  $\mathbf{F}$ , y estableciendo la siguiente relación

$$\mathbf{F} = -\nabla (2mCf) = -\nabla V,$$

donde  $V$  es un potencial externo, que queda determinado como,

$$V = 2mCf, \quad (1.14)$$

y con el cual se encuentra que

$$f = \frac{V}{2mC}. \quad (1.15)$$

Ahora se sustituye (1.15) en la Ec. (1.10) para obtener las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} + C\Delta\alpha + \alpha \left( \frac{V}{2mC} \right) &= 0, \\ \Rightarrow 2mC\dot{\alpha} + 2mC^2\Delta\alpha + V\alpha &= 0, \end{aligned}$$

o de manera equivalente,

$$\begin{aligned} -2mC \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= 2mC^2 \Delta \alpha + V \alpha, \\ \Rightarrow -2mC \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= (2mC^2 \Delta + V) \alpha, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\text{Sea } -2mC = i\hbar.$$

Por lo tanto,

$$C = -\frac{i\hbar}{2m} = \frac{\hbar}{2im}. \quad (1.17)$$

Aplicando el valor encontrado para  $C$  en la Ec. (1.16) y haciendo que  $\alpha$  sea igual a la función de onda  $\Psi$ , se consigue finalmente la ecuación:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \Psi, \quad (1.18)$$

que en la literatura se identifica como la *ecuación de Schrödinger* [20]. Hay que destacar aquí que, la constante  $C$  se escogió igual a  $\hbar/(2m\mathbf{i})$ , pero no es la única posibilidad, es decir,  $C$  no es una constante que se encuentre unívocamente determinada por los principios de la base axiomática asumida, sino que tiene que ser dada a partir de experimentos.

## 1.2 Sistemas sin disipación con campo magnético

En esta sección se introduce un campo magnético como parte del sistema a analizar [12], esto se refleja directamente en las expresiones para la velocidad y la densidad de flujo de la siguiente manera. Ahora se propone para la densidad de flujo el mismo desarrollo que en (1.3), pero agregando la dependencia de un vector  $\mathbf{a}$ , es decir,

$$\mathbf{j} = C_1 \beta \nabla \alpha + C_2 \alpha \nabla \beta - \alpha \alpha \beta + \dots \text{otros términos bilineales} + \dots, \quad (1.19)$$

sin embargo, si se escoge nuevamente como en la sección anterior,  $C_1 = -C_2 = C$ , y truncando la serie otra vez, se obtiene

$$\Rightarrow \mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = C(\beta \nabla \alpha - \alpha \nabla \beta) - \rho \mathbf{a}, \quad (1.20)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = C \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} - \frac{\nabla \beta}{\beta} \right) - \mathbf{a}, \quad (1.21)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} = C \nabla \ln \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) - \mathbf{a}, \quad (1.22)$$

$$(1.23)$$

La introducción de un campo magnético, se puede hacer ahora, a través del vector  $\mathbf{a}$ , si éste es proporcional al producto vectorial  $\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ , donde  $\mathbf{B}$  es un campo magnético constante y  $\mathbf{r}$  el vector posición. Una vez más se hace valer el teorema de Ehrenfest y se calcula el valor promedio de  $\mathbf{F}$  donde se incluye el efecto del campo magnético, es decir,

$$\langle \mathbf{F} \rangle = m \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} d^3x, \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \mathbf{F} \rangle &= 2mC \int (\dot{\beta} \nabla \alpha - \dot{\alpha} \nabla \beta) d^3x \\ &\quad - m \int (\dot{\alpha} \beta + \alpha \dot{\beta}) \mathbf{a} d^3x - m \int \rho \dot{\mathbf{a}} d^3x. \end{aligned} \quad (1.25)$$

En esta última expresión se obtienen dos términos adicionales —resultado de la introducción del término proporcional al campo magnético—, con respecto a lo conseguido en la Ec. (1.9).

Por otro lado, reemplazando el flujo de corriente  $\mathbf{j}$ , dado por (1.20) y  $\rho$  en la ecuación de continuidad, se tiene que

$$0 = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} + C \frac{\Delta \alpha}{\alpha} - C \frac{\Delta \beta}{\beta} - \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \cdot \mathbf{a} - \frac{\nabla \beta}{\beta} \cdot \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathbf{a}, \quad (1.26)$$

luego, haciendo la separación de variables, otra vez por medio de una función  $f = f(\mathbf{r}, t)$  independiente de  $\alpha$  y  $\beta$ , se consiguen las expresiones:

$$-f = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + C \frac{\Delta \alpha}{\alpha} - \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \cdot \mathbf{a} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{a}, \quad (1.27)$$

$$-f = \frac{\dot{\beta}}{\beta} + C \frac{\Delta \beta}{\beta} + \frac{\nabla \beta}{\beta} \cdot \mathbf{a} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{a}, \quad (1.28)$$

con lo cual se logra finalmente el siguiente par de ecuaciones,

$$\dot{\alpha} = -C \Delta \alpha + \nabla \alpha \cdot \mathbf{a} + \frac{\alpha}{2} \nabla \cdot \mathbf{a} - \alpha f, \quad (1.29)$$

$$\dot{\beta} = +C \Delta \beta + \nabla \beta \cdot \mathbf{a} + \frac{\beta}{2} \nabla \cdot \mathbf{a} + \beta f, \quad (1.30)$$

las cuales se sustituyen en la expresión de la fuerza promedio (1.25), consiguiendo con ello, después de algunas simplificaciones,

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \rho [-\nabla(2Cf)] d^3x + mC \int \rho \left( \frac{\nabla\alpha}{\beta} - \frac{\nabla\beta}{\beta} \right) (\nabla \cdot \mathbf{a}) d^3x + \\
 &2mC \int \rho \left[ \left( \frac{\nabla\beta}{\beta} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla\alpha}{\alpha} - \left( \frac{\nabla\alpha}{\alpha} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla\beta}{\beta} \right] d^3x - \\
 &m \int \rho \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) \mathbf{a} d^3x - m \int \rho \dot{\mathbf{a}} d^3x, \quad (1.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \rho [-\nabla(2Cf) - \dot{\mathbf{a}}] d^3x - m \int \nabla(a^2\rho) d^3x + m \int \rho \nabla(a^2) d^3x \\
 &+ \int \rho [\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}] d^3x \\
 &+ m \int \rho [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{v})] d^3x \\
 &+ m \int [(\nabla\rho \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + (\nabla\rho \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}] d^3x, \quad (1.32)
 \end{aligned}$$

sin embargo, de esto último se identifica que,

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a}).$$

Así, después de sustituir, simplificar y agrupar algunos términos, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \rho [-\nabla(2Cf) - \dot{\mathbf{a}} + \nabla(a^2)] d^3x + m \int \rho [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a})] d^3x \\
 &+ m \int [(\nabla\rho \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + (\nabla\rho \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a}] d^3x, \\
 \Rightarrow \langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \{ \rho [-\nabla(2Cf) - \dot{\mathbf{a}}] + \rho \nabla(a^2) \} d^3x + \\
 &+ m \int \rho [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a})] d^3x + m \int \left[ -\frac{1}{2} \rho \nabla(a^2) \right] d^3x.
 \end{aligned}$$

Finalmente, de la ecuación anterior se consigue para la fuerza promedio bajo la influencia de un campo magnético, la expresión dada por:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = m \int \rho \left\{ -\nabla \left( 2Cf - \frac{1}{2}a^2 \right) - \dot{\mathbf{a}} + [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a})] \right\} d^3x. \quad (1.33)$$

Escogiendo una función  $f$  apropiada[12] [ver la tabla A.1 (2.1)] y  $\mathbf{a} = (q/mc)\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , se consigue,

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \int \rho \left[ q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] d^3x, \quad (1.34)$$



con

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.35)$$

donde  $\Phi$  es un potencial eléctrico,  $q$  una carga eléctrica,  $c$  la velocidad de la luz y  $\mathbf{A}$  un potencial vectorial.

Por lo tanto, se ha obtenido la ecuación *tipo-Newton* para el movimiento bajo la influencia de una fuerza electromagnética (fuerza de Lorentz) dada por  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + (q/c)(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ .

Luego, con la sustitución de  $\alpha$  por  $\Psi$  en la Ec. (1.29), donde la elección  $\beta = \alpha^* = \Psi^*$  garantiza que  $\rho$  sea real positiva, y  $f = (i/\hbar) [q^2\Phi + (q^2/2mC^2)A^2]$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= -\frac{\hbar}{2mi} \Delta \Psi + \nabla \Psi \cdot \frac{q}{mc} \mathbf{A} + \frac{1}{2} \Psi \cdot \left( \frac{q}{mc} \mathbf{A} \right) - \Psi \frac{i}{\hbar} \left( q\Phi + \frac{q^2}{2mc^2} A^2 \right), \\ \Rightarrow i\hbar \dot{\Psi} &= \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar^2}{i^2} \Delta + \frac{2\hbar q}{imc} \mathbf{A} \cdot \nabla - \frac{\hbar q}{ic} \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{q^2}{c^2} A^2 \right] \Psi + q\Phi \Psi. \end{aligned}$$

Con lo anterior, se obtiene la bien conocida forma de la ecuación de campo de Schrödinger con campo magnético [20],

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 \Psi + q\Phi \Psi, \quad (1.36)$$

la cual describe el movimiento del sistema bajo la acción de la misma fuerza que la dada para la correspondiente ecuación *tipo-Newton*. En este caso también se eligió  $C = \hbar/2mi$ , pero al igual que en la sección anterior esta no es la única posibilidad.

Como nota final, es claro que, la Ec. (1.30) conduce a la ecuación de Schrödinger compleja conjugada

$$-i\hbar \frac{d\Psi^*}{dt} = \frac{1}{2m} \left[ -\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 \Psi^* + q\Phi \Psi^* \quad (1.37)$$

### 1.3 Sistemas con disipación y campo magnético

Considerando procesos disipativos en el sistema [10, 13], así como la influencia de un campo magnético [12], a continuación se hace la derivación de una ecuación de campo no-lineal.

La densidad,  $\rho$ , se mantiene como antes, es decir,  $\rho = \alpha\beta$ , y las expresiones para la velocidad y el flujo son tratadas directamente con campo magnético al igual que en la sección previa,

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = C(\beta \nabla \alpha - \alpha \nabla \beta) - \rho \mathbf{a}, \quad (1.38)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = C \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} - \frac{\nabla \beta}{\beta} \right) - \mathbf{a}, \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = C \nabla \ln \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) - \mathbf{a}, \quad (1.40)$$

Sin embargo, tomando en cuenta el carácter de la irreversibilidad en el tiempo de los procesos disipativos, se entiende que  $\rho$  no obedece la EC (1.1), sino la ecuación de Fokker-Planck (EFP), es decir,

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} + \nabla \cdot \mathbf{J}_D = \dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - D \Delta \rho = 0, \quad (1.41)$$

con  $\nabla \cdot \mathbf{J}_D = -D \Delta \rho$  y donde  $D$ , es llamado el *coeficiente de difusión*. De la sustitución de la Ec. (1.38) en la EFP se encuentra que

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} + C \frac{\Delta \alpha}{\alpha} - C \frac{\Delta \beta}{\beta} - \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \cdot \mathbf{a} - \frac{\nabla \beta}{\beta} \cdot \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathbf{a} - D \frac{\Delta \rho}{\rho} = 0, \quad (1.42)$$

de este resultado es notable que la separación de variables de la EFP sólo puede ser llevada a cabo, si la condición adicional:

$$-D \frac{\Delta \rho}{\rho} = F_1(\alpha) + F_2(\beta), \quad (1.43)$$

se satisface. Es decir, el término disipativo debe tener la propiedad de poder separarse a su vez, en una combinación lineal de dos funciones de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, independientes entre sí.

Un *ansatz*, que cumple la demanda anterior está dado por,

$$-D \frac{\Delta \rho}{\rho} = \gamma [\ln \rho + \tilde{Z}] = \gamma [\ln(\alpha\beta) + \tilde{Z}]. \quad (1.44)$$

En virtud de las propiedades de la función *logaritmo* para el producto, se tiene:

$$\gamma [\ln(\alpha\beta) + \tilde{Z}] = \gamma [\ln(\alpha) + \ln(\beta) + \tilde{Z}], \quad (1.45)$$

con  $\gamma$  una constante y  $\tilde{Z}$  una función compleja e independiente de  $\alpha$  y  $\beta$  que satisface las relaciones elementales,

$$Z = Z_R + iZ_I, \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= Z + Z^* \\ &= 2Z_R, \end{aligned} \quad (1.47)$$

y con la propiedad adicional de poder expresar  $\tilde{Z} = -\langle \ln \rho \rangle$ , la condición de separabilidad se convierte en

$$-D \frac{\Delta \rho}{\rho} = \gamma [\ln \rho - \langle \ln \rho \rangle]. \quad (1.48)$$

Haciendo las sustituciones pertinentes para obtener la evolución temporal de las funciones  $\alpha$  y  $\beta$ , se encuentran las expresiones siguientes:

$$\dot{\alpha} = -C \Delta \alpha + \nabla \alpha \cdot \mathbf{a} + \frac{\alpha}{2} \nabla \cdot \mathbf{a} - \gamma [\ln(\alpha) + Z] \alpha - \alpha f, \quad (1.49)$$

$$\dot{\beta} = +C \Delta \beta + \nabla \beta \cdot \mathbf{a} + \frac{\beta}{2} \nabla \cdot \mathbf{a} - \gamma [\ln(\beta) + Z^*] \beta + \beta f. \quad (1.50)$$

Por otro lado, el valor promedio de la fuerza se calcula en forma idéntica a lo hecho en el tratamiento de la sección anterior para la fuerza promedio sin disipación, teniendo en este caso,

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} d^3x, \\
 \Rightarrow \langle \mathbf{F} \rangle &= 2mC \int (\dot{\beta} \nabla \alpha - \dot{\alpha} \nabla \beta) d^3x - m \int (\dot{\alpha} \beta + \alpha \dot{\beta}) \mathbf{a} d^3x \\
 &\quad - m \int (\alpha \dot{\beta}) \dot{\mathbf{a}} d^3x.
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Y después de realizar algunas simplificaciones y sustituciones se consigue,

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \rho [-\nabla (2Cf)] d^3x + mC \int \rho \left( \frac{\nabla \alpha}{\beta} - \frac{\nabla \beta}{\alpha} \right) (\nabla \cdot \mathbf{a}) d^3x \\
 &\quad + 2mC \int \rho \left[ \left( \frac{\nabla \beta}{\beta} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla \alpha}{\alpha} - \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla \beta}{\beta} \right] d^3x \\
 &\quad - m \int \rho \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) \mathbf{a} d^3x - m \int \rho \dot{\mathbf{a}} d^3x \\
 &\quad + 2mC\gamma \int \rho \left[ (\ln \alpha + Z) \frac{\nabla \beta}{\beta} - (\ln \beta + Z^*) \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \right] d^3x \\
 &\quad + m\gamma \int \rho (\ln \alpha \beta + \tilde{Z}) d^3x.
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Sin embargo, de (1.52) ya se conoce la solución, pues los términos son los mismos que aparecen en la Ec. (1.31), a excepción de aquellos que involucran disipación, es decir, de los términos que tienen en combinación lineal a la función  $\tilde{Z}$  con logaritmos de  $\alpha$  y/o  $\beta$ . Por lo tanto, la fuerza promedio de acuerdo con los resultados (A.21)- (A.29) y (1.33) es

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \rho \left\{ -\nabla \left( 2Cf - \frac{1}{2} a^2 \right) - \dot{\mathbf{a}} + [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a})] \right\} d^3x \\
 &\quad + 2mC\gamma \int \rho \left[ (\ln \alpha + Z) \frac{\nabla \beta}{\beta} - (\ln \beta + Z^*) \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \right] d^3x \\
 &\quad + m\gamma \int \rho (\ln \alpha \beta + \tilde{Z}) d^3x,
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

lo anterior, deja solamente por hacer un análisis de los términos disipativos de (1.53), lo cual lleva a conseguir una ecuación para la fuerza promedio con disipación y campo magnético dada por,

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \rho \left\{ -\nabla \left( 2Cf - \frac{1}{2} a^2 \right) - \dot{\mathbf{a}} + [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a})] \right\} d^3x \\
 &\quad - m\gamma \int \rho \mathbf{v} d^3x - \hbar\gamma \int \rho \nabla (Z_I) d^3x.
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

No obstante, aún se puede realizar una simplificación más, si se ignoran las fuerzas estocásticas, es decir, se hace  $\nabla(Z_I) = 0$ , también se iguala el campo magnético a cero (lo cual implica  $\mathbf{a} = 0$ ). Aunque, otra opción es tomar  $\nabla(Z_I) = -(q/\hbar c)\mathbf{A}(\eta)$  con  $\mathbf{a} = (q/mc)\mathbf{A}(\eta)$  y escoger una función de potencial  $f$  apropiada [ver la tabla A.1, (3.1), (4.1)], con lo cual la Ec. (1.54) queda en cualquiera de las dos formas siguientes

$$\langle F \rangle = \int \rho (-\nabla V - m\gamma\mathbf{v}) d^3x, \quad (1.55)$$

$$\langle F \rangle = \int \rho \left[ q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - m\gamma\mathbf{v} \right] d^3x. \quad (1.56)$$

Con el desarrollo anterior, nuevamente se han conseguido las ecuaciones de movimiento promedio *tipo-Newton*, pero ahora incluyendo un término adicional de disipación por fricción,  $-m\gamma\mathbf{v}$ . En la ecuación clásica de Langevin una fuerza estocástica adicional,  $\mathcal{F}(t)$ , puede estar presente y es de naturaleza puramente aleatoria. El coeficiente de fricción  $\gamma$  está relacionado a las fluctuaciones de la fuerza aleatoria por el teorema de *fluctuación-disipación*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(t) \rangle &= 0 \\ \int \langle \mathcal{F}(0) \cdot \mathcal{F}(t) \rangle &= 6kT\gamma \end{aligned} \quad (1.57)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura del sistema. Pero suponiendo que la fuerza aleatoria es completamente independiente en diferentes tiempos, la Ec. (1.57) toma la forma

$$\langle \mathcal{F}(t) \cdot \mathcal{F}(t') \rangle = 6kT\gamma\delta(t - t') \quad (1.58)$$

Así, la fuerza aleatoria puede ser tomada en cuenta reemplazando  $\nabla Z_I$  por  $\nabla Z_I = -(1/\hbar\gamma)\mathcal{F}(t)$ , si el caso es de campo magnético nulo, o por  $\nabla Z_I = -(q/\hbar c)\mathbf{A}(\eta) - (1/\hbar\gamma)\mathcal{F}(t)$ , con campo magnético presente, lo cual lleva a considerar términos adicionales en las ENLS (ver tabla A.1). Para una discusión más amplia de las fuerzas estocásticas las referencias [10, 23] son una opción.

Regresando a la Ec. (1.49) y usando el valor de  $C$ , Ec. (1.17), se consigue un par de ecuaciones *no-lineales tipo-Schrödinger*, en una se considera el campo magnético igual a cero, pero se incluye la disipación por medio de la fricción; en la otra la influencia del campo magnético sí se toma en cuenta, así como la disipación, introducida también a través de la fricción,

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi + \gamma\frac{\hbar}{i}(\ln\Psi + Z_R + iZ_I)\Psi = H_{NL}\Psi, \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 \Psi + q\Phi\Psi + \gamma\frac{\hbar}{i}(\ln\Psi + Z_R + iZ_I)\Psi \\ &\quad - \gamma\frac{q}{c}\mathbf{A}(\eta) \cdot \mathbf{r}\Psi = H_{NLM}\Psi. \end{aligned} \quad (1.60)$$

los subíndices  $NL$  y  $NLM$  se refieren a *No Lineal* y *No Lineal con campo Magnético* respectivamente. Estas ecuaciones diferenciales no-lineales implican varias consecuencias que se discuten más adelante, especialmente las concernientes a su interpretación.

En lo referente a las expresiones  $Z_R$  y  $Z_I$ , se busca determinarlas de manera que los términos disipativos no-lineales en las ENLS, puedan ser escritos en la forma

$$\tilde{W}_S = \gamma \frac{\hbar}{i} (\ln \Psi - \langle \ln \Psi \rangle) = W_S - \langle W_S \rangle, \quad (1.61)$$

$$\tilde{W}_{S,M} = \gamma \frac{\hbar}{i} (\ln \Psi - \langle \ln \Psi \rangle) - \gamma \frac{q}{c} \mathbf{A}(\eta) \cdot \mathbf{r} = W_{S,M} - \langle W_{S,M} \rangle. \quad (1.62)$$

de este modo, puede pensarse que el término disipativo está conectado con la desviación de un valor promedio, lo cual implica que el hamiltoniano del sistema en promedio, sea para todo tiempo la suma de las energías cinética y potencial, es decir,  $\langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$ , como es usual en la mecánica cuántica lineal, o en un sistema de partículas "sin disipación" de mecánica clásica.

Por ejemplo, si se usan funciones normalizadas (aunque esto no es necesario *a priori*). Con el *ansatz* general<sup>2</sup>

$$\Psi = N \exp(iS + R), \quad (1.63)$$

$$\Psi^* = N \exp(-iS + R), \quad (1.64)$$

e introduciendo  $\rho = N^2 \exp(2R)$  en la condición de separabilidad dada por la Ec. (1.44), se encuentra una ecuación diferencial para  $R$ ,

$$\Delta R + 2(\nabla R)^2 + \frac{\gamma}{D} R + \frac{\gamma}{D} (\ln N + Z_R) = 0, \quad (1.65)$$

lo que da una condición para la parte real de  $\Psi$ , independiente de la parte imaginaria. Si se toma un *ansatz* unidimensional  $R = a + bx + cx^2$ , se halla que,

$$R = - \left( \frac{\gamma}{8D} \right) \left[ x - \left( \frac{4D}{\gamma} \right) b \right]^2 + \frac{1}{4} - \ln N + Z_R, \quad (1.66)$$

de lo cual se nota que  $Z_R = 0$  conduce a una contradicción con la condición de normalización, ya que no habría ninguna constante, en este caso  $N$ , que permitiera hacer  $\rho = 1$ . Por lo tanto,  $Z_R$  debe al menos compensar a  $\ln N$ . Si se incluye o no, el término constante  $1/4$  en  $Z_R$ , no afecta a  $|\Psi| = N \exp R$ , solo se modifican los valores de  $N$  y el término constante en  $R$  respectivamente. Factores adicionales, pero constantes, pueden aparecer cuando a  $\Psi$  se le da un significado físico concreto (por ejemplo,  $\Psi$  la amplitud de un campo de materia), sin embargo, también pueden ser incorporados a  $Z_R$ , haciendo independiente a la ecuación de campo de factores de esta clase. Entonces, escogiendo  $Z_R = -\ln N + (1/4)$ ,  $N \exp R$  se convierte en una función gaussiana con

$$R = -P\bar{x}^2, \quad (1.67)$$

<sup>2</sup>Recuérdese que  $\alpha = \Psi$  y  $\beta = \Psi^*$ .

donde

$$P = \frac{\gamma}{8D}, \text{ y } \bar{x} = x - \frac{4D}{\gamma}b \quad (1.68)$$

Por último se puede generalizar el *ansatz* a tres dimensiones,

$$R = -(P_x \bar{x}^2 + P_y \bar{y}^2 + P_z \bar{z}^2), \quad (1.69)$$

con

$$P_{z_j} = \frac{\gamma}{8D_{z_j}}, \text{ y } \bar{x}_j = x_j - \frac{4D_{z_j}}{\gamma}b_j, \quad (1.70)$$

donde las  $b_j$  pueden ser constantes o funciones que dependan solamente del tiempo  $t$ .  $Z_R$  tiene, por lo tanto, la forma  $Z_R = -\ln N + d/4 = -\ln N + 3/4$ , con  $d$  el número de dimensiones del problema.

Es claro que, además de las soluciones (1.67) y (1.69), puede haber otras. Por ejemplo,  $R = 0$  y  $Z_R = -\ln N$ . Sin embargo, la solución (1.67), es más general y suficiente para entender el comportamiento de  $\Psi$  con el *ansatz* propuesto.  $Z_I$  y las ENLS están dadas en las tablas A.3 y A.4.

Cabe mencionar también, que la ecuación de continuidad se cumple inmediatamente porque fue una de las hipótesis usadas en la construcción de cada una de las ecuaciones de campo.

## Capítulo 2

# Soluciones a la ENLS

En el curso de la derivación de las ENLS,  $\nabla Z_I$  fue determinado para diferentes casos, con lo cual, queda claro que  $Z_I$  no está definido de manera única.

Desde el punto de vista puramente matemático, existen muchas posibilidades para  $Z_I$ , no obstante una argumentación física reduce el número. En este capítulo se estudian las posibilidades más razonables.

Una elección sensata y conveniente para  $Z_I$  debe satisfacer la condición  $\langle \dot{W}_S \rangle = 0$  para hacer válido el hecho de que  $\langle i\hbar d/dt \rangle = \langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$ . Por lo tanto, a partir de la ENLS (1.59), se acepta la ecuación

$$i\hbar\dot{\Psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi + \gamma\frac{\hbar}{i}(\ln\Psi + \langle \ln\Psi \rangle)\Psi. \quad (2.1)$$

La suposición  $Z_I = -(\arg\Psi + 2k\pi) = -(S + 2k\pi)$ , proporciona la ventaja de salvar los problemas que causa el hecho de que la función  $\ln\Psi$  no esté definida en forma única, ya que  $\exp(2k\pi) = 1 \forall k$  entero.

El potencial escogido para la Ec. (2.1), es el de oscilador armónico

$$V = (1/2)m\omega_0^2 x^2. \quad (2.2)$$

La ENLS se resuelve en las siguientes secciones, sin pérdida de generalidad, en forma unidimensional y distinguiendo entre dos clases de solución:

1. *Soluciones tipo-onda*, con una sola dependencia explícita del tiempo; y
2. *soluciones tipo-solitón*, con una dependencia adicional del tiempo, pero manejada en forma implícita y obtenida a través de una transformación de coordenadas de acuerdo a:  $\tilde{x} = x - \eta(t)$ .

### 2.1 Soluciones tipo-onda

La forma de la solución tipo-onda [10], se toma a partir de la Ec. (1.63), y las funciones  $S$  y  $R$  son escogidas como:

$$S(x, t) = k_x + l_x x + M_x x^2, \quad (2.3)$$

$$R(x) = -P(x-Q)^2, \text{ con } Q = \left(\frac{4D}{\gamma}\right), \quad (2.4)$$

donde  $k_x$  puede contener una dependencia explícita del tiempo. Con esta selección se encuentra el coeficiente de normalización  $N$ , tal que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} [N \exp(R - iS)] [N \exp(R + iS)] dx \\ &= N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2R) dx = 1, \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi dx &= N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-2P(x-Q)^2] dx \\ &= N^2 \sqrt{\frac{\pi}{2P}} = 1, \\ \Rightarrow N &= \left(\frac{2P}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

También se determinan los valores de expectación para  $x$  y para  $x^2$ ,

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* x \Psi dx = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp[-2P(x-Q)^2] dx \\ &= \sqrt{\frac{2P}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2P}} Q, \\ \Rightarrow \langle x \rangle &= Q, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* x^2 \Psi dx = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp[-2P(x-Q)^2] dx,$$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{1}{4P} + Q^2. \quad (2.7)$$

Finalmente, se obtiene para los coeficientes que intervienen en las funciones  $S$  y  $R$  las siguientes expresiones:

$$k_x = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0^2}{\Omega}\right) t, \quad l_x = -\left(\frac{m\gamma}{2\hbar}\right) Q, \quad M_x = -\frac{m\gamma}{4\hbar}, \quad (2.8)$$

$$Q = 0, \quad P = \left(\frac{m}{2\hbar}\right) \Omega,$$

con

$$\Omega = \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.9)$$



Se debe hacer énfasis en el hecho de que la frecuencia amortiguada (2.9), es el análogo al caso clásico corpuscular.

Así, la solución normalizada tipo-onda de la Ec. (2.1), se puede escribir en forma unidimensional como:

$$\Psi(x, t) = \left(\frac{m\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar}\Omega x^2 - i \left( \frac{\omega_0^2}{2\Omega} t + \frac{m\gamma}{4\hbar} x^2 \right) \right]. \quad (2.10)$$

De inmediato se observa que la solución (2.10), tiene la forma de una gaussiana con una amplitud constante dada por  $x_0 = (\hbar/m\Omega)^{1/2}$  y cuyo centro se encuentra en el origen  $x = 0$ . También debe decirse que en la función (2.10), la cual es solución estacionaria del problema sin amortiguamiento, cuando  $\gamma \rightarrow 0$ , la frecuencia reducida  $\Omega$  tiende a la frecuencia natural  $\omega_0$ , es decir  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \Omega = \omega_0$  y la solución (2.10) regresa al estado base del oscilador armónico sin amortiguamiento en la teoría de campo lineal de Schrödinger:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \Psi(x, t) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar}\omega_0 x^2 - \frac{i}{2}\omega_0 t \right]. \quad (2.11)$$

Como resultado adicional, introduciendo el coeficiente del término cuadrático en  $R$ ,  $P = m\Omega/2\hbar$ , en la Ec. (1.68), se puede determinar el *coeficiente de difusión*  $D$  de la EFP (1.41):

$$D = \frac{\hbar}{2m} \frac{\gamma/2}{\Omega} = \frac{\hbar}{2m} \frac{\gamma/2}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}, \quad (2.12)$$

donde  $D$  es una cantidad real, sobre la cual se abunda más adelante. Se corrobora que el  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} D = 0$ , lo cual significa que la EFP (1.41) tiende a la EC (1.1) usual cuando  $\gamma$  se aproxima a cero.

Por medio de la abreviación:

$$\mathbf{J}_t = \rho \mathbf{V}_t = \rho \left( \mathbf{v} - D \frac{\nabla \rho}{\rho} \right), \quad (2.13)$$

la EFP(1.41) puede reescribirse en la forma:

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J}_t = 0. \quad (2.14)$$

Las soluciones estacionarias de la (2.14) son definidas por  $\dot{\rho} = 0$ , después de realizar la integración e imponer la "condición natural de frontera" para  $\rho$ , es decir,  $\rho \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , la condición para las funciones estacionarias puede ser expresada como:

$$D \nabla R = \frac{\hbar}{2m} \nabla S, \quad (2.15)$$

y en particular con  $\nabla R = -2P\mathbf{r}$ ,

$$\nabla S = -\frac{4m}{\hbar} DP\mathbf{r}. \quad (2.16)$$

A partir de la solución (2.10), se demuestra de manera inmediata que la condición (2.16) se satisface, es decir,  $\dot{\rho} = 0$ , en virtud de que  $\rho$ , en este caso, es independiente del tiempo.

## 2.2 Soluciones tipo solitón

Para este caso, la propuesta de solución también se toma como lo hace Schuch en el artículo [10]:

$$\Psi(x, t) = N \exp(R + iS),$$

sin embargo, aquí la dependencia implícita del tiempo, introducida a través del parámetro  $\eta(t)$ , es tomada en cuenta en el *ansatz* unidimensional para  $S$  y  $R$  de la siguiente manera:

$$S(x, t; \eta) = K_x(t) + L_x(t)\bar{x} + M_x\bar{x}^2 = S(\bar{x}, t), \quad (2.17)$$

$$R(x, \eta) = -P[x - \eta(t)]^2 = -P\bar{x}^2 = R(\bar{x}, t), \quad (2.18)$$

donde, comparando con el caso anterior,  $Q = -\eta(t)$  y  $\bar{x} = x - \eta(t)$ . Adoptando nuevamente el potencial de oscilador armónico, se toma también como ecuación de partida a:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \Psi - i\hbar\gamma (\ln \Psi - \langle \Psi \rangle) \Psi, \quad (2.19)$$

y se encuentran, como en la sección previa, las expresiones para los coeficientes que intervienen en  $R$  y  $S$ , siendo éstos:

$$K_x(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}, t') dt' - \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\Omega} t. \quad (2.20)$$

Con

$$\mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}, t') = \frac{1}{2}m[\dot{\eta}(t')]^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2[\eta(t')]^2, \quad (2.21)$$

$$L_x(t) = \frac{m}{\hbar}\dot{\eta}(t), \quad M_x = -\frac{m\gamma}{4\hbar}, \quad P = \frac{m}{2\hbar}\Omega. \quad (2.22)$$

Adicionalmente se encuentra que,  $\eta(t)$  tiene que obedecer la ecuación clásica de movimiento (sin fuerzas estocásticas),

$$m\ddot{\eta} + m\gamma\dot{\eta} + m\omega_0^2\eta(t) = 0. \quad (2.23)$$

Así, después de realizar las sustituciones apropiadas, la solución normalizada  $\Psi = N \exp(R + iS)$ , se encuentra que está dada por:

$$\Psi(x, t; \eta(t)) = \left(\frac{m\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m\Omega}{2\hbar}(x - \eta)^2\right] \times \\ \times \exp\left\{i\left[\int_0^t \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}, t') dt' - \frac{\omega_0^2}{2\Omega}t + \frac{m}{\hbar}\dot{\eta}(x - \eta) - \frac{m\gamma}{4\hbar}(x - \eta)^2\right]\right\}. \quad (2.24)$$

Esta solución muestra una forma similar a un paquete de ondas en mecánica cuántica lineal. Pero, de acuerdo a la terminología usada en [25, 26], a la Ec.

(2.24), se le da el nombre de solución tipo-soliton de forma gaussiana, o de manera corta, *gausson*.

Se observa que, al igual que en la sección precedente, la solución (2.24), tiene una anchura constante dada por  $x_0 = (\hbar/m\Omega)^{1/2}$ . No obstante, en este caso, el gausson no se halla centrado en el origen, sino que su centro, ahora, sigue la trayectoria clásica.

Debe notarse, que mediante una superposición infinita de las soluciones tipo-onda (2.10), pero con coeficientes dependientes del tiempo, es posible construir una solución estable tipo-gausson, la cual satisface la ENLS y se aproxima a un estado final descrito por la solución tipo-onda (2.10) cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Aquí también se encuentra que el coeficiente de difusión es:

$$D = \frac{\hbar}{2m} \frac{\gamma/2}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \quad (2.25)$$

de hecho, debe decirse que el coeficiente  $D$  es independiente de la solución, al igual que la ecuación:

$$\dot{\rho} + \mathbf{J}_t = 0, \quad (2.26)$$

sin embargo, la condición para soluciones estacionarias  $\dot{\rho} = 0$  en este caso no se cumple debido a que la solución (2.24), tiene una dependencia implícita del tiempo a través de  $\hat{x} = x - \eta(t)$ , así que  $\dot{\rho} = \partial\rho/\partial t - \dot{\eta}(t)\nabla\rho = 0$  es la restricción que debe ser satisfecha, pues suponiendo que solamente  $\partial\rho/\partial t = 0$ , implica que  $\dot{\rho} = -\dot{\eta}(t)\nabla\rho \neq 0$ . Esta dependencia de  $\rho$  de  $\eta(t)$ , muestra que la reversibilidad en el tiempo no ocurre.

Por lo tanto, la densidad de probabilidad, de acuerdo al gausson (2.24) es una solución no estacionaria de la EFP (1.41), pero para  $t \rightarrow \infty$ ,  $\rho(t)$  se aproxima asintóticamente a la solución estacionaria correspondiente al estado final de la solución (2.10).

### 2.3 Principio de incertidumbre

En esta sección se demuestra que las soluciones encontradas, tanto la de onda como la de solitón, satisfacen el principio de incertidumbre [10, 13]. Para ello se calculan los valores promedio  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle p \rangle$  y  $\langle p^2 \rangle$  a partir de las Ecs. (2.10) y (2.24), respectivamente.

