14

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LOGICA DE SEGUNDO ORDEN Y REDUCCION DE LA LOGICA DE SEGUNDO ORDEN CON SEMANTICA SOBRE ESTRUCTURAS GENERALES A LOGICA DE PRIMER ORDEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

PARMENIDES GARCIA CORNEJO

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE ALFREDO AMOR MONTAÑO

OCTUBRE DE 2002

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "Lógica de segundo orden y reducción de la lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales a lógica de primer orden."

realizado por

Parménides García Cornejo

con número de cuenta 09757467-5 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. José Alfredo Amor Montaño	
Propietario	M. en C. Rafael Rojas Barbachano	
Propietario	Dra. Yolanda Torres Falcón	
Suplente	Matemático José Gabriel Ocampo Márquez	
Suplente	M. en C. María de la Asunción Preisser Rodríguez	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

Me cuesta trabajo agradecer a los que debo agradecer,
no por soberbia ni por que no los haya, sino porque no sé hacerlo
No se agradecer no porque yo haya nacido falto de corresponder,
es sólo que en el intento me parezco tan torpe.., es más bien que no me atrevo
¿Qué es entonces a lo que temo?

¿Y si a agradecer me atreviera?
¿Razones agregar debiera?

Pues entonces a mis papás agradezco
por ser ellos, por su afecto
por su trabajo y su ejemplo
por esta lengua en que les escribo
por estar siempre detrás apoyando mis signos
por los libros, la música y demás ruidos

Temo no recordar a todos los que debo agradecimiento ni todos los agradecimientos que debo
Hasta he pensado en escribir "Agradezco a" y dejar espacio para que a los que hay que agradecer y sus razones se anoten
Evitaría así la culpa de olvidar, y si culpable hubiese sería el ausente
Así, mi lista sería pasar el problema a quienes me lo provocan
(¿cómo si a ellos agradezco?)
y los adjetivos recaerían no sólo en mí, sino también en ellos
¿Seré demasiado grosero?
Temo en mis agradecimientos ser un desagradecido porque no lo soy,
porque corresponder quiero

Mis papás están conmigo en todas las lenguas
lo sé de ellos, ya ha sido, pero también lo sé de mis amigos
Mis papás son mis papás, mis papás amigos, amigos amigos; amigos papás no

Mis amigos..
¿Qué he de agradecer a mis amigos sino el ser mis amigos?
Y son tan diversos..
¿Cómo es que he de saber qué decirle a cada uno de ellos?
Cada uno de ellos es parte de una variedad que es él y nada más
Y vienen de distintos rumbos y hablan distinto y a veces ni hablan
y sé que cuento con ellos y ellos conmigo y que a menudo son tan divertidos..,
somos amigos

No sé si agradecer a los amigos que todavía no he tenido,
en la duda.., mejor agradezco a los que ya tengo,
por serlo, a los que sean como sean, también a los que son mis primos

Pretendiendo no usar ningún nombre, ahora me opondré a mí mismo, pero sin desvaríos
Agradecer debo a Alejandra
¡Tu especial presencia, tu especial aliento!

Sin saber todo lo que he de agradecer a los que ya he intentado agradecer,
hay más gente que agradezco ciertamente de manera incompleta,
Mi director de tesis, mis maestros y mis tíos son parte de ellos
me disculpo y les agradezco

Habiendo mencionado tanta gente que me ha rodeado,
falta mi hermana, la única, la mía, y le agradezco justamente esto

Parménides García Cornejo

A mamá y papá

INDICE.

CAPITULO II
ARITMÉTICA ESTÁNDAR DE SEGUNDO ORDEN Y AXIOMA DE INDUCCIÓN

CAPITULO III
LÓGICA MULTIVARIADA

CAPITULO IV
ESTRUCTURAS GENERALES

INTRODUCCIÓN

Después de estudiar los resultados básicos de la lógica de primer orden, es inmediato observar que los lenguajes que ésta estudia tienen limitaciones en su poder expresivo; así, es natural preguntarse por sistemas expresivos más poderosos que los lenguajes de primer orden y por las propiedades que pudieran tener éstos. El estudio que presentaremos justamente consistirá del estudio básico de un tipo particular de sistema expresivo más poderoso que los lenguajes de primer orden: Los lenguajes de segundo orden.

La característica fundamental que distingue a los lenguajes de segundo orden de los de primer orden es la cuantificación sobre relaciones n-arias; esto es lo primero que se desarrolla en el capítulo I (la definición rigurosa de los lenguajes de segundo orden) seguido de la semántica estándar asociada a estos lenguajes. Más adelante, también en el capítulo I, se dan ejemplos de propiedades expresables en segundo orden que no lo son en primer orden y a partir de éstas se demuestra que en la lógica estándar de segundo orden, contrariamente a la lógica de primer orden, no se cumplen los teoremas de compacidad ni de Löwenheim-Skolem. El resto del capítulo consiste principalmente en teoremas de isomorfismo entre estructuras estándar y en teoremas de homomorfismos y relaciones de congruencia; tales resultados son muy generales, sin embargo, la razón principal de su discusión es la de proporcionar teoremas que nos servirán para el estudio del ejemplo más importante que mostramos, en el capítulo II, en relación a la lógica estándar de segundo orden y la lógica de primer orden: La aritmética de Peano de segundo orden.

Son ya bastante conocidos los resultados de la existencia de modelos no estándar de la aritmética de Peano de primer orden y de la incompletud de ésta. El capítulo II inicia con un estudio de la aritmética de Peano de segundo orden con conclusiones totalmente contrastantes: La aritmética de Peano de segundo orden es categórica (todos sus modelos son isomorfos) y por lo tanto es completa (en el sentido de que si Π es el conjunto de axiomas de Peano de segundo orden de un lenguaje L_{PA^2}, entonces para todo enunciado φ de L_{PA^2}, $\Pi \models \varphi$ ó $\Pi \models \neg\varphi$). Además, este capítulo presenta un estudio del axioma de inducción de segundo orden que concluye con una caracterización de todos los modelos de este axioma; de esta caracterización es inmediato el hecho de que los tres axiomas de Peno de segundo orden son independientes entre sí y sin embargo guardan una estrecha relación: el axioma de inducción implica a la disyunción de los otros dos axiomas.

Dado que nuestro propósito en este trabajo es mostrar resultados fundamentales de la lógica de segundo orden, el capítulo III de lógica multivariada pareciera fuera de contexto. Lo que ocurre es lo siguiente: Existe una semántica alterna a la semántica estándar para los lenguajes de segundo orden, la cual es muy conocida y sin la cual nos parece este trabajo incompleto. La presentación de tal semántica no estándar (semántica sobre estructuras generales) se puede hacer sin necesidad de la lógica multivariada (capítulo IV); sin embargo, hay una relación estrecha entre la lógica de segundo orden no estándar a que da lugar la semántica no estándar mencionada, la lógica multivariada y la lógica de primer orden (específicamente: la reducción de la lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales a lógica multivariada y la reducción de la lógica multivariada a lógica de primer orden). Para poder mostrar adecuadamente tales reducciones y hacer notar que éstas implican la reducción de la lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales a lógica de primer orden, fue necesario abordar la lógica multivariada en el capítulo III. Básicamente en tal capítulo se define con rigor lo que es la lógica multivariada, se dan teoremas de isomorfismo entre estructuras multivariadas, se prueba que la lógica multivariada es reductible a lógica de primer orden y finalmente se concluye con los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem para la lógica multivariada.

Con los resultados mostrados en el capítulo III se tiene lo necesario para nuestro último estudio: el concepto de estructura general, la definición de una semántica no estándar asociada a los lenguajes de segundo orden y la reducción de la lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales a lógica multivariada. Con tal finalidad se precisa, en el capítulo IV, la noción de pre-estructura. Es sobre las pre-estructuras (de hecho, sobre toda una lógica de segundo orden con semántica basada sobre pre-estructuras) y a través de la noción de "relación paramétricamente $\mathscr{A}$-definible..." como se definen a las estructura generales; es decir, se definen las estructuras generales como una clase particular de pre-estructuras. El resto del capítulo se concentra básicamente en mostrar que la lógica de segundo orden sobre estructuras generales es reductible a lógica multivariada y que con esta semántica valen los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem; finalmente, también se muestra explícitamente cómo queda la reducción de lógica de segundo orden sobre estructuras generales a lógica de primer orden.

Todos los resultados de este trabajo (los descritos anteriormente), se exponen presuponiendo del lector solamente un estudio previo de lo fundamental de la lógica de primer orden y de la teoría de los conjuntos. Al respecto, la manera en que se presentan estos estudios es totalmente análoga a la manera usual en que se estudia por primera vez lógica de primer orden; esto no es del todo una ventaja en su lectura: hay muchas definiciones por recursión y sobre todo pruebas por inducción que pueden resultar muy áridas. Consideramos que, cuando esto este a punto de suceder, el lector siga adelante: no necesita leer con extrema minuciosidad tales pruebas a menos de que una angustia irresistible lo obligue a ello (elección que, por otro lado, el autor sintió no tener, puesto que gran parte de su trabajo consistió en mostrar detalles que a menudo son omitidos en otros textos).

CAPITULO I.

LENGUAJES DE SEGUNDO ORDEN.

Es posible obtener lenguajes con poder expresivo mayor que el de los lenguajes de primer orden que, como sabemos, no son capaces de expresar ciertas nociones como el poseer un número finito de elementos o el axioma del supremo para conjuntos parcialmente ordenados. Teniendo como motivación la búsqueda de sistemas expresivos más poderosos que los lenguajes de primer orden, construiremos los lenguajes de segundo orden, veremos ejemplos de su poder expresivo y en general, discutiremos diferencias importantes entre éstos y los lenguajes de primer orden. Tomemos como ejemplo el enunciado de primer orden $\exists x(P(x)\rightarrow\forall xP(x))$. Este enunciado es verdadero sea cual sea la interpretación del símbolo de predicado P, lo que nos podría sugerir considerar P como una variable sobre las relaciones 1-arias, cuantificar universalmente a P y obtener la fórmula: $\forall P\exists x(P(x)\rightarrow\forall xP(x))$ que nos atreveríamos a llamar "universalmente válida". Justamente lo que haremos será desarrollar un tipo de sistema expresivo –de manera análoga a como se hace con lenguajes de primer orden– en que esta idea de cuantificar sobre propiedades de individuos o sobre funciones que actúan sobre individuos quedará bien formalizada; tales sistemas expresivos serán denominados lenguajes de segundo orden y la lógica basada en ellos, la lógica de segundo orden, la abreviaremos como LSO.

SINTAXIS DE LSO

Tipo.

Cada lenguaje de segundo orden tiene un conjunto (posiblemente vacío) de constantes individuales, de constantes relacionales y de constantes funcionales; designaremos tal conjunto por **CONS.OP** y siempre se pedirá que cada elemento de este conjunto no sea sucesión de otros elementos del mismo.

Para tener un lenguaje de segundo orden particular, aparte del conjunto CONS.OP de nuestro lenguaje, necesitamos dar su tipo. Un tipo de un lenguaje de segundo orden es un par Σ=**(VAR, FUNC)**, donde VAR es el conjunto que contiene las diferentes clases de variables de nuestro lenguaje (que llamaremos tipos) y FUNC es una función cuyo dominio es CONS.OP y cuyos valores (que también llamaremos tipos) son elementos de VAR. Nosotros trabajaremos con lenguajes de segundo orden de tipo Σ=(VAR, FUNC), donde:

(i) $VAR=\{1, (0,1), (0,1,1), (0,1,1,1),...\}\cup\{(1,1),(1,1,1),....\}$

(ii) FUNC (que a veces se denota como FUNC(Σ) para hacer explícita la asociación de FUNC con Σ) es tal que:

FUNC(c)=1 para cada símbolo de constante de individuo $c\in$CONS.OP

FUNC(R)=$(0,1,..^{n}..,1)$ para cada $R\in$CONS.OP símbolo de relación n-ario, $n\in N\setminus\{0\}$.

FUNC(f)=$(1,1,..^{n}..,1)$ para cada $f\in$CONS.OP símbolo de función n-ario, $n\in N\setminus\{0\}$.

Ahora estamos listos para definir el alfabeto de nuestra clase de lenguajes de segundo orden del tipo Σ especificado. Dado un conjunto CONS.OP de símbolos de constante (individuales, relacionales o funcionales), definimos el alfabeto del lenguaje L_2 de segundo orden tipo Σ de la siguiente manera:

- Todo elemento de CONS.OP pertenece a L_2.
- Para cada elemento $\alpha \in VAR$, L_2 contiene un conjunto numerable de variables de tipo α. Explícitamente estos conjuntos son:
  Para cada $n \in N$, $n \in N \setminus \{0\}$, $R_n = \{X_i^n \mid i \in N\}$ es el conjunto de variables relacionales de aridad n de tipo $(0,1,..^n..,1) \in VAR$.
  Para cada $n \in N$, $n \in N \setminus \{0\}$, $F_n = \{D_i^n \mid i \in N\}$ es el conjunto de variables funcionales de aridad n de tipo $(1,1,..^n..,1) \in VAR$.
- $v = F_0 = \{x_i \mid i \in N\}$ es el conjunto de símbolos de variable individual (variables tipo 1).

El alfabeto de L_2 consta además de:

- Conectivos lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$,$\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- Cuantificadores: $\exists$, $\forall$.
- Paréntesis y comas como símbolos auxiliares.
- Un conjunto numerable de símbolos de igualdad $\approx_0$, $\approx_1$, $\approx_2$,...,$\approx_n$,...; estos son por definición, de tipo: $(0,1,1)$, $(0,(0,1),(0,1))$,...,$(0,(0,1,..^n..,1),(0,(0,1,..^n..,1))$,.... respectivamente. La idea es que $\approx_0$ se usará para hablar de igualdad entre individuos y para cada $i \in N \setminus \{0\}$, $\approx_i$ para igualdad entre relaciones i-arias.

Los anteriores son todos los símbolos del alfabeto de L_2.

EXPRESIONES DE L_2

Al igual que en los lenguajes de primer orden, nos interesa definir una gramática para construir fórmulas a partir de los símbolos del alfabeto de L_2. Con tal propósito definimos al lenguaje L_2 de segundo orden de tipo Σ como el conjunto de todas las sucesiones finitas de símbolos de su alfabeto; además definimos recursivamente:

Términos.

T1 Todo símbolo de variable individual es un término.
T2 Todo símbolo de constante individual es un término.
T3 Si f es un símbolo de constante funcional de aridad n, con $n \in N \setminus \{0\}$, y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, entonces $f(\tau_1,..,\tau_n)$ es un término.
T4 Si D es un símbolo de variable funcional de aridad n, con $n \in N \setminus \{0\}$, y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, entonces $D(\tau_1,..,\tau_n)$ es un término.

Definimos **TERM(L_2)** como el conjunto más pequeño obtenido con estas reglas. Frecuentemente denotaremos por **TERM** a **TERM(L_2)** cuando sea claro el lenguaje L_2 acerca del que se está hablando.

Predicados.

P1 Cualquier símbolo de variable n-ario relacional X es un predicado de grado n.
P2 Cualquier símbolo de constante n-ario relacional P, $P \in CONS.OP$ es un predicado de grado n.
P3 Los símbolos $\approx_i$ tal que $i \in N$ son símbolos de predicado de grado 2.

Definimos **PRED(L_2)** como el conjunto de los predicados. A menudo denotaremos por **PRED** a **PRED(L_2)** cuando sea claro el lenguaje L_2 del que estemos hablando.

Fórmulas.

F1 Si Π es un predicado n-ario (para n=2, Π distinto de $\approx_2$) y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, entonces $\Pi(\tau_1,..,\tau_n)$ es fórmula.
F2 Si τ_1 y τ_2 son términos, entonces $(\tau_1 \approx_0 \tau_2)$ es fórmula. Si Π y Ψ son predicados n-arios, $n \in N\setminus\{0\}$, (para n=2, Π y Ψ distintos de $\approx_2$), entonces $(\Pi \approx_n \Psi)$ es fórmula.
F3 Si φ y π son fórmulas, entonces $\varphi \vee \pi$ y $\neg\pi$ son fórmulas.
F4 Si φ es fórmula y x es un símbolo de variable individual, entonces $\exists x\varphi$ es fórmula.
F5 Si φ es fórmula y X es un símbolo de variable relacional de aridad n, entonces $\exists X\varphi$ es fórmula.
F6 Si φ es fórmula y D es un símbolo de variable funcional de aridad n, entonces $\exists D\varphi$ es fórmula.

Definimos a **FORM(L_2)** como el conjunto más pequeño obtenido con estas reglas. También escribiremos **FORM** en vez de **FORM(L_2)** cuando esto no cause confusión.

Abreviaciones:

Sean φ y π fórmulas arbitrarias de un lenguaje de segundo orden L_2, x variable individual, X variable relacional de aridad n (para alguna $n \in N\setminus\{0\}$) y D variable funcional de aridad m (para alguna $m \in N\setminus\{0\}$). Definimos las fórmulas $\varphi\wedge\pi$, $\varphi\rightarrow\pi$, $\varphi\leftrightarrow\pi$, $\forall x\varphi$, $\forall X\varphi$ y $\forall D\varphi$ como es usual:

$\varphi\wedge\pi = \neg(\neg\varphi\vee\neg\pi)$
$\varphi\rightarrow\pi = \neg\varphi\vee\pi$
$\varphi\leftrightarrow\pi = (\varphi\rightarrow\pi)\wedge(\pi\rightarrow\varphi)$
$\forall x\varphi = \neg\exists x\neg\varphi$
$\forall X\varphi = \neg\exists X\neg\varphi$
$\forall D\varphi = \neg\exists D\neg\varphi$

Expresiones.

Llamamos expresiones de L_2 al conjunto:
EXPR(L_2)=TERM(L_2)$\cup$PRED(L_2)$\cup$FORM(L_2). Al igual que con las fórmulas, será común escribir **EXPR** en vez de **EXPR(L_2)**.

Al igual que en primer orden, un lenguaje L_2 de segundo orden tiene fórmulas en las que aparecen variables acotadas por cuantificadores y fórmulas en las que hay variables libres. Con el propósito de precisar esta idea definimos la función **FREE**, con dominio EXPR y contradominio el conjunto de subconjuntos finitos de $(\bigcup_{n\in N\setminus\{0\}}R_n)\cup(\bigcup_{n\in N}F_n)$, por recursión sobre EXPR:

(T1) FREE(x)={x} para cualquier símbolo de variable individual de L_2.
(T2) FREE(a)=∅ para cualquier símbolo de constante individual $a\in$CONS.OP
(T3) $FREE(f(\tau_1,...\tau_n))=FREE(\tau_1)\cup...\cup FREE(\tau_n)$ para cualquier símbolo de constante funcional f de aridad n.
(T4) $FREE(D(\tau_1,...\tau_n))=\{D\}\cup FREE(\tau_1)\cup...\cup FREE(\tau_n)$ para cualquier símbolo de variable funcional D de aridad n.

(P1) FREE(X)={X} para cualquier símbolo de variable relacional de aridad n.
(P2) FREE(R)=∅ para cualquier $R\in$CONS.OP, R constante relacional de aridad n.
(P3) $FREE(\approx_i)=\varnothing$ para todo $i\in N$.

(F1) $FREE(\Pi(\tau_1,..,\tau_n))=FREE(\Pi)\cup FREE(\tau_1)\cup...\cup FREE(\tau_n)$ para cualquiera Π predicado de aridad n (para n=2, Π distinto de $\approx_2$) y $\tau_1,..,\tau_n$ términos cualesquiera.
(F2) Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $FREE((\Pi\approx_n\Psi))=FREE(\Pi)\cup FREE(\Psi)$, para Π, Ψ predicados n-arios cualesquiera (para n=2, Π y Ψ distintos de $\approx_2$). Si τ_1 y τ_2 son términos, entonces $FREE((\tau_1\approx_0\tau_2))=FREE(\tau_1)\cup FREE(\tau_2)$
(F3) $FREE(\neg\varphi)=FREE(\varphi)$;
$FREE(\varphi\vee\pi)=FREE(\varphi)\cup FREE(\pi)$;
(F4) Si x es una variable individual, entonces
$FREE(\exists x\varphi)=FREE(\varphi)\setminus\{x\}$
(F5) Si X es una variable relacional de aridad n, entonces
$FREE(\exists X\varphi)=FREE(\varphi)\setminus\{X\}$
(F6) Si D es una variable funcional de aridad n, entonces
$FREE(\exists D\varphi)=FREE(\varphi)\setminus\{D\}$

Finalmente, definimos para un conjunto cualquiera Γ de fórmulas de segundo orden **FREE(Γ)=** $\bigcup_{\varphi\in\Gamma}$ **FREE(φ).**

Expresiones cerradas.

Definiciones:

Un **termino τ es cerrado** cuando FREE(τ)=∅.
Una fórmula cualquiera φ se llama **enunciado** cuando FREE(φ)=∅ y definimos **SENT=SENT(L₂)**$=\{\varphi\in FORM|\varphi$ es un enunciado$\}$.
Además, dada una fórmula cualquiera $\varphi\in$FORM, definimos la **cerradura universal de** φ (la denotamos ∀φ), como la fórmula que resulta de cuantificar universalmente a todas las variables libres de φ, es decir si $FREE(\varphi)=\{y_1,..,y_k\}$, entonces $\forall\varphi=\forall y_1...\forall y_k\varphi$.
De manera análoga definimos la **cerradura existencial de** φ (que denotamos ∃φ): si $FREE(\varphi)=\{y_1,..,y_k\}$, entonces $\exists\varphi=\exists y_1...\exists y_k\varphi$.

Sustitución de una variable individual libre de una fórmula por un término.

A menudo nos interesa sustituir una variable libre de una fórmula $\varphi \in FORM$ por un término τ de tal manera que la fórmula que resulta de realizar la sustitución diga de τ exactamente lo mismo que decía la formula φ de x. La siguiente definición recursiva sobre la formación de las expresiones captura esta idea, donde $\varphi(x|\tau)$ indica la fórmula que resulta de sustituir la variable x en φ por el término τ.

(T1) Sea z una variable individual.
Si $z \neq x$, entonces $z(x|\tau)=z$.
Si $z=x$ entonces $z(x|\tau)=\tau$.
(T2) Para todo $a \in CONS.OP$ símbolo de constante individual $a(x|\tau)=a$
(T3) Si $f \in CONS.OP$ es un símbolo de constante funcional y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, entonces $f(\tau_1,..,\tau_n)(x|\tau)=f(\tau_1(x|\tau),..,\tau_n(x|\tau))$.
(T4) Si D es un símbolo de variable funcional de aridad n y $\tau_1,...,\tau_n$ son términos, entonces $D(\tau_1,..,\tau_n)(x|\tau)=D(\tau_1(x|\tau),..,\tau_n(x|\tau))$.

(P1) Si X un símbolo de variable n-ario relacional, entonces $X(x|\tau)=X$
(P2) Si $P \in CONS.OP$ es una constante n-aria relacional, entonces $P(x|\tau)=P$.
(P3) Para todo $i \in N$ $\approx_i(x|\tau)= \approx_i$.

(F1) Si Π es un predicado n-ario (para n=2, Π distinto de $\approx_2$) y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, entonces $\Pi(\tau_1,..,\tau_n)(x|\tau)=\Pi(\tau_1(x|\tau),..,\tau_n(x|\tau))$
(F2) Para cada $n \in N\backslash\{0\}$, $(\Pi \approx_n \Psi)(x|\tau)= (\Pi(x|\tau) \approx_n \Psi(x|\tau))$, para Π, Ψ predicados n-arios cualesquiera (para n=2, Π y Ψ distintos de $\approx_2$). Si τ_1 y τ_2 son términos, entonces $(\tau_1 \approx_0 \tau_2)(x|\tau)= (\tau_1(x|\tau) \approx_0 \tau_2(x|\tau))$.
(F3) Si $\varphi, \pi \in FORM$ entonces
$(\neg\varphi)(x|\tau)=\neg(\varphi(x|\tau))$;
$(\varphi \vee \pi)(x|\tau)=\varphi(x|\tau) \vee \pi(x|\tau)$.
(F4) Sea z una variable individual.
Si $x \notin FREE(\exists z\varphi)$, entonces $(\exists z\varphi)(x|\tau)=(\exists z\varphi)$
Si $x \in FREE(\exists z\varphi)$ y $z \notin FREE(\tau)$, entonces $(\exists z\varphi)(x|\tau)=\exists z(\varphi(x|\tau))$
Si $x \in FREE(\exists z\varphi)$ y $z \in FREE(\tau)$, entonces sea y la variable individual con índice menor del conjunto $F_0 \backslash FREE(\exists z\varphi) \cup FREE(\tau)$. Entonces $(\exists z\varphi)(x|\tau)=\exists y(\varphi(z|y)(x|\tau))$.
(F5) Si X es una variable relacional de aridad n, entonces
$(\exists X\varphi)(x|\tau)= \exists X(\varphi(x|\tau))$
(F6) Si D es una variable funcional de aridad n, entonces
$(\exists D\varphi)(x|\tau)=\exists D(\varphi(x|\tau))$

Sustitución de una variable relacional libre de una fórmula por un predicado.

Análogamente a lo hecho con variables individuales, definimos por recursión lo que quiere decir substituir la variable relacional X de aridad n libre de la fórmula φ por el predicado Π de aridad n (lo cual, continuando con la notación usada para variables individuales, será designado por $\varphi(X|\Pi)$).

(T1) Para cualquier z variable individual $z(X|\Pi)=z$.
(T2) Para todo $a \in CONS.OP$ símbolo de constante individual $a(X|\Pi)=a$.
(T3) Si $f \in CONS.OP$ es un símbolo de constante funcional de aridad m y $\tau_1,..,\tau_m$ son términos, entonces $f(\tau_1,..,\tau_m)(X|\Pi)=f(\tau_1,..,\tau_m)$.
(T4) Si D es un símbolo de variable funcional de aridad m y $\tau_1,...,\tau_m$ son términos, entonces $D(\tau_1,..,\tau_m)(X|\Pi)=D(\tau_1,..,\tau_m)$.

(P1) Sea Z es un símbolo de variable m-ario relacional.,
Si $Z \neq X$ entonces $Z(X|\Pi)=Z$
Si $Z=X$ entonces $Z(X|\Pi)=\Pi$
(P2) Si $P \in CONS.OP$ es una constante m-aria relacional, entonces $P(X|\Pi)=P$.
(P3) Para todo $i \in N$ $\approx_i(X|\Pi)= \approx_i$.

(F1) Si Ψ es un predicado m-ario (para n=2, Ψ distinto de $\approx_2$) y $\tau_1,..,\tau_m$ son términos, entonces $\Psi(\tau_1,..,\tau_m)(X|\Pi)=\Psi(X|\Pi)\ (\tau_1,..,\tau_m)$
(F2) Para cada $m \in N\backslash\{0\}$, $(\Gamma \approx_m \Psi)(X|\Pi)= (\Gamma(X|\Pi) \approx_m \Psi(X|\Pi))$, para Γ, Ψ predicados m-arios cualesquiera (para m=2, Π y Ψ distintos de $\approx_2$). Si τ_1 y τ_2 son términos, entonces $(\tau_1 \approx_0 \tau_2)(X|\Pi)= (\tau_1 \approx_0 \tau_2)$.
(F3) Si $\varphi,\pi \in FORM$ entonces
$(\neg\varphi)(X|\Pi)=\neg(\varphi(X|\Pi))$;
$(\varphi \vee \pi)(X|\Pi)=\varphi(X|\Pi) \vee \pi(X|\Pi)$.
(F4) Sea z una variable individual.
$(\exists z\varphi)(X|\Pi)=\exists z(\varphi(X|\Pi))$
(F5) Sea Z una variable relacional de aridad m.
Si $X \notin FREE(\exists Z\varphi)$, entonces $(\exists Z\varphi)(X|\Pi)=(\exists Z\varphi)$
Si $X \in FREE(\exists Z\varphi)$ y $Z \notin FREE(\Pi)$, entonces $(\exists Z\varphi)(X|\Pi)=\exists Z(\varphi(X|\Pi))$
Si $X \in FREE(\exists Z\varphi)$ y $Z \in FREE(\Pi)$, entonces sea Y la variable relacional con índice menor del conjunto $Rn\backslash FREE(\exists Z\varphi) \cup FREE(\Pi)$. Entonces
$(\exists Z\varphi)(X|\Pi)=\exists Y(\varphi(Z|Y)(X|\Pi))$
(F6) Si D es una variable funcional de aridad m, entonces
$(\exists D\varphi)(X|\Pi)=\exists D(\varphi(X|\Pi))$

Sustitución de una variable funcional libre de una fórmula por una variable funcional o por una constante funcional.

Definimos por recursión lo que significa substituir la variable funcional D de aridad n libre de la fórmula φ por W, donde W es una variable funcional de aridad n ó W es una constante funcional de aridad n. Lo anterior lo designaremos por $\varphi(D|W)$.

(T1) Para cualquier z variable individual $z(D|W)=z$.
(T2) Para todo $a \in CONS.OP$ símbolo de constante individual $a(D|W)=a$.
(T3) Si $f \in CONS.OP$ es un símbolo de constante funcional de aridad m y $\tau_1,..,\tau_m$ son términos, entonces $f(\tau_1,..,\tau_m)(D|W)=f(\tau_1(D|W),..,\tau_m(D|W))$.
(T4) Sean S un símbolo de variable funcional de aridad m y $\tau_1,...,\tau_m$ términos.
Si $S=D$ entonces $S(\tau_1,..,\tau_m)(D|W)=W(\tau_1(D|W),..,\tau_m(D|W))$.
Si $S \neq W$ entonces $S(\tau_1,..,\tau_m)(D|W)=S(\tau_1(D|W),..,\tau_m(D|W))$.

(P1) Si Z es un símbolo de variable m-ario relacional, entonces $Z(D|W)=Z$
(P2) Si $P\in CONS.OP$ es una constante m-aria relacional, entonces $P(D|W)=P$.
(P3) Para todo $i\in N$ $\approx_i(D|W)=\approx_i$.

(F1) Si Ψ es un predicado m-ario (para m=2, Ψ distinto de $\approx_2$) y $\tau_1,..,\tau_m$ son términos, entonces $\Psi(\tau_1,..,\tau_m)(D|W)=\Psi(\tau_1(D|W),..,\tau_m(D|W))$.
(F2) Para cada $m\in N\setminus\{0\}$, $(\Gamma\approx_m\Psi)(D|W)=(\Gamma\approx_m\Psi)$, para Γ, Ψ predicados m-arios cualesquiera (para m=2, Π y Ψ distintos de $\approx_2$). Si τ_1 y τ_2 son términos, entonces $(\tau_1\approx_0\tau_2)(D|W)=(\tau_1(D|W)\approx_0\tau_2(D|W))$.
(F3) Si $\varphi,\pi\in FORM$ entonces
$(\neg\varphi)(D|W)=\neg(\varphi(D|W))$;
$(\varphi\vee\pi)(D|W)=\varphi(D|W)\vee\pi(D|W)$.
(F4) Si z es una variable individual entonces:
$(\exists z\varphi)(D|W)=\exists z(\varphi(D|W))$
(F5) Si Z es una variable relacional de aridad m entonces:
$(\exists Z\varphi)(D|W)=\exists Z(\varphi(D|W))$
(F6) Sea S símbolo de variable funcional de aridad m.
Si $D\notin FREE(\exists S\varphi)$, entonces $(\exists S\varphi)(D|W)=(\exists S\varphi)$
Si $D\in FREE(\exists S\varphi)$ y $S\notin FREE(W)$, entonces $(\exists S\varphi)(D|W)=\exists S(\varphi(D|W))$
Si $D\in FREE(\exists S\varphi)$ y $S\in FREE(W)$, entonces sea Y la variable funcional con índice menor del conjunto $F_n\setminus FREE(\exists S\varphi)\cup FREE(W)$. Entonces $(\exists S\varphi)(D|W)=\exists Y(\varphi(S|Y)(D|W))$.

SEMANTICA ESTÁNDAR DE LSO

Estructura estándar.

Dado un conjunto CONS.OP, se definió el tipo $\Sigma=(VAR,FUNC)$ de lo que definimos como un lenguaje de segundo orden L_2. Este lenguaje se construyó con la intención de hablar de estructuras de tipo Σ; hay dos clases diferentes de estructuras tipo Σ: las estructuras estándar y las estructuras generales. Definiremos ahora las estructuras estándar y dejaremos para el capítulo IV la definición de las estructuras generales. Para lo que resta de esta sección, sea L_2 un lenguaje de segundo orden dado, CONS.OP su conjunto de símbolos de constante y $\Sigma=(VAR,FUNC)$ su tipo.

Una estructura estándar de un tipo Σ es una triada:
$\mathscr{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$ tal que:

(i) A_0, el universo de individuos, es un conjunto no vacío.
(ii) Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $A_n=\mathbf{P}((A_0)^n)$; es decir el universo de las relaciones n-arias es la potencia del producto cartesiano n-ario de A_0. Así, el universo relacional n-ario contiene todas las posibles relaciones n-arias sobre A_0.
(iii) Para cada $R\in CONS.OP$, R constante relacional de aridad n (se tiene que $FUNC(R)=(0,1,..^n..,1)$), $R^{\mathscr{A}}$ es una relación n-aria de individuos, es decir $R^{\mathscr{A}}\subseteq A_0 x..^n..x A_0$, o lo que es lo mismo: $R^{\mathscr{A}}\in A_n=\mathbf{P}((A_0)^n)$.

(iv) Para cada $f \in CONS.OP$, f constante funcional de aridad n (se tiene que $FUNC(f)=(1,1,..^n..,1)$), $f^{\mathscr{A}}$ es una función n-aria de individuos, es decir $f^{\mathscr{A}}:A_0 x..^n..xA_0 \to A_0$; así, es claro que $f^{\mathscr{A}} \in A_{n+1}=P((A_0)^{n+1})$.

(v) Para cada $a \in CONS.OP$, a constante individual (se tiene que $FUNC(a)=1$), $a^{\mathscr{A}}$ es un elemento de A_0.

Usualmente abreviaremos $\mathscr{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$ por $\mathscr{A}=(A,(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$, donde $A=A_0$.

Finalmente estamos en condiciones de relacionar nuestro lenguaje L_2 de tipo Σ con las estructuras estándar tipo Σ; para esto daremos más definiciones.

Asignaciones.

Una asignación M sobre una estructura $\mathscr{A}$ de nuestro lenguaje L_2 es una función: $M:(\cup_{n\in N} F_n)\cup(\cup_{n\in N\setminus\{0\}} R_n)\to(\cup_{n\in N} A_n)$ tal que:

(a) $M[F_0]\subseteq A_0$.

(b) Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, si $D\in F_n$ entonces $M(D):A_0 x..^n..xA_0\to A_0$ es una función.

(c) Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $M[R_n]\subseteq A_n=P((A_0)^n)$.

Definiciones:

Sea M una asignación de L_2 en $\mathscr{A}$.

- Si $x\in F_0$ y $a\in A_0$, definimos $M(x/a)$ como la asignación que coincide con M en todo su dominio, excepto quizá en x, donde vale a. Es decir, $M(x/a)=(M\setminus\{(x,M(x))\})\cup\{(x,a)\}$.
- Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $X\in R_n$ y $Q\in A_n$ definimos $M(X/Q)$ como la asignación $M(X/Q)=(M\setminus\{(X,M(X))\})\cup\{(X,Q)\}$.
- Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $D\in F_n$ y $f:A_0 x..^n..x A_0\to A_0$ función, definimos la asignación $M(D/f)$ como $M(D/f)=(M\setminus\{(D,M(D))\})\cup\{(D,f)\}$.

Interpretaciones.

Una **interpretación I** de nuestro lenguaje L_2 sobre una estructura estándar $\mathscr{A}$ es un par $I=(\mathscr{A},M)$, donde M es una asignación sobre $\mathscr{A}$. La idea es que una vez que se ha dado una interpretación I de L_2, todo término denote un individuo del universo de individuos de $\mathscr{A}$, y toda fórmula de L_2 sea verdadera o falsa bajo la interpretación. Para precisar estas ideas y en particular la de que una fórmula sea verdadera o falsa bajo una interpretación I tenemos que hacer algunas definiciones.

Sea $I=(\mathscr{A},M)$ una interpretación de L_2. Definimos para todo término τ y para todo predicado R por recursión:

(T1) Si x es una variable individual $I(x)=M(x)$.

(T2) Si a es un símbolo de constante individual $I(a)=a^{\mathcal{A}}$.
(T3) Si f es un símbolo de constante funcional de aridad n, con $n\in N\setminus\{0\}$, y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, entonces $I(f(\tau_1,..,\tau_n))=f^{\mathcal{A}}(I(\tau_1),..,I(\tau_n))$
(T4) Si D es un símbolo de variable funcional de aridad n, con $n\in N\setminus\{0\}$, y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, entonces $I(D(\tau_1,..,\tau_n))=M(D)(I(\tau_1),..,I(\tau_n))$

(P1) Si X es un símbolo de variable n-ario relacional, entonces $I(X)=M(X)$
(P2) Si P es un símbolo de constante n-ario relacional, $P\in CONS.OP$, entonces $I(P)=P^{\mathcal{A}}$.
(P3) $I(\approx_0)=\{(x,y)\in (A_0)^2 \mid x=y\}$ y para todo $i\in N\setminus\{0\}$, $I(\approx_i)=\{(X,Y)\in(A_n)^2 \mid X=Y\}$.

Además si I es la interpretación $I=(\mathcal{A},M)$, denotamos:
$I(x/a)=(\mathcal{A},M(x/a))$, para $x\in F_0$ y $a\in A_0$
$I(X/Q)=(\mathcal{A},M(X/Q))$, para $n\in N\setminus\{0\}$, $X\in R_n$ y $Q\in A_n$
$I(D/f)=(\mathcal{A},M(D/f))$, para $n\in N\setminus\{0\}$, $D\in F_n$ y $f:A_0x..^n..x\ A_0\rightarrow A_0$ función.

Definición:

Definimos por recursión sobre la formación de las fórmulas el significado de: **I satisface una fórmula** $\varphi\in FORM$, (lo que denotamos I sat φ), como:

(F1) Si Π es un predicado n-ario (para n=2, Π distinto de $\approx_2$) y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, I sat $\Pi(\tau_1,..,\tau_n)$ si y sólo si $(I(\tau_1),..,I(\tau_n))\in I(\Pi)$
(F2) Si Π y Ψ son predicados n-arios (para n=2, Π y Ψ distintos de $\approx_2$), entonces I sat $(\Pi\approx_n\Psi)$ si y sólo si $(I(\Pi),I(\Psi))\in I(\approx_n)$. Si τ_1 y τ_2 son términos, entonces I sat $(\tau_1\approx_0\tau_2)$ si y sólo si $(I(\tau_1),I(\tau_2))\in I(\approx_0)$.
(F3) Si φ y π son fórmulas, entonces
I sat $\varphi\vee\pi$ si y sólo I sat φ ó I sat π.
I sat $\neg\pi$ si y sólo si no es verdad que I sat π.
(F4) Si φ es fórmula y x es un símbolo de variable individual, entonces
I sat $\exists x\varphi$ si y sólo si hay $a\in A_0$ tal que $I(x/a)$ sat φ.
(F5) Si φ es fórmula y X es un símbolo de variable relacional de aridad $n\in N\setminus\{0\}$, entonces I sat $\exists X\varphi$ si y sólo si hay $Q\in A_n$ tal que $I(X/Q)$ sat φ.
(F6) Si φ es fórmula y D es un símbolo de variable funcional de aridad $n\in N\setminus\{0\}$, entonces I sat $\exists D\varphi$ si y sólo si hay una función $f:A_0x..^n..xA_0\rightarrow A_0$, tal que $I(D/f)$ sat φ.

Modelos de fórmulas.

Definición:

(a) Dada una fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$, decimos que una interpretación **I es modelo de** φ (lo que denotamos $I\models\varphi$) si y sólo si I sat φ.
(b) Dado un conjunto de fórmulas $K\subseteq FORM(L_2)$, una interpretación **I es modelo de K** (lo que denotamos $I\models K$) si y sólo si para cada $\varphi\in K$, I sat φ.

(c) Dadas una fórmula φ de un lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ y una estructura estándar de tipo Σ, decimos que $\mathcal{A}$ **es modelo de** φ (lo que denotamos $\mathcal{A} \models \varphi$) si y sólo si $(\mathcal{A}, M)$ sat φ para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$.

Satisfacibilidad.

Definición:

(a) Una fórmula φ es satisfacible si y sólo si existe una interpretación I tal que $I \models \varphi$.
(b) Un conjunto de fórmulas K es satisfacible si existe una interpretación I tal que $I \models K$.

Consecuencia lógica y validez lógica.

Definición:

(a) Una fórmula φ **es consecuencia lógica de un conjunto K** de fórmulas (lo que denotamos $K \models \varphi$), si y sólo si todo modelo de K es modelo de φ.
(b) Una fórmula φ **es independiente de un conjunto K** de fórmulas si y sólo si φ y $\neg\varphi$ no son consecuencia lógica de K.
(c) Una fórmula φ **es válida** si y sólo si $\varnothing \models \varphi$ (usualmente esto último se denota por $\models \varphi$).

Proposición(i1): Para cualquier fórmula φ y cualquier conjunto K, $K \subseteq FORM$
$K \models \varphi$ si y sólo si $K \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible.

Demostración:
(Suficiencia). Supongamos que $K \models \varphi$. Entonces cualquier modelo de K es modelo de φ; por lo tanto no existe un modelo de K y de $\neg\varphi$. Por lo tanto $K \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible.

(Necesidad). Supongamos que $K \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible. Entonces no existe un modelo de K y de $\neg\varphi$; es decir si I es un modelo de K, entonces I no es un modelo de $\neg\varphi$ y entonces es un modelo de φ. Por lo tanto todo modelo I de K es un modelo de φ, que es lo mismo que $K \models \varphi$.
■

Equivalencia lógica.

Definición:

Dos fórmulas φ, π **son lógicamente equivalentes** si y sólo si $\varphi \models \pi$ y $\pi \models \varphi$. Cuando φ y π sean lógicamente equivalentes, abreviaremos este hecho por $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \pi$.

Proposición(i2): Para cualquiera φ,π fórmulas $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \pi$ si y sólo si $\models \varphi \leftrightarrow \pi$.

Demostración:
(Suficiencia). Supongamos $\varphi \models\!\!\!\dashv \pi$. Nótese que cualquier interpretación I es modelo del vacío; así, necesitamos probar que cualquier interpretación I es modelo de $\varphi \leftrightarrow \pi$. Sea I una interpretación cualquiera.
Si I sat φ entonces I sat π (por $\varphi \models \pi$) y viceversa, si I sat π entonces I sat φ (por $\pi \models \varphi$); por lo tanto para cualquier interpretación I, I sat φ si y sólo si I sat π; es muy sencillo ver (de nuestra definición de $\varphi \leftrightarrow \pi$) que esto último significa que I sat $\varphi \leftrightarrow \pi$. De esta manera tenemos que si $\varphi \models\!\!\!\dashv \pi$, entonces para toda interpretación I, I sat $\varphi \leftrightarrow \pi$. Por lo tanto $\models \varphi \leftrightarrow \pi$.
(Necesidad). Supongamos $\models \varphi \leftrightarrow \pi$. Sea I un modelo de φ; entonces I sat φ y entonces I sat π (pues para toda interpretación J, J sat $\varphi \leftrightarrow \pi$ **si y sólo si** J sat φ si y sólo si J sat π; esta es una equivalencia muy sencilla de probar), es decir I es modelo de π (lo que prueba $\varphi \models \pi$). Análogamente si I es un modelo de π, entonces I sat π y entonces I sat φ, es decir I es modelo de φ (lo que prueba $\pi \models \varphi$).
■

Los siguientes resultados (cuyas pruebas se dejan al lector) tienen que ver con las definiciones anteriores:
Sean L_2 el lenguaje de segundo orden tal que CONS.OP=$\varnothing$, φ una fórmula, X una variable relacional tal que $X \in R_n$, $n \in N \setminus \{0\}$, y $X \notin FREE(\varphi)$; sean $\alpha_1,..,\alpha_n,\alpha_{n+1} \in F_0$ y $D \in F_n$, $m \in N \setminus \{0\}$ tal que $D \notin FREE(\varphi)$.

(a) La fórmula $\exists X \forall \alpha_1 ... \forall \alpha_n (X(\alpha_1,..,\alpha_n) \leftrightarrow \varphi)$ es lógicamente válida. Las fórmulas de esta clase son llamadas **formulas de comprensión relacionales**.
(b) La fórmula $\forall \alpha_1 .... \forall \alpha_n \exists ! \alpha_{n+1} \varphi \rightarrow \exists D \forall \alpha_1 ... \forall \alpha_n ((D(\alpha_1,..,\alpha_n) \approx_0 \alpha_{n+1}) \leftrightarrow \varphi)$ es válida. Esta clase de fórmulas son llamadas **formulas de comprensión funcionales**.
(c) (Definibilidad de la identidad). Si X y Y son variables relacionales de aridad 1 y 2 respectivamente y α, β y γ son variables individuales, entonces $\forall X(X(\alpha) \leftrightarrow X(\beta)) \models\!\!\!\dashv \forall Y(\forall \gamma Y(\gamma,\gamma) \rightarrow Y(\alpha,\beta))$. Nótese que las fórmulas de este ejercicio expresan la identidad de dos individuos, es decir, una interpretación I será modelo de cualquiera de ellas si y sólo si $I(\alpha)=I(\beta)$.

PODER EXPRESIVO DE LA LOGICA ESTÁNDAR DE SEGUNDO ORDEN.

A continuación daremos ejemplos de fórmulas de segundo orden que expresan propiedades frecuentemente usadas en matemáticas. Estos ejemplos son una muestra del gran poder expresivo de la lógica estándar de segundo orden y de como éste es mayor que el de la lógica de primer orden [a].

Ejemplos del poder expresivo de la lógica estándar de segundo orden.

1) Un buen orden (no vacío) es un conjunto A, $A \neq \varnothing$, dotado con una relación de orden $\leq$ tal que todo subconjunto de A tiene un primer elemento respecto de $\leq$. En segundo orden podemos dar una fórmula tal que todo modelo de ella sea un buen orden (no vacío) respecto de $\leq$: $\forall \alpha \forall \beta (\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha \rightarrow \alpha \approx \beta) \wedge \forall \alpha \forall \beta \forall \gamma (\alpha \leq \beta \wedge \alpha \leq \gamma \rightarrow \alpha \leq \gamma) \wedge$

[a] Véase el apéndice 1.

$\forall X(\exists\alpha X(\alpha)\rightarrow\exists\alpha(X(\alpha)\wedge\forall\beta(X(\beta)\rightarrow\alpha\leq\beta)$; donde $X\in R_1$; $\alpha,\beta,\gamma\in F_0$ y $\leq\in$CONS.OP es tal que FUNC($\leq$)=(0,1,1).

2) El axioma de inducción para números naturales N dice que cualquier conjunto $K\subseteq N$ que tenga al cero y que sea cerrado bajo la operación sucesor es el conjunto de los números naturales. Este axioma es expresable en un lenguaje de segundo orden para la teoría de los números: Sea CONS.OP={0,S}, donde 0 es constante individual y S constante funcional tal que FUNC(S)=(1,1). Entonces el axioma de inducción en el lenguaje L_2 tipo Σ que tiene al conjunto CONS.OP anterior es expresado por la fórmula: $\forall X(X(0)\wedge\forall\alpha(X(\alpha)\rightarrow X(S(\alpha))))\rightarrow\forall\alpha X(\alpha))$, donde $X\in R_1$ y $\alpha\in F_0$.

3) En el campo ordenado **R** de los números reales, todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene una mínima cota superior. Esto se puede decir en un lenguaje adecuado L_2 de segundo orden (como aquel en el que CONS.OP={<,≤}) así: $\forall X((\exists\beta X(\beta)\wedge\exists\alpha\forall\beta(X(\beta)\rightarrow\beta<\alpha))\rightarrow\exists\gamma\forall\alpha(\forall\beta(X(\beta)\rightarrow\beta<\alpha)\leftrightarrow\gamma\leq\alpha))$, donde $X\in R_1$, y $\alpha,\beta,\gamma\in F_0$.

4) En el lenguaje L_2 tal que CONS.OP=∅ se puede dar una fórmula φ_{inf} tal que una interpretación arbitraria I=($\mathcal{A}$,M) es modelo de φ_{inf} si y sólo si el universo A_0 de individuos de $\mathcal{A}$ es infinito. Existen distintas fórmulas que expresan esta idea, nosotros daremos la siguiente: Sean $D\in F_1$ y $\alpha,\beta\in F_0$, definimos $\varphi_{inf}=\exists D(\forall\alpha\forall\beta((D(\alpha)\approx_0 D(\beta))\rightarrow(\alpha\approx_0\beta))\wedge\exists\alpha\forall\beta\neg(\alpha\approx_0 D(\beta)))$. Nótese que cualquier modelo de esta fórmula tiene una función inyectiva del universo de individuos en sí mismo tal que dicha función no es sobreyectiva. (Esta es una de las maneras de decir que el universo de individuos es infinito).

5) Sea L_2 el lenguaje de segundo orden del ejemplo 4). En este lenguaje se puede dar una fórmula de segundo orden tal que ésta es satisfacible sólo por aquellas interpretaciones en las que el universo de individuos es contable. Para hacerlo, sea $Z\in R_1$, sean $Y,X\in R_2$, y sean $\alpha,\beta,\gamma\in F_0$. Definamos primero una fórmula $\varphi_{2fin}(\mathbf{Z})$ que bajo una interpretación arbitraria I=($\mathcal{A}$,M), I sat $\varphi_{2fin}(Z)$ si y sólo si M(Z) es finito (la fórmula que nosotros proponemos simplemente dice que toda relación binaria que restringida a M(Z) sea una función inyectiva de M(Z) en M(Z), entonces sea una función sobreyectiva de M(Z) en M(Z)):
$\varphi_{2fin}(\mathbf{Z})=\forall X(\forall\alpha(Z\alpha\leftrightarrow\exists\beta X\alpha\beta)\wedge\forall\alpha(\exists\beta X\beta\alpha\rightarrow Z\alpha)\wedge\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma(X\alpha\beta\wedge X\alpha\gamma\rightarrow\beta\approx\gamma)\wedge$
$\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma(X\alpha\beta\wedge X\gamma\beta\rightarrow\alpha\approx\gamma)\rightarrow\forall\alpha(Z\alpha\rightarrow\exists\beta X\beta\alpha))$.

Ahora expresemos la idea de que existe un orden lineal en el universo de individuos tal que cada elemento tiene un número finito de predecesores:
$\varphi_{ctbl}=\exists Y(\forall\alpha\neg Y\alpha\alpha\wedge\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma(Y\alpha\beta\wedge Y\beta\gamma\rightarrow Y\alpha\gamma)\wedge\forall\alpha\forall\beta(Y\alpha\beta\vee Y\beta\alpha\vee\alpha\approx\beta)\wedge$
$\forall\alpha\exists X(\varphi_{2fin}(X)\wedge\forall\beta(X\beta\leftrightarrow Y\beta\alpha))$.
De esta manera, para cualquier interpretación I de L_2, I sat φ_{ctbl} si y sólo si el universo de individuos de I es contable.

El teorema de Compacidad y el teorema de Löwenheim-Skolem no se cumplen en la lógica estándar de segundo orden.

Debido al gran poder expresivo de LSO con semántica estándar, teoremas clásicos que ocurren en la lógica de primer orden no ocurren en LSO; en particular, esto pasa con los teoremas de compacidad y Löwenheim-Skolem.

Teorema(i1): El teorema de compacidad no se cumple en LSO estándar.

Demostración:
Una versión del teorema de compacidad en lógica de primer orden dice que si $K\cup\{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas de primer orden tal que $K\models\varphi$, entonces existe un conjunto $L\subseteq K$, L finito, tal que $L\models\varphi$. Veamos un ejemplo en segundo orden que muestra que lo anterior no ocurre:
Sea L_2 el lenguaje de segundo orden tal que CONS.OP=$\varnothing$. Para cada $n\in N$, $n\geq 2$, sea φ_n la fórmula $\exists\alpha_1,..,\exists\alpha_n(\neg(\alpha_1\approx_0\alpha_2)\wedge\neg(\alpha_1\approx_0\alpha_3)\wedge...\wedge\neg(\alpha_1\approx_0\alpha_n)\wedge...\wedge\neg(\alpha_{n-1}\approx_0\alpha_n))$, donde $F_0=\{\alpha_i|i\in N\}$ y sea $K=\{\varphi_n|n\in N\}$. Notemos que el conjunto de fórmulas $K\cup\{\varphi_{inf}\}$, (donde φ_{inf} es la fórmula del ejemplo 4)) cumple $K\models\varphi_{inf}$. Sea L un subconjunto cualquiera finito de K. Como L es finito, entonces existe un $c\in N$ tal que $c=\max\{n\in N|\varphi_n\in L\}$.
Sea entonces $J=(\mathcal{B},Z)$, interpretación de L_2, donde $\mathcal{B}=(B,(B_n)_{n\in N\setminus\{0\}},\varnothing)$, B tiene c elementos y Z es una asignación cualquiera de L_2 en $\mathcal{B}$. Entonces J satisface L, pero J no satisface a φ_{inf}. Esto prueba que para todo subconjunto finito L de K, no ocurre que $L\models\varphi_{inf}$. Por lo tanto, el teorema de compacidad en general no vale en LSO.
■

Obsérvese que en el teorema anterior el hecho de que existiesen en un lenguaje de segundo orden fórmulas para "hay n elementos" y para "ser infinito", implicó que no se cumpla el teorema de compacidad en la lógica de segundo orden. Así, debido a que en cualquier lenguaje de primer orden se puede formalizar "hay n elementos" y debido a que en la lógica de primer orden se cumple el teorema de compacidad, entonces lo que ocurre es que en ningún lenguaje de primer orden se puede formalizar "ser infinito"; es decir, la prueba anterior también es una prueba de que "ser infinito" (y por lo tanto, "ser finito") no es expresable en la lógica de primer orden y sí lo es en segundo orden.