Primero, para (2.10):

$$\Psi(x, t) = \left( \frac{m\Omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar} \Omega x^2 - i \left( \frac{\omega_0^2}{2\Omega} t + \frac{m\gamma}{4\hbar} x^2 \right) \right].$$

Usando los resultados previamente calculados, y haciendo algunas operaciones sencillas se consigue el siguiente grupo de valores de expectación,

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0, \quad (2.27)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{4P} + Q^2 = \frac{\hbar}{2m\Omega}, \quad (2.28)$$

$$\langle p \rangle = 0, \quad (2.29)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar m \omega_0^2}{2\Omega}. \quad (2.30)$$

Con estas cantidades, se calcula la varianza o dispersión de  $x$  y  $p$ , que no es otra cosa que el promedio de las desviaciones cuadradas, es decir:

$$\overline{\Delta x^2} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\Omega},$$

$$\overline{\Delta p^2} = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar m \omega_0^2}{2\Omega}.$$

Por lo tanto, el principio de incertidumbre toma la forma:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p^2} \cdot \overline{\Delta x^2} &= \frac{\hbar m \omega_0^2}{2\Omega} \frac{\hbar}{2m\Omega} \\ &= \frac{1}{4\Omega^2} \hbar^2 \omega_0^2 \geq \frac{1}{4} \hbar^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Con lo cual se comprueba que no existe estado cuántico que sea simultáneamente eigenestado de dos variables canónicas conjugadas. Esto significa, en particular, que las trayectorias (en el espacio fase) de electrones igualmente preparados difieren de electrón a electrón, de tal forma que las dispersiones de  $x$  y  $p$  satisfacen la desigualdad (2.31), además de que la teoría desarrollada por su naturaleza estadística no permite determinar las trayectorias individuales, sino a lo sumo, ciertas propiedades estadísticas del movimiento.

Análogamente, para (2.24):

$$\begin{aligned} \Psi(x, t; \eta(t)) &= \left( \frac{m\Omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{m\Omega}{2\hbar} (x - \eta)^2 \right] \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[ \int_0^t \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}; t') dt' - \frac{\omega_0^2}{2\Omega} t + \frac{m}{\hbar} \dot{\eta} (x - \eta) - \frac{m\gamma}{4\hbar} (x - \eta)^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

se encuentran las cantidades:

$$\langle x \rangle = \eta(t), \quad (2.32)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\Omega} + \eta^2, \quad (2.33)$$

$$\langle p \rangle = m\dot{\eta}(t), \quad (2.34)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar m \omega_0^2}{2\Omega} + m^2 \dot{\eta}^2. \quad (2.35)$$

Entonces, los promedios de las desviaciones cuadradas son:

$$\overline{\Delta x^2} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\Omega} + \eta^2 - \eta^2 = \frac{\hbar}{2m\Omega},$$

$$\overline{\Delta p^2} = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar m \omega_0^2}{2\Omega} + m^2 \dot{\eta}^2 - m^2 \dot{\eta}^2 = \frac{\hbar m \omega_0^2}{2\Omega}. \quad (2.36)$$

Y el principio de incertidumbre ahora queda en el modo siguiente:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta p^2} \cdot \overline{\Delta x^2} &= \frac{\hbar m \omega_0^2}{2\Omega} \frac{\hbar}{2m\Omega} \\ &= \frac{1}{4\Omega^2} \hbar^2 \omega_0^2 \geq \frac{1}{4} \hbar^2.\end{aligned}\quad (2.37)$$

En el límite, es decir, cuando  $\gamma \rightarrow 0$ , (2.31) y (2.37) convergen (como era de esperarse) al mismo resultado:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \overline{\Delta p^2} \cdot \overline{\Delta x^2} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{4\Omega^2} \hbar^2 \omega_0^2 = \frac{1}{4} \hbar^2, \quad (2.38)$$

y como se observa, para  $\gamma \neq 0$  siempre son valores más grandes.

Con los valores promedio calculados  $\langle x^2 \rangle$  y  $\langle p^2 \rangle$ , para ambas soluciones, ahora es fácil obtener las energías promedio respectivas.

Para la solución tipo-onda (subíndice  $W$ ) se obtienen para la energía cinética promedio  $\langle T \rangle_W$  y potencial promedio  $\langle V \rangle_W$  los siguientes resultados, respectivamente,

$$\langle T \rangle_W = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar \omega_0^2}{4\Omega} \quad (2.39)$$

$$\langle V \rangle_W = \frac{\omega_0^2}{2m} \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar \omega_0^2}{4\Omega}. \quad (2.40)$$

Con lo que:

$$\langle E \rangle_W = \langle T \rangle_W + \langle V \rangle_W = \frac{\hbar \omega_0^2}{2} \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{2} \hbar \Omega \left( 1 + \frac{\gamma^2}{4\Omega^2} \right) \quad (2.41)$$

La razón de que  $\langle E \rangle_W$ , no sea igual a  $(1/2)\hbar\Omega$ , se puede argumentar a primera instancia, suponiendo que la interacción del sistema oscilante con los alrededores también influye en su estado de energía más baja. Así, resulta razonable el hecho de que tal estado se encuentre a una energía por encima de la energía del estado base del oscilador sin amortiguar ( $\omega_0/\Omega > 1$ ). Esto es similar a lo que ocurre con una "partícula Browniana" [24], ya que su velocidad tiende a disminuir, pero nunca llega al reposo total debido a que los alrededores se hallan en constante interacción con la partícula, llevándose a cabo una transferencia de energía del ambiente hacia la partícula.

Por otro lado, para la solución tipo-soliton (subíndice  $S$ ), las energías cinética y potencial respectivamente, son:

$$\langle T \rangle_S = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar \omega_0^2}{4\Omega} + \frac{1}{2} m \eta^2, \quad (2.42)$$

$$\langle V \rangle_S = \frac{\omega_0^2}{2m} \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar \omega_0^2}{4\Omega} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \eta^2. \quad (2.43)$$

Por lo tanto,

$$\langle E \rangle_S = \langle T \rangle_S + \langle V \rangle_S = \frac{\hbar\omega_0^2}{2\Omega} + \frac{1}{2}m\eta^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\eta^2. \quad (2.44)$$

Sin embargo, en el límite, cuando  $t \rightarrow \infty$ , tanto  $\dot{\eta}(t)$  como  $\eta(t)$  se anulan<sup>1</sup>, y solamente se mantiene la parte constante e independiente del tiempo de  $\langle E \rangle_S$ , la cual es idéntica a la energía  $\langle E \rangle_W$  de la solución tipo-onda.

Además, se tiene que cuando  $\gamma \rightarrow 0$ , la energía  $\langle E \rangle_W$  tiende al estado base de la energía del oscilador armónico sin amortiguar.

## 2.4 Sobre el operador de fricción

En este último apartado, se discuten algunas de las cualidades y consecuencias del operador no-lineal de fricción  $\bar{W}_s$  encontrado, para más detalles las referencias [10, 15, 16] cubren varios aspectos.

Las no-linealidades logarítmicas no solamente fueron usadas para introducir una clase de "potencial de fricción". Un cálculo adicional permite mostrar que el operador de fricción  $\bar{W}_s$  es hermitiano con respecto a  $\Psi$ , si la parte real de  $\Psi$  satisface las Ecs. (1.65) y (1.67), es decir,

$$\langle \bar{W}_s \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi | \bar{W}_s \Psi \rangle = \int \Psi W_s^* \Psi dV = \int \Psi^* \bar{W}_s \Psi dV. \quad (2.45)$$

Determinando los conmutadores de  $\bar{W}_s$  con los operadores de  $r$ ,  $r^2$ ,  $p$ ,  $p^2$ ,  $V$  y  $H$ , se puede usar la relación  $-\nabla \bar{W}_s = (i/\hbar) [\bar{W}_s, p]$  para calcular el valor promedio:

$$\langle -\nabla \bar{W}_s \rangle = -\gamma \langle p \rangle, \quad (2.46)$$

y a través de  $(d/dt)p + (\partial/\partial t) + (i/\hbar)[H, p]$  se obtiene el valor promedio:

$$\left\langle \frac{d}{dt} p \right\rangle = -\langle \nabla V \rangle - \gamma \langle p \rangle. \quad (2.47)$$

Por lo tanto, el teorema de Ehrenfest se cumple, esto es, la ecuación de movimiento para los valores de expectación corresponde a la ecuación clásica de movimiento.

En la misma forma la disipación de energía puede ser determinada por:

$$\langle \dot{E} \rangle = -\frac{\gamma}{m} \langle p^2 \rangle, \quad (2.48)$$

lo cual está en correspondencia con la mecánica clásica de partículas.

Resumiendo, como consecuencia principal se tiene el hecho de que el valor promedio de  $\bar{W}_s$  se anule, lo cual lleva a que la "degeneración" del operador

<sup>1</sup> Ambas cantidades, satisfacen la ecuación clásica de movimiento.

hamiltoniano juega el doble papel de determinar los niveles de energía al tiempo que marca la evolución de la función-solución (tipo-onda o gaussón). El desarrollo temporal de la función, definitivamente se hace a través del operador hamiltoniano  $H_{NL} = T + V + \bar{W}_s$ ; sin embargo, el valor promedio de la energía se obtiene solamente con los valores promedio de los operadores de energía cinética y potencial.

Finalmente, debe resaltarse la importancia de que la no-linealidad  $\bar{W}_s$  tiene un efecto que lo hace parecer como los alrededores del sistema (por ejemplo un baño de calor) en interacción con éste, de tal manera que solo se percibe la influencia de los alrededores sobre la dinámica observable y no las interacciones en detalle de los alrededores. Se pueden encontrar situaciones similares en el movimiento Browniano o en el movimiento de un proyectil en un medio viscoso, en donde se puede observar el decremento en la velocidad del proyectil, pero no cómo o de qué forma se disipa la energía en el medio viscoso.

## Capítulo 3

# Solución en un sistema bidimensional

En este capítulo se discute el movimiento amortiguado en un sistema bidimensional, de un sistema material cargado con velocidad  $v_{\perp}$  en el plano perpendicular al campo magnético  $\mathbf{B}$ . El método estudiado en capítulos previos, puede ser extendido para incluir condiciones anisotrópicas, así como diferentes constantes de difusión para cada una de las direcciones espaciales. Por lo tanto, el coeficiente de difusión  $D$  en la ecuación de Fokker-Planck es reemplazado por una matriz de  $2 \times 2$ , convirtiéndose en el *tensor de difusión*  $\hat{D}$  con componentes  $D_{jk}$ , y  $-D\Delta\rho$  por la expresión más general

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_D = - \sum_{k,j=1}^2 \nabla_k \nabla_j (D_{jk} \rho), \quad (3.1)$$

pero si los elementos  $D_{k,j}$  son constantes, se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_D = - \sum_{k,j=1}^2 D_{jk} \nabla_k \nabla_j \rho(\mathbf{r}). \quad (3.2)$$

De la condición de separabilidad análoga a la Ec. (1.48) se sigue que  $\hat{D}$  es una matriz antisimétrica.

### 3.1 Movimiento en un campo magnético

El movimiento de una partícula con carga puntual  $q$  -por ejemplo un ion o un electrón- en un medio con campo magnético homogéneo (y sin campo eléctrico,  $\phi = 0$ ) es un problema en tres dimensiones, el cual puede describirse con la ENLS (1.60) [12, 16, 18].



$$i\hbar\dot{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + \gamma \frac{\hbar}{i} [\ln \Psi(\mathbf{r}, t) - \langle \ln \Psi(\mathbf{r}, t) \rangle] \Psi(\mathbf{r}, t) - \gamma \left[ \frac{q}{c} \mathbf{A}(\eta) \cdot \mathbf{r} \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.3)$$

Para encontrar la solución de (3.3), tomando en cuenta lo estudiado en los capítulos anteriores, se propone un *ansatz* tipo-paquete de ondas (WP) y producto de dos funciones, de tal manera que se pueda llevar a cabo una separación conveniente en dos problemas, uno perpendicular al campo magnético aplicado  $\mathbf{B}$ , y otro paralelo al campo.

Con este propósito, a continuación se explican algunas cantidades que son de ayuda en el desarrollo del capítulo. Primeramente, se consideran los vectores de posición en el plano- $xy$  y el de la trayectoria clásica dados por

$$\mathbf{r}_\perp = x\hat{i} + y\hat{j}, \quad \eta_\perp = \eta_x\hat{i} + \eta_y\hat{j},$$

respectivamente, los cuales se muestran gráficamente en la Fig. (3.1). También se definen las cantidades de movimiento relativo:

$$\tilde{x} = x - \langle x \rangle = x - \eta_x(t), \quad \tilde{y} = y - \langle y \rangle = y - \eta_y(t).$$

Y los operadores,

$$\nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j}, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Así, el *ansatz* propuesto se expresa como:

$$\Psi_{WP}(\mathbf{r}, t) = \Psi_{WP\perp}(\mathbf{r}_\perp, t) \cdot \Psi_{WP\parallel}(z, t). \quad (3.4)$$

Para el movimiento en la dirección  $z$ , se tiene una ENLS unidimensional y libre de potencial

$$i\hbar\dot{\Psi}_{WP\parallel}(z, t) = \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma \frac{\hbar}{i} [\ln \Psi_{WP\parallel}(z, t) - \langle \ln \Psi_{WP\parallel}(z, t) \rangle] \right\}. \quad (3.5)$$

Para el movimiento de la partícula restringido al plano- $xy$  (sistema de interés), también se obtiene su ecuación a partir de (1.60), pero esta vez en dos dimensiones

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\Psi}_{WP\perp}(\mathbf{r}_\perp, t) &= H_{NLM} \Psi_{WP\perp}(\mathbf{r}_\perp, t) \\ &= \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla_\perp - \frac{q}{c} \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\perp) \right]^2 \Psi_{WP\perp}(\mathbf{r}_\perp, t) \\ &\quad + \gamma \frac{\hbar}{i} [\ln \Psi_{WP\perp}(\mathbf{r}_\perp, t) - \langle \ln \Psi_{WP\perp}(\mathbf{r}_\perp, t) \rangle] \Psi_{WP\perp}(\mathbf{r}_\perp, t) \\ &\quad - \gamma \left[ \frac{q}{c} \mathbf{A}_\perp(\eta_\perp) \cdot \mathbf{r}_\perp \right] \Psi_{WP\perp}(\mathbf{r}_\perp, t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

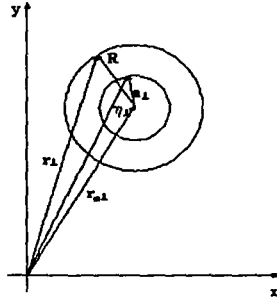


Figura 3.1: Movimiento bidimensional en el plano  $xy$  perpendicular a la dirección del campo magnético.  $r_{\perp}$ : vector de posición en el plano  $xy$ ;  $\eta_{\perp}$ : trayectoria clásica en el plano  $xy$ ;  $r_{m\perp}$ : vector de posición del centro del movimiento circular;  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}_{m\perp}$ : con  $R = |\mathbf{R}| = \text{radio del movimiento circular}$ ,  $a = \eta_{\perp} - r_{m\perp}$  con  $a = |a| = \text{radio clásico del movimiento circular}$ .

la cual se encuentra en correspondencia a la ecuación clásica de movimiento tipo-Newton (fuerza de Lorentz),

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - m\gamma \mathbf{v}. \quad (3.7)$$

Así, la función solución  $\Psi_{WP\perp}$ , se normaliza ahora en un espacio bidimensional,

$$\begin{aligned} \Psi_{WP\perp}(\mathbf{r}, t) &= N(t) \exp[g(\bar{x}, \bar{y}, t)] \\ &= N(t) \exp \left[ iY_x(t)\bar{x}^2 + \frac{i}{\hbar}L_x(t)\bar{x} \right. \\ &\quad \left. + iY_y(t)\bar{y}^2 + \frac{i}{\hbar}L_y(t)\bar{y} + iK(t) \right], \quad (3.8) \end{aligned}$$

donde  $g(\bar{x}, \bar{y}; t) = iY_x(t)\bar{x}^2 + (i/\hbar)L_x(t)\bar{x} + iY_y(t)\bar{y}^2 + (i/\hbar)L_y(t)\bar{y} + iK(t)$ . Para proceder, en el manejo de la ENLS (3.6), debe tenerse cuidado con la expansión del cuadrado  $[\mathbf{p}_{\perp} - (q/c)\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp})]^2 = [(\hbar/i)\nabla_{\perp} - (q/c)\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp})]^2$ , teniendo en mente que el operador de momento  $\mathbf{p}_{\perp}$  no conmuta en general con el vector  $\mathbf{A}_{\perp}$ , el cual es una función de las coordenadas. Entonces tiene que escribirse,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\hbar}{i}\nabla_{\perp} - \frac{q}{c}\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}) \right]^2 \Psi_{WP\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, t) &= \left\{ -\hbar^2\Delta_{\perp} - \frac{\hbar q}{ic}[\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp})] \right. \\ &\quad \left. - 2\frac{\hbar q}{ic}[\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}) \cdot \nabla_{\perp}] + \frac{q^2}{c^2}[\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp})]^2 \right\} \Psi_{WP\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, t). \quad (3.9) \end{aligned}$$

Sin embargo, trabajando en la *norma de Coulomb*  $\nabla \cdot \mathbf{A}_\perp = 0$ , la regla de conmutación del operador  $\mathbf{p}_\perp$  con cualquier función de coordenadas [20] —en este caso  $\mathbf{A}_\perp$ — queda como:

$$\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{A}_\perp - \mathbf{A}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp = -i\hbar \nabla \cdot \mathbf{A}_\perp = 0, \quad (3.10)$$

es decir,  $\mathbf{p}_\perp$  y  $\mathbf{A}_\perp$  conmutan. Esto ocurre, en particular, para un campo magnético uniforme, si su potencial vectorial es expresado en la forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}_\perp, \quad (3.11)$$

y en analogía,  $\mathbf{A}(\eta_\perp) = (1/2)\mathbf{B} \times \eta_\perp$ . Ahora, utilizando el *ansatz* solución (3.8), se consigue la siguiente expresión para su derivada temporal:

$$i\hbar \dot{\Psi}_{WP\perp} = i\hbar N \exp g + i\hbar N \left( \begin{array}{l} i\dot{Y}_x \bar{x}^2 - 2iY_x \dot{\eta}_z \bar{x} + \frac{i}{\hbar} \dot{L}_x \bar{x} - \frac{i}{\hbar} L_x \dot{\eta}_z \\ + i\dot{Y}_y \bar{y}^2 - 2iY_y \dot{\eta}_z \bar{y} + \frac{i}{\hbar} \dot{L}_y \bar{y} - \frac{i}{\hbar} L_y \dot{\eta}_z \end{array} \right) \exp g - \hbar N \dot{K} \exp g. \quad (3.12)$$

Por lo tanto, escogiendo  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$  los potenciales vectoriales quedan como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp) &= -\frac{1}{2}(B\bar{y} + B\eta_y) \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}(B\bar{x} + B\eta_x) \hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{A}(\eta_\perp) &= -\frac{B}{2}\eta_y \hat{\mathbf{i}} + \frac{B}{2}\eta_x \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

Después de realizar los cálculos<sup>1</sup> marcados en el lado derecho de la ESNL (3.6), tomando en cuenta (3.9), se sustituyen los potenciales y se iguala la cantidad pertinente a la Ec. (3.12). Finalmente dividiendo a derecha e izquierda por  $N \exp g = \Psi_{WP\perp}$  se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} &\bar{x}^2 \left( -\hbar \dot{Y}_x - \frac{2\hbar^2}{m} Y_x^2 - \gamma \hbar Y_x - \frac{m}{8} \omega_c^2 \right) + \bar{y}^2 \left( -\hbar \dot{Y}_y - \frac{2\hbar^2}{m} Y_y^2 - \gamma \hbar Y_y - \frac{m}{8} \omega_c^2 \right) \\ &\quad + \bar{x}\bar{y} (-\hbar \omega_c Y_x + \hbar \omega_c Y_y) \\ &+ \bar{x} \left( 2\hbar Y_x \dot{\eta}_z - \dot{L}_x - \frac{2\hbar}{m} Y_x L_x - \hbar \omega_c Y_x \eta_y + \frac{1}{2} \omega_c L_y - \frac{m}{4} \omega_c^2 \eta_x - \gamma L_x - \frac{\gamma}{2} m \omega_c \eta_y \right) \\ &+ \bar{y} \left( 2\hbar Y_y \dot{\eta}_z - \dot{L}_y - \frac{2\hbar}{m} Y_y L_y + \hbar \omega_c Y_y \eta_x - \frac{1}{2} \omega_c L_x - \frac{m}{4} \omega_c^2 \eta_y - \gamma L_y + \frac{\gamma}{2} m \omega_c \eta_x \right) \\ &\quad + i\hbar \frac{\dot{N}}{N} + L_x \dot{\eta}_x + L_y \dot{\eta}_y - \hbar \dot{K} - \frac{1}{2m} (L_x^2 + L_y^2) + \frac{i\hbar^2}{m} (Y_x + Y_y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \omega_c (\eta_y L_x - \eta_x L_y) - \frac{m}{8} \omega_c^2 (\eta_x^2 + \eta_y^2) + \gamma \hbar (Y_x \langle \bar{x}^2 \rangle + Y_y \langle \bar{y}^2 \rangle) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

<sup>1</sup> Véase el Ap. C

con

$$\omega_c = \frac{qB}{mc} \equiv \text{frecuencia de ciclotrón.} \quad (3.14)$$

De la Ec. (3.13), se observa que para el movimiento restringido al plano- $xy$ , se han conseguido términos dependientes de  $\hat{x}^2$ ,  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}^2$  y  $\hat{y}$  —como con el oscilador armónico. De igual manera se encuentran, términos que son independientes y adicionalmente el término cruzado  $\hat{x}\hat{y}$ . Pero, dado que las coordenadas espaciales son linealmente independientes, para que la Ec. (3.13) se cumpla cada uno de sus coeficientes debe anularse por separado. Antes, es recomendable resaltar el hecho de que, para los momentos clásicos  $L_x$  y  $L_y$  se puede hacer la correspondencia al momento generalizado de la partícula, dada por  $\mathbf{L}(t) = m\mathbf{v}_\perp = m\dot{\eta}_\perp + q\mathbf{A}(\eta_\perp)$ , que en componentes queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L_x &= m\dot{\eta}_x - \frac{m\omega_c}{2}\eta_y, & \Rightarrow & \dot{L}_x = m\dot{\eta}_x - \frac{m\omega_c}{2}\dot{\eta}_y, \\ L_y &= m\dot{\eta}_y + \frac{m\omega_c}{2}\eta_x, & \Rightarrow & \dot{L}_y = m\dot{\eta}_y + \frac{m\omega_c}{2}\dot{\eta}_x. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Así, de los términos proporcionales a  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  en la Ec. (3.13), se halla que deben cumplirse las ecuaciones:

$$\hat{x}: \quad 2\hbar Y_x \dot{\eta}_x - (m\dot{\eta}_x - \frac{m}{2}\omega_c \dot{\eta}_y) - \frac{2\hbar}{m} Y_x (m\dot{\eta}_x - \frac{m}{2}\omega_c \eta_y) - \hbar\omega_c Y_x \eta_y + \frac{1}{2}\omega_c (m\dot{\eta}_y + \frac{m}{2}\omega_c \eta_x) - \frac{m}{4}\omega_c^2 \eta_x - \gamma (m\dot{\eta}_x - \frac{m}{2}\omega_c \eta_y) - \frac{1}{2}m\omega_c \eta_y = 0,$$

$$\hat{y}: \quad 2\hbar Y_y \dot{\eta}_y - (m\dot{\eta}_y + \frac{m}{2}\omega_c \dot{\eta}_x) - \frac{2\hbar}{m} Y_y (m\dot{\eta}_y + \frac{m}{2}\omega_c \eta_x) + \hbar\omega_c Y_y \eta_x - \frac{1}{2}\omega_c (m\dot{\eta}_x - \frac{m}{2}\omega_c \eta_y) - \frac{m}{4}\omega_c^2 \eta_y - \gamma (m\dot{\eta}_y + \frac{m}{2}\omega_c \eta_x) - \frac{1}{2}m\omega_c \eta_x = 0,$$

a partir de las cuales se obtienen las relaciones:

$$m\dot{\eta}_x - m\omega_c \dot{\eta}_y + \gamma m\dot{\eta}_x = 0, \quad (3.16)$$

$$m\dot{\eta}_y + m\omega_c \dot{\eta}_x + \gamma m\dot{\eta}_y = 0, \quad (3.17)$$

que son las ecuaciones clásicas de movimiento para el máximo del paquete de ondas (WP), lo cual significa, que aún considerando los efectos de fricción el máximo de la solución gaussiana sigue la trayectoria clásica.

Los términos proporcionales a  $\hat{x}^2$  y a  $\hat{y}^2$  permiten establecer:

$$\hat{x}^2: \quad \frac{2\hbar}{m} \dot{Y}_x + \gamma \frac{2\hbar}{m} Y_x + \left(\frac{2\hbar}{m} Y_x\right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 = 0, \quad (3.18)$$

$$\hat{y}^2: \quad \frac{2\hbar}{m} \dot{Y}_y + \gamma \frac{2\hbar}{m} Y_y + \left(\frac{2\hbar}{m} Y_y\right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 = 0, \quad (3.19)$$

dos ecuaciones tipo Riccati, que contienen información sobre la anchura del paquete, es decir, sobre el aspecto ondulatorio involucrado en el problema y cuyas soluciones son discutidas con detalle en secciones posteriores. Por último, de los términos independientes de (3.13) se consigue la relación:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= i\frac{\dot{N}}{N} + \frac{m}{2\hbar} (\dot{\eta}_x^2 - \dot{\eta}_y^2) - \frac{m\omega_c}{2\hbar} (\eta_x \eta_y - \eta_x \dot{\eta}_y) + i\frac{\hbar}{m} (Y_x + Y_y) \\ &\quad + \gamma (Y_x \langle \hat{x}^2 \rangle + Y_y \langle \hat{y}^2 \rangle). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Una simplificación adicional, es suponer que se cumple la condición  $Y_x = Y_y$ , pues esto lleva a la anulación del término cruzado  $\tilde{x}\tilde{y}$  en la Ec. (3.13).

### 3.2 Solución de las ecuaciones tipo-Riccati

Ya que de las ecuaciones tipo-Riccati (3.18) y (3.19), se puede obtener información del ancho del paquete de ondas, así como de su evolución temporal, en esta sección se describe un método de linearización y solución a estas ecuaciones diferenciales inhomogéneas y no-lineales [15].

Dado que las expresiones para (3.18) y (3.19) son formalmente iguales - excepto por la dirección- a continuación se trabaja con la ecuación general:

$$\frac{2\hbar}{m}\dot{Y}_j + \gamma\frac{2\hbar}{m}Y_j + \left(\frac{2\hbar^2}{m}Y_j\right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 = 0, \quad (3.21)$$

para  $j = x, y$ . Haciendo el cambio de variable  $(2\hbar/m)Y_j = (2\hbar/m)[\tilde{Y}_j + v_j(t)]$ , donde:

$$\frac{2\hbar}{m}\tilde{Y}_j = -\frac{\gamma}{2} \mp \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\omega_c^2}{4}}, \quad (3.22)$$

es una solución particular constante de (3.21), con lo que,

$$\frac{2\hbar}{m}\dot{Y}_j(t) = \frac{2\hbar}{m}\dot{v}_j(t). \quad (3.23)$$

Sustituyendo  $(2\hbar/m)Y_j$  en (3.21), se consigue una ecuación diferencial cuadrática, pero homogénea,

$$\frac{2\hbar}{m}\dot{v}_j + \left(\gamma + 2\frac{2\hbar}{m}\tilde{Y}_j\right)\frac{2\hbar}{m}v_j + \frac{2\hbar}{m}v_j^2 = 0. \quad (3.24)$$

Definiendo  $A \equiv 2\left[(\gamma/2) + (2\hbar/m)\tilde{Y}_j\right]$ , implica que:

$$A \equiv \mp\sqrt{\gamma^2 - \omega_c^2}, \quad (3.25)$$

por lo tanto,  $v$  satisface una ecuación tipo-Bernoulli, la cual se resuelve haciendo la sustitución  $u = v^{-1} \Rightarrow \dot{u} = -\dot{v}v^{-2}$ . La ecuación resultante es:

$$\begin{aligned} \dot{u} - Au - \frac{2\hbar}{m} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} [u \exp(-At)] &= \frac{2\hbar}{m} \exp(-At), \\ \Rightarrow u(t) &= -\frac{2\hbar}{mA} + a \exp(-At), \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde  $a = \text{constante}$ , se determina con condiciones iniciales. Esto es,

$$\begin{aligned} u(t=0) &= v_j(t=0) = \frac{1}{v_{j0}}, \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{v_{j0}} + \frac{2\hbar}{m_j A}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Finalmente,  $(2\hbar/m)v_j$  está dado como:

$$\frac{2\hbar}{m}v_j(t) = \frac{1}{-\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{\frac{2\hbar}{m}v_{j0}} + \frac{1}{\lambda}\right)\exp(At)}. \quad (3.28)$$

Por otro lado, se tiene que  $\frac{2\hbar}{m}Y_j$  es una cantidad compleja, es decir,

$$\frac{2\hbar}{m}Y_j = \frac{2\hbar}{m}(Y_{jR} + iY_{jI}), \quad (3.29)$$

que si se sustituye en la Ec. (3.21), se encuentra que las partes real (PR) e imaginaria (PI) de la ecuación, deben ser idénticamente cero cada una. Esto es,

$$PR: \frac{2\hbar}{m}\dot{Y}_{jR} + \frac{2\hbar}{m}(Y_{jR}^2 - Y_{jI}^2) + \gamma\frac{2\hbar}{m}Y_{jR} + \left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 = 0, \quad (3.30)$$

$$PI: \frac{2\hbar}{m}\dot{Y}_{jI} + 2\left(\frac{2\hbar}{m}\right)^2 Y_{jR}Y_{jI} + \gamma\frac{2\hbar}{m}Y_{jI} = 0. \quad (3.31)$$

En este momento es conveniente recordar la función solución  $\Psi_{WP\perp}$ , especialmente los términos que señalan la anchura del paquete (exponentes  $iY_x\bar{x}^2$  e  $iY_y\bar{y}^2$ ), pues a partir de ellos queda claro lo importante que resulta ser el hecho, de que las partes imaginarias de  $Y_x$  y  $Y_y$  sean positivas ( $Y_{xI}, Y_{yI} > 0$ ) para que la solución propuesta sea físicamente razonable.

Por ejemplo, reduciéndose al movimiento sin fricción en el campo magnético, con  $(2\hbar/m)Y_{jI}$  constante, es decir,  $(2\hbar/m)\dot{Y}_{jI}$ , se consigue de (3.22):

$$\frac{2\hbar}{m}\dot{Y}_{jI} = \pm \frac{\omega_c}{2}, \quad (3.32)$$

tomando el signo positivo (el signo negativo conduce a un paquete divergente) se encuentra la proporcionalidad,

$$\Psi_{WP\perp} \sim \exp\left(-\frac{m\omega_c}{4\hbar}\bar{x}^2 - \frac{m\omega_c}{4\hbar}\bar{y}^2\right), \quad (3.33)$$

una función cuya anchura, en ambas direcciones, se mantiene constante en el tiempo a la manera del problema de la partícula libre. En el caso de que  $(2\hbar/m)\dot{Y}_{jI}$  no sea constante, para conseguir una solución con significado físico se debe cumplir la condición,

$$\frac{1}{2}A_I + \frac{2\hbar}{m}v_{jI}(t) > 0. \quad (3.34)$$

Ahora, regresando al par de Ecs. (3.30) y (3.31), de (PI), se obtiene que:

$$\frac{2\hbar}{m} Y_{JR} = -\frac{1}{2} \dot{Y}_{JI} - \frac{1}{2} \gamma. \quad (3.35)$$

Y conectando la anchura del paquete de ondas dada por  $\langle \vec{j}^2 \rangle = \langle j^2 \rangle - (j)^2$ , con  $(2\hbar/m) Y_{JI}$  en la forma,

$$\frac{2\hbar}{m} Y_{JI} = \frac{1}{\alpha_j^2} = \frac{\hbar}{2m} \frac{1}{\langle \vec{x}^2 \rangle}, \quad (3.36)$$

$$\Rightarrow \frac{2\hbar}{m} Y_{JR} = \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} - \frac{1}{2} \gamma, \quad (3.37)$$

la Ec. (3.35) puede ser transformada en una ecuación no-lineal y real,

$$\ddot{\alpha}_j + \left( \frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\gamma^2}{4} \right) \alpha_j = \frac{1}{\alpha_j^3}, \quad (3.38)$$

la cual determina el movimiento clásico y donde la variable  $\alpha_j$ , salvo un factor constante, es equivalente a la anchura del paquete  $\sqrt{\langle \vec{j}^2 \rangle}$ . De la expresión para (PR) resulta:

$$\frac{2\hbar}{m} Y_{JR} = \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} - \frac{1}{2} \gamma. \quad (3.39)$$

A partir de la condición (3.25), se establecen cuatro casos generales [15, 18]:

1.  $\gamma > \omega_c \Rightarrow A = \mp \sqrt{\gamma^2 - \omega_c^2} \in \mathbf{R}$
2.  $\gamma = \omega_c \Rightarrow A = 0$
3.  $\gamma < \omega_c \Rightarrow A = \mp i \sqrt{\omega_c^2 - \gamma^2} = \mp i \tilde{\omega} \in \mathbf{C}$
4.  $\gamma = 0 \Rightarrow A = \mp i \omega_c \in \mathbf{C}$

De lo arriba apuntado, el caso 4 es esencialmente el caso 3, excepto porque la frecuencia está modificada, por lo tanto, basta trabajar con los tres primeros casos. Entonces, la Ec. (3.38), para cada caso se transforma en:

1. $\gamma > \omega_c$	2. $\gamma = \omega_c$	3. $\gamma < \omega_c$
$\ddot{\alpha}_j - \left( \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\omega_c^2}{4} \right) \alpha_j = \frac{1}{\alpha_j^3}$	$\ddot{\alpha}_j = \frac{1}{\alpha_j^3}$	$\ddot{\alpha}_j + \frac{\tilde{\omega}^2}{4} \alpha_j = \frac{1}{\alpha_j^3}$

Y la expresión para  $(2\hbar/m)v_j(t)$ , Ec. (3.28), también cambia de acuerdo al caso, para ver esto, primero se encuentra la condición inicial  $(2\hbar/m)v_{j0}(t)$  con la ayuda de  $(2\hbar/m)Y_j = (2\hbar/m)(\dot{Y}_j + v_j(t))$  más las Ecs. (3.36) y (3.39).

En los siguientes apartados se estudian los tres casos principales: amortiguamiento supercrítico ( $\gamma > \omega_c$ ), resonancia ( $\gamma = \omega_c$ ) y amortiguamiento subcrítico ( $\gamma < \omega_c$ ).

3.2.1 Caso supercrítico:  $\gamma > \omega_c$ 

Comenzando con,

$$\begin{aligned}\frac{2\hbar}{m}Y_j &= \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} - \frac{\gamma}{2} + i\frac{1}{\alpha_j^2} = -\frac{\gamma}{2} + \frac{A}{2} + \frac{2\hbar}{m}v_j, \\ \Rightarrow \frac{2\hbar}{m}v_j &= \frac{2\hbar}{m}(v_{jR} + iv_{jI}) = \left(\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} - \frac{A}{2}\right) + i\frac{1}{\alpha_j^2}.\end{aligned}\quad (3.40)$$

Sea  $\beta_j = 1/\alpha_j^2$  y  $t = 0$ , entonces,

$$\begin{aligned}\frac{2\hbar}{m}v_{j0} &= \left(\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j}\right)_0 - \frac{A}{2} + i\beta_{j0}, \\ \Rightarrow \frac{1}{\frac{2\hbar}{m}v_{j0}} &= \frac{\left(\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j}\right)_0 - \frac{A}{2} - i\beta_{j0}}{\left[\left(\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j}\right)_0 - \frac{A}{2}\right]^2 + \beta_{j0}^2}.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Pero, para lograr una simplificación adecuada, una elección particular debe ser asignada a la parte real de la expresión previa. Tomando la siguiente identidad,

$$\left(\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j}\right)_0 = \frac{A}{2}, \quad (3.42)$$

se consigue una notable simplificación de la Ec. (3.41). No obstante, otras elecciones son también posibles, con la objeción de que conducen a expresiones más complicadas y difíciles de manejar, arrojando resultados de oscura explicación física. Así, la forma analítica explícita de las soluciones de la ecuación diferencial no-lineal, responde muy sensiblemente al cambio de las condiciones iniciales. Entonces, se tiene que:

$$\frac{1}{\frac{2\hbar}{m}v_{j0}} = -i\frac{1}{\beta_{j0}}. \quad (3.43)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{2\hbar}{m}v_j(t) &= \frac{\frac{1}{\lambda} [\exp(At) - 1] + i\frac{1}{\beta_{j0}} \exp(At)}{\frac{1}{\lambda^2} [\exp(At) - 1]^2 + \frac{1}{\beta_{j0}^2} \exp(2At)}, \\ \Rightarrow \frac{2\hbar}{m}v_{jI}(t) &= \frac{\frac{1}{\beta_{j0}} \exp(At)}{\frac{1}{\lambda^2} \exp(2At) + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} \exp(At) + \frac{1}{\beta_{j0}^2} \exp(2At)}.\end{aligned}\quad (3.44)$$

De la Ec. (3.40), en combinación con la (3.44), se obtiene la solución analítica:

$$\alpha_j^2(t) = \alpha_{j0}^2 \left[ \exp(At) + \left(\frac{\beta_{j0}}{\frac{A}{2}}\right)^2 \sinh^2\left(\frac{A}{2}t\right) \right]. \quad (3.45)$$



Otra relación, cuya importancia se pone de manifiesto cuando se encuentran las corrientes producidas en el sistema bidimensional, es:

$$\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j}(t) = \frac{A \exp(At) + \left(\frac{\beta_{j0}}{4}\right)^2 \sinh\left(\frac{A}{2}t\right) \cosh\left(\frac{A}{2}t\right)}{2 \left[ \exp(At) + \left(\frac{\beta_{j0}}{4}\right)^2 \sinh^2\left(\frac{A}{2}t\right) \right]}. \quad (3.46)$$

Aquí, hay que enfatizar que el coeficiente que acompaña el término lineal de la ecuación diferencial no-lineal para  $\alpha$ , se mantiene negativo y en este caso para  $A$  existen dos soluciones,  $+\sqrt{\gamma^2 - \omega_c^2} = A_{1/2}$  y  $-\sqrt{\gamma^2 - \omega_c^2} = -A_{1/2}$  que difieren solamente en su pronóstico, sin embargo, ambas con significado físico definido, pues no conducen a divergencias. Es decir, se tienen:

$$\alpha_{j+}^2(t) = \alpha_{j0}^2 \left[ \exp(A_{1/2}t) + \left(\frac{\beta_{j0}}{A_{1/2}}\right)^2 \sinh^2\left(\frac{A_{1/2}}{2}t\right) \right], \quad (3.47)$$

$$\alpha_{j-}^2(t) = \alpha_{j0}^2 \left[ \exp(-A_{1/2}t) + \left(\frac{\beta_{j0}}{A_{1/2}}\right)^2 \sinh^2\left(\frac{A_{1/2}}{2}t\right) \right]. \quad (3.48)$$

Debido al término de  $\sinh^2$ , ambas soluciones indican que el paquete de ondas (WP) se extiende (tanto en la dirección  $x$  como en la  $y$ ) más rápido que en el caso de  $\gamma = \omega_c$ . Observando el comportamiento para  $\gamma \sim \omega_c$  (es decir, en resonancia  $A \ll 1$ ) de las Ecs. (3.45) y (3.46), el límite puede ser fácilmente tomado si se usa expansión en series. Esto es,

$$\begin{aligned} \alpha_j^2 &\sim \alpha_{j0}^2 \left[ 1 + \left(\frac{\beta_{j0}}{A}\right)^2 \left(\frac{A}{2}t\right)^2 \right] = \alpha_{j0}^2 [1 + \beta_{j0}^2 t^2] \\ &\Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \omega_c} \alpha_j^2 = \alpha_{j0}^2 [1 + (\beta_{j0}t)^2], \end{aligned} \quad (3.49)$$

resultado que concuerda con las características de un sistema aislado,  $\gamma = 0$  y  $\omega_c = 0$ , y que igualmente describe la incertidumbre en la posición, creciendo proporcional a  $t^2$ . Para la Ec. (3.46) se encuentra,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} &\sim \frac{A}{2} \left[ \frac{1 + \left(\frac{\beta_{j0}}{4}\right)^2 \left(\frac{A}{2}t\right)^2}{1 + \beta_{j0}^2 t^2} \right] = \frac{A}{2} + \frac{\beta_{j0}^2 t}{1 + \beta_{j0}^2 t^2} \\ &\Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \omega_c} \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} = \beta_{j0} \frac{\beta_{j0} t}{1 + (\beta_{j0}t)^2} \end{aligned} \quad (3.50)$$

### 3.2.2 Caso de resonancia: $\gamma = \omega_c$

En esta sección, se considera a la frecuencia de ciclotrón  $\omega_c$ , en coincidencia con la frecuencia  $\gamma$ , dando con ello el fenómeno de resonancia, de manera similar al

encontrado en el tratamiento del oscilador armónico amortiguado. Además hay que notar que solamente se cuenta con una solución, en virtud de que  $A = 0$ . Partiendo otra vez de la relación:

$$\begin{aligned} \frac{2\hbar}{m} Y_j &= \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} - \frac{\omega_c}{2} + i \frac{1}{\alpha_j^2} = -\frac{\omega_c}{2} + \frac{2\hbar}{m} v_j, \\ \Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_j &= \frac{2\hbar}{m} (v_{jR} + i v_{jI}) = \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} + i \frac{1}{\alpha_j^2}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

y definiendo como antes  $\beta_j = 1/\alpha_j^2$  y  $t = 0$ , entonces,

$$\begin{aligned} \frac{2\hbar}{m} v_{j0} &= \left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 + i \beta_{j0}, \\ \Rightarrow \frac{1}{\frac{2\hbar}{m} v_{j0}} &= \frac{\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 - i \beta_{j0}}{\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0^2 + \beta_{j0}^2}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ahora, una simplificación conveniente (no la única) para facilitar los cálculos y el análisis es que al tiempo  $t = 0$

$$\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 = 0, \quad (3.53)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{2\hbar}{m} v_{j0}} = -i \frac{1}{\beta_{j0}}. \quad (3.54)$$

Convirtiendo la expresión para  $(2\hbar/m)v_j$  en

$$\frac{2\hbar}{m} v_j(t) = \frac{A}{\left(1 - \frac{iA}{\beta_{j0}}\right) \exp(At) - 1},$$

de la cual, la parte imaginaria es la de interés

$$\frac{2\hbar}{m} v_{jI}(t) = \frac{\frac{A^2}{\beta_{j0}} \exp(At)}{[\exp(At) - 1]^2 + \frac{A^2}{\beta_{j0}^2} \exp(2At)}. \quad (3.55)$$

Sin embargo, su forma no queda del todo clara en el tiempo, dado que en la expresión anterior aún aparece  $A$  de manera simbólica, pero sustituir  $A = 0$  directamente no otorga ninguna información relevante sobre la anchura del paquete. Un procedimiento más inteligente es tomar otra vez una expansión en serie, con el fin de aplicar finalmente el límite cuando  $\gamma \rightarrow \omega_c \Rightarrow A \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_j^2 &= \frac{1}{\frac{2\hbar}{m} v_{jI}(t) + \frac{A}{2}} \sim \frac{1}{\frac{\beta_{j0} + \beta_{j0} A t}{\beta_{j0}^2 t^2 + 1 + 2A t} + \frac{A}{2}}, \\ \Rightarrow \lim_{A \rightarrow 0} \alpha_j^2 &= \alpha_{j0}^2 (1 + \beta_{j0}^2 t^2). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Siendo este resultado, consistente con lo obtenido en el caso anterior. Por otra parte, como se dijo al principio de la sección, la resonancia ha sido estudiada para el oscilador armónico, por ejemplo; pero ahora también se observa en la dinámica de una carga puntual en un campo magnético. También se observa que si la frecuencia de ciclotrón  $\omega_c$  y la "frecuencia de perturbación"  $\gamma$ , son suficientemente grandes la ecuación diferencial no-lineal para  $\alpha$  parecería mostrar la *dinámica de una partícula libre sin fricción en un sistema disipativo*.

### 3.2.3 Caso subcrítico: $\gamma < \omega_c$

Para este caso, se tiene un campo magnético suficientemente intenso, de tal manera que la frecuencia de ciclotrón  $\omega_c$ , se encuentra por arriba de la frecuencia de perturbación  $\gamma$ , lo cual lleva a que la constante  $A$  sea una puramente imaginaria, es decir,  $A = \mp i\sqrt{\omega_c^2 - \gamma^2} = \mp i\tilde{\omega}$ , con  $\tilde{\omega}$  la frecuencia reducida. Entonces, en esta ocasión, solamente la solución positiva es físicamente posible, pues como se explicó párrafos arriba, la solución negativa produce un paquete divergente. Por lo tanto, como se ha hecho en las dos secciones previas, de la relación:

$$\begin{aligned} \frac{2\hbar}{m} Y_j &= \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} + i \frac{1}{\alpha_j^2} = \frac{A}{2} + \frac{2\hbar}{m} v_j, \\ \Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_j &= \frac{2\hbar}{m} (v_{jR} + i v_{jI}) = \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} + i \left( \frac{1}{\alpha_j^2} - \frac{\tilde{\omega}}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.57)$$

y otra vez con  $\beta_j = 1/\alpha_j^2$ , en  $t = 0$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{2\hbar}{m} v_{j0} &= \left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 + i \left( \beta_{j0} - \frac{\tilde{\omega}}{2} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{\frac{2\hbar}{m} v_{j0}} &= \frac{\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 - i \left( \beta_{j0} - \frac{\tilde{\omega}}{2} \right)}{\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0^2 + \left( \beta_{j0} - \frac{\tilde{\omega}}{2} \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Notando la similitud de esta última ecuación con la (3.52), se adopta también la opción más simple para la condición inicial,

$$\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 = 0, \quad (3.59)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{2\hbar}{m} v_{j0}} = -i \frac{1}{\left( \beta_{j0} - \frac{\tilde{\omega}}{2} \right)}. \quad (3.60)$$

Con lo anterior, se encuentra la sucesión de resultados,

$$\frac{2\hbar}{m} v_j(t) = \frac{1}{\frac{\beta_{j0} + \frac{\tilde{\omega}}{2}}{\tilde{\omega}(\beta_{j0} - \frac{\tilde{\omega}}{2})} \sin(\tilde{\omega}t) + i \left[ \frac{1}{\tilde{\omega}} - \frac{\beta_{j0} + \frac{\tilde{\omega}}{2}}{\tilde{\omega}(\beta_{j0} - \frac{\tilde{\omega}}{2})} \cos(\tilde{\omega}t) \right]},$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_{jI}(t) &= \frac{\bar{\omega}(\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2})^2 - \bar{\omega} \left[ \beta_{j0}^2 - (\frac{\bar{\omega}}{2})^2 \right] \cos(\bar{\omega}t)}{2 \left[ \beta_{j0}^2 + (\frac{\bar{\omega}}{2})^2 \right] - 2 \left[ \beta_{j0}^2 - (\frac{\bar{\omega}}{2})^2 \right] \cos(\bar{\omega}t)}, \\ \Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_{jI}(t) + \frac{\bar{\omega}}{2} &= \frac{\beta_{j0} \bar{\omega}^2}{2\beta_{j0}^2 2 \sin^2(\frac{\bar{\omega}t}{2}) + \frac{\bar{\omega}^2}{2} 2 \cos^2(\frac{\bar{\omega}t}{2})}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

en vías de encontrar la expresión final para  $\alpha_j^2$ . Entonces, de la Ec. (3.57), se establece la ecuación

$$\alpha_j^2 = \alpha_{j0}^2 \left\{ \beta_{j0}^2 \left[ \frac{\sin(\frac{\bar{\omega}t}{2})}{\frac{\bar{\omega}}{2}} \right]^2 + \cos^2\left(\frac{\bar{\omega}t}{2}\right) \right\}, \quad (3.62)$$

además de la otra relación importante

$$\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} = \frac{\left( \frac{2\beta_{j0}^2}{\bar{\omega}} - \bar{\omega} \right) \cos\left(\frac{\bar{\omega}t}{2}\right) \sin\left(\frac{\bar{\omega}t}{2}\right)}{2 \left\{ \beta_{j0}^2 \left[ \frac{\sin(\frac{\bar{\omega}t}{2})}{\frac{\bar{\omega}}{2}} \right]^2 + \cos^2\left(\frac{\bar{\omega}t}{2}\right) \right\}}. \quad (3.63)$$

Examinando el comportamiento de las Ecs. (3.62) y (3.63) para el caso de resonancia,  $\bar{\omega} \ll 1 \Rightarrow \omega_c \rightarrow \gamma$ , permite establecer una comparación con el caso resonante y comprobar que los tres casos coinciden en el límite. Empleando las mismas estrategias que en las secciones previas, se halla que

$$\begin{aligned} \alpha_j^2 &\sim \alpha_{j0}^2 [1 + (\beta_{j0}t)^2] \\ \Rightarrow \lim_{\bar{\omega} \rightarrow 0} \alpha_j^2 &= \alpha_{j0}^2 [1 + (\beta_{j0}t)^2], \end{aligned} \quad (3.64)$$

corroborando con lo anterior, el resultado encontrado en el primer caso para  $\gamma > \omega_c$ , es decir, cuando las frecuencias de ciclotrón y de perturbación se hallan extremadamente cercanas, un fenómeno de resonancia toma lugar en el sistema. Adicionalmente, se tiene la aproximación

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} &\sim \frac{\left( 2\beta_{j0}^2 - \frac{\bar{\omega}^2}{2} \right) t}{2(\beta_{j0}^2 t^2 + 1)}, \\ \Rightarrow \lim_{\bar{\omega} \rightarrow 0} \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} &= \beta_{j0} \frac{\beta_{j0} t}{1 + (\beta_{j0} t)^2}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

con lo cual se encuentra la misma consecuencia vista en la Ec. (3.50), para  $\gamma \sim \omega_c$  en el caso supercrítico.

Regresando a la discusión sobre la solución exacta (3.62), la ecuación describe al máximo del paquete de ondas (WP), oscilando en el tiempo con una frecuencia reducida  $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_c^2 - \gamma^2}$ .

### 3.3 Efectos de fricción en las corrientes

Del sistema bidimensional contemplado, donde se mueven partículas de carga puntual —electrones, iones, etc.— bajo la acción de un campo magnético perpendicular al sistema y homogéneo, además de conseguir información sobre el movimiento del máximo del paquete de ondas (WP), la solución de la ecuación diferencial no lineal para  $\alpha$  (3.38), también proporciona información sobre la parte no-clásica de la dinámica (por ejemplo, las corrientes de tunelaje) contenida en la densidad de corriente de convención que aparece en la EFP (1.41) [15, 18].

Para observar la influencia de la fricción en las corrientes, primeramente se obtiene la expresión para la velocidad  $v_{\perp}$  en el sistema (plano- $xy$ ), empleando la relación (1.40) se encuentra que:

$$v_{\perp} = \frac{\hbar}{2m\tilde{a}} \nabla_{\perp} \ln \left( \frac{\Psi}{\Psi^*} \right) - \frac{q}{mc} \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}), \quad (3.66)$$

pero recordando que  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_{\perp}) = (1/2)\mathbf{B} \times \mathbf{r}_{\perp}$  y que  $\Psi$  es de la forma (3.8), entonces se consigue la expresión en forma matricial para la velocidad:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_x + \left( \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\gamma}{2} \right) \tilde{x} + \frac{\omega_c}{2} \tilde{y} \\ \dot{\eta}_y + \left( \frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\gamma}{2} \right) \tilde{y} - \frac{\omega_c}{2} \tilde{x} \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

La velocidad de la corriente de difusión se obtiene a partir del término  $\nabla \cdot \mathbf{J}_D$  en la EFP (1.41), dado que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J}_D &= \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_{D\perp}) = -\hat{D} \Delta \rho = \nabla \cdot (-\hat{D} \nabla \rho), \\ \Rightarrow \mathbf{v}_{D\perp} &= -\hat{D} \frac{\nabla \rho}{\rho}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

y con

$$\hat{D} = \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} \langle \tilde{x}^2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle \tilde{y}^2 \rangle \end{bmatrix} \quad y \quad \frac{\nabla \rho}{\rho} = \begin{bmatrix} -\frac{2\mu}{\hbar} \frac{1}{\alpha_x^2} \tilde{x} \\ -\frac{2\mu}{\hbar} \frac{1}{\alpha_y^2} \tilde{y} \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

se tiene que

$$\mathbf{v}_{D\perp} = -\hat{D} \frac{\nabla \rho}{\rho} = \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Aquí debe resaltarse por un lado, el hecho de que la velocidad total de la corriente, ( $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{D\perp}$ ), sea independiente del coeficiente de fricción  $\gamma$ , pues

$$\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{D\perp} = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_x + \left( \frac{\partial x}{\partial x} \right) \tilde{x} + \frac{\omega_c}{2} \tilde{y} \\ \dot{\eta}_y + \left( \frac{\partial y}{\partial y} \right) \tilde{y} - \frac{\omega_c}{2} \tilde{x} \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Por otra parte se tiene que, la corriente que es proporcional al término que involucra la forma del paquete tipo-onda, a través del término con  $\alpha$  —de ahí la importancia de la cantidad  $\dot{\alpha}_j/\alpha_j$ — puede llevar a un incremento o crecimiento de la corriente en una o ambas direcciones. En el caso contrario, para  $\alpha$  constante, simplemente la contribución a la corriente total del término proporcional a  $\dot{\alpha}_j/\alpha_j$ , desaparece.

### 3.4 Sobre la energía del sistema

Los aspectos corpuscular y ondulatorio del sistema cuántico considerado, no solamente son reflejados en las diferentes ecuaciones de movimiento que describen la dinámica del sistema, sino también en las correspondientes contribuciones a la energía. La solución tipo paquete de ondas (3.8), lleva a una función de densidad  $\rho = \Psi_{WPL}^* \Psi_{WPL}$  que posee una forma gaussiana y aunque a partir de  $\Psi_{WPL}$  se obtienen soluciones analíticas exactas,  $\Psi_{WPL}$  no es una eigenfunción del operador hamiltoniano. Por lo tanto, no es posible con la ENLS ( $H_{NLM} \Psi_{WPL} = E \Psi_{WPL}$ ) determinar los valores intrínsecos de la energía. Sin embargo, se puede calcular la energía total ( $E$ ) del sistema. Esta energía total, consiste de una cantidad que se puede atribuir a la mecánica clásica y de otra cantidad no-clásica de carácter ondulatorio [18].

En el caso del movimiento en el sistema bidimensional con campo magnético que se está estudiando, se calcula el valor de la energía promedio a partir de la ENLS (3.6),

$$\begin{aligned} \langle E \rangle = \langle H_{NLM} \rangle = & \left\langle \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla_{\perp} - \frac{q}{c} A_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}) \right]^2 \right\rangle \\ & + \left\langle \gamma \frac{\hbar}{i} [\ln \Psi_{WPL}(\mathbf{r}_{\perp}, t) - \langle \ln \Psi_{WPL}(\mathbf{r}_{\perp}, t) \rangle] \right\rangle \\ & + \left\langle -\gamma \left[ \frac{q}{c} A_{\perp}(\eta_{\perp}) \cdot \mathbf{r}_{\perp} \right] \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.72)$$

no obstante, los dos últimos promedios de  $E$  no contribuyen a la energía, y de acuerdo a la expresión para el paréntesis cuadrado (3.9),  $E$  se convierte en

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2m} \left\langle -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{2\hbar q}{ic} A_x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2\hbar q}{ic} A_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{q^2}{c^2} (A_x^2 + A_y^2) \right\rangle \quad (3.73)$$

de lo anterior puede definirse la energía efectiva del sistema como

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2m} \left[ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{2\hbar q}{ic} A_x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2\hbar q}{ic} A_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{q^2}{c^2} (A_x^2 + A_y^2) \right] \quad (3.74)$$

Luego, entonces

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &= \frac{1}{2m} \left\langle p_x^2 + p_y^2 - \frac{2q}{c} A_x p_x - \frac{2q}{c} A_y p_y + \frac{q^2}{c^2} A_x^2 + \frac{q^2}{c^2} A_y^2 \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2m} \left\langle p_x^2 - \frac{2q}{c} A_x p_x + \frac{q^2}{c^2} A_x^2 \right\rangle + \frac{1}{2m} \left\langle p_y^2 - \frac{2q}{c} A_y p_y + \frac{q^2}{c^2} A_y^2 \right\rangle \\
 \Rightarrow \langle E \rangle &= \frac{1}{2m} \left( \langle p_x^2 \rangle - \frac{2q}{c} \langle A_x \rangle \langle p_x \rangle + \frac{q^2}{c^2} \langle A_x^2 \rangle \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2m} \left( \langle p_y^2 \rangle - \frac{2q}{c} \langle A_y \rangle \langle p_y \rangle + \frac{q^2}{c^2} \langle A_y^2 \rangle \right), \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

pero, en virtud de las relaciones

$$\begin{aligned}
 \bar{a} &= a - \langle a \rangle, \quad \Rightarrow \quad \langle \bar{a} \rangle = 0, \\
 \Rightarrow \langle \bar{a}^2 \rangle &= \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2, \quad \Rightarrow \quad \langle a^2 \rangle = \langle \bar{a}^2 \rangle + \langle a \rangle^2, \quad (3.76)
 \end{aligned}$$

la expresión para la energía promedio, energía clásica más energía no-clásica, queda como:

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &= \frac{1}{2m} \left( \langle p_x \rangle^2 - \frac{2q}{c} \langle A_x \rangle \langle p_x \rangle + \frac{q^2}{c^2} \langle A_x \rangle^2 \right. \\
 &\quad \left. + \langle p_y \rangle^2 - \frac{2q}{c} \langle A_y \rangle \langle p_y \rangle + \frac{q^2}{c^2} \langle A_y \rangle^2 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2m} \left( \langle \bar{p}_x^2 \rangle - \frac{2q}{c} \langle \bar{A}_x \rangle \langle \bar{p}_x \rangle + \frac{q^2}{c^2} \langle \bar{A}_x^2 \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \langle \bar{p}_y^2 \rangle - \frac{2q}{c} \langle \bar{A}_y \rangle \langle \bar{p}_y \rangle + \frac{q^2}{c^2} \langle \bar{A}_y^2 \rangle \right) \quad (3.77) \\
 &= \langle E_c \rangle + \langle E_q \rangle.
 \end{aligned}$$

Siendo, por lo tanto, la energía no-clásica la de interés especial,

$$\langle E_q \rangle = \frac{1}{2m} \left( \langle \bar{p}_x^2 \rangle - \frac{2q}{c} \langle \bar{A}_x \rangle \langle \bar{p}_x \rangle + \frac{q^2}{c^2} \langle \bar{A}_x^2 \rangle \right) + \left( \langle \bar{p}_y^2 \rangle - \frac{2q}{c} \langle \bar{A}_y \rangle \langle \bar{p}_y \rangle + \frac{q^2}{c^2} \langle \bar{A}_y^2 \rangle \right). \quad (3.78)$$

A partir de la relación

$$\langle \bar{a}_j^2 \rangle = \langle a_j^2 \rangle - \langle a_j \rangle^2, \quad (3.79)$$

se calculan los valores promedio y las dispersiones de los operadores de posición y momento, involucrados en la Ec. (3.78). Para ello se emplea la función solución tipo-paquete de ondas (3.8)

$$\begin{aligned}
 \Psi_{WPL}(\mathbf{r}, t) &= N(t) \exp \left[ iY_x(t)\bar{x}^2 + \frac{i}{\hbar} L_x(t)\bar{x} \right. \\
 &\quad \left. + iY_y(t)\bar{y}^2 + \frac{i}{\hbar} L_y(t)\bar{y} + iK(t) \right], \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

y recordando los operadores matemáticos,

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} = \frac{\partial^n}{\partial \bar{x}^n}, \quad \frac{\partial^n}{\partial y^n} = \frac{\partial^n}{\partial \bar{y}^n}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

después de realizar los cálculos pertinentes<sup>2</sup>, finalmente se obtienen los resultados:

$$\begin{aligned} \langle p_x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi \, dx dy \\ \Rightarrow \langle p_x \rangle &= L_x. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \langle p_y \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi \, dx dy \\ \Rightarrow \langle p_y \rangle &= L_y. \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \langle p_x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi \, dx dy, \\ \langle p_x^2 \rangle &= \frac{\hbar^2 Y_x^2}{Y_x l} + L_x^2 - 2i\hbar^2 Y_x, \end{aligned} \quad (3.83)$$

y similarmente,

$$\begin{aligned} \langle p_y^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi \, dx dy, \\ \langle p_y^2 \rangle &= \frac{\hbar^2 Y_y^2}{Y_y l} + L_y^2 - 2i\hbar^2 Y_y. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Ahora, se pueden conseguir las dispersiones necesarias para los operadores de posición y momento. Para la dispersión en la posición —tanto para  $x$  como para  $y$ — se hace referencia a la relación (3.36), encontrando que:

$$\langle \bar{x}^2 \rangle = \frac{1}{4Y_x l} = \frac{\hbar}{2m} \alpha_x^2, \quad \langle \bar{y}^2 \rangle = \frac{1}{4Y_y l} = \frac{\hbar}{2m} \alpha_y^2, \quad (3.85)$$

y para la dispersión de los operadores de momento se tiene:

$$\langle \bar{p}_x^2 \rangle = \frac{\hbar^2 (Y_{xR}^2 + Y_{xl}^2)}{Y_x l}, \quad \langle \bar{p}_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2 (Y_{yR}^2 + Y_{yl}^2)}{Y_y l}. \quad (3.86)$$

Empleando las relaciones (3.36) y (3.39), en las ecuaciones previas, se consigue la expresión:

$$\langle \bar{p}_j^2 \rangle = \left( \frac{\hbar m}{2} \right) \left[ \alpha_j^2 \left( \frac{\alpha_j}{\alpha_j} \right)^2 - \gamma \alpha_j^2 \left( \frac{\alpha_j}{\alpha_j} \right) + \frac{\gamma^2}{4} \alpha_j^2 + \frac{1}{\alpha_j^2} \right] \quad (3.87)$$

Para los promedios que involucran las componentes del potencial vectorial,

$$\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\perp) = -\frac{B}{2} (\hat{y} + \eta_y) \hat{i} + \frac{B}{2} (\hat{x} + \eta_x) \hat{j} \quad (3.88)$$

<sup>2</sup> Véase el apéndice C



se tienen los promedios

$$\begin{aligned} \langle A_{x\perp} \rangle &= -\frac{B}{2} \eta_y, & \langle A_{y\perp} \rangle &= \frac{B}{2} \eta_x, \\ \langle A_{x\perp}^2 \rangle &= \frac{B^2}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle + \frac{B^2}{4} \eta_y^2, & \langle A_{y\perp}^2 \rangle &= \frac{B^2}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle + \frac{B^2}{4} \eta_x^2, \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\Rightarrow \langle \tilde{A}_{x\perp}^2 \rangle = \frac{B^2}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle, \quad \langle \tilde{A}_{y\perp}^2 \rangle = \frac{B^2}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle. \quad (3.90)$$

Por lo tanto, sustituyendo las cantidades pertinentes en la expresión para la energía promedio (3.78), se obtiene que

$$\begin{aligned} \langle E_q \rangle &= \frac{\hbar}{4} \left[ \alpha_x^2 \left( \frac{\dot{\alpha}_x}{\alpha_x} - \frac{\gamma}{2} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_x^2} + \left( \frac{\omega_c}{2} \right)^2 \alpha_x^2 \right] \\ &\quad + \frac{\hbar}{4} \left[ \alpha_y^2 \left( \frac{\dot{\alpha}_y}{\alpha_y} - \frac{\gamma}{2} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_y^2} + \left( \frac{\omega_c}{2} \right)^2 \alpha_y^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Como en el caso de la energía clásica de un sistema disipativo por fricción, también la contribución cuántica encontrada  $\langle E_q \rangle$ , no es constante. El cambio de la energía del estado base se obtiene a través de su derivada temporal,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle E_q \rangle &= 2 \frac{\hbar}{4} \left\{ \left[ \left( \dot{\alpha}_x - \frac{\gamma}{2} \alpha_x \right) \left( \dot{\alpha}_x - \frac{\gamma}{2} \alpha_x \right) - \frac{\dot{\alpha}_x}{\alpha_x^2} + \frac{\omega_c^2}{4} \alpha_x \dot{\alpha}_x \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \dot{\alpha}_y - \frac{\gamma}{2} \alpha_y \right) \left( \dot{\alpha}_y - \frac{\gamma}{2} \alpha_y \right) - \frac{\dot{\alpha}_y}{\alpha_y^2} + \frac{\omega_c^2}{4} \alpha_y \dot{\alpha}_y \right] \right\}, \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle E_q \rangle &= -\frac{\gamma \hbar}{4} \left[ \frac{\left( \dot{\alpha}_x - \frac{\gamma}{2} \alpha_x \right)^2 + \frac{1}{\alpha_x^2} - \frac{\omega_c^2}{4} \alpha_x^2}{\left( \dot{\alpha}_y - \frac{\gamma}{2} \alpha_y \right)^2 + \frac{1}{\alpha_y^2} - \frac{\omega_c^2}{4} \alpha_y^2} \right], \end{aligned} \quad (3.92)$$

de esta última ecuación se identifican los términos con  $\langle \tilde{p}_x^2 \rangle$  y  $\langle \tilde{j}^2 \rangle$ , encontrándose que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle E_q \rangle &= -\gamma \left[ \frac{1}{2m} \langle \tilde{p}_x^2 \rangle - \frac{m}{2} \frac{\omega_c^2}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle + \frac{1}{2m} \langle \tilde{p}_y^2 \rangle - \frac{m}{2} \frac{\omega_c^2}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle \right] \\ &= -\frac{\gamma}{4} \left[ \hbar \frac{d}{dt} \left( \dot{\alpha}_x \alpha_x - \frac{\gamma}{2} \alpha_x^2 \right) + \hbar \frac{d}{dt} \left( \dot{\alpha}_y \alpha_y - \frac{\gamma}{2} \alpha_y^2 \right) \right] \\ &= -\frac{\gamma}{4} \left[ \hbar \frac{d}{dt} \left( \frac{Y_{xR}}{Y_{xI}} \right) + \hbar \frac{d}{dt} \left( \frac{Y_{yR}}{Y_{yI}} \right) \right] \\ &= -\frac{\gamma}{4} \frac{d}{dt} \left( \langle \tilde{p}_x \tilde{x} + \tilde{x} \tilde{p}_x \rangle + \langle \tilde{p}_y \tilde{y} + \tilde{y} \tilde{p}_y \rangle \right), \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle E_q \rangle &= -\frac{\gamma}{4} \frac{d}{dt} \left( \langle [\tilde{p}_x, \tilde{x}]_+ \rangle + \langle [\tilde{p}_y, \tilde{y}]_+ \rangle \right), \end{aligned} \quad (3.93)$$

donde el símbolo  $[ \ , \ ]_+$  denota el anticonmutador. Una manipulación más en la Ec. (3.93), conduce a,

$$\frac{d}{dt} \left( \langle E_q \rangle + \frac{\gamma}{4} \langle [\tilde{p}_x, \tilde{x}]_+ \rangle + \frac{\gamma}{4} \langle [\tilde{p}_y, \tilde{y}]_+ \rangle \right) = 0, \quad (3.94)$$

$$\Rightarrow \langle E_q \rangle + \frac{\gamma}{4} \langle [\bar{p}_x, \bar{x}]_+ \rangle + \frac{\gamma}{4} \langle [\bar{p}_y, \bar{y}]_+ \rangle = \text{constante}. \quad (3.95)$$

De la cantidad (3.95), la parte

$$\frac{\gamma}{4} \langle [\bar{p}_x, \bar{x}]_+ \rangle + \frac{\gamma}{4} \langle [\bar{p}_y, \bar{y}]_+ \rangle, \quad (3.96)$$

se puede interpretar como la energía que es transferida a los alrededores, que en combinación con la energía que permanece en el sistema, hace posible la conservación de la energía total.

Como punto final en este capítulo, y no considerado en ninguna de las referencias, se encuentra la dispersión o varianza de la energía no-clásica, la cual proporciona una medida conveniente del orden de la repartición de sus valores adquiridos. Por lo tanto, la magnitud

$$\langle \bar{E}^2 \rangle = \langle E_q^2 \rangle - \langle E_q \rangle^2, \quad (3.97)$$

tiene las dimensiones del cuadrado de  $\langle E_q \rangle$ , así que una medida lineal de la repartición de los valores posibles de  $\langle E_q \rangle$  viene dada por la raíz cuadrada de la varianza de la energía cuántica, es decir, por la magnitud  $\sqrt{\langle \bar{E}^2 \rangle}$ , que tiene las mismas dimensiones que  $\langle E_q \rangle$  y se denomina *desviación estándar*.