Como ya dijimos, el teorema de Löwenheim-Skolem tampoco se cumple en LSO. La versión que refutaremos en segundo orden, en lógica de primer orden dice así: Si un conjunto K contable de fórmulas de primer orden tiene modelo, entonces K tiene un modelo contable.

Teorema(i2): La versión anterior del teorema de Löwenheim-Skolem no se cumple en LSO estándar.

Demostración:
Sea L_2 el lenguaje de segundo orden cuando CONS.OP=$\varnothing$. Sea $\varphi_{unc}=\neg\varphi_{ctbl}$, donde φ_{ctbl} es la fórmula del ejemplo 5). Entonces φ_{unc} es una fórmula con modelo incontable (por ejemplo $I=(\mathcal{R},M)$, $\mathcal{R}=(R,(R_n)_{n\in N\setminus\{0\}},\varnothing)$ donde R es el conjunto de los números reales y M una asignación cualquiera), y además todo modelo de φ_{unc} tiene que ser incontable, por lo que no existe un modelo contable de φ_{unc}.
■

TEOREMAS SEMÁNTICOS.

Teorema(i3): Sea L_2 un lenguaje de segundo orden tipo Σ y sea $\mathcal{A}$ una estructura estándar de segundo orden tipo Σ. Sean además M_1 y M_2 asignaciones arbitrarias de L_2 en $\mathcal{A}$, y sean $I_1=(\mathcal{A},M_1)$ y $I_2=(\mathcal{A},M_2)$ interpretaciones. Entonces:

(1) Para todo término $\tau\in TERM(L_2)$, si para toda $z\in FREE(\tau)$ $M_1(z)=M_2(z)$, entonces $I_1(\tau)=I_2(\tau)$.

(2) Para todo predicado $\Pi\in PRED(L_2)$, si para toda $z\in FREE(\Pi)$ $M_1(z)=M_2(z)$, entonces $I_1(\Pi)=I_2(\Pi)$.

Demostración:
(1) (Prueba por inducción sobre la formación de los términos).
Paso base de la inducción:
(T1) Sea x una variable individual tal que $z\in FREE(x)=\{x\}$. Entonces $z=x$ y es claro que $M_1(x)=M_2(x)$ implica que $I_1(z)=I_2(z)$.
(T2) Sea a un símbolo de constante individual. Claramente se cumple (1) para este caso.
Ahora demos el paso inductivo de la prueba: Sean $\tau_1,..,\tau_n$ términos, tales que para todo $i\in\{1,..,n\}$, si para toda $z\in FREE(\tau_i)$ $M_1(z)=M_2(z)$, entonces $I_1(\tau_i)=I_2(\tau_i)$.
(T3) Sea f un símbolo de constante funcional de aridad n, con $n\in N\setminus\{0\}$. Supongamos que para toda $z\in FREE(f(\tau_1,..,\tau_n))$ $M_1(z)=M_2(z)$; entonces para todo $i\in\{1,..,n\}$, para toda $z\in FREE(\tau_i)$ $M_1(z)=M_2(z)$. Por lo tanto, debido a la hipótesis de inducción, para todo $i\in\{1,..,n\}$ $I_1(\tau_i)=I_2(\tau_i)$. Finalmente tenemos que $I_1(f(\tau_1,..,\tau_n))=f^{\mathcal{A}}(I_1(\tau_1),..,I_1(\tau_n))=f^{\mathcal{A}}(I_2(\tau_1),..,I_2(\tau_n))=I_2(f(\tau_1,..,\tau_n))$.
(T4) Sea D un símbolo de variable funcional de aridad n, con $n\in N\setminus\{0\}$. Supongamos que para toda $z\in FREE(D(\tau_1,..,\tau_n))$ $M_1(z)=M_2(z)$; entonces para todo $i\in\{1,..,n\}$, para toda $z\in FREE(\tau_i)$ $M_1(z)=M_2(z)$. Por lo tanto, debido a la hipótesis de inducción, para todo $i\in\{1,..,n\}$ $I_1(\tau_i)=I_2(\tau_i)$. Finalmente tenemos que $I_1(D(\tau_1,..,\tau_n))=M_1(D)(I_1(\tau_1),..,I_1(\tau_n))=M_1(D)(I_2(\tau_1),..,I_2(\tau_n))=M_2(D)(\tau_1,..,\tau_n)=I_2(D(\tau_1,..,\tau_n))$.
Por lo tanto tenemos probado (1).▼

(2)
(P1) Sea X un símbolo de variable relacional. Es claro que si $z\in FREE(X)=\{X\}$, entonces $z=X$ y claramente ocurre que si $M_1(z)=M_2(z)$ entonces $I_1(X)=I_2(X)$.
(P2) Si P es un símbolo de constante predicativa, entonces es claro que se cumple (2) para P.
(P3) El caso de los símbolos de igualdad es también inmediato.
De esta manera tenemos (2)▼
■

Teorema(i4)(Teorema de coincidencia): Para toda fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$ y para cualesquiera asignaciones M_1 y M_2 de L_2 en $\mathcal{A}$, si para toda $z\in FREE(\varphi)$ $M_1(z)=M_2(z)$, entonces las interpretaciones $I_1=(\mathcal{A},M_1)$ y $I_2=(\mathcal{A},M_2)$ son tales que: I_1 sat φ si y sólo si I_2 sat φ.

Demostración:
(Prueba por inducción sobre la formación de las fórmulas).

Paso base de inducción:

(F1) Sean M_1, M_2 asignaciones arbitrarias, Π un predicado n-ario (para n=2, Π distinto de $\approx_2$) y $\tau_1,..,\tau_n$ términos. Supongamos que para toda $z\in FREE(\Pi(\tau_1,..,\tau_n))$ $M_1(z)=M_2(z)$. Entonces, usando los resultados (1) y (2) del teorema anterior: I_1 sat $\Pi(\tau_1,..,\tau_n)$ si y sólo si $(I_1(\tau_1),..,I_1(\tau_n))\in I_1(\Pi)$ si y sólo si $(I_2(\tau_1),..,I_2(\tau_n))\in I_2(\Pi)$ si y sólo si I_2 sat $\Pi(\tau_1,..,\tau_n)$.

(F2) Sean M_1, M_2 asignaciones arbitrarias.

- Sean Π y Ψ predicados n-arios (para n=2, Π y Ψ distintos de $\approx_2$). Supongamos que para toda $z\in FREE(\Pi\approx_n\Psi)$ $M_1(z)=M_2(z)$. Entonces, utilizando el resultado (2) del teorema anterior, I_1 sat $\Pi\approx_n\Psi$ si y sólo si $I_1(\Pi)=I_1(\Psi)$ si y sólo si $I_2(\Pi)=I_2(\Psi)$ si y sólo si I_2 sat $\Pi\approx_n\Psi$.
- Sean τ_1 y τ_2 términos. Supongamos que para toda $z\in FREE(\tau_1\approx_0\tau_2)$ $M_1(z)=M_2(z)$. Entonces, por el teorema anterior inciso (1), I_1 sat $\tau_1\approx_0\tau_2$ si y sólo si $I_1(\tau_1)=I_1(\tau_2)$ si y sólo si $I_2(\tau_1)=I_2(\tau_2)$ si y sólo si I_2 sat $\tau_1\approx_0\tau_2$.

Paso inductivo de la prueba: Supongamos que para cualesquiera asignaciones M_1 y M_2 de L_2 en $\mathscr{A}$ y para cualquiera φ, π fórmulas, si para toda $z\in FREE(\varphi)$ $M_1(z)=M_2(z)$, entonces I_1 sat φ si y sólo si I_2 sat φ; y si para toda $z\in FREE(\pi)$ $M_1(z)=M_2(z)$, entonces I_1 sat π si y sólo si I_2 sat π.

(F3) - Sean M_1, M_2 asignaciones arbitrarias y supongamos para toda $z\in FREE(\varphi\vee\pi)$ $M_1(z)=M_2(z)$; entonces para toda $z\in FREE(\varphi)\cup FREE(\pi)$ $M_1(z)=M_2(z)$.Así, por la hipótesis de inducción, I_1 sat φ **si y sólo si** I_2 sat φ y I_1 sat π **si y sólo si** I_2 sat π. Por lo tanto tenemos que I_1 sat $\varphi\vee\pi$ **si y sólo si** I_1 sat φ ó I_1 sat π **si y sólo si** I_2 sat φ ó I_2 sat π **si y sólo si** I_2 sat $\varphi\vee\pi$.

- Sean M_1 y M_2 asignaciones arbitrarias y supongamos que para toda $z\in FREE(\neg\pi)$ $M_1(z)=M_2(z)$. Entonces para toda $z\in FREE(\pi)$ $M_1(z)=M_2(z)$ y por la hipótesis de inducción tenemos que I_1 sat π **si y sólo si** I_2 sat π. De esto último concluimos que I_1 sat $\neg\pi$ **si y sólo si** I_2 sat $\neg\pi$.

(F4) Sean M_1 y M_2 asignaciones arbitrarias y sea x un símbolo de variable individual. Supongamos que para toda $z\in FREE(\exists x\varphi)$ $M_1(z)=M_2(z)$. Entonces para toda $z\in FREE(\varphi)\setminus\{x\}$ $M_1(z)=M_2(z)$. Por otro lado, I_1 sat $\exists x\varphi$ **si y sólo si** hay $a\in A_0$ tal que $I_1(x/a)$ sat φ; pero $M_1(x/a)$ es tal que para toda $z\in FREE(\varphi)$ $M_1(x/a)(z)=M_2(x/a)$, por lo que, por la hipótesis de inducción, hay $a\in A_0$ tal que $I_1(x/a)$ sat φ **si y sólo si** hay $a\in A_0$ tal que $I_2(x/a)$ sat φ **si y sólo si** I_2 sat $\exists x\varphi$.

(F5) La prueba del teorema para las fórmulas $\exists X\varphi$, donde X es una variable relacional y φ es una fórmula, es totalmente análoga al caso anterior.

(F6) Si M_1 y M_2 son asignaciones arbitrarias, $\varphi\in FORM(L_2)$, D es un símbolo de variable funcional, y si para $z\in FREE(\exists x\varphi)$ $M_1(z)=M_2(z)$, entonces I_1 sat $\exists D\varphi$ **si y sólo si** I_2 sat $\exists D\varphi$. Este caso se prueba de manera totalmente análoga a (F4).

■

Convención:

Debido a los dos teoremas anteriores podemos hacer las siguientes convenciones:

- Si e es un término o un predicado de un lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ tal que $FREE(e)\subseteq\{z_1,..,z_n\}$, entonces denotaremos por $\mathscr{A}(z_1/a_1,...,z_n/a_n)(e)$ al elemento

$(\mathcal{A}, M(z_1/a_1,..,z_n/a_n))(e)$ del universo correspondiente de $\mathcal{A}$, donde M es una asignación arbitraria de L_2 en $\mathcal{A}$.

- Si φ es una fórmula de un lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ tal que $FREE(\varphi)\subseteq\{z_1,..,z_n\}$, entonces escribiremos $\mathcal{A}(z_1/a_1,..,z_n/a_n)$ sat φ en vez de $(\mathcal{A}, M(z_1/a_1,..,z_n/a_n))$sat φ, donde M es una asignación arbitraria de L_2 en $\mathcal{A}$.
- Si φ es un enunciado de un lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ –es decir, $FREE(\varphi)=\varnothing$–, entonces escribiremos $\mathcal{A}$ sat φ en vez de $(\mathcal{A}, M)$ sat φ, donde M es una asignación arbitraria de L_2 en $\mathcal{A}$.

Lema(i1)(Lema de sustitución para individuos): Sean x una variable individual y τ un término de un lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ. Sea $\mathcal{A}$ una estructura estándar de segundo orden de tipo Σ y sea M una asignación de L_2 en $\mathcal{A}$. Sea $I=(\mathcal{A}, M)$. Entonces:

(1) Para todo término q de L_2, $I(x/I(\tau))(q)=I(q(x|\tau))$.
(2) Para todo predicado Π de L_2, $I(x/I(\tau))(\Pi)=I(\Pi(x|\tau))$.
(3) Para toda fórmula φ de L_2, $I(x/I(\tau))$ sat φ si y sólo si I sat $\varphi(x|\tau)$.

Demostración:
La prueba es análoga a la prueba que se hace en lógica de primer orden, es por inducción, muy sencilla y un poco larga. La dejamos al lector.
■

Lema(i2)(Lema de sustitución para predicados): Sean Q una variable relacional y Π un predicado de un lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ. Sea $\mathcal{A}$ una estructura estándar de segundo orden de tipo Σ y sea M una asignación de L_2 en $\mathcal{A}$. Sea $I=(\mathcal{A}, M)$

(1) Para todo término q de L_2, $I(Q/I(\Pi))(q)=I(q(Q|\Pi))$.
(2) Para todo predicado Ψ de L_2, $I(Q/I(\Pi))(\Psi)=I(\Psi(Q|\Pi))$.
(3) Para toda fórmula φ de L_2, $I(Q/I(\Pi))$ sat φ si y sólo si I sat $\varphi(Q|\Pi)$.

Demostración:
Al igual que la prueba del lema anterior, la dejamos al lector.
■

Homomorfismos y teoremas de isomorfismo.

Sea L_2 un lenguaje de segundo orden tipo Σ=(VAR, FUNC). Además, sean $\mathcal{A}=((A_n)_{n\in N}, (C^{\mathcal{A}})_{C\in CONS.OP})$ y $\mathcal{B}=((B_n)_{n\in N}, (C^{\mathcal{B}})_{C\in CONS.OP})$ estructuras estándar tipo Σ.

Definición:

Una función $h:A_0\rightarrow B_0$ es un **homomorfismo** de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ (lo cual denotamos como $h:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$) si y sólo si:

(1) Para cada $f\in$CONS.OP, si $FUNC(f)=(1,1,..^{n}..,1)$, entonces para todo $a_1,..,a_n\in A_0$ $h(f^{\mathcal{A}}(a_1,...,a_n))=f^{\mathcal{B}}(h(a_1),...,h(a_n))$.
(2) Para cada $c\in$ CONS.OP, si $FUNC(c)=1$, entonces $h(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{B}}$.
(3) Para cada $R\in$CONS.OP, si $FUNC(R)=(0,1,..^{n}..,1)$, entonces para todo

$a_1,..,a_n \in A_0$ $(a_1,..,a_n) \in R^{\mathcal{A}}$ si y sólo si $(h(a_1),..,h(a_n)) \in R^{\mathcal{B}}$.

Definición:

Sea $h:\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo. h es un **isomorfismo** si y sólo si h es biyectivo.

Teorema(i5): Sean L_2 un lenguaje de segundo orden de tipo Σ, $\mathcal{A}=((A_n)_{n\in N},(C^{\mathcal{A}})_{C\in CONS.OP})$ y $\mathcal{B}=((B_n)_{n\in N},(C^{\mathcal{B}})_{C\in CONS.OP})$ estructuras estándar tipo Σ tales que existe un isomorfismo $h:\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y sea M una asignación arbitraria de L_2 en $\mathcal{A}$.
Si se define $h^*:\cup_{n\in N}(A_n) \to \cup_{n\in N}(B_n)$, como:
(*) $h^*(a)=h(a)$ para todo $a \in A_0$,
(**) Para cada $m \in N\backslash\{0\}$ y para cada $K \in A_m$,
$h^*(K)=\{(h(a_1),..,h(a_m)) \in (A_0)^m \mid (a_1,..,a_m) \in K\}$;
entonces $h^* \circ M$ es una asignación de L_2 en $\mathcal{B}$ y además se cumplen las siguientes propiedades:
(1) Para cada $\tau \in TERM(L_2)$, $h^*((\mathcal{A},M)(\tau))=(\mathcal{B},h^*\circ M)(\tau)$
(2) Para cada $\Pi \in PRED(L_2)$, $h^*((\mathcal{A},M)(\Pi))=(\mathcal{B},h^*\circ M)(\Pi)$

Demostración:
Veamos que $h^*\circ M$ es una asignación de L_2 en $\mathcal{B}$:
- Sea x una variable individual arbitraria. Entonces $(h^*\circ M)(x)=h^*(M(x))=h(M(x)) \in B_0$.
- Sea Q una variable relacional n-aria arbitraria. Entonces $(h^*\circ M)(Q)=h^*(M(Q))=\{(h(a_1),..,h(a_n)) \in (B_0)^n \mid (a_1,..,a_n) \in M(Q)\} \in B_n$.
- Este caso es más interesante: Sea D una variable funcional n-aria arbitraria. Entonces $(h^*\circ M)(D)=h^*(M(D))=\{(h(a_1),..,h(a_{n+1})) \in (B_0)^{n+1} \mid (a_1,..,a_{n+1}) \in M(D)\}$.
Veamos que $(h^*\circ M)(D)$ es una función: Sean $(c_1,..,c_n,q), (c_1,..,c_n,r) \in (h^*\circ M)(D)$; entonces existen $(a_1,..,a_n,M(D)(a_1,..,a_n)),(b_1,..,b_n,M(D)(b_1,..,b_n)) \in M(D)$ tales que $(h(a_1),..,h(a_n),h(M(D)(a_1,..,a_n)))=(c_1,..,c_n,q)$ y $(h(b_1),..,h(b_n),h(M(D)(b_1,..,b_n)))=(c_1,..,c_n,r)$. Así, $(h(a_1),..,h(a_n))=(h(b_1),..,h(b_n))$ y como h es biyectiva, entonces $(a_1,..,a_n)=(b_1,..,b_n)$; por lo tanto, de esto último tenemos que $q=h(M(D)(a_1,..,a_n))=h(M(D)(b_1,..,b_n))=r$, debido a que h y M(D) son funciones.
Ahora, veamos que $(h^*\circ M)(D):(B_0)^n \to B_0$. Es claro que $(h^*\circ M)(D)$ tiene como rango a B_0, por lo tanto solo nos hace falta ver que el dominio de $(h^*\circ M)(D)$ es $(B_0)^n$: Sea $(c_1,..,c_n) \in (B_0)^n$ arbitrario. Como $h:A_0 \to B_0$ es una biyección, entonces para todo c_i, con $i \in \{1,...,n\}$, existe $a_i \in A_0$ tal que $h(a_i)=c_i$; por lo tanto, el elemento $(a_1,..,a_n,M(D)(a_1,..,a_n)) \in M(D)$ es tal que $(h(a_1),..,h(a_n),h(M(D)(a_1,..,a_n)))=(c_1,..,c_n,h(M(D)(a_1,..,a_n))) \in h^*(M(D))=(h^*\circ M)(D)$ y por lo tanto, $(c_1,..,c_n) \in Dom((h^*\circ M)(D))$. Como lo anterior fue para un $(c_1,..,c_n) \in (B_0)^n$ arbitrario, entonces $Dom((h^*\circ M)(D))=(B_0)^n$.

Así, de los tres casos anteriores, concluimos: $h^*\circ M$ es una asignación de L_2 en $\mathcal{B}$.▼
Probemos ahora los incisos:
(1) (Prueba por inducción sobre la formación de los términos).
(T1) Sea x una variable individual arbitraria. Entonces
$h^*((\mathcal{A},M)(x))=h^*(M(x))=(h^*\circ M)(x)=(\mathcal{B},h^*\circ M)(x)$.
(T2) Sea a un símbolo de constante individual arbitrario. Entonces

$h^*((\mathscr{A},M)(a))=h^*(a^{\mathscr{A}})=h(a^{\mathscr{A}})=a^{\mathscr{B}}=(\mathscr{B},h^*\circ M)(a)$.

Demos el paso inductivo de la prueba: Supongamos que $\tau_1,..,\tau_n$ son términos arbitrarios tales que para todo $i\in\{1,..,n\}$, $h^*((\mathscr{A},M)(\tau_i))=(\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_i)$.

(T3) Sea f un símbolo de constante funcional de aridad n. Entonces

$h^*((\mathscr{A},M)(f(\tau_1,..,\tau_n)))=h^*(f^{\mathscr{A}}((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n)))=$
$h(f^{\mathscr{A}}((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n)))=f^{\mathscr{B}}(h((\mathscr{A},M)(\tau_1)),..,h((\mathscr{A},M)(\tau_n)))=$
$f^{\mathscr{B}}(h^*((\mathscr{A},M)(\tau_1)),..,h^*((\mathscr{A},M)(\tau_n)))=f^{\mathscr{B}}((\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_1),..,(\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_i))=$
$(\mathscr{B},h^*\circ M)(f(\tau_1,..,\tau_n))$.

(T4) Sea D un símbolo de variable funcional de aridad n. Nótese que como

$((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n),M(D)((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n)))\in M(D)$, entonces
$(h((\mathscr{A},M)(\tau_1)),..,h((\mathscr{A},M)(\tau_n)),h(M(D)((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n))))\in h^*(M(D))$; pero
$(h((\mathscr{A},M)(\tau_1)),..,h((\mathscr{A},M)(\tau_n)),h(M(D)((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n))))=$
$(h^*((\mathscr{A},M)(\tau_1)),..,h^*((\mathscr{A},M)(\tau_n)),h(M(D)((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n))))$ y este último es igual, por la hipótesis de inducción, a
$((\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_1),..,(\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_n),h(M(D)((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n))))$. Así, tenemos que $((\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_1),..,(\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_n),h(M(D)((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n))))\in h^*(M(D))$, lo que significa que $\mathbf{h^*(M(D))}((\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_1),..,(\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_n))=$
$h(\mathbf{M(D)}((\mathscr{A},\mathbf{M})(\tau_1),..,(\mathscr{A},\mathbf{M})(\tau_n)))$.

Con ayuda de esta última igualdad tenemos que:

$h^*((\mathscr{A},M)(D(\tau_1,..,\tau_n)))=h(M(D)((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n)))=$
$\mathbf{h^*(M(D))}((\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_1),..,(\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_n)))=$
$\mathbf{(h^*\circ M)(D)}((\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_1),..,(\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_n)))=(\mathscr{B},h^*\circ M)(D(\tau_1,..,\tau_n))$.

Por lo tanto tenemos probado (1).▼

(2) (Probaremos este inciso por casos).

(P1) Sea Q una variable relacional arbitraria. Entonces $h^*((\mathscr{A},M)(Q))=h^*(M(Q))=$
$(h^*\circ M)(Q)=(\mathscr{B},h^*\circ M)(Q)$.

(P2) Sea P un símbolo de constante relacional n-ario arbitrario. Entonces
$h^*((\mathscr{A},M)(P))=h^*(P^{\mathscr{A}})=\{(h(a_1),..,h(a_n))\in(B_0)^n \mid (a_1,..,a_n)\in P^{\mathscr{A}}\}=P^{\mathscr{B}}=(\mathscr{B},h^*\circ M)(P)$.

(P3) Si $\approx_i$ es un símbolo de igualdad, entonces
$h^*((\mathscr{A},M)(P))=h^*(\approx_i^{\mathscr{A}})=\{(h(a),h(a))\in(B_0)^2 \mid (a,a)\in\approx_i^{\mathscr{A}}\}$, y como h es biyección entre A_0 y B_0, esto es igual a $\approx_i^{\mathscr{B}}=(\mathscr{B},h^*\circ M)(\approx_i)$.

Con los casos anteriores queda probado (2).▼

■

Teorema(i6): Sean L_2 un lenguaje de segundo orden de tipo Σ, y $\mathscr{A}=((A_n)_{n\in N},(C^{\mathscr{A}})_{C\in CONS.OP})$ y $\mathscr{B}=((B_n)_{n\in N},(C^{\mathscr{B}})_{C\in CONS.OP})$ estructuras estándar tipo Σ tales que existe un isomorfismo $h:\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{B}$. Si se define h^* como en el teorema anterior, entonces: Para cada $\varphi\in FORM(L_2)$ y para cada asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$, $(\mathscr{A},M)$ sat φ si y sólo si $(\mathscr{B},h^*\circ M)$ sat φ

Demostración:

(Prueba por inducción sobre la formación de las fórmulas).

Paso base de inducción:

(F1) Sean Π un predicado n-ario (para n=2, Π distinto de $\approx_2$) y $\tau_1,..,\tau_n$ términos.

Entonces para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$:
$(\mathscr{A},M)$ sat $\Pi(\tau_1,..,\tau_n)$ si y sólo si $((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n))\in(\mathscr{A},M)(\Pi)$ si y sólo si $(h((\mathscr{A},M)(\tau_1)),..,h((\mathscr{A},M)(\tau_n)))\in h^*((\mathscr{A},M)(\Pi))$ si y sólo si –usando los resultados (1) y (2)–, $((\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_1)),..,(\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_n)))\in(\mathscr{B},h^*\circ M)(\Pi))$ si y sólo si $(\mathscr{B},h^*\circ M)$ sat $\Pi(\tau_1,..,\tau_n)$.

(F2) - Sean Π y Ψ predicados n-arios (para n=2, Π y Ψ distintos de $\approx_2$). Entonces para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$, $(\mathscr{A},M)$ sat $\Pi\approx_n\Psi$ si y sólo si $(\mathscr{A},M)(\Pi)=(\mathscr{A},M)(\Psi)$ si y sólo si $h^*((\mathscr{A},M)(\Pi))=h^*((\mathscr{A},M)(\Psi))$ si y sólo si –por el inciso (2) del teorema anterior– $(\mathscr{B},h^*\circ M)(\Pi)=(\mathscr{B},h^*\circ M)(\Psi)$ si y sólo si $(\mathscr{B},h^*\circ M)$ sat $\Pi\approx_n\Psi$.

- Sean τ_1 y τ_2 términos. Entonces para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$, $(\mathscr{A},M)$ sat $\tau_1\approx_0\tau_2$ si y sólo si $(\mathscr{A},M)(\tau_1)=(\mathscr{A},M)(\tau_2)$ si y sólo si $h^*((\mathscr{A},M)(\tau_1))=h^*((\mathscr{A},M)(\tau_2))$ si y sólo si –por el inciso (1) del teorema anterior– $(\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_1)=(\mathscr{B},h^*\circ M)(\tau_2)$ si y sólo si $(\mathscr{B},h^*\circ M)$ sat $\tau_1\approx_0\tau_2$.

Paso inductivo de la prueba: Sean φ y π fórmulas arbitrarias tales que para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$, $(\mathscr{A},M)$ sat φ **si y sólo si** $(\mathscr{B},h^*\circ M)$ sat φ y para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$, $(\mathscr{A},M)$ sat π **si y sólo si** $(\mathscr{B},h^*\circ M)$ sat π.

(F3) - Para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$, $(\mathscr{A},M)$ sat $\varphi\vee\pi$ **si y sólo si** $(\mathscr{A},M)$ sat φ ó $(\mathscr{A},M)$ sat π **si y sólo si** –por hipótesis de inducción– $(\mathscr{B},h^*\circ M)$ sat φ ó $(\mathscr{B},h^*\circ M)$ sat π **si y sólo si** $(\mathscr{B},h^*\circ M)$ sat $\varphi\vee\pi$.

- Este caso también es muy sencillo: Para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$ $(\mathscr{A},M)$ sat φ **si y sólo si** $(\mathscr{B},h^*\circ M)$ sat φ –debido a la hipótesis de inducción–. De esto último concluimos que, para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$, $(\mathscr{A},M)$ sat $\neg\varphi$ **si y sólo si** $(\mathscr{B},h^*\circ M)$ sat $\neg\varphi$.

(F4) Sea x una variable individual arbitraria. Para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$ $(\mathscr{A},M)$ sat $\exists x\varphi$ **si y sólo si** hay $a\in A_0$ tal que $(\mathscr{A},M(x/a))$ sat φ; pero hay $a\in A_0$ tal que $(\mathscr{A},M(x/a))$ sat φ **si y sólo si** –por hipótesis de inducción– hay $a\in A_0$ tal que $(\mathscr{B},h^*\circ M(x/a))$ sat φ **si y sólo si** hay $h^*(a)\in B_0$ tal que $(\mathscr{B},(h^*\circ M)(x/h^*(a)))$ sat φ **si y sólo si** $(\mathscr{B},(h^*\circ M))$ sat $\exists x\varphi$.

(F5) Sea Q una variable relacional n-aria arbitraria. Para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$, $(\mathscr{A},M)$ sat $\exists Q\varphi$ **si y sólo si** hay $R\in A_n$ tal que $(\mathscr{A},M(Q/R))$ sat φ; pero hay $R\in A_n$ tal que $(\mathscr{A},M(Q/R))$ sat φ **si y sólo si** –por hipótesis de inducción– hay $R\in A_n$ tal que $(\mathscr{B},h^*\circ M(Q/R))$ sat φ **si y sólo si** hay $h^*(R)\in B_n$ tal que $(\mathscr{B},(h^*\circ M)(Q/h^*(R)))$ sat φ **si y sólo si** $(\mathscr{B},(h^*\circ M))$ sat $\exists Q\varphi$.

(F6) Sea D una variable funcional n-aria arbitraria. Para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$, $(\mathscr{A},M)$ sat $\exists D\varphi$ **si y sólo si** hay una función $f\in A_{n+1}$, $f:A_n\rightarrow A_0$ tal que $(\mathscr{A},M(D/f))$ sat φ; pero hay una función $f\in A_{n+1}$, $f:A_n\rightarrow A_0$ tal que $(\mathscr{A},M(D/f))$ sat φ **si y sólo si** –por hipótesis de inducción– hay una función $f\in A_{n+1}$, $f:A_n\rightarrow A_0$ tal que $(\mathscr{B},h^*\circ M(D/f))$ sat φ **si y sólo si** hay una función $(h^*\circ M(D/f))(D)=h^*(f)\in B_{n+1}$, $h^*(f):B_n\rightarrow B_n$ –aquí estamos usando el hecho de que $h^*\circ M(D/f)$ es una asignación de L_2 en $\mathscr{B}$, según el teorema anterior– tal que $(\mathscr{B},(h^*\circ M)(D/h^*(f)))$ sat φ **si y sólo si** $(\mathscr{B},(h^*\circ M))$ sat $\exists D\varphi$.

■

Teorema(i7): De acuerdo a la notación del teorema anterior, se verifica lo siguiente:

(1) Para cada $\tau\in$TERM(L_2) tal que FREE(τ)$\subseteq\{z_1,..,z_w\}$,
$h^*((\mathscr{A}(z_1/a_1;..;z_w/a_w)(\tau))=\mathscr{B}(z_1/h^*(a_1);..;z_w/h^*(a_w))(\tau)$.

(2) Para cada $\Pi\in$PRED(L_2) tal que FREE(Π)$\subseteq\{z_1,..,z_w\}$,
$h^*((\mathscr{A}(z_1/a_1;..;z_w/a_w)(\Pi))=\mathscr{B}(z_1/h^*(a_1);..;z_w/h^*(a_w))(\Pi)$.

(3) Para cada $\varphi\in$FORM(L_2) tal que FREE(φ)$\subseteq\{z_1,..,z_w\}$,
$\mathscr{A}(z_1/a_1;..;z_w/a_w)$ sat φ si y sólo si $\mathscr{B}(z_1/h^*(a_1);..;z_w/h^*(a_w))$ sat φ.

Demostración:
Es directa de los dos teoremas anteriores.
■

Relaciones de congruencia y homomorfismos.

Sea $\mathscr{A}=((A_n)_{n\in N},(C^{\mathscr{A}})_{C\in CONS.OP})$ una estructura estándar de tipo Σ=(VAR,FUNC), tal que Dom(FUNC)=CONS.OP.

Definición:

Una relación binaria $R\subseteq(A_0)^2$ es una **relación de congruencia en** $\mathscr{A}$, si y sólo si:

(i) R es una relación de equivalencia sobre A_0, es decir, R es reflexiva, simétrica y transitiva.

(ii) Para toda f$\in$CONS.OP tal que FUNC(f)=$(1,1,..^n..,1)$, y para cualesquiera $(q_1,r_1),..,(q_n,r_n)\in(A_0)^2$, si $(q_1,r_1),..,(q_n,r_n)\in R$ entonces $(f^{\mathscr{A}}(q_1,..,q_n),f^{\mathscr{A}}(r_1,..,r_n))\in R$.

(iii) Para toda H$\in$CONS.OP tal que FUNC(H)=$(0,1,..^n..,1)$, y para cualesquiera $(q_1,r_1),..,(q_n,r_n)\in(A_0)^2$, si $(q_1,r_1),..,(q_n,r_n)\in R$ entonces $(q_1,..,q_n)\in H^{\mathscr{A}}$ si y sólo si $(r_1,..,r_n)\in H^{\mathscr{A}}$.

Teorema(i8): Sean $\mathscr{A}=((A_n)_{n\in N},(C^{\mathscr{A}})_{C\in CONS.OP})$ y $\mathscr{B}=((B_n)_{n\in N},(C^{\mathscr{B}})_{C\in CONS.OP})$ estructuras estándar de tipo Σ=(VAR,FUNC) –donde Dom(FUNC)=CONS.OP– tales que existe un homomorfismo $h:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$. Entonces $\sim h=\{(a_1,a_2)\in(A_0)^2 \mid h(a_1)=h(a_2)\}$ es una relación de congruencia en $\mathscr{A}$.

Demostración:

(i) Es claro que $\sim h$ es relación de equivalencia.

(ii) Sean f$\in$CONS.OP tal que FUNC(f)=$(1,1,..^n..,1)$ y $(q_1,r_1),..,(q_n,r_n)\in(A_0)^2$ tales que $(q_1,r_1),..,(q_n,r_n)\in\sim h$.. Entonces $h(f^{\mathscr{A}}(q_1,..,q_n))=f^{\mathscr{B}}(h(q_1),..,h(q_n))=$ $f^{\mathscr{B}}(h(r_1),..,h(r_n))=h(f^{\mathscr{A}}(r_1,..,r_n))$; por lo tanto $(f^{\mathscr{A}}(q_1,..,q_n),f^{\mathscr{A}}(r_1,..,r_n))\in\sim h$.

(iii) Sean H$\in$CONS.OP tal que FUNC(H)=$(0,1,..^n..,1)$ y $(q_1,r_1),..,(q_n,r_n)\in(A_0)^2$ tales que $(q_1,r_1),..,(q_n,r_n)\in\sim h$. Entonces $(q_1,..,q_n)\in H^{\mathscr{A}}$ si y sólo si $(h(q_1),..,h(q_n))\in H^{\mathscr{B}}$ si y sólo si $(h(r_1),..,h(r_n))\in H^{\mathscr{B}}$si y sólo si $(r_1,..,r_n)\in H^{\mathscr{A}}$.

■

Teorema(i9): Para cualquier relación de congruencia $\sim$ sobre una estructura estándar

$\mathcal{A}=((A_n)_{n\in N},(C^{\mathcal{A}})_{C\in CONS.OP})$ de tipo $\Sigma=(VAR,FUNC)$ –donde Dom(FUNC)=CONS.OP– existe una estructura estándar $\sim\mathcal{A}=((\sim A_n)_{n\in N},(C^{\sim\mathcal{A}})_{C\in CONS.OP})$ de tipo Σ y un homomorfismo sobreyectivo $h:\mathcal{A}\to\sim\mathcal{A}$ tal que $\sim=\sim h$.

Demostración:
Definimos la estructura estándar $\sim\mathcal{A}=((\sim A_n)_{n\in N},(C^{\sim\mathcal{A}})_{C\in CONS.OP})$ de tipo Σ como:

(1) $\sim A_0=A_0/\sim=\{[a] \mid a\in A_0\}$ el conjunto de clases de equivalencia que induce la relación $\sim$ en A_0.

(2) Para cada $f\in CONS.OP$ tal que $FUNC(f)=(1,1,..^{n}..,1)$, definimos la función $f^{\sim\mathcal{A}}:(\sim A_0)^n\to(\sim A_0)$ como $f^{\sim\mathcal{A}}([a_1],..,[a_n])=[f^{\mathcal{A}}(a_1,..,a_n)]$.

(3) Para cada $R\in CONS.OP$ tal que $FUNC(R)=(0,1,..^{n}..,1)$, definimos la relación $R^{\sim\mathcal{A}}\subseteq(\sim A_0)^n$ como $([a_1],..,[a_n])\in R^{\sim\mathcal{A}}$ si y sólo si $(a_1,..,a_n)\in R^{\mathcal{A}}$.

(4) Para cada $c\in CONS.OP$ tal que $FUNC(c)=1$, definimos $c^{\sim\mathcal{A}}=[c^{\mathcal{A}}]$

Del hecho de que $\sim$ sea una relación de congruencia se tiene que (2) y (3) están bien definidos; dejamos los detalles al lector.
Definimos ahora $h:A_0\to\sim A_0$ como $h(a)=[a]$. Es claro que esta función es sobreyectiva; además:

(*) Para cada $f\in CONS.OP$ tal que $FUNC(f)=(1,1,..^{n}..,1)$ y para cada $a_1,..,a_n\in A_0$, $h(f^{\mathcal{A}}(a_1,..,a_n))=[f^{\mathcal{A}}(a_1,..,a_n)]=f^{\sim\mathcal{A}}([a_1],..,[a_n])=f^{\sim\mathcal{A}}(h(a_1),..,h(a_n))$

(**) Para cada $R\in CONS.OP$ tal que $FUNC(R)=(0,1,..^{n}..,1)$ y para cada $a_1,..,a_n\in A_0$ $(a_1,..,a_n)\in R^{\mathcal{A}}$ si y sólo si $([a_1],..,[a_n])\in R^{\sim\mathcal{A}}$ si y sólo si $(h(a_1),..,h(a_n))\in R^{\sim\mathcal{A}}$.

(***) Para cada $c\in CONS.OP$ tal que $FUNC(c)=1$, $h(c^{\mathcal{A}})=[c^{\mathcal{A}}]=c^{\sim\mathcal{A}}$.

Es decir, h es un homomorfismo sobreyectivo. Por último, tenemos que $\sim=\sim h$, pues $(a,b)\in\sim$ si y sólo si $[a]=[b]$ si y sólo si $h(a)=h(b)$ si y sólo si $(a,b)\in\sim h$.
■

Teorema(i10): Sea $h:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ un homomorfismo sobreyectivo entre dos estructuras estándar de tipo Σ. Entonces $\sim h\mathcal{A}$ (la estructura estándar asociada a $\mathcal{A}$ que se define a través de la relación de congruencia $\sim h$, de acuerdo a los dos teoremas anteriores) es isomorfa a $\mathcal{B}$.

Demostración:
Definimos $k:\sim hA_0\to B_0$ como $k([a])=h(a)$. k está bien definida (dejamos tal detalle al lector). Veamos que $k:\sim h\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ es un isomorfismo:

(i) k es una biyección:
- k es inyectiva, pues si $k([a])=k([b])$, entonces $h(a)=h(b)$ y entonces $[a]=[b]$.
- k es sobreyectiva debido a que h es sobreyectiva.

(ii) Para cada $f\in CONS.OP$, si $FUNC(f)=(1,1,..^{n}..,1)$, entonces para todo $[a_1],..,[a_n]\in\sim A_0$, $k(f^{\sim h\mathcal{A}}([a_1],..,[a_n]))=k[f^{\mathcal{A}}(a_1,...,a_n)]=h(f^{\mathcal{A}}(a_1,...,a_n))=$ $f^{\mathcal{B}}(h(a_1),...,h(a_n))=f^{\mathcal{B}}(k([a_1]),...,k([a_n]))$.

(iii) Para cada $c\in CONS.OP$, si $FUNC(c)=1$, entonces $k(c^{\sim\mathcal{A}})=k([c^{\mathcal{A}}])=h(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{B}}$.

(iv) Para cada $R\in CONS.OP$, si $FUNC(R)=(0,1,..^{n}..,1)$, entonces para todo $[a_1],..,[a_n]\in\sim A_0$, $([a_1],..,[a_n])\in R^{\sim h\mathcal{A}}$ si y sólo si $(a_1,..,a_n)\in R^{\mathcal{A}}$ si y sólo si $(h(a_1),..,h(a_n))\in R^{\mathcal{B}}$ si y sólo si $(k([a_1]),..,k([a_n]))\in R^{\mathcal{B}}$.

■

Corolario(i1): Si $h_1:\mathscr{A}\to\mathscr{B}_1$ y $h_2:\mathscr{A}\to\mathscr{B}_2$ son dos homomorfismos sobreyectivos y si $\sim h_1=\sim h_2$, entonces $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ son isomorfos.

Demostración:
Por el teorema anterior, $\mathscr{B}_1$ es isomorfo a $\sim h_1\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}_2$ es isomorfo a $\sim h_2\mathscr{A}$; pero como $\sim h_1=\sim h_2$ entonces $\sim h_1\mathscr{A}=\sim h_2\mathscr{A}$. Así, $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ son isomorfos a una misma estructura y por lo tanto son isomorfos entre sí.
■

CAPITULO II

ARITMÉTICA DE PEANO ESTÁNDAR DE SEGUNDO ORDEN Y AXIOMA DE INDUCCIÓN

En este capítulo mostraremos resultados básicos concernientes a la aritmética de Peano y a la lógica estándar de segundo orden. Nuestro estudio se concentrará en los tres axiomas de Peano y en particular en el axioma de inducción, el cual expresa una noción expresable sólo parcialmente en lógica de primer orden.

Axiomas de Peano en LSO.

Todo este capítulo trabajaremos con el lenguaje de segundo orden L_{PA^2} de tipo Σ_{PA^2}=(VAR,FUNC), donde Dom(FUNC)=CONS.OP={c,S}, FUNC(c)=1 y FUNC(S)=(1,1). Además, usaremos las letras x,y,z para símbolos de variable individual, Q,R para símbolos de variable relacional y F,D para símbolos de variable funcional; en el caso de que necesitemos más variables de algún tipo, lo diremos explícitamente.

Definiciones:

Consideremos los siguientes enunciados del lenguaje L_{PA^2}:
$P_1=\forall x\neg(c\approx_0 S(x))$
$P_2=\forall x\forall y((S(x)\approx_0 S(y))\to x\approx_0 y)$
$P_3=\forall Q(Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\to Q(S(x)))\to\forall xQ(x))$

Sea $\Pi=\{P_1,P_2,P_3\}$. Π es por definición, el conjunto de axiomas de Peano de segundo orden y llamamos a todo modelo de Π **modelo de Peano** o **estructura de Peano**; además, llamamos a cada modelo de P_3, **modelo de inducción**.

En lógica de primer orden se estudia, (en el lenguaje de primer orden L_ρ, de tipo $\rho=\{c,S\}$, donde c es símbolo de constante y S símbolo funcional de aridad 1) el conjunto de fórmulas: $\Lambda=\{K_1, K_2\}\cup I$, –llamados axiomas de Peano de primer orden– donde:
$K_1=\forall x\neg(c\approx S(x))$,
$K_2=\forall x\forall y((S(x)\approx S(y))\to x\approx y)$, y si z es una variable de L_ρ,
$I=\{(\varphi(z|c)\wedge\forall x(\varphi(z|x)\to\varphi(z|S(x))))\to\forall x\varphi(z|x)) \mid \varphi\in FORM(L_\rho)$ y tal que x no aparece libre en $\varphi\}$.

Es claro que los axiomas P_1 y P_2 son enunciados equivalentes a K_1 y K_2 respectivamente. Es en el axioma P_3 donde hallaremos una gran diferencia entre los axiomas de Peano de primer orden y los axiomas de Peano de segundo orden. Una de las tareas más importantes que tenemos por hacer es la de demostrar que **cualesquiera dos modelos de Π son isomorfos, es decir, que la aritmética de Peano de segundo orden es categórica**, –situación que en la aritmética de Peano de primer orden, como es bien sabido, no es cierta–; en tal prueba se usará frecuentemente el axioma de inducción de segundo orden P_3, y se podrá observar que su poder expresivo es mayor que el axioma de inducción de primer orden I.

CATEGORICIDAD DE LA ARITMÉTICA DE PEANO ESTÁNDAR DE SEGUNDO ORDEN.

Para toda esta sección, sea $\mathscr{A}=(A,c^{\mathscr{A}},S^{\mathscr{A}})$ un modelo de Peano y sea $\mathscr{B}=(B,c^{\mathscr{B}},S^{\mathscr{B}})$ una estructura estándar de tipo Σ_{PA^2}.

Definición:

Un subconjunto $K\subseteq A$ es un **segmento** si y sólo si:

(i) $c^{\mathscr{A}}\in K$.

(ii) Para todo $a\in A$, si $S^{\mathscr{A}}(a)\in K$ entonces $a\in K$.

Definición:

Una **función aproximada f** es una función $f:Dom(f)\rightarrow B$ de un segmento $Dom(f)$ –con $Dom(f)\subseteq A$– en B tal que:

(i) $f(c^{\mathscr{A}})=c^{\mathscr{B}}$.

(ii) Para todo $a\in A$, si $S^{\mathscr{A}}(a)\in Dom(f)$ entonces $f(S^{\mathscr{A}}(a))=S^{\mathscr{B}}(f(a))$.

Lema(ii1): Todo elemento de A está en el dominio de una función aproximada.

Demostración:
Sea $L=\{a\in A \mid$ hay una función aproximada f tal que $Dom(f)$ es un segmento y $a\in Dom(f)\}$.
Primero probemos:

(1) $c^{\mathscr{A}}\in L$. La razón de esto es que la función $f:\{c^{\mathscr{A}}\}\rightarrow B$, definida como $f(c^{\mathscr{A}})=c^{\mathscr{B}}$, debido a que $\mathscr{A}\models P_1$, es una función aproximada tal que $Dom(f)=\{c^{\mathscr{A}}\}$ es un segmento.

(2) Para todo $a\in A$, si $a\in L$ entonces $S^{\mathscr{A}}(a)\in L$. Sea a un elemento arbitrario de A tal que $a\in L$. Entonces existe una función aproximada $f:Dom(f)\rightarrow B$ tal que $a\in Dom(f)$ y $Dom(f)$ es un segmento. Si $S^{\mathscr{A}}(a)\in Dom(f)$ entonces ya acabamos; así, supongamos que $S^{\mathscr{A}}(a)\notin Dom(f)$. Sea g la función definida como $g=f\cup\{(S^{\mathscr{A}}(a),S^{\mathscr{B}}(f(a)))\}$.

P.D. $Dom(g)$ es un segmento:

Es claro que $Dom(g)=Dom(f)\cup\{S^{\mathscr{A}}(a)\}$. $Dom(g)$ es segmento porque $c^{\mathscr{A}}\in Dom(f)\subseteq Dom(g)$, y además, para todo $q\in A$, si $S^{\mathscr{A}}(q)\in Dom(g)=Dom(f)\cup\{S^{\mathscr{A}}(a)\}$, entonces tenemos dos casos:

(+) Si $S^{\mathscr{A}}(q)\in Dom(f)$ entonces, como $Dom(f)$ es segmento, $q\in Dom(f)\subseteq Dom(g)$.

(++) Si $S^{\mathscr{A}}(q)\in\{S^{\mathscr{A}}(a)\}$, entonces $S^{\mathscr{A}}(q)=S^{\mathscr{A}}(a)$, y como $\mathscr{A}\models P_2$, entonces $q=a$; además, ya teníamos que $q=a\in Dom(f)\subseteq Dom(g)$.▼

P.D. $g:Dom(g)\rightarrow B$ es función aproximada:

Ya se vio que $Dom(g)$ es un segmento. Por otro lado, obsérvese que:

(*) $g(c^{\mathscr{A}})=f(c^{\mathscr{A}})=c^{\mathscr{B}}$

(**) Para todo $q\in A$, si $S^{\mathscr{A}}(q)\in Dom(g)=Dom(f)\cup\{S^{\mathscr{A}}(a)\}$, entonces tenemos dos casos:

(+) Si $S^{\mathscr{A}}(q)\in Dom(f)$, entonces $g(S^{\mathscr{A}}(q))=f(S^{\mathscr{A}}(q))=S^{\mathscr{B}}(f(q))=S^{\mathscr{B}}(g(q))$.

(++) Si $S^{\mathscr{A}}(q)\in\{S^{\mathscr{A}}(a)\}$, entonces $q=a$ (debido a que $\mathscr{A}\models P_2$) y entonces $g(S^{\mathscr{A}}(q))=g(S^{\mathscr{A}}(a))= S^{\mathscr{B}}(f(a))=S^{\mathscr{B}}(g(a))= S^{\mathscr{B}}(g(q))$.

Por lo tanto, para todo $q\in A$, si $S^{\mathscr{A}}(q)\in Dom(g)$ entonces $g(S^{\mathscr{A}}(q))=S^{\mathscr{B}}(g(q))$.
Así, g es una función aproximada.▼

Lo anterior significa que $S^{\mathscr{A}}(a)\in Dom(g)$, Dom(g) es un segmento y g es una función aproximada; por lo tanto, $S^{\mathscr{A}}(a)\in L$.

Finalmente, sea M una asignación cualquiera de L_{PA^2} en $\mathscr{A}$. Como $\mathscr{A}\models P_3$, entonces en particular $(\mathscr{A},M(Q/L))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))\rightarrow\forall xQ(x)$. Nótese que por (1) y (2) sabemos que $(\mathscr{A},M(Q/L))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))$; por lo tanto $(\mathscr{A},M(Q/L))$ sat $\forall xQ(x)$. De esta manera tenemos que para todo $a\in A$, $a\in L$ (o sea, $A\subseteq L$), y como es evidente que $L\subseteq A$, tenemos que $A=L$.
■

Lema(ii2): Para cualesquiera funciones aproximadas f,g, si existe $a\in Dom(f)\cap Dom(g)$, entonces $f(a)=g(a)$.

Demostración:
Sea $\tilde{N}=\{a\in A \mid$ para cualesquiera funciones aproximadas f,g, si $a\in Dom(f)\cap Dom(g)$, entonces $f(a)=g(a)\}$

(1) $c^{\mathscr{A}}\in\tilde{N}$, pues por definición, para cualesquiera funciones aproximadas f y g, $c^{\mathscr{A}}\in Dom(f)\cap Dom(g)$ y además, $f(c^{\mathscr{A}})= c^{\mathscr{B}}=g(c^{\mathscr{A}})$.

(2) P.D. Para todo $a\in A$, si $a\in\tilde{N}$, entonces $S^{\mathscr{A}}(a)\in\tilde{N}$.

Sea $a\in\tilde{N}$ y sean f y g funciones aproximadas arbitrarias. Si $S^{\mathscr{A}}(a)\notin Dom(f)\cap Dom(g)$, entonces no hay nada que probar; así, supongamos que $S^{\mathscr{A}}(a)\in Dom(f)\cap Dom(g)$.

Entonces $a\in Dom(f)\cap Dom(g)$ –ya que Dom(f) y Dom(g) son segmentos, debido a que f y g son funciones aproximadas–, pero además, como $a\in\tilde{N}$, entonces $f(a)=g(a)$ y tenemos que $f(S^{\mathscr{A}}(a))=S^{\mathscr{B}}(f(a))=S^{\mathscr{B}}(g(a))=g(S^{\mathscr{A}}(a))$. Por lo tanto, $S^{\mathscr{A}}(a)\in\tilde{N}$.

Por último, sea M una asignación cualquiera de L_{PA^2} en $\mathscr{A}$. Como $\mathscr{A}\models P_3$, entonces en particular $(\mathscr{A},M(Q/\tilde{N}))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))\rightarrow\forall xQ(x)$. Por (1) y (2) sabemos que $(\mathscr{A},M(Q/\tilde{N}))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))$; por lo tanto $(\mathscr{A},M(Q/\tilde{N}))$ sat $\forall xQ(x)$. Así, para todo $a\in A$, $a\in\tilde{N}$ (o sea, $A\subseteq\tilde{N}$), y como $\tilde{N}\subseteq A$, tenemos que $A=\tilde{N}$.
■

Teorema(ii1)(Teorema de recursión): Dados un modelo de Peano $\mathscr{A}=(A,c^{\mathscr{A}},S^{\mathscr{A}})$ y una estructura $\mathscr{B}=(B,c^{\mathscr{B}},S^{\mathscr{B}})$ de tipo Σ_{PA^2}, existe un único homomorfismo $h:\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}$.

Demostración:
Sea $T=\{f:A\rightarrow B \mid f$ es una función aproximada$\}$ y sea $h=\cup_{f\in T} f$.
h es función de A en B: Sean $(a,b),(a,c)\in h$ elementos arbitrarios de h; entonces existen funciones aproximadas $f_1,f_2\in T$ tales que $f_1(a)=b$ y $f_2(a)=c$. Así, $a\in Dom(f_1)\cap Dom(f_2)$, y por el lema(ii2), $b=f_1(a)=f_2(a)=c$. Por lo tanto h está bien definida. Por otro lado, por el

lema(ii1), para todo elemento $a \in A$ existe una función aproximada f tal que $a \in Dom(f)$; de esta manera, tenemos que $Dom(h)=A$.
Ahora veamos que h es un homomorfismo:

(+) $h(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{B}}$, ya que al menos hay una función $f \in T$ tal que $c^{\mathcal{A}} \in Dom(f)$ –por el lema(ii1)– y por ser f función aproximada cumple que $f(c^{\mathcal{A}})= c^{\mathcal{B}}$. Por lo tanto $h(c^{\mathcal{A}})=f(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{B}}$.

(++) Para todo $a \in A$, $h(S^{\mathcal{A}}(a))=S^{\mathcal{B}}(h(a))$. Para probar esto, sea a un elemento arbitrario de A. Entonces, por el lema(ii1), existe $g \in T$ tal que $S^{\mathcal{A}}(a) \in Dom(g)$; entonces $h(S^{\mathcal{A}}(a))=g(S^{\mathcal{A}}(a))=S^{\mathcal{B}}(g(a))=S^{\mathcal{B}}(h(a))$.

Veamos que h es única: Sea $w:\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo y sea $J=\{a \in A \mid w(a)=h(a)\}$. P.D. $J=A$

(1) $c^{\mathcal{A}} \in J$. Esto es claro del hecho de que w y h son homomorfismos.

(2) Para todo $a \in A$, si $a \in J$ entonces $S^{\mathcal{A}}(a) \in J$. Para probar esto, sea $a \in A$ arbitrario tal que $a \in J$; entonces $w(a)=h(a)$. Como w y h son homomorfismos entonces $w(S^{\mathcal{A}}(a))=S^{\mathcal{B}}(w(a))=S^{\mathcal{B}}(h(a))=h(S^{\mathcal{A}}(a))$. Por lo tanto, $S^{\mathcal{A}}(a) \in J$.

Por último, sea M una asignación cualquiera de L_{PA^2} en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \models P_3$, entonces en particular $(\mathcal{A},M(Q/J))$ sat $Q(c) \wedge \forall x(Q(x) \to Q(S(x))) \to \forall x Q(x)$. Por (1) y (2) sabemos que $(\mathcal{A},M(Q/J))$ sat $Q(c) \wedge \forall x(Q(x) \to Q(S(x)))$; por lo tanto $(\mathcal{A},M(Q/J))$ sat $\forall x Q(x)$. Así, para todo $a \in A$, $a \in J$ (o sea, $A \subseteq J$), y como $J \subseteq A$, tenemos que $A=J$.
■

Modelos de Peano y estructuras de tipo Σ_{PA^2}.

Como antes, sea $\mathcal{A}=(A,c^{\mathcal{A}},S^{\mathcal{A}})$ un modelo de Peano y sea $\mathcal{B}=(B,c^{\mathcal{B}},S^{\mathcal{B}})$ una estructura de tipo Σ_{PA^2}. Por el teorema(ii1) sabemos que existe un único homomorfismo $h:\mathcal{A} \to \mathcal{B}$. A continuación daremos algunas relaciones entre este homomorfismo y los axiomas P_1, P_2 y P_3.

Teorema(ii2): Si $\mathcal{B} \models \{P_1, P_2\}$, entonces el homomorfismo $h:\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ que existe entre un modelo de Peano $\mathcal{A}=(A,c^{\mathcal{A}},S^{\mathcal{A}})$ y una estructura de tipo Σ_{PA^2} $\mathcal{B}=(B,c^{\mathcal{B}},S^{\mathcal{B}})$ es inyectivo.

Demostración:
Supongamos que $\mathcal{B} \models \{P_1, P_2\}$. Para probar que h es inyectiva, definimos el conjunto $T=\{a \in A \mid \text{para todo } q \in A, \text{ si } h(q)=h(a), \text{ entonces } q=a\}$.

(1) $c^{\mathcal{A}} \in T$. Para ver esto, sea $G=\{q \in A \mid \text{si } h(q)=h(c^{\mathcal{A}}), \text{ entonces } q=c^{\mathcal{A}}\}$.

(+) Es claro que $c^{\mathcal{A}} \in G$.

(++) Para todo $q \in A$, si $q \in G$, entonces $S^{\mathcal{A}}(q) \in G$. Para ver esto, notemos lo siguiente: como para todo $q \in A$, $S^{\mathcal{B}}(h(q)) \neq h(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{B}}$ (debido a que $\mathcal{B} \models P_1$), entonces para todo $q \in A$, $h(S^{\mathcal{A}}(q))=S^{\mathcal{B}}(h(q)) \neq h(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{B}}$; además, como $\mathcal{A} \models P_1$ tenemos que para todo $q \in A$, $S^{\mathcal{A}}(q) \neq c^{\mathcal{A}}$. Por lo tanto, para todo $q \in A$, si $h(S^{\mathcal{A}}(q))=h(c^{\mathcal{A}})$, entonces $S^{\mathcal{A}}(q)=c^{\mathcal{A}}$. Así, para todo $q \in A$, $S^{\mathcal{A}}(q) \in G$, y por lo tanto, para todo $q \in A$, si $q \in G$ entonces $S^{\mathcal{A}}(q) \in G$.

Por otro lado, sea M una asignación cualquiera de L_{PA^2} en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \models P_3$, entonces $(\mathcal{A},M(Q/G))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))\rightarrow\forall xQ(x)$. Nótese que por (+) y (++) sabemos que $(\mathcal{A},M(Q/G))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))$; por lo tanto $(\mathcal{A},M(Q/G))$ sat $\forall xQ(x)$. Así concluimos que $A\subseteq G$, y como es evidente que $G\subseteq A$, tenemos que $A=G$.▼

(2) Para todo $w\in A$, si $w\in T$, entonces $S^{\mathcal{A}}(w)\in T$. Para probar esto, sea w un elemento arbitrario de A tal que $w\in T$. Sea $V=\{a\in A \mid \text{si } h(a)=h(S^{\mathcal{A}}(w)) \text{ entonces } a=S^{\mathcal{A}}(w)\}$.

(*) $c^{\mathcal{A}}\in V$. Esto se debe a que $h(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{B}}\neq S^{\mathcal{B}}(h(w))=h(S^{\mathcal{A}}(w))$, dado que $\mathcal{B}\models P_1$.

(**) Para todo $q\in A$, si $q\in V$ entonces $S^{\mathcal{A}}(q)\in V$. Para probar esto, sea $q\in A$ tal que $q\in V$. Vease que si $h(S^{\mathcal{A}}(q))=h(S^{\mathcal{A}}(w))$, entonces $S^{\mathcal{B}}(h(q))=h(S^{\mathcal{A}}(q))=h(S^{\mathcal{A}}(w))=S^{\mathcal{B}}(h(w))$, y como $\mathcal{B}\models P_2$, entonces $h(q)=h(w)$; por último, como $w\in T$, entonces $q=w$. De la igualdad $q=w$, es claro que $S^{\mathcal{A}}(q)=S^{\mathcal{A}}(w)$, y por lo tanto, $S^{\mathcal{A}}(q)\in V$.

Sea M una asignación cualquiera de L_{PA^2} en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}\models P_3$, entonces $(\mathcal{A},M(Q/V))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))\rightarrow\forall xQ(x)$. Nótese que por (*) y (**) $(\mathcal{A},M(Q/V))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))$; entonces $(\mathcal{A},M(Q/V))$ sat $\forall xQ(x)$. Por lo tanto $A\subseteq V$, y como $V\subseteq A$, tenemos que $A=V$.▼

Finalmente, para concluir esta prueba, sea M una asignación cualquiera de L_{PA^2} en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}\models P_3$, entonces $(\mathcal{A},M(Q/T))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))\rightarrow\forall xQ(x)$. Nótese que por (1) y (2) $(\mathcal{A},M(Q/T))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))$. Así, $(\mathcal{A},M(Q/T))$ sat $\forall xQ(x)$. Por lo tanto $A\subseteq T$, y como $T\subseteq A$, tenemos que $A=T$. Nótese que la igualdad $A=T=\{a\in A \mid \text{para todo } q\in A, \text{ si } h(q)=h(a), \text{ entonces } q=a\}$ significa que h es inyectiva. ■

Teorema(ii3): El homomorfismo $h:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$ que existe entre un modelo de Peano $\mathcal{A}=(A,c^{\mathcal{A}},S^{\mathcal{A}})$ y una estructura de tipo Σ_{PA^2} $\mathcal{B}=(B,c^{\mathcal{B}},S^{\mathcal{B}})$ es sobreyectivo si y sólo si $\mathcal{B}\models P_3$.

Demostración:

(Suficiencia). Supongamos que h es sobreyectivo. Para probar que $\mathcal{B}\models P_3$, bastará probar que para cualquier subconjunto $H\subseteq B$ y para cualquier asignación M de L_{PA^2} en $\mathcal{B}$, si $(\mathcal{B},M(Q/H))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))$ entonces $(\mathcal{B},M(Q/H))$ sat $\forall xQ(x)$. Así, sea M una asignación cualquiera de L_{PA^2} en $\mathcal{B}$ y sea H un subconjunto de B tal que $(\mathcal{B},M(Q/H))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))$. Definimos $K=\{a\in A \mid h(a)\in H\}$.

(+) $c^{\mathcal{A}}\in K$. Esto es claro, ya que $h(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{B}}\in H$, debido a que $(\mathcal{B},M(Q/H))$ sat $Q(c)$.

(++) Para todo $a\in A$, si $a\in K$, entonces $S^{\mathcal{A}}(a)\in K$. Para ver esto, sea $a\in A$ arbitrario, tal que $a\in K$. Como $a\in K$, entonces $h(a)\in H$, y por lo tanto $h(S^{\mathcal{A}}(a))=S^{\mathcal{B}}(h(a))\in H$, debido a que $(\mathcal{B},M(Q/H))$ sat $\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))$.

Así, sea N una asignación cualquiera de L_{PA^2} en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}\models P_3$, entonces $(\mathcal{A},N(Q/K))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))\rightarrow\forall xQ(x)$. Por (+) y (++)

$(\mathscr{A},N(Q/K))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))$. Así, $(\mathscr{A},N(Q/K))$ sat $\forall xQ(x)$. Por lo tanto $A\subseteq K$, y como $K\subseteq A$, tenemos que $A=K$. Por lo tanto, $h[A]\subseteq H$, pero como h es sobreyectiva, $B=h[A]\subseteq H$; así, $B\subseteq H$, es decir, $(\mathscr{B},M(Q/H))$ sat $\forall xQ(x)$.

(Necesidad). Supongamos que $\mathscr{B}\models P_3$. Para probar que h es sobreyectiva, bastará probar que el conjunto $G=\{b\in B \mid$ existe $a\in A$ tal que $h(a)=b\}$ es igual a B.

(*) $c^{\mathscr{B}}\in G$. Esto es claro debido a que $h(c^{\mathscr{A}})=c^{\mathscr{B}}$.

(**) Para todo $b\in B$, si $b\in G$ entonces $S^{\mathscr{B}}(b)\in G$. Para probar esta afirmación, sea $b\in B$ arbitrario tal que $b\in G$. Entonces existe $a\in A$ tal que $h(a)=b$; entonces $h(S^{\mathscr{A}}(a))=S^{\mathscr{B}}(h(a))=S^{\mathscr{B}}(b)$, por lo que $S^{\mathscr{B}}(b)\in G$.

Sea M una asignación cualquiera de L_{PA2} en $\mathscr{B}$. Como $\mathscr{B}\models P_3$, entonces $(\mathscr{B},M(Q/G))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))\rightarrow\forall xQ(x)$. Nótese que por (*) y (**) $(\mathscr{B},M(Q/G))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))$. Así, $(\mathscr{B},M(Q/G))$ sat $\forall xQ(x)$. Por lo tanto $B\subseteq G$, y como $G\subseteq B$, tenemos que $B=G$.

■

Corolario(ii1): Sean $\mathscr{A}=(A,c^{\mathscr{A}},S^{\mathscr{A}})$ y $\mathscr{D}=(D,c^{\mathscr{D}},S^{\mathscr{D}})$ dos modelos de Peano arbitrarios. Entonces $\mathscr{A}$ y $\mathscr{D}$ son isomorfos.

Demostración:

Por el teorema(ii1) existe un único homomorfismo $h:\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{D}$; por el teorema(ii2) este homomorfismo es inyectivo, y por el teorema(ii3) tal homomorfismo es, además, sobreyectivo. Por lo tanto $h:\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{D}$ es un isomorfismo.

SUMA, MULTIPLICACIÓN, EXPONENCIACIÓN Y FUNCIONES RECURSIVAS EN MODELOS DE PEANO.

Es posible definir en cualquier modelo de Peano las operaciones de suma, de producto o de exponenciación. A continuación mostraremos este hecho, e incluso una situación más general: es posible definir en cualquier modelo de Peano todas las funciones recursivas primitivas.

Teorema(ii4): En cualquier modelo de Peano existe una única suma (en el sentido de que existe una única operación binaria que se comporta como la suma usual en los números naturales).

Demostración:

Sea $\mathscr{A}=(A,c^{\mathscr{A}},S^{\mathscr{A}})$ un modelo de Peano. Probaremos que existe una única función $+:AxA\rightarrow A$ tal que para todo $a,b\in A$:

(1) $a+c^{\mathscr{A}}=a$, es decir $+(a,c^{\mathscr{A}})=a$.

(2) $a+S^{\mathscr{A}}(b)=S^{\mathscr{A}}(a+b)$, es decir $+(a,S^{\mathscr{A}}(b))=S^{\mathscr{A}}(+(a,b))$.

Para probar lo anterior, para cada $a\in A$, sea $\mathscr{A}_a=(A,a,S^{\mathscr{A}})$ una estructura de tipo Σ_{PA2}. Por el teorema(ii1) tenemos que existe un único homomorfismo $+_a:\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{A}_a$, tal que para todo $b\in A$:

(*) $+_a(c^{\mathscr{A}})=a$

(**) $+_a(S^{\mathcal{A}}(b))=S^{\mathcal{A}}(+_a(b))$.

Para todo $a,b\in A$, definimos $a+b=+_a(b)$. Es evidente que + satisface (1) y (2), por lo que sólo nos hace falta ver que + es única:
Sea $h:AxA\rightarrow A$ tal que satisface (1) y (2). Para cada $a\in A$, definimos la función $h_a:A\rightarrow A$ como $h_a(b)=h(a,b)$. Nótese que para todo $a\in A$, $h_a:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{A}_a$ es un homomorfismo, pues $h_a(c^{\mathcal{A}})=a$ y para todo $b\in A$, $h_a(S^{\mathcal{A}}(b))=S^{\mathcal{A}}(h_a(b))$. Por lo tanto, ya que el homomorfismo que existe entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_a$ es único debido al teorema(ii1), para todo $a\in A$ $h_a=+_a$. Por lo tanto $h=+$.
■

Teorema(ii5): En cualquier modelo de Peano $\mathcal{A}=(A,c^{\mathcal{A}},S^{\mathcal{A}})$ existe una única multiplicación (en el sentido de que existe una única operación binaria que se comporta como la multiplicación usual en los números naturales).

Demostración:
La prueba es totalmente análoga a la de la suma, excepto que se necesita probar que existe una única función $\bullet:AxA\rightarrow A$ tal que para todo $a,b\in A$:

(1) $a\bullet c^{\mathcal{A}}=c^{\mathcal{A}}$, es decir $\bullet(a,c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{A}}$.

(2) $a\bullet(S^{\mathcal{A}}(b))=a+(a\bullet b)$, es decir $\bullet(a,S^{\mathcal{A}}(b))=+(a,\bullet(a,b))$; donde + es la operación suma en $\mathcal{A}=(A,c^{\mathcal{A}},S^{\mathcal{A}})$, de la cual se probó su existencia y unicidad en el teorema(ii4).

Similarmente al teorema anterior, para cada $a\in A$, sea $\mathcal{A}+_a=(A,c^{\mathcal{A}},+_a)$ una estructura de tipo Σ_{PA2}, donde $+_a:A\rightarrow A$ es el único homomorfismo $+_a:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{A}_a$, entre $\mathcal{A}=(A,c^{\mathcal{A}},S^{\mathcal{A}})$ y $\mathcal{A}_a=(A,a,S^{\mathcal{A}})$, es decir $+_a$ cumple:

(*) $+_a(c^{\mathcal{A}})=a$

(**) $+_a(S^{\mathcal{A}}(b))=S^{\mathcal{A}}(+_a(b))$.

Por otro lado, por el teorema(ii1) existe un único homomorfismo $\bullet_a:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{A}+_a$, tal que para todo $b\in A$:

(i) $\bullet_a(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{A}}$

(ii) $\bullet_a(S^{\mathcal{A}}(b))=+_a(\bullet_a(b))$.

Definimos para cada $a,b\in A$ $\bullet(a,b)=\bullet_a(b)$. Es claro que $\bullet$ cumple las condiciones (1) y (2); además, para ver que $\bullet$ es el único producto definible por las ecuaciones (1) y (2), sea $g:AxA\rightarrow A$ una función tal que satisface tales ecuaciones. Definiendo para cada $a\in A$ la función $g_a:A\rightarrow A$ como $g_a(b)=g(a,b)$, tenemos que $g_a:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{A}+_a$ es un homomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}+_a$, es decir g_a cumple para cada $b\in A$:

(o) $g_a(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{A}}$

(oo) $g_a(S^{\mathcal{A}}(b))=+_a(g_a(b))$.

Por lo tanto, como por el teorema(ii1) es un único tal homomorfismo, para cada $a\in A$ $g_a=\bullet_a$, lo que implica que $g=\bullet$.
■

Teorema(ii6): En cualquier modelo de Peano $\mathcal{A}=(A,c^{\mathcal{A}},S^{\mathcal{A}})$ existe una única exponenciación (en el sentido de que existe una única operación binaria que se comporta como la exponenciación usual entre dos números naturales).

Demostración:
Probaremos que existe una única función $e:A\times A\rightarrow A$ tal que para todo $a,b\in A$:

(1) $e(a,c^{\mathcal{A}})=S^{\mathcal{A}}(c^{\mathcal{A}})$.

(2) $e(a,S^{\mathcal{A}}(b))=\bullet(e(a,b),a)$.

Sea para cada $a\in A$ la estructura de tipo Σ_{PA^2} $\mathcal{A}\bullet_a=(A,S^{\mathcal{A}}(c^{\mathcal{A}}),\bullet_a)$, donde $\bullet_a:A\rightarrow A$ es el único homomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}+_a=(A,c^{\mathcal{A}},+_a)$; es decir, para todo $b\in A$:

(i) $\bullet_a(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{A}}$

(ii) $\bullet_a(S^{\mathcal{A}}(b))=+_a(\bullet_a(b))$.

Por el teorema(ii1), para cada $a\in A$, existe un único homomorfismo $e_a:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{A}\bullet_a$, es decir, para cada $b\in A$:

(*) $e_a(c^{\mathcal{A}})=S^{\mathcal{A}}(c^{\mathcal{A}})$

(**) $e_a(S^{\mathcal{A}}(b))=\bullet_a(e_a(b))$.

Definimos la función exponenciación e como $e(a,b)=e_a(b)$ para cada $a,b\in A$. La prueba de que esta función es única es totalmente análoga a la del teorema anterior y la dejamos al lector.

■

Funciones recursivas en modelos de Peano.

Probaremos ahora un hecho general del que son casos particulares los teoremas anteriores de definición de suma, de producto o de exponenciación. Desde el principio de esta sección pudimos haber desarrollado todo desde este punto de vista, sin embargo nos pareció importante hacer explícitos los teoremas anteriores, además de que sirven de ejemplos concretos para estimular el resultado principal: el teorema(ii7) que es una generalización del teorema(ii1) de recursión.

Para el resto de esta sección, sean B un conjunto distinto del vacío, $\mathcal{A}=(A,c^{\mathcal{A}},S^{\mathcal{A}})$ un modelo de Peano, $f:B^n\rightarrow B$ una función n-aria y $g:B^{n+2}\rightarrow B$ una función n+2-aria. Sea además $(b_1,..,b_n)\in B^n$.

Definición:

Una **función aproximada k asociada a $(b_1,..,b_n)$, f y g** es una función $k:Dom(k)\rightarrow B$ de un segmento $Dom(k)$ –con $Dom(f)\subseteq A$– en B tal que:

(+) $k(c^{\mathcal{A}})=f(b_1,..,b_n)$

(++) Para todo $b\in A$, si $S^{\mathcal{A}}(b)\in Dom(k)$ entonces $k(S^{\mathcal{A}}(b))=g(b_1,..,b_n,b,k(b))$.

Lema(ii3): Sea $(b_1,..,b_n)\in B^n$ un elemento arbitrario. Todo elemento de A está en el dominio de una función aproximada asociada a $(b_1,..,b_n)$, f y g.

Demostración:
Sea $L=\{a\in A \mid$ hay una función aproximada k asociada a $(b_1,..,b_n)$, f y g tal que $a\in Dom(f)\}$.
Primero probemos:

(1) $c^{\mathscr{A}} \in L$. La razón de esto es que la función $k:\{c^{\mathscr{A}}\} \rightarrow B$, definida como $k(c^{\mathscr{A}})=f(b_1,..,b_n)$, debido a que $\mathscr{A} \models P_1$, es una función aproximada asociada a $(b_1,..,b_n)$, f y g.

(2) Para todo $a \in A$, si $a \in L$ entonces $S^{\mathscr{A}}(a) \in L$. Sea a un elemento arbitrario de A tal que $a \in L$. Entonces existe una función aproximada asociada a $(b_1,..,b_n)$, f y g $k:Dom(k) \rightarrow B$ tal que $a \in Dom(k)$. Si $S^{\mathscr{A}}(a) \in Dom(k)$ entonces ya acabamos; así, supongamos que $S^{\mathscr{A}}(a) \notin Dom(k)$. Sea h la función definida como $h=k \cup \{(S^{\mathscr{A}}(a),g(b_1,..,b_n,a,k(a)))\}$.

P.D. Dom(h) es un segmento:

Es claro que $Dom(h)=Dom(k) \cup \{S^{\mathscr{A}}(a)\}$. Dom(h) es segmento porque $c^{\mathscr{A}} \in Dom(k) \subseteq Dom(h)$; además, para todo $q \in A$, si $S^{\mathscr{A}}(q) \in Dom(h)=Dom(k) \cup \{S^{\mathscr{A}}(a)\}$, entonces tenemos dos casos:

(+) Si $S^{\mathscr{A}}(q) \in Dom(k)$ entonces, como Dom(k) es segmento, $q \in Dom(k) \subseteq Dom(h)$.

(++) Si $S^{\mathscr{A}}(q) \in \{S^{\mathscr{A}}(a)\}$, entonces $S^{\mathscr{A}}(q)=S^{\mathscr{A}}(a)$, y como $\mathscr{A} \models P_2$, entonces q=a; de esto tenemos que $q=a \in Dom(k) \subseteq Dom(h)$.

Por lo tanto, de todo lo anterior, Dom(h) es un segmento.▼

P.D. $h:Dom(h) \rightarrow B$ es función aproximada asociada a $(b_1,..,b_n)$, f y g.

Ya se vio que Dom(h) es un segmento. Por otro lado, obsérvese que:

(*) $h(c^{\mathscr{A}})=k(c^{\mathscr{A}})= f(b_1,..,b_n)$.

(**) Para todo $q \in A$, si $S^{\mathscr{A}}(q) \in Dom(h)=Dom(k) \cup \{S^{\mathscr{A}}(a)\}$, entonces tenemos dos casos:

(+) Si $S^{\mathscr{A}}(q) \in Dom(k)$, entonces $h(S^{\mathscr{A}}(q))=k(S^{\mathscr{A}}(q))=g(b_1,..,b_n,b,k(b))= g(b_1,..,b_n,b,h(b))$.

(++) Si $S^{\mathscr{A}}(q) \in \{S^{\mathscr{A}}(a)\}$, entonces q=a (debido a que $\mathscr{A} \models P_2$) y entonces $h(S^{\mathscr{A}}(q))=h(S^{\mathscr{A}}(a))=g(b_1,..,b_n,a,k(a))=g(b_1,..,b_n,a,h(a))$.

Por lo tanto, para todo $q \in A$, si $S^{\mathscr{A}}(q) \in Dom(h)$ entonces $h(S^{\mathscr{A}}(q))=g(b_1,..,b_n,a,h(a))$. De esta manera concluimos que h es una función aproximada asociada a $(b_1,..,b_n)$, f y g.▼

Lo anterior muestra que $S^{\mathscr{A}}(a) \in Dom(h)$, donde h es una función aproximada asociada a $(b_1,..,b_n)$, f y g; por lo tanto, $S^{\mathscr{A}}(a) \in L$.

Finalmente, sea M una asignación cualquiera de L_{PA^2} en $\mathscr{A}$. Como $\mathscr{A} \models P_3$, entonces en particular $(\mathscr{A},M(Q/L))$ sat $Q(c) \wedge \forall x(Q(x) \rightarrow Q(S(x))) \rightarrow \forall xQ(x)$. Por (1) y (2) sabemos que $(\mathscr{A},M(Q/L))$ sat $Q(c) \wedge \forall x(Q(x) \rightarrow Q(S(x)))$; por lo tanto $(\mathscr{A},M(Q/L))$ sat $\forall xQ(x)$. De esta manera tenemos que para todo $a \in A$, $a \in L$ (o sea, $A \subseteq L$), y como es evidente que $L \subseteq A$, tenemos que A=L. De esta igualdad tenemos el lema.
■

Lema(ii4): Sea $(b_1,..,b_n) \in B^n$ un elemento arbitrario. Para cualesquiera funciones aproximadas h y k asociadas a $(b_1,..,b_n)$, f y g, si existe $a \in Dom(h) \cap Dom(k)$, entonces h(a)=k(a).

Demostración:

Sea $I=\{a \in A \mid$ para cualesquiera funciones aproximadas h,k, asociadas a $(b_1,..,b_n)$, f y g, si $a \in Dom(h) \cap Dom(k)$, entonces $h(a)=k(a)\}$

(1) $c^{\mathcal{A}}\in I$, pues por definición, para cualesquiera funciones aproximadas h,k, asociadas a $(b_1,..,b_n)$, f y g, $c^{\mathcal{A}}\in Dom(h)\cap Dom(k)$ y además, $h(c^{\mathcal{A}})=f(b_1,..,b_n)=k(c^{\mathcal{A}})$.

(2) P.D. Para todo $a\in A$, si $a\in I$, entonces $S^{\mathcal{A}}(a)\in I$.

Sea $a\in I$ y sean h y k funciones aproximadas arbitrarias asociadas a $(b_1,..,b_n)$, f y g. Si $S^{\mathcal{A}}(a)\notin Dom(h)\cap Dom(k)$, entonces no hay nada que probar; así, supongamos que $S^{\mathcal{A}}(a)\in Dom(h)\cap Dom(k)$. Entonces $a\in Dom(h)\cap Dom(k)$ –ya que Dom(f) y Dom(g) son segmentos–; además, como $a\in I$, entonces $h(a)=k(a)$ y entonces tenemos que $h(S^{\mathcal{A}}(a))=g(b_1,..,b_n,a,h(a))=g(b_1,..,b_n,a,k(a))=k(S^{\mathcal{A}}(a))$. Por lo tanto, $S^{\mathcal{A}}(a)\in I$.

Por último, sea M una asignación cualquiera de L_{PA^2} en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}\models P_3$, entonces en particular $(\mathcal{A},M(Q/I))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))\rightarrow\forall xQ(x)$. Por (1) y (2) sabemos que $(\mathcal{A},M(Q/I))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))$; por lo tanto $(\mathcal{A},M(Q/I))$ sat $\forall xQ(x)$. Así, para todo $a\in A$, $a\in I$ (o sea, $A\subseteq I$), y como $I\subseteq A$, tenemos que $A=I$. Por lo tanto tenemos el lema.

■

Teorema(ii7)(teorema generalizado de recursión): Sean B un conjunto distinto del vacío, $\mathcal{A}=(A,c^{\mathcal{A}},S^{\mathcal{A}})$ un modelo de Peano, $f:B^n\rightarrow B$ una función n-aria y $g:B^{n+2}\rightarrow B$ una función n+2-aria. Entonces para cada $(b_1,..,b_n)\in B^n$ existe una única función ${}_{(b_1,...,b_n)}h:A\rightarrow B$ tal que para todo $a\in A$:

(1) ${}_{(b_1,...,b_n)}h(c^{\mathcal{A}})=f(b_1,..,b_n)$.

(2) ${}_{(b_1,...,b_n)}h(S^{\mathcal{A}}(a))=g(b_1,..,b_n,a,{}_{(b_1,...,b_n)}h(a))$.

Demostración:

Sea $(b_1,..,b_n)\in B^n$ arbitrario y sea $T=\{k:A\rightarrow B \mid$ k es una función aproximada asociada a $(b_1,..,b_n)$, f y g$\}$. Definimos ${}_{(b_1,...,b_n)}h=\cup_{k\in T}\, k$.

${}_{(b_1,...,b_n)}h$ es función de A en B: Sean $(a,b),(a,c)\in {}_{(b_1,...,b_n)}h$ elementos arbitrarios de ${}_{(b_1,...,b_n)}h$; entonces existen $k_1,k_2\in T$ tales que $k_1(a)=b$ y $k_2(a)=c$. Así, $a\in Dom(k_1)\cap Dom(k_2)$, y por el lema(ii4), $b=f_1(a)=f_2(a)=c$. Por lo tanto ${}_{(b_1,...,b_n)}h$ está bien definida y es función de A en B. Por otro lado, por el lema(ii3), para todo elemento $a\in A$ existe $k\in T$ tal que $a\in Dom(k)$; de esta manera, tenemos que $Dom(h)=A$.

Ahora veamos que h cumple (1) y (2):

(1) ${}_{(b_1,...,b_n)}h(c^{\mathcal{A}})=f(b_1,..,b_n)$ ya que al menos hay una función $k\in T$ tal que $c^{\mathcal{A}}\in Dom(k)$ –por el lema(ii3)–. Por lo tanto $h(c^{\mathcal{A}})=k(c^{\mathcal{A}})=f(b_1,..,b_n)$.

(2) Para todo $a\in A$, ${}_{(b_1,...,b_n)}h(S^{\mathcal{A}}(a))=g(b_1,..,b_n,a,{}_{(b_1,...,b_n)}h(a))$. Para probar esto, sea a un elemento arbitrario de A. Entonces, por el lema(ii3), existe $k\in T$ tal que $S^{\mathcal{A}}(a)\in Dom(k)$; entonces $h(S^{\mathcal{A}}(a))=k(S^{\mathcal{A}}(a))=g(b_1,..,b_n,a,k(a))=$ $g(b_1,..,b_n,a,{}_{(b_1,...,b_n)}h(a))$.

Finalmente, sólo nos hace falta ver que ${}_{(b_1,...,b_n)}h$ es única: Sea $w:A\rightarrow B$ tal que w cumple (1) y (2) y sea $J=\{a\in A \mid w(a)={}_{(b_1,...,b_n)}h\,(a)\}$. P.D. $J=A$.

(+) $c^{\mathcal{A}}\in J$. Esto es claro del hecho de que w y ${}_{(b_1,...,b_n)}h$ cumplen (1).

(++) Para todo $a\in A$, si $a\in J$ entonces $S^{\mathcal{A}}(a)\in J$. Para probar esto, sea $a\in A$ arbitrario tal que $a\in J$; entonces $w(a)={}_{(b_1,...,b_n)}h\,(a)$. Como w y h cumplen (2) entonces $w(S^{\mathcal{A}}(a))=g(b_1,..,b_n,a,w(a))=g(b_1,..,b_n,a,{}_{(b_1,...,b_n)}h(a))=h(S^{\mathcal{A}}(a))$. Por lo tanto, $S^{\mathcal{A}}(a)\in J$.

Por último, sea M una asignación cualquiera de L_{PA^2} en $\mathscr{A}$. Como $\mathscr{A}\models P_3$, entonces en particular $(\mathscr{A},M(Q/J))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))\rightarrow\forall xQ(x)$. Por (+) y (++) sabemos que $(\mathscr{A},M(Q/J))$ sat $Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))$; por lo tanto $(\mathscr{A},M(Q/J))$ sat $\forall xQ(x)$. Así, para todo $a\in A$, $a\in J$ (o sea, $A\subseteq J$), y como $J\subseteq A$, tenemos que $A=J$, lo que significa que $w={}_{(b_1,\dots,b_n)}h$.

■

Corolario(ii2): Sea $\mathscr{A}=(A,c^{\mathscr{A}},S^{\mathscr{A}})$ un modelo de Peano, $f:A^n\rightarrow A$ una función n-aria y $g:A^{n+2}\rightarrow A$ una función n+2-aria. Entonces, para cada $(a_1,..,a_n)\in A^n$ existe una única función ${}_{(a_1,\dots,a_n)}h:A\rightarrow A$ tal que para todo $a\in A$:

(*) ${}_{(a_1,\dots,a_n)}h(c^{\mathscr{A}})=f(a_1,..,a_n)$

(**) ${}_{(a_1,\dots,a_n)}h(S^{\mathscr{A}}(a))=g(a_1,..,a_n,a,{}_{(a_1,\dots,a_n)}h(a))$

Demostración:
Es un caso particular del teorema anterior.

■

Corolario(ii3): Sean $\mathscr{A}=(A,c^{\mathscr{A}},S^{\mathscr{A}})$ un modelo de Peano, $f:A^n\rightarrow A$ una función n-aria y $g:A^{n+2}\rightarrow A$ una función n+2-aria. Entonces existe una única función $h:A^{n+1}\rightarrow A$ tal que:

(1) $h(a_1,..,a_n,c^{\mathscr{A}})=f(a_1,..,a_n)$, para todo $(a_1,..,a_n)\in A^n$

(2) $h(a_1,..,a_n,S^{\mathscr{A}}(a))=g(a_1,..,a_n,a,h(a_1,..,a_n,a))$, para todo $(a_1,..,a_n,a)\in A^{n+1}$.

Demostración:
Por el corolario(ii2) tenemos que para cada $(a_1,..,a_n)\in A^n$ existe una única función ${}_{(a_1,\dots,a_n)}h:A\rightarrow A$ tal que para todo $a\in A$:

(+) ${}_{(a_1,\dots,a_n)}h(c^{\mathscr{A}})=f(a_1,..,a_n)$

(++) ${}_{(a_1,\dots,a_n)}h(S^{\mathscr{A}}(a))=g(a_1,..,a_n,a,{}_{(a_1,\dots,a_n)}h(a))$.

Definimos la función $h:A^{n+1}\rightarrow A$ como $h(a_1,..,a_n,a)={}_{(a_1,\dots,a_n)}h(a)$, para todo $a_1,..,a_n,a\in A$. Por la manera en que se ha definido h, es claro que h cumple (1) y (2). La unicidad la probaremos como sigue:
Sea $w:A^{n+1}\rightarrow A$ una función tal que cumple (1) y (2). Definamos para cada $(a_1,..,a_n)\in A^n$ la función ${}_{(a_1,\dots,a_n)}w:A\rightarrow A$ como ${}_{(a_1,\dots,a_n)}w(a)=w(a_1,..,a_n,a)$. Entonces, para cada $(a_1,..,a_n)\in A^n$ ${}_{(a_1,\dots,a_n)}w$ cumple las condiciones (*) y (**) del corolario(ii2); por lo tanto, debido a la unicidad que nos asegura el corolario(ii2), para cada $(a_1,..,a_n)\in A^n$ tenemos que ${}_{(a_1,\dots,a_n)}w={}_{(a_1,\dots,a_n)}h$. Por esto último concluimos: w=h.

■

El corolario anterior nos permite hacer con todo rigor la siguiente definición.

Definición:

Sea $\mathscr{A}=(A,c^{\mathscr{A}},S^{\mathscr{A}})$ un modelo de Peano. Una función $h:A^{n+1}\rightarrow A$ está definida por recursión si y sólo si existen funciones $f:A^n\rightarrow A$ y $g:A^{n+2}\rightarrow A$ tales que :

(1) $h(a_1,..,a_n,c^{\mathscr{A}})=f(a_1,..,a_n)$, para todo $(a_1,..,a_n)\in A^n$

(2) $h(a_1,..,a_n,S^{\mathscr{A}}(b))=g(a_1,..,a_n,b,h(a_1,..,a_n,b))$, para todo $(a_1,..,a_n,b)\in A^{n+1}$.

Por el corolario(ii3), tenemos que dadas cualesquiera dos funciones $f:A^n\rightarrow A$ y

$g:A^{n+2}\to A$, las ecuaciones (1) y (2) nos definen, **por recursión**, una única función h. Debido a este resultado, es posible definir en cualquier estructura de Peano el concepto de función recursiva primitiva; lo que resta de esta sección es simplemente tal definición.

Definición:

Sea $\mathscr{A}=(A,c^{\mathscr{A}},S^{\mathscr{A}})$ un modelo de Peano.
- Para cada $a\in A$ definimos la función constante a de aridad k, ${}_aC^k:A^k\to A$, como ${}_aC^k(a_1,..,a_k)=a$ para todo $a_1,..,a_k\in A^k$.
- Definimos para cada $n,k\in N\setminus\{0\}$ tal que $k\leq n$, la función k-proyección de aridad n, ${}_kI^n:A^k\to A$, como ${}_kI^n(a_1,..,a_n)=a_k$.

Definición:

Sea $\mathscr{A}=(A,c^{\mathscr{A}},S^{\mathscr{A}})$ un modelo de Peano.
Llamamos **funciones iniciales** a las funciones:
$\{{}_aC^k \mid a\in A \text{ y } k\in N\setminus\{0\}\}\cup\{{}_kI^n \mid k,n\in N\setminus\{0\} \text{ tal que } k\leq n\}\cup\{S^{\mathscr{A}}\}$.

Definición:

Sea $\mathscr{A}=(A,c^{\mathscr{A}},S^{\mathscr{A}})$ un modelo de Peano.
Una función $f:A^n\to A$ se obtiene por sustitución a través de las funciones $g:A^m\to A$ y $H_1,..,H_m:A^n\to A$ cuando para todo $(a_1,..,a_n)\in A^n$, $f(a_1,..,a_n)=g((H_1(a_1,..,a_n),..,H_m(a_1,..,a_n))$.

Definición:

Sea $\mathscr{A}=(A,c^{\mathscr{A}},S^{\mathscr{A}})$ un modelo de Peano.
Una **función n-aria $f:A^n\to A$ es recursiva primitiva** si y sólo si existe una lista finita $f_1,..,f_m$ tal que $f=f_m$ y para todo $i\in\{1,..,m\}$, f_i es una función inicial o se obtuvo por medio de las anteriores por substitución o por recursión.

MODELOS DE INDUCCIÓN.

Como hemos visto en todo nuestro estudio anterior acerca de la aritmética de Peano, el único axioma propiamente de segundo orden es el axioma de inducción. Es natural preguntarse si los modelos de Peano son los únicos modelos de inducción o si existen distintos modelos de tal axioma. En lo que resta del capítulo dedicaremos nuestro estudio a los modelos de inducción y a interrogantes afines a los modelos de inducción.

Teorema(ii8): Sea $\mathscr{N}=(N,0,S^{\mathscr{N}})$ el conjunto de los números naturales con el cero y la operación sucesor, y sea $\mathscr{A}$ una estructura de tipo Σ_{PA^2} modelo de inducción arbitrario. Entonces existe una relación de congruencia $\sim$ en $\mathscr{N}$ tal que $\mathscr{A}$ es isomorfo a $\sim\mathscr{N}$.

Demostración:

Sabemos que $\mathscr{N}=(N,0,S^{\mathscr{N}})$ es un modelo de Peano y como $\mathscr{A}$ es una estructura de tipo Σ_{PA^2}, entonces por el teorema(ii1) existe un único homomorfismo $h:\mathscr{N}\to\mathscr{A}$; además, como $\mathscr{A}$ es modelo de inducción, entonces por el teorema(ii3) h es sobreyectivo. Finalmente, por el teorema(i10) del capítulo anterior, la relación de congruencia $\sim h=\{(a_1,a_2)\in N^2 \mid h(a_1)=h(a_2)\}$ es tal que $\mathscr{A}$ es isomorfo a $\sim h\mathscr{N}$.

■

Relaciones de congruencia sobre números naturales.

Definición:

Sean $n,m\in N$. Definimos la relación:
$R_{n,m}=\{(a,a)\in N^2 \mid a<n\}\cup\{(a,b)\in N^2 \mid a\geq n\leq b$ y existe $c\in N$ tal que $a=cm+b$ ó $b=cm+a)\}$.

Proposición(ii1): Para todo $n,m\in N$, $R_{n,m}$ es una relación de congruencia en la estructura estándar de tipo Σ $\mathscr{N}=(N,0,S^{\mathscr{N}})$.

Demostración:
Sean $n,m\in N$ arbitrarios.

(i) $R_{n,m}$ es una relación de equivalencia:
- Es claro que $R_{n,m}$ es reflexiva, pues para todo $a\in N$, si $a<n$, entonces $(a,a)\in R_{n,m}$; además, si $a\geq n$, entonces $a=0m+a$ y por lo tanto $(a,a)\in R_{n,m}$.
- $R_{n,m}$ es simétrica: Sea $(p,q)\in R_{n,m}$ arbitrario. Si $(p,q)\in\{(a,a)\in N^2 \mid a<n\}$ entonces $(q,p)\in\{(a,a)\in N^2 \mid a<n\}\subseteq R_{n,m}$; si $(p,q)\in\{(a,b)\in N^2 \mid a\geq n\leq b$ y existe $c\in N$ tal que $a=cm+b$ ó $b=cm+a)\}$, entonces $(q,p)\in\{(a,b)\in N^2 \mid a\geq n\leq b$ y existe $c\in N$ tal que $a=cm+b$ ó $b=cm+a)\}\subseteq R_{n,m}$.
- $R_{n,m}$ es transitiva: Sean (p,q), $(q,r)\in R_{n,m}$ arbitrarios. Si $(p,q)\in\{(a,a)\in N^2 \mid a<n\}$, entonces $p=q<n$ y entonces $q=r$ y, por lo tanto, $(p,r)\in\{(a,a)\in N^2 \mid a<n\}\subseteq R_{n,m}$. Si $(p,q)\in\{(a,b)\in N^2 \mid a\geq n\leq b$ y existe $c\in N$ tal que $a=cm+b$ ó $b=cm+a)\}$, entonces $(q,r)\in\{(a,b)\in N^2 \mid a\geq n\leq b$ y existe $c\in N$ tal que $a=cm+b$ ó $b=cm+a)\}$; de esto tenemos que hay $w\in N\setminus\{0\}$ tal que $p=wm+q$ ó $q=wm+p$ y además, hay $v\in N\setminus\{0\}$ tal que $q=vm+r$ ó $r=vm+q$. Así, tenemos 4 casos:
(1) $p=wm+q$ y $q=vm+r$. Entonces $p=wm+vm+r=(w+v)m+r$ y entonces $(p,r)\in R_{n,m}$.
(2) $p=wm+q$ y $r=vm+q$. Entonces si $w=v$ tenemos que $p=r$ y entonces $(p,r)\in R_{n,m}$; si $w>v$, entonces $p=wm+r-vm=(w-v)m+r$ y entonces $(p,r)\in R_{n,m}$; si $w<v$, entonces $r=vm+p-wm=(v-w)m+p$ y entonces $(p,r)\in R_{n,m}$.
(3) $q=wm+p$ y $q=vm+r$. Entonces si $w=v$ tenemos que $p=r$ y entonces $(p,r)\in R_{n,m}$; si $w>v$ entonces, como $wm+p=vm+r$, $(w-v)m+p=wm+p-vm=r$ y entonces $(p,r)\in R_{n,m}$; si $w<v$, tenemos que $p=vm+r-wm=(v-w)m+r$ y entonces $(p,r)\in R_{n,m}$.
(4) $q=wm+p$ y $r=vm+q$. Entonces $r=vm+wm+p=(v+w)m+p$ y entonces $(p,r)\in R_{n,m}$.

(ii) Para toda $f\in$ CONS.OP tal que FUNC(f)=$(1,1,..^{n}..,1)$, y para cualesquiera $(q_1,r_1),..,(q_n,r_n)\in(N)^2$, si $(q_1,r_1),..,(q_n,r_n)\in R_{n,m}$ entonces $(f^{\mathscr{N}}(q_1,..,q_n),f^{\mathscr{N}}(r_1,..,r_n))\in R_{n,m}$: Como S es el único símbolo de constante funcional de CONS.OP de nuestro lenguaje tipo Σ, sólo lo tenemos que probar para S. Sean $(q_1,r_1)\in(A_0)^2$ tal que $(q_1,r_1)\in K$. Si $(q_1,r_1)\in\{(a,a)\in N^2 \mid a<n\}$, entonces claramente $S^{\mathscr{N}}(q_1)=S^{\mathscr{N}}(r_1)$ y por lo tanto $(S^{\mathscr{N}}(q_1),S^{\mathscr{N}}(r_1))\in R_{n,m}$. Si $(q_1,r_1)\in\{(a,b)\in N^2 \mid a\geq n\leq b$ y existe $c\in N$ tal que

a=cm+b ó b=cm+a)}, entonces, sin perdida de generalidad, existe $c\in N$ tal que $q_1=cm+r_1$ y entonces $S^{\mathscr{N}}(q_1)=S^{\mathscr{N}}(cm+r_1)=(cm+r_1)+1=cm+S^{\mathscr{N}}(r_1)$; por lo tanto $(S^{\mathscr{N}}(q_1),S^{\mathscr{N}}(r_1))\in R_{n,m}$.

(iii) Para toda $H\in$CONS.OP tal que FUNC(H)=(0,1,.."..,1), y para cualesquiera $(q_1,r_1),..,(q_n,r_n)\in(N)^2$, si $(q_1,r_1),..,(q_n,r_n)\in R_{n,m}$ entonces $(q_1,..,q_n)\in H^{\mathscr{N}}$ si y sólo si $(r_1,..,r_n)\in H^{\mathscr{N}}$: Este caso es inmediato debido al hecho de que no existe ningún símbolo de constante relacional en CONS.OP.

■

Teorema(ii9): K es una relación de congruencia sobre $\mathscr{N}$ si y sólo si K es la identidad (es decir, $K=R_{0,0}$; de hecho, para cualquier $n\in N$, $K=R_{n,0}$) ó existen naturales $n\in N$ y $m\in N\setminus\{0\}$ tales que $K=R_{n,m}$.

Demostración:
(Necesidad). Supongamos que K es la identidad ó existen naturales $n,m\in N$ tal que $K=R_{n,m}$. Es claro que si K es la identidad, entonces $K=R_{0,0}$ y es una relación de congruencia. Si $K=R_{n,m}=\{(a,a)\in N^2 \mid a<n\}\cup\{(a,b)\in N^2 \mid a\geq n\leq b$ y existe $c\in N$ tal que $a=cm+b$ ó $b=cm+a)\}$, entonces K es una relación de congruencia sobre $\mathscr{N}$ debido a la proposición anterior.

(Suficiencia). Supongamos que K es una relación de congruencia sobre $\mathscr{N}$ distinta de la identidad. Por lo tanto, existen $(a,b)\in K$ tales que $a\neq b$.
Sea $n=\min\{q\in N \mid$ existe $r\in N$ tal que $(q,r)\in K$ y $q\neq r\}$. Debido a que K es distinta de la identidad n existe y además esto significa que hay $p\in N$ tal que $n\neq p$ y $(n,p)\in K$. Nótese que $p>n$, debido a que $(p,n)\in K$ ya que K es relación de equivalencia. Por lo tanto, existe $r\in N\setminus\{0\}$ tal que $p=n+r$, de lo que tenemos que $(n,n+r)=(n,p)\in K$.
Debido a lo anterior tenemos que existe el número natural $m=\min\{r\in N\setminus\{0\} \mid (n,n+r)\in K\}$.
P.D. $K=R_{n,m}=\{(a,a)\in N^2 \mid a<n\}\cup\{(a,b)\in N^2 \mid a\geq n\leq b$ y existe $c\in N$ tal que $a=cm+b$ ó $b=cm+a)\}$.

$K\subseteq R_{n,m}$:

Sea $(a,b)\in K$ arbitrario. Si $a=b$, entonces claramente $(a,b)\in R_{n,m}$; así, supongamos que $a\neq b$ y sin pérdida de generalidad, supongamos que $a<b$. Entonces $n\leq a<b$ y por lo tanto existen $w\in N$ y $v\in N\setminus\{0\}$ tal que $a=n+w$ y $b=a+v$; entonces $a=n+w$ y $b=a+v=n+w+v$. Por lo tanto $(a,b)=(n+w,n+w+v)\in K$. Para continuar con la prueba, usaremos dos afirmaciones muy importantes (las cuales usaremos muy frecuentemente a lo largo de la prueba de todo el teorema):

Afirmación(ii1): Para todo $q\in N$ y para todo $(a,b)\in N^2$, si $(a,b)\in K$ entonces $(a+q,b+q)\in K$.

Demostración:
(Prueba por inducción). Sea $(a,b)\in K$ arbitrario. Entonces es claro que $(a+0,b+0)\in K$. Supongamos que para $q\in N$, se cumple que $(a+q,b+q)\in K$. Entonces, como K es relación

de congruencia sobre $\mathscr{N}$, se tiene que $(S^{\mathscr{N}}(a+q),S^{\mathscr{N}}(b+q))\in K$, pero esto significa que $(S^{\mathscr{N}}(a+q),S^{\mathscr{N}}(b+q))=(a+S^{\mathscr{N}}(q),b+S^{\mathscr{N}}(q))\in K$. Por lo tanto tenemos lo que se afirmaba.▼

Afirmación(ii2): Para todo $q\in N$, $(n,n+qm)\in K$.

Demostración:
(Prueba por inducción). Es claro que $(n,n+0m)\in K$. Supongamos que para $q\in N$, $(n,n+qm)\in K$. Entonces $(n+m,n+qm+m)\in K$ y además como $(n,n+m)\in K$, tenemos que $(n,n+qm+m)=(n,n+(q+1)m)=n,n+S^{\mathscr{N}}(q)m)\in K$ –debido a que K es transitiva–. Por lo tanto, para todo $q\in N$, $(n,n+qm)\in K$.▼

Continuando con la prueba del teorema, por el algoritmo de la división para los números naturales, existen $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in N$ tales que $w=\alpha_1m+\beta_1$, $v=\alpha_2m+\beta_2$ y además $\mathbf{0\leq\beta_1,\beta_2<m}$. Por lo tanto, $(a,b)=(n+w,n+w+v)=(n+\alpha_1m+\beta_1,n+\alpha_1m+\beta_1+\alpha_2m+\beta_2)=$ $(n+\alpha_1m+\beta_1,n+\alpha_1m+\alpha_2m+\beta_1+\beta_2)=(n+\alpha_1m+\beta_1,n+(\alpha_1+\alpha_2)m+\beta_1+\beta_2)$. Nuevamente, por el algoritmo de la división, existen $\alpha_3,\beta_3\in N$ tales que $\beta_1+\beta_2=\alpha_3m+\beta_3$ y $\mathbf{0\leq\beta_3<m}$ (***).
Así, $(n+\alpha_1m+\beta_1,n+(\alpha_1+\alpha_2)m+\beta_1+\beta_2)=(n+\alpha_1m+\beta_1,n+(\alpha_1+\alpha_2)m+\alpha_3m+\beta_3)=$ $(n+\alpha_1m+\beta_1,n+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)m+\beta_3)\in K$ (*1*).
Por otro lado, como $(n,n+\alpha_1m)\in K$, entonces $(n+\beta_1,n+\alpha_1m+\beta_1)\in K$ y por transitividad de esto y de (*1*) tenemos $(n+\beta_1,n+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)m+\beta_3)\in K$ (*2*).
Haciendo algo similar, como $(n,n+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)m)\in K$, entonces $(n+\beta_3,n+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)m+\beta_3)\in K$ y entonces, por ser K simétrica, $(n+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)m+\beta_3,n+\beta_3)\in K$; aplicando la transitividad a esto último y a (*2*) tenemos que $\mathbf{(n+\beta_1,n+\beta_3)\in K}$.
Como $\beta_1<m$, tenemos que $\gamma=(m-\beta_1)\in N$; pero $(n+\beta_1+\gamma,n+\beta_3+\gamma)\in K$, es decir, $(n+\beta_1+\gamma,n+\beta_3+\gamma)=(n+\beta_1+(m-\beta_1),n+\beta_3+\gamma)=(n+m,n+\beta_3+\gamma)\in K$. De esto último, del hecho de que $(n,n+m)\in K$ y por la transitividad de K, tenemos que $(n,n+\beta_3+\gamma)\in K$. Finalmente, por el algoritmo de la división, existen $\alpha_4,\beta_4\in N$ tales que $\beta_3+\gamma=\alpha_4m+\beta_4$ y $\mathbf{0\leq\beta_4<m}$; esto nos permite escribir $(n,n+\beta_3+\gamma)=(n,n+\alpha_4m+\beta_4)\in K$ (*3*).
Por otro lado, como $(n,n+\alpha_4m)\in K$, entonces $(n+\beta_4,n+\alpha_4m+\beta_4)\in K$ y entonces $(n+\alpha_4m+\beta_4,n+\beta_4)\in K$ (pues K es simétrica); de esto y de (*3*) tenemos por transitividad que $(n,n+\beta_4)\in K$ (*4*).
De los hechos de que $m=\min\{r\in N\setminus\{0\} \mid (n,n+r)\in K\}$, de que $0\leq\beta_4<m$ y de (*4*), tenemos que $\beta_4=0$. Por lo tanto $\beta_3+\gamma=\alpha_4m+\beta_4=\alpha_4m$ (*5*). Además, nótese que como $0\leq\beta_1,\beta_3<m$ y $\gamma=(m-\beta_1)$, entonces $\gamma\leq m$ y entonces $\beta_3+\gamma<2m$. De esto y de (*5*) tenemos que $\beta_3+\gamma=m$; además, como $\beta_1+\gamma=m$, entonces $\beta_1=\beta_3$ (*6*).
Casi para concluir, de (*6*) y de (***) tenemos que $\beta_2=\alpha_3m$, y como $v=\alpha_2m+\beta_2$, entonces $v=\alpha_2m+\alpha_3m=(\alpha_2+\alpha_3)m$.
La última igualdad muestra que, para $(a,b)\in K$, existe $(\alpha_2+\alpha_3)\in N$ tal que $b=a+v=a+(\alpha_2+\alpha_3)m$ y por lo tanto, $(a,b)\in R_{n,m}$. Como la prueba anterior fue para un $(a,b)\in K$ arbitrario, entonces $K\subseteq R_{n,m}$.

$\mathbf{R_{n,m}\subseteq K}$:

Sea $(a,b)\in R_{n,m}$ arbitrario. Si $a=b$, entonces claramente $(a,b)\in K$; así, supongamos que $a\neq b$. Entonces $(a,b)\in\{(a,b)\in N^2 \mid a\geq n\leq b$ y existe $c\in N$ tal que $a=cm+b$ ó $b=cm+a)\}$ y entonces, sin perdida de generalidad, supongamos que $n\leq a<b$ y que existe $c\in N\setminus\{0\}$ tal

que $(a,b)=(a,cm+a)$. Entonces existe $w\in N$ tal que $a=n+w$ y por lo tanto, $(a,b)=(a,cm+a)=(n+w,cm+n+w)=(n+w,n+w+cm)$.
Por otro lado, $(n,n+cm)\in K$ y entonces $(n+w,n+w+cm)\in K$, es decir, $(a,b)=(n+w,n+w+cm)\in K$. Como esto se probó para $(a,b)\in R_{n,m}$ arbitrario, entonces $R_{n,m}\subseteq K$.
■

Resumamos todo el trabajo que hemos realizado acerca de modelos de inducción en el siguiente .

Corolario(ii4): Sea $\mathscr{A}$ una estructura estándar de tipo Σ_{PA^2}. $\mathscr{A}$ es modelo de inducción si y sólo si existen $n,m\in N$ tales que $\mathscr{A}$ es isomorfa a $R_{n,m}\mathscr{N}$.