Entonces, para obtener la varianza, se halla primero a partir de la expresión para la energía efectiva del sistema

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2m} \left[ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{2\hbar q}{ic} A_x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2\hbar q}{ic} A_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{q^2}{c^2} (A_x^2 + A_y^2) \right] \quad (3.98)$$

la cantidad  $\mathcal{E}^2$ . Esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2 = & \frac{1}{4m} \left( p_x^4 + \frac{4q^2}{c^2} A_x^2 p_x^2 + \frac{q^4}{c^4} A_x^4 - 4 \frac{q}{c} A_x p_x^3 + 2 \frac{q^2}{c^2} A_x^2 p_x^2 - 4 \frac{q^3}{c^3} A_x^2 p_x \right) \\ & + \frac{1}{4m} \left( p_y^4 + \frac{4q^2}{c^2} A_y^2 p_y^2 + \frac{q^4}{c^4} A_y^4 - 4 \frac{q}{c} A_y p_y^3 + 2 \frac{q^2}{c^2} A_y^2 p_y^2 - 4 \frac{q^3}{c^3} A_y^2 p_y \right), \end{aligned} \quad (3.99)$$

Sin embargo, gracias a la simetría encontrada en las direcciones  $x$ ,  $y$  basta trabajar con la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j^2 &= \frac{1}{4m} \left( p_j^4 + \frac{4q^2}{c^2} A_j^2 p_j^2 + \frac{q^4}{c^4} A_j^4 - 4 \frac{q}{c} A_j p_j^3 + 2 \frac{q^2}{c^2} A_j^2 p_j^2 - 4 \frac{q^3}{c^3} A_j^2 p_j \right), \\ \Rightarrow \langle \mathcal{E}_j^2 \rangle &= \frac{1}{4m} \left( \langle p_j^4 \rangle + \frac{4q^2}{c^2} \langle A_j^2 \rangle \langle p_j^2 \rangle + \frac{q^4}{c^4} \langle A_j^4 \rangle \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{q}{c} \langle A_j \rangle \langle p_j^3 \rangle + 2 \frac{q^2}{c^2} \langle A_j^2 \rangle \langle p_j^2 \rangle - 4 \frac{q^3}{c^3} \langle A_j^2 \rangle \langle p_j \rangle \right) \quad (3.100) \end{aligned}$$

Pero de lo anterior, solamente se quiere la contribución cuántica, la cual se consigue siguiendo el razonamiento siguiente,

$$\langle E_{ij}^2 \rangle = \frac{1}{4m^2} \left[ \langle (p_j^4) - (p_j)^4 \rangle + \frac{6q^2}{c^2} \left( \langle A_j^2 \rangle - \langle A_j \rangle^2 \right) \left( \langle p_j^2 \rangle - \langle p_j \rangle^2 \right) + \frac{q^4}{c^4} \left( \langle A_j^4 \rangle - \langle A_j \rangle^4 \right) - \frac{4q}{c} \langle A_j \rangle \left( \langle p_j^3 \rangle - \langle p_j \rangle^3 \right) \langle p_j \rangle \right] \quad (3.101)$$

Luego de obtener el resultado para cada uno de los paréntesis y de realizar las simplificaciones pertinentes, se encuentra la expresión,

$$\langle E_q^2 \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{16} \hbar^2 \left[ \alpha_x^4 \left( X - \frac{1}{2} \gamma \right)^4 + \alpha_y^4 \left( Y - \frac{1}{2} \gamma \right)^4 \right] \\ + \frac{3}{8} \hbar^2 \left[ \left( X - \frac{1}{2} \gamma \right)^2 + \left( Y - \frac{1}{2} \gamma \right)^2 \right] + \frac{3}{16} \hbar^2 \left( \frac{1}{\alpha_x^2} + \frac{1}{\alpha_y^2} \right) \\ + \frac{3}{4m} \hbar \left[ L_x^2 \alpha_x^2 \left( X - \frac{1}{2} \gamma \right)^2 + L_y^2 \alpha_y^2 \left( Y - \frac{1}{2} \gamma \right)^2 \right] \\ + \frac{3}{4m} \hbar \left( \frac{L_x^2}{\alpha_x^2} + \frac{L_y^2}{\alpha_y^2} \right) \\ + \frac{3}{32} \hbar^2 \omega_c^2 \alpha_x^2 \alpha_y^2 \left[ \left( X - \frac{1}{2} \gamma \right)^2 + \left( Y - \frac{1}{2} \gamma \right)^2 \right] \\ + \frac{3}{32} \hbar^2 \omega_c^2 \left( \frac{\alpha_x^2}{\alpha_y^2} + \frac{\alpha_y^2}{\alpha_x^2} \right) + \frac{3}{256} \hbar^2 \omega_c^4 \left( \alpha_x^4 + \alpha_y^4 \right) \\ + \frac{3}{64} m \hbar \omega_c^4 \left( \eta_x^2 \alpha_x^2 + \eta_y^2 \alpha_y^2 \right) \\ + \frac{3}{4} \hbar \omega_c \left[ \eta_y L_x \alpha_x^2 \left( X - \frac{1}{2} \gamma \right)^2 - \eta_x L_y \alpha_y^2 \left( Y - \frac{1}{2} \gamma \right)^2 \right] \\ + \frac{3}{4} \hbar \omega_c \left( \frac{\eta_x L_x}{\alpha_x^2} - \frac{\eta_y L_y}{\alpha_y^2} \right) + \frac{3}{16} \hbar \omega_c^3 \left( \eta_y \alpha_y^2 L_x - \eta_x \alpha_x^2 L_y \right) \end{array} \right. \quad (3.102)$$

donde,  $X = \dot{\alpha}_x / \alpha_x$  y  $Y = \dot{\alpha}_y / \alpha_y$ . Por otro lado, de la expresión para  $\langle E_q \rangle$  se obtiene su cuadrado, es decir,

$$\langle E_q \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{16} \left[ \alpha_x^4 \left( X - \frac{1}{2} \gamma \right)^4 + \frac{1}{\alpha_x^2} + \frac{\omega_c^4}{16} \alpha_x^4 + 2 \left( X - \frac{1}{2} \gamma \right)^2 + \frac{\omega_c^2}{2} \alpha_x^4 \left( X - \frac{1}{2} \gamma \right) + \frac{\omega_c^2}{2} \right] \\ + \frac{\hbar^2}{16} \left[ \alpha_y^4 \left( Y - \frac{1}{2} \gamma \right)^4 + \frac{1}{\alpha_y^2} + \frac{\omega_c^4}{16} \alpha_y^4 + 2 \left( Y - \frac{1}{2} \gamma \right)^2 + \frac{\omega_c^2}{2} \alpha_y^4 \left( Y - \frac{1}{2} \gamma \right) + \frac{\omega_c^2}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\hbar^2}{8} \left[ \alpha_x^2 \alpha_y^2 \left( X - \frac{1}{2}\gamma \right)^2 \left( Y - \frac{1}{2}\gamma \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\alpha_y^2}{\alpha_x^2} \left( Y - \frac{1}{2}\gamma \right)^2 + \frac{\omega_x^2}{4} \alpha_x^2 \alpha_y^2 \left( Y - \frac{1}{2}\gamma \right)^2 \right] \\
& + \frac{\hbar^2}{8} \left[ \frac{\alpha_x^2}{\alpha_y^2} \left( X - \frac{1}{2}\gamma \right)^2 + \frac{1}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} + \frac{\omega_y^2}{4} \frac{\alpha_x^2}{\alpha_y^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\omega_x^2}{4} \alpha_x^2 \alpha_y^2 \left( X - \frac{1}{2}\gamma \right)^2 + \frac{\omega_x^2}{4} \frac{\alpha_y^2}{\alpha_x^2} + \frac{\omega_x^4}{16} \alpha_x^2 \alpha_y^2 \right], \quad (3.103)
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la relación para la varianza, después de varias manipulaciones, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
\langle \hat{E}^2 \rangle &= \langle E_q^2 \rangle - \langle E_q \rangle^2 = \\
&= \frac{\hbar^2}{8} (\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2) + \frac{3}{4} \frac{\hbar}{m} (L_x^2 \mathcal{X} + L_y^2 \mathcal{Y}) - \frac{\hbar^2}{8} \mathcal{X} \mathcal{Y} \\
&+ \frac{3}{4} \hbar \omega_c (\eta_y L_x \mathcal{X} - \eta_x L_y \mathcal{Y}) + \frac{1}{16} \hbar^2 \omega_c^2 [\mathcal{X} (\alpha_y^2 - \alpha_x^2) + \mathcal{Y} (\alpha_x^2 - \alpha_y^2)] \\
&+ \frac{3}{16} \hbar \omega_c^2 (\eta_y L_x \alpha_y^2 - \eta_x L_y \alpha_x^2) \\
&+ \frac{1}{128} \hbar \omega_c^4 [\hbar ((\alpha_x^4 + \alpha_y^4) + 6m (\eta_x^2 \alpha_x^2 + \eta_y^2 \alpha_y^2) - \hbar \alpha_x^2 \alpha_y^2)], \quad (3.104)
\end{aligned}$$

donde se usan las definiciones

$$\mathcal{X} \equiv \left[ \alpha_x^2 \left( X - \frac{1}{2}\gamma \right)^2 - \frac{1}{\alpha_x^2} \right] \quad (3.105)$$

$$\mathcal{Y} \equiv \left[ \alpha_y^2 \left( Y - \frac{1}{2}\gamma \right)^2 - \frac{1}{\alpha_y^2} \right] \quad (3.106)$$

Finalmente, la desviación estándar simplemente se obtiene sacando la raíz cuadrada del valor absoluto de la Ec. (3.104).

## Capítulo 4

# Predicciones

En el capítulo anterior, se delinearon varios aspectos para el movimiento de partículas de carga puntual en un sistema bidimensional, cuya propiedad principal es la disipación por fricción, con un campo magnético aplicado de manera perpendicular.

Al considerar un movimiento en tres dimensiones amortiguado por fricción, el método desarrollado puede ser extendido para incluir condiciones anisotrópicas, por ejemplo, diferentes constantes de difusión son posibles en cada una de las direcciones espaciales. Sin embargo, con el fin de simplificar al máximo los cálculos del desarrollo y tener una descripción que muestre claramente las consecuencias de los resultados obtenidos, se sigue considerando la *extensión de Einstein* para el coeficiente de difusión, es decir, el argumento establecido por  $D_{jj} = (\gamma/2) \langle j^2 \rangle$  para  $j = x, y$ . Igualmente se continúa con el *ansatz*  $\Psi(r, t) = \Psi_{\perp}(r_{\perp}, t) \cdot \Psi_{\parallel}(z, t)$ , que como se observó permite la separación en dos ecuaciones conteniendo solo  $\Psi_{\perp}$  o  $\Psi_{\parallel}$ , respectivamente.

### 4.1 Condiciones experimentales

Para el caso de un movimiento amortiguado en un sistema donde las partículas de carga puntual sean electrones<sup>1</sup>, con las características convenientes como son el campo magnético apropiado y la frecuencia de perturbación adecuada, una de las cantidades que tienen especial trascendencia para conseguir la evidencia de los efectos cuánticos del fenómeno de disipación, es la velocidad de densidad de corriente, ya que por medio del número de electrones presentes en el sistema (densidad electrónica) se halla una proporcionalidad directa a la corriente

<sup>1</sup>Las partículas consideradas también pueden ser iones, conduciendo con ello a un espectrómetro de resonancia ciclotrónica de iones, ICR. La espectrometría ICR, es una clase de espectrometría de masas especialmente usada para el estudio de las interacciones de moléculas iónicas en la fase gaseosa, y se basa en el fenómeno de resonancia.

eléctrica en el dispositivo experimental. De la velocidad total  $\mathbf{V}_\perp$ , Ec. (3.71),

$$\mathbf{V}_\perp = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_{D\perp} = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_x + \left(\frac{\dot{\alpha}_x}{\alpha_x}\right) \bar{x} + \frac{\omega_c}{\gamma} \bar{y} \\ \dot{\eta}_y + \left(\frac{\dot{\alpha}_y}{\alpha_y}\right) \bar{y} - \frac{\omega_c}{\gamma} \bar{x} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

se observan dos tipos de contribución, la primera que depende de una cantidad clásica, que era de esperarse, y la segunda que contiene una cantidad netamente cuántica  $\dot{\alpha}_j/\alpha_j$ . Como se notó a lo largo del capítulo previo, aunque se obtuvieron soluciones analíticas exactas para  $\alpha_j^2$  y  $\dot{\alpha}_j/\alpha_j$ , el manejo de estas funciones en forma exacta resulta complicado para obtener resultados sobre su comportamiento en el tiempo y hacer predicciones sobre el sistema. Diferentes aproximaciones para la evolución de  $\alpha_j^2$ ,  $\dot{\alpha}_j/\alpha_j$  y la velocidad de densidad de corriente  $\mathbf{V}_\perp$ , pueden verse a través de gráficas generadas por computadora para diferentes condiciones y parámetros.

Para el sistema en cuestión, con la influencia de un campo eléctrico también, la ecuación de movimiento clásica correspondiente es la fuerza de Lorentz

$$m\dot{\eta}_\perp = \frac{e}{c}\eta_\perp \times \mathbf{B} + e\mathbf{E} - m\gamma\eta_\perp, \quad (4.2)$$

de la cual se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas,

$$\dot{\eta}_x = \omega_c \eta_y + \frac{e}{m} E_x - \gamma \dot{\eta}_x, \quad (4.3)$$

$$\dot{\eta}_y = -\omega_c \eta_x + \frac{e}{m} E_y - \gamma \dot{\eta}_y. \quad (4.4)$$

Después de realizar unos sencillos cálculos se encuentran la trayectorias clásicas,

$$\eta_x(t) = b \frac{\exp(-\gamma t)}{\gamma^2 + \omega_c^2} [-\gamma \cos(\omega_c t + \phi) + \omega_c \sin(\omega_c t + \phi)] + \frac{e/m}{\gamma^2 + \omega_c^2} (\gamma E_x + \omega_c E_y) t, \quad (4.5)$$

$$\eta_y(t) = b \frac{\exp(-\gamma t)}{\gamma^2 + \omega_c^2} [\gamma \sin(\omega_c t + \phi) + \omega_c \cos(\omega_c t + \phi)] + \frac{e/m}{\gamma^2 + \omega_c^2} (\gamma E_y - \omega_c E_x) t, \quad (4.6)$$

así como las velocidades,

$$\dot{\eta}_x(t) = b \exp(-\gamma t) \cos(\omega_c t + \phi) + \frac{e/m}{\gamma^2 + \omega_c^2} (\gamma E_x + \omega_c E_y), \quad (4.7)$$

$$\dot{\eta}_y(t) = -b \exp(-\gamma t) \sin(\omega_c t + \phi) + \frac{e/m}{\gamma^2 + \omega_c^2} (\gamma E_y - \omega_c E_x), \quad (4.8)$$

donde  $b$  y  $\phi$  son constantes a determinar con las condiciones iniciales impuestas al experimento. El conjunto de condiciones, es determinado a partir de los requerimientos o medios del sistema. Por ejemplo, en un caso particular se tienen las posibilidades:

1.  $\eta_x(t=0) = 0$ ,
2.  $\eta_y(t=0) = 0$ ,
3.  $\dot{\eta}_x(t=0) = v_{d\perp}$  = velocidad de deriva de los electrones,
4.  $\dot{\eta}_y(t=0) = 0$ ,

Por otro lado, el campo eléctrico se restringe solamente a una dirección perpendicular al campo magnético, siendo una opción la dirección  $x$  ( $\Rightarrow E_y = 0$ ). En consecuencia, los valores encontrados para  $\phi$  y  $b$  son respectivamente,

$$\phi = \arctan \left[ \frac{-(\gamma^2 + \omega_c^2)^{-1} (e/m) \omega_c E_x}{v_{d\perp} - (\gamma^2 + \omega_c^2)^{-1} (e/m) \gamma E_x} \right], \quad y \quad (4.9)$$

$$b = \frac{-(\gamma^2 + \omega_c^2)^{-1} (e/m) \omega_c E_x}{\sin \phi}. \quad (4.10)$$

En lo concerniente al campo magnético de magnitud  $B$  aplicado en la dirección  $z$ , en principio se supone una variable independiente que es ajustada de acuerdo a las necesidades o posibilidades. Para la velocidad de deriva de los electrones  $v_{d\perp}$ , se puede tomar de referencia el valor encontrado a partir del siguiente razonamiento.

Suponiendo que se tiene un dispositivo de cobre de longitud  $L$  y sección transversal  $S$ , se sabe que el flujo de corriente es

$$J = \frac{I}{S} \quad I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.11)$$

La carga que se mueve en el dispositivo es  $q = (nSL)e$ , y pasa de un extremo a otro en un tiempo  $t = L/v_{d\perp}$ . La corriente  $I$  es por lo tanto,

$$I = \frac{q}{t} = \frac{(nSL)e}{L/v_{d\perp}} = nSev_{d\perp}, \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow v_{d\perp} = \frac{I}{nSe} \Rightarrow v_{d\perp} = \frac{J}{ne}. \quad (4.13)$$

En el cobre hay aproximadamente un electrón de conducción por átomo. El número  $n$  de electrones por unidad de volumen es entonces, el mismo número de átomos por unidad de volumen, y está dado por

$$\frac{n}{N_A} = \frac{\rho_m}{M} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{átomos}/\text{m}^3}{\text{átomos}/\text{mol}} = \frac{\text{masa}/\text{m}^3}{\text{masa}/\text{mol}}, \quad (4.14)$$

aquí  $\rho_m$  es la (masa) densidad de cobre,  $N_A$  es el número de Avogadro y  $M$  es la masa molar del cobre. Esto es,

$$n = \frac{N_A \rho_m}{M} = \frac{(6.02 \times 10^{23} \text{e/mol})(8.96 \times 10^3 \text{kg/m}^3)}{63.5 \times 10^{-3} \text{kg/mol}} \\ \Rightarrow n = 8.49 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3 \quad (4.15)$$

Luego, si el alambre de cobre lleva una corriente de 1A y su sección transversal es de  $4 \times 10^{-6} \text{m}^2$  aproximadamente, se tiene

$$J = 2.5 \times 10^5 \text{ A/m}^2$$

$$\Rightarrow v_{d1} = \frac{J}{ne} \simeq 1.84 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (4.16)$$

Antes, de proceder al análisis por casos, se debe obtener el promedio de la velocidad  $\mathbf{V}_\perp$  sobre el espacio (experimental) de trabajo, es decir, si se tiene un dispositivo de dimensiones  $\lambda_x$  por  $\lambda_y$ , entonces

$$\langle \mathbf{V}_\perp \rangle_{\lambda_x \lambda_y} = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_x + \left( \frac{\dot{\alpha}_x}{\alpha_x} \right) \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} \bar{x} \, dx dy + \frac{\omega_x}{2} \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} \bar{y} \, dx dy \\ \dot{\eta}_y + \left( \frac{\dot{\alpha}_y}{\alpha_y} \right) \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} \bar{y} \, dx dy - \frac{\omega_y}{2} \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} \bar{x} \, dx dy \end{bmatrix},$$

donde  $l_x = \lambda_x/2$  y  $l_y = \lambda_y/2$ , además recuérdese que  $\bar{x} = x - \eta_x$  y  $\bar{y} = y - \eta_y$ , por lo tanto se obtiene que

$$\langle \mathbf{V}_\perp \rangle_{\lambda_x \lambda_y} = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_x + \left( \frac{\dot{\alpha}_x}{\alpha_x} \right) \eta_x - \frac{\omega_x}{2} \eta_y \\ \dot{\eta}_y + \left( \frac{\dot{\alpha}_y}{\alpha_y} \right) \eta_y + \frac{\omega_y}{2} \eta_x \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

A continuación se muestran las gráficas para los efectos cuánticos de  $\alpha_j^2$ ,  $\dot{\alpha}_j/\alpha_j$  y  $\langle \mathbf{V}_\perp \rangle_{\lambda_x \lambda_y}$ , así como la energía  $\langle E_q \rangle$  y su dispersión en el tiempo  $\sqrt{\langle \bar{E}^2 \rangle}$ . El análisis se separa nuevamente en los tres casos estudiados en el capítulo previo, es decir, en amortiguamiento supercrítico, resonancia y amortiguamiento subcrítico.

## 4.2 Amortiguamiento supercrítico

En este caso, las condiciones experimentales con las que se prepara al sistema donde se espera que la fricción este presente como un factor que de características de amortiguamiento supercrítico son: una frecuencia de perturbación (origen de la fricción),  $\gamma$ , más alta que la frecuencia ciclotrón,  $\omega_c$ , que se este manejaando y que es resultado directo del campo magnético aplicado al sistema. El campo eléctrico en principio puede ser nulo, sin embargo si se escoge distinto de cero debe notarse que solo tiene efectos en los resultados clásicos y no en los efectos cuánticos, de acuerdo a lo apuntado en las secciones anteriores. Finalmente los valores presentados para este caso son puramente teóricos cuyo objetivo principal es permitir la observación del comportamiento del sistema bajo las condiciones de amortiguamiento supercrítico; no obstante, se toma en cuenta que en la literatura se reportan experimentos donde intervienen las cantidades mencionadas con valores típicos o dentro de un rango que puede ser conseguido



bajo condiciones apropiadas en el laboratorio [19]. Por lo tanto usando los valores,

$$\gamma = 10^{12} \text{ Hz}, \quad B_z = 1 \text{ T}, \Rightarrow A = \pm 3.1574 \times 10^{12} \text{ Hz},$$

$$E_x = 100 \text{ V/m}, \quad v_{d\perp} = 2 \times 10^{-8} \text{ m/seg},$$

$$\beta_{x0} = 10^{11} \text{ Hz}, \quad \beta_{y0} = 10^{11} \text{ Hz}.$$

La parte clásica de la dinámica, es decir, el movimiento del máximo del paquete de ondas (WP), es afectado por el ambiente disipativo como era esperado. Las Figs. (4.1) - (4.3) corresponden, respectivamente, a las cantidades clásicas de la trayectoria, la velocidad y el momento (en cada una de las direcciones) del máximo del paquete de ondas. En las gráficas de las velocidades, se observa que después de un determinado tiempo, el máximo del paquete se mueve con una velocidad constante en ambas direcciones.

Ahora, para observar los aspectos cuánticos, se debe tomar en cuenta que de acuerdo a la solución encontrada para este caso, se tienen dos posibilidades  $A = \pm A_{1/2}$ . Las gráficas de la anchura del paquete de ondas  $\alpha_{j\pm}^2(t)$ , Ecs. (3.47) y (3.48)

$$\alpha_{j+}^2(t) = \alpha_{j0}^2 \left[ \exp(A_{1/2}t) + \left( \frac{\beta_{j0}}{A_{1/2}} \right)^2 \sinh^2 \left( \frac{A_{1/2}}{2} t \right) \right],$$

$$\alpha_{j-}^2(t) = \alpha_{j0}^2 \left[ \exp(-A_{1/2}t) + \left( \frac{\beta_{j0}}{A_{1/2}} \right)^2 \sinh^2 \left( \frac{A_{1/2}}{2} t \right) \right],$$

muestran que el paquete se extiende en el tiempo más rápidamente que en un sistema donde  $\gamma \sim \omega_c$ , tanto para  $A_{1/2}$  como para  $-A_{1/2}$  debido al término  $\sinh^2$ , y en el caso de  $\alpha_{j+}^2(t)$ , incluso exponencialmente.

Las energías calculadas con la Ec. (3.91)

$$\langle E_q \rangle = \frac{\hbar}{4} \left[ \alpha_x^2 \left( \frac{\dot{\alpha}_x}{\alpha_x} - \frac{\gamma}{2} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_x^2} + \left( \frac{\omega_c}{2} \right)^2 \alpha_x^2 \right]$$

$$+ \frac{\hbar}{4} \left[ \alpha_y^2 \left( \frac{\dot{\alpha}_y}{\alpha_y} - \frac{\gamma}{2} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_y^2} + \left( \frac{\omega_c}{2} \right)^2 \alpha_y^2 \right], \quad (4.18)$$

para  $A_{1/2}$  y  $-A_{1/2}$ , así como su respectivas dispersiones dadas por  $\langle \tilde{E}^2 \rangle^{1/2}$ , son ilustradas en la Figs. (4.5) y (4.6). En las gráficas de energía se observa como por medio de la fricción en el sistema —es decir, a través del rompimiento de la simetría temporal—, es posible llevar a cabo un desdoblamiento en la energía cuántica del estado base —similar al desdoblamiento de los niveles de energía debido a la reducción de la simetría espacial. Finalmente la Fig. (4.7) muestra la velocidad de la corriente de difusión dada por  $\langle \mathbf{V}_{\perp} \rangle_{\lambda, \nu} = \langle \mathbf{V}_{\perp} \rangle_S$  para cada

una de las direcciones,  $x$ ,  $y$ . Es interesante notar que para tiempos muy cortos, existe una pequeña diferencia entre lo esperado con respecto a  $A_{1/2}$  y  $-A_{1/2}$ , no obstante conforme el tiempo avanza se unifican ambos resultados para las dos direcciones. Es esencial mencionar que estas gráficas son importantes porque básicamente señalan el comportamiento de las corrientes que se forman en el sistema, salvo constantes de proporcionalidad.

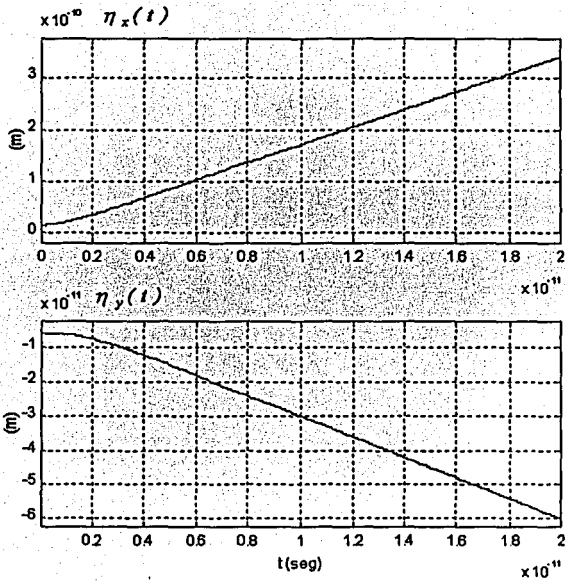


Figura 4.1: Trayectorias clásicas:  $\eta_x(t)$  y  $\eta_y(t)$ .

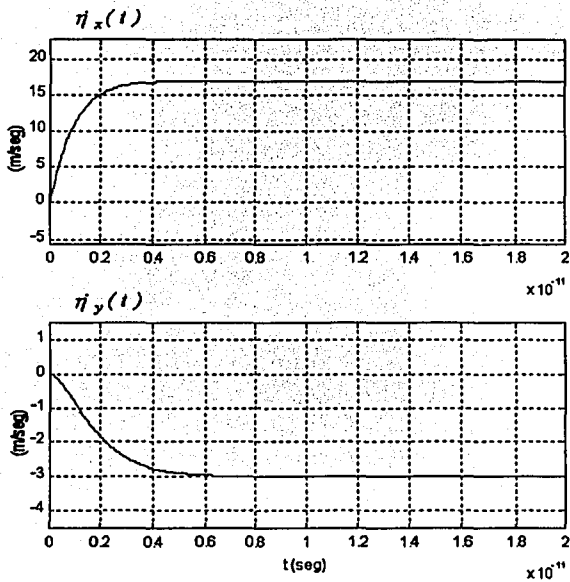
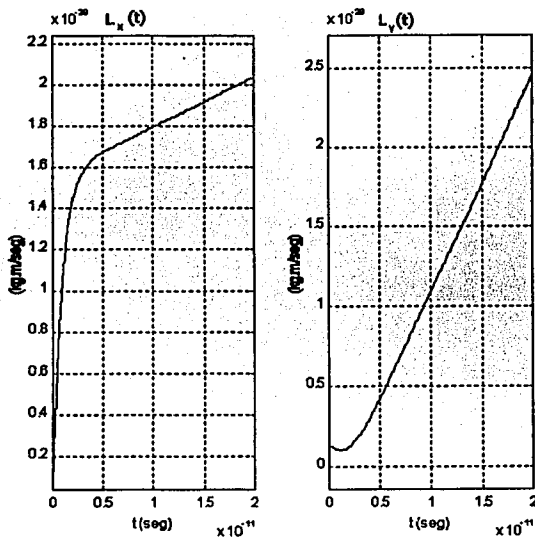


Figura 4.2: Velocidades clásicas:  $\eta_x(t)$  y  $\eta_y(t)$ .

Figura 4.3: Momentos clásicos:  $L_x(t)$  y  $L_y(t)$ .

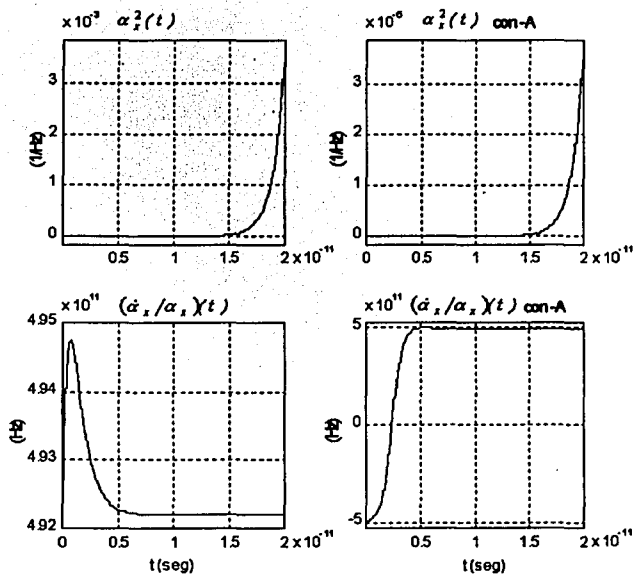


Figura 4.4: Aspectos de la dinámica no clásica:  $\alpha_2^2(t)$  y  $(\dot{\alpha}_x/\alpha_x)\chi(t)$

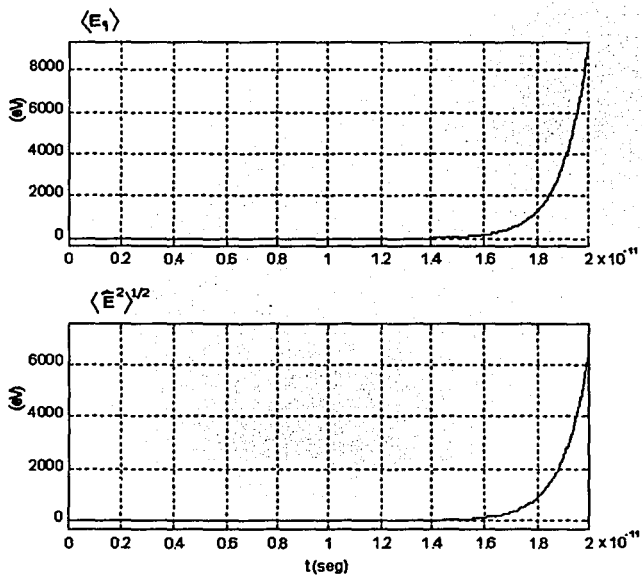


Figura 4.5: Energía cuántica y su dispersión:  $\langle E_q \rangle$  y  $\langle \hat{E}^2 \rangle^{1/2}$

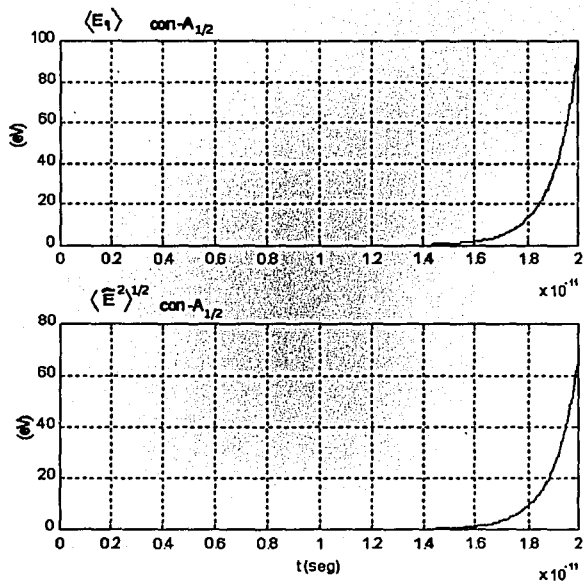


Figura 4.6: Energía cuántica y su dispersión:  $\langle E_1 \rangle$  y  $\langle \bar{E}^2 \rangle^{1/2}$



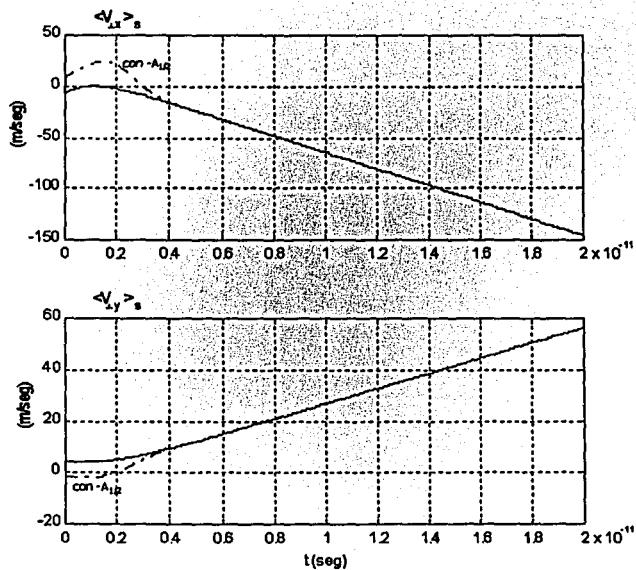


Figura 4.7: Velocidades totales de corriente promediadas en un sistema:  $\langle V_{Lx} \rangle_S$  y  $\langle V_{Ly} \rangle_S$

### 4.3 Resonancia

En el fenómeno de resonancia, el sistema tiene una fricción dada por la frecuencia de perturbación que se encuentra muy cercana o es equiparable a la frecuencia de ciclotrón proporcionada por el campo magnético, es decir,  $\gamma \sim \omega_c$ . Por lo tanto, tomando una serie de valores teóricos, pero fundamentados por las mismas razones que en el caso anterior, se puede obtener una idea de la evolución del sistema bajo condiciones resonantes. Entonces, escogiendo las cantidades

$$\gamma = 10^{11} \text{ Hz}, \quad B_x \sim 0.57 T \Rightarrow \omega_c = 10000000000.0001 \text{ Hz},$$

$$\Rightarrow A = 4.5795 \times 10^3 i \text{ Hz}, \quad \Rightarrow \tilde{\omega} = 4.5795 \times 10^3 \text{ Hz},$$

$$E_x = 100 \text{ V/m}, \quad v_{d\perp} = 2 \times 10^{-5} \text{ m/seg},$$

$$\beta_{x0} = \frac{1}{\alpha_{x0}^2} = 10^{11} \text{ Hz}, \quad \beta_{y0} = \frac{1}{\alpha_{y0}^2} = 10^{11} \text{ Hz},$$

las características de las cantidades clásicas no tienen diferencias cualitativas muy significativas en comparación con el caso anterior, como se observa en las Figs. (4.8)-(4.10). El máximo del paquete de ondas se mueve con una velocidad constante en ambas direcciones después de cierto tiempo.

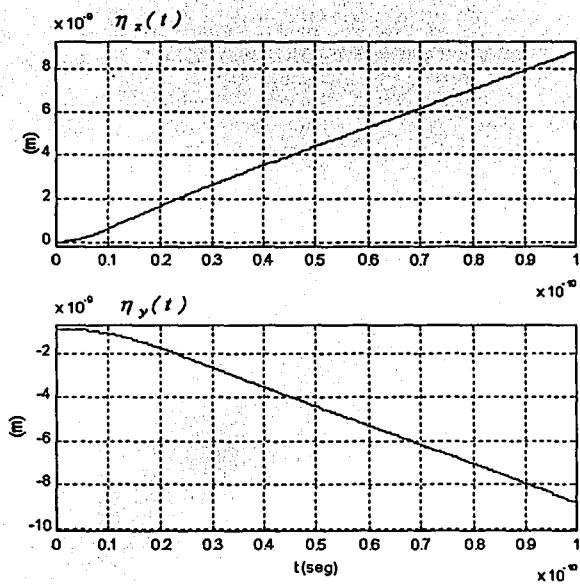
Igualmente, en la dinámica cuántica, por ejemplo las anchuras del paquete  $\alpha_x^2$  y  $\alpha_y^2$ , Fig. (4.17), ambas crecen en el tiempo cuadráticamente según la expresión

$$\alpha_{j0}^2 [1 + (\beta_{j0} t)^2] \quad (4.19)$$

para  $j = x, y$ . Mientras que la cantidad  $\dot{\alpha}_j/\alpha_j$  exhibe también un máximo como en el caso supercrítico, pero rápidamente tiende a cero.

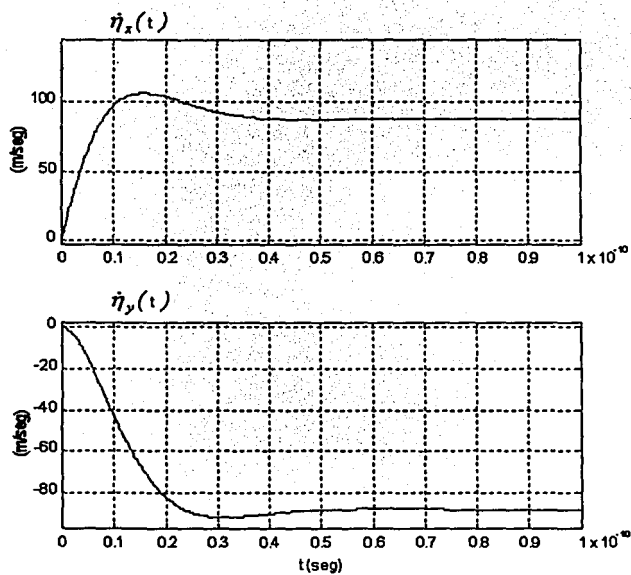
En la gráfica de la energía cuántica, Fig. (4.12), se nota un crecimiento de magnitud significativa en el tiempo, sin embargo no hay que olvidar su dispersión, la cual también crece rápidamente a la par de la energía, lo cual oculta y hace difícil cualquier posible registro de un aumento en la energía del sistema.

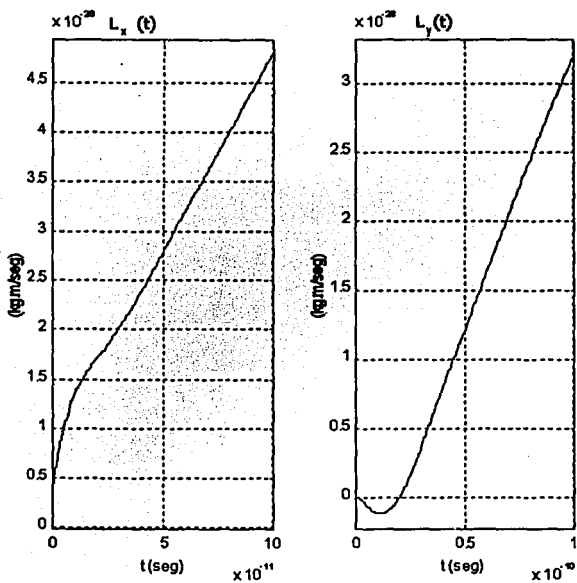
Más esperanzador parece el fenómeno de las velocidades de corriente de la Fig. (4.13), pues a diferencia del caso supercrítico, ahora la combinación de condiciones iniciales hace que ambas velocidades sean positivas y se incrementen en el tiempo. Esto lleva a pensar que en el sistema tratado pueden implementarse algunos instrumentos que hagan mediciones para comprobar el fenómeno.



htb

Figura 4.8: Trayectorias clásicas:  $\eta_x(t)$  y  $\eta_y(t)$ .

Figura 4.9: Velocidades clásicas:  $\dot{\eta}_x(t)$  y  $\dot{\eta}_y(t)$ .

Figura 4.10: Momentos clásicos:  $L_x(t)$  y  $L_y(t)$ .

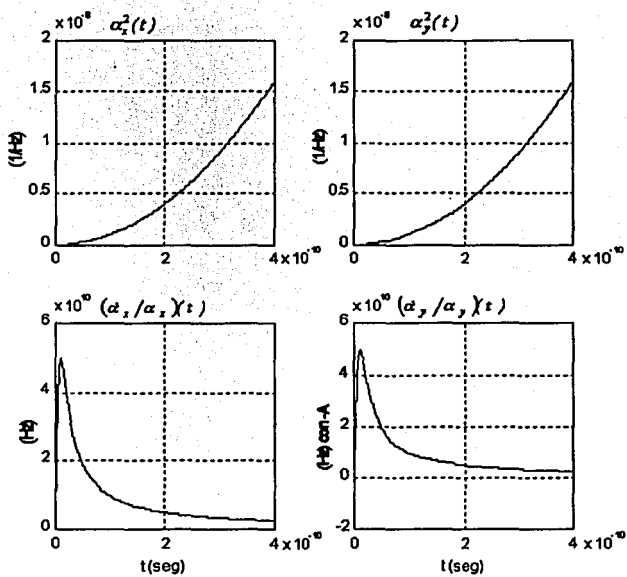
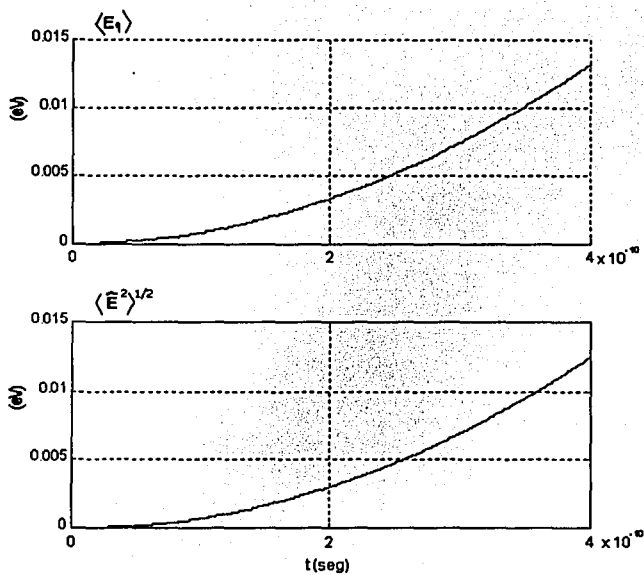


Figura 4.11: Aspectos de la dinámica no clásica:  $\alpha_z^2(t)$  y  $(\dot{\alpha}_z/\alpha_x)\chi t$

Figura 4.12: Energía cuántica y su dispersión:  $\langle E_q \rangle$  y  $\langle \bar{E}^2 \rangle^{1/2}$

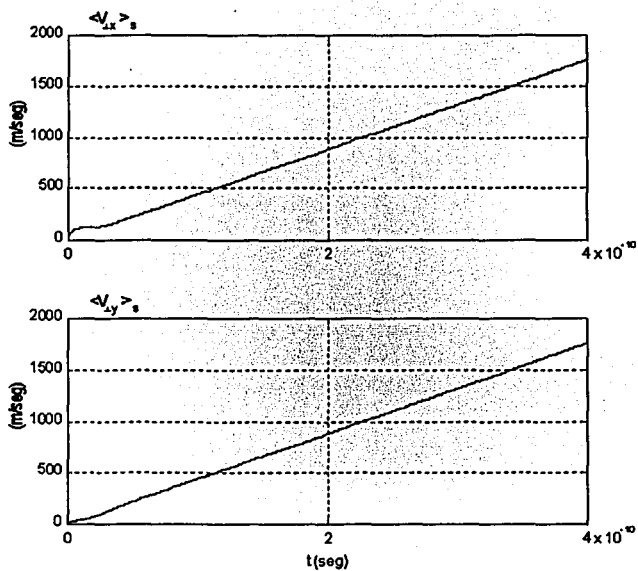


Figura 4.13: Velocidades totales de corriente promediadas en un sistema:  $\langle V_{Lx} \rangle_S$  y  $\langle V_{Ly} \rangle_S$



#### 4.4 Amortiguamiento subcrítico

Para la ilustración de este caso, cuando la frecuencia de ciclotrón,  $\omega_c$ , se encuentra por arriba de la frecuencia de perturbación,  $\gamma$ , el sistema experimenta un amortiguamiento subcrítico que se observa bajo condiciones escogidas de manera teórica, pero con la restricción de que todas ellas han sido manejadas en diversos experimentos donde intervienen campos eléctricos y magnéticos. Por lo tanto, tomando

$$\begin{aligned}\gamma &= 10^{11} \text{ Hz}, & B_z &= 10 \text{ T} \\ \Rightarrow \omega_c &= 1.7585 \times 10^{12} \text{ Hz}, \\ E_x &= 100 \text{ V/m}, & v_{d\perp} &= 2 \times 10^{-5} \text{ m/seg}, \\ \beta_{x0} &= \frac{1}{\alpha_{x0}^2} = 10^{11} \text{ Hz}, & \beta_{y0} &= \frac{1}{\alpha_{y0}^2} = 10^{11} \text{ Hz}.\end{aligned}$$

Entonces se considera  $A = +i\sqrt{\omega_c^2 - \gamma^2} = +i\tilde{\omega} = i1.7557 \times 10^{12} \text{ Hz}$ , lo cual conduce a un comportamiento oscilatorio en la dinámica clásica, Figs. (4.14)-(4.16), el máximo del paquete de ondas oscila con la frecuencia reducida  $\tilde{\omega}$  y su amplitud decrece exponencialmente. En las cantidades cuánticas también se manifiesta el fenómeno oscilatorio, para las anchuras del paquete, Ecs. (3.62)

$$\alpha_j^2 = \alpha_{j0}^2 \left\{ \beta_{j0}^2 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\tilde{\omega}t}{2}\right)}{\frac{\tilde{\omega}}{2}} \right]^2 + \cos^2\left(\frac{\tilde{\omega}t}{2}\right) \right\}, \quad (4.20)$$

y para

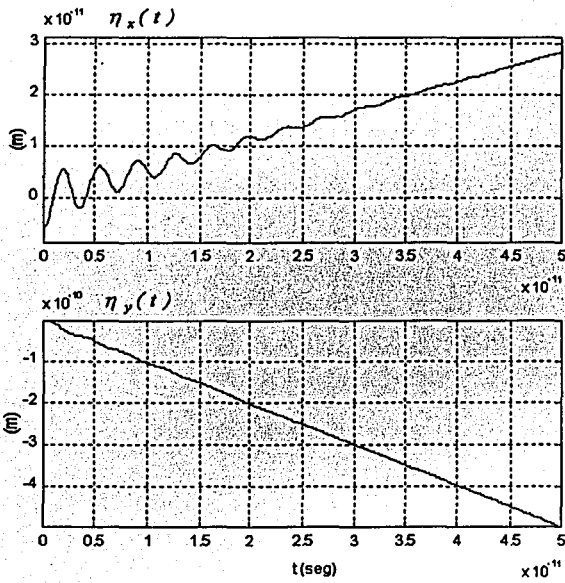
$$\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} = \frac{\left(\frac{2\beta_{j0}^2}{\tilde{\omega}} - \tilde{\omega}\right) \cos\left(\frac{\tilde{\omega}t}{2}\right) \sin\left(\frac{\tilde{\omega}t}{2}\right)}{2 \left\{ \beta_{j0}^2 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\tilde{\omega}t}{2}\right)}{\frac{\tilde{\omega}}{2}} \right]^2 + \cos^2\left(\frac{\tilde{\omega}t}{2}\right) \right\}}, \quad (4.21)$$

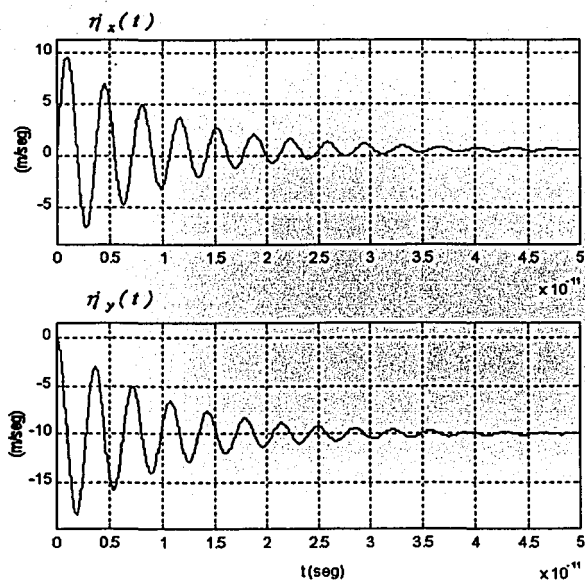
las gráficas de la Fig. (4.17) exhiben la periodicidad en el tiempo de  $\alpha_j^2$  y  $(\dot{\alpha}_j/\alpha_j)$ . El hecho de que los mínimos de  $\alpha_j^2$  estén muy cercanos a cero, hace que  $(\dot{\alpha}_j/\alpha_j)$  muestre agudos picos (pero sin diverger) en los tiempos correspondientes. De particular interés es el comportamiento también oscilatorio en la energía y en su dispersión. En la Fig. (4.18) se observa que el promedio de la energía cuántica en el tiempo es diferente de cero, no obstante, nuevamente su posible manifestación en el sistema queda oculta debido a que el promedio en el tiempo de la dispersión es del mismo orden de magnitud.

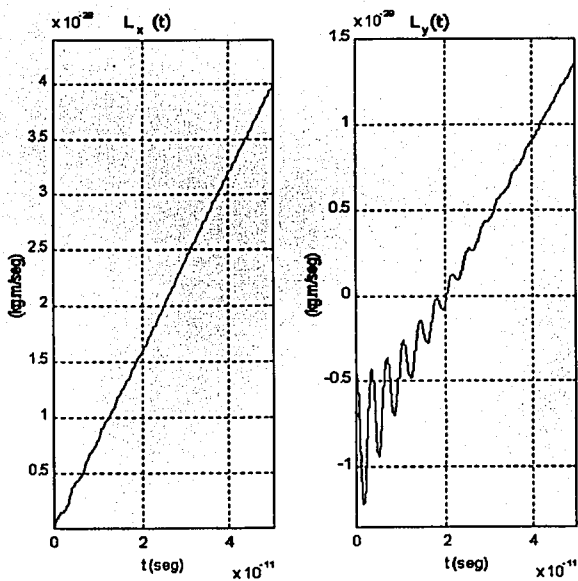
La velocidad  $(V_{\perp})_S$ , como consecuencia lógica de su dependencia de cantidades clásicas y de  $(\dot{\alpha}_j/\alpha_j)$ , también presenta oscilaciones, Fig. (4.19). Es notable que a diferencia de los dos casos anteriores, ahora solamente la velocidad de corriente en la dirección  $x$  parece cobrar más significado que la correspondiente en

la dirección  $y$ , esto en virtud de que en tal dirección la velocidad oscila de manera casi simétrica alrededor de  $t = 0$  y un promedio temporal sería despreciable con respecto al de la dirección  $x$ .

La existencia de este fenómeno oscilatorio en las velocidades de difusión, lleva pensar en la posibilidad de registrar su presencia en el sistema experimental a través de una potencia disipada, la cual se puede suponer (como primera aproximación) como si estuviera dada por cargas oscilando.

Figura 4.14: Trayectorias clásicas:  $\eta_x(t)$  y  $\eta_y(t)$ .

Figura 4.15: Velocidades clásicas:  $\eta_x(t)$  y  $\eta_y(t)$ .

Figura 4.16: Momentos clásicos:  $L_x(t)$  y  $L_y(t)$ .

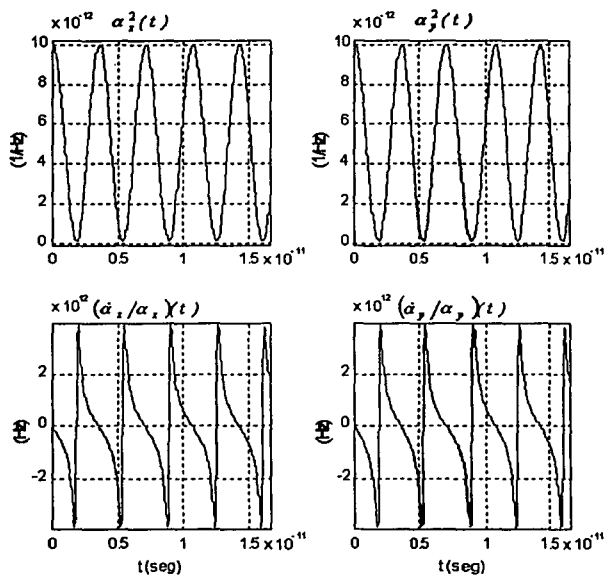


Figura 4.17: Aspectos de la dinámica no clásica:  $\alpha_1^2(t)$  y  $(\dot{\alpha}_1/\alpha_1)(t)$

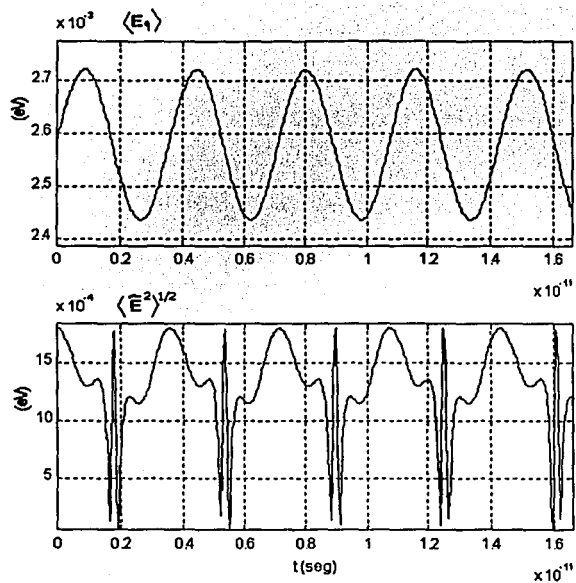


Figura 4.18: Energía cuántica y su dispersión:  $\langle E_q \rangle$  y  $\langle \tilde{E}^2 \rangle^{1/2}$

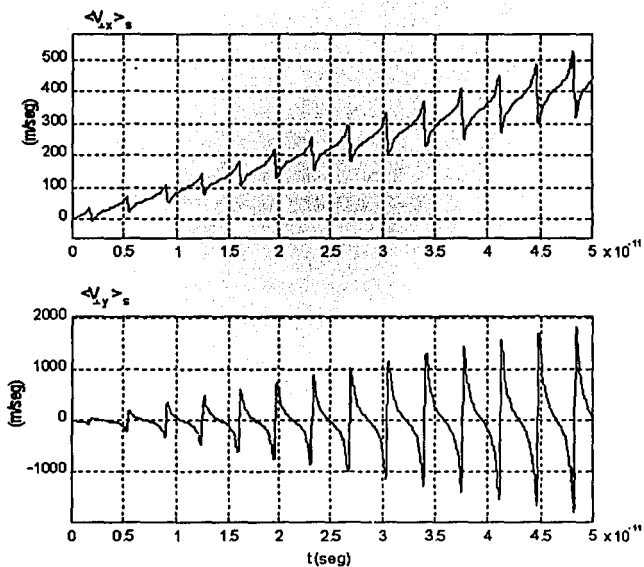


Figura 4.19: Velocidades totales de corriente promediadas en un sistema:  $\langle V_{Lx} \rangle_S$  y  $\langle V_{Ly} \rangle_S$



## 4.4.1 Potencia disipada

Imaginando dos cargas separadas por una distancia  $d$  y conectadas por un fino alambre, en un tiempo  $t$  la carga sobre la esfera superior es  $q(t)$ , mientras que sobre la inferior es  $-q(t)$  [22].

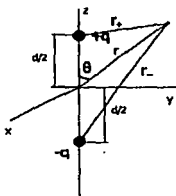


Figura 4.20: Dipolo eléctrico oscilante.

Luego, suponiendo que la carga oscila arriba y abajo con una frecuencia angular  $\hat{\omega}$ , entonces

$$q(t) = q_0 \cos(\hat{\omega}t). \quad (4.22)$$

El resultado es un dipolo eléctrico oscilante

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \cos(\hat{\omega}t) \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.23)$$

donde  $\mathbf{p}_0 \equiv q_0 d$  es el valor máximo del dipolo eléctrico. Por otro lado se tiene que el potencial eléctrico está dado por

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_0 \cos[\hat{\omega}(t - r_+/c)]}{r_+} - \frac{q_0 \cos[\hat{\omega}(t - r_-/c)]}{r_-} \right\}, \quad (4.24)$$

donde, por la ley de los cosenos

$$r_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta + \left(\frac{d}{2}\right)^2}, \quad (4.25)$$

Convirtiendo el dipolo físico en un *dipolo ideal*, se hace la 1ª aproximación  $d \ll r$  —es claro que si  $d = 0$  no se consigue ningún potencial—. Entonces haciendo una aproximación a primer orden en  $d$ , se tiene

$$r_{\pm} \simeq r \left( 1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta \right), \Rightarrow \frac{1}{r_{\pm}} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right), \quad y$$

$$\begin{aligned} \cos[\hat{\omega}(t - r_{\pm}/c)] &\simeq \cos \left[ \hat{\omega}(t - r/c) \pm \frac{\hat{\omega}d}{2c} \cos \theta \right] \\ &\simeq \cos[\hat{\omega}(t - r/c)] \cos \left( \frac{\hat{\omega}d}{2c} \cos \theta \right) \mp \sin[\hat{\omega}(t - r/c)] \sin \left( \frac{\hat{\omega}d}{2c} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Pero en el límite del dipolo ideal, se tiene además una 2ª aproximación,  $d \ll c/\dot{\omega}$ . Es decir, las ondas de frecuencia  $\dot{\omega}$ , cuya longitud es  $\lambda = c/\dot{\omega}$  tienen el requerimiento  $d \ll \lambda$ ,

$$\Rightarrow \cos[\dot{\omega}(t - r_{\pm}/c)] \simeq \cos[\dot{\omega}(t - r/c)] \mp \frac{\dot{\omega}d}{2c} \cos \theta \sin[\dot{\omega}(t - r/c)]. \quad (4.27)$$

Por lo tanto, el potencial tiene la aproximación

$$\phi(r, \theta, t) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ -\frac{\dot{\omega}}{c} \sin[\dot{\omega}(t - r/c)] + \frac{1}{r} \cos[\dot{\omega}(t - r/c)] \right\}. \quad (4.28)$$

En el límite estático ( $\dot{\omega} \rightarrow 0$ ) el segundo término reproduce la fórmula para el potencial de un dipolo estacionario.

Ahora se buscan los campos que sobreviven a grandes distancias de la fuente, en la zona de radiación, esto lleva a una 3ª aproximación dada por  $r \gg c/\dot{\omega}$  o  $r \gg \lambda$ . Entonces el potencial se reduce a

$$\phi(r, \theta, t) = -\frac{p_0 \dot{\omega} \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{r} \sin[\dot{\omega}(t - r/c)]. \quad (4.29)$$

Por otro lado, el potencial vectorial es determinado por la corriente que fluye por el alambre

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(t) &= \frac{dq}{dt} \hat{\mathbf{k}} = -q_0 \dot{\omega} \sin(\dot{\omega}t) \hat{\mathbf{k}}, \\ \Rightarrow \mathbf{A}(r, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{-q_0 \dot{\omega} \sin[\dot{\omega}(t - r/c)] \hat{\mathbf{k}}}{r} \\ \Rightarrow \mathbf{A}(r, \theta, t) &= -\frac{\mu_0 p_0 \dot{\omega}}{4\pi r} \sin[\dot{\omega}(t - r/c)] \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

En virtud de conseguir la expresión para el campo eléctrico  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - (\partial\mathbf{A}/\partial t)$ , se calcula

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \hat{\theta} \\ &\simeq \frac{p_0 \dot{\omega}}{4\pi\epsilon_0 c} \left( \frac{\cos\theta}{r} \right) \cos[\dot{\omega}(t - r/c)] \hat{\mathbf{r}}, \quad y \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \dot{\omega}^2}{4\pi r} \cos[\dot{\omega}(t - r/c)] (\cos\theta \hat{\mathbf{r}} - \sin\theta \hat{\theta}), \quad (4.32)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \dot{\omega}^2}{4\pi} \left( \frac{\sin\theta}{r} \right) \cos[\dot{\omega}(t - r/c)] \hat{\theta} \quad y \quad (4.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \dot{\omega}^2}{4\pi c} \left( \frac{\sin\theta}{r} \right) \cos[\dot{\omega}(t - r/c)] \hat{\phi}. \quad (4.34)$$

Aquí los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  se hallan en fase, mutuamente perpendiculares y transversales.

Finalmente la energía radiada por un dipolo eléctrico oscilante está determinada por el vector de Poynting  $\mathbf{S}$ . Es decir,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{\mu_0 p_0 \dot{\omega}^2}{4\pi c} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos [\omega(t - r/c)] \right\}^2 \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.35)$$

La intensidad —en unidades de Energía por unidad de área y de tiempo— se obtiene promediando (en el tiempo) sobre un ciclo completo, esto es

$$\langle \mathbf{S} \rangle_T = \frac{\mu_0 p_0^2 \dot{\omega}^4}{32\pi^2 c} \left( \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.36)$$

Es notable el hecho de que no existe radiación a lo largo del eje dipolar ( $\sin \theta = 0$ ). Así, la potencia total radiada se encuentra integrando  $\langle \mathbf{S} \rangle_T$  sobre una superficie esférica de radio  $r$  y centro en el dipolo. Por lo tanto

$$P = \frac{\mu_0 p_0^2 \dot{\omega}^4}{12\pi c} = \frac{\mu_0 q^2 d^2 \dot{\omega}^4}{12\pi c}. \quad (4.37)$$

Entonces, tomando el período,  $T$ , de oscilación directamente de la gráfica de la velocidad de corriente en la dirección  $x$  en la Fig. (4.19), se obtiene que

$$T \simeq 3.58 \times 10^{-12} \text{ seg} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{3.58} \times 10^{12} \text{ Hz} \simeq 0.2793 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow \dot{\omega} = 2\pi\nu \simeq 2\pi(0.2793 \times 10^{12} \text{ Hz}) \quad (4.38)$$

Ahora usando la Ec. (4.37),

$$P = \langle P \rangle = \frac{(4\pi \times 10^{-7} T \cdot m/A) (1.602 \times 10^{-19} A \cdot s)^2 [2\pi(0.2793 \times 10^{12} \text{ Hz})]^4 d^2}{12\pi c \text{ m/seg}}$$

Finalmente,

$$P \simeq 27.045 \times 10^{-6} d^2 \frac{W}{m^2} \quad (4.39)$$

donde  $d$  es la separación entre cargas en unidades de metro. La siguiente tabla muestra algunos valores de la potencia  $P$  para diferentes distancias  $d$

	$d$	$P$
Radio de Bohr	$5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$	$7.568 \times 10^{-26} \text{ W} = 4.72 \times 10^{-7} \text{ eV/seg}$
Longitud Compton	$2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$	$1.597 \times 10^{-28} \text{ W} = 9.97 \times 10^{-10} \text{ eV/seg}$
1. Amstromg	$10^{-10} \text{ m}$	$2.705 \times 10^{-25} \text{ W} = 1.69 \times 10^{-6} \text{ eV/seg}$

Al comparar estas potencias disipadas, es decir, la energía que pierde un electrón cada segundo, con su energía cinética obtenida en la gráfica de la Fig. (4.18), se observa que esta última es del orden de  $10^{-3}eV$  lo cual muestra que la potencia disipada es hasta 3 órdenes de magnitud, menor que la energía cinética en el peor de los casos. Luego, considerando que en el sistema experimental existe un número de electrones del orden de  $10^{23}$  una aproximación para la potencia radiada total en el sistema es (según se tome el orden de  $d$ )

$d$	$P = 10^{23}p$
$5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$	$0.00757 \text{ W}$
$2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$	$0.00016 \text{ W}$
$10^{-10} \text{ m}$	$0.02704 \text{ W}$

Con lo anterior, queda claro que para el registro del fenómeno oscilatorio de la velocidad de corriente y por ende de la dinámica cuántica, las condiciones experimentales deben de ser cuidadas al máximo, principalmente la sensibilidad de los detectores y la preparación del paquete de ondas. Los cálculos hechos, aunque aproximaciones burdas, proporcionan una idea de lo esperado y la posibilidad de montar o no un experimento en el que se busque la comprobación de los principales resultados de este capítulo.

## Capítulo 5

# Conclusiones

*Finalmente, el capítulo al cual se llega cansado de pensar.*

*Pero como escribiera Sigmund Freud: La verdad al 100 % es tan rara como el alcohol al 100%.*

En el presente trabajo se ha usado un formalismo matemático basado en argumentos físicos para derivar una ecuación de campo no-lineal, donde la no-linealidad es logarítmica, para la descripción de fenómenos disipativos que se encuentran relacionados con fuerzas de fricción dependientes de la velocidad. Aunque en principio, existen diferentes posibilidades de interpretación para la ENLS, los cálculos desarrollados principalmente en los capítulos 1 y 2, pueden ser realizados independientemente de la interpretación física de la ecuaciones; sin embargo, debido a las similitudes formales que hay entre la teoría clásica ondulatoria y una teoría de probabilidades como la cuántica, solamente las cantidades y resultados encontrados deben ser explicados en diferentes formas. Lo anterior permite la contraposición de los resultados conseguidos aquí con los de otros autores. Aunque la conexión entre la descripción fenomenológica del proceso de disipación y la descripción de teoría de campos es establecida por el coeficiente  $\gamma$ , en una teoría puramente microscópica, como la mecánica cuántica "ortodoxa" el fenómeno de disipación no existe debido a la naturaleza conservativa de las interacciones fundamentales. La disipación es sólo el resultado de la interacción estadística con muchos subsistemas de los alrededores. La constante  $\gamma$  ahora describe un efecto promedio de todas estas interacciones las cuales pueden ser observadas macroscópicamente. En la derivación de las ecuaciones de campo no se evaluó  $\gamma$  a un nivel microscópico, en cambio se aceptó como una constante probablemente determinada empíricamente.

En lo referente a las ecuaciones diferenciales no-lineales obtenidas (con disipación o con disipación y campo magnético) se mostró en el capítulo 2 que las soluciones pueden ser paquetes de ondas o solitones estables -llamados gaussones-. Estos gaussones son similares a los paquetes de ondas construidos, y se aproximan asintóticamente a un estado final estacionario a medida que el tiempo tiende a infinito. La transición de la teoría de campo no-lineal a la teoría de

campo de Schrödinger lineal puede ser llevada a cabo tomando el límite del coeficiente de fricción  $\gamma \rightarrow 0$ .

En el capítulo 3 se encontró que, considerando un modelo experimental bidimensional con un campo magnético descrito por una de las ecuaciones de campo construidas con disipación, la interacción con un ambiente disipativo debe conducir a nuevos efectos sobre la dinámica y la energía de sistemas cuánticos. El rompimiento de la simetría temporal introdujo el parámetro (ambiental), del coeficiente de fricción  $\gamma$ , con varias consecuencias.

Al suponer el coeficiente de fricción,  $\gamma$ , diferente de cero se consiguieron tres posibilidades para la ecuaciones de Riccati (3.18) y (3.19). La primera opción fue considerar  $\gamma > \omega_c$ , donde  $\omega_c$  estuvo determinada por el campo magnético aplicado al sistema, lo cual condujo al caso de amortiguamiento supercrítico con dos soluciones diferentes para la dinámica cuántica y dos posibles energías (con  $A_{1/2}$  y  $-A_{1/2}$ ), es decir, diferentes comportamientos para la anchura del paquete de ondas (WP), y un desdoblamiento de la energía independiente de  $\gamma$ , pero que desaparece si  $\gamma \rightarrow 0$ . Una segunda posibilidad fue suponer que  $\gamma \sim \omega_c$ , esta condición marcó un fenómeno similar al de resonancia para un oscilador armónico. En este caso, la dinámica del sistema cuántico mostró un comportamiento cualitativamente análogo al del caso supercrítico con las soluciones de  $A_{1/2}$ . La tercera y última opción fue el amortiguamiento subcrítico, dado por  $\gamma < \omega_c$ , cuya dinámica cuántica resultó completamente diferente a los dos casos anteriores, exhibiendo un comportamiento oscilatorio el cual llevó a plantear un método probable para su verificación mediante la potencia radiada, suponiendo que el efecto esté dado por los electrones del sistema bidimensional oscilando.

Una característica común para las tres condiciones, fue la observación de un aumento en la energía (casos 1 y 2) o una contribución diferente de cero (caso 3). No obstante, estos efectos no estarían presentes sin un medio donde se encontrara el sistema, que estuviera transfiriendo energía. Suponiendo un medio o unos alrededores dados por un baño de calor (eventualmente infinito), lo anterior puede parecer a primera vista, una violación de las leyes de la termodinámica. Sin embargo, este no es el caso, puesto que la energía del baño de calor no es transferida dentro de los grados de libertad clásicos del sistema; en otras palabras, el paquete de ondas no comienza oscilando e incrementando su amplitud. Solamente la parte cuántica de la energía del sistema,  $\langle E_q \rangle$ , absorbe energía de los alrededores, así la energía térmica es transferida a la energía cuántica de tal manera que la suma de las energías del sistema y los alrededores (baño de calor) permanece constante. Además debe tomarse en cuenta, el hecho de que la dispersión de la energía cuántica es del mismo orden de magnitud que la energía cuántica y que en ninguna de las referencias [10]-[16] se ha considerado explícitamente.

El registro de los efectos cuánticos macroscópicos -como variación de temperatura o aumento de las corrientes en el sistema- se halla sujeto a las condiciones iniciales con las que se prepara al dispositivo experimental y al paquete de ondas. De acuerdo a lo estudiado en los capítulos 3 y 4, los resultados varían sensiblemente según las limitaciones impuestas, dependiendo por lo tanto, fuertemente de las constricciones el éxito o el fracaso en el registro, dejando abierto el campo

para posibles propuestas de diseños experimentales. Aquí debe señalarse que el capítulo 4 en sus secciones de condiciones para amortiguamiento supercrítico, resonancia y amortiguamiento subcrítico no tiene contraparte en ningún artículo.

En conclusión, se establece que el problema de un sistema disipando energía debido al contacto con unos alrededores determinados, puede, al menos en ciertos casos y con los métodos presentados a lo largo de este trabajo, ser descrito a través de un hamiltoniano no-lineal dependiente del tiempo, que se resuelve analíticamente. Esta es la característica más sobresaliente de los artículos estudiados en esta tesis y que contrariamente, a los puntos de vista de autores como Caldeira, Leggett, Caldirola y Kanai que se discuten en [17]<sup>1</sup>, salva varios problemas de interpretación y cuantización en sus métodos.

---

<sup>1</sup>En este artículo se encuentran también las referencias de los autores citados

# Apéndice A

## A.1 Ecuación sin disipación

Para obtener la fuerza promedio dada por la Ec. (1.8), se obtiene la evolución temporal de  $\mathbf{j}$ , a partir de su definición (1.5) como sigue,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [C(\beta \nabla \alpha - \alpha \nabla \beta)] = C(\dot{\beta} \nabla \alpha + \beta \nabla \dot{\alpha} - \dot{\alpha} \nabla \beta - \alpha \nabla \dot{\beta}) \\
 &= C(\dot{\beta} \nabla \alpha + \beta \nabla \dot{\alpha} - \dot{\alpha} \nabla \beta - \alpha \nabla \dot{\beta} + \dot{\beta} \nabla \alpha - \dot{\alpha} \nabla \beta - \dot{\beta} \nabla \alpha + \dot{\alpha} \nabla \beta) \\
 &= C[2\dot{\beta} \nabla \alpha - 2\dot{\alpha} \nabla \beta + \nabla(\dot{\alpha}\beta) - \nabla(\alpha\dot{\beta})], \\
 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} &= 2C(\dot{\beta} \nabla \alpha - \dot{\alpha} \nabla \beta) + C\nabla(\dot{\alpha}\beta - \alpha\dot{\beta}), \\
 \Rightarrow \langle \mathbf{F} \rangle &= 2mC \int (\dot{\beta} \nabla \alpha - \dot{\alpha} \nabla \beta) d^3x + mC \int \nabla(\dot{\alpha}\beta - \alpha\dot{\beta}) d^3x, \\
 \Rightarrow \langle \mathbf{F} \rangle &= 2mC \int (\dot{\beta} \nabla \alpha - \dot{\alpha} \nabla \beta) d^3x. \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

Por otro lado, sustituyendo  $\mathbf{j}$  y  $\rho$  en la EC (1.1) se consigue,

$$\begin{aligned}
 0 &= \dot{\rho} + \nabla \cdot (\mathbf{j}) = \frac{d(\alpha\beta)}{dt} + \nabla \cdot [C(\beta \nabla \alpha - \alpha \nabla \beta)] \\
 &= \dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta} + C[\nabla\beta \nabla\alpha + \beta \Delta\alpha - \nabla\alpha \nabla\beta - \alpha \Delta\beta] \\
 &= \dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta} + C(\beta \Delta\alpha - \alpha \Delta\beta) = \alpha\beta \left[ \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} + C \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - C \frac{\Delta\beta}{\beta} \right],
 \end{aligned}$$

e introduciendo la función  $f = f(\mathbf{r}, t)$ , se obtienen las ecuaciones:

$$-f = +\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + C \frac{\Delta\alpha}{\alpha}, \quad -f = -\frac{\dot{\beta}}{\beta} + C \frac{\Delta\beta}{\beta}. \tag{A.2}$$

Rearreglando las expresiones anteriores se encuentra finalmente el par de Ecs. (1.10) y (1.11),

$$\dot{\alpha} = -C\Delta\alpha - \alpha f, \quad \dot{\beta} = +C\Delta\beta + \beta f. \tag{A.3}$$

Empleando las relaciones de (A.3) se tiene que,

$$(\dot{\beta} \nabla \alpha - \dot{\alpha} \nabla \beta) = C\Delta\beta \nabla \alpha + \beta f \nabla \alpha - [-C\Delta\alpha \nabla \beta - \alpha f \nabla \beta],$$



y sustituyendo en la expresión (A.1) para la fuerza promedio,

$$\Rightarrow \langle F \rangle = 2mC \int \left( \begin{array}{c} C\Delta\beta\nabla\alpha + \beta f\nabla\alpha \\ C\Delta\alpha\nabla\beta + \alpha f\nabla\beta \end{array} \right) d^3x,$$

pero

$$2mC \int (C\Delta\beta\nabla\alpha + C\Delta\alpha\nabla\beta) d^3x = 0, \quad (A.4)$$

ya que integrando sobre todo el espacio se tiene

$$\begin{aligned} & \int (\Delta\beta\nabla\alpha + \Delta\alpha\nabla\beta) d^3x = \int [(\partial_i\partial_i\beta)\partial_k\alpha + (\partial_i\partial_i\alpha)\partial_k\beta] d^3x \\ & = \int [-\partial_i\beta\partial_i\partial_k\alpha + (\partial_i\partial_i\alpha)\partial_k\beta] d^3x = \int [\beta\partial_i\partial_i\partial_k\alpha + (\partial_i\partial_i\alpha)\partial_k\beta] d^3x \\ & = \int \{\partial_k[\beta\partial_i\partial_i\alpha] - \partial_k\beta(\partial_i\partial_i\alpha) + (\partial_i\partial_i\alpha)\partial_k\beta\} d^3x, \\ & \Rightarrow \int (\Delta\beta\nabla\alpha + \Delta\alpha\nabla\beta) d^3x = 0. \end{aligned} \quad (A.5)$$

Por lo tanto la expresión para la fuerza promedio se convierte en

$$\langle F \rangle = 2mC \int (\beta\nabla\alpha + \alpha\nabla\beta) f d^3x. \quad (A.6)$$

## A.2 Sin dispersión con campo magnético

Para la evolución temporal de  $j$  con campo magnético, Ec. (1.20), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [C(\beta\nabla\alpha - \alpha\nabla\beta) - \rho a] \\ &= C(\dot{\beta}\nabla\alpha + \beta\nabla\dot{\alpha} - \dot{\alpha}\nabla\beta - \alpha\nabla\dot{\beta}) - (\dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta}) \mathbf{n} - \alpha\beta\dot{\mathbf{a}} \\ &= C(\dot{\beta}\nabla\alpha + \beta\nabla\dot{\alpha} - \dot{\alpha}\nabla\beta - \alpha\nabla\dot{\beta} + \dot{\beta}\nabla\alpha - \dot{\alpha}\nabla\beta - \dot{\beta}\nabla\alpha + \dot{\alpha}\nabla\beta) \\ &\quad - (\dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta}) \mathbf{n} - \alpha\beta\dot{\mathbf{a}} \\ &= C[2\dot{\beta}\nabla\alpha - 2\dot{\alpha}\nabla\beta + \nabla(\dot{\alpha}\beta) - \nabla(\alpha\dot{\beta})] - (\dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta}) \mathbf{n} - \alpha\beta\dot{\mathbf{a}}, \\ \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial t} &= 2C(\dot{\beta}\nabla\alpha - \dot{\alpha}\nabla\beta) + C\nabla(\dot{\alpha}\beta - \alpha\dot{\beta}) - (\dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta}) \mathbf{n} - \alpha\beta\dot{\mathbf{a}}, \end{aligned} \quad (A.7)$$

e introduciendo este resultado en la expresión (1.24) se consigue la ecuación,

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= 2mC \int (\dot{\beta}\nabla\alpha - \dot{\alpha}\nabla\beta) d^3x + mC \int \nabla(\dot{\alpha}\beta - \alpha\dot{\beta}) d^3x \\ &\quad - m \int [(\dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta}) \mathbf{n} + \alpha\beta\dot{\mathbf{a}}] d^3x, \\ \Rightarrow \langle F \rangle &= 2mC \int (\dot{\beta}\nabla\alpha - \dot{\alpha}\nabla\beta) d^3x - m \int (\dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta}) \mathbf{n} d^3x \\ &\quad - m \int \rho \dot{\mathbf{a}} d^3x. \end{aligned} \quad (A.8)$$

Por otro lado, sustituyendo  $\rho$  y  $\mathbf{j}$  en la EC (1.1), implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\rho} + \nabla \cdot (\mathbf{j}) = \frac{d(\alpha\beta)}{dt} + \nabla \cdot [C(\beta\nabla\alpha - \alpha\nabla\beta) - \rho\mathbf{a}] \\ &= \dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta} + C[\nabla\beta\nabla\alpha + \beta\Delta\alpha - \nabla\alpha\nabla\beta - \alpha\Delta\beta] - \nabla(\alpha\beta)\mathbf{a} - \alpha\beta(\nabla \cdot \mathbf{a}) \\ &= \dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta} + C(\beta\Delta\alpha - \alpha\Delta\beta) - (\nabla\alpha \cdot \beta)\mathbf{a} - (\alpha\nabla\beta)\mathbf{a} - \alpha\beta(\nabla \cdot \mathbf{a}) \\ &= \alpha\beta \left[ \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} + C\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - C\frac{\Delta\beta}{\beta} - \frac{\nabla\alpha}{\alpha} \cdot \mathbf{a} - \frac{\nabla\beta}{\beta} \cdot \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathbf{a} \right], \end{aligned}$$

de lo cual finalmente se obtienen las ecuaciones (1.27) y (1.28).