Demostración:
(Suficiencia). Por el teorema(ii8), si $\mathscr{A}$ una estructura de tipo Σ_{PA^2} modelo de inducción, entonces $\mathscr{A}$ es isomorfo a $\sim\mathscr{N}$ para alguna relación de congruencia $\sim$ en $\mathscr{N}$; además, por el teorema(ii9), existen $n,m\in N$ tal que $\sim=R_{n,m}$. Por lo tanto, $\mathscr{A}$ es isomorfo a $R_{n,m}\mathscr{N}$.

(Necesidad). Por el teorema(i6) del capítulo 1, $\mathscr{A}$ es modelo del axioma de inducción si y sólo si $R_{n,m}\mathscr{N}$ es modelo del axioma de inducción. Probemos esto último:
Por la proposición(ii1), para todo $n,m\in N$, $R_{n,m}$ es una relación de congruencia en $\mathscr{N}$.
Por el teorema(i9) del capítulo 1, $R_{n,m}\mathscr{N}$ es una estructura estándar de tipo Σ_{PA^2} tal que existe un homomorfismo sobreyectivo $h:\mathscr{N}\to R_{n,m}\mathscr{N}$; de esto último y por el teorema(ii3) tenemos que $R_{n,m}\mathscr{N}$ es modelo de P_3, donde P_3 es el axioma de inducción $P_3=\forall Q(Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\to Q(S(x)))\to\forall xQ(x))$.
■

Adviértase que para toda $m\in N\setminus\{0\}$, $(a,b)\in R_{0,m}$ **si y sólo si** m divide a (a-b) ó m divide a (b-a) **si y sólo si** $a\equiv b \bmod(m)$; es decir, $R_{0,m}$ es simplemente la relación de congruencia módulo m que se define usualmente en teoría de los números. Las clases de equivalencia que induce $R_{0,m}$ sobre N son m: $N/R_{0,m}=\{[k]\mid 0\leq k\leq m-1\}$, donde:
$[0]=\{zm\in N \mid z\in N\}$,
$[1]=\{zm+1\in N \mid z\in N\}$,
...
$[m-2]=\{zm+m-2\in N \mid z\in N\}$,
$[m-1]=\{zm+m-1\in N \mid z\in N\}$. De esta manera, el modelo de inducción $R_{0,m}\mathscr{N}=(R_{0,m}N,c^{R_{0,m}\mathscr{N}},S^{R_{0,m}\mathscr{N}})$ de tipo Σ_{PA^2} asociado a $\mathscr{N}$ y a la relación de congruencia $R_{0,m}$ –véase teorema(i9)–, será:

(i) $R_{0,m}N=N/R_{0,m}$.

(ii) $c^{R_{0,m}\mathscr{N}}=[c^{\mathscr{N}}]=[0]$.

(iii) $S^{R_{0,m}\mathscr{N}}:R_{0,m}N\to R_{0,m}N$ definida como $S^{R_{0,m}\mathscr{N}}([a])=[S^{\mathscr{N}}(a)]$.

Observación(ii1):

Lo anterior muestra que el modelo de inducción $R_{0,m}\mathcal{N}$ es básicamente la estructura $\mathcal{A}=(A=\{0,1,..,m-1\},c^{\mathcal{A}}=0,S^{\mathcal{A}})$, donde:

$$\begin{array}{rcl} S^{\mathcal{A}}: A & \rightarrow & A \\ 0 & \rightarrow & 1 \\ 1 & \rightarrow & 2 \\ & \ldots & \\ m-2 & \rightarrow & m-1 \\ m-1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

▼

En el caso de $n,m\in N\setminus\{0\}$, tenemos que las clases de equivalencia que induce $R_{n,m}$ sobre N son n+m: $N/R_{n,m}=\{[k] \mid 0\leq k\leq n-1\}\cup\{[k] \mid n\leq k\leq n+(m-1)\}$, donde:

$[0]=\{0\}$,

$[1]=\{1\}$,

...

$[n-2]=\{n-2\}$,

$[n-1]=\{n-1\}$,

$[n]=\{n+mz\in N \mid z\in N\}$,

$[n+1]=\{n+1+mz\in N \mid z\in N\}$,

...

$[n+(m-2)]=\{n+(m-2)+mz\in N \mid z\in N\}$,

$[n+(m-1)]=\{n+(m-1)+mz\in N \mid z\in N\}$. Así, el modelo de inducción $R_{n,m}\mathcal{N}=(R_{n,m}N,c^{R_{n,m}\mathcal{N}},S^{R_{n,m}\mathcal{N}})$ de tipo Σ_{PA^2} asociado a $\mathcal{N}$ y a la relación de congruencia $R_{n,m}$ –véase teorema(i9)–, será:

(i) $R_{n,m}N=N/R_{n,m}$.

(ii) $c^{R_{n,m}\mathcal{N}}=[c^{\mathcal{N}}]=[0]$.

(iii) $S^{R_{n,m}\mathcal{N}}:R_{n,m}N \rightarrow R_{n,m}N$ definida como $S^{R_{n,m}\mathcal{N}}([a])=[S^{\mathcal{N}}(a)]$.

Observación(ii2):

De la anterior podemos ver que el modelo de inducción $R_{n,m}\mathcal{N}$ es básicamente la estructura $\mathcal{B}=(B=\{0,1,..,n+m-1\},c^{\mathcal{B}}=0,S^{\mathcal{B}})$, donde:

$$\begin{array}{rcl} S^{\mathcal{B}}: B & \rightarrow & B \\ 0 & \rightarrow & 1 \\ 1 & \rightarrow & 2 \\ & \ldots & \\ n+(m-2) & \rightarrow & n+(m-1) \\ n+(m-1) & \rightarrow & n \end{array}$$

▼

Por último, debido a que $R_{0,0}$ es la relación de identidad, es muy sencillo ver que la estructura $R_{0,0}\mathcal{N}$ es isomorfa a $\mathcal{N}$; dejamos los detalles al lector.

Interdependencia de los axiomas de Peano.

Recordemos los axiomas de Peano de segundo orden:

$P_1=\forall x\neg(c\approx_0 S(x))$

$P_2=\forall x\forall y((S(x)\approx_0 S(y))\rightarrow x\approx_0 y)$

$P_3=\forall Q(Q(c)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(S(x)))\rightarrow\forall xQ(x))$

Con la clasificación descrita anteriormente de los modelos de inducción (salvo isomorfismo, por supuesto), es sencillo probar que existe una relación entre el axioma P_3 de inducción y los otros dos axiomas. Esto queda explícito en nuestro siguiente

Teorema(ii10): Todo modelo de inducción es modelo de P_1 ó de P_2.

Demostración:

Sabemos que todo modelo $\mathscr{A}$ de inducción es isomorfo a $R_{n,m}\mathscr{N}$ para algunos $n,m\in N$. De esto, tenemos tres casos:

(i) Si $n=m=0$, entonces $R_{n,m}\mathscr{N}$ es isomorfo a $\mathscr{N}$ y por lo tanto $\mathscr{A}$ es isomorfo a $\mathscr{N}$, lo que implica que $\mathscr{A}$ es modelo de P_1 y de P_2.

(ii) Si $n=0$ y $m\in N\backslash\{0\}$, entonces por la observación(ii1), $R_{0,m}\mathscr{N}=(R_{0,m}N,c^{R_{0,m}\mathscr{N}},S^{R_{0,m}\mathscr{N}})$ es tal que $S^{R_{0,m}\mathscr{N}}$ es inyectiva, es decir, $R_{n,m}\mathscr{N}\models P_2$, lo que implica que $\mathscr{A}\models P_2$, debido al teorema(i6).

(iii) Si $n,m\in N\backslash\{0\}$, entonces por la observación(ii2), $R_{n,m}\mathscr{N}=(R_{n,m}N,c^{R_{n,m}\mathscr{N}},S^{R_{n,m}\mathscr{N}})$ es tal que para todo $[q]\in R_{n,m}N$, $S^{R_{n,m}\mathscr{N}}([q])\neq[0]$, lo que significa que $R_{n,m}\mathscr{N}\models P_1$, y por la misma razón que el inciso anterior, tenemos que $\mathscr{A}\models P_1$.

■

CAPITULO III.

LOGICA MULTIVARIADA.

Como se mencionó en el capítulo I, hay otra manera de definir la semántica de los lenguajes de segundo orden. La intención de este capítulo es definir con precisión la lógica multivariada (que llamaremos LMV de ahora en adelante), con la cual se tendrán todos los requisitos para que en el capítulo siguiente podamos desarrollar la semántica alternativa para LSO que tanto hemos mencionado. Como veremos, tal punto de vista consiste en pensar los lenguajes de segundo orden como lenguajes multivariados particulares y a partir de ellos, estudiar una clase especial de estructuras multivariadas.

La lógica multivariada es esencialmente una extensión (no propia, como lo veremos más adelante) de la lógica de primer orden para hablar de estructuras en las que hay distintas clases de objetos, por ejemplo:

- Cuando se estudian espacios vectoriales V sobre un campo F, hacemos la distinción entre los vectores (elementos de V) y los escalares (elementos de F).
- En el estudio de los módulos M sobre un anillo A se hace una distinción análoga a la que se tiene en espacios vectoriales: Por un lado tenemos los elementos del módulo M y por otro los elementos del anillo A y además contamos con operaciones que vinculan los elementos de M con los elementos de A.
- En geometría se usan conjuntos de puntos, de rectas y de planos y se tienen relaciones entre ellos.

En general, a menudo nos interesa hablar de distintos universos de individuos y de las relaciones que se pueden establecer entre ellos; con esta idea en la mente discutiremos lo que llamaremos estructuras multivariadas tipo Σ y lenguaje multivariado tipo Σ, de tal manera que dos estructuras multivariadas sean del mismo tipo Σ si y sólo si el mismo lenguaje multivariado tipo Σ sirve para expresarse acerca de ellas.

LENGUAJES MULTIVARIADOS (SINTAXIS DE LMV).

Tipo multivariado.

Análogamente a como se hizo en los lenguajes de segundo orden, para tener un lenguaje multivariado específico necesitamos un conjunto no vacío de símbolos, al que llamaremos **SIM.OP**, que incluye los conectivos lógicos y la igualdad (es decir, $\{\vee,\neg,\approx\}\subseteq$SIM.OP), y que además puede incluir símbolos de constante individual, símbolos de constante funcional o símbolos de constante relacional. Dado tal conjunto, un **tipo multivariado** (que por comodidad llamaremos simplemente tipo) es un par Σ=**(SORT,FUNC)**, tal que:

(i) SORT –que a veces denotaremos SORT(Σ) cuando necesitemos hacer explícito que SORT está asociado específicamente a Σ– es un conjunto tal que $0\in$SORT, y tal que $\varnothing\neq$SORT$\setminus\{0\}$. Por razones técnicas pediremos que SORT sea contable (finito o numerable).

(ii) FUNC –que a veces denotaremos FUNC(Σ) por las mismas razones que dimos para SORT– es una función: FUNC:SIM.OP$\rightarrow(S_\omega(\text{SORT})\cup(N\setminus\{0\}))\setminus\{(0)\}$

donde S_ω(SORT) denota el conjunto de sucesiones finitas de elementos de SORT y N el conjunto de números naturales. Llamamos a los elementos de S_ω(SORT) tipos y a los elementos de $(N\setminus\{0\})$ aridades.

(iii) $\vee, \neg, \approx$ son elementos de SIM.OP. Además FUNC($\neg$)=(0,0), FUNC($\vee$)=(0,0,0) y FUNC($\approx$)=2.

(iv) Para cada $k \in$ SIM.OP$\setminus\{\vee,\neg,\approx\}$, si FUNC(k)=$(i_1,..,i_n)$ entonces $0 \notin \{i_1,..,i_n\}$; es decir, $\neg$ y $\vee$ son los únicos elementos $f \in$ SIM.OP tal que FUNC(f)=$(i_0,..,i_n)$ y $0 \in \{i_1,..,i_n\}$.

Convenciones:
Sea $f \in$ SIM.OP, entonces:

(i) Si FUNC(f)=(i), (nótese que forzosamente $(i) \neq (0)$), entonces f es por definición un símbolo de constante individual de tipo (i).

(ii) Si FUNC(f)= $(0,i_1,..,i_n)=\beta$, tal que $n \in N\setminus\{0\}$ y $0 \notin \{i_1,..,i_n\} \subseteq$ SORT, entonces f es símbolo relacional de aridad n de tipo β.

(iii) Si FUNC(f)=$(i_0,i_1,..,i_n)=\gamma$ tal que $n \in N\setminus\{0\}$ y $i_0 \neq 0$, entonces f es símbolo funcional de aridad n de tipo γ.

(iv) Si FUNC(f)=n, tal que $n \in N\setminus\{0\}$, entonces f es símbolo relacional n-ario al cual no asociamos tipo.

Alfabeto de un lenguaje multivariado.

Sea Σ=(SORT,FUNC) un tipo multivariado dado tal que Dom(FUNC)=SIM.OP. Definimos el alfabeto del lenguaje multivariado L_m de tipo Σ, como lo siguiente:

- Para cada $i \in$ SORT$\setminus\{0\}$, un conjunto numerable de símbolos de variable $v_i=\{x_0^i,..,x_n^i,...\}$; llamamos a tales símbolos de variable **variables de tipo i** –la razón de pedir $\emptyset \neq$ SORT$\setminus\{0\}$ es simplemente para tener símbolos de variable en L_m–. Denotamos el conjunto de variables $v=\bigcup_{i\in(\text{SORT}\setminus\{0\})} v_i$.
- Todos los símbolos de SIM.OP.
- Los cuantificadores $\exists,\forall$.
- Los símbolos $\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow$.
- Paréntesis y comas como símbolos auxiliares.

EXPRESIONES DE L_m.

Definimos el lenguaje multivariado L_m de tipo Σ como el conjunto de todas las sucesiones finitas de símbolos de su alfabeto; en particular definimos recursivamente:

Expresiones: términos, fórmulas. Expresión de tipo i.

E1 Toda variable de tipo i es una **expresión de tipo i**.

E2 - Si $a \in$ SIM.OP y FUNC(a)=(i_0), entonces a es una **expresión de tipo i_0**.
- Si $f \in$ SIM.OP, FUNC(f)= $(i_0,..,i_n)$, con $n \in N\setminus\{0\}$, y $e_1,..,e_n$ son **expresiones de tipo $i_1,..,i_n$** $\in$ SORT respectivamente, entonces $f(e_1,..,e_n)$ es **una expresión de tipo i_0.**

- Si $f \in SIM.OP$, $FUNC(f)=n$, con $n \in N \setminus \{0\}$, y $e_1,..,e_n$ son **expresiones de tipo $i_1,..,i_n \in SORT$** respectivamente distinto a 0, entonces $f(e_1,...,e_n)$ es una **expresión de tipo 0**.

E3 Si e es una **expresión de tipo 0** y x^i es un símbolo de **variable de tipo i**, entonces $\exists x^i e$ es una **expresión de tipo 0**.

Definiciones:

Sea Σ=(SORT,FUNC) un tipo multivariado dado.

Definimos el conjunto de las expresiones **EXPR(L_m)** como el conjunto más pequeño generado por las reglas anteriores. Escribiremos **EXPR** en vez de **EXPR(L_m)** cuando esto no cause confusión.

Definimos al conjunto de los términos **TERM(L_m)**, como **el conjunto de todas las expresiones de tipo i**, con $i \in SORT \setminus \{0\}$. Escribiremos **TERM** en vez de **TERM(L_m)** cuando esto no cause confusión.

Definimos al conjunto de las fórmulas **FORM(L_m)** como **el conjunto de todas las expresiones de tipo 0**. También denotaremos por **FORM** a **FORM(L_m)** cuando quede claro el lenguaje del que se está hablando.

Notación:

Sea $f \in SIM.OP$. Observemos que el caso E2 incluye lo siguiente:

(a1) Cuando f es un símbolo de función que no es conectivo, i.e. distinto de $\vee, \neg$.

(a2) Cuando f es un conectivo. En tal situación, tenemos los siguientes casos:
- Si $f=\neg$ y e es una expresión de tipo 0, entonces la expresión que describe E2 de tipo 0 $\neg(e)$ la denotamos por $\neg e$ cuando tal convención no cause confusión.
- Si $f=\vee$, y e_1 y e_2 son expresiones de tipo 0, entonces denotamos la expresión tipo 0 que describe E2, $\vee(e_1,e_2)$ como $(e_1 \vee e_2)$.

(a3) Cuando f es un símbolo relacional de tipo β de aridad n y no es conectivo usamos usualmente, para denotar a f, las letras R,S,T o las letras R_0^β, R_1^β, R_2^β,...con las que indicamos el tipo del símbolo relacional que no es conectivo.

(a4) Cuando f es símbolo de constante individual de tipo (i), por la definición dada, f es expresión de tipo i. En general, usaremos letras minúsculas a,b,c,.. o las letras a_0^i a_1^i a_2^i,... para denotar símbolos de constante de tipo (i) (que a veces llamaremos símbolos de constante individual de tipo i, debido a la observación recién hecha).

(a5) Cuando f es una relación n-aria sin tipo asociado tenemos como caso particular a $\approx$. Escribiremos $(e_1 \approx e_2)$ en vez de $\approx(e_1,e_2)$.

Abreviaciones:

Sean φ y π fórmulas arbitrarias de un lenguaje multivariado L_m, y x^i variable de tipo i (para alguna $i \in SORT \setminus \{0\}$). Definimos las fórmulas $\varphi\wedge\pi$, $\varphi\rightarrow\pi$, $\varphi\leftrightarrow\pi$ y $\forall x^i\varphi$ como:

$\varphi\wedge\pi = \neg(\neg\varphi\vee\neg\pi)$
$\varphi\rightarrow\pi = \neg\varphi\vee\pi$
$\varphi\leftrightarrow\pi = (\varphi\rightarrow\pi)\wedge(\pi\rightarrow\varphi)$
$\forall x^i\varphi = \neg\exists x^i\neg\varphi$

Variables libres y variables acotadas.

A continuación definiremos la función $\mathbf{FREE_{mv}}$, con dominio $EXPR(L_m)$ y contradominio el conjunto de subconjuntos finitos de variables, que nos servirá para determinar cuándo una expresión de nuestro lenguaje multivariado tiene o no variables libres; al igual que antes, nuestra definición será por recursión.

Definimos $FREE_{mv}:EXPR(L_m)\rightarrow$(subconjuntos finitos de ν) como:

(E1) $FREE_{mv}(x^i)=\{x^i\}$ para cualquier símbolo de variable de tipo i.
(E2) $FREE_{mv}(f(e_1,...e_n))=FREE_{mv}(e_1)\cup...\cup FREE_{mv}(e_n)$ para cada $n\in N$, para $e_1,...e_n$ expresiones de tipo $i_1,..,i_n\in SORT$ respectivamente, y para cualquier $f\in SIM.OP$ tal que $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$. Además:
$FREE_{mv}(f(e_1,...e_n))=FREE_{mv}(e_1)\cup...\cup FREE_{mv}(e_n)$ para cada $n\in N\setminus\{0\}$, para $e_1,...,e_n$ expresiones de tipo $i_1,..,i_n\in SORT$ respectivamente distinto a 0, y para cualquier $f\in SIM.OP$ tal que $FUNC(f)=n$.
(E3) $FREE_{mv}(\exists x^i e)=FREE_{mv}(e)\setminus\{x^i\}$.

Expresiones cerradas.

Definiciones:

Un **término τ es cerrado** cuando $FREE_{mv}(\tau)=\emptyset$.
Una fórmula φ es un **enunciado** cuando $FREE_{mv}(\varphi)=\emptyset$.
Llamamos $\mathbf{SENT(L_m)}$ al conjunto de enunciados de nuestro lenguaje L_m. A veces denotaremos $\mathbf{SENT(L_m)}$ por **SENT** cuando esto no cause confusión.
Además, si Γ es un conjunto de fórmulas, denotamos $\mathbf{FREE_{mv}(\Gamma)} = \bigcup_{\varphi\in\Gamma} \mathbf{FREE_{mv}(\varphi)}$.

Sustitución de una variable libre de una fórmula por un término.

La operación de sustituir una variable libre x^i de una fórmula $\varphi\in FORM$ por un término τ (de tipo d, no necesariamente d=i) para obtener una fórmula π (que denotamos $\varphi(x^i|\tau)$) de tal manera que π diga de τ exactamente lo mismo que lo que decía la formula φ de x^i, la definimos de la siguiente manera para expresiones (en particular quedará definida para fórmulas):

(E1) Para cada $j\in SORT\setminus\{0\}$ y z^j una variable de tipo j tenemos:
Si $z^j\neq x^i$, entonces $z^j(x^i|\tau)=z^j$.

Si $z^j=x^i$ entonces $z^j(x^i|\tau)=\tau$.

(E2) – Sean $f\in SIM.OP$, $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$, $e_1,..,e_n$ expresiones de tipo $i_1,..,i_n\in SORT$ respectivamente, y $0\notin\{i_1,..,i_n\}$ (nótese que esto último significa pedir que f no sea conectivo).

Si x^i y τ son de distintos tipos entonces $f(e_1,..,e_n)(x^i|\tau)=f(e_1,..,e_n)$.

Si x^i y τ son del mismo tipo entonces $f(e_1,..,e_n)(x^i|\tau)=f(e_1(x^i|\tau),..,e_n(x^i|\tau))$.

– Si $R\in SIM.OP$, $FUNC(R)=n$, $n\in N\setminus\{0\}$, $e_1,..,e_n$ expresiones de tipo $i_1,..,i_n\in SORT\setminus\{0\}$ respectivamente, entonces $R(e_1,..,e_n)(x^i|\tau)=R(e_1(x^i|\tau),..,e_n(x^i|\tau))$.

– Cuando f es un conectivo y e_1 y e_2 son expresiones de tipo 0:

Si $f=\neg$, entonces $(\neg\varphi)(x^i|\tau)=\neg\varphi(x^i|\tau)$

Si $f=\vee$, entonces $(e_1\vee e_2)(x^i|\tau)=(e_1(x^i|\tau)\vee e_2(x^i|\tau))$

(E3) Sea φ es una expresión de tipo 0 (que es equivalente a decir que φ es fórmula):

Si $x^i\notin FREE_{mv}(\exists z^j\varphi)$ entonces $(\exists z^j\varphi)(x^i|\tau)=\exists z^j\varphi$.

Si $x^i\in FREE_{mv}(\exists z^j\varphi)$ y $z^j\notin FREE_{mv}(\tau)$ entonces $(\exists z^j\varphi)(x^i|\tau)=\exists z^j(\varphi(x^i|\tau))$.

Si $x^i\in FREE_{mv}(\exists z^j\varphi)$ y $z^j\in FREE_{mv}(\tau)$ entonces sea y^j la variable individual con índice menor del conjunto $v_j\setminus FREE_{mv}(\exists z^j\varphi)\cup FREE_{mv}(\tau)$. Entonces: $(\exists z^j\varphi)(x^i|\tau)=\exists y^j(\varphi(z^j|y^j)(x|\tau))$.

SEMANTICA DE LMV.

Estructura multivariada.

Una estructura multivariada $\mathcal{A}$ de tipo Σ=(SORT,FUNC) es un par $\mathcal{A}=((Ai)_{i\in SORT},(f^{\mathcal{A}})_{f\in SIM.OP})$ tal que:

(i) $(Ai)_{i\in SORT}$ es una familia de conjuntos no vacíos. Si $i\in SORT$, Ai es el i-ésimo universo de $\mathcal{A}$. Además $A_0=\{V,F\}$.

(ii) $(f^{\mathcal{A}})_{f\in SIM.OP}$ es una familia de funciones tal que:

(iia) Para cada $f\in SIM.OP$ tal que $FUNC(f)= (i_0,..,i_n)$, $f^{\mathcal{A}}:Ai_1x..xAi_n\rightarrow Ai_0$ es una función. Además como $\neg,\vee\in SIM.OP$, entonces:

$$\neg^{\mathcal{A}}:A_0\rightarrow A_0, \qquad \vee^{\mathcal{A}}:A_0xA_0\rightarrow A_0$$

$$\begin{array}{ll} V\rightarrow F & (V,V)\rightarrow V \\ F\rightarrow V & (V,F)\rightarrow V \\ & (F,V)\rightarrow V \\ & (F,F)\rightarrow F \end{array}$$

(iib) Para cada $f\in SIM.OP$ tal que $FUNC(f)= n$, $f^{\mathcal{A}}:(\cup Ai)^n{}_{i\in SORT\setminus\{0\}}\rightarrow A_0$ es una relación n-aria. En particular $\approx$ es siempre –por definición– la identidad, es decir, $\approx^{\mathcal{A}}(z,w)$=T si y sólo si z=w (recuérdese que $\approx\in SIM.OP$ y $FUNC(\approx)=2$).

Observaciones:

(A) Si $f \in SIM.OP$ y $FUNC(f)= (i_0,..,i_n)=\beta$ es su tipo, decimos que $f^{\mathcal{A}}$ es de tipo β; además decimos que $f^{\mathcal{A}}$ tiene argumento de tipo $(i_1,..,i_n)$ y valor de tipo i_0. Como casos especiales tenemos los símbolos de constante, funciones propias de tipo β (es decir símbolos funcionales), relaciones de tipo β y conectivos (estos últimos ya vistos en (iia)):
   (1) Si $FUNC(f)=(i)$, $i \in SORT$, entonces f es símbolo de constante individual y $f^{\mathcal{A}} \in Ai$.
   (2) Si $FUNC(f)= (0,i_1,..,i_n)=\beta$ entonces f es símbolo relacional de tipo β, y tenemos que $f^{\mathcal{A}}:Ai_1x..xAi_n \rightarrow A_0$ es una relación n-aria de universos de $\mathcal{A}$.
   (3) Si $FUNC(f)= (i_0,i_1,..,i_n)=\beta$, $i_0 \neq 0$, entonces f es símbolo funcional de tipo β, y tenemos que $f^{\mathcal{A}}:Ai_1x..xAi_n \rightarrow Ai_0$ es una función n-aria entre universos de $\mathcal{A}$.

(B) Entendemos por la cardinalidad de la estructura multivariada $\mathcal{A}$ la suma de las cardinalidades de sus distintos dominios.

Asignaciones e Interpretaciones.

Dados una estructura $\mathcal{A}=((Ai)_{i \in SORT},(f^{\mathcal{A}})_{f \in SIM.OP})$ y un lenguaje L_m multivariados ambos de un tipo Σ fijo, para ligar la una con el otro definimos, como es usual, lo que es una asignación.

Definición:

Una **asignación** M es una función $M:\cup_{i \in SORT\setminus\{0\}} \nu_i \rightarrow \cup_{i \in SORT\setminus\{0\}} Ai$, tal que $M[\nu_i] \subseteq Ai$ para todo $i \in SORT\setminus\{0\}$.
Una **interpretación I sobre una estructura** $\mathcal{A}$ es un par $I=(\mathcal{A},M)$, donde M es una asignación sobre $\mathcal{A}$.

Definición:

Sea $I=(\mathcal{A},M)$ una interpretación de L_m sobre $\mathcal{A}$. Definimos por recursión:

(E1) $I(x^i)=M(x^i)$ para todo $i \in SORT\setminus\{0\}$ y para toda $x^i \in \nu_i$.
(E2) Si $f \in SIM.OP$, $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$, $n \in N$, y $e_1 ,...,e_n$ son expresiones de tipo $i_1,..,i_n \in SORT$ respectivamente, entonces $I(f(e_1,...,e_n))= f^{\mathcal{A}}(I(e_1),...,I(e_n))$
   Si $R \in SIM.OP$, $FUNC(R)=n$, $n \in N\setminus\{0\}$, y $e_1 ,...,e_n$ son expresiones de tipo $i_1,..,i_n \in SORT\setminus\{0\}$ respectivamente, entonces $I(R(e_1 ,...,e_n))= R^{\mathcal{A}}(I(e_1),...,I(e_n))$
(E3) $I(\exists x^i\varphi)=V$ si y sólo si $\{z \in Ai \mid (\mathcal{A},M(x^i/z))(\varphi)=V\} \neq \varnothing$ donde $M(x^i/z)=(M\setminus\{(x^i,M(x^i))\}) \cup \{(x^i,z)\}$.

Además si I es la interpretación $I=(\mathcal{A},M)$, denotamos:
$I(x^i/a)=(\mathcal{A},M(x^i/a))$, para cualquiera $x^i \in \nu_i$ y $a \in Ai$

Definición:

Una interpretación **I satisface una fórmula** $\varphi \in$ FORM, (lo que denotamos I sat φ) si y sólo si $I(\varphi)=V$.

Modelos de fórmulas.

Definición:

(a) Dada una fórmula φ, decimos que una interpretación **I es modelo de φ** (lo que denotamos $I \models \varphi$) si y sólo si I sat φ.
(b) Dado un conjunto de fórmulas $K \subseteq$ FORM, una interpretación **I es modelo de K** (lo que denotamos $I \models K$) si y sólo si para cada $\varphi \in K$, I sat φ.

Satisfacibilidad.

Definición:

(a) Una fórmula φ es satisfacible si y sólo si existe una interpretación I tal que $I \models \varphi$.
(b) Un conjunto de fórmulas K es satisfacible si existe una interpretación I tal que $I \models K$.

Consecuencia lógica y validez universal.

Definición:

(i) Una fórmula φ **es consecuencia lógica de un conjunto K** de fórmulas (lo que denotamos $K \models \varphi$), si y sólo si todo modelo de K es modelo de φ.
(ii) Una fórmula φ **es independiente de un conjunto K** de fórmulas si y sólo si φ no es consecuencia lógica de K.
(iii) Una fórmula φ **es válida** si y sólo si $\varnothing \models \varphi$ (usualmente esto se denota como $\models \varphi$).

Equivalencia lógica.

Definición:

Dos fórmulas φ, π **son lógicamente equivalentes** si y sólo si $\varphi \models \pi$ y $\pi \models \varphi$. Cuando φ y π son lógicamente equivalentes lo abreviamos con $\varphi \mathrel{|\!\!\!=\!\!\!|} \pi$.

Proposición(iii1): Para cualesquiera fórmulas φ y π, $\varphi \mathrel{|\!\!\!=\!\!\!|} \pi$ si y sólo si $\models \varphi \leftrightarrow \pi$.

Demostración:
(La prueba es la misma que se dio en el capítulo I de lógica de segundo orden, donde se estableció un teorema que decía lo mismo para tal lógica).
■
TEOREMAS SEMÁNTICOS DE LA LÓGICA MULTIVARIADA

Teorema(iii1)(Lema de coincidencia): Sea L_m un lenguaje multivariado de tipo Σ y sea $\mathscr{A}$ una estructura multivariada de tipo Σ. Entonces para cualesquiera M_1 y M_2 asignaciones arbitrarias de L_m en $\mathscr{A}$ y para toda expresión $e \in EXPR(L_m)$, si para toda $z \in FREE_{mv}(e)$ $M_1(z)=M_2(z)$, entonces $(\mathscr{A},M_1)(e)=(\mathscr{A},M_2)(e)$.

Demostración:
La demostración es por inducción sobre la formación de las expresiones de L_m, similar a la de los teoremas (i3) y (i4) del capítulo I. La dejamos al lector.
■

Teorema(iii2)(Lema de sustitución): Sean x^i una variable individual de tipo i y sea τ un término de tipo i de un lenguaje multivariado L_m de tipo Σ. Sean $\mathscr{A}$ una estructura multivariada de tipo Σ y $e \in EXPR(L_m)$ una expresión arbitraria de L_m. Sea $I=(\mathscr{A},M)$. Entonces para toda asignación M de L_m en $\mathscr{A}$, $I(x^i/I(\tau))(e)=I(e(x^i|\tau))$.

Demostración:
La prueba es análoga a la prueba que se hace en lógica de primer orden, es por inducción y larga. La dejamos al lector.
■

Homomorfismos y teoremas de isomorfismo.

Sea L_m un lenguaje multivariado de tipo Σ=(SORT,FUNC) tal que Dom(FUNC)=SIM.OP. Además, sean $\mathscr{A}=((Ai)_{i\in SORT}, (f^{\mathscr{A}})_{C\in SIM.OP})$ y $\mathscr{B}=((Bi)_{i\in SORT},(f^{\mathscr{B}})_{C\in SIM.OP})$ estructuras multivariadas de tipo Σ.

Definición:

Una función $h:\cup_{i\in SORT}Ai \rightarrow \cup_{i\in SORT}Bi$ es un **homomorfismo** de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ (lo cual lo denotamos como $h:\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}$) si y sólo si:

(1) Para cada $i \in SORT$, $h|_{Ai}:Ai\rightarrow Bi$.
(2) Para cada $f \in SIM.OP$, si $FUNC(f)=(i_0,.., i_n)$ entonces para todo $a_q \in Ai_q$, con $q \in \{0,..,n\}$, $h(f^{\mathscr{A}}(a_1,...,a_n))=f^{\mathscr{B}}(h(a_1),...,h(a_n))$.
(3) Para cada $c \in SIM.OP$, si $FUNC(c)=(i_0)$, entonces $h(c^{\mathscr{A}})=c^{\mathscr{B}}$.
(4) Para cada $f \in CONS.OP$, si $FUNC(R)=n$ entonces para todo $a_1,..,a_n \in \cup_{i\in SORT}Ai$, $h(f^{\mathscr{A}}(a_1,...,a_n))=f^{\mathscr{B}}(h(a_1),...,h(a_n))$.

Definición:

Sea $h:\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}$ un homomorfismo entre estructuras multivariadas de tipo Σ. h es un **isomorfismo** si y sólo si para cada $i \in SORT$, $h|_{Ai}:Ai\rightarrow Bi$ es biyectivo.

Proposición(iii2): Sea L_m un lenguaje multivariado de tipo Σ=(SORT,FUNC) tal que Dom(FUNC)=SIM.OP. Además, sean $\mathscr{A}=((Ai)_{i\in SORT}, (f^{\mathscr{A}})_{C\in SIM.OP})$ y

$\mathcal{B}=((Bi)_{i\in SORT},(f^{\mathcal{B}})_{c\in SIM.OP})$ estructuras multivariadas de tipo Σ tales que existe un homomorfismo $h:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$. Entonces:

(1) Para cualquier asignación M de L_m en $\mathcal{A}$, $h\circ M$ es una asignación de L_m en $\mathcal{B}$.

(2) $h(V)=V$ y $h(F)=F$, donde $\{V,F\}=A_0=B_0$.

Demostración:

(1) Es inmediata del hecho de que M es una asignación de L_m en $\mathcal{A}$ y de que h es un homomorfismo.

(2) Sea $i\in SORT\backslash\{0\}$ y sea M una asignación arbitraria de L_m en $\mathcal{A}$. Nótese que $h(V)=h((\mathcal{A},M)(x^i\approx x^i))=h(\approx^{\mathcal{A}}(M(x^i),M(x^i)))=\approx^{\mathcal{B}}(h(M(x^i)),h(M(x^i)))=$ $\approx^{\mathcal{B}}((h\circ M)(x^i),(h\circ M)(x^i))=(\mathcal{B},h\circ M)((x^i\approx x^i))=V$. Además: $h(F)=h((\mathcal{A},M)(\neg(x^i\approx x^i))=h(\neg^{\mathcal{A}}((\mathcal{A},M)(x^i\approx x^i)))=h(\neg^{\mathcal{A}}(\approx^{\mathcal{A}}(M(x^i),M(x^i))))=$ $\neg^{\mathcal{B}}(h(\approx^{\mathcal{B}}(M(x^i),M(x^i))))=\neg^{\mathcal{B}}(V)=F$.

■

Teorema(iii3)(Teorema del isomorfismo): Sea L_m un lenguaje multivariado de tipo $\Sigma=(SORT,FUNC)$ tal que $Dom(FUNC)=SIM.OP$. Además, sean $\mathcal{A}=((Ai)_{i\in SORT},(f^{\mathcal{A}})_{c\in SIM.OP})$ y $\mathcal{B}=((Bi)_{i\in SORT},(f^{\mathcal{B}})_{c\in SIM.OP})$ estructuras multivariadas de tipo Σ tales que existe un isomorfismo $h:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$. Entonces para toda asignación M de L_m en $\mathcal{A}$ y para toda expresión $e\in EXPR(L_m)$ se tiene que $h((\mathcal{A},M)(e))=(\mathcal{B},h\circ M)(e)$.

Demostración:

(Por inducción sobre la formación de las expresiones de L_m).

Paso base de la inducción.

(E1) Para toda asignación M de L_m en $\mathcal{A}$ y para toda variable x^i de tipo i, $h((\mathcal{A},M)(x^i))=h(M(x^i))=(h\circ M)(x^i)=(\mathcal{B},h\circ M)(x^i)$.

Paso inductivo.

(E2) - Sea $c\in SIM.OP$ tal que $FUNC(a)=(i_0)$. Entonces tenemos que para toda asignación M de L_m en $\mathcal{A}$, $h((\mathcal{A},M)(c))=h(c^{\mathcal{A}})=c^{\mathcal{B}}=(\mathcal{B},h\circ M)(c)$.

Supongamos que $e_1,..,e_n$ son expresiones de tipo $i_1,..,i_n$ respectivamente, tales que para toda asignación M de L_m en $\mathcal{A}$ y para cada $q\in\{1,..,n\}$, $h((\mathcal{A},M)(e_q))=(\mathcal{B},h\circ M)(e_q)$.

- Sea $f\in SIM.OP$ tal que $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$. Entonces para toda asignación M de L_m en $\mathcal{A}$, $h((\mathcal{A},M)(f(e_1,..,e_n)))=h(f^{\mathcal{A}}((\mathcal{A},M)(e_1),..,(\mathcal{A},M)(e_n)))=$ $f^{\mathcal{B}}(h((\mathcal{A},M)(e_1)),..,h((\mathcal{A},M)(e_n)))=f^{\mathcal{B}}((\mathcal{B},h\circ M)(e_1),..,(\mathcal{B},h\circ M)(e_n))=$ $(\mathcal{B},h\circ M)(f(e_1,..,e_n))$.

- Sea $f\in SIM.OP$ tal que $FUNC(f)=n$. Entonces para toda asignación M de L_m en $\mathcal{A}$, $h((\mathcal{A},M)(f(e_1,..,e_n)))=h(f^{\mathcal{A}}((\mathcal{A},M)(e_1),..,(\mathcal{A},M)(e_n)))=$ $f^{\mathcal{B}}(h((\mathcal{A},M)(e_1)),..,h((\mathcal{A},M)(e_n)))=f^{\mathcal{B}}((\mathcal{B},h\circ M)(e_1),..,(\mathcal{B},h\circ M)(e_n))=$ $(\mathcal{B},h\circ M)(f(e_1,..,e_n))$.

(E3) Supongamos que e es una expresión de tipo 0 tal que para toda asignación M de L_m en $\mathcal{A}$, $h((\mathcal{A},M)(e))=(\mathcal{B},h\circ M)(e)$. Sea x^i una variable arbitraria de tipo i. Entonces $h((\mathcal{A},M)(\exists x^i e))=V$ **si y sólo si** –usando la proposición(iii2) inciso (2)–, $(\mathcal{A},M)(\exists x^i e)=V$ **si y sólo si** hay $a_i\in Ai$ tal que $(\mathcal{A},M(x^i/a_i))(e)=V$ **si y sólo si** hay $a_i\in Ai$ tal que $h((\mathcal{A},M(x^i/a_i))(e))=h(V)=V$ **si y sólo si** –por la hipótesis de inducción– $(\mathcal{B},h\circ \mathbf{M(x^i/a_i)})(e)=V$ **si y sólo si** hay $h(a_i)\in Bi$ tal que

$(\mathcal{B},(h\circ M)(x^i/h(a_i)))(e)=V$ **si y sólo si** –debido a que $h|_{Ai}$ es biyección entre Ai y Bi– $(\mathcal{B},h\circ M)(\exists x^i e)= V$.

■

REDUCCION A LOGICA DE PRIMER ORDEN

Como ya hemos mencionado al principio de este capítulo, la lógica multivariada no es una extensión propia de la lógica de primer orden; con lo anterior queremos decir que es posible pasar de la lógica multivariada a la lógica de primer orden de manera que a cada lenguaje multivariado L_m se le asocie un lenguaje de primer orden L_m^* (de manera más precisa, a cada fórmula $\varphi \in L_m$ se le asocia una fórmula $\varphi^* \in L_m^*$), a cada estructura multivariada $\mathcal{A}$ una estructura monovariada $\mathcal{A}^*$ (es decir una estructura usual de primer orden) y a cada asignación multivariada M una asignación de primer orden M* (que, como veremos, M=M*). Tales asociaciones cumplen además que toda fórmula φ multivariada es satisfacible por una interpretación multivariada $(\mathcal{A},M)$ si y sólo si la traducción a primer orden φ^* es satisfacible por $(\mathcal{A}^*,M^*)$; por último, se verá que una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Π de L_m si y sólo si φ^* es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Ψ de L_m^*. **Es en este sentido que la lógica multivariada se reduce a lógica de primer orden.** En lo que sigue nos dedicaremos a mostrar estos resultados. Sólo un detalle antes de continuar: a menudo diremos lógica monovariada o estructura monovariada como sinónimo de lógica de primer orden o de estructura de primer orden, respectivamente (las razones de tal convención son obvias).

Traducción sintáctica (relativización de cuantificadores).

Sea L_m un lenguaje multivariado de tipo Σ y SIM.OP su conjunto de símbolos de operación.

Definición:

Sea L_m^* el lenguaje de primer orden tipo Σ^* (de acuerdo a la definición usual), donde:
- $\Sigma^*=(\text{SIM.OP}\setminus\{\vee,\neg,\approx\})\cup\{Q_i \mid i\in \text{SORT}\setminus\{0\}\}$.
- Para todo i,j tal que $i,j\in \text{SORT}\setminus\{0\}$, Q_i es un símbolo relacional de aridad 1, $Q_i\neq Q_j$ si $i\neq j$. Además para todo $i\in \text{SORT}\setminus\{0\}$, $Q_i\notin \text{SIM.OP}$.
- Para cada $f\in \text{SIM.OP}$ tal que $\text{FUNC}(f)= (i_0,..,i_n)$, $n\in N\setminus\{0\}$, y $i_0\neq 0$, f es símbolo funcional de aridad n.
- Para cada $f\in \text{SIM.OP}$ tal que $\text{FUNC}(f)= (i)$, f es símbolo de constante individual.
- Para cada $R\in \text{SIM.OP}$ tal que $\text{FUNC}(R)= (0,..,i_n)$ ó $\text{FUNC}(R)= n$, con $n\in N\setminus\{0\}$, R es símbolo relacional de aridad n.
- El conjunto de variables de L_m^* será el mismo que el conjunto de variables v de L_m (recuérdese que desde el principio se pidió que SORT fuese contable; esta es la razón técnica que teníamos para limitar el cardinal de SORT).

Definición:

Definiremos recursivamente la función $TRANS:EXPR(L_m)\to EXPR(L_m*)$ del conjunto de las expresiones de L_m al conjunto de las expresiones de L_m*, con la cual quedará definida la asociación de fórmulas $\varphi\in L_m$ con fórmulas $\varphi*\in L_m*$:

(E1) $TRANS(x^i)=x^i$ para cada símbolo de variable x^i de tipo i.

(E2) – Sean $f\in SIM.OP$, $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$, $e_1,..,e_n$ expresiones de tipo $i_1,..,i_n\in SORT$ respectivamente, y $0\notin\{i_1,..,i_n\}$ (nótese esto último significa pedir que f no sea conectivo). Entonces:
$TRANS(f(e_1,..,e_n))=f(TRANS(e_1),...,TRANS(e_n))$.
– Si $f\in SIM.OP$ y $FUNC(f)=(i)$, entonces $TRANS(f)=f$
– Si $R\in SIM.OP$, $FUNC(R)=n$, $n\in N\setminus\{0\}$, $e_1,..,e_n$ expresiones de tipo $i_1,..,i_n\in SORT\setminus\{0\}$ (es decir, son términos) respectivamente, entonces:
$TRANS(R(e_1,..,e_n))=R(TRANS(e_1),...,TRANS(e_n))$
– Cuando f es un conectivo y φ, e_1 y e_2 son expresiones de tipo 0 (es decir, fórmulas):
Si $f=\neg$, entonces $TRANS(\neg\varphi)=\neg TRANS(\varphi)$
Si $f=\vee$, entonces $TRANS(e_1\vee e_2)=TRANS(e_1)\vee TRANS(e_2)$

(E3) $TRANS(\exists x^i\varphi)=\exists x^i(Q_i(x^i)\wedge TRANS(\varphi))$.

Adviértanse las siguientes dos características de la función TRANS (dejamos la verificación de tales hechos al lector):
(1) $\varphi\in FORM(L_m)$ si y sólo si $TRANS(\varphi)\in FORM(L_m*)$.
(2) $\varphi\in SENT(L_m)$ si y sólo si $TRANS(\varphi)\in SENT(L_m*)$.

Conversión de estructuras.

<u>(De estructuras multivariadas a estructuras monovariadas)</u>.

Ahora hagamos la parte semántica de nuestra traducción de lógica multivariada a lógica de primer orden. Sea $\mathcal{A}=((Ai)_{i\in SORT},(f^{\mathcal{A}})_{f\in SIM.OP})$ una estructura multivariada de tipo Σ.

Definición:

Sea $\mathcal{A}*=(A,(f^{\mathcal{A}*})_{f\in(SIM.OP\setminus\{\neg,\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow,\approx\})},Q_i^{\mathcal{A}*})$, donde:

- $A=\cup_{i\in(SORT\setminus\{0\})}Ai$
- Para cada $f\in(SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\wedge,\to,\leftrightarrow,\approx\})$ tal que $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$, y $i_0\neq 0$; $f^{\mathcal{A}*}$ es la función $f^{\mathcal{A}*}:A^n\to A$ definida como:
$f^{\mathcal{A}*}(w)=f^{\mathcal{A}}(w)$ para todo $w\in Dom(f^{\mathcal{A}})$, y $f^{\mathcal{A}*}(w)=w$ para todo $w\in A^n\setminus Dom(f^{\mathcal{A}})$ (de hecho $f^{\mathcal{A}*}$ puede ser cualquier extensión de $f^{\mathcal{A}}$ en A^n).
- Para cada $f\in(SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\approx\})$ tal que $FUNC(f)=(i)$, $i\neq 0$, $f^{\mathcal{A}*}=f^{\mathcal{A}}\in Ai\subseteq A$.
- Para cada $R\in(SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\wedge,\to,\leftrightarrow,\approx\})$ tal que $FUNC(R)=(0,i_1,..,i_n)$ ó $FUNC(R)=n$, $n\in N\setminus\{0\}$; $R^{\mathcal{A}*}=\{(z_1,..,z_n)\in A^n\mid R^{\mathcal{A}}(z_1,..,z_n)=V\}$.

- Para cada $i \in SORT \backslash \{0\}$, $Q_i^{\mathcal{A}^*} = Ai$.

Decimos que $\mathcal{A}^*$ se obtiene de $\mathcal{A}$ y además que tiene tipo Σ^*; nótese que existen muchas estructuras $\mathcal{B}^*$ que se obtienen de $\mathcal{A}$ de tipo Σ^* (la diferencia estriba en la manera de extender las funciones $f^{\mathcal{A}}$); además, obsérvese que si M es una asignación de L_m en $\mathcal{A}$, entonces claramente M es una asignación de L_m^* en $\mathcal{B}^*$. Los siguientes teoremas valen para cualquier estructura $\mathcal{B}^*$ de tipo Σ^* obtenida a partir de $\mathcal{A}$.

Teorema(iii4): Sea $\mathcal{A}$ una estructura multivariada de tipo Σ y sea $\mathcal{B}^*$ una estructura monovariada de tipo Σ^* que se obtiene de $\mathcal{A}$. Entonces para cualquier expresión multivariada $e \in EXPR(\Sigma)$ del lenguaje multivariado L_m de tipo Σ, y para cualquier asignación M de L_m en $\mathcal{A}$ se tiene que $(\mathcal{A},M)(e)=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e))$.

Demostración:
(Por inducción sobre la formación de las expresiones de L_m).
(E1) $(\mathcal{A},M)(x^i)=M(x^i)=(\mathcal{B}^*,M)(x^i)=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(x^i))$ para toda variable x^i, para todo $i \in SORT \backslash \{0\}$, y para toda asignación M.
(E2) - Supongamos que $f \in SIM.OP \backslash \{\vee,\neg,\approx\}$, $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$ y $e_1,..,e_n$ expresiones de tipo $i_1,..,i_n \in SORT$ respectivamente, tal que $(\mathcal{A},M)(e_j)=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_j))$ para todo $j \in \{1,..,n\}$ y para toda asignación M. Entonces:
$(\mathcal{A},M)(f(e_1,..,e_n))=f^{\mathcal{A}}((\mathcal{A},M)(e_1),..,(\mathcal{A},M)(e_n))=$
$f^{\mathcal{A}}((\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_1)),..,(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_n)))=$
$f^{\mathcal{A}^*}((\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_1)),..,(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_n)))=$
$(\mathcal{B}^*,M)(f(TRANS(e_1),..,TRANS(e_n)))=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(f(e_1,..,e_n)))$ para toda asignación M.
- Supongamos ahora que $R \in SIM.OP \backslash \{\vee,\neg,\approx\}$, $FUNC(R)=n$ (con $n \in N \backslash \{0\}$) y $e_1,..,e_n$ son expresiones de tipo $i_1,..,i_n \in SORT$ distinto a 0 respectivamente, tal que $(\mathcal{A},M)(e_j)=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_j))$ para todo $j \in \{1,..,n\}$ y para toda asignación M. Entonces:
$(\mathcal{A},M)(R(e_1,..,e_n))=R^{\mathcal{A}}((\mathcal{A},M)(e_1),..,(\mathcal{A},M)(e_n))=$
$R^{\mathcal{A}}((\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_1)),..,(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_n)))=$
$R^{\mathcal{A}^*}((\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_1)),..,(\mathcal{B}^*,M)(T| RANS(e_n)))=$
$(\mathcal{B}^*,M)(R(TRANS(e_1),..,TRANS(e_n)))=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(R(e_1,..,e_n)))$ para toda asignación M.
- Supongamos $R \in \{\vee,\neg,\approx\} \backslash \{\approx\}$ y e_1 y e_2 fórmulas tal que $(\mathcal{A},M)(e_1)=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_1))$ y $(\mathcal{A},M)(e_2)=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_2))$ para toda asignación M. Entonces:
+ Si $R=\vee$, entonces $(\mathcal{A},M)(e_1 \vee e_2)=\vee^{\mathcal{A}}((\mathcal{A},M)(e_1),(\mathcal{A},M)(e_2))=$
$\vee^{\mathcal{A}}((\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_1)),(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_2)))=$
$(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_1) \vee TRANS(e_2))=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(e_1 \vee e_2))$.
+ Si $R=\neg$, entonces $(\mathcal{A},M)(\neg e_1)=\neg^{\mathcal{A}}((\mathcal{A},M)(e_1))=\neg^{\mathcal{A}}((\mathcal{B}^*.M)(TRANS(e_1)))=$
$(\mathcal{B}^*,M)(\neg TRANS(e_1))= (\mathcal{B}^*,M)(TRANS(\neg e_1))$.
Todo lo anterior para toda asignación M.
- Si $R=\approx$, y τ_1 y τ_2 son términos tal que $(\mathcal{A},M)(\tau_1)=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(\tau_1))$ y

$(\mathcal{A},M)(\tau_2)=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(\tau_2))$, entonces $(\mathcal{A},M)(\tau_1\approx\tau_2)=$
$\approx^{\mathcal{A}}((\mathcal{A},M)(\tau_1),(\mathcal{A},M)(\tau_2))=\approx^{\mathcal{A}}((\mathcal{B}^*,M)(TRANS(\tau_1)),(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(\tau_2)))=$
$(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(\tau_1)\approx TRANS(\tau_2))=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(\tau_1\approx\tau_2))$. Para toda asignación M.

(E3) Supongamos φ fórmula tal que $(\mathcal{A},M)(\varphi)=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(\varphi))$ para toda asignación M, y sea x^i símbolo de variable de tipo i. Entonces:
- $(\mathcal{A},M)(\exists x^i\varphi)=V$ si y sólo si $\{z\in Ai \mid (\mathcal{A},M(x^i/z))(\varphi)=V\}\neq\emptyset$, pero como $(\mathcal{A},M)(\varphi)=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(\varphi))$ para toda asignación M, en particular $(\mathcal{A}, M(x^i/z))(\varphi)=(\mathcal{B}^*, M(x^i/z))(TRANS(\varphi))$ y entonces tenemos que:
$\{z\in Ai \mid (\mathcal{A},M(x^i/z))(\varphi)=V\}=\{z\in Q_i^{\mathcal{B}^*}=Ai \mid (\mathcal{B}^*,M(x^i/z))(TRANS(\varphi))=V\}=$
$\{z\in(\cup_{i\in SORT\setminus\{0\}} Ai)=A \mid (\mathcal{B}^*,M(x^i/z))(Q_ix^i)=V$ y $(\mathcal{B}^*,M(x^i/z)(TRANS(\varphi))=V\}=$
$\{z\in A \mid (\mathcal{B}^*,M(x^i/z))(Q_ix^i\wedge TRANS(\varphi))=V\}=$
$\{z\in A \mid (\mathcal{B}^*,M(x^i/z))(TRANS(\exists x^i\varphi))=V\}$.
Por lo tanto $(\mathcal{A},M)(\exists x^i\varphi)=V$ si y sólo si $(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(\exists x^i\varphi))=V$, lo que prueba $(\mathcal{A},M)(\exists x^i\varphi)=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(\exists x^i\varphi))$ para toda asignación M.

■

Corolario(iii1): Sea $\mathcal{A}$ una estructura multivariada de tipo Σ y sea $\mathcal{B}^*$ una estructura monovariada de tipo Σ^* que se obtiene de $\mathcal{A}$. Para cualquier enunciado φ, si llamamos $\varphi^*=TRANS(\varphi)$, entonces: $\mathcal{A}\models\varphi$ si y sólo si $\mathcal{B}^*\models\varphi^*$.