Ahora se usan las relaciones (1.29) y (1.30) para hallar la fuerza promedio. Primero,

$$\begin{aligned} (\dot{\beta}\nabla\alpha - \dot{\alpha}\nabla\beta) &= C\Delta\beta\nabla\alpha + (\nabla\beta \cdot \mathbf{a})\nabla\alpha + \frac{\beta}{2}(\nabla \cdot \mathbf{a})\nabla\alpha + \beta f\nabla\alpha \quad (\text{A.9}) \\ &\quad - \left[ -C\Delta\alpha\nabla\beta + (\nabla\alpha \cdot \mathbf{a})\nabla\beta + \frac{\alpha}{2}(\nabla \cdot \mathbf{a})\nabla\beta - \alpha f\nabla\beta \right], \\ \Rightarrow 2mC \int (\dot{\beta}\nabla\alpha - \dot{\alpha}\nabla\beta) d^3x &= \\ = 2mC \int \left[ \begin{array}{cc} +C\Delta\beta\nabla\alpha + (\nabla\beta \cdot \mathbf{a})\nabla\alpha + \frac{\beta}{2}(\nabla \cdot \mathbf{a})\nabla\alpha + \beta f\nabla\alpha \\ -C\Delta\alpha\nabla\beta - (\nabla\alpha \cdot \mathbf{a})\nabla\beta - \frac{\alpha}{2}(\nabla \cdot \mathbf{a})\nabla\beta + \alpha f\nabla\beta \end{array} \right] d^3x, \end{aligned}$$

pero, como se había visto en (A.5),

$$2mC \int (C\Delta\beta\nabla\alpha + C\Delta\alpha\nabla\beta) d^3x = 0. \quad (\text{A.10})$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2mC \int (\beta\nabla\alpha + \alpha\nabla\beta) f d^3x &= 2mC \int f\nabla(\beta\alpha) d^3x \quad (\text{A.11}) \\ &= 2mC \left[ \nabla(\rho f) d^3x - \int \rho\nabla f d^3x \right], \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2mC \int (\beta\nabla\alpha + \alpha\nabla\beta) f d^3x = m \int \rho[-\nabla(2Cf)] d^3x. \quad (\text{A.12})$$

Sustituyendo los últimos resultados en la ecuación para la fuerza promedio se obtiene,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \rho[-\nabla(2Cf)] d^3x + mC \int (\beta\nabla\alpha - \alpha\nabla\beta) (\nabla \cdot \mathbf{a}) d^3x \\ &\quad + 2mC \int [(\nabla\beta \cdot \mathbf{a})\nabla\alpha - (\nabla\alpha \cdot \mathbf{a})\nabla\beta] d^3x - m \int (\dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta}) \mathbf{a} d^3x - m \int \rho\dot{\mathbf{a}} d^3x, \\ \Rightarrow \langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \rho[-\nabla(2Cf)] d^3x + mC \int \rho \left( \frac{\nabla\alpha}{\beta} - \frac{\nabla\beta}{\alpha} \right) (\nabla \cdot \mathbf{a}) d^3x + \\ &\quad + 2mC \int \rho \left[ \left( \frac{\nabla\beta}{\beta} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla\alpha}{\alpha} - \left( \frac{\nabla\alpha}{\alpha} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla\beta}{\beta} \right] d^3x \\ &\quad - m \int \rho \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) \mathbf{a} d^3x - m \int \rho\dot{\mathbf{a}} d^3x. \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Ahora se observan algunas identidades que son de gran utilidad para la simplificación de la expresión anterior de (F).

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= C \left( \frac{\nabla \alpha}{\rho} - \frac{\nabla \beta}{\beta} \right) - \mathbf{a}, & \Rightarrow \left( \frac{\nabla \alpha}{\rho} - \frac{\nabla \beta}{\beta} \right) &= \frac{\mathbf{v}}{C} + \frac{\mathbf{a}}{C}, \\ \frac{\nabla \alpha}{\rho} &= \frac{1}{\alpha \beta} (\nabla \alpha \beta + \alpha \nabla \beta), & \Rightarrow \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} + \frac{\nabla \beta}{\beta} \right) &= \frac{\mathbf{v}}{\rho}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \alpha}{\alpha} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\mathbf{v}}{C} + \frac{\mathbf{a}}{C} \right), & \frac{\nabla \beta}{\beta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{\mathbf{v}}{C} - \frac{\mathbf{a}}{C} \right), \\ \frac{\Delta \alpha}{\alpha} &= \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \right) + \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \right)^2, & \frac{\Delta \beta}{\beta} &= \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \beta}{\beta} \right) + \left( \frac{\nabla \beta}{\beta} \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \alpha}{\alpha} - \frac{\Delta \beta}{\beta} = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} - \frac{\nabla \beta}{\beta} \right) + \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \right)^2 - \left( \frac{\nabla \beta}{\beta} \right)^2, \quad (\text{A.16})$$

$$\text{pero } \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \right)^2 - \left( \frac{\nabla \beta}{\beta} \right)^2 = \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \frac{\mathbf{v}}{C} \right) + \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \frac{\mathbf{a}}{C} \right). \quad (\text{A.17})$$

Sustituyendo esto último en (A.16) y usando una de las identidades de (A.14) se obtiene:

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} - \frac{\Delta \beta}{\beta} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{v}}{C} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{a}}{C} + \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \frac{\mathbf{v}}{C} + \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \frac{\mathbf{a}}{C}. \quad (\text{A.18})$$

De (A.15) se consigue

$$\begin{aligned} \left( \frac{\nabla \beta}{\beta} \cdot \mathbf{a} \right) \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \right) &= \frac{1}{4} \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \mathbf{a} - \frac{\mathbf{v}}{C} \cdot \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}^2}{C} \right) \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\mathbf{v}}{C} + \frac{\mathbf{a}}{C} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[ \begin{aligned} &+ \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla \rho}{\rho} + \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\mathbf{v}}{C} + \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\mathbf{a}}{C} \\ &- \left( \frac{\mathbf{v}}{C} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla \rho}{\rho} - \left( \frac{\mathbf{v}}{C} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\mathbf{v}}{C} - \left( \frac{\mathbf{v}}{C} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\mathbf{a}}{C} \\ &- \frac{\mathbf{a}^2}{C} \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{\mathbf{a}^2}{C} \frac{\mathbf{v}}{C} - \frac{\mathbf{a}^2}{C} \frac{\mathbf{a}}{C} \end{aligned} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \cdot \mathbf{a} \right) \left( \frac{\nabla \beta}{\beta} \right) &= \frac{1}{4} \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \mathbf{a} + \frac{\mathbf{v}}{C} \cdot \mathbf{a} + \frac{\mathbf{a}^2}{C} \right) \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{\mathbf{v}}{C} - \frac{\mathbf{a}}{C} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[ \begin{aligned} &+ \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla \rho}{\rho} - \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\mathbf{v}}{C} - \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\mathbf{a}}{C} \\ &+ \left( \frac{\mathbf{v}}{C} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla \rho}{\rho} - \left( \frac{\mathbf{v}}{C} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\mathbf{v}}{C} - \left( \frac{\mathbf{v}}{C} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\mathbf{a}}{C} \\ &+ \frac{\mathbf{a}^2}{C} \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{\mathbf{a}^2}{C} \frac{\mathbf{v}}{C} - \frac{\mathbf{a}^2}{C} \frac{\mathbf{a}}{C} \end{aligned} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left( \frac{\nabla \beta}{\beta} \cdot \mathbf{a} \right) \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \right) - \left( \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \cdot \mathbf{a} \right) \left( \frac{\nabla \beta}{\beta} \right) &= \\ = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\mathbf{v}}{C} + \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\mathbf{a}}{C} - \left( \frac{\mathbf{v}}{C} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{\mathbf{a}^2}{C} \frac{\nabla \rho}{\rho} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Con (1.29), (1.30), (A.14) y (A.18) se tiene que,

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} &= -C \left( \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - \frac{\Delta\beta}{\beta} \right) + \left( \frac{\nabla\alpha}{\alpha} + \frac{\nabla\beta}{\beta} \right) \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{a}, \\ &\Rightarrow \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} = -\frac{\nabla\rho}{\rho} \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

Regresando a la expresión para la fuerza promedio, Ec. (A.13), y utilizando (A.14), (A.19) y (A.20) se consigue,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \rho [-\nabla(2Cf) - \dot{\mathbf{a}}] d^3x + m \int [(\nabla\rho \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\nabla\rho] d^3x \\ &\quad - m \int \mathbf{a}^2 \nabla\rho d^3x + m \int \rho [(\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}] d^3x \\ &\quad + m \int [(\nabla\rho \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + (\nabla\rho \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}] d^3x.\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned}(\nabla\rho \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\nabla\rho &= \mathbf{a} \times (\mathbf{v} \times \nabla\rho) \\ \text{pero } \mathbf{a} \times (\mathbf{v} \times \nabla\rho) &\sim \epsilon_{ijk} a_i [e_{mnl} v_m (\partial_l \rho)] e_k \\ \text{y } \epsilon_{ijk} a_i [e_{mnl} v_m (\partial_l \rho)] e_k &= \epsilon_{kij} \epsilon_{mnl} a_i v_m (\partial_l \rho) e_k \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon_{mnl} \partial_n (\rho a_i v_m) e_k - \epsilon_{kij} \epsilon_{mnl} \rho \partial_n (a_i v_m) e_k \\ &= -(\delta_{km} \delta_{in} - \delta_{kn} \delta_{im}) \rho \partial_n (a_i v_m) e_k \\ &= \delta_{kn} \delta_{im} \rho \partial_n (a_i v_m) e_k - \delta_{km} \delta_{in} \rho \partial_n (a_i v_m) e_k \\ &= \rho \partial_k (a_i v_i) e_k - \rho \partial_i (a_i v_k) e_k \\ &= \rho \partial_k (a_i v_i) e_k - \rho [(\partial_i a_i) v_k + a_i (\partial_i v_k)] e_k, \\ \Rightarrow \mathbf{a} \times (\mathbf{v} \times \nabla\rho) &= \rho [\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v}].\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

Por lo tanto la Ec. (A.21) en combinación con la (A.22) y los ceros  $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$  y  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , queda como,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \rho [-\nabla(2Cf) - \dot{\mathbf{a}}] d^3x - m \int \nabla(\mathbf{a}^2 \rho) d^3x + m \int \rho \nabla(\mathbf{a}^2) d^3x \\ &\quad + \int \rho [\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}] d^3x \\ &\quad + m \int \rho [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{v})] d^3x \\ &\quad + m \int [(\nabla\rho \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + (\nabla\rho \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}] d^3x,\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

de esto último se identifica que,

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \rho [-\nabla(2Cf) - \dot{\mathbf{a}} + \nabla(\mathbf{a}^2)] d^3x + m \int \rho [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a})] d^3x \\ &\quad + m \int [(\nabla\rho \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + (\nabla\rho \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a}] d^3x.\end{aligned}\quad (\text{A.24})$$

No obstante, todavía se pueden hacer algunas otras simplificaciones como sigue

$$\begin{aligned} (\nabla \rho \cdot \mathbf{a}) &\sim (\partial_j \rho) a_j a_i = \partial_j (\rho a_j a_i) - \rho (\partial_j a_j) a_i - \rho a_j (\partial_j a_i), \\ &\Rightarrow (\nabla \rho \cdot \mathbf{a}) = -\rho (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a}, \\ &\Rightarrow a_i \sim (\mathbf{B} \times \mathbf{r})_i = \epsilon_{ink} B_n r_k, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} \sim a_j (\partial_j a_i) = \epsilon_{jpk} B_p r_q \partial_j \epsilon_{inl} B_n r_l = \epsilon_{jpk} \epsilon_{inl} B_p B_n r_q \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} &\sim \epsilon_{pqj} \epsilon_{inl} B_p B_n r_q = (\delta_{pi} \delta_{qn} - \delta_{pn} \delta_{qi}) B_p B_n r_q = B_i B_n r_n - B_n B_n r_i, \\ &\Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} \sim (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \rho \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} &\sim (\partial_j \rho) v_j a_i + \rho (v_j \partial_j) a_i \\ &\sim \partial_j (\rho v_j a_i) - \rho [(\partial_j v_j) a_i - v_j (\partial_j a_i)] + \rho (v_j \partial_j) a_i \\ &\Rightarrow (\nabla \rho \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \nabla (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) - \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \sim (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) &\sim \epsilon_{ijk} B_j r_k \epsilon_{ilm} B_n r_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} B_j r_k B_n r_m \\ &\sim (\delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kn}) B_j B_n r_k r_k - B_j B_k r_k r_j, \\ &\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \sim (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) r^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})^2, \\ &\Rightarrow \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \sim 2 [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{r} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Introduciendo (A.27) en (A.29),

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) &= -2(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a}, \Rightarrow -\rho \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = -\rho \nabla (a^2) = 2\rho (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a}, \\ &\Rightarrow \rho (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = -\frac{1}{2} \rho \nabla (a^2). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Finalmente, sustituyendo (A.30) en (A.25) y luego en (A.24), así como (A.28), se logra que,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F} \rangle &= m \int \{ \rho [-\nabla (2Cf) - \dot{\mathbf{a}}] + \rho \nabla (a^2) \} d^3x + \\ &+ m \int \rho [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a})] d^3x + m \int \left[ -\frac{1}{2} \rho \nabla (a^2) \right] d^3x, \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene, la Ec. (1.33), es decir,

$$\langle \mathbf{F} \rangle = m \int \rho \left\{ -\nabla \left( 2Cf - \frac{1}{2} a^2 \right) - \dot{\mathbf{a}} + [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a})] \right\} d^3x. \quad (\text{A.31})$$

### A.3 Con disipación y campo magnético

Sustituyendo la Ec. (1.38) en (1.41) se obtiene,

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\rho} + \nabla \cdot (\mathbf{j}) - D\Delta\rho = \frac{d(\alpha\beta)}{dt} + \nabla \cdot [C(\beta\nabla\alpha - \alpha\nabla\beta) - \rho\mathbf{a}] - D\Delta\rho \\ &= \dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta} + C[\nabla\beta\nabla\alpha + \beta\Delta\alpha - \nabla\alpha\nabla\beta - \alpha\Delta\beta] - \nabla(\alpha\beta)\mathbf{a} \\ &\quad - \alpha\beta(\nabla \cdot \mathbf{a}) - D\Delta\rho, \\ \Rightarrow 0 &= \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} + C\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - C\frac{\Delta\beta}{\beta} - \frac{\nabla\alpha}{\alpha} \cdot \mathbf{a} - \frac{\nabla\beta}{\beta} \cdot \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathbf{a} - D\frac{\Delta\rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Partiendo de la Ec. (1.51) y usando las Ecs. (1.49) y (1.50), se encuentra que,

$$\begin{aligned} \langle F_1 \rangle &= 2mC \int (\dot{\beta} \nabla \alpha - \dot{\alpha} \nabla \beta) d^3x \\ &= 2mC \int \left[ \begin{array}{l} +C\Delta\beta\nabla\alpha + (\nabla\beta \cdot \mathbf{a})\nabla\alpha + \frac{\rho}{2}(\nabla \cdot \mathbf{a})\nabla\alpha + \beta f\nabla\alpha \\ -C\Delta\alpha\nabla\beta - (\nabla\alpha \cdot \mathbf{a})\nabla\beta - \frac{\rho}{2}(\nabla \cdot \mathbf{a})\nabla\beta + \alpha f\nabla\beta \end{array} \right] d^3x \\ &\quad + \int [-\gamma(\ln\beta + Z^*)\beta\nabla\alpha + \gamma(\ln\alpha + Z)\alpha\nabla\beta] d^3x. \end{aligned}$$

Luego de (A.10), (A.12) y (A.13) se logra,

$$\begin{aligned} \langle F_1 \rangle &= m \int \rho [-\nabla(2Cf)] d^3x + mC \int \rho \left[ \frac{\nabla\alpha}{\beta} - \frac{\nabla\beta}{\beta} \right] (\nabla \cdot \mathbf{a}) d^3x \\ &\quad + 2mC \int \rho \left[ \left( \frac{\nabla\beta}{\beta} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla\alpha}{\alpha} - \left( \frac{\nabla\alpha}{\alpha} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla\beta}{\beta} \right] d^3x \\ &\quad + 2mC\gamma \int \rho \left[ (\ln\alpha + Z) \frac{\nabla\beta}{\beta} - (\ln\beta + Z^*) \frac{\nabla\alpha}{\alpha} \right] d^3x. \end{aligned} \quad (A.33)$$

La expresión,

$$\langle F_2 \rangle = -m \int (\dot{\alpha}\beta + \alpha\dot{\beta}) \mathbf{a} d^3x = -m \int \rho \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) \mathbf{a} d^3x, \quad (A.34)$$

también contribuye con términos de disipación, ya que con (1.49), (1.50), (A.14) y (A.18) se observa que,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} &= -C \left( \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - \frac{\Delta\beta}{\beta} \right) + \left( \frac{\nabla\alpha}{\alpha} + \frac{\nabla\beta}{\beta} \right) \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{a} - \gamma(\ln\alpha\beta + \bar{Z}), \\ \Rightarrow \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} &= -\frac{\nabla\rho}{\rho} \cdot \mathbf{v} - \gamma(\ln\alpha\beta + \bar{Z}), \\ \Rightarrow \langle F_2 \rangle &= m \int \left( \frac{\nabla\rho}{\rho} \cdot \mathbf{v} \right) \mathbf{a} d^3x + m\gamma \int \rho (\ln\alpha\beta + \bar{Z}) d^3x. \end{aligned} \quad (A.35)$$

Para  $\langle F \rangle$  ya no se tienen más contribuciones por disipación, entonces sustituyendo (A.33) y (A.35) en (1.51) se obtiene la Ec. (1.52),

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= m \int \rho [-\nabla(2Cf)] d^3x + mC \int \rho \left[ \frac{\nabla\alpha}{\beta} - \frac{\nabla\beta}{\beta} \right] (\nabla \cdot \mathbf{a}) d^3x \\ &\quad + 2mC \int \rho \left[ \left( \frac{\nabla\beta}{\beta} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla\alpha}{\alpha} - \left( \frac{\nabla\alpha}{\alpha} \cdot \mathbf{a} \right) \frac{\nabla\beta}{\beta} \right] d^3x \\ &\quad + m \int (\nabla\rho \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a} d^3x - m \int \rho \dot{\mathbf{a}} d^3x \\ &\quad + 2mC\gamma \int \rho \left[ (\ln\alpha + Z) \frac{\nabla\beta}{\beta} - (\ln\beta + Z^*) \frac{\nabla\alpha}{\alpha} \right] d^3x \\ &\quad + m\gamma \int \rho (\ln\alpha\beta + \bar{Z}) d^3x, \end{aligned} \quad (A.36)$$

El análisis de los términos disipativos de la Ec. (1.53), lleva a la siguiente serie de expresiones e identidades,

$$\begin{aligned}
 2mC\gamma \int \rho \left[ (\ln \alpha + Z) \frac{\nabla \beta}{\beta} - (\ln \beta + Z^*) \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \right] d^3x + m\gamma \int \rho (\ln \alpha + \ln \beta + Z + Z^*) \mathbf{a} d^3x = \\
 = 2mC\gamma \int \left[ (\ln \alpha + Z) \left( \alpha \nabla \beta + \frac{1}{2C} \rho \mathbf{a} \right) - (\ln \beta + Z^*) \left( \beta \nabla \alpha - \frac{1}{2C} \rho \mathbf{a} \right) \right] d^3x \\
 = 2mC\gamma \int \rho \left[ (\ln \alpha + Z) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} - \frac{\mathbf{v}}{C} - \frac{\mathbf{a}}{C} + \frac{\mathbf{a}}{C} \right) \right] d^3x \\
 \quad - 2mC\gamma \int \rho \left[ (\ln \beta + Z^*) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{\mathbf{v}}{C} + \frac{\mathbf{a}}{C} - \frac{\mathbf{a}}{C} \right) \right] d^3x \\
 = mC\gamma \int \left[ \rho (\ln \alpha + Z - \ln \beta - Z^*) \frac{\nabla \rho}{\rho} - \rho (\ln \alpha + Z + \ln \beta + Z^*) \frac{\mathbf{v}}{C} \right] d^3x \\
 = mC\gamma \int \left[ \ln \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) + 2iZ_I \right] \nabla \rho d^3x - m\gamma \int \rho (\ln \rho + \bar{Z}) \mathbf{v} d^3x \\
 = mC\gamma \int \left\{ \nabla \left[ \ln \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) \rho \right] - \nabla \left[ \ln \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) \right] \rho + \nabla (2iZ_I \rho) - \nabla (2iZ_I) \rho \right\} d^3x \\
 \quad + mD \int \Delta \rho v d^3x \\
 = -mC\gamma \int \rho \left( \frac{\mathbf{v}}{C} + \frac{\mathbf{a}}{C} \right) d^3x - m \left( \frac{\hbar}{2im} \right) \gamma (2i) \int \rho \nabla (Z_I) d^3x
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha obtenido

$$\begin{aligned}
 2mC\gamma \int \rho \left[ (\ln \alpha + Z) \frac{\nabla \beta}{\beta} - (\ln \beta + Z^*) \frac{\nabla \alpha}{\alpha} \right] d^3x = \\
 = -m\gamma \int \rho \mathbf{v} d^3x - \hbar \gamma \int \rho \nabla (Z_I) d^3x - m\gamma \int \rho \mathbf{a} d^3x. \quad (\text{A.37})
 \end{aligned}$$

De esta última expresión se observa que si

$$\rho \sim N^2 \exp 2R, \quad \text{con } R = -P\bar{x}^2, \quad \text{y } \mathbf{a} \sim \mathbf{B} \times \mathbf{r},$$

$$\text{entonces} \quad \int \rho \mathbf{a} d^3x \sim \mathbf{B} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{r} (N^2 \exp 2R) d^3x = 0, \quad (\text{A.38})$$

ya que  $\mathbf{r}$  es una función impar por una par integrada en un intervalo simétrico, y si queda una constante siempre es posible desaparecerla mediante un corrimiento. Así, finalmente se consigue la Ec. (1.54).

Tabla A.1: Ecuaciones clásicas de movimiento *tipo-Newton*

		$\mathbf{F} =$	$\mathcal{F} =$
Sin dissipación	Sin campo magnético	(1) $-\nabla V(r)$	$\frac{1}{2m\sigma} V(r) = \frac{1}{2} V(r)$
	Con campo magnético	(2.1) $q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  (2.2) $q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla V(r)$	$\frac{1}{2m\sigma} q\Phi(r) + \frac{q^2}{2\sigma} =$ $= \frac{1}{2} \left\{ q\Phi(r) + \frac{1}{2m} \frac{d^2}{dt^2} [A(r)]^2 \right\}$  $\frac{1}{2m\sigma} [q\Phi(r) + V(r)] + \frac{q^2}{2\sigma} =$ $= \frac{1}{2} \left\{ q\Phi + V + \frac{1}{2m} \frac{d^2}{dt^2} [A(r)]^2 \right\}$
Con dissipación	Sin campo magnético	(3.1) $-\nabla V(r) - m\gamma\mathbf{v}$ (3.2) $-\nabla V(r) - m\gamma\mathbf{v} + \mathcal{F}(t)$	ver (1) ver (1)
	Con campo magnético	(4.1) $q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - m\gamma\mathbf{v}$	ver (2.1)
		(4.2) $q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla V(r) - m\gamma\mathbf{v}$	ver(2.2)
		(4.3) $q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - m\gamma\mathbf{v} + \mathcal{F}(t)$	ver (2.1)
	(4.4) $q\mathbf{E} + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla V(r) - m\gamma\mathbf{v} + \mathcal{F}(t)$	ver (2.2)	



Tabla A.2: Ecuaciones de campo tipo-Schrödinger

		Ecuación de campo
Sin dilatación	Sin campo magnético	(1) $i\hbar\dot{\Psi} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)\right]\Psi = H_L\Psi$
	Con campo magnético	(2.1) $i\hbar\dot{\Psi} = \left\{\frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}(r)\right]^2 + q\Phi(r)\right\}\Psi = H_{L,M}\Psi$
		(2.2) $i\hbar\dot{\Psi} = [H_{L,M} + V(r)]\Psi$
Sin dilatación	Sin campo magnético	(3.1) $i\hbar\dot{\Psi} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + \gamma\frac{\hbar}{2}(\ln\Psi + Z_R + iZ_I)\right]\Psi = H_{NL}\Psi$
		(3.2) $i\hbar\dot{\Psi} = [H_{NL} - \mathcal{F}(t) \cdot r]$
	Con campo magnético	(4.1) $i\hbar\dot{\Psi} = \left\{\frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}(r)\right]^2 + q\Phi(r) + \gamma\frac{\hbar}{2}(\ln\Psi + Z_R + iZ_I) - \gamma\frac{q}{c}\mathbf{A}(r) \cdot r\right\}\Psi$ $= H_{NL,M}\Psi$
		(4.2) $i\hbar\dot{\Psi} = [H_{NL,M} + V(r)]\Psi$
		(4.3) $i\hbar\dot{\Psi} = [H_{NL,M} - \mathcal{F}(t) \cdot r]\Psi$
(4.4) $i\hbar\dot{\Psi} = [H_{NL,M} + v(r) - \mathcal{F}(t) \cdot r]\Psi$		

Tabla A.3: Funciones  $Z_I$  y  $Z$  que satisfacen la condición  $\langle \tilde{W}_s \rangle = 0$

	F	$Z_I$	$Z = Z_R + iZ_I$
Sin campo magnético	(3.1)†	$-(S)^\dagger - 2\pi\hbar = Z_I$	$-(\ln\Psi)$
	(3.2)	$-\frac{1}{\hbar^2}\mathcal{F}(t) \cdot r + Z_I$	$-\mathcal{F}(t) \cdot r - (\ln\Psi)$
Con campo magnético	(4.1)	$-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}(r) \cdot r + Z_I$	$-\gamma\frac{q}{c}\mathbf{A}(r) \cdot r - (\ln\Psi)$
	(4.2)	$-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}(r) \cdot r + Z_I$	$-\gamma\frac{q}{c}\mathbf{A}(r) \cdot r - (\ln\Psi)$
	(4.3)	$-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}(r) \cdot r - \frac{1}{\hbar^2}\mathcal{F}(t) \cdot r + Z_I$	$-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}(r) \cdot r - \frac{1}{\hbar^2}\mathcal{F}(t) \cdot r + Z_I$
	(4.4)	$-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}(r) \cdot r - \frac{1}{\hbar^2}\mathcal{F}(t) \cdot r + Z_I$	$-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}(r) \cdot r - \frac{1}{\hbar^2}\mathcal{F}(t) \cdot r + Z_I$

† Para las fuerzas clásicas F correspondientes a esta tabla, ver Tabla A.1.

‡ La funciones soluciones de las ENLS estarán dadas en la forma  $\Psi = N \exp(iS + R)$ .

Tabla A.4: Ecuaciones no-lineales de campo tipo-Schrödinger

		Ecuación de campo	
Sin campo magnético	(3.1)	$i\hbar\dot{\Psi} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + \gamma\frac{\hbar}{2}(\ln\Psi - \langle\ln\Psi\rangle) \right] \Psi = H_{NLQ}\Psi$	
	(3.2)	$i\hbar\dot{\Psi} = [H_{NLQ}\Psi - \mathcal{F}(t) \cdot r] \Psi$	
Con campo magnético	(4.1)	$i\hbar\dot{\Psi} = \left\{ \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(r) \right]^2 + \varphi\phi(r) + \gamma\frac{\hbar}{2}(\ln\Psi - \langle\ln\Psi\rangle) - \gamma\frac{e}{c}\mathbf{A}(r) \cdot r \right\} \Psi$ $= H_{NLQ,M}\Psi$	
	(4.2)	$i\hbar\dot{\Psi} = [H_{NLQ,M}\Psi + V(r)]\Psi$	
	(4.3)	$i\hbar\dot{\Psi} = [H_{NLQ,M}\Psi - \mathcal{F}(t) \cdot r]\Psi$	
	(4.4)	$i\hbar\dot{\Psi} = [H_{NLQ,M}\Psi + V(r) - \mathcal{F}(t) \cdot r]\Psi$	

<sup>‡</sup> Para las fuerzas clásicas  $\mathcal{F}$  correspondientes a esta tabla, ver Tabla A.1.

<sup>†</sup> La funciones soluciones de las ENLS estarán dadas en la forma  $\Psi = N \exp(iS + R)$ .