Demostración:
Por el teorema anterior tenemos que para toda asignación M, $(\mathcal{A},M)(\varphi)=(\mathcal{B}^*,M)(TRANS(\varphi))=(\mathcal{B}^*,M)(\varphi^*)$; por otro lado sabemos por el lema de coincidencia que cuando trabajamos con enunciados φ ocurre que: Para toda asignación M la interpretación $I=(\mathcal{A},M)$ satisface φ, ó para toda asignación M la interpretación $I=(\mathcal{A},M)$ no satisface φ, (es decir, que no importa la asignación M). Por lo tanto $\mathcal{A}\models\varphi$ si y sólo si $\mathcal{B}^*\models\varphi^*$.

■

<u>(De estructuras monovariadas a estructuras multivariadas)</u>.

Es claro que una estructura monovariada se puede ver como una estructura multivariada de un tipo particular (con un solo tipo de variable), sin embargo, nos interesa estudiar la situación de tener una estructura $\mathcal{B}$ del lenguaje monovariado L_m^* que se definió a través del lenguaje multivariado L_m de tipo Σ=(SORT,FUNC) tal que Dom(FUNC)=SIM.OP; es decir, cuando $\mathcal{B}=(A,(f^{\mathcal{B}})_{f\in(SIM.OP\setminus\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,\approx\})},(Q_i^{\mathcal{B}})_{i\in SORT\setminus\{0\}})$ es una estructura monovariada donde:

- A es un conjunto distinto del vacío.
- Para cada $f\in(SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\approx\})$ tal que $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$, y $i_0\neq0$; $f^{\mathcal{B}}$ es una función $f^{\mathcal{B}}:A^n\rightarrow A$.
- Para cada $f\in(SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\approx\})$ tal que $FUNC(f)=(i)$, $f^{\mathcal{B}}\in A$.

- Para cada $R\in(SIM.OP\backslash\{\vee,\neg,\approx\})$ tal que $FUNC(R)=(0,i_1,..,i_n)$ ó $FUNC(R)=n$, $n\in N\backslash\{0\}$; $R^{\mathcal{B}}\subseteq A^n$.
- Para cada $i\in SORT\backslash\{0\}$, $Qi^{\mathcal{B}}\subseteq A$.

La estructura monovariada anterior no siempre se puede convertir en una estructura $\mathcal{A}$ multivariada de tipo Σ tal que los universos de $\mathcal{A}$ sean los $Q_i^{\mathcal{B}}$ y $\{V,F\}$, pues hay algunos problemas que pueden impedir tal conversión:
(a) Algunos de los conjuntos $Q_i^{\mathcal{B}}$ pudieran ser vacíos.
(b) Para $f\in SIM.OP$ tal que $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$, y $i_0\neq 0$, $f^{\mathcal{B}}$ es simplemente una operación n-aria $f^{\mathcal{B}}:A^n\rightarrow A$, y no hay razón alguna para que $f^{\mathcal{B}}$ restringida a $Qi_1{}^{\mathcal{B}}x..xQi_n{}^{\mathcal{B}}$ tome valores en $Qi_0{}^{\mathcal{B}}$.

Con el propósito de lograr tal conversión hagamos lo siguiente:
Sea $\Phi(\Sigma)=\{\exists xQi(x) \mid i\in SORT\backslash\{0\}\}\cup\{Qi(c) \mid c\in SIM.OP, FUNC(c)=(i)$ y $i\in SORT\backslash\{0\}\}\cup\{\forall x_1...\forall x_n(Qi_1(x_1)\wedge...\wedge Qi_n(x_n)\rightarrow Qi_0(f(x_1,...,x_n))) \mid f\in SIM.OP, FUNC(f)=(i_0,...,i_n), i_0\neq 0\}$.

Teorema(iii5): Con todas las definiciones anteriores, si $\mathcal{B}$ es modelo de $\Phi(\Sigma)$, entonces:
(1) Existe una estructura multivariada $\mathcal{B}\#$ de tipo Σ tal que:
(2) Para toda expresión $e\in EXPR(L_m)$, y para toda asignación M de L_m en $\mathcal{B}\#$, $(\mathcal{B}\#,M)(e)=(\mathcal{B},M)(TRANS(e))$.

Demostración:
(1) Definimos $\mathcal{B}\#=((Bi)_{i\in SORT},(f^{\mathcal{B}\#})_{f\in SIM.OP})$, donde:
- $B_0=\{V,F\}$; para todo $i\in SORT\backslash\{0\}$ $Bi=Qi^{\mathcal{B}}$. Nótese que para todo $i\in SORT$, $Bi\neq\emptyset$, pues $\mathcal{B}$ es modelo de $\{\exists xQi(x) \mid i\in SORT\backslash\{0\}\}$.
- Para cada $f\in SIM.OP$ tal que $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$, y $i_0\neq 0$, $f^{\mathcal{B}\#}= f^{\mathcal{B}}|Bi_1x..xBi_n$, es decir, $f^{\mathcal{B}\#}$ es la restricción de $f^{\mathcal{B}}$ a $Bi_1x..xBi_n$. Nótese que $f^{\mathcal{B}\#}:Bi_1x..xBi_n\rightarrow Bi_0$, pues $\mathcal{B}$ es modelo de$\{\forall x_1..\forall x_n(Qi_1(x_1)\wedge...\wedge Qi_n(x_n)\rightarrow Qi_0(f(x_1,.., x_n))) \mid f\in SIM.OP, FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$, y $i_0\neq 0\}$.
- Para cada $f\in SIM.OP$ tal que $FUNC(f)=(i)\neq(0)$, $f^{\mathcal{B}\#}=f^{\mathcal{B}}$. Nótese que $f^{\mathcal{B}\#}\in Qi$ debido a que $\mathcal{B}$ es modelo de $\{Qi(c) \mid c\in SIM.OP, FUNC(c)=(i)$ y $i\in SORT\backslash\{0\}\}$.
- Para cada $R\in(SIM.OP\backslash\{\vee,\neg,\approx\})$ tal que $FUNC(R)=(0,i_1,..,i_n)$, $R^{\mathcal{B}\#}:Bi_1x..xBi_n\rightarrow B_0$ es una función definida como: $R^{\mathcal{B}\#}(z_1,..,z_n)=V$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\in R^{\mathcal{B}}$.
- Para cada $R\in(SIM.OP\backslash\{\vee,\neg,\approx\})$ tal que $FUNC(R)=n$, $n\in N\backslash\{0\}$, $R^{\mathcal{B}\#}:(\cup_{i\in SORT\backslash\{0\}}Bi)^n\rightarrow B_0$ es una función definida como: $R^{\mathcal{B}\#}(z_1,..,z_n)=V$ si y sólo si $(z_1,..,z_n)\in R^{\mathcal{B}}$.
- Por último, definimos en $\mathcal{B}\#$ las funciones $\vee^{\mathcal{B}\#},\neg^{\mathcal{B}\#},\approx^{\mathcal{B}\#}$ de manera estándar, es decir, de acuerdo a la definición de estructura multivariada.

Por la manera en que se definió $\mathcal{B}\#$, tenemos que $\mathcal{B}\#$ es una estructura multivariada tipo Σ; veamos que $\mathcal{B}\#$ cumple efectivamente:
(2) (Demostración por inducción sobre la formación de las expresiones de L_m).

(E1) $(\mathcal{B}\#,M)(x^i)=M(x^i)=(\mathcal{B},M)(x^i)=(\mathcal{B},M)(TRANS(x^i))$ para toda variable x^i, para todo $i\in SORT\setminus\{0\}$, y para toda asignación M.

(E2) - Supongamos $f\in SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\approx\}$, $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$, $i_0\neq 0$, $e_1,..,e_n$ expresiones de tipo $i_1,..,i_n\in SORT$ respectivamente, tal que $(\mathcal{B}\#,M)(e_j)=(\mathcal{B},M)(TRANS(e_j))$ para todo $j\in\{1,..,n\}$ y para toda asignación M. Entonces:
$(\mathcal{B}\#,M)(f(e_1,..,e_n))=f^{\mathcal{B}\#}((\mathcal{B}\#,M)(e_1),..,(\mathcal{B}\#,M)(e_n))=$
$f^{\mathcal{B}\#}((\mathcal{B},M)(TRANS(e_1)),..,(\mathcal{B},M)(TRANS(e_n)))=$
$f^{\mathcal{B}}((\mathcal{B},M)(TRANS(e_1)),..,(\mathcal{B},M)(TRANS(e_n)))=$
$(\mathcal{B},M)(f(TRANS(e_1),..,TRANS(e_n)))=(\mathcal{B},M)(TRANS(f(e_1,..,e_n)))$ para toda asignación M.

- Supongamos ahora que $R\in SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\approx\}$, $FUNC(R)=n$ (con $n\in N\setminus\{0\}$) y $e_1,..,e_n$ son expresiones de tipo $i_1,..,i_n\in SORT$ distinto a 0 respectivamente, tal que $(\mathcal{B}\#,M)(e_j)=(\mathcal{B},M)(TRANS(e_j))$ para todo $j\in\{1,..,n\}$ y para toda asignación M. Entonces:
$(\mathcal{B}\#,M)(R(e_1,..,e_n))=R^{\mathcal{B}\#}((\mathcal{B}\#,M)(e_1),..,(\mathcal{B}\#,M)(e_n))=$
$R^{\mathcal{B}\#}((\mathcal{B},M)(TRANS(e_1)),..,(\mathcal{B},M)(TRANS(e_n)))=$
$R^{B}((\mathcal{B},M)(TRANS(e_1)),..,(\mathcal{B},M)(TRANS(e_n)))=$
$(\mathcal{B},M)(R(TRANS(e_1),..,TRANS(e_n)))=(\mathcal{B},M)(TRANS(R(e_1,..,e_n)))$ para toda asignación M.

- Supongamos $R\in\{\vee,\neg,\approx\}\setminus\{\approx\}$ y e_1 y e_2 fórmulas tal que $(\mathcal{B}\#,M)(e_1)=(\mathcal{B},M)(TRANS(e_1))$ y $(\mathcal{B}\#,M)(e_2)=(\mathcal{B},M)(TRANS(e_2))$ para toda asignación M. Entonces:

+ Si $R=\vee$, entonces $(\mathcal{B}\#,M)(e_1\vee e_2)=\vee^{\mathcal{B}\#}((\mathcal{B}\#,M)(e_1),(\mathcal{B}\#,M)(e_2))=$
$\vee^{\mathcal{B}\#}((\mathcal{B},M)(TRANS(e_1)),(\mathcal{B},M)(TRANS(e_2)))=$
$(\mathcal{B},M)(TRANS(e_1)\vee TRANS(e_2))=(\mathcal{B},M)(TRANS(e_1\vee e_2))$, para toda asignación M.

+ Si $R=\neg$, entonces $(\mathcal{B}\#,M)(\neg e_1)=\neg^{\mathcal{B}\#}((\mathcal{B}\#,M)(e_1))=\neg^{\mathcal{B}\#}((\mathcal{B},M)(TRANS(e_1)))=$
$(\mathcal{B},M)(\neg TRANS(e_1))=(\mathcal{B},M)(TRANS(\neg e_1))$, para toda asignación M.

- Si $R=\approx$, y τ_1 y τ_2 son términos tal que $(\mathcal{B}\#,M)(\tau_1)=(\mathcal{B},M)(TRANS(\tau_1))$ y $(\mathcal{B}\#,M)(\tau_2)=(\mathcal{B},M)(TRANS(\tau_2))$, entonces $(\mathcal{B}\#,M)(\tau_1\approx\tau_2)=$
$\approx^{\mathcal{B}\#}((\mathcal{B}\#,M)(\tau_1),(\mathcal{B}\#,M)(\tau_2))=\approx^{\mathcal{B}\#}((\mathcal{B},M)(TRANS(\tau_1)),(\mathcal{B},M)(TRANS(\tau_2)))=$
$(\mathcal{B},M)(TRANS(\tau_1)\approx TRANS(\tau_2))=(\mathcal{B},M)(TRANS(\tau_1\approx\tau_2))$; esto, para toda asignación M.

(E3) Supongamos φ fórmula tal que $(\mathcal{B}\#,M)(\varphi)=(\mathcal{B},M)(TRANS(\varphi))$ para toda asignación M, y sea x^i símbolo de variable de tipo i. Entonces:
- $(\mathcal{B}\#,M)(\exists x^i\varphi)=V$ si y sólo si $\{z\in Bi|\ (\mathcal{B}\#,M(x^i/z))(\varphi)=V\}\neq\varnothing$, pero como $(\mathcal{B}\#,M)(\varphi)=(\mathcal{B},M)(TRANS(\varphi))$ para toda asignación M, en particular $(\mathcal{B}\#, M(x^i/z))(\varphi)=(\mathcal{B},M(x^i/z))(TRANS(\varphi))$ y entonces tenemos que:
$\{z\in Bi\mid(\mathcal{B}\#,M(x^i/z))(\varphi)=V\}=\{z\in Bi\mid(\mathcal{B},M(x^i/z))(TRANS(\varphi))=V\}=$
$\{z\in A\mid z\in Bi=Q_i^{\mathcal{B}}$ y $(\mathcal{B},M(x^i/z))(TRANS(\varphi))=V\}=$
$\{z\in A\mid(\mathcal{B},M(x^i/z))(Q_ix^i)=V$ y $(\mathcal{B},M(x^i/z)(TRANS(\varphi))=V\}=$
$\{z\in A\mid(\mathcal{B},M(x^i/z))(Q_ix^i\wedge TRANS(\varphi))=V\}=$

$\{z \in A \mid (\mathcal{B},M(x^i/z))(TRANS(\exists x^i\varphi)) = V\}$.

Por lo tanto $(\mathcal{B}\#,M)(\exists x^i\varphi)=V$ si y sólo si $(\mathcal{B},M)(TRANS(\exists x^i\varphi))=V$, lo que prueba $(\mathcal{B}\#,M)(\exists x^i\varphi)=(\mathcal{B},M)(TRANS(\exists x^i\varphi))$ para toda asignación M.

■

Corolario(iii2): Con todas las definiciones anteriores, si $\mathcal{B}$ es modelo de $\Phi(\Sigma)$, entonces:

(1) Existe una estructura multivariada $\mathcal{B}\#$ de tipo Σ tal que:

(2) Para cualquier enunciado $\varphi \in SENT(L_m)$, si llamamos $\varphi^*=TRANS(\varphi)$, entonces: $\mathcal{B}\# \models \varphi$ si y sólo si $\mathcal{B} \models \varphi^*$.

Demostración:

Por el teorema anterior, tenemos (1) (es decir, $\mathcal{B}\#$ es la estructura multivariada definida en el teorema anterior). Además sabemos que para toda asignación M, $(\mathcal{B}\#,M)(\varphi)=(\mathcal{B},M)(TRANS(\varphi))=(\mathcal{B},M)(\varphi^*)$; por otro lado sabemos por el lema de coincidencia que cuando trabajamos con enunciados φ ocurre que: Para toda asignación M la interpretación $I=(\mathcal{A},M)$ satisface φ, ó para toda asignación M la interpretación $I=(\mathcal{A},M)$ no satisface φ, (es decir, que no importa la asignación M). Por lo tanto $\mathcal{B}\# \models \varphi$ si y sólo si $\mathcal{B} \models \varphi^*$, lo cual prueba (2).

■

Corolario(iii3): Con toda la notación anterior, sea $\mathcal{A}=((Ai)_{i\in SORT},(f^{\mathcal{A}})_{f\in SIM.OP})$ una estructura multivariada de tipo Σ=(SORT,FUNC) tal que Dom(FUNC)=SIM.OP.

Entonces:

(1) $\mathcal{A}^*\# = \mathcal{A}$.

(2) Si $\mathcal{B}=(A,(f^{\mathcal{B}})_{f\in(SIM.OP\setminus\{\neg,\vee,\approx\})},Q_i^{\mathcal{B}})$ es una estructura monovariada que cumple las hipótesis del teorema(iii5), entonces, en general, $\mathcal{B}\#^* \neq \mathcal{B}$.

Demostración:

(1) Sabemos que $\mathcal{A}^*=(A,(f^{\mathcal{A}^*})_{f\in(SIM.OP\setminus\{\neg,\vee,\approx\})},Q_i^{\mathcal{A}^*})$, donde:

- $A=\cup_{i\in(SORT\setminus\{0\})}Ai$
- Para cada $f\in(SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\approx\})$ tal que $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$, y $i_0\neq 0$; $f^{\mathcal{A}^*}$ es la función $f^{\mathcal{A}^*}:A^n \rightarrow A$ definida como:
  $f^{\mathcal{A}^*}(w)= f^{\mathcal{A}}(w)$ para todo $w\in Dom(f^{\mathcal{A}})$, y $f^{\mathcal{A}^*}(w)=w$ para todo $w\in A^n \setminus Dom(f^{\mathcal{A}})$.
- Para cada $f\in(SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\approx\})$ tal que $FUNC(f)=(i)$, $f^{\mathcal{A}^*}= f^{\mathcal{A}}\in Ai\subseteq A$.
- Para cada $R\in(SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\approx\})$ tal que $FUNC(R)=(0,i_1,..,i_n)$ ó $FUNC(R)=n$, $n\in N\setminus\{0\}$; $R^{\mathcal{A}^*}=\{(z_1,..,z_n)\in A^n \mid R^{\mathcal{A}}(z_1,..,z_n)=T\}$.
- Para cada $i\in SORT\setminus\{0\}$, $Q_i^{\mathcal{A}^*}=Ai$.

Entonces ocurre que $\mathcal{A}^*$ es modelo de:

$\Phi(\Sigma)=\{\exists xQi(x) \mid i\in SORT\setminus\{0\}\}\cup\{\forall x_1....\forall x_n(Qi_1(x_1)\wedge...\wedge Qi_n(x_n)\rightarrow Qi_0(f(x_1,.., x_n))) \mid f\in SIM.OP,\ FUNC(f)=(i_0,..,i_n),\ y\ i_0\neq 0\}\cup\{Qi(c) \mid c\in SIM.OP,\ FUNC(c)=(i)\ y\ i\in SORT\setminus\{0\}\}$ y por lo tanto podemos definir correctamente $\mathcal{A}^*\#$ de la manera descrita en el teorema(iii5): $\mathcal{A}^*\#=((Bi)_{i\in SORT},(f^{\mathcal{A}^*\#})_{f\in SIM.OP})$ donde:

- $B_0=\{V,F\}=A_0$; para todo $i\in SORT\setminus\{0\}$ $Bi=Qi^{\mathcal{A}^*}=Ai$
- Para cada $f\in SIM.OP$ tal que $FUNC(f)=(i_0,..,i_n)$, y $i_0\neq 0$, $f^{\mathcal{A}^*\#}= f^{\mathcal{A}^*}|Bi_1x..xBi_n=f^{\mathcal{A}}$
- Para cada $f\in SIM.OP$ tal que $FUNC(f)=(i)\neq(0)$, $f^{\mathcal{A}^*\#}=f^{\mathcal{A}^*}=f^{\mathcal{A}}$
- Para cada $R\in(SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\approx\})$ tal que $FUNC(R)=(0,i_1,..,i_n)$, $R^{\mathcal{A}^*\#}:Bi_1x..xBi_n\rightarrow B_0$ es tal que $R^{\mathcal{A}^*}(z_1,..,z_n)=V$ si y sólo si $(z_1,..,z_n)\in R^{\mathcal{A}^*}=\{(z_1,..,z_n)\in A^n \mid R^{\mathcal{A}}(z_1,..,z_n)=V\}$. Por lo tanto $R^{\mathcal{A}^*}=R^{\mathcal{A}}$.
- Para cada $R\in(SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\approx\})$ tal que $FUNC(R)=n$, $n\in N\setminus\{0\}$, $R^{\mathcal{A}^*\#}:(\cup_{i\in SORT\setminus\{0\}}Bi)^n\rightarrow B_0$ es tal que $R^{\mathcal{B}\#}(z_1,..,z_n)=V$ si y sólo si $(z_1,..,z_n)\in R^{\mathcal{A}^*}=\{(z_1,..,z_n)\in A^n \mid R^{\mathcal{A}}(z_1,..,z_n)=V\}$. Por lo tanto $R^{\mathcal{A}^*}=R^{\mathcal{A}}$.
- Además $\mathcal{A}^*\#$ contiene las funciones $\vee^{\mathcal{A}^*\#},\neg^{\mathcal{A}^*\#},\approx^{\mathcal{A}^*\#}$ definidas de manera estándar, por lo que $\vee^{\mathcal{A}^*\#}=\vee^{\mathcal{A}}$, $\neg^{\mathcal{A}^*\#}=\neg^{\mathcal{A}}$, $\approx^{\mathcal{A}^*\#}=\approx^{\mathcal{A}^*}$.

De todo lo anterior $\mathcal{A}^*\# = \mathcal{A}$.

(2) Teniendo $\mathcal{B}=(A,(f^{\mathcal{B}})_{f\in(SIM.OP\setminus\{\neg,\vee,\approx\})},(Qi^{\mathcal{B}})_{i\in SORT\setminus\{0\}})$ sabemos, por el teorema(iii5), que se puede definir $\mathcal{B}\#=((Bi)_{i\in SORT},(f^{\mathcal{B}\#})_{f\in SIM.OP})$; pero si $A \neq \cup_{i\in SORT} Qi^{\mathcal{B}}$, entonces $\mathcal{B}\#^*$ tiene como universo de individuos $\cup_{i\in SORT} B_i = \cup_{i\in SORT} Qi^{\mathcal{B}}$ distinto del universo de individuos de $\mathcal{B}$.

■

Corolario(iii4): De acuerdo a toda la notación anterior, sean L_m un lenguaje multivariado tipo Σ, $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_m)$, $\varphi^*=TRANS(\varphi)$ y $\Gamma^*=\{TRANS(\pi)|\pi\in\Gamma\}$.
Entonces:
En el lenguaje L_m multivariado $\Gamma\models\varphi$ si y sólo si en el lenguaje $L_m{}^*$ monovariado $\Gamma^*\cup\Phi(\Sigma)\models\varphi^*$.

Demostración:
(Suficiencia). Supongamos $\Gamma\models\varphi$ y sea $\mathcal{B}$ un modelo arbitrario monovariado de $\Gamma^*\cup\Phi(\Sigma)$; como $\mathcal{B}$ es una estructura del lenguaje $L_m{}^*$ monovariado que es modelo de $\Phi(\Sigma)$, de acuerdo al teorema(iii5), existe una estructura $\mathcal{B}\#$ del lenguaje multivariado L_m tal que $\mathcal{B}\#$ es modelo de Γ. Como por hipótesis $\Gamma\models\varphi$, entonces $\mathcal{B}\#\models\varphi$ y entonces, nuevamente por el teorema(iii5), $\mathcal{B}\models\varphi^*$.
(Necesidad). Supongamos $\Gamma^*\cup\Phi(\Sigma)\models\varphi^*$ y sea $\mathcal{A}$ un modelo arbitrario multivariado de Γ.
Sea $\mathcal{A}^*$ la estructura monovariada del lenguaje $L_m{}^*$ que se obtiene de $\mathcal{A}$ que se describió al principio de la sección de conversión de estructuras; por la manera en que se definió $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}^*$ es modelo de $\Phi(\Sigma)$. Por otro lado, debido al teorema(iii4), como $\mathcal{A}$ es modelo de Γ, entonces $\mathcal{A}^*$ es modelo de Γ^*. Así, $\mathcal{A}^*\models\Gamma^*\cup\Phi(\Sigma)$ y por lo tanto $\mathcal{A}^*\models\varphi^*$; finalmente, otra vez por el teorema(iii4), $\mathcal{A}\models\varphi$.

■

Definición:

La cardinalidad de una estructura multivariada $\mathcal{A}=((Ai)_{i\in SORT},(f^{\mathcal{A}})_{f\in SIM.OP})$ de tipo Σ , es $\Sigma_{i\in SORT\setminus\{0\}}$ $|Ai|$.

Definición:

Si Γ es un conjunto de fórmulas de un lenguaje multivariado L_m de tipo Σ, definimos el conjunto de símbolos de constante que aparecen en Γ como:
$\tau(\Gamma)=\{c\in SIM.OP\setminus\{\vee,\neg,\approx\}$ | c aparece en alguna fórmula de $\Gamma\}$.

Corolario(iii5) (Teorema de compacidad para lógica multivariada): Sea L_m un lenguaje multivariado tipo Σ, y sea $\Gamma\subseteq SENT(L_m)$. Si cada subconjunto finito de Γ tiene modelo, entonces Γ tiene modelo de cardinal menor o igual que $|\Gamma|+|\Phi(\Sigma)|+\aleph_0$.

Demostración:
Supongamos que cada subconjunto finito Γ_0 de Γ tiene un modelo multivariado $\mathcal{A}_0$. Entonces por el corolario(iii1), cada subconjunto finito Γ_0* de $\Gamma^*\subseteq SENT(L_m^*)$ tiene un modelo $\mathcal{A}_0$* que, además, es modelo de $\Phi(\Sigma)$ –de lo cual es directo el hecho de que cada subconjunto finito de $\Gamma^*\cup\Phi(\Sigma)\subseteq SENT(L_m^*)$ tiene modelo–. Por lo tanto, por el teorema de compacidad para lenguajes de primer orden, $\Gamma^*\cup\Phi(\Sigma)$ tiene un modelo $\mathcal{B}$ de cardinalidad menor o igual que $|\Gamma^*\cup\Phi(\Sigma)|+\aleph_0$. Finalmente, por los teorema(iii5) y corolario(iii2), $\mathcal{B}\#=((Bi)_{i\in SORT},(f^{\mathcal{B}\#})_{f\in SIM.OP})$ es un modelo de Γ cuya cardinalidad es $\Sigma_{i\in SORT\setminus\{0\}}|Bi|=\Sigma_{i\in SORT\setminus\{0\}}$ $|Qi^{\mathcal{B}}|\leq\Sigma_{i\in SORT\setminus\{0\}}$ $(|\Gamma^*\cup\Phi(\Sigma)|+\aleph_0)=\aleph_0(|\Gamma^*\cup\Phi(\Sigma)|+\aleph_0)=$ $(|\Gamma^*\cup\Phi(\Sigma)|+\aleph_0)\leq|\Gamma^*|+|\Phi(\Sigma)|+\aleph_0=|\Gamma|+|\Phi(\Sigma)|+\aleph_0$.
■

Corolario(iii6) (Teorema de Löwenheim-Skolem para lógica multivariada): Sea L_m un lenguaje multivariado de tipo Σ=(SORT,FUNC), con Dom(FUNC)=SIM.OP y sea $\Gamma\subseteq SENT(L_m)$. Si existe una estructura multivariada $\mathcal{A}=((Ai)_{i\in SORT},(f^{\mathcal{A}})_{f\in SIM.OP})$ modelo de Γ tal que $\mathcal{A}$ tiene un universo infinito, entonces Γ tiene un modelo de cualquier cardinalidad κ, con $\kappa\geq|\Gamma|+|\Phi(\Sigma)|+\aleph_0$. (Dejamos al lector la prueba de que $|\Gamma|+\aleph_0=|\tau(\Gamma)|+\aleph_0$ y entonces $|\Gamma|+|\Phi(\Sigma)|+\aleph_0=|\tau(\Gamma)|+|\Phi(\Sigma)|+\aleph_0$).

Demostración:
Supongamos que $\mathcal{A}$ es modelo de Γ tal que el universo Aj de $\mathcal{A}$ es infinito. Sea $\kappa\geq|\Gamma|+|\Phi(\Sigma)|+\aleph_0$ y sea C un conjunto de cardinalidad κ tal que $C\cap\tau(\Gamma)=\varnothing$. Definimos el tipo multivariado Σ&=(SORT,FUNC&), donde
Dom(FUNC&)=SIM.OP&=SIM.OP$\cup$C y FUNC&=FUNC$\cup\{(q,(j))|q\in C\}$. Sea L_m& el lenguaje multivariado asociado a Σ& en el cual usamos las mismas variables que en el lenguaje L_m (es decir, L_m& es básicamente el mismo lenguaje que L_m, excepto que ahora tenemos un conjunto extra C de símbolos de constante individual de tipo j). Sean $\Theta=\{\neg(c\approx d)\ |c,d\in C$ y $c\neq d\}$ y $\Lambda=\Gamma\cup\Theta$; es claro que $\Lambda\subseteq SENT(L_m\&)$. Veamos que cada subconjunto finito de Λ tiene modelo:
Sea Λ_0 un subconjunto finito arbitrario de Λ y sea $\Theta_0=\Theta\cap\Lambda_0$; claramente Θ_0 es finito. Sea $a\in Aj$ un elemento arbitrario pero fijo en Aj. Por otro lado, al ser Aj infinito, entonces existe una función inyectiva $g:\tau(\Theta_0)\to Aj\setminus\{a\}$. De esta manera, definimos la estructura multivariada de tipo Σ&, $\mathcal{B}=((Bi)_{i\in SORT}, (f^{\mathcal{B}})_{f\in SIM.OP\&})$ como:
Bi=Ai para todo $i\in SORT$

$f^{\mathcal{B}}=f^{\mathcal{A}}$ para todo $f\in$SIM.OP&\C
$f^{\mathcal{B}}=a$, para todo $f\in C\backslash\tau(\Theta_0)$
$f^{\mathcal{B}}=g(f)$, para todo $f\in\tau(\Theta_0)$.
Nótese que como $\mathcal{A}\models\Gamma$, entonces $\mathcal{B}\models\Gamma$; además $\mathcal{B}\models\Theta_0$, de lo que concluimos que $\mathcal{B}\models\Lambda_0$.
De esta manera, tenemos que todo subconjunto finito de Λ tiene modelo y entonces, por el teorema de compacidad para la lógica multivariada, existe un modelo $\mathcal{C}$ de Λ con cardinalidad λ, tal que $\lambda\leq|\Lambda|+|\Phi(\Sigma\&)|+\aleph_0=|\Gamma\cup\Theta|+|\Phi(\Sigma\&)|+\aleph_0=|\Gamma|+|\Theta|+|\Phi(\Sigma\&)|+\aleph_0=|\Gamma|+\kappa+|\Phi(\Sigma\&)|+\aleph_0$ (AA). Además, de la definición de $\Phi(\Sigma\&)$ se puede comprobar fácilmente que $\Phi(\Sigma\&)=\Phi(\Sigma)\cup\{Qi(q)|q\in C\}$ y entonces $|\Phi(\Sigma\&)|=|\Phi(\Sigma)|+|\{Qi(q)|q\in C\}|=|\Phi(\Sigma)|+\kappa$ (AAA). Así, de (AA) y de (AAA) tenemos que $\lambda\leq|\Gamma|+\kappa+|\Phi(\Sigma\&)|+\aleph_0=|\Gamma|+\kappa+|\Phi(\Sigma)|+\kappa+\aleph_0$ y como desde un principio tomamos $\kappa\geq|\Gamma|+|\Phi(\Sigma)|+\aleph_0$, entonces $\lambda\leq|\Gamma|+\kappa+|\Phi(\Sigma)|+\aleph_0=\kappa$.
Por otro lado, sabemos que $\mathcal{C}\models\Lambda$ y $\Lambda=\Gamma\cup\Theta$; de esto último tenemos dos cosas:

- $\mathcal{C}\models\Gamma$
- $\mathcal{C}\models\Theta$, lo cual implica que $\kappa\leq\lambda$, ya que al menos el universo de tipo j de $\mathcal{C}$ tiene cardinalidad mayor o igual que κ.

Así, de todo lo anterior concluimos: $\mathcal{C}$ es modelo de Γ cuya cardinalidad es $\lambda=\kappa$.
■

CAPITULO IV

ESTRUCTURAS GENERALES

PRE-ESTRUCTURAS

Introducción.

Existe otra manera de definir una semántica para los lenguajes de segundo orden, (en este sentido es que se trata de una semántica no estándar para LSO). La idea es definir estructuras distintas a las definidas en el capítulo I: En lugar de pedir que los universos relacionales (y funcionales como caso particular) de cualquier estructura contengan todas las posibles relaciones, podemos permitir que en algunas estructuras existan universos relacionales que contengan sólo una parte de todas las posibles relaciones; es decir, que exista $n\in N\setminus\{0\}$ tal que $A_n\subseteq \mathbf{P}(A^n)$ y $A_n\neq \mathbf{P}(A^n)$ para una estructura $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c\in CONS.OP})$. Desde el punto de vista que adoptaremos, el universo de relaciones n-arias de cualquier estructura $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c\in CONS.OP})$ estará definido de manera particular por cada una de ellas.

Si construyésemos una semántica para LSO donde solamente tomáramos en cuenta la idea anterior, podría ocurrir que alguna estructura de nuestra semántica no contuviera alguna relación definible por una fórmula de nuestro lenguaje de segundo orden. A la semántica no-estándar que definiremos, que consistirá de las llamadas estructuras generales, no le ocurrirá esto: al seguir los pasos de Henkin, hablaremos de estructuras que al menos contienen todas las posibles relaciones definibles por medio de fórmulas de LSO. Eso se precisará un poco más delante de este mismo capítulo.

Pre-estructuras o marcos.

Sea L_2 un lenguaje de segundo orden de tipo Σ=(VAR,FUNC) tal que Dom(FUNC)=CONS.OP.

Una **pre-estructura** de segundo orden de tipo Σ es una triada $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c\in CONS.OP})$ tal que:

(i) El universo de individuos A_0, es un conjunto distinto del vacío.

(ii) Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $\varnothing\neq A_n\subseteq \mathbf{P}((A_0)^n)$

(iii) Para cada símbolo de constante relacional $R\in$CONS.OP tal que $n\in N\setminus\{0\}$ y FUNC(R)=$(0,1,..^{n}..,1)$, $R^{\mathcal{A}}$ es una relación n-aria entre individuos tal que $R^{\mathcal{A}}\in A_n$.

(iv) Para cada símbolo de constante funcional $f\in$CONS.OP tal que $n\in N\setminus\{0\}$ y FUNC(f)=$(1,..^{n+1}..,1)$, $f^{\mathcal{A}}$ es una función n-aria sobre individuos tal que $f^{\mathcal{A}}\in A_{n+1}$.

(v) Para cada símbolo $a\in$CONS.OP de constante individual (es decir FUNC(a)=(1)), $\{a^{\mathcal{A}}\}\in A_1$.

Llamaremos a la clase de pre-estructuras de tipo Σ, $\mathcal{F}(\Sigma)$ y a la clase de las estructuras estándar de tipo Σ, $\boldsymbol{EE}(\Sigma)$.

Proposición(iv1): La clase de las estructuras estándar de segundo orden es una clase propia de la clase de las pre-estructuras; es decir, dado un tipo Σ, $EE(\Sigma)\subseteq\mathcal{F}(\Sigma)$ y $EE(\Sigma)\neq\mathcal{F}(\Sigma)$.

Demostración:
Es inmediata de las definiciones de estructura estándar y de pre-estructura.
■

SEMÁNICA SOBRE PRE-ESTRUCTURAS

Los conceptos de asignación, interpretación, satisfacción, satisfacibilidad, etc.., relacionados con pre-estructuras se definen de manera totalmente análoga de como se hizo para estructuras estándar. Para todo lo que se definirá en esta sección, sea Σ un tipo de segundo orden dado, L_2 el lenguaje de segundo orden de tipo Σ y $\mathcal{A}$ una pre-estructura de tipo Σ arbitraria; además, por simplicidad en nuestra notación, escribiremos $\mathcal{F}$ en vez de $\mathcal{F}(\Sigma)$ y *EE* en vez de *EE(Σ)*.

Asignaciones.

Una asignación M de nuestro lenguaje L_2 sobre una pre-estructura $\mathcal{A}$ es una función: $M:(\cup_{n\in N} F_n)\cup(\cup_{n\in N\setminus\{0\}} R_n)\rightarrow(\cup_{n\in N} A_n)$ tal que:

(a) Para todo $x\in F_0$, $M(x)\in A_0$.
(b) Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, si $D\in F_n$ entonces $M(D):A_0 x.. ^n ..x A_0\rightarrow A_0$ es una función tal que $M(D)\in A_{n+1}$.
(c) Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $M[R_n]\subseteq A_n$.

Definiciones:

Sea M una asignación.
- Si $x\in F_0$ y $a\in A_0$, definimos M(x/a) como $M(x/a)=(M\setminus\{(x,M(x))\})\cup\{(x,a)\}$.

- Si $n\in N\setminus\{0\}$, $X\in R_n$ y $Q\in A_n$ entonces M(X/Q) es la asignación $M(X/Q)=M\setminus\{(X,M(X))\})\cup\{(X,Q)\}$.

- Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, si $D\in F_n$ y $f:A_0 x.. ^n ..x A_0\rightarrow A_0$ es una función tal que $f\in A_{n+1}$, entonces definimos la asignación $M(D/f)= (M\setminus\{(D,M(D))\})\cup\{(D,f)\}$.

- Por último definimos recursivamente para cualquier $m\in N$, para cualquier m+1-ada $(v_1,...,v_{m+1})$ de símbolos de variable de tipo arbitrario $i_1,...,i_{m+1}\in VAR$ respectivamente y para cualquier m+1-ada $(r_1,...,r_{m+1})$ la asignación $M(v_1/r_1,...,v_{m+1}/r_{m+1})$ donde:
Si $j\in\{1,...,m+1\}$, y v_j es símbolo de variable individual, entonces $r_j\in A_0$
Si $j\in\{1,...,m+1\}$, y v_j es símbolo de variable relacional de aridad k, entonces $r_j\in A_k$
Si $j\in\{1,...,m+1\}$, y v_j es símbolo de variable funcional de aridad q, entonces r_j es una función $r_j:(A_0)^q\rightarrow A_0$ tal que $r_j\in A_{q+1}$
como: $M(v_1/r_1,...,v_{m+1}/r_{m+1})=M(v_1/r_1,...,v_m/r_m)(v_{m+1}/r_{m+1})$.

Interpretaciones.

Una **pre-estructura-interpretación I** de nuestro lenguaje L_2 sobre una pre-estructura $\mathcal{A}$ es un par $I=(\mathcal{A},M)$, donde M es una asignación sobre $\mathcal{A}$.

Sea $I=(\mathcal{A},M)$ una pre-estructura-interpretación de L_2. Definimos para todo término τ y para todo predicado R por recursión:

(T1) Si x es una variable individual $I(x)=M(x)$.
(T2) Si a es un símbolo de constante individual $I(a)=a^{\mathcal{A}}$.
(T3) Si f es un símbolo de constante funcional de aridad n, con $n\in N\setminus\{0\}$, y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, entonces $I(f(\tau_1,..,\tau_n))=f^{\mathcal{A}}(I(\tau_1),..,I(\tau_n))$
(T4) Si D es un símbolo de variable funcional de aridad n, con $n\in N\setminus\{0\}$, y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, entonces $I(D(\tau_1,..,\tau_n))=M(D)(I(\tau_1),..,I(\tau_n))$

(P1) Si X es un símbolo de variable n-ario relacional, entonces $I(X)=M(X)$
(P2) Si P es un símbolo de constante n-ario relacional, entonces $I(P)=P^{\mathcal{A}}$
(P3) $I(\approx_0)=\{(x,y)\in (A_0)^2 \mid x=y\}$ y para todo $n\in N\setminus\{0\}$, $I(\approx_n)=\{(X,Y)\in(A_n)^2 \mid X=Y\}$.

Si I es la pre-estructura-interpretación $I=(\mathcal{A},M)$, denotamos:
$I(x/a)=(\mathcal{A},M(x/a))$, para $x\in F_0$ y $a\in A_0$.
$I(X/Q)=(\mathcal{A},M(X/Q))$, para $n\in N\setminus\{0\}$, $X\in R_n$ y $Q\in A_n$.
$I(D/f)=(\mathcal{A},M(D/f))$, para $n\in N\setminus\{0\}$, $D\in F_n$ y $f:A_0x..{}^n..xA_0\rightarrow A_0$ función tal que $f\in A_{n+1}$.

Definición:

Definimos recursivamente el significado de una pre-estructura-interpretación **I satisface una fórmula** $\varphi\in FORM(L_2)$, (lo que denotamos I $sat_{\mathcal{F}}\ \varphi$), como:

(F1) Si Π es un predicado n-ario y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, I $sat_{\mathcal{F}}\ \Pi(\tau_1,..,\tau_n)$ si y sólo si $(I(\tau_1),..,I(\tau_n))\in I(\Pi)$
(F2) Si Π y Ψ son predicados n-arios, entonces I $sat_{\mathcal{F}}\ (\Pi\approx_n\Psi)$ si y sólo si $(I(\Pi),I(\Psi))\in I(\approx_n)$. Si τ_1 y τ_2 son términos, entonces I $sat_{\mathcal{F}}\ (\tau_1\approx_0\tau_2)$ si y sólo si $(I(\tau_1),I(\tau_2))\in I(\approx_0)$.
(F3) Si φ y π son fórmulas, entonces
I $sat_{\mathcal{F}}\ \varphi\vee\pi$ si y sólo I $sat_{\mathcal{F}}\ \varphi$ ó I $sat_{\mathcal{F}}\ \pi$.
I $sat_{\mathcal{F}}\ \neg\pi$ si y sólo si no es verdad que I $sat_{\mathcal{F}}\ \pi$.
(F4) Si φ es fórmula y x es un símbolo de variable individual, entonces
I $sat_{\mathcal{F}}\ \exists x\varphi$ si y sólo si hay $a\in A_0$ tal que $I(x/a)$ $sat_{\mathcal{F}}\ \varphi$.
(F5) Si φ es fórmula y X es un símbolo de variable relacional de aridad $n\in N\setminus\{0\}$, entonces I $sat_{\mathcal{F}}\ \exists X\varphi$ si y sólo si hay $Q\in A_n$ tal que $I(X/Q)$ $sat_{\mathcal{F}}\ \varphi$.
(F6) Si φ es fórmula y D es un símbolo de variable funcional de aridad $n\in N\setminus\{0\}$, entonces I $sat_{\mathcal{F}}\ \exists D\varphi$ si y sólo si hay una función $f:A_0x..{}^n..xA_0\rightarrow A_0$, tal que $f\in A_{n+1}$ y $I(D/f)$ $sat_{\mathcal{F}}\ \varphi$.

Pre-estructura-modelo.

Definición:

Sean $\mathcal{A}\in\mathcal{F}$, M una asignación de L_2 sobre $\mathcal{A}$ y $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_2)$. Sea $I=(\mathcal{A},M)$.

- I es **pre-estructura-modelo de** φ (lo que denotamos $I\models_{\mathcal{F}}\varphi$) si y sólo si I $sat_{\mathcal{F}}\,\varphi$.
- I es pre-estructura-modelo de Γ si y sólo si para cada $\pi\in\Gamma$, I es pre-estructura-modelo de π. Denotamos I es pre-estructura-modelo de Γ por $I\models_{\mathcal{F}}\Gamma$.

Es claro que, dado un lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ, debido a que no todas las pre-estructuras son estructuras estándar, entonces no toda pre-estructura-modelo de un conjunto de fórmulas Γ de L_2 es modelo de Γ (es decir, modelo estándar).

Consecuencia lógica en pre-estructuras (pre-estructura-consecuencia lógica).

Definición:

Sea $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_2)$.
φ es **pre-estructura-consecuencia lógica** de Γ (lo que denotamos $\Gamma\models_{\mathcal{F}}\varphi$) si y sólo si toda I pre-estructura-modelo de Γ es pre-estructura-modelo de φ.

Afirmación(iv1): Para toda interpretación estándar $I=(\mathcal{B},M)$ y para toda fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$, $I\models\varphi$ si y sólo si $I\models_{\mathcal{F}}\varphi$.

Demostración:
(Por inducción sobre la formación de las fórmulas)
Se deja al lector. Este resultado también se prueba en el corolario(iv1) de la página 78
■

Afirmación(iv2): Pre-estructura-consecuencia lógica implica consecuencia lógica; es decir: Sea $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_2)$. Si $\Gamma\models_{\mathcal{F}}\varphi$, entonces $\Gamma\models\varphi$.

Demostración:
Se deja al lector. El corolario(iv2) de la página 78 también muestra este resultado.
■

Validez en pre-estructuras.

Definición:

Una fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$ es **pre-estructura-válida** si y sólo si $\varnothing\models_{\mathcal{F}}\varphi$, que como es usual también denotamos $\models_{\mathcal{F}}\varphi$.

Afirmación(iv3): Si $\varphi\in FORM(L_2)$ es una fórmula pre-estructura-válida, entonces φ es una fórmula válida en las estructuras estándar.

Demostración:
Se deja al lector. El corolario(iv3) de la página 79 también prueba este resultado.
■

Satisfacibilidad en pre-estructuras.

Definición:

Una fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$ es **pre-estructura-satisfacible** si y sólo si existe una pre-estructura-modelo de φ.

Proposición(iv2): Si $\varphi\in FORM(L_2)$ es una fórmula pre-estructura-satisfacible, entonces no necesariamente φ es satisfacible en las estructuras estándar.

Demostración:
Sean z,w variables individuales y X variable relacional de aridad 1. El enunciado $\exists z\exists w(\forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))\wedge\neg(z\approx w))$ no es satisfacible de manera estándar (esto se debe a que la fórmula $\forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))$ –de manera estándar– expresa la identidad entre dos individuos, ver el capítulo I, página 13), sin embargo, es pre-estructura-satisfacible:

Sea $I=(\mathcal{A},M)$ la pre-estructura de tipo $\Sigma=(VAR,FUNC)$ donde:
- $Dom(FUNC)=CONS.OP=\varnothing$
- $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}})$ es tal que: $A_0=\{1,2,3\}$, $A_1=\{\varnothing,A_0\}$ y para cada $n\in N\setminus\{0,1\}$, $A_n=\mathbf{P}((A_0)^n)$.
- Para cada $z\in \nu\setminus\{w\}$, $M(z)=1$ y $M(w)=2$.

Con todas las definiciones anteriores ocurre que $I\models_{\mathcal{F}}\forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))$, pero $I(z)\neq I(w)$; es decir, I es pre-estructura-modelo de $\exists z\exists w(\forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))\wedge\neg(z\approx w))$.
■

Equivalencia lógica en pre-estructuras.

Definición:
Sean $\varphi,\pi\in FORM(L_2)$. φ y π son **pre-estructura-equivalentes** si y sólo si $\varphi\models_{\mathcal{F}}\pi$ y $\pi\models_{\mathcal{F}}\varphi$. Denotamos φ y π son pre-estructura-equivalentes por $\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv}_{\mathcal{F}} \pi$.

CONJUNTOS Y RELACIONES DEFINIBLES EN UNA PRE-ESTRUCTURA DADA

Dada una pre-estructura $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c\in CONS.OP})$ de tipo Σ y el lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ, hay muchas clases de relaciones que tienen que ver de diversas maneras con $\mathcal{A}$ y con $FORM(L_2)$. En particular haremos ciertos tipos de distinciones que son interesantes para un estudio más profundo, pero que en nuestro caso servirán para definir una subclase de pre-estructuras muy importante: las estructuras generales.

Relaciones de primer orden de una pre-estructura.

Sea $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c\in CONS.OP})$ una pre-estructura de un lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ.

(a) Llamamos **relación n-aria de primer orden sobre $\mathcal{A}$** a cualquier subconjunto del producto cartesiano n-ario de A_0, es decir, a cualquier subconjunto de $(A_0)^n$. Además, denotamos por $REL_n^{1st}(\mathcal{A})$ a la clase de todas las relaciones n-arias de primer orden sobre $\mathcal{A}$ –o sea $REL_n^{1st}(\mathcal{A})=\mathbf{P}((A_0)^n)$– y definimos como $REL^{1st}(\mathcal{A})=\cup_{n\in N\setminus\{0\}}REL_n^{1st}(\mathcal{A})$; llamamos a cada elemento de $REL^{1st}(\mathcal{A})$ **relación de primer orden sobre $\mathcal{A}$** y decimos que $REL^{1st}(\mathcal{A})$ es la **clase de relaciones de primer orden sobre $\mathcal{A}$.**

(b) Una relación n-aria de primer orden H sobre $\mathcal{A}$ está **dentro** de $\mathcal{A}$ cuando $H\in A_n$ ó cuando $H=R^{\mathcal{A}}$ para algún $R\in CONS.OP$. De manera análoga al inciso (a), llamamos a $REL^{1st}(\in\mathcal{A})$ a la **clase de relaciones de primer orden dentro de $\mathcal{A}$.**

Proposición(iv3): Sea $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c\in CONS.OP})$ una estructura estándar cualquiera. Entonces:

(1) Toda relación n-aria de primer orden sobre $\mathcal{A}$ está dentro de $\mathcal{A}$.

(2) Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $REL_n^{1st}(\mathcal{A})=A_n$ y entonces $REL^{1st}(\mathcal{A})=\cup_{n\in N\setminus\{0\}} A_n$.

(3) $REL^{1st}(\mathcal{A})=REL^{1st}(\in\mathcal{A})$.

Demostración:
Todos los incisos son consecuencia inmediata de las definiciones anteriores y de estructura estándar.
■

Proposición(iv4): En cualquier pre-estructura $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c\in CONS.OP})$:

(a) $\cup_{n\in N\setminus\{0\}}A_n\subseteq REL^{1st}(\mathcal{A})$

(b) $REL^{1st}(\in\mathcal{A})\subseteq REL^{1st}(\mathcal{A})$ y, en general, $REL^{1st}(\in\mathcal{A})\neq REL^{1st}(\mathcal{A})$

(c) $\{C^{\mathcal{A}}|C\in CONS.OP \text{ y } FUNC(C)\neq 1\}\subseteq REL^{1st}(\in\mathcal{A})\subseteq REL^{1st}(\mathcal{A})$.

Demostración:
Los tres incisos son consecuencia inmediata de las definiciones.
■

Obsérvese que en pre-estructuras $\mathcal{A}$, en general no es cierto que toda relación de primer orden sobre $\mathcal{A}$ sea una relación de primer orden dentro de $\mathcal{A}$.

Relaciones de segundo orden de una pre-estructura.

Sea $\mathscr{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$ una pre-estructura de un lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ.

(a) Sea $n\in N\setminus\{0\}$ y sean $A_{i_1},\dots,A_{i_n}$ universos cualesquiera de $\mathscr{A}$ (es decir, $A_{i_j}=A_m$ para algún $m\in N$). Llamamos **relación n-aria de segundo orden de $\mathscr{A}$** a cualquier subconjunto de $A_{i_1}x\dots xA_{i_n}$. Además, definimos como $REL_n(\mathscr{A})$ a la **clase de todas las relaciones n-arias de segundo orden de $\mathscr{A}$** y $REL(\mathscr{A})=\cup_{n\in N\setminus\{0\}} REL_n(\mathscr{A})$ a la **clase de todas las relaciones de segundo orden de $\mathscr{A}$.**

(b) Una relación n-aria de segundo orden R de $\mathscr{A}$ está **dentro** de $\mathscr{A}$ cuando $R\in A_n$ ó $R=H^{\mathscr{A}}$ para alguna $H\in CONS.OP$. Sea $REL(\in\mathscr{A})$ la **clase de todas las relaciones de segundo orden dentro de $\mathscr{A}$.**

(c) Definimos $REL^{2nd}(\mathscr{A})$, la clase de **relaciones propias de segundo orden**, como $REL^{2nd}(\mathscr{A})=REL(\mathscr{A})\setminus REL^{1st}(\mathscr{A})$.

Proposición(iv5): Sea $\mathscr{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$ una pre-estructura cualquiera. Entonces:

(i) $REL^{1st}(\mathscr{A})\subseteq REL(\mathscr{A})$. Además, para estructuras estándar, en general, $REL^{1st}(\mathscr{A})\neq REL(\mathscr{A})$; nótese que esto último implica que, en general, $REL^{1st}(\mathscr{A})\neq REL(\mathscr{A})$ para pre-estructuras.

(ii) $REL^{1st}(\in\mathscr{A})=REL(\in\mathscr{A})$.

Demostración:

(i) Tomándose $A_{i_1}=A_0,\dots,A_{i_n}=A_0$ para cada $n\in N\setminus\{0\}$ en (a) de la definición de relaciones de segundo orden de una pre-estructura, tenemos que las relaciones de segundo orden de $\mathscr{A}$ contienen a las relaciones de primer orden de $\mathscr{A}$. Además, si $\mathscr{A}$ es una estructura estándar, entonces $A_0\neq A_1=P(A_0)$, y entonces $A_1xA_1\in REL(\mathscr{A})$ y $A_1xA_1\notin REL^{1st}(\mathscr{A})$.

(ii) Probemos la contención $\subseteq$: Por la proposición(iv4) (b) y por (a) de esta proposición: $REL^{1st}(\in\mathscr{A})\subseteq REL^{1st}(\mathscr{A})\subseteq REL(\mathscr{A})$; así, como para cualquiera $z\in REL^{1st}(\in\mathscr{A})$, $z\in A_n$ ó $z=H^{\mathscr{A}}$ para alguna $H\in CONS.OP$ y por lo anterior $z\in REL(\mathscr{A})$, entonces $z\in REL(\in\mathscr{A})$. Ahora probemos $\supseteq$: Sea $r\in REL(\in\mathscr{A})$. Entonces r es una relación de segundo orden tal que $r\in A_n\subseteq P((A_0)^n)$ para alguna $n\in N\setminus\{0\}$ó $r=H^{\mathscr{A}}$ para alguna $H\in CONS.OP$; así, $r\in A_n\subseteq P((A_0)^n)$ ó $r=H^{\mathscr{A}}\in A_m\subseteq P((A_0)^m)$ donde $m,n\in N\setminus\{0\}$, (pues $r=H^{\mathscr{A}}$ es relación de segundo orden, y entonces $H^{\mathscr{A}}$ no puede ser sólo elemento de A_0). En cualquier caso, $r\in A_t\subseteq P((A_0)^t)$ para algún $t\in N\setminus\{0\}$ y entonces $r\subseteq(A_0)^t$ (es decir, r es relación de primer orden) y $r\in A_t$; por lo tanto $r\in REL^{1st}(\in\mathscr{A})$. Esto prueba que $REL^{1st}(\in\mathscr{A})\supseteq REL(\in\mathscr{A})$.
■

Nótese que si $\mathscr{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$ es una estructura estándar infinita, entonces el conjunto de relaciones de primer orden de $\mathscr{A}$, $REL^{1st}(\mathscr{A})$, tiene $t=2^{|A_0|}$ elementos y el conjunto de relaciones de segundo orden de $\mathscr{A}$, $REL(\mathscr{A})$, tiene 2^t elementos; esto también muestra que entonces $REL^{2nd}(\mathscr{A})$ tiene 2^t elementos.