## Apéndice B

### B.1 Solución tipo-onda

A continuación se obtienen las expresiones dadas en (2.8), para cada uno de los coeficientes que intervienen en  $S$  y  $R$ . En primer lugar se tiene

$$\begin{aligned}\nabla\Psi &= \nabla[N \exp(R + iS)] = N(\nabla R + i\nabla S) \exp(R + iS), \\ 1\text{-dimensión: } \frac{\partial\Psi}{\partial x} &= N \left( \frac{\partial R}{\partial x} + i \frac{\partial S}{\partial x} \right) \exp(R + iS), \\ \Delta\Psi &= N [(\nabla R + i\nabla S)^2 + (\Delta R + i\Delta S)] \exp(R + iS).\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned}1\text{-dimensión: } \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &= N \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + 2i \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] \exp(R + iS) \\ &\quad + N \left[ \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right) + i \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \right] \exp(R + iS), \\ \Rightarrow \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &= N \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right) \right] \exp(R + iS) \\ &\quad + Ni \left[ 2 \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \right] \exp(R + iS).\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

Luego, con la Ec. (2.1) también unidimensional, y el potencial de oscilador armónico  $V = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$  se tiene

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \Psi - i\hbar\gamma (\ln \Psi - \langle \Psi \rangle) \Psi, \quad (\text{B.3})$$

sustituyendo  $S$  y  $R$  en  $\Psi = N \exp(iS + R)$  y luego en (B.3), se consigue

$$\begin{aligned}i\hbar (\dot{R} + i\dot{S}) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right) \right] \\ &\quad - i \frac{\hbar^2}{2m} \left[ 2 \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \right] \\ &\quad - i\hbar\gamma (\ln N + R + iS - \langle \ln N + R + iS \rangle).\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

De separar parte real e imaginaria de la expresión anterior, resultan las siguientes dos ecuaciones diferenciales,

$$-\hbar\dot{S} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 - \hbar\gamma((S) - S), \quad (\text{B.5})$$

$$\hbar\dot{R} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ 2 \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \right] + \hbar\gamma((R) - R). \quad (\text{B.6})$$

Ahora se obtienen las derivadas necesarias de  $S$  y  $R$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= I_s + 2M_x x, & \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= 2M_x, \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= -2P(x - Q), & \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} &= -2P, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial I_s}{\partial t} = \dot{k}_x, & \frac{\partial R}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Sustituyendo los resultados pertinentes de estas últimas expresiones, así como (2.6) y (2.7) en (B.5), se logra

$$\begin{aligned} \dot{k}_x &= \frac{\hbar}{2m} [(-2P)^2 (x - Q)^2 - (I_s + 2M_x)^2] - \frac{1}{2\hbar} m \omega_0^2 x^2 \\ &\quad + \gamma (\dot{k}_x + I_s(x) + M_x(x^2) - k_x I_s x - M_x x^2), \\ \Rightarrow \dot{k}_x &= \frac{\hbar}{2m} [4P^2 x^2 - 8P^2 Qx + 4P^2 Q^2 - I_s^2 - 4I_s M_x x - 4M_x^2 x^2 - 2P] \\ &\quad - \frac{1}{2\hbar} m \omega_0^2 x^2 + \gamma \left( I_s Q + \frac{M_x}{4P} + M_x Q^2 - I_s x - M_x x^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{2\hbar}{m} P^2 Q^2 - \frac{\hbar}{2m} I_s^2 - \frac{\hbar}{m} P + \gamma I_s Q + \frac{1}{4} \gamma \frac{M_x}{P} + \gamma M_x Q^2 - \dot{k}_x \\ &\quad + x \left( -\frac{4\hbar}{m} P^2 Q - \frac{2\hbar}{m} I_s M_x - \gamma I_s \right) \\ &\quad + x^2 \left( \frac{2\hbar}{m} P^2 - \frac{2\hbar}{m} M_x^2 - \frac{1}{2\hbar} m \omega_0^2 - \gamma M_x \right). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

De lo anterior, se iguala cada uno de los coeficientes a cero para obtener un sistema de ecuaciones, es decir,

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\hbar}{m} P^2 - \frac{2\hbar}{m} M_x^2 - \frac{1}{2\hbar} m \omega_0^2 - \gamma M_x = 0, \quad (\text{a}) \\ \frac{4\hbar}{m} P^2 Q + \frac{2\hbar}{m} I_s M_x + \gamma I_s = 0, \quad (\text{b}) \\ \frac{2\hbar}{m} P^2 Q^2 - \frac{\hbar}{2m} I_s^2 - \frac{\hbar}{m} P + \gamma I_s Q + \frac{1}{4} \gamma \frac{M_x}{P} + \gamma M_x Q^2 - \dot{k}_x = 0, \quad (\text{c}) \end{array} \right\}. \quad (\text{B.10})$$

Análogamente, de la ecuación diferencial para  $R$  (B.6), se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\hbar}{2m} [2(-2P)(x - Q)(I_s + 2M_x x) + 2M_x] \\ &\quad + \gamma [(-Px^2 + 2PQx - PQ^2) + Px^2 - 2PQx + PQ^2], \\ \Rightarrow 0 &= -\frac{\hbar}{2m} [-4PI_s x - 8PM_x x^2 + 4PQI_s + 8PQM_x x + 2M_x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\gamma \left( -\frac{1}{4} - PQ^2 + 2PQ^2 - Px^2 - 2PQx + PQ^2 \right), \\
 \Rightarrow 0 = & x^2 \left( \frac{4\hbar}{m} PM_x + \gamma P \right) + x \left( \frac{2\hbar}{m} P l_x - \frac{4\hbar}{m} PQM_x - 2\gamma PQ \right) \\
 & + \left( \gamma PQ^2 - \frac{2\hbar}{m} PQ l_x - \frac{\hbar}{m} M_x - \frac{1}{4} \gamma \right).
 \end{aligned}$$

Y otra vez igualando cada uno de los coeficientes a cero, se consigue un segundo sistema de ecuaciones,

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{4\hbar}{m} M_x + \gamma = 0, \quad (a) \\ \frac{2\hbar}{m} P l_x - \frac{4\hbar}{m} PQM_x - 2\gamma PQ = 0, \quad (b) \\ \gamma PQ^2 - \frac{2\hbar}{m} PQ l_x - \frac{\hbar}{m} M_x - \frac{1}{4} \gamma = 0. \quad (c) \end{array} \right\} \quad (B.11)$$

De (B.11a) se encuentra

$$M_x = -\frac{m}{4\hbar} \gamma, \quad (B.12)$$

y de la expresión (B.10a),

$$\Rightarrow \frac{2\hbar}{m} P^2 - \frac{2\hbar}{m} \frac{m^2}{16\hbar} \gamma^2 - \frac{1}{2\hbar} m \omega_0^2 + \frac{m\gamma^2}{4\hbar} = 0, \quad (B.13)$$

$$\Rightarrow P^2 = \left( \frac{m}{8\hbar} \gamma^2 + \frac{m}{2\hbar} \omega_0^2 - \frac{m}{4\hbar} \gamma^2 \right) \left( \frac{m}{2\hbar} \right) = \left( \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \left( \frac{m^2}{4\hbar^2} \right). \quad (B.14)$$

Pero, definiendo

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}, \Rightarrow P = \frac{m}{2\hbar} \Omega, \quad (B.15)$$

La relación (B.11b) implica,

$$\begin{aligned}
 \frac{2\hbar}{m} \left( \frac{m}{\hbar} \Omega \right) l_x - \frac{4\hbar}{m} \left( \frac{m}{2\hbar} \Omega \right) \left( -\frac{m\gamma}{4\hbar} \right) Q - 2\gamma \left( \frac{m}{2\hbar} \Omega \right) Q = 0, \\
 \Rightarrow l_x = \left( \frac{m\gamma}{\hbar} - \frac{m\gamma}{2\hbar} \right) Q, \Rightarrow l_x = \frac{m\gamma}{2\hbar} Q.
 \end{aligned} \quad (B.16)$$

Con la Ec. (B.10b) se alcanza el siguiente resultado,

$$\begin{aligned}
 \frac{4\hbar}{m} \left( \frac{m^2}{4\hbar^2} \Omega^2 \right) Q + \frac{2\hbar}{m} \left( \frac{m\gamma}{2\hbar} \right) \left( -\frac{m\gamma}{4\hbar} \right) Q + \left( \frac{m\gamma^2}{2\hbar} \right) Q = 0, \\
 \Rightarrow Q = 0 \quad \text{y} \quad l_x = 0.
 \end{aligned} \quad (B.17)$$

Sustituyendo los coeficientes apropiados en la relación (B.11c), se encuentra fácilmente que se cumple, es decir,

$$\frac{\hbar}{m} \left( -\frac{m}{4\hbar} \gamma \right) + \frac{1}{4} \gamma = -\frac{\gamma}{4} + \frac{\gamma}{4} = 0.$$

Luego, de (B.10c) se tiene

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar}{m} \left( \frac{m\Omega}{2\hbar} \right) + \frac{\gamma}{4} \left( -\frac{m\gamma}{4\hbar} \right) \left( \frac{2\hbar}{m\Omega} \right) = \dot{k}_x, \\ \Rightarrow \dot{k}_x &= -\frac{\Omega}{2} - \frac{\gamma^2}{8\Omega} = -\frac{1}{2\Omega} \left( \Omega^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) = -\frac{1}{2\Omega} \left( \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} \right), \\ \Rightarrow \dot{k}_x &= -\left( \frac{\omega_0^2}{2\Omega} \right), \Rightarrow k_x(t) = -\left( \frac{\omega_0^2}{2\Omega} \right) t. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Finalmente, la función de onda (2.10), solución de la ecuación diferencial<sup>1</sup> (2.1), se consigue reemplazando las expresiones encontradas para cada uno de los coeficientes que intervienen en  $R$  y  $S$ , obteniéndose así la expresión,

$$\Psi(x, t) = \left( \frac{m\Omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar} \Omega x^2 - i \left( \frac{\omega_0^2}{2\Omega} t + \frac{m\gamma}{4\hbar} x^2 \right) \right]. \quad (\text{B.19})$$

## B.2 Solución tipo-soliton

Ahora de las ecuaciones diferenciales encontradas a partir de sustituir la solución  $\Psi = N \exp(iS + R)$  en la Ec. (2.1) para una dimensión

$$-\hbar \dot{S} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 - \hbar \gamma ((S) - S), \quad (\text{B.20})$$

$$\hbar \dot{R} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ 2 \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) \right] + \hbar \gamma ((R) - R), \quad (\text{B.21})$$

se resuelven con el siguiente grupo de identidades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= (L_x - 2M_x \eta) + 2M_x x, & \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= 2M_x, \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= -2P\dot{x}, & \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} &= -2P, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= (\dot{L}_x - 2M_x \dot{\eta}) x + (K_x - L_x \eta - L_x \dot{\eta} + 2M_x \eta \dot{\eta}), & \frac{\partial R}{\partial t} &= 2P\dot{x}\dot{\eta} = \dot{R}, \\ &= \dot{S}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Sustituyendo, primero en (B.20), se obtiene

$$\begin{aligned} & (\dot{L}_x - 2M_x \dot{\eta}) x + (K_x - L_x \eta - L_x \dot{\eta} + 2M_x \eta \dot{\eta}) = \\ &= \frac{\hbar}{2m} [4P^2 \dot{x}^2 - (2M_x x + L_x - 2M_x \eta)^2 - 2P] - \frac{1}{2\hbar} m \omega_0^2 x^2 \\ & \quad + \gamma [(M_x x^2 + (L_x - 2M_x \eta) x + (K_x - L_x \eta + M_x \eta^2))] \\ & \quad - \gamma [M_x x^2 + (L_x - 2M_x \eta) x + (K_x - L_x \eta + M_x \eta^2)], \\ \Rightarrow & (\dot{L}_x - 2M_x \dot{\eta}) x + (K_x - L_x \eta - L_x \dot{\eta} + 2M_x \eta \dot{\eta}) = \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Tratada solamente en una dimensión

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar}{2m} [4P^2 x^2 - 8P^2 \eta x + 4P^2 \eta^2 - 4M_x^2 x^2] \\
&\quad + \frac{\hbar}{2m} [-4M_x (L_x - 2M_x \eta) x - (L_x - 2M_x \eta)^2 - 2P] \\
&\quad - \frac{1}{2\hbar} m \omega_0^2 x^2 + \gamma \left[ \frac{M_x}{4P} + M_x \eta^2 + L_x \eta - 2M_x \eta^2 - M_x x^2 - (L_x - 2M_x \eta) x \right], \\
&\Rightarrow \left( \frac{2\hbar}{m} P^2 - \frac{2\hbar}{m} M_x^2 - \frac{1}{2\hbar} m \omega_0^2 - \gamma M_x \right) x^2 - \left[ \frac{4\hbar}{m} P^2 \eta + \gamma (L_x - 2M_x \eta) \right] x \\
&\quad - \left[ \frac{2\hbar}{m} M_x (L_x - 2M_x \eta) + (\dot{L}_x - 2M_x \dot{\eta}) \right] x + \left[ \frac{2\hbar}{m} P^2 \eta^2 - \frac{\hbar}{2m} (L_x - 2M_x \eta)^2 \right] \\
&\quad + \left[ -\frac{\hbar}{m} P + \gamma \frac{M_x}{4P} + \gamma M_x \eta^2 + \gamma L_x \eta - 2\gamma M_x \eta^2 - \dot{K}_x + \dot{L}_x \eta + L_x \dot{\eta} + 2M_x \eta \dot{\eta} \right] = 0.
\end{aligned}$$

E igualando cada uno de los coeficientes del polinomio anterior a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{2\hbar}{m} P^2 - \frac{2\hbar}{m} M_x^2 - \frac{1}{2\hbar} m \omega_0^2 - \gamma M_x = 0 \right) \quad (a) \\ \left. \begin{array}{l} -\frac{4\hbar}{m} P^2 \eta - \frac{2\hbar}{m} M_x (L_x - 2M_x \eta) \\ -\gamma (L_x - 2M_x \eta) - (\dot{L}_x - 2M_x \dot{\eta}) = 0 \end{array} \right\} \quad (b) \\ \left. \begin{array}{l} \frac{2\hbar}{m} P^2 \eta^2 - \frac{\hbar}{2m} (L_x - 2M_x \eta)^2 \\ -\frac{\hbar}{m} P + \gamma \frac{M_x}{4P} + \gamma M_x \eta^2 + \gamma L_x \eta \\ -2\gamma M_x \eta^2 - (\dot{K}_x - \dot{L}_x \eta - L_x \dot{\eta} + 2M_x \eta \dot{\eta}) = 0 \end{array} \right\} \quad (c) \end{array} \right. \quad (B.23)$$

Con la ecuación diferencial para  $R$ , y copiando el razonamiento previo, se consigue

$$\begin{aligned}
2P\dot{\eta}x - 2P\eta\dot{\eta} &= -\frac{\hbar}{2m} [2(-2P)(x - \eta)(2M_x x + L_x - 2M_x \eta) + 2M_x] \\
&\quad + \gamma [(-Px^2 + 2P\eta x - P\eta^2) + Px^2 - 2P\eta x + P\eta^2], \\
\Rightarrow 2P\dot{\eta}x - 2P\eta\dot{\eta} &= -\frac{\hbar}{2m} [-8PM_x x^2 - 4P(L_x - 2M_x \eta)x + 8PM_x \eta] \\
&\quad - \frac{\hbar}{2m} [4P\eta(L_x - 2M_x \eta) + 2M_x] + \gamma \left[ -\frac{1}{4} + P\eta^2 + Px^2 - 2P\eta x \right], \\
&\Rightarrow \left( \frac{4\hbar}{m} PM_x + \gamma P \right) x^2 + \left( \frac{2\hbar}{m} PL_x - \frac{8\hbar}{m} PM_x \eta - 2\gamma P\eta - 2P\dot{\eta} \right) x \\
&\quad + \left( -\frac{2\hbar}{m} PL_x \eta + \frac{4\hbar}{m} PM_x \eta^2 - \frac{\hbar}{m} M_x - \frac{\gamma}{4} + \gamma P\eta^2 + 2P\eta\dot{\eta} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Lo que da el segundo sistema de ecuaciones,

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{4\hbar}{m} M_x + \gamma = 0 \quad (a) \\ \left. \begin{array}{l} \frac{2\hbar}{m} PL_x - \frac{8\hbar}{m} PM_x \eta - 2\gamma P\eta - 2P\dot{\eta} = 0 \\ -\frac{2\hbar}{m} PL_x \eta + \frac{4\hbar}{m} PM_x \eta^2 - \frac{\hbar}{m} M_x - \frac{\gamma}{4} + \gamma P\eta^2 + 2P\eta\dot{\eta} = 0 \end{array} \right\} \quad (b) \quad (c) \end{array} \right. \quad (B.24)$$

Inmediatamente se nota que (como para la solución tipo onda), (B.24a) implica que,

$$M = -\frac{m}{4\hbar} \gamma. \quad (B.25)$$

De (B.23a) se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{2\hbar}{m} P^2 - \frac{2\hbar}{m} \left(-\frac{m}{4\hbar}\gamma\right)^2 - \frac{1}{2\hbar} m \omega_0^2 - \gamma \left(-\frac{m}{4\hbar}\gamma\right) &= 0, \\ \Rightarrow \frac{2\hbar}{m} P^2 &= \frac{1}{2\hbar} m \omega_0^2 - \frac{1}{8\hbar} \gamma^2 m, \Rightarrow \frac{2\hbar}{m} P^2 = \frac{1}{2\hbar} m \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

y con la misma definición de  $\Omega$  (B.15), es decir, con

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}, \Rightarrow P = \frac{m}{2\hbar} \Omega, \quad (\text{B.27})$$

resultado idéntico al de la solución tipo-onda. Con (B.24b) se logra la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{2\hbar}{m} \frac{m}{2\hbar} \Omega L_x - \frac{8\hbar}{m} \frac{m}{2\hbar} \Omega \left(-\frac{m}{4\hbar}\gamma\right) \eta - 2\gamma \frac{m}{2\hbar} \Omega \eta - 2 \frac{m}{2\hbar} \Omega \dot{\eta} &= 0, \\ \Rightarrow L_x &= \frac{m}{\hbar} \dot{\eta}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Entonces de (B.23c), se establece

$$\begin{aligned} \frac{2\hbar}{m} \left(\frac{m}{2\hbar}\Omega\right)^2 \eta^2 - \frac{\hbar}{2m} \left[\left(\frac{m}{\hbar}\dot{\eta}\right)^2 - 4\left(\frac{m}{\hbar}\dot{\eta}\right)\left(-\frac{m}{4\hbar}\gamma\right)\eta + 4\left(-\frac{m}{4\hbar}\gamma\right)^2 \eta^2\right] \\ - \frac{\hbar}{m} \left(\frac{m}{2\hbar}\Omega\right) + \frac{\gamma}{4\left(\frac{m}{2\hbar}\Omega\right)} \left(-\frac{m}{4\hbar}\gamma\right) + \gamma \left(-\frac{m}{4\hbar}\gamma\right) \eta^2 + \gamma \left(\frac{m}{\hbar}\dot{\eta}\right) \eta - 2\gamma \left(-\frac{m}{4\hbar}\gamma\right) \eta^2 \\ - K_x + \left(\frac{m}{\hbar}\dot{\eta}\right) \eta + \left(\frac{m}{\hbar}\dot{\eta}\right) \dot{\eta} - 2\left(-\frac{m}{4\hbar}\gamma\right) \eta \dot{\eta} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{m}{2\hbar} \dot{\eta}^2 - \frac{m}{2\hbar} \eta^2 - \frac{m\gamma}{2\hbar} \eta \dot{\eta} - \frac{m\gamma^2}{8\hbar} \eta^2 - \left(\frac{\Omega}{2} + \frac{\gamma^2}{8\Omega}\right) - \frac{m\gamma^2}{4\hbar} \eta^2 \\ + \frac{m\gamma}{\hbar} \eta \dot{\eta} + \frac{m\gamma^2}{2\hbar} \eta^2 + \frac{m}{\hbar} \eta \dot{\eta} + \frac{m}{\hbar} \dot{\eta}^2 + \frac{m\gamma}{2\hbar} \eta \dot{\eta} &= K_x, \\ \Rightarrow \frac{m}{2\hbar} \dot{\eta}^2 + \left(\frac{m}{2\hbar} \Omega^2 - \frac{m\gamma^2}{8\hbar} - \frac{m\gamma^2}{4\hbar} + \frac{m\gamma^2}{2\hbar}\right) \eta^2 \\ - \frac{\omega_0^2}{2\Omega} + \frac{m\gamma}{\hbar} \eta \dot{\eta} + \frac{m}{\hbar} \dot{\eta} \eta &= K_x, \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{m}{2\hbar} \dot{\eta}^2 + \left[\frac{m}{2\hbar} \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right) + \frac{m\gamma^2}{8\hbar}\right] \eta^2 \\ - \frac{\omega_0^2}{2\Omega} + \frac{m\gamma}{\hbar} \eta \dot{\eta} + \frac{m}{\hbar} \dot{\eta} \eta &= K_x, \\ \Rightarrow \left(\frac{m}{\hbar} \omega_0^2 - \frac{m}{2\hbar} \omega_0^2\right) \eta^2 - \frac{\omega_0^2}{2\Omega} + \frac{m}{2\hbar} \dot{\eta}^2 + \frac{m\gamma}{\hbar} \eta \dot{\eta} + \frac{m}{\hbar} \dot{\eta} \eta &= K_x. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Pero si,

$$\frac{m}{\hbar} \eta \dot{\eta} + \frac{m\gamma}{\hbar} \eta \dot{\eta} + \frac{m}{\hbar} \omega_0^2 \eta^2 = 0, \Rightarrow m \dot{\eta} + m \gamma \dot{\eta} + m \omega_0^2 \eta = 0, \quad (\text{B.31})$$

es decir, si  $\eta(t)$  satisface la ecuación clásica de movimiento (sin fuerzas estocásticas), entonces

$$\dot{K}_x = \frac{m}{2\hbar} \dot{\eta}^2 - \frac{m}{2\hbar} \omega_0^2 \eta^2 - \frac{\omega_0^2}{2\Omega}, \quad \text{con} \quad \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}; t) = \frac{m}{2\hbar} \dot{\eta}^2 - \frac{m}{2\hbar} \omega_0^2 \eta^2, \quad (\text{B.32})$$

$$\Rightarrow \dot{K}_x = \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}; t) - \frac{\omega_0^2}{2\Omega}, \Rightarrow K_x(t) = \int_0^t \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}; t') dt' - \frac{\omega_0^2}{2\Omega} t. \quad (\text{B.33})$$



Con la introducción de cada uno de los coeficientes encontrados en  $S(x, t)$  (2.17), y  $R(x, t)$  (2.18), y posteriormente en  $\Psi$ , se halla la solución dada por:

$$\Psi(x, t; \eta(t)) = N \exp \left[ -\frac{m\Omega}{2\hbar} (x - \eta)^2 \right] \times \exp \left\{ i \left[ \int_0^t \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}; t') dt' - \frac{\omega_0^2}{2\Omega} t + \frac{m}{\hbar} \dot{\eta} (x - \eta) - \frac{m\gamma}{4\hbar} (x - \eta)^2 \right] \right\}. \quad (\text{B.34})$$

y cuyo coeficiente de normalización se encuentra que es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} N^2 \exp \left[ -\frac{m\Omega}{2\hbar} (x - \eta)^2 \right] dx = N^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}} \sqrt{\pi} = 1, \\ \Rightarrow N = \left( \frac{m\Omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{B.35})$$

Sustituyendo el coeficiente  $N$ , se obtiene la solución tipo-soliton (2.24)

$$\Psi(x, t; \eta(t)) = \left( \frac{m\Omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{m\Omega}{2\hbar} (x - \eta)^2 \right] \times \exp \left\{ i \left[ \int_0^t \mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}; t') dt' - \frac{\omega_0^2}{2\Omega} t + \frac{m}{\hbar} \dot{\eta} (x - \eta) - \frac{m\gamma}{4\hbar} (x - \eta)^2 \right] \right\}. \quad (\text{B.36})$$

### B.3 Principio de incertidumbre

En esta sección se calculan los valores promedio usando la solución (2.10),

$$\Psi(x, t) = \left( \frac{m\Omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar} \Omega x^2 - i \left( \frac{\omega_0^2}{2\Omega} t + \frac{m\gamma}{4\hbar} x^2 \right) \right],$$

de resultados previamente calculados, se conocen las cantidades

$$\langle x \rangle = Q = 0, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{4P} + Q^2 = \frac{\hbar}{2m\Omega}. \quad (\text{B.37})$$

Entonces, solamente se encuentran,

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) \Psi dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} i\hbar \left( \frac{m\Omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{m}{\hbar} \right) \left( \Omega + i\frac{\gamma}{2} \right) x \exp \left[ -\frac{m}{\hbar} \Omega x^2 \right] dx = 0, \\ \Rightarrow \langle p \rangle &= 0, \\ \langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right)^2 \Psi dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hbar \left( \frac{m\Omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{1}{4}} (m) \left( \Omega + i\frac{\gamma}{2} \right) \exp \left[ -\frac{m}{\hbar} \Omega x^2 \right] dx \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \hbar \left( \frac{m\Omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{m^2}{\hbar} \right) \left( \Omega + i\frac{\gamma}{2} \right)^2 x^2 \exp \left[ -\frac{m}{\hbar} \Omega x^2 \right] dx \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\hbar m}{2\Omega} \left( \Omega^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right), \\ \Rightarrow \langle p^2 \rangle &= \frac{\hbar m \omega_0^2}{2\Omega}. \end{aligned} \tag{B.39}$$

## Apéndice C

### C.1 Movimiento en campo magnético

Para desarrollar el paréntesis cuadrado de la ENLS (1.60),

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{WFL}(\mathbf{r}_\perp, t) = & \left\{ \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla_\perp - \frac{q}{c} \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\perp) \right]^2 \right. \\ & + \gamma \frac{\hbar}{i} [\ln \Psi_{WFL}(\mathbf{r}_\perp, t) - (\ln \Psi_{WFL}(\mathbf{r}_\perp, t))] \\ & \left. - \gamma \left[ \frac{q}{c} \mathbf{A}_\perp(\eta_\perp) \cdot \mathbf{r}_\perp \right] \right\} \Psi_{WFL}(\mathbf{r}_\perp, t), \end{aligned} \quad (C.1)$$

se observa antes, que el vector de posición está dado como

$$\mathbf{r}_\perp = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} = (\tilde{x} + \eta_x) \hat{\mathbf{i}} + (\tilde{y} + \eta_y) \hat{\mathbf{j}}, \quad (C.2)$$

y que un campo magnético uniforme se halla en la dirección  $z$ ,  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$ . El potencial vectorial como función del vector de posición tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp) &= \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}_\perp = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & B \\ \tilde{x} + \eta_x & \tilde{y} + \eta_y & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} (B\tilde{y} + B\eta_y) \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2} (B\tilde{x} + B\eta_x) \hat{\mathbf{j}}, \end{aligned} \quad (C.3)$$

y como función de la trayectoria clásica  $\eta_\perp$ ,

$$\mathbf{A}(\eta_\perp) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \eta_\perp = -\frac{B}{2} \eta_y \hat{\mathbf{i}} + \frac{B}{2} \eta_x \hat{\mathbf{j}}. \quad (C.4)$$

Entonces, desarrollando el operador cuadrático de (C.1), se tiene

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla_\perp - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp) \right]^2 \Psi_{WFL} &= \\ &= \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla_\perp - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp) \right] \left[ \nabla_\perp \Psi_{WFL} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp) \Psi_{WFL} \right] \\ &= -\hbar^2 \Delta_\perp \Psi_{WFL} - \frac{\hbar}{i} \frac{q}{c} [\nabla_\perp \cdot \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\perp)] \Psi_{WFL} \\ &\quad - 2 \frac{\hbar}{iqc} \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\perp) + \frac{q^2}{c^2} [\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\perp)]^2 \Psi_{WFL}. \end{aligned} \quad (C.5)$$

Pero, en la simplificación de la expresión anterior, se toma el *ansatz* solución dado por la Ec. (3.8),

$$\Psi_{WFL}(\mathbf{r}_\perp, t) = N(t) \exp [g(\bar{x}, \bar{y}, t)], \quad (C.6)$$

con  $g(\bar{x}, \bar{y}, t) = iY_z(t)\bar{x}^2 + (i/\hbar)L_x(t)\bar{x} + iY_y(t)\bar{y}^2 + (i/\hbar)L_y(t)\bar{y} + iK(t)$ , para conseguir las ecuaciones

$$\nabla_\perp \Psi_{WFL} = N \left[ \left( 2iY_z \bar{x} + \frac{i}{\hbar} L_x \right) \hat{i} + \left( 2iY_y \bar{y} + \frac{i}{\hbar} L_y \right) \hat{j} \right] \exp g, \quad (C.7)$$

$$\Rightarrow \Delta_\perp \Psi_{WFL} = N \left( -4Y_z^2 \bar{x}^2 - \frac{4}{\hbar} Y_z L_x \bar{x} - \frac{1}{\hbar^2} L_x^2 + 2iY_y \right. \\ \left. - 4Y_y^2 \bar{y}^2 - \frac{4}{\hbar} Y_y L_y \bar{y} - \frac{1}{\hbar^2} L_y^2 + 2iY_z \right) \exp g, \quad (C.8)$$

$$\dot{\Psi}_{WFL} = \dot{N} \exp g + N \left( \begin{array}{cc} i\dot{Y}_z \bar{x}^2 - & 2iY_z \dot{\eta}_z \bar{x} + \frac{i}{\hbar} \dot{L}_x \bar{x} - \frac{i}{\hbar} L_x \dot{\eta}_z \\ +i\dot{Y}_y \bar{y}^2 - & 2iY_y \dot{\eta}_y \bar{y} + \frac{i}{\hbar} \dot{L}_y \bar{y} - \frac{i}{\hbar} L_y \dot{\eta}_y \end{array} \right) \exp g \\ + iN\dot{K} \exp g. \quad (C.9)$$

Además, se tienen los siguientes cálculos

$$|\mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp)|^2 = \frac{B^2}{4} (\bar{x}^2 + \eta_z^2 + \bar{y}^2 + \eta_y^2) + \frac{B^2}{2} (\eta_x \bar{x} + \eta_y \bar{y}), \quad (C.10)$$

$$\nabla_\perp \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp) = 0, \quad (C.11)$$

$$\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\perp) \cdot \nabla_\perp \Psi_{WFL} = N \left[ \begin{array}{c} (-iBY_z \eta_y + \frac{iB}{\hbar} L_y) \bar{x} \\ + (-iBY_y \eta_x - \frac{iB}{\hbar} L_x) \bar{y} \\ + (-iBY_x + iBY_y) \bar{x} \bar{y} \\ - \frac{iB}{\hbar} \eta_y L_x + \frac{iB}{\hbar} \eta_x L_y \end{array} \right] \exp g, \quad (C.12)$$

$$\ln \Psi_{WFL} - (\ln \Psi_{WFL}) = iY_z (\bar{x}^2 - \langle \bar{x}^2 \rangle) + \frac{i}{\hbar} L_x \bar{x} + iY_y (\bar{y}^2 - \langle \bar{y}^2 \rangle) \\ + \frac{i}{\hbar} L_y \bar{y}, \quad (C.13)$$

$$\mathbf{A}(\eta_\perp) \cdot \mathbf{r}_\perp = -\frac{B}{2} \eta_x \bar{x} + \frac{B}{2} \eta_y \bar{y}. \quad (C.14)$$

## C.2 Ecuaciones tipo-Ricatti

$$C.2.1 \quad \gamma > \omega_c \Rightarrow A = \mp \sqrt{\gamma^2 - \omega_c^2}$$

$$\frac{2\hbar}{m} Y_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_j} - \frac{\gamma}{2} + i \frac{1}{\alpha_j^2} = -\frac{\gamma}{2} + \frac{A}{2} + \frac{2\hbar}{m} v_j, \\ \Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_j = \frac{2\hbar}{m} (v_{jR} + i v_{jI}) = \left( \frac{\alpha_j}{\alpha_j} - \frac{A}{2} \right) + i \frac{1}{\alpha_j^2}, \quad (C.15)$$

Sea  $\beta_j = (1/\alpha_j^2)$  y  $t = 0$ . Entonces,

$$\frac{2\hbar}{m} v_{j0} = \left( \frac{\alpha_j}{\alpha_j} \right)_0 - \frac{A}{2} + i\beta_{j0},$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{2\hbar}{m} v_{j0}} = \frac{1}{\left(\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j}\right)_0 - \frac{A}{2} + i\beta_{j0}} = \frac{\left(\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j}\right)_0 - \frac{A}{2} - i\beta_{j0}}{\left[\left(\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j}\right)_0 - \frac{A}{2}\right]^2 + \beta_{j0}^2}. \quad (\text{C.16})$$

Pero, para la simplificación una elección particular es tomada para la parte real de la expresión previa. De eso sigue que

$$\left(\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j}\right)_0 = \frac{A}{2}, \Rightarrow \frac{1}{\frac{2\hbar}{m} v_{j0}} = -i \frac{1}{\beta_{j0}}. \quad (\text{C.17})$$

Sustituyendo en la Ec. (3.28), se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{2\hbar}{m} v_{j'}(t) &= \frac{1}{-\frac{1}{\lambda} + \left(-i \frac{1}{\beta_{j0}} + \frac{1}{\lambda}\right) \exp(At)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\lambda} [\exp(At) - 1] - i \frac{1}{\beta_{j0}} \exp(At)} = \frac{\frac{1}{\lambda} [\exp(At) - 1] + i \frac{1}{\beta_{j0}} \exp(At)}{\frac{1}{\lambda^2} [\exp(At) - 1]^2 + \frac{1}{\beta_{j0}^2} \exp(2At)}, \\ \Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_{j'}(t) &= \frac{\frac{1}{\beta_{j0}} \exp(At)}{\frac{1}{\lambda^2} \exp(2At) + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} \exp(At) + \frac{1}{\beta_{j0}^2} \exp(2At)}. \end{aligned}$$

De (3.40), se consigue

$$\begin{aligned} \alpha_j^2 &= \frac{\frac{1}{\lambda^2} \exp(2At) + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} \exp(At) + \frac{1}{\beta_{j0}^2} \exp(2At)}{\frac{1}{\beta_{j0}^2} \exp(At)} \\ &= \frac{1}{\beta_{j0}} \left[ \left(\frac{\beta_{j0}}{A}\right)^2 \exp(At) - 2 \left(\frac{\beta_{j0}}{A}\right)^2 + \left(\frac{\beta_{j0}}{A}\right)^2 \exp(-At) + \exp(At) \right] \\ &= \frac{1}{\beta_{j0}} \left\{ \exp(At) + 2 \left(\frac{\beta_{j0}}{A}\right)^2 \left[ \frac{\exp(At) - \exp(-At)}{2} - 1 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\beta_{j0}} \left[ \exp(At) + 2 \left(\frac{\beta_{j0}}{A}\right)^2 (\cosh(A) - 1) \right] \\ \alpha_j^2 &= \frac{1}{\beta_{j0}} \left[ \exp(At) + 2 \left(\frac{\beta_{j0}}{A}\right)^2 \cdot 2 \sinh^2 \left(\frac{A}{2}\right) \right], \\ \Rightarrow \alpha_j^2 &= \alpha_{j0}^2 \left[ \exp(At) + \left(\frac{\beta_{j0}}{A}\right)^2 \sinh^2 \left(\frac{A}{2}\right) \right]. \quad (\text{C.18}) \end{aligned}$$

Luego de hacer la derivada temporal del resultado anterior y un par de sencillas operaciones, la otra expresión importante es

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} &= \frac{1}{2\alpha_j^2} \frac{d\alpha_j^2}{dt} = \frac{\alpha_{j0}^2 \left[ A \exp(At) + 2 \frac{A}{2} \left(\frac{\beta_{j0}}{A}\right)^2 \sinh \left(\frac{A}{2}\right) \cosh \left(\frac{A}{2}\right) \right]}{2\alpha_{j0}^2 \left[ \exp(At) + \left(\frac{\beta_{j0}}{A}\right)^2 \sinh^2 \left(\frac{A}{2}\right) \right]}, \\ \Rightarrow \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} &= \frac{A}{2} \frac{\exp(At) + \left(\frac{\beta_{j0}}{A}\right)^2 \sinh \left(\frac{A}{2}\right) \cosh \left(\frac{A}{2}\right)}{\left[ \exp(At) + \left(\frac{\beta_{j0}}{A}\right)^2 \sinh^2 \left(\frac{A}{2}\right) \right]}. \quad (\text{C.19}) \end{aligned}$$

Ahora, se observa el comportamiento para  $\gamma \sim \omega_c$  (es decir, en resonancia  $A \ll 1$ ) de las Ecs. (C.18) y (C.19),

$$\begin{aligned} \alpha_j^2 &\sim \alpha_{j0}^2 \left[ 1 + \left( \frac{\beta_{j0}}{\frac{A}{2}} \right)^2 \left( \frac{A}{2} t \right)^2 \right] = \alpha_{j0}^2 [1 + \beta_{j0}^2 t^2] \\ &\Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \omega_c} \alpha_j^2 = \alpha_{j0}^2 [1 + \beta_{j0}^2 t^2]. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Y,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} &\sim \frac{A}{2} \left[ \frac{1 + \left( \frac{\beta_{j0}}{\frac{A}{2}} \right)^2 \left( \frac{A}{2} t \right)^2}{1 + \beta_{j0}^2 t^2} \right] = \frac{A}{2} \left( \frac{1 + \frac{\beta_{j0}^2 t}{\frac{A}{2}}}{1 + \beta_{j0}^2 t^2} \right) = \frac{\frac{A}{2} + \beta_{j0}^2 t}{1 + \beta_{j0}^2 t^2}, \\ &\Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \omega_c} \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} = \beta_{j0} \frac{\beta_{j0} t}{1 + (\beta_{j0} t)^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

C.2.2  $\gamma = \omega_c \Rightarrow A = 0$

$$\begin{aligned} \frac{2\hbar}{m} y_j &= \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} - \frac{\omega_c}{2} + i \frac{1}{\alpha_j^2} = -\frac{\omega_c}{2} + \frac{2\hbar}{m} v_j, \\ \Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_j &= \frac{2\hbar}{m} (v_{jR} + i v_{jI}) = \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} + i \frac{1}{\alpha_j^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Sea nuevamente  $\beta_j = (1/\alpha_j^2)$  y  $t = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{2\hbar}{m} v_{j0} &= \left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 + i \beta_{j0}, \\ \Rightarrow \frac{1}{\frac{2\hbar}{m} v_{j0}} &= \frac{1}{\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 + i \beta_{j0}} = \frac{\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 - i \beta_{j0}}{\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0^2 + \beta_{j0}^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Tomando por condición inicial,

$$\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 = 0, \Rightarrow \frac{1}{\frac{2\hbar}{m} v_{j0}} = -i \frac{1}{\beta_{j0}}. \quad (\text{C.24})$$

Se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{2\hbar}{m} v_j(t) &= \frac{A}{\left( 1 - \frac{iA}{\beta_{j0}} \right) \exp(At) - 1}, \\ \Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_{jI}(t) &= \frac{\frac{A^2}{\beta_{j0}^2} \exp(At)}{\left[ \exp(At) - 1 \right]^2 + \frac{A^2}{\beta_{j0}^2} \exp(2At)} \\ &\sim \frac{\frac{A^2}{\beta_{j0}^2} (1 + At)}{(-At)^2 + \frac{A^2}{\beta_{j0}^2} (1 + 2At)} = \frac{\beta_{j0} + \beta_{j0} At}{\beta_{j0}^2 t^2 + 1 + 2A^2 t}, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_j^2 = \frac{1}{\frac{2\hbar}{m} v_{jI}(t) + \frac{\hbar}{2}} \sim \frac{1}{\frac{\beta_{j0} + \beta_{j0} A t}{\beta_{j0}^2 + 1 + 2A t} + \frac{\hbar}{2}},$$

$$\Rightarrow \lim_{A \rightarrow 0} \alpha_j^2 = \alpha_{j0}^2 (1 + \beta_{j0}^2 t^2), \quad (\text{C.25})$$