Relaciones de primer y segundo orden $\mathcal{A}$-definibles

Sea Σ el tipo del lenguaje de segundo orden L_2 y sea $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c\in CONS.OP})$ una pre-estructura de tipo Σ.

Definición:

Decimos que **la relación de primer orden R es $\mathcal{A}$-definible usando el lenguaje L_2** por una fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$ junto con la sucesión de variables individuales $(x_1,...,x_n)$, cuando $R=\{(a_1,...,a_n)\in A_0x..^n..xA_0 \mid \mathcal{A}(x_1/a_1,...,x_n/a_n)\ sat_{\mathcal{F}}\ \varphi\}$; donde $FREE(\varphi)\subseteq\{x_1,...,x_n\}$.
Definimos **$DEF^{1st}(\mathcal{A},L_2)$** como la clase más pequeña que contiene todas las **relaciones de primer orden $\mathcal{A}$-definibles con el lenguaje L_2.**

Definición:

Una relación de segundo orden R es una **relación de segundo orden $\mathcal{A}$-definible usando el lenguaje L_2** cuando existe una fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$ junto con una sucesión de variables $(v_1,...,v_n)$ de tipo $k_1,...,k_n\in VAR$ respectivamente tal que $R=\{(z_1,...,z_n)\in Ai_1x...xAi_n \mid \mathcal{A}(v_1/z_1,...,v_n/z_n)\ sat_{\mathcal{F}}\ \varphi\}$; donde $FREE(\varphi)\subseteq\{v_1,...,v_n\}$ y para cada j con $1\leq j\leq n$:
Si v_j es variable individual entonces $z_j\in A_0$
Si v_j es variable relacional de aridad m, entonces $z_j\in A_m$
Si v_j es variable funcional de aridad m, entonces z_j: $A_0x..^m..xA_0\rightarrow A_0$ es una función tal que $z_j\in A_{m+1}$.
Definimos **$DEF(\mathcal{A},L_2)$** como la clase más pequeña que contiene todas las **relaciones de segundo orden $\mathcal{A}$-definibles con el lenguaje L_2.**

En las definiciones anteriores, podemos decir que la fórmula φ junto con $(v_1,...,v_n)$ definen la relación R en la pre-estructura $\mathcal{A}$. Nótese que el orden de $v_1,...,v_n$ es importante, puesto que la misma fórmula con las mismas variables pueden definir distintas relaciones según el orden de la sucesión de variables. Veamos el siguiente ejemplo:

$\{(z_1,z_2)\in A_0xA_0 \mid \mathcal{A}(x/z_1,y/z_2)\ sat\ R(x,y)\}=R^{\mathcal{A}}$ pero
$\{(z_1,z_2)\in A_0xA_0 \mid \mathcal{A}(y/z_1,x/z_2)\ sat\ R(x,y)\}=(R^{\mathcal{A}})^{-1}$

Por último, obsérvese que si se utiliza un lenguaje de segundo orden de tipo Σ tal que CONS.OP es contable, entonces el conjunto de fórmulas de tal lenguaje es numerable, y entonces el conjunto de relaciones $\mathcal{A}$-definibles con ese lenguaje es contable para cualquier pre-estructura $\mathcal{A}$ de tipo Σ.

Proposición(iv6): Sea L_2 un lenguaje de segundo orden de tipo Σ y sea $\mathcal{A}\in EE(\Sigma)$. Entonces:
(1) $DEF^{1st}(\mathcal{A},L_2)\subseteq DEF(\mathcal{A},L_2)$, pero en general,
(2) $DEF^{1st}(\mathcal{A},L_2)\neq DEF(\mathcal{A},L_2)$.

Demostración:
(1) Sea $r \in DEF^{1st}(\mathcal{A}, L_2)$. Entonces existe una fórmula φ y una sucesión de variables individuales $(x_1,...,x_n)$ tal que $r = \{(a_1,...,a_n) \in A_0 x..^n..x A_0 \mid \mathcal{A}(x_1/a_1,...,x_n/a_n)\ sat_{\mathcal{F}}\ \varphi\}$; entonces $r = \{(z_1,...,z_n) \in Ai_1 x..^n..x Ai_n \mid \mathcal{A}(v_1/z_1,...,v_n/z_n)\ sat_{\mathcal{F}}\ \varphi\}$, donde $Ai_1=Ai_2=...=Ai_n=A_0$ y para cada j con $1 \leq j \leq n$, $v_j=x_j$ es de tipo $(0) \in VAR$ y $z_j=a_j \in A_0$. Por lo tanto $r \in DEF(\mathcal{A}, L_2)$.
(2) Sea w símbolo de variable individual y X símbolo de variable relacional de aridad 1 del lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ tal que CONS.OP=$\varnothing$. Sea $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n \in N\setminus\{0\}})$ la estructura estándar de tipo Σ donde $A_0=\{1\}$. La relación de segundo orden $r = \{(z_1,z_2) \in (A_0 x A_1) \mid \mathcal{A}(w/z_1, X/z_2)\ sat_{\mathcal{F}}\ X(w)\}$ cumple por definición que $r \in DEF(\mathcal{A}, L_2)$. Como $A_1=\mathbf{P}(A_0)$, entonces $(1,\{1\}) \in r$ y además $(1,\{1\}) \notin A_0 x A_0$, por lo que no es posible hallar una fórmula π y una sucesión (x_1,x_2) de variables individuales tales que $r = \{(a_1,a_2) \in (A_0 x A_0) \mid \mathcal{A}(x_1/a_1, x_2/a_2)\ sat_{\mathcal{F}}\ \pi\}$, lo cual prueba que $r \notin DEF^{1st}(\mathcal{A}, L_2)$.
■

Relaciones de primer y segundo orden paramétricamente $\mathcal{A}$-definibles.

Sea Σ=(VAR,FUNC) el tipo de un lenguaje de segundo orden L_2 y sea $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n \in N\setminus\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c \in CONS.OP})$ una pre-estructura de tipo Σ.

Definición:

Una relación de primer orden R es una **relación de primer orden paramétricamente $\mathcal{A}$-definible usando L_2**, cuando existen una fórmula $\varphi \in FORM(L_2)$, variables individuales $x_1,...,x_n$, variables $v_1,...,v_m$ de tipos $i_1,...,i_m \in VAR$ respectivamente y elementos $h_1,...,h_m$, tal que para cada j, con $1 \leq j \leq m$:
si v_j es variable individual entonces $h_j \in A_0$,
si v_j es variable relacional de aridad q, entonces $h_j \in A_q$,
si v_j es variable funcional de aridad q, entonces $h_j: A_0 x..^q..x A_0 \rightarrow A_0$ es una función tal que $h_j \in A_{q+1}$; tal que:
$R=\{(z_1,...,z_n) \in (A_0)^n \mid \mathcal{A}(x_1/z_1,...,x_n/z_n)(v_1/h_1,...,v_m/h_m)\ sat_{\mathcal{F}}\ \varphi\}$, donde $FREE(\varphi) \subseteq \{x_1,...,x_n,v_1,...,v_m\}$.
Sea $PARAM.DEF^{1st}(\mathcal{A}, L_2)$ la **clase de relaciones de primer orden paramétricamente $\mathcal{A}$-definibles usando L_2**.

Definición:

Una relación de segundo orden R es llamada **relación de segundo orden paramétricamente $\mathcal{A}$-definible usando L_2**, cuando existen una fórmula $\varphi \in FORM(L_2)$, variables $u_1,...,u_n$ de tipos $k_1,...,k_n \in VAR$ respectivamente, variables $v_1,...,v_m$ de tipos $i_1,...,i_m \in VAR$ respectivamente y elementos $h_1,...,h_m$, tal que para cada j, con $1 \leq j \leq m$:

si v_j es variable individual entonces $h_j \in A_0$,
si v_j es variable relacional de aridad q, entonces $h_j \in A_q$,
si v_j es variable funcional de aridad q, entonces $h_j: A_0 x..^q..x A_0 \rightarrow A_0$ es una función tal que $h_j \in A_{q+1}$; tal que:
$R=\{(z_1,...,z_n)\in(Aw_1x...xAw_n) \mid \mathscr{A}(u_1/z_1,...,u_n/z_n)(v_1/h_1,...,v_m/h_m)\ sat_{\mathscr{F}}\ \varphi\}$, donde $FREE(\varphi)\subseteq\{u_1,...,u_n,v_1,...,v_m\}$, y para cada j, con $1\leq j\leq n$:
si u_j es variable individual entonces $z_j \in A_0 = Aw_j$,
si u_j es variable relacional de aridad q, entonces $z_j \in A_q = Aw_j$,
si u_j es variable funcional de aridad q, entonces z_j: $A_0 x..^q..x A_0 \rightarrow A_0$ es una función tal que $z_j \in A_{q+1} = Aw_j$.
Sea PARAM.DEF($\mathscr{A}$,L_2) la **clase de relaciones de segundo orden paramétricamente $\mathscr{A}$-definibles usando L_2.**

Nótese que en cualquier estructura estándar $\mathscr{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$ tal que A_0 es infinito, el conjunto de sucesiones finitas de elementos de $A_0\cup(\cup_{n\in N\setminus\{0\}} A_n)$ tiene cardinal $\leq 2^{|A_0|}$; así, el conjunto de relaciones paramétricamente $\mathscr{A}$-definibles tiene cardinal $\leq 2^{|A_0|}$. Análogamente, para cualquier pre-estructura $\mathscr{B}=((B_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{B}})_{c\in CONS.OP})$ tal que su universo de individuos es infinito, el conjunto de relaciones paramétricamente $\mathscr{B}$-definibles tiene cardinal $\leq 2^{|B_0|}$.

Observación(iv1):
(1) En cualquier pre-estructura $\mathscr{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$ toda relación n-aria de primer orden $R\in A_n\subseteq \mathbf{P}((A_0)^n)\subseteq REL_n^{1st}(\mathscr{A})$ es paramétricamente definible. Para ver esto, tómese la fórmula $X(y_1,...,y_n)$, donde para todo $i\in\{1,...,n\}$ $y_i\in F_0$ y $X\in R_n$; entonces $R=\{(z_1,...,z_n)\in(A_0)^n \mid \mathscr{A}(y_1/z_1,...,y_n/z_n)(X/R)\ sat_{\mathscr{F}}\ X(y_1,...,y_n)\}$.
(2) Cuando $\mathscr{A}$ es una estructura estándar, debido a que todas las relaciones posibles de primer orden pertenecen a los universos relacionales de $\mathscr{A}$, entonces por el inciso anterior, todas las relaciones de primer orden son paramétricamente $\mathscr{A}$-definibles.
■

Proposición(iv7): Sea Σ=(VAR,FUNC) el tipo del lenguaje de segundo orden L_2 y sea $\mathscr{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$ una pre-estructura de tipo Σ. Entonces:
(i) $REL(\in\mathscr{A})\subseteq PARAM.DEF^{1st}(\mathscr{A},L_2)$.
(ii) $PARAM.DEF^{1st}(\mathscr{A},L_2)\subseteq REL^{1st}(\mathscr{A})$.
(iii) $DEF^{1st}(\mathscr{A},L_2)\subseteq PARAM.DEF^{1st}(\mathscr{A},L_2)$.
(iv) $PARAM.DEF(\mathscr{A},L_2)\subseteq REL(\mathscr{A})$.

Demostración:
(i) Sea $r\in REL(\in\mathscr{A})$. Entonces existe $R\in A_n$ para alguna $n\in N\setminus\{0\}$ tal que $r=R$ ó $C\in CONS.OP$ tal que $r=C^{\mathscr{A}}\in A_k$ para alguna $k\in N\setminus\{0\}$; en cualquier caso existe $t\in N\setminus\{0\}$ y $Q\in A_t\subseteq\mathbf{P}((A_0)^t)$ tal que $r=Q$. Sean $X\in R_t$ y $x_1,...,x_t\in F_0$; entonces $r=\{(z_1,...,z_t)\in(A_0)^t \mid \mathscr{A}(x_1/z_1,...,x_t/z_t)(X/Q)\ sat_{\mathscr{F}}\ X(x_1,...,x_t)\}$, por lo que $r\in PARAM.DEF^{1st}(\mathscr{A},L_2)$. Por lo tanto $REL(\in\mathscr{A})\subseteq PARAM.DEF^{1st}(\mathscr{A},L_2)$.

(ii) Es claro, pues para todo $r \in PARAM.DEF^{1st}(\mathcal{A}, L_2)$, r es una relación de primer orden.
(iii) Sea $r \in DEF^{1st}(\mathcal{A}, L_2)$. Entonces existe $t \in N \setminus \{0\}$ y $\varphi \in FORM(L_2)$ tal que $r = \{(z_1,...,z_t) \in (A_0)^t \mid \mathcal{A}(x_1/z_1,...,x_t/z_t)\ sat_{\mathcal{F}}\ \varphi\}$; entones $r \in PARAM.DEF^{1st}(\mathcal{A}, L_2)$. Por lo tanto $DEF^{1st}(\mathcal{A}, L_2) \subseteq PARAM.DEF^{1st}(\mathcal{A}, L_2)$.
(iv) Este inciso también es evidente, pues para toda $r \in PARAM.DEF(\mathcal{A}, L_2)$, r es una relación de segundo orden.
■

Proposición(iv8): Sea Σ=(VAR,FUNC) el tipo de un lenguaje de segundo orden L_2 y sea $\mathcal{A} = (A_0, (A_n)_{n \in N \setminus \{0\}}, (C^{\mathcal{A}})_{c \in CONS.OP})$ una estructura estándar de tipo Σ. Entonces: $REL^{1st}(\mathcal{A}) = PARAM.DEF^{1st}(\mathcal{A}, L_2)$.

Demostración:
Por el inciso (ii) de la proposición anterior, sólo nos falta ver que $REL^{1st}(\mathcal{A}) \subseteq PARAM.DEF^{1st}(\mathcal{A}, L_2)$. Veamos esto último:
Si $r \in REL^{1st}(\mathcal{A}) = \bigcup_{n \in N \setminus \{0\}} REL_n^{1st}(\mathcal{A})$, entonces r es una relación k-aria de primer orden para algún $k \in N \setminus \{0\}$ y entonces por la observación(iv1) inciso (2), r es una relación de primer orden paramétricamente $\mathcal{A}$-definible. Así, $REL^{1st}(\mathcal{A}) \subseteq PARAM.DEF^{1st}(\mathcal{A}, L_2)$.
■

ESTRUCTURAS GENERALES

Existen varias maneras, todas ellas equivalentes, de definir las estructuras generales (ver María Manzano, pags164-166); nosotros optaremos por la siguiente: Pediremos que una estructura general sea una pre-estructura que contenga todas las relaciones de primer orden paramétricamente definibles en nuestro lenguaje. Esta es la manera más común de definir las estructuras generales, y la condición que se usa para definirlas es llamada **cerradura definible (definable closure)**.

Definición de estructuras generales por cerradura definible.

Sea $\mathcal{A} = (A_0, (A_n)_{n \in N \setminus \{0\}}, (C^{\mathcal{A}})_{c \in CONS.OP})$ una pre-estructura de tipo Σ y L_2 el lenguaje de segundo orden de tipo Σ.

Definición:

$\mathcal{A}$ es una **estructura general de tipo** Σ si y sólo si todas las relaciones de primer orden (o sea, sobre individuos) paramétricamente $\mathcal{A}$-definibles usando el lenguaje L_2 pertenecen a los universos correspondientes de $\mathcal{A}$; es decir, para cada $n \in N \setminus \{0\}$, $\mathbf{P}((A_0)^n) \cap PARAM.DEF(\mathcal{A}, L_2) \subseteq A_n$.

Observación(iv2):
Nótese que $\mathscr{A}$ es una estructura general de tipo Σ si y sólo si es una pre-estructura y para todo $n\in N\setminus\{0\}$, $A_n=\mathbf{P}((A_0)^n)\cap PARAM.DEF(\mathscr{A},L_2)$. Esto se debe a que, para todo $n\in N\setminus\{0\}$, la definición de estructura general nos dice que $\mathbf{P}((A_0)^n)\cap PARAM.DEF(\mathscr{A},L_2)\subseteq A_n$; pero por otro lado tenemos que $A_n\subseteq\mathbf{P}((A_0)^n)\cap PARAM.DEF(\mathscr{A},L_2)$, pues $\mathscr{A}$ es una pre-estructura –lo que implica que $A_n\subseteq\mathbf{P}((A_0)^n)$– y además por la observación(iv1) inciso (1), siempre ocurre que $A_n\subseteq PARAM.DEF(\mathscr{A},L_2)$.
■

Llamamos *EG(Σ)* a la **clase de las estructuras generales de tipo Σ**. Al igual que hemos hecho para denotar las estructuras estándar y las pre-estructuras, a menudo escribiremos *EG* en vez de *EG(Σ)*.

Proposición(iv9): La clase de las estructuras generales es una clase intermedia entre la clase de las estructuras estándar y la de las pre-estructuras; de manera más precisa: Dado un tipo Σ, $EE(\Sigma)\subseteq EG(\Sigma)\subseteq\mathcal{F}(\Sigma)$.

Demostración:
Sean *EE*, *EG* y $\mathcal{F}$ las clases de las estructuras estándar, de las estructuras generales y de las pre-estructuras respectivamente, todas ellas de un tipo Σ dado. La contención $EE\subseteq EG$ es un hecho inmediato de que para cualquier $\mathscr{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$ tal que $\mathscr{A}\in EE$, ocurre que $\mathbf{P}((A_0)^n)\cap PARAM.DEF(\mathscr{A},L_2)\subseteq A_n=\mathbf{P}((A_0)^n)$; por lo tanto, $\mathscr{A}\in EG$. La contención $EG\subseteq\mathcal{F}$ también es clara, pues una estructura general es, en particular, una pre-estructura.
■

Se puede probar que las contenciones que asegura la proposición anterior son todas ellas contenciones propias, es decir, que dado un tipo Σ, las estructuras estándar son una clase propia de las estructuras generales y éstas una clase propia de las pre-estructuras. No es difícil probar que las estructuras generales son una clase propia de las pre-estructuras (el lector puede comprobarlo), sin embargo, es más complicado probar que las estructuras estándar son una clase propia de las estructuras generales. Mostraremos todos estos resultados al final del capítulo, en la sección de resultados pospuestos, página 105, corolario(7).

Definición:

Para cada $n\in N\setminus\{0\}$ y para cada fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$, definimos $re^n\varphi=\exists X\forall x_1...\forall x_n(X(x_1,...,x_n)\leftrightarrow\varphi)$, donde $X\in R_n$ es símbolo de variable relacional de aridad n tal que $X\notin FREE(\varphi)$, y $x_1,...,x_n\in F_0$ son símbolos de variables individuales. Si $\forall re^n\varphi$ es la cerradura universal de $re^n\varphi$, entonces definimos $re=\{\forall re^n\varphi \mid n\in N\setminus\{0\} \text{ y } \varphi\in FORM(L_2)\}$; nótese que **re es el conjunto de la cerradura universal de las Fórmulas de Comprensión Relacionales.**

Definición:

Para cada $n\in N\backslash\{0\}$ y para cada fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$, definimos $fu^n\varphi=\forall x_1\ldots\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1\ldots.\forall x_{n+1}(D(x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\varphi)$, donde $D\in F_n$ es símbolo de variable funcional de aridad n tal que $D\notin FREE(\varphi)$, y $x_1,\ldots,x_n\in F_0$ son símbolos de variables individuales. Si $\forall fu^n\varphi$ es la cerradura universal de $fu^n\varphi$, entonces definimos $fu=\{\forall fu^n\varphi \mid n\in N\backslash\{0\}$ y $\varphi\in FORM(L_2)\}$; nótese que **fu es el conjunto de la cerradura universal de las Fórmulas de Comprensión Funcionales.**

Definición:

Definimos $Comp(L_2)=re\cup fu$. Así, $Comp(L_2)$ es el conjunto de enunciados de L_2 que resultan de cuantificar universalmente las variables libres de las fórmulas de comprensión relacionales y de las fórmulas de comprensión funcionales (ver página 13); es decir, **$Comp(L_2)$ es el conjunto de la cerradura universal de las fórmulas de comprensión**.

Teorema(iv0): Sea $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\backslash\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c\in CONS.OP})$ una pre-estructura de tipo Σ y sea L_2 el lenguaje de segundo orden de tipo Σ. Son equivalentes:

(a) $\mathcal{A}$ es una estructura general.

(b) $\mathcal{A}$ es pre-estructura-modelo de $Comp(L_2)$.

Demostración:

(a) implica (b). Supongamos que $\mathcal{A}$ es una estructura general.

(1) Veamos que para todo $n\in N\backslash\{0\}$ y para cualquier fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$, $\mathcal{A}\models_{\mathcal{F}}\forall fu^n\varphi$. Sea $n\in N\backslash\{0\}$ arbitrario y sea $\varphi\in FORM(L_2)$ arbitraria.

Si $FREE(fu^n\varphi)=\{v_1,\ldots,v_m\}$ para algún $m\in N\backslash\{0\}$, entonces $\forall fu^n\varphi=\forall v_1\ldots\forall v_m(\forall x_1\ldots\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1\ldots.\forall x_{n+1}(D(x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\varphi))$. Además, nótese que $FREE(fu^n\varphi)=FREE(\varphi)\backslash\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$.

Por otro lado, sean $h_1,..,h_m$ elementos arbitrarios de los universos de $\mathcal{A}$, pero tales que para todo $j\in\{1,\ldots,m\}$:

si v_j es variable individual entonces $h_j\in A_0$;

si v_j es variable relacional de aridad q, entonces $h_j\in A_q$;

si v_j es variable funcional de aridad q, entonces $h_j:A_0x..^q..x\ A_0\rightarrow A_0$ es una función tal que $h_j\in A_{q+1}$. Tenemos dos casos:

- Si $\mathcal{A}(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)$ no es pre-estructura-modelo de $\forall x_1\ldots\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi$, entonces $\mathcal{A}(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)\models_{\mathcal{F}}\forall x_1\ldots\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1\ldots.\forall x_{n+1}(D(x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\varphi)$.
- Si $\mathcal{A}(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)\models_{\mathcal{F}}\forall x_1\ldots\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi$, entonces la relación $f_{(h_1,\ldots,h_m)}$ definida como $f_{(h_1,\ldots,h_m)}=\{(z_1,\ldots,z_{n+1})\in(A_0)^{n+1}\mid\mathcal{A}(x_1/z_1,\ldots,x_{n+1}/z_{n+1})(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)\ sat_{\mathcal{F}}\ \varphi))\}$ es una función n-aria tal que $f_{(h_1,\ldots,h_m)}\in A_{n+1}$, por ser $\mathcal{A}$ estructura general. De esta manera, tenemos que $\mathcal{A}(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)(D/f_{(h_1,\ldots,h_m)})\ sat_{\mathcal{F}}\ \forall x_1\ldots.\forall x_{n+1}(D(x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\varphi)$ y entonces $\mathcal{A}(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)\ sat_{\mathcal{F}}\ \exists D\forall x_1\ldots.\forall x_{n+1}(D(x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\varphi)$. De este modo, $\mathcal{A}(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)\models_{\mathcal{F}}\forall x_1\ldots\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1\ldots.\forall x_{n+1}(D(x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\varphi)$.

Por lo tanto, en cualquiera de los casos anteriores tenemos que: $\mathcal{A}(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)\models_{\mathcal{F}}\forall x_1\ldots\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1\ldots.\forall x_{n+1}(D(x_1,\ldots x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\varphi)$ y como esto se realizó para $h_1,..,h_m$ arbitrarios, entonces: $\mathcal{A}\models_{\mathcal{F}}\forall v_1\ldots\forall v_m(\forall x_1\ldots\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1\ldots.\forall x_{n+1}(D(x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\varphi))$, lo que muestra que $\mathcal{A}\models_{\mathcal{F}}\forall fu^n\varphi$.

Como la prueba anterior fue realizada para $n\in N\setminus\{0\}$ arbitrario y para $\varphi\in FORM(L_2)$ arbitraria, entonces $\mathscr{A}\models_{\mathcal{F}}$ fu

(2) Ahora veamos que para todo $n\in N\setminus\{0\}$ y para cualquier fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$, $\mathscr{A}\models_{\mathcal{F}} \forall re^n\varphi$.
Sea $n\in N\setminus\{0\}$ arbitrario y sea $\varphi\in FORM(L_2)$ arbitraria. Si $FREE(re^n\varphi)=\{v_1,\ldots,v_m\}$ para algún $m\in N\setminus\{0\}$, entonces $\forall re^n\varphi=\forall v_1\ldots\forall v_m\exists X\forall x_1\ldots\forall x_n(X(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\varphi)$. Además, nótese que $FREE(re^n\varphi)=FREE(\varphi)\setminus\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$.
Por otro lado, sean $h_1,..,h_m$ elementos arbitrarios de los universos de $\mathscr{A}$, pero tales que para todo $j\in\{1,\ldots,m\}$:
si v_j es variable individual entonces $h_j\in A_0$;
si v_j es variable relacional de aridad q, entonces $h_j\in A_q$;
si v_j es variable funcional de aridad q, entonces $h_j:A_0x..^q..x\, A_0\rightarrow A_0$ es una función tal que $h_j\in A_{q+1}$.
Como $\mathscr{A}$ es estructura general, entonces la relación $R_{(h_1,\ldots,h_m)}$ definida como $R_{(h_1,\ldots,h_m)}=\{(z_1,\ldots,z_n)\in(A_0)^n \mid \mathscr{A}(x_1/z_1,\ldots, x_n/z_n)(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)\ sat_{\mathcal{F}}\ \varphi)\}$ es tal que $R_{(h_1,\ldots,h_m)}\in A_n$. De esta manera $\mathscr{A}(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)(X/R_{(h_1,\ldots,h_m)})\models_{\mathcal{F}}$ $\forall x_1\ldots\forall x_n(X(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\varphi)$, lo que implica que $\mathscr{A}(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)\models_{\mathcal{F}}$ $\exists X\forall x_1\ldots\forall x_n(X(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\varphi)$.
Debido a que lo anterior se hizo para $h_1,..,h_m$ arbitrarios, tenemos que $\mathscr{A}\models_{\mathcal{F}} \forall v_1\ldots\forall v_m\exists X\forall x_1\ldots\forall x_n(X(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\varphi)$, es decir, $\mathscr{A}\models_{\mathcal{F}}\forall re^n\varphi$.
Finalmente, como la prueba anterior fue realizada para $n\in N\setminus\{0\}$ arbitrario, y para $\varphi\in FORM(L_2)$ arbitraria, entonces $\mathscr{A}\models_{\mathcal{F}}$ re.

Es claro de los casos (1) y (2) que $\mathscr{A}$ es pre-estructura-modelo de $Comp(L_2)$.

(b) implica (a). Supongamos que $\mathscr{A}$ es pre-estructura-modelo de $Comp(L_2)$. Sea $\varphi\in FORM(L_2)$ arbitraria, sean las variables individuales $x_1,\ldots,x_n$ arbitrarias distintas entre sí y las variables $v_1,\ldots,v_m$ (distintas entre sí) de tipos $i_1,\ldots,i_m\in VAR$ respectivamente, tales que $FREE(\varphi)\subseteq\{x_1,\ldots,x_n,v_1,\ldots,v_m\}$. Además, sean $h_1,..,h_m$ elementos arbitrarios de los universos de $\mathscr{A}$, tales que para todo $j\in\{1,\ldots,m\}$:
si v_j es variable individual entonces $h_j\in A_0$
si v_j es variable relacional de aridad q, entonces $h_j\in A_q$
si v_j es variable funcional de aridad q, entonces $h_j:A_0x..^q..x\, A_0\rightarrow A_0$ es una función tal que $h_j\in A_{q+1}$.
Entonces la relación paramétricamente $\mathscr{A}$-definible $R=\{(z_1,\ldots,z_n)\in(A_0)^n \mid \mathscr{A}(x_1/z_1,\ldots,x_n/z_n)(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)\ sat_{\mathcal{F}}\ \varphi\}$ pertenece a A_n; esto se debe a que al ser $\mathscr{A}$ modelo de $Comp(L_2)$, entonces $\mathscr{A}$ es modelo de $\forall v_1\ldots\forall v_m\exists X\forall x_1\ldots\forall x_n(X(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\varphi)$, y entonces en particular, $\mathscr{A}(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)\ sat_{\mathcal{F}}\ \exists X\forall x_1\ldots\forall x_n(X(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\varphi)$, lo que significa que existe una relación $K\in A_n$ tal que $\mathscr{A}(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)(X/K)\ sat_{\mathcal{F}}\ \forall x_1\ldots\forall x_n(X(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\varphi)$; pero entonces para cada $(z_1,\ldots,z_n)\in(A_0)^n$, $\mathscr{A}(x_1/z_1,\ldots,x_n/z_n)(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)(X/K)\ sat_{\mathcal{F}}\ (X(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\varphi)$. De esto último tenemos que

$(z_1,\ldots,z_n)\in K$ si y sólo si $\mathscr{A}(x_1/z_1,\ldots,x_n/z_n)(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)(X/K)$ $sat_{\mathcal{F}}$ φ; pero como $X\notin FREE(\varphi)$, entonces $(z_1,\ldots,z_n)\in K$ si y sólo si $\mathscr{A}(x_1/z_1,\ldots,x_n/z_n)(v_1/h_1,\ldots,v_m/h_m)$ $sat_{\mathcal{F}}$ φ. Por lo tanto, $K=R$ y entonces $R=K\in A_n$.
■

Semántica sobre estructuras generales.

Debido a que todas las estructuras generales son pre-estructuras, definimos las nociones semánticas para estructuras generales como las mismas nociones dadas para pre-estructuras. Sólo haremos algunos cambios pequeños para referirnos específicamente a la clase de estructuras generales y hablar de *EG*-interpretación, *EG*-consecuencia, etc.

Asignaciones.

Una asignación M de un lenguaje L_2 de segundo orden de tipo Σ sobre una estructura general de tipo Σ $\mathscr{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$, es una asignación usual de L_2 sobre $\mathscr{A}$ como pre-estructura. Así, usaremos todas las definiciones dadas de asignaciones sobre pre-estructuras cuando hablemos de asignaciones sobre estructuras generales.

Interpretaciones.

Una ***EG*-interpretación I** de nuestro lenguaje L_2 sobre una estructura general $\mathscr{A}$ es un par $I=(\mathscr{A},M)$, donde M es una asignación sobre $\mathscr{A}$.

Sea $I=(\mathscr{A},M)$ una *EG*-interpretación de L_2. Para todo término τ y para todo predicado R, $I(\tau)$ y $I(R)$ están definidos por la definición dada para I como pre-estructura-interpretación.

Si I es la *EG*-interpretación $I=(\mathscr{A},M)$, denotamos:
$I(x/a)=(\mathscr{A},M(x/a))$, para $x\in F_0$ y $a\in A_0$
$I(X/Q)=(\mathscr{A},M(X/Q))$, para $n\in N\setminus\{0\}$, $X\in R_n$ y $Q\in A_n$
$I(D/f)=(\mathscr{A},M(D/f))$, para $n\in N\setminus\{0\}$, $D\in F_n$ y $f:A_0x..^n..x\ A_0\rightarrow A_0$ función tal que $f\in A_{n+1}$

Definición:

Una *EG*-interpretación **I satisface una fórmula** $\varphi\in FORM(L_2)$, (lo que denotamos I sat_{EG} φ) si y sólo si I $sat_{\mathcal{F}}\varphi$.

Estructura-general-modelo (*EG*-modelo).

Definición:

Sean $\mathscr{A}\in EG$, M una asignación de L_2 sobre $\mathscr{A}$, $I=(\mathscr{A},M)$ y $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_2)$.

- I es ***EG*-modelo de** φ (lo que denotamos I $\models_{EG}\varphi$) si y sólo si I $sat_{EG}\ \varphi$.
- I es *EG*-modelo de Γ si y sólo si para cada $\pi\in\Gamma$, I es *EG*-modelo de π. Denotamos I es *EG*-modelo de Γ por I $\models_{EG}\Gamma$.

Observación(iv3):
Nótese que para toda *EG*-interpretación I=($\mathcal{A}$,M), y para toda fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$, I $\models_{EG}\varphi$ si y sólo si I $\models_{\mathcal{F}}\varphi$, pues si I es una *EG*-interpretación y $\varphi\in FORM(L_2)$, entonces:
I $\models_{EG}\varphi$ **si y sólo si** I $sat_{EG}\ \varphi$ **si y sólo si** I $sat_{\mathcal{F}}\ \varphi$ **si y sólo si** I $\models_{\mathcal{F}}\varphi$.
■

Consecuencia lógica en estructuras generales (*EG*-consecuencia lógica).

Definición:

Sea $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_2)$.
φ es ***EG*-consecuencia lógica** de Γ (lo que denotamos $\Gamma\models_{EG}\varphi$) si y sólo si todo I *EG*-modelo de Γ es *EG*-modelo de φ.

Proposición(iv10): Para toda interpretación estándar I=($\mathcal{A}$,M), y para toda fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$, I $\models\varphi$ si y sólo si I $\models_{EG}\varphi$.

Demostración:
(Por inducción sobre $FORM(L_2)$; además diremos interpretación I en lugar de interpretación estándar I; asimismo, sea $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c\in CONS.OP})$ una estructura estándar).

(F1) Supongamos Π predicado n-ario y $\tau_1,..,\tau_n$ términos.
I $\models\Pi(\tau_1,..,\tau_n)$ si y sólo si I sat $\Pi(\tau_1,..,\tau_n)$ si y sólo si $(I(\tau_1),..,I(\tau_n))\in I(\Pi)=\Pi^{\mathcal{A}}\subseteq P((A_0))^n=A_n$ si y sólo si I $sat_{EG}\ \Pi(\tau_1,..,\tau_n)$ si y sólo si I $\models_{EG}\Pi(\tau_1,..,\tau_n)$ para toda interpretación I.

(F2) Sean Π y Ψ predicados n-arios.
I $\models(\Pi\approx_n\Psi)$ si y sólo si I sat $(\Pi\approx_n\Psi)$ si y sólo si $(I(\Pi),I(\Psi))\in I(\approx_n)$ si y sólo si I $sat_{EG}\ (\Pi\approx_n\Psi)$ si y sólo si I $\models_{EG}(\Pi\approx_n\Psi)$ para toda interpretación I.
Si τ_1 y τ_2 son términos, entonces I $\models(\tau_1\approx_0\tau_2)$ si y sólo si I sat $(\tau_1\approx_0\tau_2)$ si y sólo si $(I(\tau_1),I(\tau_1))\in I(\approx_0)$ si y sólo si I $sat_{EG}\ (\tau_1\approx_0\tau_2)$ si y sólo si I $\models_{EG}(\tau_1\approx_0\tau_2)$ para toda interpretación I.

(F3) Sean φ y π fórmulas tal que I $\models\varphi$ si y sólo si I $\models_{EG}\varphi$ para toda interpretación I y I $\models\pi$ si y sólo si I $\models_{EG}\pi$ para toda interpretación I.
+ Para toda interpretación I, I $\models\varphi\vee\pi$ **si y sólo** I sat φ ó I sat π **si y sólo si** I $\models\varphi$ ó I $\models\pi$ **si y sólo si** I $\models_{EG}\varphi$ ó I $\models_{EG}\pi$ **si y sólo si** I $sat_{EG}\ \varphi\vee\pi$ **si y sólo si** I $\models_{EG}\varphi\vee\pi$.
+ Para toda interpretación I, I $\models\neg\varphi$ **si y sólo** no ocurre que I sat φ **si y sólo si** no ocurre que I $\models_{EG}\varphi$ **si y sólo si** no ocurre que I $\models_{EG}\varphi$ **si y sólo si** I $\models_{EG}\neg\varphi$.

(F4) Sea φ fórmula tal que I $\models\varphi$ si y sólo si I $\models_{EG}\varphi$ para toda interpretación I, y sea x símbolo de variable individual.
Para toda interpretación I, I $\models\exists x\varphi$ **si y sólo si** I sat $\exists x\varphi$ **si y sólo si** hay $a\in A_0$ tal que I(x/a) sat φ **si y sólo si** hay $a\in A_0$ tal que I(x/a) $\models\varphi$ **si y sólo si** hay $a\in A_0$ tal que I(x/a) $\models_{EG}\varphi$ **si y sólo si** hay $a\in A_0$ tal que I(x/a) $sat_{EG}\ \varphi$ **si y sólo si** I $sat_{EG}\ \exists x\varphi$ **si y**

sólo si $I \models_{EG} \exists x\varphi$.

(F5) Sea φ fórmula tal que $I \models \varphi$ si y sólo si $I \models_{EG} \varphi$ para toda interpretación I, y sea X símbolo de variable relacional de aridad n, con $n \in N \setminus \{0\}$.
Para toda interpretación I, $I \models \exists X\varphi$ **si y sólo si** I sat $\exists X\varphi$ **si y sólo si** hay $R \in A_n$ tal que $I(X/R)$ sat φ **si y sólo si** hay $R \in A_n$ tal que $I(X/R) \models \varphi$ **si y sólo si** hay $R \in A_n$ tal que $I(X/R) \models_{EG} \varphi$ **si y sólo si** hay $R \in A_n$ tal que $I(X/R)$ sat_{EG} φ **si y sólo si** I sat_{EG} $\exists X\varphi$ **si y sólo si** $I \models_{EG} \exists X\varphi$.

(F6) Sea φ fórmula tal que $I \models \varphi$ si y sólo si $I \models_{EG} \varphi$ para toda interpretación I, y sea D símbolo de variable funcional de aridad n, con $n \in N \setminus \{0\}$.
Para toda interpretación I, $I \models \exists D\varphi$ **si y sólo si** I sat $\forall\exists\varphi$ **si y sólo si** hay una función $f: A_0 x ..^n.. x A_0 \rightarrow A_0$ tal que $I(D/f)$ sat φ **si y sólo si** hay una función $f: A_0 x ..^n.. x A_0 \rightarrow A_0$ tal que $I(D/f) \models \varphi$ **si y sólo si hay una** función $f: A_0 x ..^n.. x A_0 \rightarrow A_0$, con $f \in A_{n+1} = P((A_0)^{n+1})$, tal que $I(D/f) \models \varphi$ **si y sólo si** hay una función $f: A_0 x ..^n.. x A_0 \rightarrow A_0$, $f \in A_{n+1}$, tal que $I(D/f) \models_{EG} \varphi$ **si y sólo si** hay una función $f: A_0 x ..^n.. x A_0 \rightarrow A_0$, $f \in A_{n+1}$, tal que $I(D/f)$ sat_{EG} φ **si y sólo si** I sat_{EG} $\exists D\varphi$ **si y sólo si** $I \models_{EG} \exists D\varphi$.

■

Corolario(iv1):
Para toda interpretación estándar $I=(\mathscr{A},M)$, y para toda fórmula $\varphi \in FORM(L_2)$, $I \models \varphi$ **si y sólo si** $I \models_{EG} \varphi$ **si y sólo si** $I \models_{\mathcal{F}} \varphi$.

Demostración:
Sea I una interpretación estándar. Entonces por la proposición anterior tenemos que $I \models \varphi$ si y sólo si $I \models_{EG} \varphi$; además, por la observación(iv3) $I \models_{EG} \varphi$ si y sólo si $I \models_{\mathcal{F}} \varphi$. Por lo tanto, $I \models \varphi$ **si y sólo si** $I \models_{EG} \varphi$ **si y sólo si** $I \models_{\mathcal{F}} \varphi$.

■

Corolario(iv2):

(1) Pre-estructura-consecuencia lógica implica *EG*-consecuencia lógica; es decir: Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq FORM(L_2)$. Si $\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi$, entonces $\Gamma \models_{EG} \varphi$.

(2) *EG*-consecuencia lógica implica consecuencia lógica; es decir: Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq FORM(L_2)$. Si $\Gamma \models_{EG} \varphi$, entonces $\Gamma \models \varphi$.

(3) Pre-estructura-consecuencia lógica implica consecuencia lógica; es decir: Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq FORM(L_2)$. Si $\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi$, entonces $\Gamma \models \varphi$.

Demostración:

(1) Supongamos que $\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi$ y sea $I=(\mathscr{A},M)$ una *EG*-interpretación cualquiera tal que $I \models_{EG} \Gamma$. Entonces, por el corolario anterior, $I \models_{\mathcal{F}} \Gamma$ y como $\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi$, entonces $I \models_{\mathcal{F}} \varphi$; nuevamente por el corolario anterior, $I \models_{EG} \varphi$. Por lo tanto si $\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi$, entonces $\Gamma \models_{EG} \varphi$.

(2) Supongamos que $\Gamma \models_{EG} \varphi$ y sea $I=(\mathscr{A},M)$ una interpretación estándar cualquiera tal que $I \models \Gamma$. Entonces, por el corolario(iv1), $I \models_{EG} \Gamma$ y como $\Gamma \models_{EG} \varphi$, entonces $I \models_{EG} \varphi$; finalmente, por el corolario(iv1), $I \models \varphi$.

(3) Es inmediato de (1) y (2) de este mismo corolario.

■

Acerca del resultado anterior, en la sección de resultados pospuestos –página 104, corolario(iv6)– se mostrará explícitamente que en ninguna de las implicaciones que se prueban en el corolario(iv2) se da la implicación conversa.

Validez en estructuras generales.

Definición:

Una fórmula $\varphi \in FORM(L_2)$ es ***EG*-válida** si y sólo si $\varnothing \models_{EG} \Gamma$ (como es usual también denotamos esto último por $\models_{EG} \Gamma$).

Corolario(iv3):

(1) Si $\varphi \in FORM(L_2)$ es una fórmula pre-estructura-válida, entonces φ es una fórmula *EG*-válida

(2) Si $\varphi \in FORM(L_2)$ es una fórmula *EG*-válida, entonces φ es una fórmula válida en las estructuras estándar.

(3) Si $\varphi \in FORM(L_2)$ es una fórmula pre-estructura-válida, entonces φ es una fórmula válida en las estructuras estándar.

Demostración:

(1) Tómese $\Gamma=\varnothing$ en el corolario(iv2) inciso (1).

(2) Tómese $\Gamma=\varnothing$ en el corolario(iv2) inciso (2).

(3) Tómese $\Gamma=\varnothing$ en el corolario(iv2) inciso (3).

■

Satisfacibilidad en estructuras generales.

Definición:

Una fórmula $\varphi \in FORM(L_2)$ es ***EG*-satisfacible** si y sólo si existe un *EG*-modelo de φ.

Proposición(iv11):

(1) Si $\varphi \in FORM(L_2)$ es una fórmula pre-estructura-satisfacible, entonces no necesariamente φ es satisfacible en las estructuras estándar.

(2) Si $\varphi \in FORM(L_2)$ es una fórmula pre-estructura-satisfacible, entonces no necesariamente φ es *EG*-satisfacible

(3) Si $\varphi \in FORM(L_2)$ es una fórmula *EG*-satisfacible, entonces no necesariamente φ es satisfacible en las estructuras estándar.

Demostración:

(1)

Sea L_2 el lenguaje de segundo orden de tipo $\Sigma=(VAR,FUNC)$ tal que $Dom(FUNC)=CONS.OP=\varnothing$, y sean z,w variables individuales y X variable relacional de aridad 1. El enunciado $\exists z\exists w(\forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))\wedge\neg(z\approx w))$ es pre-estructura-satisfacible, pero no es satisfacible en las estructuras estándar (véase la proposición(iv2), página 66); esto prueba (1).

(2)

Tomando el mismo lenguaje del inciso anterior, tenemos que el mismo enunciado del inciso anterior no es EG-satisfacible: Obsérvese que si $\mathcal{A}=((\mathcal{A}_n)_{n\in N})$ es una estructura general de tipo Σ, entonces para todo $a\in A_0$, $\{a\}\in A_1$; esto se debe a que para todo $a\in A_0$, $\{a\}$ es una relación de primer orden paramétricamente $\mathcal{A}$-definible: $\{a\}=\{b\in A_0 \mid \mathcal{A}(z/b)(w/a)\ \mathrm{sat}_{\mathcal{F}}\ z\approx w\}$. Así, sea M una asignación cualquiera de L_2 en $\mathcal{A}$. Entonces $(\mathcal{A},M)\ \mathrm{sat}_{EG}\ \forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))$ si y sólo si para cualquier $G\in A_1$ $(\mathcal{A},M(X/G)\ \mathrm{sat}_{EG}\ (X(z)\leftrightarrow X(w))$, en particular tendría que ocurrir que, $(\mathcal{A},M(X/\{M(z)\})\ \mathrm{sat}_{EG}\ (X(z)\leftrightarrow X(w))$, lo que implica que $M(z),M(w)\in\{M(z)\}$, es decir $M(z)=M(w)$. De esto concluimos que para cualquier estructura general $\mathcal{A}$ de tipo Σ y cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$, $(\mathcal{A},M)\ \mathrm{sat}_{EG}\ \forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))\leftrightarrow(z\approx w)$, por lo cual el enunciado $\exists z\exists w(\forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))\wedge\neg(z\approx w))$ no es EG-satisfacible.

(3)
Vease el apéndice 2.

■

Equivalencia lógica en estructuras generales.

Definición:

Sean $\varphi,\pi\in FORM(L_2)$. φ y π son ***EG*-equivalentes** si y sólo si $\varphi \models_{EG} \pi$ y $\pi \models_{EG} \varphi$. Denotamos el hecho de que φ y π son EG-equivalentes por $\varphi \mathrel{=\!\!|\!\!\models}_{EG} \pi$.

REDUCCION DE LA LOGICA DE SEGUNDO ORDEN (CON SEMÁNTICA DEFINIDA SOBRE ESTRUCTURAS GENERALES) A LOGICA MULTIVARIADA.

<u>(De LSO sobre estructuras generales a lógica multivariada)</u>.

Dado que en la definición sintáctica de LSO cada elemento de VAR tiene asociada una clase de variable y cada clase de variable está ligada con un universo particular de cualquier pre-estructura, es natural preguntarse si la lógica de segundo orden no es más que lógica multivariada. La intención de la presente sección es la de mostrar que la lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales es reductible a una parte de la lógica multivariada, y debido a que la lógica multivariada es reductible a lógica de primer orden (esto se vio en el capítulo 3), concluiremos que la lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales es reductible a una parte de la lógica de primer orden que, además, cumple los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem. Deberá ser claro que lo anterior no es cierto para la lógica de segundo orden con semántica estándar, pues como se vio en el capítulo I, hay relaciones expresables en la lógica estándar de segundo orden que no son expresables en lógica de primer orden y que implican que la lógica de segundo orden sobre estructuras estándar no cumpla los teoremas de compacidad ni de Löwenheim-Skolem.

Nuestros propósitos inmediatos para reducir la lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales a lógica multivariada serán los siguientes:

- A cada lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ asociaremos un lenguaje multivariado $L_2\$$ de tipo $\Sigma\$$.
- A cada fórmula $\varphi\in L_2$ asociaremos una fórmula $\varphi\$\in L_2\$$.
- A cada estructura general $\mathscr{A}$ de tipo Σ asociaremos una estructura multivariada $\mathscr{A}\$$ de tipo $\Sigma\$$.
- A cada asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$ asociaremos una asignación M\$ de $L_2\$$ en $\mathscr{A}\$$.
- Probaremos que $(\mathscr{A},M)\models_{EG}\varphi$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M\$)\models\varphi\$$.

En lo sucesivo, sea L_2 un lenguaje de segundo orden de tipo Σ=(VAR,FUNC) tal que Dom(FUNC)=CONS.OP

Traducción sintáctica.

Definición:

Sea $\Sigma\$$=(SORT\$,FUNC\$) el tipo multivariado que consta de lo siguiente:
- SORT\$=$\{0\}\cup$VAR
- FUNC\$ es la función definida de la siguiente manera:

Dom(FUNC\$)=SIM.OP\$=CONS.OP$\cup\{\neg,\vee,\approx\}\cup\varepsilon\cup E\cup W$, donde:

(1) $\varepsilon=\{\varepsilon_n|n\in N\setminus\{0,1\}\}$es un conjunto de símbolos de constante relacional ajeno a CONS.OP$\cup\{\neg,\vee,\approx\}$.

(2) $E=\{E_n|n\in N\setminus\{0,1\}\}$ es un conjunto de símbolos de constante funcional ajeno a CONS.OP$\cup\{\neg,\vee,\approx\}\cup\varepsilon$.

(3) $W=\{{}_RW|R\in$CONS.OP y FUNC(R)=$(0,1,..^n..,1)$ para algún $n\in N\setminus\{0\}\}$ es un conjunto de símbolos de constante individual ajeno a CONS.OP$\cup\{\neg,\vee,\approx\}\cup\varepsilon\cup E$.

Además, FUNC\$:SIM.OP\$$\to(S_\omega$(SORT\$)$\cup(N\setminus\{0\}))\setminus\{(0)\}$ es tal que:

+ FUNC\$($\neg$)=(0,0), FUNC\$($\vee$)=(0,0,0), y FUNC\$($\approx$)=2.
+ Para cada q$\in$CONS.OP tal que q es constante individual, –es decir, FUNC(q)=1–, FUNC\$(q)=(1).
+ Para cada q$\in$CONS.OP tal que q no es constante individual, entonces FUNC\$(q)=FUNC(q)
+ Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, FUNC\$(ε_{n+1})=$(0,(0,1,..^n..,1),1,..^n..,1)$; nótese que ε_{n+1} es un símbolo de constante relacional de aridad n+1.
+ Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, FUNC\$(E_{n+1})=$(1,(1,1,..^n..,1),1,..^n..,1)$; obsérvese que E_{n+1} es un símbolo de constante funcional de aridad n+1.
+ Para cada ${}_RW$ tal que FUNC(R)=$(0,1,..^n..,1)$ para algún $n\in N\setminus\{0\}$, FUNC\$(${}_RW$)=$((0,1,..^n..,1))$.

Definimos $L_2\$$ como el lenguaje multivariado de tipo $\Sigma\$$; sólo haremos una convención más: Sabemos que para cada $\alpha\in$SORT\$$\setminus\{0\}$, $L_2\$$ debe contener un conjunto numerable de símbolos de variable de tipo α al que denominamos ν_α; por la manera en que se definió SORT\$, para cada $\alpha\in$SORT\$$\setminus\{0\}$, $\alpha\in$VAR y entonces pediremos que ν_α sea igual al conjunto de variables de tipo α de L_2. Explícitamente estos conjuntos son:
- Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $R_n=\{X_i^n|i\in N\}$ es el conjunto de variables relacionales de aridad n de tipo $(0,1,..^n..,1)\in$VAR.
- Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $F_n=\{D_i^n|i\in N\}$ es el conjunto de variables funcionales de aridad n de tipo $(1,1..^n..,1)\in$VAR.

- $v=F_0=\{x_i \mid i\in N\}$, es el conjunto de símbolos de variable individual (variables de tipo 1).

Ahora asociaremos a cada fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$ una fórmula $\varphi\$\in FORM(L_2\$)$. Con tal propósito definimos la función
$TRANS\$:EXPR(L_2)\cup(\cup_{n\in N} F_n)\to$(sucesiones finitas de elementos de $L_2\$$), como:

Para todo $x\in(\cup_{n\in N} F_n)$, $TRANS\$(x)= x$.

Además, definimos a TRANS\$ sobre los elementos de $EXPR(L_2)$ por recursión:

T1 Si x es un símbolo de variable individual, entonces $TRANS\$(x)=x$
T2 Si a es un símbolo de constante individual, entonces $TRANS\$(a)=a$
T3 Si f es un símbolo de constante funcional de aridad n, con $n\in N\backslash\{0\}$, y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, entonces $TRANS\$(f(\tau_1,..,\tau_n))=f(TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))$
T4 Si D es un símbolo de variable funcional de aridad n, con $n\in N\backslash\{0\}$, –nótese que entonces D es variable de tipo $(1,1,..^n..,1)$–, y $\tau_1,..,\tau_n$ son términos, entonces $TRANS\$(D(\tau_1,..,\tau_n))=E_{n+1}(D,TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))$.

P1 Para cualquier símbolo de variable n-ario relacional X, $TRANS\$(X)=X$
P2 Para cualquier símbolo de constante n-ario relacional P, tal que $P\in CONS.OP$, $TRANS\$(P)={}_PW$
P3 Para todo i, tal que $i\in N$, $TRANS\$(\approx_i)=\approx$

F1 Sean Π un predicado n-ario, $n\in N\backslash\{0\}$, y $\tau_1,..,\tau_n$ términos.
- Si $\Pi=X$, tal que X es un símbolo de variable relacional –es decir, es variable de tipo $(0,1..^n..,1)$–, entonces $TRANS\$(X(\tau_1,..,\tau_n))=\varepsilon_{n+1}(X,TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))$.
- Si $\Pi=P$, P un símbolo de constante relacional tal que $P\in CONS.OP$, entonces $TRANS\$(P(\tau_1,..,\tau_n))=P(TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))$.

F2 Sean τ_1 y τ_2 términos arbitrarios y sean Π y Ψ predicados n-arios cualesquiera con $n\in N\backslash\{0\}$, (para n=2, Π y Ψ distintos de $\approx_2$); entonces:
- $TRANS\$((\tau_1\approx_0\tau_2))=(TRANS\$(\tau_1)\approx TRANS\$(\tau_2))$.
- $TRANS\$(\Pi\approx_n\Psi)=(TRANS\$(\Pi)\approx TRANS\$(\Psi))$.

F3 Si φ y π son fórmulas, entonces:
$TRANS\$(\varphi\vee\pi)=TRANS\$(\varphi)\vee TRANS\$(\pi)$
$TRANS\$(\neg\pi)=\neg TRANS\$(\pi)$
F4 Si φ es fórmula y x es un símbolo de variable individual, entonces:
$TRANS\$(\exists x\varphi)=\exists x TRANS\$(\varphi)$
F5 Si φ es fórmula y X es un símbolo de variable relacional de aridad n, entonces
$TRANS\$(\exists X\varphi)=\exists X TRANS\$(\varphi)$
F6 Si φ es fórmula y D es un símbolo de variable funcional de aridad n, entonces
$TRANS\$(\exists D\varphi)=\exists D TRANS\$(\varphi)$

La siguiente indicación nos mostrará que TRANS\$ tiene como contradominio a $EXPR(L_2\$)\cup\{\approx\}$; por la definición de TRANS\$, es claro que, para todo $i\in N$, $TRANS\$(\approx_i)=\approx$ y que además TRANS\$ es sobreyectiva en el conjunto de todas las variables (pues está definida como la identidad en todas ellas). Así, para lograr lo que decimos bastará probar que TRANS\$ manda términos en términos y fórmulas en fórmulas.

Indicación(iv0):

(1) Para todo término $\xi\in TERM(L_2)$, $\xi\$$ es una expresión de tipo 1 y entonces, en particular, $\xi\$\in TERM(L_2\$)$.

(2) Para toda fórmula $\pi\in FORM(L_2)$, $\pi\$$ es una expresión de tipo 0, es decir, $\pi\$\in FORM(L_2\$)$.

(3) Para todo término $\tau\in TERM(L_2\$)$ existe ξ tal que $\xi\in TERM(L_2)\cup PRED(L_2)\cup(\cup_{n\in N} F_n)$ y tal que $TRANS\$(\xi)=\tau$.

Demostración:

(1) (Prueba por inducción sobre la formación de los términos de L_2).

T1 Si x es un símbolo de variable individual, entonces $TRANS\$(x)=x$, y como $x\in F_0$, entonces $x=TRANS\$(x)$ es un símbolo de variable de tipo 1 y por lo tanto, es una expresión de tipo 1.

T2 Si $a\in CONS.OP$ es un símbolo de constante individual, entonces $TRANS\$(a)=a$ y como $FUNC\$(a)=(1)$, entonces $a=TRANS\$(a)$ es una expresión de tipo 1.

T3 Sea f un símbolo de constante funcional de aridad n, con $n\in N\backslash\{0\}$, y sean $\tau_1,..,\tau_n$ términos tales que $TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n)$ son expresiones de tipo 1. Entonces, como $FUNC\$(f)=FUNC(f)=(1,1,..^n..,1)$, tenemos que $TRANS\$(f(\tau_1,..,\tau_n)=f(TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))$ es una expresión de tipo 1.

T4 Sea D un símbolo de variable funcional de aridad n, con $n\in N\backslash\{0\}$, y sean $\tau_1,..,\tau_n$ términos tales que $TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n)$ son expresiones de tipo 1. Entonces, como D es variable de tipo $(1,1,..^n..,1)$ y $FUNC\$(E_{n+1})=(1,(1,1,..^n..,1),1,..^n..,1)$, tenemos que $TRANS\$(D(\tau_1,..,\tau_n))=E_{n+1}(D,TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))$ es una expresión de tipo 1.

(2) (Prueba por inducción sobre la formación de las fórmulas de L_2).

F1 Sean Π un predicado n-ario, con $n\in N\backslash\{0\}$, y $\tau_1,..,\tau_n$ términos. Por el inciso (1) sabemos que $TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_1)$ son expresiones de tipo 1. Entonces:

- Si $\Pi=X$, tal que X es un símbolo de variable relacional, entonces X es variable de tipo $(0,1..^n..,1)$ y como $FUNC\$(\varepsilon_{n+1})=(0,(0,1,..^n..,1),1,..^n..,1)$, tenemos que $TRANS\$(X(\tau_1,..,\tau_n))=\varepsilon_{n+1}(X,TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))$ es una expresión de tipo 0.
- Si $\Pi=P$, donde $P\in CONS.OP$ es un símbolo de constante relacional, entonces $FUNC\$(P)=(0,1,..^n..,1)$ y así, $TRANS\$(P(\tau_1,..,\tau_n))=P(TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))$ es una expresión de tipo 0.

F2 Sean τ_1 y τ_2 términos arbitrarios y sean Π y Ψ predicados n-arios cualesquiera con $n\in N\backslash\{0\}$, (para n=2, Π y Ψ distintos de $\approx_2$). Por el inciso (1) sabemos que $TRANS\$(\tau_1)$ y $TRANS\$(\tau_2)$ son expresiones de tipo 1. Entonces:

- $TRANS\$((\tau_1\approx_0\tau_2))=(TRANS\$(\tau_1)\approx TRANS\$(\tau_2))$ es una expresión de tipo 0.
- $TRANS\$(\Pi\approx_n\Psi)=(TRANS\$(\Pi)\approx TRANS\$(\Psi))$ es una expresión de tipo 0.

F3 Sean φ y π son fórmulas tales que $TRANS\$(\varphi)$ y $TRANS\$(\pi)$ son expresiones de tipo 0. Entonces:
$TRANS\$(\varphi\vee\pi)=TRANS\$(\varphi)\vee TRANS\$(\pi)$ es una expresión de tipo 0.
$TRANS\$(\neg\pi)=\neg TRANS\$(\pi)$ es una expresión de tipo 0.

F4 Si φ es una fórmula tal que $TRANS\$(\varphi)$ es una expresión de tipo 0 y x es un símbolo de variable individual, entonces:
$TRANS\$(\exists x\varphi)=\exists xTRANS\$(\varphi)$ es una expresión de tipo 0.

F5 Si φ es fórmula tal que $TRANS\$(\varphi)$ es una expresión de tipo 0 y X es un símbolo de variable relacional de aridad n, entonces:

TRANS\$($\exists X\varphi$)=$\exists X$TRANS\$(φ) es una expresión de tipo 0.

F6 Si φ es fórmula tal que TRANS\$(φ) es una expresión de tipo 0 y D es un símbolo de variable funcional de aridad n, entonces:
TRANS\$($\exists D\varphi$)=$\exists D$TRANS\$(φ) es una expresión de tipo 0.

(3) (Prueba por inducción sobre la formación de los términos de L_2\$).

E1 - Si x es un símbolo de variable de tipo i, entonces $i\in$SORT\$$\setminus\{0\}$=VAR, y entonces:
+ Si i=1, entonces $x\in F_0$, es un símbolo de variable relacional en L_2 y TRANS\$(x)=x.
+ Si $i=(0,1,..^n..,1)$ para alguna $n\in N\setminus\{0\}$, entonces $x\in R_n$, es un símbolo de variable relacional de aridad n en L_2 y TRANS\$(x)=x.
+ Si $i=(1,1,..^n..,1)$ para alguna $n\in N\setminus\{0\}$, entonces $x\in F_n$, es un símbolo de variable funcional de aridad n en L_2 y TRANS\$(x)=x.

E2 - Si $a\in$SIM.OP\$=CONS.OP$\cup\varepsilon\cup E\cup W$ es tal que FUNC\$(a)=(i), con $i\in$SORT\$, (es decir, a es un símbolo de constante de tipo i), entonces tenemos dos casos:
+ Si i=1, entonces $a\in$CONS.OP, es un símbolo de constante individual en L_2 y TRANS\$(a)=a.
+ Si $i\neq 1$, entonces $a\in W$ (debido a que si $b\in$SIM.OP\$= CONS.OP$\cup\{\neg,\vee,\approx\}\cup\varepsilon\cup E\cup W$ es un símbolo de constante individual, entonces $b\in$CONS.OP$\cup W$; pero todo símbolo de constante individual $c\in$CONS.OP es tal que FUNC\$(C)=(1)). Por lo tanto, existe $R\in$CONS.OP tal que FUNC(R)=$(0,1,..^n..,1)$=i para algún $n\in N\setminus\{0\}$ y tal que $a={}_RW$. Así, $R\in$PRED(L_2) es un predicado n-ario en L_2 y es tal que TRANS\$(R)=${}_RW$=a.

- Sea $f\in$SIM.OP\$=CONS.OP$\cup\{\neg,\vee,\approx\}\cup\varepsilon\cup E\cup W$ un símbolo funcional de aridad n, para algún $n\in N\setminus\{0\}$, y sean $\tau_1,..,\tau_n\in$TERM(L_2\$) tal que existen $\xi_1,..,\xi_n\in$TERM(L_2)$\cup$PRED(L_2)$\cup(\cup_{n\in N} F_n)$ tal que TRANS(ξ_1)=τ_1,..,TRANS(ξ_n)=τ_n, y tal que $f(\tau_1,..,\tau_n)\in$TERM(L_2\$). Entonces, por ser f símbolo funcional, tenemos que $f\in$CONS.OP$\cup E$ y tenemos dos casos:
+ Si $f\in$CONS.OP, entonces FUNC\$(f)=$(1,1,..^n..,1)$, y entonces $\tau_1,..,\tau_n$ son expresiones de tipo 1. Para probar nuestro objetivo, primero veamos la siguiente

Afirmación(+1+): Sea $\tau\in$TERM(L_2\$). Si τ es una expresión de tipo 1 y es tal que existe $\xi\in$TERM(L_2)$\cup$PRED(L_2)$\cup(\cup_{n\in N} F_n)$ tal que TRANS\$(ξ)=τ, entonces $\xi\in$TERM(L_2).
Prueba: (Por reducción al absurdo). Supongamos que existe $\xi\in$TERM(L_2)$\cup$PRED(L_2)$\cup(\cup_{n\in N} F_n)$ tal que TRANS\$(ξ)=τ, donde τ es una expresión de tipo 1, pero tal que $\xi\notin$TERM(L_2). Como $\xi\in$TERM(L_2)$\cup$PRED(L_2)$\cup(\cup_{m\in N} F_m)$, entonces $\xi\in$PRED(L_2)$\cup(\cup_{m\in N\setminus\{0\}} F_m)$.
Así, debería ocurrir alguno de los siguientes casos:
(i) ξ=X para algún símbolo de variable relacional de tipo $(0,1,..^k..,1)$, para algún $k\in N\setminus\{0\}$. Esto nos lleva a la contradicción de que τ=TRANS\$(X)=X, debiera ser una expresión de tipo $(0,1,..^k..,1)$, cuando en realidad es una expresión de tipo 1.
(ii) ξ=P para algún P símbolo de constante relacional tal que FUNC\$(P)=$(0,1,..^k..,1)$ para algún $k\in N\setminus\{0\}$. Esto nos lleva a la contradicción de que τ=TRANS\$(P)=${}_PW$ debiera ser una expresión de tipo $(0,1,..^k..,1)$, –debido a que FUNC\$(${}_PW$)=($(0,1,..^k..,1)$)–, cuando en realidad es una expresión de tipo 1.
(iii) $\xi=\approx_m$, para algún $m\in N\setminus\{0\}$. Esto es contradictorio por que entonces τ=TRANS\$($\approx_m$)=$\approx$ no debiera ser expresión de L_2\$, cuando en realidad τ es una

expresión de tipo 1.

(vi) $\xi\in(\cup_{m\in N\setminus\{0\}} F_m)$. Esto también es contradictorio, pues esto significaría que τ=TRANS\$(ξ)=ξ es un término de tipo $(1,..^{k+1}..,1)$ para algún $k\in N\setminus\{0\}$, cuando en realidad es un término de tipo 1.

Por último, debido a todos los casos anteriores, tenemos probada la afirmación.▼

Así, de la afirmación(+1+), para todo $q\in\{1,...,n\}$, $\xi_q\in$TERM(L_2) y entonces $f(\xi_q,..,\xi_q)\in$TERM(L_2); además, $f(\xi_q,..,\xi_q)$ es tal que TRANS($f(\xi_q,..,\xi_q)$)=f(TRANS\$(ξ_1),..,TRANS\$(ξ_n))=$f(\tau_1,..,\tau_n)$.

+ Si $f\in E$, entonces existe $k\in N\setminus\{0\}$ tal que $k+1=n$, y tal que $f=E_{k+1}$; de esta manera, FUNC\$(E_{k+1})=$(1,(1,..^{k+1}..,1),1,..^{k}..,1)$ y la n-ada de términos $(\tau_1,..,\tau_n)=(\tau_1,..,\tau_{k+1})$. Así, τ_1 es expresión de tipo $(1,..^{k+1}..,1)$, y $\tau_2,..,\tau_{k+1}$ son expresiones de tipo 1, (debido a que $E_{k+1}(\tau_1,..,\tau_{k+1})=f(\tau_1,..,\tau_{k+1})=f(\tau_1,..,\tau_n)\in$TERM($L_2$\$)); además, por la afirmación(+1+) tenemos que, para todo $q\in\{2,...,k+1\}$, $\xi_q\in$TERM(L_2). Casi para concluir, veamos la siguiente

Afirmación(+2+) Si $\tau\in$TERM(L_2\$) es una expresión de tipo $(1,..^{k+1}..,1)$, entonces τ=D, donde D es una variable de tipo $(1,..^{k+1}..,1)$, es decir, $D\in F_k$.

Prueba: Sabemos que todas expresiones de tipo $(1,..^{k+1}..,1)$ son:

- Todas las variables de tipo $(1,..^{k+1}..,1)$, es decir, los elementos de F_k.
- Todos los $a\in$SIM.OP\$ tal que FUNC\$(a)=$((1,..^{k+1}..,1))$. Debido a la definición de SIM.OP\$, no hay este tipo de expresiones.
- Todas aquellas expresiones $f(\lambda,\mu_1,..,\mu_s)$, donde $f\in$SIM.OP\$ es tal que FUNC\$(f)=$((1,..^{k+1}..,1),i_1,...1_s)$, y donde, para todo $j\in\{1,..,s\}$, μ_j es una expresión de tipo i_j. En nuestro caso, como no existen $f\in$SIM.OP\$ tal que FUNC\$(f)=$((1,..^{k+1}..,1),i_1,...1_s)$, entonces no existen este tipo de expresiones.

Por lo tanto la única manera de que τ sea una expresión de tipo $(1,..^{k+1}..,1)$ es que τ=D, donde D es una variable de tipo $(1,..^{k+1}..,1)$, es decir, $D\in F_k$.▼

Finalmente, debido a la afirmación(+2+), τ_1=D, donde $D\in F_k$; además, como TRANS\$(ξ_1)=τ_1=D, entonces $\xi_1=D\in F_k\subseteq\cup_{m\in N}F_m$, ya que no hay otra manera de que TRANS\$ evaluado en un elemento de su dominio nos de $D\in F_k$. Por lo tanto, de todo lo anterior tenemos que $\xi_1(\xi_2,..,\xi_n)=D(\xi_2,..,\xi_n)=D(\xi_2,..,\xi_{k+1})\in$TERM($L_2$) y además, es tal que TRANS\$($\xi_1(\xi_2,..,\xi_n)$)=TRANS\$($D(\xi_2,..,\xi_n)$)= TRANS\$($D(\xi_2,..,\xi_{k+1})$)=E_{k+1}(TRANS\$(D),..,TRANS\$(ξ_{k+1}))= E_{k+1}(D,TRANS\$(ξ_2)..,TRANS\$(ξ_{k+1}))=$E_{k+1}(D,\tau_2,..,\tau_{k+1})=E_{k+1}(\tau_1,..,\tau_{k+1})$= $f(\tau_1,..,\tau_{k+1})=f(\tau_1,..,\tau_n)$.

■

Definimos para cada $\varphi\in$FORM(L_2), φ\$=TRANS\$(φ); es claro que φ\$$\in$FORM($L_2$\$) debido a la indicación(iv0) inciso (2).

Traducción semántica.

<u>(De estructuras generales a estructuras multivariadas).</u>

Sea $\mathscr{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$ una estructura general de segundo orden de tipo Σ. Definimos la estructura multivariada $\mathscr{A}\$=((A\$_i)_{i\in SORT\$},(C^{\mathscr{A}})_{c\in SIM.OP\$})$ de tipo $\Sigma\$$ como:

- $A\$_0=\{V,F\}$; $A\$_1=A_0$; para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $A\$_{(0,1,..^n..,1)}=A_n$.
- Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $A\$_{(1,1,..^n..,1)}=\{Z\in A_{n+1} \mid Z:A_0x..^n..xA_0\rightarrow A_0$ es función$\}$.

Observación(iv4):

(1) Nótese que para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $A\$_{(1,1,..^n..,1)}\neq\varnothing$, pues sea $q\in A_0\neq\varnothing$ y sean $x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},t$ variables individuales. Entonces la función $Z:(A_0)^n\rightarrow A_0$ tal que $Z(w)=q$ para todo $w\in(A_0)^n$ se puede definir como $Z=\{(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1})\in(A_0)^{n+1} \mid \mathscr{A}(x_1/z_1,\ldots,x_n/z_n,x_{n+1}/z_{n+1})(t/q) \models_{\mathcal{F}} (x_{n+1}\approx t)\}$. Esto prueba que Z es paramétricamente definible y entonces $Z\in A_{n+1}$, (por ser $\mathscr{A}$ estructura general); así, $A\$_{(1,1,..^n..,1)}\neq\varnothing$. Además adviértase que la prueba anterior nos muestra que, en una estructura general $\mathscr{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathscr{A}})_{c\in CONS.OP})$ arbitraria, para cada $n\in N\setminus\{0\}$, A_{n+1} siempre contiene funciones.

(2) Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $A\$_{(1,1,..^n..,1)}$ es el conjunto de todas las funciones $Z:(A_0)^n\rightarrow A_0$ tal que $Z\in A\$_{(0,..^{n+1}..,1)}$, pues recuérdese que para todo $n\in N\setminus\{0\}$, $A_{n+1}=A\$_{(0,..^{n+1}..,1)}$. Otra cosa más relacionada con esto, es que para todo $Z\in A\$_{(1,1,..^n..,1)}$, Z es una función paramétricamente $\mathscr{A}$-definible usando el lenguaje L_2; esto es inmediato de la observación(iv1) inciso (1) página 71, y a que, claramente, cualquier función $Z:(A_0)^n\rightarrow A_0$ tal que $Z\in A_{n+1}=A\$_{(0,..^{n+1}..,1)}$ es una relación n+1-aria de primer orden.

▼

- Para cada $C\in CONS.OP\cap SIM.OP\$$, –se tiene que $FUNC\$(C)=FUNC(C)$–:
  + Si $FUNC\$(C)=1$, entonces $C^{\mathscr{A}\$}=C^{\mathscr{A}}$. Así, $C^{\mathscr{A}\$}\in A_0=A\$_1$
  + Si $FUNC\$(C)=(1,1,..^n..,1)$, con $n\in N\setminus\{0\}$, entonces $C^{\mathscr{A}\$}:A\$_1x..^n..xA\$_1\rightarrow A\$_1$ es una función n-aria definida como: $C^{\mathscr{A}\$}=C^{\mathscr{A}}$.
  + Si $FUNC\$(C)=(0,1,..^n..,1)$, con $n\in N\setminus\{0\}$, entonces $C^{\mathscr{A}\$}:A\$_1x..^n..xA\$_1\rightarrow A\$_0$ es una relación n-aria definida como:
    $C^{\mathscr{A}\$}(z_1,\ldots,z_n)=V$ si y sólo si $(z_1,\ldots,z_n)\in C^{\mathscr{A}}$,
    $C^{\mathscr{A}\$}(z_1,\ldots,z_n)=F$ si y sólo si $(z_1,\ldots,z_n)\notin C^{\mathscr{A}}$.
- Para cada $C\in(SIM.OP\$\setminus CONS.OP)=\varepsilon\cup E\cup W\cup\{\neg,\vee,\approx\}$:
  + Si $C\in\{\neg,\vee,\approx\}$, entonces $C^{\mathscr{A}\$}$ es la función definida de manera canónica en la lógica multivariada de los símbolos $\{\neg,\vee,\approx\}$ sobre la estructura $\mathscr{A}\$$. (Véase la definición de estructuras multivariadas en la página 47, capítulo III).
  + Si $C\in\varepsilon=\{\varepsilon_n | n\in N\setminus\{0,1\}\}$, entonces $C=\varepsilon_{n+1}$ para algún $n\in N\setminus\{0\}$ y entonces $FUNC\$(\varepsilon_{n+1})=(0,(0,1,..^n..,1),1,..^n..,1,)$. Así, $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathscr{A}\$}=C^{\mathscr{A}\$}$ es la relación n+1-aria $\varepsilon_n{}^{\mathscr{A}\$}:A\$_{(0,1,..^n..,1)}xA\$_1x..^n..xA\$_1\rightarrow A\$_0$ definida como:
    $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathscr{A}\$}(Z,z_1,\ldots,z_n)=V$ si y sólo si $(z_1,\ldots,z_n)\in Z$,
    $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathscr{A}\$}(Z,z_1,\ldots,z_n)=F$ si y sólo si $(z_1,\ldots,z_n)\notin Z$.
  + Si $C\in E=\{E_n | n\in N\setminus\{0,1\}\}$, entonces $C=E_{n+1}$ para algún $n\in N\setminus\{0\}$ y entonces $FUNC\$(E_{n+1})=(1,(1,1,..^n..,1),1,..^n..,1)$. Así, $E_{n+1}{}^{\mathscr{A}\$}=C^{\mathscr{A}\$}$ es la función n+1-aria

$E_{n+1}^{\mathcal{A}\$}: A\$_{(1,1,..n..,1)} x A\$_1 x..{}^n..x A\$_1 \rightarrow A\$_1$ definida como:

$E_{n+1}^{\mathcal{A}\$}(Z,z_1,...,z_n)=Z(z_1,...,z_n)$.

+ Si $C\in W=\{_R W | R\in CONS.OP$ y $FUNC(R)=(0,1,..{}^n..,1)$ para algún $n\in N\backslash\{0\}\}$ entonces $C={}_R W$ para algún $R\in CONS.OP$ tal que $FUNC(R)=(0,1,..{}^m..,1)$ para algún $m\in N\backslash\{0\}$; es decir, $FUNC\$({}_R W)=((0,1,..{}^m..,1))$. Así, definimos ${}_R W^{\mathcal{A}\$}=C^{\mathcal{A}\$}$ como:

$C^{\mathcal{A}\$}={}_R W^{\mathcal{A}\$}=R^{\mathcal{A}}\in A_m=A\$_{(0,..m..,1)}$.

Obsérvese que cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$ es una asignación de $L_2\$$ en $\mathcal{A}\$$, pues $M:(\cup_{n\in N} F_n)\cup(\cup_{n\in N\backslash\{0\}} R_n)\rightarrow(\cup_{n\in N} A_n)$ es tal que:

- $M[F_0]\subseteq A_0$
- Para cada $n\in N\backslash\{0\}$, si $D\in F_n$ entonces $M(D):A_0 x..{}^n..x\, A_0\rightarrow A_0$ es una función.
- Para cada $n\in N\backslash\{0\}$, $M[R_n]\subseteq A^n$

Todo lo anterior significa que $M:(\cup_{i\in SORT\backslash\{0\}} v_i)\rightarrow(\cup_{i\in SORT\backslash\{0\}} A\$_i)$ y $M[v_i]\subseteq A\$_i$ para todo $i\in SORT\backslash\{0\}$, por lo que la asignación M es una asignación de $L_2\$$ en $\mathcal{A}\$$.

Lema(iv1): Con todas las definiciones anteriores, para todo término τ de L_2 y para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$, $(\mathcal{A},M)(\tau)=(\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau))$.

Demostración:

(Por inducción sobre la formación de los términos).

T1 $(\mathcal{A},M)(x)=M(x)=(\mathcal{A}\$,M)(x)=(\mathcal{A},M)(TRANS\$(x))$ para toda variable individual $x\in F_0$ (pues $TRANS\$(x)=x$) y para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$.

T2 $(\mathcal{A},M)(a)=a^{\mathcal{A}}=a^{\mathcal{A}\$}=(\mathcal{A}\$,M)(a)=(\mathcal{A},M)(TRANS\$(a))$ para todo a símbolo de constante individual (pues $TRANS\$(a)=a$ y $FUNC(a)=1$) y para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$.

T3 Sea f un símbolo de constante funcional de aridad n, con $n\geq 1$, y $\tau_1,..,\tau_n$ términos. Supongamos que $(\mathcal{A},M)(\tau_i)=(\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_i))$ para cada i tal que $1\leq i\leq n$ y para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$. Entonces: $(\mathcal{A},M)(f(\tau_1,..,\tau_n))=$
$f^{\mathcal{A}}((\mathcal{A},M)(\tau_1),..,(\mathcal{A},M)(\tau_n))=f^{\mathcal{A}}((\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_1)),..,(\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_n))=$
$f^{\mathcal{A}\$}((\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_1)),..,(\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_n))=$
$(\mathcal{A}\$,M)f(TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))=(\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(f(\tau_1,..,\tau_n)))$ para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$. Nótese que se está usando el hecho de que por ser f símbolo de constante funcional de aridad n, entonces $f\in CONS.OP$. Así, $FUNC\$(f)=FUNC(f)=(1,1,..{}^n..,1)$ y por lo tanto $f^{\mathcal{A}}=f^{\mathcal{A}\$}$; además $TRANS\$(f(\tau_1,..,\tau_n))=f(TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))$.

T4 Sean D un símbolo de variable funcional de aridad n, con $n\geq 1$, –nótese que entonces $D\in F_n$ y por lo tanto es variable de tipo $(1,1,..{}^n..,1)$– y $\tau_1,..,\tau_n$ términos. Supongamos que$(\mathcal{A},M)(\tau_i)=(\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_i))$ para cada i tal que $1\leq i\leq n$ y para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$. Entonces:
$(\mathcal{A},M)(D(\tau_1,..,\tau_n))=M(D)((\mathcal{A},M)(\tau_1),..,(\mathcal{A},M)(\tau_n))=$
$M(D)((\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_1)),..,(\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_n)))=$
$E_{n+1}^{\mathcal{A}\$}(M(D),(\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_1)),..,(\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_n)))=$
$E_{n+1}^{\mathcal{A}\$}((\mathcal{A}\$,M)(D),(\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_1)),..,(\mathcal{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_n)))=$

$(\mathcal{AS},M)(E_{n+1}(D,TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))=(\mathcal{AS},M)(TRANS\$(D(\tau_1,..,\tau_n)))$ para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$. Obsérvese que se usa el hecho de que $E_{n+1}^{\mathcal{AS}}:A\$_{(1,1,..^n..,1)}xA\$_1x..^n..xA\$_1 \rightarrow A\$_1$ es una función definida como $E_{n+1}^{\mathcal{AS}}(Z,z_1,...,z_n)=Z(z_1,...,z_n)$ y además que $TRANS\$(D(\tau_1,..,\tau_n))= E_{n+1}(D,TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))$.

■

Observación(iv5):
Según toda nuestras definiciones previas, obsérvese que para predicados arbitrarios de L_2 ocurre lo siguiente:

P1 Para cualquier símbolo de variable n-ario relacional X, $(\mathcal{A},M)(X)=M(X)=M(TRANS\$(X))=(\mathcal{AS},M)(TRANS\$(X))$, para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$.

P2 Para cualquier símbolo de constante n-ario relacional P, $P\in CONS.OP$, para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$, y para cualquiera $(z_1,...,z_n)\in A_0x..^n..xA_0$ ocurre que: $(z_1,...,z_n)\in(\mathcal{A},M)(P)$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\in P^{\mathcal{A}}={}_PW^{\mathcal{AS}}$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\in(\mathcal{AS},M)({}_PW)$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\in((\mathcal{AS},M)(TRANS\$(P)))$.

P3 Para todo i, tal que $i\in N$, para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$ y para todo $(z_1,z_2)\in AixAi$ se tiene que: $(z_1,z_2)\in(\mathcal{A},M)(\approx_i)$ si y sólo si $z_1=z_2$ si y sólo si $((\mathcal{AS},M)(\approx))(z_1,z_2)=V$ si y sólo si $((\mathcal{AS},M)(TRANS\$(\approx_i)))(z_1,z_2)=V$.

■

Lema(iv2): Con todas las definiciones anteriores, para cualquier predicado n-ario Π de L_2 (si n=2, Π distinto de $\approx_2$) y para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$: $(\mathcal{A},M)(\Pi)=(\mathcal{AS},M)(TRANS\$(\Pi))$.

Demostración:

- Si $\Pi=X$ es un símbolo de variable relacional, entonces $(\mathcal{A},M)(\Pi)=(\mathcal{A},M)(X)=M(X)= (\mathcal{AS},M)(X)=(\mathcal{AS},M)(TRANS\$(X))= (\mathcal{AS},M)(TRANS\$(\Pi))$
- Si Π no es un símbolo de variable relacional, entonces Π es un símbolo de constante relacional. Así, $\Pi\in CONS.OP$ y $FUNC(\Pi)=(0,1,..^n..,1)$ para algún $n\in N\setminus\{0\}$. Por lo tanto $(\mathcal{A},M)(\Pi)=\Pi^{\mathcal{A}}={}_\Pi W^{\mathcal{AS}}=(\mathcal{AS},M)({}_\Pi W)=(\mathcal{AS},M)(TRANS\$(\Pi))$, donde ${}_\Pi W\in W$ y $FUNC\$({}_\Pi W)= ((0,1,..^n..,1))$.

■

Teorema(iv1): Con toda las definiciones anteriores, para cualquier fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$ del lenguaje L_2 de segundo orden de tipo Σ y para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$ se tiene que $(\mathcal{A},M)\ sat_{EG}\ \varphi$ si y sólo si $(\mathcal{AS},M)$ sat $TRANS\$(\varphi)$.

Demostración:
(Por inducción sobre la formación de las fórmulas de L_2)

F1 Sean Π un predicado n-ario, $n\geq1$, y $\tau_1,..,\tau_n$ términos.

- Si $\Pi=X$, tal que X es un símbolo de variable relacional –es decir, es variable de tipo $(0,1..^n..,1)$–.
  $(\mathcal{A},M)\ sat_{EG}\ X(\tau_1,...,\tau_n)$ si y sólo si $((\mathcal{A},M)(\tau_1),..,(\mathcal{A},M)(\tau_n))\in(\mathcal{A},M)(X)=M(X)$ si y

sólo si $((\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_1)),...,(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_n)))\in M(X)$ (debido al lema(iv1)) si y sólo si $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathscr{AS}}(M(X),(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_1)),...,(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_n)))=V$ (debido a la definición de $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathscr{AS}}$) si y sólo si $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathscr{AS}}((\mathscr{A}\$,M)(X),(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_1)),...,(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_n)))=V$ (debido a que $M(X)=(\mathscr{A}\$,M)(X)$ por la observación(iv5) inciso P1) si y sólo si $(A\$,M)(\varepsilon_{n+1}(X,TRANS\$(\tau_1),...,TRANS\$(\tau_n)))=V$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(X(\tau_1,...,\tau_n)))=V$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)$ sat $TRANS\$(X(\tau_1,...,\tau_n))$ para toda asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$.

- Si $\Pi=P$, P un símbolo de constante relacional tal que $P\in CONS.OP$, entonces $(\mathscr{A},M)$ sat_{EG} $P(\tau_1,...,\tau_n)$ si y sólo si $((\mathscr{A},M)(\tau_1),...,(\mathscr{A},M)(\tau_n))\in(\mathscr{A},M)(P)=P^{\mathscr{A}}$ si y sólo si $P^{\mathscr{AS}}((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n))=V$ (por la manera en que se definió $P^{\mathscr{AS}}$) si y sólo si $((\mathscr{A}\$,M)(P))((\mathscr{A},M)(\tau_1),..,(\mathscr{A},M)(\tau_n))=V$ si y sólo si $((\mathscr{A}\$,M)(P))((\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_1)),...,(\mathscr{A}\$,M)(TRANS(\tau_n)))=V$ (debido al lema(iv1)) si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)(P(TRANS\$(\tau_1),...,TRANS\$(\tau_n)))=V$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(P(\tau_1,...,\tau_n)))=V$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)$ sat $TRANS\$(P(\tau_1,...,\tau_n))$ para toda asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$.

F2 Sean τ_1 y τ_2 términos arbitrarios y sean Π y Ψ predicados n-arios cualesquiera (para n=2, Π y Ψ distintos de $\approx_2$), con $n\geq 1$.

- $(\mathscr{A},M)$ sat_{EG} $(\tau_1\approx_0\tau_2)$ si y sólo si $((\mathscr{A},M)(\tau_1),(\mathscr{A},M)(\tau_2))\in(\mathscr{A},M)(\approx_0)=\{(x,y)\in(A_0)^2|x=y\}$ si y sólo si $(\mathscr{A},M)(\tau_1)=(\mathscr{A},M)(\tau_2)$ si y sólo si $((\mathscr{A}\$,M)(\approx))((\mathscr{A},M)(\tau_1),(\mathscr{A},M)(\tau_2))=V$ (por la observación(iv5) inciso P3) si y sólo si $((\mathscr{A}\$,M)(\approx))((\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_1)),(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_2)))=V$ (por el lema(iv1)) si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)(\approx(TRANS\$(\tau_1),TRANS\$(\tau_2)))=V$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_1)\approx TRANS\$(\tau_2))=V$ (pues recuérdese que cuando se definieron las expresiones en los lenguajes multivariados, se hizo la convención de escribir la fórmula $\approx(\tau_1,\tau_2)$ como $(\tau_1\approx\tau_2)$. Ver: Notación inciso (a5) página 45) si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\tau_1\approx_0\tau_2))=V$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)$ sat $TRANS\$(\tau_1\approx_0\tau_2)$ para toda asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$.
- $(\mathscr{A},M)$ sat_{EG} $(\Pi\approx_n\Psi)$ si y sólo si $((\mathscr{A},M)(\Pi),(\mathscr{A},M)(\Psi))\in(\mathscr{A},M)(\approx_n)=\{(X,Y)\in(A_n)^2|X=Y\}$ si y sólo si $(\mathscr{A},M)(\Pi)=(\mathscr{A},M)(\Psi)$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\Pi))=(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\Psi))$ (por el lema(iv2)) si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)((TRANS\$(\Pi)\approx TRANS\$(\Psi))=V$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)(TRANS\$(\Pi\approx_n\Psi))=V$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)$ sat $TRANS\$(\Pi\approx_n\Psi)$, para toda asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$.

F3 Sean φ y π fórmulas tales que $(\mathscr{A},M)$ sat_{EG} φ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)$ sat $TRANS\$(\varphi)$, y $(\mathscr{A},M)$ sat_{EG} π si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)$ sat $TRANS\$(\pi)$, para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$. Entonces:

- $(\mathscr{A},M)$ sat_{EG} $(\varphi\vee\pi)$ **si y sólo si** $(\mathscr{A},M)$ sat_{EG} φ ó $(\mathscr{A},M)$ sat_{EG} π **si y sólo si** $(\mathscr{A}\$,M)$ sat $TRANS\$(\varphi)$ ó $(\mathscr{A}\$,M)$ sat $TRANS\$(\pi)$ **si y sólo si** $(\mathscr{A}\$,M)$ sat $TRANS\$(\varphi)\vee TRANS\$(\pi)$ **si y sólo si** $(\mathscr{A}\$,M)$ sat $TRANS\$(\varphi\vee\pi)$ para cualquier asignación M de L_2 en $\mathscr{A}$.

- $(\mathcal{A},M)$ sat_{EG} $\neg\varphi$ **si y sólo si** no es cierto que $(\mathcal{A},M)$ sat_{EG} φ **si y sólo si** no es cierto que $(\mathcal{A}\$,M)$ sat TRANS\$(φ) **si y sólo si** $(\mathcal{A}\$,M)$ sat $\neg$TRANS\$(φ) **si y sólo si** $(\mathcal{A}\$,M)$ sat TRANS\$($\neg\varphi$) para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$.

F4 Sea φ una fórmula de L_2 tal que $(\mathcal{A},M)$ sat_{EG} φ si y sólo si $(\mathcal{A}\$,M)$ sat TRANS\$(φ) para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$, y sea x un símbolo de variable individual. Entonces:

- $(\mathcal{A},M)$ sat_{EG} $\exists x\varphi$ **si y sólo si** hay $a\in A_0$ tal que $(\mathcal{A},M(x/a))$ sat_{EG} φ **si y sólo si** hay $a\in A_0$ tal que $(\mathcal{A}\$,M(x/a))$ sat TRANS\$(φ) **si y sólo si** hay $a\in A_0=A\$_1$ tal que $(\mathcal{A}\$,M(x/a))$ sat TRANS\$(φ) **si y sólo si** $(\mathcal{A}\$,M)$ sat $\exists x$TRANS\$(φ) **si y sólo si** $(\mathcal{A}\$,M)$ sat TRANS\$($\exists x\varphi$) para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$

F5 Sea φ una fórmula de L_2 tal que $(\mathcal{A},M)$ sat_{EG} φ si y sólo si $(\mathcal{A}\$,M)$ sat TRANS\$(φ) para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$, y sea X un símbolo de variable relacional de aridad n. Entonces:

- $(\mathcal{A},M)$ sat_{EG} $\exists X\varphi$ **si y sólo si** hay $R\in A_n$ tal que $(\mathcal{A},M(X/R))$ sat_{EG} φ **si y sólo si** hay $R\in A_n$ tal que $(\mathcal{A}\$,M(X/R))$ sat TRANS\$(φ) **si y sólo si** hay $R\in A_n=A\$_{(0,\overset{n}{\ldots},1)}$, tal que $(\mathcal{A}\$,M(X/R))$ sat TRANS\$(φ) **si y sólo si** $(\mathcal{A}\$,M)$ sat $\exists X$TRANS\$(φ) **si y sólo si** $(\mathcal{A}\$,M)$ sat TRANS\$($\exists X\varphi$) para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$

F6 Sea φ una fórmula de L_2 tal que $(\mathcal{A},M)$ sat_{EG} φ si y sólo si $(\mathcal{A}\$,M)$ sat TRANS\$(φ) para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$, y sea D un símbolo de variable funcional de aridad n. Entonces:

- $(\mathcal{A},M)$ sat_{EG} $\exists D\varphi$ **si y sólo si** hay una función $f:A_0x..\overset{n}{..}xA_0\rightarrow A_0$, $f\in A_{n+1}$, tal que $(\mathcal{A},M(D/f))$ sat_{EG} φ **si y sólo si** hay una función $f:A_0x..\overset{n}{..}xA_0\rightarrow A_0$, $f\in A_{n+1}$, tal que $(\mathcal{A}\$,M(D/f))$ sat TRANS\$(φ) **si y sólo si** hay $f\in A\$_{(1,1,\overset{n}{\ldots},1)}$ tal que $(\mathcal{A}\$,M(D/f))$ sat TRANS\$(φ) (debido a la observación(iv4) inciso (2)) **si y sólo si** $(\mathcal{A}\$,M)$ sat $\exists D$TRANS\$(φ) **si y sólo si** $(\mathcal{A}\$,M)$ sat TRANS\$($\exists D\varphi$) para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$

■

Corolario(iv4):
Consideremos todas las definiciones y construcciones usadas hasta el momento. Entonces: Para cualquier estructura general $\mathcal{A}$ de un lenguaje L_2 de tipo Σ existe una estructura multivariada $\mathcal{A}\$$ de un lenguaje $L_2\$$ de tipo $\Sigma\$$ tal que para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$ y para toda fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$, $(\mathcal{A},M)\models_{EG}\varphi$ si y sólo si $(\mathcal{A}\$,M)\models\varphi\$$.

Demostración:
Sea $\mathcal{A}$ una estructura general de tipo Σ de un lenguaje L_2 y sea M una asignación de L_2 en $\mathcal{A}$. Entonces: $(\mathcal{A},M)\models_{EG}\varphi$ si y sólo si $(\mathcal{A},M)$ sat_{EG} φ si y sólo si $(\mathcal{A}\$,M)$ sat $\varphi\$$ (por el teorema(iv1) y recordando, que por definición, $\varphi\$$=TRANS\$(φ)) si y sólo si $(\mathcal{A}\$,M)\models\varphi\$$.

■

Notación:

- Sea $ST(EGL_2)$ la clase de las estructuras generales de un lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ.
- Sea $ST(L_m)$ la clase de las estructuras multivariadas de un lenguaje multivariado L_m de tipo multivariado Σ_m. Así, de acuerdo con esta definición, $ST(L_2\$)$ es la clase de estructuras multivariadas del lenguaje multivariado $L_2\$$ de tipo $\Sigma\$$.
- Sea $CONV:ST(EGL_2)\rightarrow ST(L_m)$ la funcional $CONV(\mathcal{A})=\mathcal{A}\$$.
- Sea $CONV[ST(EGL_2)]=\{\mathcal{A}\$ \mid \text{hay } \mathcal{A}\in ST(EGL_2) \text{ y } CONV(\mathcal{A})=\mathcal{A}\$\}$.
- $\models_{CONV[ST(EGL_2)]} \pi$ es la notación que usamos para indicar que π es una fórmula multivariada lógicamente válida en la subclase de las estructuras multivariadas $CONV[ST(EGL_2)]$.

Corolario(iv5):
Con toda la notación anterior, para cualquier enunciado $\varphi\in SENT(L_2)$,
$\models_{EG} \varphi$ si y sólo si $\models_{CONV[ST(EG(L_2))]} \varphi\$$.

Demostración:
Sea φ un enunciado cualquiera del lenguaje de segundo orden L_2.
(Suficiencia). Supongamos que $\models_{EG} \varphi$ y sea $H\in CONV[ST(EGL_2)]$ arbitraria. Entonces existe $\mathcal{B}\in ST(EGL_2)$ tal que $CONV(\mathcal{B})=H$. Como $\mathcal{B}\models_{EG} \varphi$, entonces por el corolario(iv4), $\mathcal{B}\$ \models \varphi\$$; pero $H=CONV(\mathcal{B})=\mathcal{B}\$$, por lo que $H \models \varphi\$$.
(Necesidad). Supongamos que $\models_{CONV[ST(EGL_2)]} \varphi\$$ y sea $\mathcal{A}\in ST(EGL_2)$ arbitraria. Entonces $CONV(\mathcal{A})=\mathcal{A}\$$ es tal que $\mathcal{A}\$ \models \varphi\$$, entonces por el corolario(iv4), $\mathcal{A}\models_{EG} \varphi$.
■

CONSECUENCIA LÓGICA EN LSO SOBRE ESTRUCTURAS GENERALES Y CONSECUENCIA LÓGICA EN LMV.

Es natural preguntarse si el corolario anterior no se puede mejorar a: Dado un lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ y dado el lenguaje multivariado $L_2\$$ de tipo $\Sigma\$$, para todo conjunto de fórmulas $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_2)$,
$\Gamma \models_{EG} \varphi$ si y sólo si $TRANS\$[\Gamma] \models_{CONV[ST(EG(L_2))]} TRANS\$(\varphi)$. Con tal afirmación diríamos que la **consecuencia lógica** en la lógica de segundo orden de L_2 sobre estructuras generales es equivalente a la consecuencia lógica de la lógica multivariada de $L_2\$$ sobre la subclase de estructuras multivariadas $CONV[ST(EGL_2)]$. En general, la situación la podemos plantear así: ¿Existe una subclase Ω de estructuras multivariadas de $L_2\$$ tal que la consecuencia lógica en la lógica de segundo orden de L_2 sobre estructuras generales sea equivalente a la consecuencia lógica de la lógica multivariada de $L_2\$$ sobre Ω?. Esta es la cuestión a la que dedicaremos el resto del capítulo y con la respuesta que demos a ella quedará explícita la manera en que están vinculadas las nociones de consecuencia lógica en lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales y la de consecuencia lógica en lógica multivariada. En lo que sigue, sea L_2 un lenguaje de segundo orden de tipo Σ y sea $L_2\$$ el lenguaje multivariado de tipo $\Sigma\$$ asociado a L_2 de acuerdo a lo realizado en las secciones anteriores; además, se usará toda la notación definida hasta este momento.

La subclase de estructuras multivariadas MOD($\Delta(\Sigma)$).

A continuación definiremos un conjunto de enunciados de $L_2\$$ con la intención de fijarnos en la clase de modelos multivariados de este conjunto de enunciados y mostrar que esta clase de estructuras multivariadas es una subclase Ω de estructuras multivariadas de $L_2\$$ tal que la consecuencia lógica en la lógica de segundo orden de L_2 sobre estructuras generales es equivalente a la consecuencia lógica de la lógica multivariada de $L_2\$$ sobre Ω. La idea para lograr lo anterior es muy sencilla: Dada una estructura multivariada $\mathcal{A}$ de tipo $\Sigma\$$, ¿Qué tenemos que pedirle a $\mathcal{A}$ para que se comporte como si fuese una estructura general de tipo Σ?; pues tenemos que pedirle que los universos de tipo $(0,1,..^{n}..,1)$ se comporten como universos relacionales de aridad n, que los universos de tipo $(1,1,..^{n}..,1)$ se comporten como universos funcionales de aridad n, que ε_{n+1} se comporte como si fuese la relación de pertenencia explícita entre una n-ada de elementos del universo de tipo 1 y un elemento del universo de tipo $(0,1,..^{n}..,1)$, que E_{n+1} se comporte como si fuese la valuación explícita de un elemento del universo de tipo $(1,..^{n+1}..,1)$ en una n-ada de elementos del universo de tipo 1, etc.

Definición:

(1) Sea $\Delta(\Sigma)$ el conjunto de enunciados multivariados, $\Delta(\Sigma)\subseteq SENT(L_2\$)$, definido como:

$\Delta(\Sigma)= Ext\cup RComp\cup RDisj\cup fuc\cup fDisj\cup RfDisj\cup fComp\cup ReC\cup Int$ donde:

- $Ext=\{Ext^n \mid n\in N\setminus\{0\}\}$, y definimos $Ext^n=\forall X\forall Y\forall x_1...\forall x_n((\varepsilon_{n+1}(X,x_1,...,x_n)\leftrightarrow\varepsilon_{n+1}(Y,x_1,...,x_n))\rightarrow(X\approx Y))$; donde X y Y son símbolos de variable de tipo $(0,1,..^{n}..,1)$ –es decir, $X,Y\in R_n$–, y $x_1,...,x_n$ son símbolos de variable de tipo 1 –es decir, $x_1,...,x_n\in F_0$–.
- $fuc=\{fuc^n \mid n\in N\setminus\{0\}\}$, y definimos $fuc^n=\forall X\forall Y(\forall x_1...\forall x_n(E_{n+1}(X,x_1,...,x_n)\approx E_{n+1}(Y,x_1,...,x_n))\rightarrow(X\approx Y))$; donde X y Y son símbolos de variable de tipo $(1,1,..^{n}..,1)$ –es decir, $X,Y\in F_n$–, y $x_1,...,x_n$ son símbolos de variable de tipo 1 –es decir, $x_1,...,x_n\in F_0$–.
- $RComp=\{\forall RComp^n\varphi \mid n\in N\setminus\{0\}$ y $\varphi\in FORM(L_2\$)\}$, y definimos $RComp^n\varphi=\exists X\forall x_1...\forall x_n(\varepsilon_{n+1}(X,x_1,...,x_n)\leftrightarrow\varphi)$; donde X es símbolo de variable de tipo $(0,1,..^{n}..,1)$ tal que $X\notin FREE(\varphi)$, y $x_1,...,x_n$ son símbolos de variable de tipo 1. Además, entendemos por $\forall RComp^n\varphi$ a la cerradura universal de $RComp^n\varphi$ que en el caso multivariado se define de la misma manera que en LSO (véase página 4 del capítulo I).
- $RDisj=\{RDisj_{n,m} \mid n,m\in N\setminus\{0\}$ y $n\neq m\}$, y definimos $RDisj_{n,m}=\neg\exists X\exists Y(X\approx Y)$; donde para cada $n,m\in N\setminus\{0\}$, $n\neq m$, X es símbolo de variable de tipo $(0,1,..^{n}..,1)$ y Y es símbolo de variable de tipo $(0,1,..^{m}..,1)$.
- $fDisj=\{fDisj_{n,m} \mid n,m\in N\setminus\{0\}$ y $n\neq m\}$, y definimos $fDisj_{n,m}=\neg\exists X\exists Y(X\approx Y)$; donde para cada $n,m\in N\setminus\{0\}$, $n\neq m$, X es símbolo de variable de tipo $(1,1,..^{n}..,1)$ y Y es símbolo de variable de tipo $(1,..^{m+1}..,1)$.
- $RfDisj=\{fDisj_{n,n} \mid n\in N,\ m\in N\setminus\{0\}$ y $n\neq m\}$, y definimos $RfDisj_{n,m}=\neg\exists X\exists D(X\approx D)$; donde para cada $n\in N$ y para cada $m\in N\setminus\{0\}$, tal que $n\neq m$, X es símbolo de variable de tipo $(0,1..^{n+1}..,1)$ y D es símbolo de variable de tipo $(1,..^{m+1}..,1)$.
- $fComp=\{\forall fComp^n\varphi \mid n\in N\setminus\{0\}$ y $\varphi\in FORM(L_2\$)\}$, y definimos $fComp^n\varphi=\forall x_1...\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1....\forall x_{n+1}(E_{n+1}(D,x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\varphi)$; donde D es un símbolo de variable de tipo $(1,1,..^{n}..,1)$ tal que $D\notin FREE(\varphi)$, y $x_1,...,x_{n+1}$ son

símbolos de variable de tipo 1; además, $\forall f Comp^n\varphi$ es la cerradura universal de $fComp^n\varphi$.

- $ReC=\{ReC(R) \mid R\in CONS.OP$ y $FUNC(R)=(0,1,..^n..,1)$ para algún $n\in N\setminus\{0\}\}$, y definimos, para cualquier $R\in CONS.OP$ tal que $FUNC(R)=(0,1,..^n..,1)$ para algún $n\in N\setminus\{0\}$, $ReC(R)=\forall x_1...\forall x_n(\varepsilon_{n+1}({}_RW,x_1,...,x_n)\leftrightarrow R(x_1,...,x_n))$, donde $x_1,...,x_n\in F_0$ son variables individuales (de tipo 1).
- $Int=\{Int^n \mid n\in N\setminus\{0\}\}$, y definimos para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $Int^n=\forall D\forall X((X\approx D)\rightarrow\forall x_1...\forall x_{n+1}(\varepsilon_{n+2}(X,x_1,...,x_{n+1})\leftrightarrow(E_{n+1}(D,x_1,...,x_n)\approx x_{n+1}))$; donde X es un símbolo de variable de tipo $(0,1,..^{n+1}..,1)$ –es decir, $X\in R_{n+1}$– y D es un símbolo de variable de tipo $(1,1,..^n..,1)$ –es decir, $D\in F_n$–.

(2) Sea $MOD(\Delta(\Sigma))$ la clase de estructuras multivariadas de tipo $\Sigma\$$ que sean modelos de $\Delta(\Sigma)$.

Indicación(iv1): Sea $\mathscr{A}$ una pre-estructura de tipo Σ arbitraria. Entonces para toda fórmula $\varphi\in FORM(L_2\$)$ existe una fórmula $\pi\in FORM(L_2)$ tal que para cualquier asignación M de $L_2\$$ en $\mathscr{A}\$$, $(\mathscr{A}\$,M)\models TRANS\$(\pi)$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)\models\varphi$.

Demostración:
(Prueba por inducción sobre la formación de las fórmulas de $L_2\$$).
Por definición, las fórmulas de $L_2\$$ son todas aquellas expresiones de tipo 0; éstas están generadas sobre todas aquellas expresiones $f(e_1,...e_n)$, donde $f\in SIM.OP\$\setminus\{\neg,\vee,\approx\}$, $FUNC\$(f)=(0,i_1,..,i_n)$ para una n-ada de tipos $(i_1,..,i_n)\in(SORT)^n$ y tal que $e_1,...e_n$ son expresiones de tipo $i_1,..,i_n$, respectivamente. Este constituye el paso base en la prueba de inducción:

E2 Sea $f\in SIM.OP\$\setminus\{\neg,\vee,\approx\}$ tal que $FUNC\$(f)=(0,i_1,..,i_n)$, donde $(i_1,..,i_n)\in(SORT)^n$ para algún $n\in N\setminus\{0\}$. Además, sean $e_1,...,e_n$ expresiones arbitrarias de tipo $i_1,..,i_n$ respectivamente. Como $f\in SIM.OP\$\setminus\{\neg,\vee,\approx\}=CONS.OP\cup\varepsilon\cup E\cup W$ y es tal que $FUNC\$(f)=(0,i_1,..,i_n)$, entonces $f\in CONS.OP\cup\varepsilon$; de esta manera, tenemos dos casos:

+ Si $f\in CONS.OP$, entonces $FUNC\$(f)=(0,1,..^n..,1)$ y entonces $e_1,..,e_n$ son expresiones de tipo 1 –en particular, son términos de $L_2\$$–. Por el inciso (3) de la indicación(iv0), existen $\xi_1,..,\xi_n\in TERM(L_2)\cup PRED(L_2)\cup(\cup_{n\in N}F_n)$ tal que $TRANS\$(\xi_1)=e_1,..,TRANS\$(\xi_n)=e_n$; además, por la afirmación(+1+), ocurre que $\xi_1,..,\xi_n\in TERM(L_2)$. Así, tenemos que $f(\xi_1,..,\xi_n)\in FORM(L_2)$ y es tal que $TRANS\$(f(\xi_1,..,\xi_n))=f(TRANS\$(\xi_1),..,TRANS\$(\xi_n))=f(e_1,...e_n)$. De estas igualdades es claro que para cualquier asignación M de $L_2\$$ en $\mathscr{A}\$$, $(\mathscr{A}\$,M)\models TRANS\$(f(\xi_1,..,\xi_n))$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)\models f(e_1,...e_n)$.
+ Si $f\in\varepsilon$, entonces $n=k+1$ para algún $k\in N\setminus\{0\}$, $f=\varepsilon_{k+1}$ y $FUNC\$(f)=FUNC\$(\varepsilon_{k+1})=(0,(0,1,..^k..,1),1,..^k..,1)$. Así, $e_2,..,e_n$ son expresiones de tipo 1 (términos de $L_2\$$), y por el mismo argumento usado en el caso anterior, existen $\xi_2,..,\xi_n\in TERM(L_2)$ tal que $TRANS\$(\xi_2)=e_2,..,TRANS\$(\xi_n)=e_n$. Para continuar con esta prueba, necesitaremos de la siguiente
  Afirmación(+3+): Si e es una expresión de $L_2\$$ de tipo $(0,1,..^k..,1)$, para algún $k\in N\setminus\{0\}$, entonces $e\in R_k$ –es decir, e es símbolo de variable de tipo $(0,1,..^k..,1)$– ó $e\in W$ –es decir, e es símbolo de constante individual tal que $FUNC\$(e)=((0,1,..^k..,1))$–.
  Prueba: Es claro que si $e\in R_k\cup W$ se cumple la afirmación. Ahora, veamos que si q

es una expresión de $L_2\$$ tal que $q\notin R_k\cup W$, entonces q no es de tipo $(0,1,..^k..,1)$; esto se debe a que cualquier expresión $q\notin R_k\cup W$ es tal que cumple alguno de los siguientes casos:

- q es símbolo de variable, $q\in(\cup_{h\in N\setminus\{0,k\}} R_h)\cup(\cup_{m\in N} F_m)$ y por lo tanto, q es un símbolo de variable de tipo distinto a $(0,1,..^k..,1)$; es decir, q es expresión de tipo distinto a $(0,1,..^k..,1)$.
- $q=P(g_1,..,g_m)$, para algún $P\in SIM.OP\$$, donde $FUNC\$(P)=(0,i_1,..,i_m)$, para algún $m\in N\setminus\{0\}$, y $g_1,..,g_m$ son expresiones de tipos $i_1,..,i_m$, respectivamente. En este caso, q es una expresión de tipo 0.
- $q=d(h_1,..,h_m)$, para algún $d\in SIM.OP\$$, donde $FUNC\$(d)=(1,i_1,..,i_m)$, para algún $m\in N\setminus\{0\}$, y $h_1,..,h_m$ son expresiones de tipos $i_1,..,i_m$, respectivamente. En este caso, q es una expresión de tipo 1.
- q es un símbolo de constante, tal que $q\notin W$ y por lo tanto, $q\in CONS.OP$; entonces $FUNC\$(q)=(1)$, lo que significa que q es expresión de tipo 1.