**C.2.3**  $\gamma < \omega_c \Rightarrow A = +i\bar{\omega}$

$$\frac{2\hbar}{m} Y_j = \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} + i \frac{1}{\alpha_j^2} = \frac{A}{2} + \frac{2\hbar}{m} v_j$$

$$\Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_j = \frac{2\hbar}{m} (v_{jR} + i v_{jI}) = \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} + i \left( \frac{1}{\alpha_j^2} - \frac{\bar{\omega}}{2} \right) \quad (\text{C.26})$$

Con  $\beta_j = (1/\alpha_j^2) y \ t = 0$ , entonces

$$\frac{2\hbar}{m} v_{j0} = \left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 + i \left( \beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2} \right),$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{2\hbar}{m} v_{j0}} = \frac{1}{\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 + i \left( \beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2} \right)} = \frac{\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 - i \left( \beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2} \right)}{\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0^2 + \left( \beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2} \right)^2}. \quad (\text{C.27})$$

Luego, escogiendo

$$\left( \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} \right)_0 = 0, \Rightarrow \frac{1}{\frac{2\hbar}{m} v_{j0}} = -i \frac{1}{\left( \beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2} \right)}, \quad (\text{C.28})$$

y sustituyendo los resultados pertinentes en la Ec. (3.28),

$$\Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_j(t) = \frac{1}{\left( \frac{1}{\bar{\omega}} - \frac{t}{\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2}} \right) \exp(i\bar{\omega}t) - \frac{1}{\bar{\omega}}}$$

$$= \frac{1}{\left( -\frac{1}{\bar{\omega}} - \frac{t}{\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2}} \right) [\cos(\bar{\omega}t) + i \sin(\bar{\omega}t)] + \frac{1}{\bar{\omega}}}$$

$$= \frac{1}{-i \left( \frac{1}{\bar{\omega}} + \frac{1}{\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2}} \right) \cos(\bar{\omega}t) + \left( \frac{1}{\bar{\omega}} + \frac{1}{\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2}} \right) \sin(\bar{\omega}t) + i \frac{1}{\bar{\omega}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\beta_{j0} + \frac{\bar{\omega}}{2}}{\bar{\omega}(\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2})} \sin(\bar{\omega}t) + i \left[ \frac{1}{\bar{\omega}} - \frac{\beta_{j0} + \frac{\bar{\omega}}{2}}{\bar{\omega}(\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2})} \cos(\bar{\omega}t) \right]},$$

$$\Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_{jI}(t) = - \frac{\frac{1}{\bar{\omega}} - \frac{\beta_{j0} + \frac{\bar{\omega}}{2}}{\bar{\omega}(\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2})} \cos(\bar{\omega}t)}{\left[ \frac{\beta_{j0} + \frac{\bar{\omega}}{2}}{\bar{\omega}(\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2})} \right]^2 \sin^2(\bar{\omega}t) + \left[ \frac{1}{\bar{\omega}} - \frac{\beta_{j0} + \frac{\bar{\omega}}{2}}{\bar{\omega}(\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2})} \cos(\bar{\omega}t) \right]^2}$$

$$= - \frac{\frac{1}{\bar{\omega}} - \frac{\beta_{j0} + \frac{\bar{\omega}}{2}}{\bar{\omega}(\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2})} \cos(\bar{\omega}t)}{\frac{(\beta_{j0} + \frac{\bar{\omega}}{2})^2}{\bar{\omega}^2 (\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2})^2} \sin^2(\bar{\omega}t) + \frac{1}{\bar{\omega}^2} + \frac{(\beta_{j0} + \frac{\bar{\omega}}{2})^2}{\bar{\omega}^2 (\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2})^2} \cos^2(\bar{\omega}t) - \frac{(\beta_{j0} + \frac{\bar{\omega}}{2}) \cos(\bar{\omega}t)}{\bar{\omega}^2 (\beta_{j0} - \frac{\bar{\omega}}{2})}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2\hbar}{m} v_{j1}(t) &= -\frac{\frac{1}{\omega} - \frac{\beta_{j0} + \frac{\omega}{2}}{\omega(\beta_{j0} - \frac{\omega}{2})} \cos(\omega t)}{\frac{(\beta_{j0} + \frac{\omega}{2})^2}{\omega^2(\beta_{j0} - \frac{\omega}{2})^2} + \frac{1}{\omega^2} - \frac{(\beta_{j0} + \frac{\omega}{2}) \cos(\omega t)}{\frac{\omega^2}{2}(\beta_{j0} - \frac{\omega}{2})}} \\
&= -\frac{\frac{(\beta_{j0} - \frac{\omega}{2}) - (\beta_{j0} + \frac{\omega}{2}) \cos(\omega t)}{\omega(\beta_{j0} - \frac{\omega}{2})}}{\frac{(\beta_{j0} + \frac{\omega}{2})^2 + (\beta_{j0} - \frac{\omega}{2})^2 - 2(\beta_{j0}^2 - (\frac{\omega}{2})^2) \cos(\omega t)}{\omega^2(\beta_{j0} - \frac{\omega}{2})^2}} \\
&= -\frac{\omega(\beta_{j0} - \frac{\omega}{2})^2 - \omega[\beta_{j0}^2 - (\frac{\omega}{2})^2] \cos(\omega t)}{2[\beta_{j0}^2 + (\frac{\omega}{2})^2] - 2[\beta_{j0}^2 - (\frac{\omega}{2})^2] \cos(\omega t)}, \\
\Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_{j1}(t) + \frac{\tilde{\omega}}{2} &= \frac{-\tilde{\omega}[\beta_{j0}^2 + (\frac{\omega}{2})^2 - \beta_{j0}\tilde{\omega}] + \tilde{\omega}[\beta_{j0}^2 - (\frac{\omega}{2})^2] \cos(\omega t)}{2[\beta_{j0}^2 + (\frac{\omega}{2})^2] - 2[\beta_{j0}^2 - (\frac{\omega}{2})^2] \cos(\omega t)} \\
&\quad + \frac{2\tilde{\omega}[\beta_{j0}^2 + (\frac{\omega}{2})^2] - 2\tilde{\omega}[\beta_{j0}^2 - (\frac{\omega}{2})^2] \cos(\omega t)}{2\{2[\beta_{j0}^2 + (\frac{\omega}{2})^2] - 2[\beta_{j0}^2 - (\frac{\omega}{2})^2] \cos(\omega t)\}} \\
&= \frac{\beta_{j0}\tilde{\omega}^2}{2[\beta_{j0}^2 + (\frac{\omega}{2})^2] - 2[\beta_{j0}^2 - (\frac{\omega}{2})^2] \cos(\omega t)} \\
&= \frac{\beta_{j0}\tilde{\omega}^2}{2\beta_{j0}^2[1 - \cos(\omega t)] + \frac{\omega^2}{2}[1 + \cos(\omega t)]}, \\
\Rightarrow \frac{2\hbar}{m} v_{j1}(t) + \frac{\tilde{\omega}}{2} &= \frac{\beta_{j0}\tilde{\omega}^2}{2\beta_{j0}^2 2 \sin^2(\frac{\omega t}{2}) + \frac{\omega^2}{2} 2 \cos^2(\frac{\omega t}{2})}. \tag{C.29}
\end{aligned}$$

Así que de la Ec. (C.26), se consigue

$$\begin{aligned}
\alpha_j^2 &= \frac{2\beta_{j0}^2 2 \sin^2(\frac{\omega t}{2}) + \frac{\omega^2}{2} 2 \cos^2(\frac{\omega t}{2})}{\beta_{j0}\tilde{\omega}^2} \\
&= \frac{\beta_{j0}}{(\frac{\omega}{2})^2} \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \frac{1}{\beta_{j0}} \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \\
\Rightarrow \alpha_j^2 &= \alpha_{j0}^2 \left\{ \beta_{j0}^2 \left[ \frac{\sin(\frac{\omega t}{2})}{\frac{\omega}{2}} \right]^2 + \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right\}, \tag{C.30}
\end{aligned}$$

y en consecuencia, para  $\dot{\alpha}_j/\alpha_j$  se encuentra

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} &= \frac{\frac{d\alpha_j^2}{dt}}{2\alpha_j^2} = \frac{\frac{1}{\beta_{j0}} \left\{ 2\beta_{j0}^2 \frac{\sin(\frac{\omega t}{2})}{(\frac{\omega}{2})^2} \cos(\frac{\omega t}{2}) \frac{\omega}{2} - 2 \cos(\frac{\omega t}{2}) \sin(\frac{\omega t}{2}) \frac{\omega}{2} \right\}}{2 \frac{1}{\beta_{j0}} \left\{ \beta_{j0}^2 \left[ \frac{\sin(\frac{\omega t}{2})}{\frac{\omega}{2}} \right]^2 + \cos^2(\frac{\omega t}{2}) \right\}} \\
&= \frac{\frac{2\beta_{j0}^2}{\omega} \sin(\frac{\omega t}{2}) \cos(\frac{\omega t}{2}) - \tilde{\omega} \cos(\frac{\omega t}{2}) \sin(\frac{\omega t}{2})}{2 \left\{ \beta_{j0}^2 \left[ \frac{\sin(\frac{\omega t}{2})}{\frac{\omega}{2}} \right]^2 + \cos^2(\frac{\omega t}{2}) \right\}},
\end{aligned}$$



$$\Rightarrow \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} = \frac{\left(\frac{2\beta_{j0}^2}{\hbar} - \bar{\omega}\right) \cos\left(\frac{\bar{\omega}t}{2}\right) \sin\left(\frac{\bar{\omega}t}{2}\right)}{2 \left\{ \beta_{j0}^2 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\bar{\omega}t}{2}\right)}{\hbar} \right]^2 + \cos^2\left(\frac{\bar{\omega}t}{2}\right) \right\}} \quad (\text{C.31})$$

En la evolución de las Ecs. (C.30) y (C.31) para  $\bar{\omega} \ll 1$  se obtienen los resultados

$$\alpha_j^2 \sim \alpha_{j0}^2 [\beta_{j0}^2 t^2 + 1] \Rightarrow \lim_{\bar{\omega} \rightarrow 0} \alpha_j^2 = \alpha_{j0}^2 [\beta_{j0}^2 t^2 + 1].$$

Y,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} &\sim \frac{\left(\frac{2\beta_{j0}^2}{\hbar} - \bar{\omega}\right) \left(\frac{\bar{\omega}t}{2}\right)}{2 (\beta_{j0}^2 t^2 + 1)} = \frac{\left(2\beta_{j0}^2 - \frac{\bar{\omega}^2}{2}\right) t}{2 (\beta_{j0}^2 t^2 + 1)} \\ &\Rightarrow \lim_{\bar{\omega} \rightarrow 0} \frac{\dot{\alpha}_j}{\alpha_j} = \beta_{j0} \frac{\beta_{j0} t}{1 + (\beta_{j0} t)^2} \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

### C.3 Fricción en las corrientes

De la EFP (1.41)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{J}_D = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_{\perp}) - \sum_{k,j=1}^2 \nabla_{k_j} \mathbf{J}(D_{k_j} \rho) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_{\perp}) - \sum_{k,j=1}^2 D_{k_j} \nabla_{k_j} \rho(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

donde  $\mathbf{J}_D = -D_{k_j} \nabla_{k_j} \rho$ , de esto sigue que

$$\mathbf{J}_D = \mathbf{v}_{D \perp} \rho \Rightarrow \mathbf{v}_{D \perp} = -\hat{D} \frac{\nabla \rho}{\rho}. \quad (\text{C.34})$$

Ahora se calculando la densidad  $\rho = \Psi_{W P \perp}^* \Psi_{W P \perp}$  a partir de la Ec. (3.8)

$$\begin{aligned} \Psi_{W P \perp}^* \Psi_{W P \perp} &= \\ &= [N(t)]^2 \exp \left[ \begin{array}{cccc} -iY_x^*(t)\bar{x}^2 & -\frac{i}{\hbar} L_x(t)\bar{x} & -iY_y^*(t)(t)\bar{y}^2 & -\frac{i}{\hbar} L_y(t)\bar{y} & -iK(t) \\ +iY_x(t)\bar{x}^2 & +\frac{i}{\hbar} L_x(t)\bar{x} & +iY_y(t)(t)\bar{y}^2 & +\frac{i}{\hbar} L_y(t)\bar{y} & +iK(t) \end{array} \right], \\ &\Rightarrow \Psi_{W P \perp}^* \Psi_{W P \perp} = [N(t)]^2 \exp(-2Y_{xi}\bar{x}^2 - 2Y_{yi}\bar{y}^2). \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Pero, recuérdese que  $(2\hbar/m)Y_{ji} = (1/\alpha_j^2)$  y  $[N(t)]^2 = \left(\sqrt{2\pi(\bar{x}^2)}\sqrt{2\pi(\bar{y}^2)}\right)^{-1}$

$$\Rightarrow \Psi_{W P \perp}^* \Psi_{W P \perp} = [N(t)]^2 \exp\left(-\frac{m}{\hbar} \frac{1}{\alpha_x^2} \bar{x}^2 - \frac{m}{\hbar} \frac{1}{\alpha_y^2} \bar{y}^2\right) = [N(t)]^2 \exp(\phi),$$

donde  $\phi = -(m/\hbar)(1/\alpha_x^2)\bar{x}^2 - (m/\hbar)(1/\alpha_y^2)\bar{y}^2$ . Con lo cual, el gradiente de la densidad es

$$\begin{aligned} \nabla(\Psi_{W P \perp}^* \Psi_{W P \perp}) &= [N(t)]^2 \left( -\frac{2m}{\hbar} \frac{1}{\alpha_x^2} \bar{x} \hat{i} - \frac{2m}{\hbar} \frac{1}{\alpha_y^2} \bar{y} \hat{j} \right) \exp(\phi), \\ &\Rightarrow \frac{\nabla \rho}{\rho} = \frac{\nabla(\Psi_{W P \perp}^* \Psi_{W P \perp})}{\Psi_{W P \perp}^* \Psi_{W P \perp}} = -\frac{2m}{\hbar} \frac{1}{\alpha_x^2} \bar{x} \hat{i} - \frac{2m}{\hbar} \frac{1}{\alpha_y^2} \bar{y} \hat{j}. \end{aligned}$$

Y expresando la velocidad de difusión en vector columna, se consigue

$$\Rightarrow v_{D\perp} = \hat{D} \begin{bmatrix} -\frac{2m}{\hbar} \frac{1}{\alpha^2} \bar{x} \\ -\frac{2m}{\hbar} \frac{1}{\alpha^2} \bar{y} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.36})$$

De la condición de separación

$$-D \frac{\Delta \rho}{\rho} = \gamma (\ln \rho - \langle \ln \rho \rangle),$$

los elementos de la diagonal del tensor de difusión son los únicos distintos de cero. En una dimensión la densidad de materia es de la forma

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \bar{x}^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{2 \langle \bar{x}^2 \rangle}\right). \quad (\text{C.37})$$

De aquí que

$$\begin{aligned} -D \frac{\Delta \rho}{\rho} &= \gamma (\ln \rho - \langle \ln \rho \rangle), \\ \Rightarrow -\frac{D}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} &= \gamma (\ln \rho - \langle \ln \rho \rangle), \\ \Rightarrow \nabla \rho &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \bar{x}^2 \rangle}} \left(-\frac{\bar{x}}{\langle \bar{x}^2 \rangle}\right) \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{2 \langle \bar{x}^2 \rangle}\right), \\ \Rightarrow \Delta \rho &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \bar{x}^2 \rangle}} \left(-\frac{\bar{x}^2}{\langle \bar{x}^2 \rangle^2} - \frac{1}{\langle \bar{x}^2 \rangle}\right) \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{2 \langle \bar{x}^2 \rangle}\right), \\ \Rightarrow \frac{1}{\rho} \Delta \rho &= \left(-\frac{\bar{x}^2}{\langle \bar{x}^2 \rangle^2} - \frac{1}{\langle \bar{x}^2 \rangle}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \gamma (\ln \rho - \langle \ln \rho \rangle) &= \left[ \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \bar{x}^2 \rangle}} \right) - \frac{\bar{x}^2}{2 \langle \bar{x}^2 \rangle} - \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \bar{x}^2 \rangle}} \right) + \frac{\langle \bar{x}^2 \rangle}{2 \langle \bar{x}^2 \rangle} \right] \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{\bar{x}^2}{2 \langle \bar{x}^2 \rangle} \right), \\ \Rightarrow -D \frac{\bar{x}^2 - \langle \bar{x}^2 \rangle}{\langle \bar{x}^2 \rangle^2} &= \frac{\gamma \langle \bar{x}^2 \rangle - \bar{x}^2}{2 \langle \bar{x}^2 \rangle} \\ \Rightarrow D &= \frac{1}{2} \gamma \langle \bar{x}^2 \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Generalizando el resultado anterior al tensor de difusión se tiene que

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \frac{1}{2} \gamma \langle \bar{x}^2 \rangle \\ D_{yy} &= \frac{1}{2} \gamma \langle \bar{y}^2 \rangle \\ \Rightarrow \hat{D} &= \frac{1}{2} \gamma \begin{bmatrix} \langle \bar{x}^2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle \bar{y}^2 \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

### C.4 Energía cuántica

Ahora se muestra el desarrollo para encontrar la expresión de la energía cuántica ( $E_0$ ), Ec. (3.78), empleando la función (3.8) en el cálculo de los diferentes valores esperados.

$$\begin{aligned}
 \langle p_x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right) \Psi \, dx dy \\
 &= N_z^2 \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -iY_z^* \tilde{x}^2 - \frac{i}{\hbar} L_x \tilde{x} \right) \left( 2iY_z \tilde{x} + \frac{i}{\hbar} L_x \right) \times \\
 &\quad \times \exp \left( iY_z \tilde{x}^2 + \frac{i}{\hbar} L_x \tilde{x} \right) d\tilde{x} \\
 &= N_z^2 \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \left( 2iY_z \tilde{x} + \frac{i}{\hbar} L_x \right) \exp \left[ i(Y_z - Y_z^*) \tilde{x}^2 \right] \\
 &= N_z^2 L_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2Y_{zI} \tilde{x}^2) d\tilde{x} \\
 &= N_z^2 L_x \sqrt{\frac{\pi}{2Y_{zI}}} = \sqrt{\frac{2Y_{zI}}{\pi}} L_x \sqrt{\frac{\pi}{2Y_{zI}}} = L_x \\
 &\Rightarrow \langle p_x \rangle = L_x.
 \end{aligned} \tag{C.41}$$

Y por simetría,

$$\langle p_y \rangle = L_y. \tag{C.42}$$

$$\begin{aligned}
 \langle p_x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right) \Psi \, dx dy \\
 &= N_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -iY_z^* \tilde{x}^2 - \frac{i}{\hbar} L_x \tilde{x} \right) \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right) \exp \left( iY_z \tilde{x}^2 + \frac{i}{\hbar} L_x \tilde{x} \right) d\tilde{x} \\
 &= -\hbar^2 N_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -iY_z^* \tilde{x}^2 - \frac{i}{\hbar} L_x \tilde{x} \right) \times \\
 &\quad \times \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[ \left( 2iY_z \tilde{x} + \frac{i}{\hbar} L_x \right) \exp \left( iY_z \tilde{x}^2 + \frac{i}{\hbar} L_x \tilde{x} \right) \right] d\tilde{x} \\
 &= -\hbar^2 N_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -iY_z^* \tilde{x}^2 - \frac{i}{\hbar} L_x \tilde{x} \right) \times \\
 &\quad \times \left( -4iY_z \tilde{x}^2 - \frac{1}{\hbar^2} L_x^2 - \frac{4}{\hbar} L_x Y_z \tilde{x} + 2iY_z \right) \exp \left( iY_z \tilde{x}^2 + \frac{i}{\hbar} L_x \tilde{x} \right) d\tilde{x} \\
 &= -\hbar^2 N_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2Y_{zI} \tilde{x}^2) (-4Y_z^2 \tilde{x}^2) d\tilde{x} \\
 &\quad + \hbar^2 N_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2Y_{zI} \tilde{x}^2) \left( \frac{1}{\hbar^2} L_x^2 \right) d\tilde{x} \\
 &\quad + \hbar^2 N_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x} \exp(-2Y_{zI} \tilde{x}^2) \left( \frac{4}{\hbar} L_x Y_z \right) d\tilde{x} \\
 &\quad + \hbar^2 N_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} 2iY_z \exp(-2Y_{zI} \tilde{x}^2) d\tilde{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4\hbar^2 N_x^2 Y_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}^2 \exp(-2Y_{xI} \bar{x}^2) d\bar{x} + N_x^2 L_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x} \exp(-2Y_{xI} \bar{x}^2) d\bar{x} \\
 &\quad - 2i\hbar^2 N_x^2 Y_x \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x} \exp(-2Y_{xI} \bar{x}^2) d\bar{x} \\
 &= 4\hbar^2 N_x^2 Y_x^2 \left(\frac{2}{4 \cdot 2Y_{xI}}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2Y_{xI}}} + L_x^2 N_x^2 \sqrt{\frac{\pi}{2Y_{xI}}} - 2i\hbar^2 N_x^2 Y_x \sqrt{\frac{\pi}{2Y_{xI}}} \\
 &\Rightarrow \langle p_x^2 \rangle = \frac{\hbar^2 Y_x^2}{Y_{xI}} + L_x^2 - 2i\hbar^2 Y_x, \tag{C.43}
 \end{aligned}$$

análogamente,

$$\langle p_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2 Y_y^2}{Y_{yI}} + L_y^2 - 2i\hbar^2 Y_y, \tag{C.44}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \langle \bar{p}_x^2 \rangle &= \langle p_x^2 \rangle - (p_x)^2 \\
 &= \frac{\hbar^2 Y_x^2}{Y_{xI}} + L_x^2 - 2i\hbar^2 Y_x - L_x^2 \\
 &= \frac{\hbar^2 Y_x^2}{Y_{xI}} - 2i\hbar^2 Y_x \\
 &= \frac{\hbar^2 (Y_{xR} + iY_{xI})^2}{Y_{xI}} - 2i\hbar^2 (Y_{xR} + iY_{xI}) \frac{Y_{xI}}{Y_{xI}} \\
 &= \frac{\hbar^2 Y_{xR}^2 - \hbar^2 Y_{xI}^2 + 2\hbar^2 iY_{xR}Y_{xI} - 2i\hbar^2 Y_{xR}Y_{xI} + 2\hbar^2 Y_{xI}^2}{Y_{xI}} \\
 &= \frac{\hbar^2 Y_{xR}^2 + \hbar^2 Y_{xI}^2}{Y_{xI}}, \\
 \Rightarrow \langle \bar{p}_x^2 \rangle &= \frac{\hbar^2 (Y_{xR}^2 + Y_{xI}^2)}{Y_{xI}}, \tag{C.45}
 \end{aligned}$$

y por similitud

$$\Rightarrow \langle \bar{p}_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2 (Y_{yR}^2 + Y_{yI}^2)}{Y_{yI}}. \tag{C.46}$$

Con  $j = x, y$ , y sustituyendo las expresiones para  $Y_{jR}$  y  $Y_{jI}$  de (3.36) y (3.39) se tiene que,

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{p}_j^2 \rangle &= \hbar^2 \left(\frac{m}{2\hbar}\right)^2 \left[ \frac{\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_j} - \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{1}{\alpha_j^2}}{\frac{m}{2\hbar} \frac{1}{\alpha_j^2}} \right] \\
 &= \left(\frac{\hbar m}{2}\right) \left( \frac{\frac{\alpha_j^2}{\alpha_j^2} + \frac{\gamma^2}{4} - \gamma \frac{\alpha_j}{\alpha_j} + \frac{1}{\alpha_j^2}}{\frac{1}{\alpha_j^2}} \right) \\
 &= \frac{\hbar m}{2} \left\{ \alpha_j^2 \left[ \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_j}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{4} - \gamma \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_j}\right) \right] + \frac{1}{\alpha_j^2} \right\}, \\
 \Rightarrow \langle \bar{p}_j^2 \rangle &= \frac{\hbar m}{2} \left\{ \alpha_j^2 \left[ \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_j}\right) - \frac{\gamma}{2} \right]^2 + \frac{1}{\alpha_j^2} \right\}. \tag{C.47}
 \end{aligned}$$

Ahora, a partir de las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp) &= -\frac{1}{2}(B\bar{y} + B\eta_y)\hat{i} + \frac{1}{2}(B\bar{x} + B\eta_x)\hat{j}, \\ |\mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp)|^2 &= \frac{B^2}{4}\bar{y}^2 + \frac{B^2}{4}\eta_y^2 + \frac{B^2}{2}\eta_y\bar{y} + \frac{B^2}{4}\bar{x}^2 + \frac{B^2}{4}\eta_x^2 + \frac{B^2}{2}\eta_x\bar{x}, \quad (\text{C.48}) \end{aligned}$$

se calcula  $\langle \bar{A}_j^2 \rangle = \langle A_j^2 \rangle - \langle A_j \rangle^2$ . Esto es,

$$\begin{aligned} \langle A_x \rangle &= -\frac{B}{2}\eta_y, & \langle A_y \rangle &= \frac{B}{2}\eta_x, \\ \langle A_x^2 \rangle &= \frac{B^2}{4}\langle \bar{y}^2 \rangle + \frac{B^2}{4}\eta_y^2, & \langle A_y^2 \rangle &= \frac{B^2}{4}\langle \bar{x}^2 \rangle + \frac{B^2}{4}\eta_x^2, \\ \Rightarrow \langle \bar{A}_x^2 \rangle &= \frac{B^2}{4}\langle \bar{y}^2 \rangle, & \langle \bar{A}_y^2 \rangle &= \frac{B^2}{4}\langle \bar{x}^2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

$$\begin{aligned} \langle E_q \rangle &= \frac{1}{2m} \frac{\hbar m}{2} \left\{ \alpha_x^2 \left[ \left( \frac{\partial_x}{\alpha_x} \right) - \frac{\gamma}{2} \right]^2 + \frac{1}{\alpha_x^2} \right\} + \frac{1}{2m} \frac{qB^2}{2c} \langle \bar{y}^2 \rangle \\ &+ \frac{1}{2m} \frac{\hbar m}{2} \left\{ \alpha_y^2 \left[ \left( \frac{\partial_y}{\alpha_y} \right) - \frac{\gamma}{2} \right]^2 + \frac{1}{\alpha_y^2} \right\} + \frac{1}{2m} \frac{qB^2}{2c} \langle \bar{x}^2 \rangle \quad (\text{C.50}) \end{aligned}$$

Por último se sustituye  $\langle \bar{j}^2 \rangle = (\hbar/2m)\alpha_j^2$ . Para continuar con el cálculo de la dispersión de la energía cuántica (3.101), se tienen los siguientes resultados.

$$\langle p_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi \, dx dy, \quad (\text{C.51})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Psi &= -\frac{\hbar^3}{i} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} = -\frac{\hbar^3 N}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \\ &= -\frac{\hbar^3 N}{i} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( -4Y_z^2 \bar{x}^2 - \frac{1}{\hbar^2} L_z^2 - \frac{4}{\hbar} L_x Y_z \bar{x} + 2iY_x \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left( iY_x \bar{x}^2 + \frac{i}{\hbar} L_x \bar{x} \right) \right] \quad (\text{C.52}) \\ &= -\frac{\hbar^3 N}{i} \left( \begin{array}{l} -8Y_z^2 \bar{x} - \frac{4}{\hbar} L_x Y_x - 8iY_z^2 \bar{x}^3 - \frac{2i}{\hbar} L_z^2 Y_x \bar{x} \\ -\frac{8i}{\hbar} L_x Y_z^2 \bar{x}^2 - 4Y_z^2 \bar{x} - \frac{4i}{\hbar} L_x Y_z^2 \bar{x}^2 - \frac{4i}{\hbar} L_z^2 \\ -\frac{4i}{\hbar} L_z^2 Y_x \bar{x} - \frac{4}{\hbar} L_x Y_x - \frac{2}{\hbar} L_x Y_x \end{array} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left( iY_x \bar{x}^2 + \frac{i}{\hbar} L_x \bar{x} \right) \\ &= -\frac{\hbar^3 N}{i} \left[ -8iY_z^2 \bar{x}^3 - \frac{12i}{\hbar} L_x Y_z^2 \bar{x}^2 - \left( \frac{6i}{\hbar^2} L_z^2 Y_x + 12Y_z^2 \right) \bar{x} - \frac{6}{\hbar} L_x Y_x - \frac{i}{\hbar^3} L_z^3 \right] \\ &\quad \times \exp \left( iY_x \bar{x}^2 + \frac{i}{\hbar} L_x \bar{x} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle p_x^2 \rangle &= \int_{\infty}^{\infty} N_x^2 \exp \left( -iY_x \bar{x}^2 - \frac{i}{\hbar} L_x \bar{x} \right) \times \\ &\quad \times \left[ -8iY_z^2 \bar{x}^3 - \frac{12i}{\hbar} L_x Y_z^2 \bar{x}^2 - \left( \frac{6i}{\hbar^2} L_x Y_x + 12Y_z^2 \right) \bar{x} - \frac{6}{\hbar} L_x Y_x - \frac{i}{\hbar^3} L_z^3 \right] \times \\ &\quad \times \exp \left( iY_x \bar{x}^2 + \frac{i}{\hbar} L_x \bar{x} \right) dx \\ &= -\frac{\hbar^3}{i} N_x^2 \left[ -\frac{12i}{\hbar} L_x Y_z^2 \frac{1}{4Y_{z1}} \sqrt{\frac{\pi}{2Y_{z1}}} - \left( \frac{6}{\hbar} L_x Y_x + \frac{i}{\hbar^3} L_z^3 \right) \sqrt{\frac{\pi}{2Y_{z1}}} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle p_x^2 \rangle = -\frac{\hbar^3}{i} \left( -\frac{3i}{\hbar} L_x Y_x^2 \frac{1}{Y_{z1}} - \frac{6}{\hbar} L_x Y_x - \frac{i}{\hbar^3} L_x^3 \right) \quad (\text{C.53})$$

$$\langle p_x^4 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^4 \Psi dx dy, \quad (\text{C.54})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^4 \Psi &= \hbar^4 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ -8iY_x^2 \bar{x}^3 - \frac{12i}{\hbar} L_x Y_x^2 \bar{x}^2 - \left( \frac{6i}{\hbar^2} L_x^2 Y_x + 12Y_x^2 \right) \bar{x} - \frac{6}{\hbar} L_x Y_x - \frac{i}{\hbar^3} L_x^3 \right] \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left( iY_x \bar{x}^2 + \frac{i}{\hbar} L_x \bar{x} \right) \right\} \\ &= \hbar^4 N \left[ -\left( \frac{16Y_x^4 \bar{x}^4 + \frac{32}{\hbar} L_x Y_x^3 \bar{x}^3 - (48iY_x^3 - \frac{24}{\hbar^2} L_x^2 Y_x^2) \bar{x}^2}{\hbar} - \left( 12Y_x^2 + \frac{12i}{\hbar} L_x^2 Y_x - \frac{1}{\hbar^4} L_x^4 \right) \bar{x} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left( iY_x \bar{x}^2 + \frac{i}{\hbar} L_x \bar{x} \right) \right] \times \quad (\text{C.55}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle p_x^4 \rangle = 3\hbar^4 \frac{Y_x^4}{Y_{z1}^2} + 6\hbar^4 Y_{zR}^2 + 3\hbar^4 Y_{z1}^2 + 6\hbar^2 L_x^2 \frac{Y_{zR}^2}{Y_{z1}} + 6\hbar^2 L_x^2 Y_{z1} + L_x^4 \quad (\text{C.56})$$

Por otro lado, la evolución temporal de la energía cuántica está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle E_q \rangle &= 2\frac{\hbar}{4} \left\{ \left[ \left( \dot{\alpha}_x - \frac{\gamma}{2} \alpha_x \right) \left( \dot{\alpha}_x - \frac{\gamma}{2} \alpha_x \right) - \frac{\dot{\alpha}_x}{\alpha_x^2} + \frac{\omega_c^2}{4} \alpha_x \dot{\alpha}_x \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \dot{\alpha}_y - \frac{\gamma}{2} \alpha_y \right) \left( \dot{\alpha}_y - \frac{\gamma}{2} \alpha_y \right) - \frac{\dot{\alpha}_y}{\alpha_y^2} + \frac{\omega_c^2}{4} \alpha_y \dot{\alpha}_y \right] \right\} \\ &= 2\frac{\hbar}{4} \left\{ \left[ \left( \dot{\alpha}_x - \frac{\gamma}{2} \alpha_x \right) \left( \frac{1}{\alpha_x} - \frac{\omega_c^2}{4} \alpha_x + \frac{\gamma}{4} \alpha_x - \frac{\gamma}{2} \dot{\alpha}_x \right) - \frac{\dot{\alpha}_x}{\alpha_x^2} + \frac{\omega_c^2}{4} \alpha_x \dot{\alpha}_x \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \dot{\alpha}_y - \frac{\gamma}{2} \alpha_y \right) \left( \frac{1}{\alpha_y} - \frac{\omega_c^2}{4} \alpha_y + \frac{\gamma}{4} \alpha_y - \frac{\gamma}{2} \dot{\alpha}_y \right) - \frac{\dot{\alpha}_y}{\alpha_y^2} + \frac{\omega_c^2}{4} \alpha_y \dot{\alpha}_y \right] \right\} \\ &= -\frac{7\hbar}{4} \left[ \left( \dot{\alpha}_x - \frac{\gamma}{2} \alpha_x \right)^2 + \frac{1}{\alpha_x^2} - \frac{\omega_c^2}{4} \alpha_x^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \dot{\alpha}_y - \frac{\gamma}{2} \alpha_y \right)^2 + \frac{1}{\alpha_y^2} - \frac{\omega_c^2}{4} \alpha_y^2 \right] \quad (\text{C.57}) \end{aligned}$$

# Bibliografía

- [1] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation: Methods of solution and Applications*. 2<sup>o</sup> ed. Springer-Verlag, Berlin (1989)
- [2] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. 2<sup>o</sup> ed. Addison-Wesley, EE.UU. (1980)
- [3] E. Kanai, *Progr. Theor. Phys.* 3, 440 (1948)
- [4] W. E. Brittin, *Phys. Rev.* 77, 396 (1950)
- [5] J. R. Ray, *Nuovo Cim. Lett.* 25, 47 (1979)
- [6] D. M. Greenberger, *J. Math. Phys.* 20, 762 (1969)
- [7] M. D. Kostin, *J. Chem. Phys.* 57, 3589 (1972)
- [8] E. Madelung, *Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers* Springer-Verlag, Berlin (1971)
- [9] B. Mrowka, *Z. Phys.* 130, 164 (1951)
- [10] D. Schuch, K.-M. Chung, H. Hartmann, *J. Math. Phys.* 24, 1652 (1983)
- [11] D. Schuch, K.-M. Chung, H. Hartmann, *J. Math. Phys.* 25, 3086 (1984)
- [12] D. Schuch, K.-M. Chung, H. Hartmann, *Int. J. Quantum Chem.* 25, 391 (1984)
- [13] D. Schuch, K.-M. Chung, *Int. J. Quantum Chem.* 29, 1561 (1986)
- [14] D. Schuch, *Int. J. Quantum Chem.* 45, 235 (1993)
- [15] D. Schuch, *Habilitationsschrift, Universität Frankfurt, FB Physik*, (1991)
- [16] D. Schuch, *Phys. Rev. A* 55, 935 (1997)
- [17] D. Schuch, *Phys. Lett. A* (en imprenta)
- [18] C. T. Wecker, *Master's Thesis, J.W. Goethe-Universität, Frankfurt am Main* (1993)
- [19] M. Janssen, O. Viehweger, *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*. János Hajdu, Germany (1994)
- [20] L.-D. Landau, E.-M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*. Pergamon Oxford, UK (1991)
- [21] J. Courant, *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Vol. 2. Limusa, México (1997)
- [22] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*. 3<sup>o</sup> ed. John Wiley & Sons, USA (1998)
- [23] J. Messer, *Acta Phys. Austr.* 50, 75 (1979)
- [24] F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*. McGraw-Hill, Inc. USA (1991)
- [25] J. Bialynicki-Birula and J. Mycielski, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III* 23, 461 (1975)
- [26] J. Bialynicki-Birula and J. Mycielski, *Ann. Phys. (N.Y.)* 100, 62 (1976)