Por lo tanto, de todos los casos anteriores, tenemos la afirmación(+3+).

▼

Debido a la afirmación(+3+), $e_1\in R_k\cup W$ y entonces tenemos dos casos:

(i) Si $e_1\in R_k$ entonces, $e_1=X$, para alguna variable X de tipo $(0,1,..^k..,1)$. Por lo tanto, $X(\xi_2,..,\xi_n)=X(\xi_2,..,\xi_{k+1})\in FORM(L_2)$, y es tal que $TRANS\$(X(\xi_2,..,\xi_n))= TRANS\$(X(\xi_2,..,\xi_{k+1}))=$ $\varepsilon_{k+1}(X,TRANS\$(\xi_2),..,TRANS\$(\xi_{k+1}))=\varepsilon_{k+1}(X,e_2,..,e_{k+1})=\varepsilon_{k+1}(e_1,e_2,..,e_{k+1})=$ $\varepsilon_{k+1}(e_1,e_2,..,e_{k+1})=f(e_1,..,e_{k+1})=f(e_1,..,e_n)$. De estas igualdades, es claro que para cualquier asignación M de $L_2\$$ en $\mathscr{A}\$$, $(\mathscr{A}\$,M)\models TRANS\$(X(\xi_2,..,\xi_n))$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)\models f(e_1,\ldots e_n)$.

(ii) Si $e_1\in W$, entonces $e_1={}_PW$, para algún $P\in CONS.OP$ tal que $FUNC\$(P)=(0,1,..^k..,1)$. Entonces $P(\xi_2,..,\xi_n)=P(\xi_2,..,\xi_{k+1})\in FORM(L_2)$ y es tal que $TRANS(P(\xi_2,..,\xi_{k+1}))=P(TRANS\$(\xi_2),..,TRANS\$(\xi_{k+1}))=P(e_2,..,e_{k+1})$. Por último, para cualquier asignación M de $L_2\$$ en $\mathscr{A}\$$, $(\mathscr{A}\$,M)\models TRANS\$(P(\xi_2,..,\xi_{k+1}))$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)\models P(e_2,..,e_{k+1})$ si y sólo si $(\mathscr{A},M)\models \varepsilon_{k+1}({}_PW,e_2,..,e_{k+1})$ (debido a las definiciones de $P^{\mathscr{A}\$}$, de $\varepsilon_{k+1}{}^{\mathscr{A}\$}$ y de ${}_PW^{\mathscr{A}\$}$) si y sólo si $(\mathscr{A},M)\models \varepsilon_{k+1}(e_1,e_2,..,e_{k+1})$ si y sólo si $(\mathscr{A},M)\models f(e_1,e_2,..,e_{k+1})$ si y sólo si $(\mathscr{A},M)\models f(e_1,e_2,..,e_n)$.

Ahora demos el paso inductivo de la prueba.

E2 Sean e_1 y e_2 expresiones de tipo 0 de $L_2\$$ (es decir, fórmulas de $L_2\$$) tales que existen fórmulas φ_1, $\varphi_2\in FORM(L_2)$ tales que para cualquier asignación M de $L_2\$$ en $\mathscr{A}\$$, $(\mathscr{A}\$,M)\models TRANS\$(\varphi_1)$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)\models e_1$, y $(\mathscr{A}\$,M)\models TRANS\$(\varphi_2)$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)\models e_2$. Entonces:

- $\neg e_1$ es una fórmula de $L_2\$$ tal que la fórmula $\neg\varphi_1$ de L_2 cumple lo siguiente: Para cualquier asignación M de $L_2\$$ en $\mathscr{A}\$$, $(\mathscr{A}\$,M)\models TRANS\$(\neg\varphi_1)$ **si y sólo si** $(\mathscr{A}\$,M)\models \neg TRANS\$(\varphi_1)$ **si y sólo si** $(\mathscr{A}\$,M)\models \neg e_1$.
- $e_1\vee e_2$ es una fórmula de $L_2\$$ tal que la fórmula $\varphi_1\vee\varphi_2$ de L_2 cumple lo siguiente: Para cualquier asignación M de $L_2\$$ en $\mathscr{A}\$$, $(\mathscr{A}\$,M)\models TRANS\$(\varphi_1\vee\varphi_2)$ **si y sólo si** $(\mathscr{A}\$,M)\models TRANS\$(\varphi_1)\vee TRANS\$(\varphi_2)$ **si y sólo si** $(\mathscr{A}\$,M)\models e_1\vee e_2$.

E3 Sea e una expresión de tipo 0 de $L_2\$$ (es decir, e una fórmula de $L_2\$$) tal que existe una fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$ tal que para cualquier asignación M de $L_2\$$ en $\mathcal{A}\$$, $(\mathcal{A}\$,M)\models TRANS\$(\varphi)$ si y sólo si $(\mathcal{A}\$,M)\models e$. Entonces, si λ es una variable cualquiera de tipo $i\in SORT\$\backslash\{0\}$, tenemos que las fórmulas $\forall\lambda e\in FORM(L_2\$)$ y $\forall\lambda\varphi\in FORM(L_2)$ cumplen lo siguiente:
Para cualquier asignación M de $L_2\$$ en $\mathcal{A}\$$, $(\mathcal{A}\$,M)\models TRANS\$(\forall\lambda\varphi)$ **si y sólo si** $(\mathcal{A}\$,M)\models \forall\lambda TRANS\$(\varphi)$ **si y sólo si** $(\mathcal{A}\$,M)\models\forall\lambda e$.

■

Indicación(iv2): Para cualquier estructura general $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\backslash\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c\in CONS.OP})$ de tipo Σ, $\mathcal{A}\$$ es modelo de $\Delta(\Sigma)$. Es decir, $CONV[ST(EGL_2)]\subseteq MOD(\Delta(\Sigma))\subseteq ST(L_2\$)$.

Demostración:
Sea $\mathcal{A}$ una estructura general de tipo Σ.

- Veamos que $\mathcal{A}\$\models Ext$. Para todo $n\in N\backslash\{0\}$, $Ext^n=\forall X\forall Y\forall x_1...\forall x_n((\varepsilon_{n+1}(X,x_1,...,x_n)\leftrightarrow\varepsilon_{n+1}(Y,x_1,...,x_n))\rightarrow(X\approx Y))$ es tal que $(\forall X\forall Y\forall x_1...\forall x_n(X(x_1,...,x_n)\leftrightarrow Y(x_1,...,x_n))\rightarrow(X\approx_n Y)))\$=Ext^n$. Por otro lado, $\mathcal{A}\models_{EG}\forall X\forall Y\forall x_1...\forall x_n(X(x_1,...,x_n)\leftrightarrow Y(x_1,...,x_n))\rightarrow(X\approx_n Y))$, (por ser $\mathcal{A}$ pre-estructura), y entonces, por el corolario(iv4), $\mathcal{A}\$\models Ext^n$. Por lo tanto $\mathcal{A}\$\models Ext$.
- Veamos que $\mathcal{A}\$\models fuc$. Para todo $n\in N\backslash\{0\}$, $fuc^n=\forall X\forall Y(\forall x_1...\forall x_n(E_{n+1}(X,x_1,...,x_n)\approx E_{n+1}(Y,x_1,...,x_n))\rightarrow(X\approx Y))$ es tal que $(\forall X\forall Y(\forall x_1...\forall x_n(X(x_1,...,x_n)\approx_0 Y(x_1,...,x_n))\rightarrow(X\approx_n Y)))\$=fuc^n$. Además, $\mathcal{A}\models_{EG}\forall X\forall Y(\forall x_1...\forall x_n(X(x_1,...,x_n)\approx_0 Y(x_1,...,x_n))\rightarrow(X\approx_n Y))$, (debido a que $\mathcal{A}$ es pre-estructura), y entonces, por el corolario(iv4), $\mathcal{A}\$\models fuc^n$. Por lo tanto, $\mathcal{A}\$\models fuc$.
- Veamos que $\mathcal{A}\$\models RComp$. Para todo $n\in N\backslash\{0\}$ y para toda $\varphi\in FORM(L_2)$, $\forall RComp^n\varphi=\forall\exists X\forall x_1...\forall x_n(\varepsilon_{n+1}(X,x_1,...,x_n)\leftrightarrow\varphi)$; además, por la indicación(iv1), existe una fórmula $\pi\in FORM(L_2)$ tal que para toda asignación M de $L_2\$$ en $\mathcal{A}\$$, $(\mathcal{A}\$,M)\models TRANS\$(\pi)$ si y sólo si $(\mathcal{A}\$,M)\models\varphi$.
  Por otro lado, por el teorema(iv0), $\mathcal{A}\models_{EG}\forall\exists X\forall x_1...\forall x_n(X(x_1,...,x_n)\leftrightarrow\pi)$ y entonces, por el corolario(iv4), $\mathcal{A}\$\models\forall\exists X\forall x_1...\forall x_n(X(x_1,...,x_n)\leftrightarrow\pi))\$$. Pero $\mathcal{A}\$\models\forall\exists X\forall x_1...\forall x_n(X(x_1,...,x_n)\leftrightarrow\pi))\$$ si y sólo si $\mathcal{A}\$\models\forall\exists X\forall x_1...\forall x_n(\varepsilon_{n+1}(X,x_1,...,x_n)\leftrightarrow\pi\$))$ si y sólo si $\mathcal{A}\$\models\forall\exists X\forall x_1...\forall x_n(\varepsilon_{n+1}(X,x_1,...,x_n)\leftrightarrow\varphi))$, o sea, $\mathcal{A}\$\models\forall RComp^n\varphi$.
  Por lo tanto $\mathcal{A}\$\models RComp$.
- Probemos que $\mathcal{A}\$\models RDisj$. Para todo $n,m\in N\backslash\{0\}$ tal que $n\neq m$, por definición, $RDisj_{n,m}=\neg\exists X\exists Y(X\approx Y)$, donde X es símbolo de variable de tipo $(0,1,..^n..,1)$ y Y es símbolo de variable de tipo $(0,1,..^m..,1)$. Así, por definición de $\mathcal{A}\$$, $A\$_{(0,1,..n..,1)}=A_n$ y $A\$_{(0,1,..m..,1)}=A_m$, donde A_n y A_m son universos de $\mathcal{A}=(A_0,(A_n)_{n\in N\backslash\{0\}},(C^{\mathcal{A}})_{c\in CONS.OP})$. Como $A_n\subseteq\mathbf{P}((A_0)^n)$ y $A_m\subseteq\mathbf{P}((A_0)^m)$ y $n\neq m$, entonces $A_n\cap A_m=\varnothing$. Por lo tanto, no hay ningún elemento del universo $A\$_{(0,1,..n..,1)}$ que pertenezca al universo $A\$_{(0,1,..m..,1)}$, y de esta manera, $\mathcal{A}\$\models\neg\exists X\exists Y(X\approx Y)$. Por lo tanto, $\mathcal{A}\$\models RDisj$.
- $\mathcal{A}\$\models fDisj$ debido a razones análogas a las del inciso anterior.
- $\mathcal{A}\$\models RfDisj$ debido a razones análogas a las del inciso anterior.
- Probemos que $\mathcal{A}\$\models fComp$. Para todo $n\in N\backslash\{0\}$ y para toda $\varphi\in FORM(L_2)$,

$\forall fComp^n\varphi=\forall(\forall x_1...\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1....\forall x_{n+1}(E_{n+1}(D,x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\varphi))$; además, por la indicación(iv1), existe una fórmula $\pi\in FORM(L_2)$ tal que para toda asignación M de $L_2\$$ en $\mathscr{A}\$$, $(\mathscr{A}\$,M)\models TRANS\$(\pi)$ si y sólo si $(\mathscr{A}\$,M)\models\varphi$.
Por otro lado, por el teorema(iv0), tenemos que
$\mathscr{A}\models_{EG}\forall(\forall x_1...\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1....\forall x_{n+1}(D(x_1,..,x_n)\approx_0 x_{n+1})\leftrightarrow\pi))$ y entonces, por el corolario(iv4),
$\mathscr{A}\$\models\forall(\forall x_1...\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1....\forall x_{n+1}(D(x_1,..,x_n)\approx_0 x_{n+1})\leftrightarrow\pi))\$$. Pero
$\mathscr{A}\$\models\forall(\forall x_1...\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1....\forall x_{n+1}(D(x_1,..,x_n)\approx_0 x_{n+1})\leftrightarrow\pi))\$$ **si y sólo si**
$\mathscr{A}\$\models\forall(\forall x_1...\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1....\forall x_{n+1}(E_{n+1}(D,x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\pi\$))$ **si y sólo si**
$\mathscr{A}\$\models\forall(\forall x_1...\forall x_n\exists!x_{n+1}\varphi\rightarrow\exists D\forall x_1....\forall x_{n+1}(E_{n+1}(D,x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\varphi))$, es decir,
$\mathscr{A}\$\models\forall fComp^n\varphi$. Por lo tanto, $\mathscr{A}\$\models fComp$.

- Ahora, mostraremos que $\mathscr{A}\$\models ReC$. Para todo $R\in CONS.OP$ tal que $FUNC(R)=(0,1,..^n..,1)$ para alguna $n\in N\setminus\{0\}$, tenemos que $ReC(R)=\forall x_1...\forall x_n(\varepsilon_{n+1}({}_RW,x_1,...,x_n)\leftrightarrow R(x_1,...,x_n))$; pero $\mathscr{A}\$\models ReC(R)$, pues por definición, ${}_RW^{\mathscr{A}\$}=R^{\mathscr{A}}$ y para cualquier asignación M de $L_2\$$ en $\mathscr{A}\$$, $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathscr{A}\$}({}_RW^{\mathscr{A}\$},M(x_1),...,M(x_n))=V$ **si y sólo si** $M(x_1),...,M(x_n)\in{}_RW^{\mathscr{A}\$}=R^{\mathscr{A}}$ **si y sólo si** $R^{\mathscr{A}\$}(M(x_1),...,M(x_n))=V$. Por lo tanto $\mathscr{A}\$\models ReC$.
- Por último veamos que $\mathscr{A}\$\models Int$. Sea $n\in N\setminus\{0\}$ y sea M una asignación cualquiera de $L_2\$$ en $\mathscr{A}\$$. Por definición:
$Int^n=\forall D\forall X((X\approx D)\rightarrow\forall x_1...\forall x_{n+1}(\varepsilon_{n+2}(X,x_1,...,x_{n+1})\leftrightarrow(E_{n+1}(D,x_1,...,x_n)\approx x_{n+1}))$, donde $X\in R_{n+1}$ y $D\in F_n$; por otro lado, para cualquier $f\in A\$_{(1,1,..^n..,1)}$ y para cualquier $R\in A\$_{(0,1,..^{n+1}..,1)}$, si $(\mathscr{A}\$,M(D/f)(X/R))$ sat $(X\approx D)$, entonces R=f y entonces para cualquier $(z_1,...,z_{n+1})\in A\$_1$, $(z_1,...,z_{n+1})\in R$ si y sólo si $(z_1,...,z_{n+1})\in f$; pero esto significa que para cualquier $(z_1,...,z_{n+1})\in A\$_1$, $(z_1,...,z_{n+1})\in R$ **si y sólo si** $f(z_1,...,z_n)=z_{n+1}$. Como $(z_1,...,z_{n+1})\in R$ **si y sólo si** $\varepsilon_{n+2}{}^{\mathscr{A}\$}(R,z_1,...,z_{n+1})=V$ y $f(z_1,...,z_n)=z_{n+1}$ **si y sólo si** $E_{n+1}{}^{\mathscr{A}\$}(f,z_1,...,z_n)=z_{n+1}$, concluimos que para cualquier $(z_1,...,z_{n+1})\in A\$_1$, $\varepsilon_{n+2}{}^{\mathscr{A}\$}(R,z_1,...,z_{n+1})=V$ **si y sólo si** $E_{n+1}{}^{\mathscr{A}\$}(f,z_1,...,z_n)=z_{n+1}$. Esto último muestra que para cualquier $f\in A\$_{(1,1,..^n..,1)}$ y para cualquier $R\in A\$_{(0,1,..^{n+1}..,1)}$, si $(\mathscr{A}\$,M(D/f)(X/R))$ sat $(X\approx D)$ entonces $(\mathscr{A}\$,M(D/f)(X/R))$ sat $\forall x_1...\forall x_{n+1}(\varepsilon_{n+2}(X,x_1,...,x_{n+1})\leftrightarrow(E_{n+1}(D,x_1,...,x_n)\approx x_{n+1}))$. Por lo tanto $\mathscr{A}\$\models Int^n$ y como todo se hizo para una $n\in N\setminus\{0\}$ arbitraria, tenemos que $\mathscr{A}\$\models Int$.

■

La intención de definir $MOD(\Delta(\Sigma))$ es la de proporcionar teoremas acerca de la subclase $CONV[ST(EGL_2)]$. Todo lo subsecuente tiene tal propósito y en particular, nuestra meta inmediata es probar el **teorema(iv2): Existe una funcional $H:MOD(\Delta(\Sigma))\rightarrow CONV[ST(EGL_2)]$ tal que para cada estructura multivariada $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{A}\in MOD(\Delta(\Sigma))$, $H(\mathscr{A})$ es isomorfo a $\mathscr{A}$.** La prueba de tal teorema, por ser bastante larga, la dividiremos en varios resultados previos y después de todo lo necesario, volveremos a mencionar explícitamente este teorema como conclusión del trabajo realizado. Una vez más, y debido a la importancia de tal hecho, insistimos en que se usarán todas las definiciones y construcciones que se han desarrollado hasta el momento en el presente capítulo.

Lema(iv3): Existe una funcional $H:MOD(\Delta(\Sigma))\rightarrow ST(L_2\$)$. Recuérdese que $MOD(\Delta(\Sigma))\subseteq ST(L_2\$)$, así que H es una funcional entre estructuras multivariadas.

Demostración:
Sea $\mathcal{A}=((A_i)_{i\in SORTS\$},(C^{\mathcal{A}})_{c\in SIM.OPS\$})$ una estructura multivariada de tipo $\Sigma\$$ modelo de $\Delta(\Sigma)$. Definimos $H(\mathcal{A})=\mathcal{B}=((B_i)_{i\in SORTS\$},(C^{\mathcal{B}})_{c\in SIM.OPS\$})$ como:

- $B_0=A_0=\{V,F\}$; $B_1=A_1$.
- Para cada $n\in N\backslash\{0\}$, definimos:
  $B_{(0,1,..^{n}..,1)}=\{\{(\mathbf{z_1,...,z_n})\in(\mathbf{B_1})^{n} \mid \varepsilon_{n+1}{}^{\mathcal{A}}(\mathbf{R,z_1,...,z_n})=\mathbf{V}\} \mid R\in A_{(0,1,..^{n}..,1)}\}$
- Para cada $n\in N\backslash\{0\}$, definimos:
  $B_{(1,1,..^{n}..,1)}=\{\{(z_1,...,z_n,z_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}{}^{\mathcal{A}}(G,z_1,...,z_n)=z_{n+1}\} \mid G\in A_{(1,1,..^{n}..,1)}\}$.

Observación(iv6):

(1) Para todo $n\in N\backslash\{0\}$ y para todo $Z\in B_{(1,1,..^{n}..,1)}$, $Z:(B_1)^n\rightarrow B_1$ es función. Para ver esto, sea $n\in N\backslash\{0\}$ y sea $Z\in B_{(1,1,..^{n}..,1)}$. Entonces existe $G\in A_{(1,1,..^{n}..,1)}$ tal que $Z=\{(w_1,...,w_n,w_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}{}^{\mathcal{A}}(G,w_1,...,w_n)=w_{n+1}\}$. Así, para cualquiera $z_1,...,z_n,a,b\in B_1$, si $(z_1,...,z_n,a),(z_1,...,z_n,b)\in Z$, entonces $E_{n+1}{}^{\mathcal{A}}(G,z_1,...,z_n)=a$ y $E_{n+1}{}^{\mathcal{A}}(G,z_1,...,z_n)=b$; como $E_{n+1}{}^{\mathcal{A}}$ es función, tenemos que a=b.

(2) Para todo $n\in N\backslash\{0\}$, $B_{(1,1,..^{n}..,1)}$ es el conjunto de funciones de $B_{(0,1,..^{n+1}..,1)}$; es decir, $B_{(1,1,..^{n}..,1)}=\{Z\in B_{(0,1,..^{n+1}..,1)} \mid Z:(B_1)^n\rightarrow B_1 \text{ es función}\}$. Probemos esta igualdad por casos:

(a) Sea $n\in N\backslash\{0\}$ y sea $Z\in B_{(1,1,..^{n}..,1)}$ arbitrario. Por el inciso (1), $Z:(B_1)^n\rightarrow B_1$ es función; así, sólo falta ver que $Z\in B_{(0,1,..^{n+1}..,1)}$. Como $Z\in B_{(1,1,..^{n}..,1)}$, entonces existe $G\in A_{(1,1,..^{n}..,1)}$ tal que $Z=\{(w_1,...,w_n,w_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}{}^{\mathcal{A}}(G,w_1,...,w_n)=w_{n+1}\}$. Por otro lado, como $\mathcal{A}\in MOD(\Delta(\Sigma))$, entonces $\mathcal{A}\models$ RComp y en particular $\mathcal{A}$ es modelo de la fórmula $\forall D\exists X\forall x_1,...,\forall x_{n+1}(\varepsilon_{n+1}(X,x_1,...,x_{n+1})\leftrightarrow(E_{n+1}(D,x_1,...,x_n)\approx x_{n+1}))$, donde D es variable de tipo $(1,1,..^{n}..,1)$, X es variable de tipo $(0,1,..^{n}..,1)$ y $x_1,...,x_n,x_{n+1}$ son variables individuales (es decir, variables de tipo 1). Así, sea M una asignación multivariada cualquiera de $L_2\$$ en $\mathcal{A}$; entonces $(\mathcal{A},M(D/G))\models\exists X\forall x_1,...,\forall x_{n+1}(\varepsilon_{n+1}(X,x_1,...,x_{n+1})\leftrightarrow(E_{n+1}(D,x_1,...,x_n)\approx x_{n+1}))$ y por lo tanto, hay $H\in A_{(0,1,..^{n}..,1)}$ tal que $(\mathcal{A},M(D/G)(X/H))\models\forall x_1,...,\forall x_{n+1}(\varepsilon_{n+1}(X,x_1,...,x_{n+1})\leftrightarrow(E_{n+1}(D,x_1,...,x_n)\approx x_{n+1}))$. De esto, tenemos que $Z=\{(w_1,...,w_n,w_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}{}^{\mathcal{A}}(G,w_1,...,w_n)=w_{n+1}\}=$ $=\{(w_1,...,w_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid \varepsilon_{n+2}{}^{\mathcal{A}}(H,w_1,...,w_{n+1})=V\}\in B_{(0,1,..^{n+1}..,1)}$.

(b) Sea $n\in N\backslash\{0\}$ y sea $T\in\{Z\in B_{(0,1,..^{n+1}..,1)} \mid Z:(B_1)^n\rightarrow B_1 \text{ es función}\}$. Entonces existe $R\in A_{(0,1,..^{n+1}..,1)}$ tal que $T=\{(z_1,...,z_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid \varepsilon_{n+2}{}^{\mathcal{A}}(R,z_1,...,z_{n+1})=V\}$. Por otro lado, y de manera análoga al inciso anterior, $\mathcal{A}\models$ fComp y entonces, en particular, $\mathcal{A}\models\forall X(\forall x_1...\forall x_n\exists!x_{n+1}(\varepsilon_{n+2}(X,x_1,...,x_{n+1}))\rightarrow$ $\exists D\forall x_1....\forall x_{n+1}((E_{n+1}(D,x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow\varepsilon_{n+2}(X,x_1,...,x_{n+1})))$, donde D es variable de tipo $(1,1,..^{n}..,1)$, X es variable de tipo $(0,1,..^{n+1}..,1)$ y $x_1,...,x_n,x_{n+1}$ son variables individuales (de tipo 1). Así, sea M una asignación multivariada cualquiera de $L_2\$$ en $\mathcal{A}$; entonces $(\mathcal{A},M(X/R))\models\forall x_1...\forall x_n\exists!x_{n+1}(\varepsilon_{n+2}(X,x_1,...,x_{n+1}))\rightarrow$

$\exists D\forall x_1....\forall x_{n+1}((E_{n+1}(D,x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow \varepsilon_{n+2}(X,x_1,...,x_{n+1}))$. Además, debido a que $T=\{(z_1,...,z_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid \varepsilon_{n+2}^{\mathcal{A}}(R,z_1,...,z_{n+1})=V\}$ y a que T es función ocurre que $(\mathcal{A},M(X/R)) \models\forall x_1...\forall x_n\exists!x_{n+1}(\varepsilon_{n+2}(X,x_1,...,x_{n+1}))$, y entonces $(\mathcal{A},M(X/R)) \models\exists D\forall x_1....\forall x_{n+1}((E_{n+1}(D,x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow \varepsilon_{n+2}(X,x_1,...,x_{n+1}))$; por lo tanto, existe $G\in A_{(1,1,..^n..,1)}$ tal que
$(\mathcal{A},M(X/R)(D/G)) \models\forall x_1....\forall x_{n+1}((E_{n+1}(D,x_1,..,x_n)\approx x_{n+1})\leftrightarrow \varepsilon_{n+2}(X,x_1,...,x_{n+1}))$.
De esto concluimos que $T=\{(z_1,...,z_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid \varepsilon_{n+2}^{\mathcal{A}}(R,z_1,...,z_{n+1})=V\}=$
$\{(z_1,...,z_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}^{\mathcal{A}}(G,z_1,...,z_n)=z_{n+1}\}\in B_{(1,1,..^n..,1)}$.

▼

- Para cada $n\in N\backslash\{0\}$, para cada $z_1,...,z_n\in B_1$, y para cada $R\in B_{(0,1,..^n..,1)}$, definimos la relación n-aria multivariada $\varepsilon_{n+1}^{\mathcal{B}}:B_{(0,1,..^n..,1)}xB_1..^n..xB_1\rightarrow B_0$ como:
  $\varepsilon_{n+1}^{\mathcal{B}}(R,z_1,...,z_n)=V$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\in R$.
  $\varepsilon_{n+1}^{\mathcal{B}}(R,z_1,...,z_n)=F$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\notin R$.
- Para cada $n\in N\backslash\{0\}$, para cada $z_1,...,z_{n+1}\in B_1$, y para cada $Z\in B_{(1,1,..^n..,1)}$, definimos la función n-aria multivariada $E_{n+1}^{\mathcal{B}}:B_{(1,1,..^n..,1)}xB_1..^n..xB_1\rightarrow B_1$ como:
  $E_{n+1}^{\mathcal{B}}(Z,z_1,...,z_n)=z_{n+1}$ si y sólo si $(z_1,...,z_{n+1})\in Z$. Nótese que esto es lo mismo que definir $E_{n+1}^{\mathcal{B}}(Z,z_1,...,z_n)=Z(z_1,...,z_n)$, pues ya se mostró que $B_{(1,1,..^n..,1)}$ es el conjunto de funciones de $B_{(0,1,..^{n+1}..,1)}$.
- Definimos $\approx^{\mathcal{B}}$ como la función $\approx^{\mathcal{B}}:\cup(B_i)_{i\in SORT\$\backslash\{0\}}\rightarrow B_0$ tal que $\approx^{\mathcal{B}}(z_1,z_2)=V$ si y sólo si $z_1=z_2$.
- Para cada $P\in SIM.OP\$\backslash(\varepsilon\cup E\cup W)$, definimos $P^{\mathcal{B}}$ como $P^{\mathcal{B}}=P^{\mathcal{A}}$.

Observación(iv7):
Recuérdese que no existe $P\in(SIM.OP\$\backslash(\varepsilon\cup E\cup W))=CONS.OP\cup\{\neg,\wedge,\vee,\leftrightarrow,\rightarrow,\approx\}$ tal que $FUNC\$(P)=((0,1,..^m..,1))$ ó tal que $FUNC\$(P)=((1,..^{m+1}..,1))$ para alguna $m\in N\backslash\{0\}$.
▼

- Para cada ${}_RW\in W$, tal que $FUNC\$({}_RW)=((0,1,..^n..,1))$ definimos ${}_RW^{\mathcal{B}}=\{(z_1,...,z_n)\in(B_1)^n \mid \varepsilon_{n+1}^{\mathcal{A}}({}_RW^{\mathcal{A}},z_1,...,z_n)=V\}$.

■

Observación(iv8):
Como $\mathcal{A}\in MOD(\Delta(\Sigma))$, entonces $\mathcal{A}\models ReC$, y entonces se tiene que ${}_RW^{\mathcal{B}}=\{(z_1,...,z_n)\in(B_1)^n \mid \varepsilon_{n+1}^{\mathcal{A}}({}_RW^{\mathcal{A}},z_1,...,z_n)=V\}=\{(z_1,...,z_n)\in(B_1)^n \mid R^{\mathcal{A}}(z_1,...,z_n)=V\}$, debido a que, en particular, $\mathcal{A}\models\forall x_1...\forall x_n(\varepsilon_{n+1}({}_RW,x_1,...,x_n)\leftrightarrow R(x_1,...,x_n))$.
■

Lema(iv4): De acuerdo al lema anterior, $H(\mathcal{A})$ es isomorfo a $\mathcal{A}$.

Demostración:
Para ver que $\mathcal{A}$ y $H(\mathcal{A})=\mathcal{B}$ son isomorfas, sea la función $f:\mathcal{A}\rightarrow H(\mathcal{A})$ definida como:
- Para todo $x\in A_0\cup A_1$, $f(x)=x\in B_0\cup B_1$.

- Para cada $n \in N\setminus\{0\}$ y para cada $Y \in A_{(0,1,..^{n}..,1)}$,
  $f(Y)=\{(z_1,\ldots,z_n)\in(B_1)^n \mid \varepsilon_{n+1}^{\mathcal{A}}(Y,z_1,\ldots,z_n)=V\}$; nótese que $f(Y)\in B_{(0,1,..^{n}..,1)}$.
- Para cada $n \in N\setminus\{0\}$, y para cada $G \in A_{(1,1,..^{n}..,1)}$,
  $f(G)=\{(z_1,\ldots,z_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}^{\mathcal{A}}(G,z_1,\ldots,z_n)=z_{n+1}\}$; nótese que $f(G)\in B_{(1,1,..^{n}..,1)}$.

f está bien definida –es decir, f es efectivamente una función–:
+ f está bien definida en $A_0\cup A_1$ por ser f la identidad en este conjunto.
+ Por ser $\mathcal{A}$ modelo de $\Delta(\Sigma)$, entonces para cada $n,m\in N\setminus\{0\}$ tal que $n\neq m$, $\mathcal{A}\models RDisj_{n,m}$; es decir, $\mathcal{A}\models\neg\exists X\exists Y(X\approx Y)$, donde X es símbolo de variable tal que $X\in R_n$ y Y es símbolo de variable tal que $Y\in R_m$. Nótese que esto significa que para todo $n,m\in N\setminus\{0\}$ tal que $n\neq m$, los universos $A_{(0,1..^{n}..,1)}$ y $A_{(0,1..^{m}..,1)}$ son ajenos; por lo tanto, para todo $n,m\in N\setminus\{0\}$ tal que $n\neq m$, no existe un elemento $q\in A_{(0,1..^{n}..,1)}\cap A_{(0,1..^{m}..,1)}$ tal que $f(q)=\{(z_1,\ldots,z_n)\in(B_1)^n \mid \varepsilon_{n+1}^{\mathcal{A}}(q,z_1,\ldots,z_n)=V\}$ y $f(q)=\{(z_1,\ldots,z_n)\in(B_1)^m \mid \varepsilon_{m+1}^{\mathcal{A}}(q,z_1,\ldots,z_m)=V\}$ y que cause que f esté mal definida en q.
+ Análogamente al caso anterior, debido a que para todo $n,m\in N\setminus\{0\}$ tal que $n\neq m$, $\mathcal{A}\models fDisj_{n,m}$, concluimos que para todo $n,m\in N\setminus\{0\}$ tal que $n\neq m$, no existe un elemento $d\in A_{(1,1..^{n}..,1)}\cap A_{(1,1..^{m}..,1)}$ tal que $f(d)=\{(z_1,\ldots,z_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}^{\mathcal{A}}(d,z_1,\ldots,z_n)=z_{n+1}\}$ y $f(d)=\{(z_1,\ldots,z_{m+1})\in(B_1)^{m+1} \mid E_{m+1}^{\mathcal{A}}(d,z_1,\ldots,z_m)= z_{m+1}\}$ y que ocasione que f esté mal definida en d.
+ Al igual que en el caso anterior, como para todo $n\in N$ y para todo $m\in N\setminus\{0\}$ tal que $n\neq m$, $\mathcal{A}\models RfDisj_{n,m}$, entonces para todo $n\in N$ y para todo $m\in N\setminus\{0\}$ tal que $n\neq m$ no existe un elemento $e\in A_{(0,1..^{n+1}..,1)}\cap A_{(1,1..^{m}..,1)}$ tal que $f(e)=\{(z_1,\ldots,z_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid \varepsilon_{n+2}^{\mathcal{A}}(e,z_1,\ldots,z_{n+1})=V\}$ y $f(e)=\{(z_1,\ldots,z_{m+1})\in(B_1)^{m+1} \mid E_{m+1}^{\mathcal{A}}(e,z_1,\ldots,z_m)=z_{m+1}\}$ y que ocasione que f esté mal definida en e.
+ Por último, sólo nos hace falta ver que f está bien definida en aquellos conjuntos distintos del vacío $A_{(0,1..^{n+1}..,1)}\cap A_{(1,1..^{m}..,1)}$, donde $n\in N$, $m\in N\setminus\{0\}$ y $n=m$. Así, sea $n\in N\setminus\{0\}$ y supongamos que $A_{(0,1..^{n+1}..,1)}\cap A_{(1,1..^{n}..,1)}\neq\varnothing$. Lo que necesitamos probar es que si $e\in A_{(0,1..^{n+1}..,1)}\cap A_{(1,1..^{n}..,1)}$, entonces $f(e)$, visto e como un elemento de $A_{(0,1..^{n+1}..,1)}$, es lo mismo que $f(e)$ visto e como un elemento de $A_{(1,1..^{n}..,1)}$; es decir, tenemos que probar que los conjuntos $M=\{(z_1,\ldots,z_{n+1})\in(B_1)^n \mid \varepsilon_{n+2}^{\mathcal{A}}(e,z_1,\ldots,z_{n+1})=V\}$, y $N=\{(z_1,\ldots,z_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}^{\mathcal{A}}(e,z_1,\ldots,z_n)=z_{n+1}\}$ son el mismo.

Para probar lo anterior expuesto nótese que como $\mathcal{A}\models Int$, entonces $\mathcal{A}\models Int^n$ –recuérdese que por definición,
$Int^n=\forall D\forall X((X\approx D)\rightarrow\forall x_1\ldots\forall x_{n+1}(\varepsilon_{n+2}(X,x_1,\ldots,x_{n+1})\leftrightarrow(E_{n+1}(D,x_1,\ldots,x_n)\approx x_{n+1}))$, donde X es un símbolo de variable de tipo $(0,1,..^{n+1}..,1)$ y D es un símbolo de variable de tipo $(1,1,..^{n}..,1)$–. Por lo tanto, si M es una asignación de $L_2\$$ en $\mathcal{A}$ arbitraria, y debido a que existe $e\in A_{(0,1..^{n+1}..,1)}\cap A_{(1,1,..^{n}..,1)}$, tenemos que en particular $(\mathcal{A},M(X/e)(D/e))$ sat $(X\approx D)\rightarrow\forall x_1\ldots\forall x_{n+1}(\varepsilon_{n+2}(X,x_1,\ldots,x_{n+1})\leftrightarrow(E_{n+1}(D,x_1,\ldots,x_n)\approx x_{n+1}))$ y de esta manera, como $(\mathcal{A},M(X/e)(D/e))$ sat $(X\approx D)$, entonces $(\mathcal{A},M(X/e)(D/e))$ sat $\forall x_1\ldots\forall x_{n+1}(\varepsilon_{n+2}(X,x_1,\ldots,x_{n+1})\leftrightarrow(E_{n+1}(D,x_1,\ldots,x_n)\approx x_{n+1}))$. Nótese que esto último significa que para todo $(z_1,\ldots,z_{n+1})\in(B_1)^n$, $\varepsilon_{n+2}^{\mathcal{A}}(e,z_1,\ldots,z_{n+1})=V$ si y sólo si $E_{n+1}^{\mathcal{A}}(e,z_1,\ldots,z_n)=z_{n+1}$. Por lo tanto tenemos que los conjuntos $M=\{(z_1,\ldots,z_{n+1})\in(B_1)^n \mid \varepsilon_{n+2}^{\mathcal{A}}(e,z_1,\ldots,z_{n+1})=V\}$, y $N=\{(z_1,\ldots,z_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}^{\mathcal{A}}(e,z_1,\ldots,z_n)=z_{n+1}\}$ son iguales.

Concluimos de todos los incisos anteriores que f está bien definida.

Ya sabiendo que f es función y por la manera de la definición de f, es claro que para todo $i \in SORT\$$, $f[A_i] \subseteq B_i$. Ahora veamos que f es una biyección en cada universo de tipo i:

f es sobreyectiva.-

- f es la identidad en $A_0 \cup A_1$, por lo que, evidentemente, es sobreyectiva en $B_0 \cup B_1$.
- Para cada $n \in N \setminus \{0\}$, todo elemento de $B_{(0,1,..^n..,1)}$ es, por la manera en que se definió $B_{(0,1,..^n..,1)}$, de la forma $f(Y)$, para algún $Y \in A_{(0,1,..^n..,1)}$; por lo tanto, f es sobreyectiva en $B_{(0,1,..^n..,1)}$ para cada $n \in N \setminus \{0\}$.
- Para todo $n \in N \setminus \{0\}$, si Z es un elemento arbitrario de $B_{(1,1,..^n..,1)}$, entonces existe $G \in A_{(1,1,..^n..,1)}$ tal que $\{(z_1,...,z_n,z_{n+1}) \in (B_1)^{n+1} \mid E_n^{\mathscr{A}}(G,z_1,...,z_n)=z_{n+1}\}=Z$. Esto muestra que $f(G)=Z$, y por lo tanto, f es sobreyectiva en $B_{(1,1,..^n..,1)}$ para cada $n \in N \setminus \{0\}$.

f es inyectiva.-

- Es claro que, por ser f la identidad en $A_0 \cup A_1$, f es inyectiva en $A_0 \cup A_1$.
- Para cada $n \in N \setminus \{0\}$, f es inyectiva en $A_{(0,1,..^n..,1)}$. Esto porque si $Y,X \in A_{(0,1,..^n..,1)}$ son tales que $f(Y)=f(X)$, entonces $\varepsilon_{n+1}^{\mathscr{A}}(Y,z_1,...,z_n)=V$ si y sólo si $\varepsilon_{n+1}^{\mathscr{A}}(X,z_1,...,z_n)=V$, por lo que $X=Y$, debido a que, para todo $n \in N \setminus \{0\}$, $\mathscr{A}$ es modelo de $Ext^n = \forall X \forall Y \forall x_1 ... \forall x_n((\varepsilon_{n+1}(X,x_1,...,x_n) \leftrightarrow \varepsilon_{n+1}(Y,x_1,...,x_n)) \rightarrow (X \approx Y))$.
- Para cada $n \in N \setminus \{0\}$, f es inyectiva en $A_{(1,1,..^n..,1)}$. Para ver esto, supongamos que existen $D,G \in A_{(1,1,..^n..,1)}$ tales que $f(D)=f(G)$; esto significa que $f(D)=\{(z_1,...,z_{n+1}) \in (B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}^{\mathscr{A}}(D,z_1,...,z_n)=z_{n+1}\}=f(G)=\{(z_1,...,z_{n+1}) \in (B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}^{\mathscr{A}}(G,z_1,...,z_n)=z_{n+1}\}$. Entonces para todo $(z_1,...,z_n) \in (B_1)^n=(A_1)^n$, $E_{n+1}^{\mathscr{A}}(D,z_1,...,z_n)=E_{n+1}^{\mathscr{A}}(G,z_1,...,z_n)$; así, D=G, pues para todo $n \in N \setminus \{0\}$, $\mathscr{A}$ es modelo de $fuc^n = \forall X \forall Y(\forall x_1 ... \forall x_n(E_{n+1}(X,x_1,...,x_n) \approx E_{n+1}(Y,x_1,...,x_n)) \rightarrow (X \approx Y))$.

f es un isomorfismo:

(1) Para todo $a,b \in A_0$, $f(\neg^{\mathscr{A}}(a))=\neg^{\mathscr{B}}(f(a))$, y $f(\vee^{\mathscr{A}}(a,b))=\vee^{\mathscr{B}}(f(a),f(b))$. Esta afirmación es inmediata de que f es la identidad sobre A_0 y de que, por las definiciones hechas, $\neg^{\mathscr{A}}=\neg^{\mathscr{B}}$, y $\vee^{\mathscr{A}}=\vee^{\mathscr{B}}$.

(2a) Para cada $R^{\mathscr{A}}$, tal que $R \in (SIM.OP\$ \setminus (\{\neg,\vee,\approx\} \cup \varepsilon \cup E \cup W))=CONS.OP$ y $FUNC\$(R)=(0,1,..^n..,1)$ para alguna $n \in N \setminus \{0\}$, $R^{\mathscr{A}}(z_1,...,z_n)=V$ si y sólo si $R^{\mathscr{B}}(f(z_1),...,f(z_n))=V$. Esto es inmediato de que todas las relaciones $R^{\mathscr{A}}$ –tal que $R \in SIM.OP\$$ y $FUNC\$(R)=(0,1,..^n..,1)$– son sobre elementos del universo de tipo 1, de que f es la identidad en el universo de tipo 1 y además de que $R^{\mathscr{A}}=R^{\mathscr{B}}$.
(2b) Para cada $D^{\mathscr{A}}$, tal que $D \in (SIM.OP\$ \setminus (\{\neg,\vee,\approx\} \cup \varepsilon \cup E \cup W))=CONS.OP$ y $FUNC\$(D)=(1,1,..^n..,1)$ para alguna $n \in N \setminus \{0\}$, $f(D^{\mathscr{A}}(z_1,...,z_n))=D^{\mathscr{B}}(f(z_1),...,f(z_n))$. Las razones de tal hecho son totalmente análogas a las del caso (2a).
(2c) Para cada ${}_RW \in W$, $f({}_RW^{\mathscr{A}})={}_RW^{\mathscr{B}}$. Esto se cumple porque para cada ${}_RW \in W$, existe $n \in N \setminus \{0\}$ tal que $FUNC\$({}_RW^{\mathscr{A}})=((0,1..^n..,1))$; así, ${}_RW^{\mathscr{A}} \in A_{(0,1..^n..,1)}$ y $f({}_RW^{\mathscr{A}})=\{(z_1,...,z_n) \in (B_1)^n \mid \varepsilon_{n+1}^{\mathscr{A}}({}_RW^{\mathscr{A}},z_1,...,z_n)=V\}={}_RW^{\mathscr{B}}$.
(2d) Para cada $P \in SIM.OP\$ \setminus (\varepsilon \cup E \cup W)$, tal que $FUNC\$(P)=(1)$, $f(P^{\mathscr{A}})=P^{\mathscr{B}}$. Esto es evidente, pues f es la identidad en A_1.

(3) Para cada $n \in N \setminus \{0\}$, para cada $z_1,\ldots,z_n \in A_1$ y para cada $R \in A_{(0,1,..^n..,1)}$, $\varepsilon_{n+1}^{\mathcal{A}}(R,z_1,\ldots,z_n)=V$ si y sólo si $\varepsilon_{n+1}^{\mathcal{B}}(f(R),f(z_1),\ldots,f(z_n))=V$. Esto se debe a que: $f(z_1)=z_1,\ldots,f(z_n)=z_n$, $f(R)=\{(z_1,\ldots,z_n)\in(B_1)^n \mid \varepsilon_n^{\mathcal{A}}(R,z_1,\ldots,z_n)=V\}$ y a que, por definición, $\varepsilon_{n+1}^{\mathcal{B}}(f(R),f(z_1),\ldots,f(z_n))=V$ si y sólo si $(f(z_1),\ldots,f(z_n))\in f(R)$.

(4) Para cada $n \in N \setminus \{0\}$, para cada $z_1,\ldots,z_n \in A_1$ y para cada $D \in A_{(1,1,..^n..,1)}$, $f(E_{n+1}^{\mathcal{A}}(D,z_1,\ldots,z_n))=E_{n+1}^{\mathcal{B}}(f(D),f(z_1),\ldots,f(z_n))$. Esto se debe a que, por definición, $E_{n+1}^{\mathcal{B}}(f(D),f(z_1),\ldots,f(z_n))=w$ si y sólo si $(f(z_1),\ldots,f(z_n),w)\in f(D)$; pero para todo $z_1,\ldots,z_n \in A_1$, $f(z_1)=z_1,\ldots,f(z_n)=z_n$ y $f(D)=\{(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}^{\mathcal{A}}(D,z_1,\ldots,z_n)=z_{n+1}\}$. Por lo tanto $E_{n+1}^{\mathcal{B}}(f(D),f(z_1),\ldots,f(z_n))=E_{n+1}^{\mathcal{B}}(f(D),z_1,\ldots,z_n)=w$ si y sólo si $(z_1,\ldots,z_n,w)\in f(D)=\{(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1})\in(B_1)^{n+1} \mid E_{n+1}^{\mathcal{A}}(D,z_1,\ldots,z_n)=z_{n+1}\}$. Así, $E_{n+1}^{\mathcal{B}}(f(D),f(z_1),\ldots,f(z_n))=w=E_{n+1}^{\mathcal{A}}(D,z_1,\ldots,z_n)$; por último, como $E_{n+1}^{\mathcal{A}}(D,z_1,\ldots,z_n)=f(E_{n+1}^{\mathcal{A}}(D,z_1,\ldots,z_n))$ debido a que f es la identidad en A_1, tenemos que $f(E_{n+1}^{\mathcal{A}}(D,z_1,\ldots,z_n))=E_{n+1}^{\mathcal{B}}(f(D),f(z_1),\ldots,f(z_n))$, como se quería probar.
■

Proposición(iv12): Con toda la notación anterior, existe una funcional $J:H[MOD(\Delta(\Sigma))]\rightarrow\mathcal{F}(\Sigma)$. (Estamos denotando por $H[MOD(\Delta(\Sigma))]$ a la imagen de $MOD(\Delta(\Sigma))$ bajo H, y por $\mathcal{F}(\Sigma)$ a la clase de las pre-estructuras de tipo Σ).

Demostración:
Sean $\mathcal{A}\in MOD(\Delta(\Sigma))$ y $H(\mathcal{A})=\mathcal{B}=((B_i)_{i\in SORT\$},(C^{\mathcal{B}})_{c\in SIM.OP\$})$ como en los lemas anteriores. Definimos $J(\mathcal{B})$ como la pre-estructura $J(\mathcal{B})=\mathcal{D}=(D_0,(D_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathcal{D}})_{c\in CONS.OP})$ de tipo $\Sigma=(VAR,FUNC)$ –recuérdese que desde un principio se fijo el lenguaje de segundo orden L_2 de tipo Σ–, donde:

- $D_0=B_1$
- Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $D_n=B_{(0,1,..^n..,1)}$.
- Para cada $C\in CONS.OP$ tal que $FUNC(C)=1$, $C^{\mathcal{D}}=C^{\mathcal{B}}$.
- Para cada $C\in CONS.OP$ tal que $FUNC(C)=(0,1,..^n..,1)$ para alguna $n\in N\setminus\{0\}$, $C^{\mathcal{D}}=\{(z_1,\ldots,z_n)\in(D_0)^n \mid C^{\mathcal{B}}(z_1,\ldots,z_n)=V\}$.
- Para cada $C\in CONS.OP$ tal que $FUNC(C)=(1,1,..^n..,1)$ para alguna $n\in N\setminus\{0\}$, $C^{\mathcal{D}}=C^{\mathcal{B}}$.

Claramente, por la manera en que está definido $\mathcal{B}$, $J(\mathcal{B})=\mathcal{D}\in\mathcal{F}(\Sigma)$.
■

Observación(iv9): De acuerdo a todas las definiciones anteriores, M es una asignación de L_2 en $\mathcal{D}$ si y sólo si M es una asignación de $L_2\$$ en $\mathcal{B}$.

Demostración:
Nótese que M es una asignación de L_2 en $\mathcal{D}$ si y sólo si $M:(\cup_{n\in N} F_n)\cup(\cup_{n\in N\setminus\{0\}} R_n)\rightarrow(\cup_{n\in N} D_n)$ es una función tal que:
(a) $M[F_0]\subseteq D_0$.
(b) Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, si $D\in F_n$ entonces $M(D):D_0 x..^n..xD_0\rightarrow D_0$ es una función.

(c) Para cada $n \in N \setminus \{0\}$, $M[R_n] \subseteq D_n \subseteq P((A_0)^n)$.
Pero nótese que lo anterior ocurre si y sólo si (debido a la proposición(iv6))
(a) $M[F_0] \subseteq B_1$.
(b) Para cada $n \in N \setminus \{0\}$, $M[F_n] \subseteq B_{(1,1,..^n..,1)}$.
(c) Para cada $n \in N \setminus \{0\}$, $M[R_n] \subseteq B_{(0,1,..^n..,1)}$.
Es decir, M es una asignación de $L_2\$$ en B.
■

Con la intención de ver que $\mathcal{D}$ es una estructura general, primero probaremos cuatro proposiciones (que denotaremos por (1++), (2++), (3++), (4++)) directamente relacionadas con $\mathcal{A} \in MOD(\Delta(\Sigma))$, $H(\mathcal{A})=\mathcal{B}$ y $J(\mathcal{B})=\mathcal{D}$.

(1++): Para todo término τ de L_2 y para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$, $(\mathcal{D},M)(\tau)=(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau))$.

Demostración:
(Por inducción sobre la formación de los términos).
T1 $(\mathcal{D},M)(x)=M(x)=(\mathcal{B},M)(x)=(\mathcal{B},M)(TRANS\$(x))$ para toda variable individual $x \in F_0$ (pues $TRANS\$(x)=x$) y para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$.
T2 $(\mathcal{D},M)(a)=a^{\mathcal{D}}=a^{\mathcal{B}}=(\mathcal{B},M)(a)=(\mathcal{B},M)(TRANS\$(a))$ para todo símbolo de constante individual $a \in CONS.OP$ (pues $TRANS\$(a)=a$ y $FUNC(a)=1$) y para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$.
T3 Sea f un símbolo de constante funcional de aridad n, con $n \geq 1$, y $\tau_1,..,\tau_n$ términos. Supongamos que $(\mathcal{D},M)(\tau_i)=(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_i))$ para cada i tal que $1 \leq i \leq n$ y para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$. Entonces: $(\mathcal{D},M)(f(\tau_1,..,\tau_n))=$
$f^{\mathcal{D}}((\mathcal{A},M)(\tau_1),..,(\mathcal{A},M)(\tau_n))=f^{\mathcal{D}}((\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1)),..,(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_n))=$
$f^{\mathcal{B}}((\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1)),..,(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_n))=$
$(\mathcal{B},M)f(TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))=(\mathcal{B},M)(TRANS\$(f(\tau_1,..,\tau_n)))$ para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$.
T4 Sean D un símbolo de variable funcional de aridad n, con $n \geq 1$, –nótese que entonces $D \in F_n$ y por lo tanto es variable de tipo $(1,1,..^n..,1)$– y $\tau_1,..,\tau_n$ términos. Supongamos que$(\mathcal{D},M)(\tau_i)=(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_i))$ para cada i tal que $1 \leq i \leq n$ y para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$. Entonces:
$(\mathcal{D},M)(D(\tau_1,..,\tau_n))=M(D)((\mathcal{D},M)(\tau_1),..,(\mathcal{A},M)(\tau_n))=$
$M(D)((\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1)),..,(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_n)))=$
$E_{n+1}^{\mathcal{B}}(M(D),(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1)),..,(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_n)))$; nótese que se está usando que $M(D):(D_0)^n \longrightarrow D_0$ es una función tal que $M(D) \in D_{n+1}=B_{(0,1,..^{n+1}..,1)}$ y por lo tanto $M(D) \in B_{(1,1,..^n..,1)}$), por la observación(iv6) inciso (2). Continuando con la prueba, $E_{n+1}^{\mathcal{B}}(M(D),(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1)),..,(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_n)))=$
$E_{n+1}^{\mathcal{B}}((\mathcal{B},M)(D),(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1)),..,(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_n)))=$
$(\mathcal{B},M)(E_{n+1}(D,TRANS\$(\tau_1),..,TRANS\$(\tau_n))=(\mathcal{B},M)(TRANS\$(D(\tau_1,..,\tau_n)))$ para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$.
■

(2++): Obsérvese que a los predicados de L_2 les ocurre lo siguiente:

(a) Para cualquier predicado n-ario Π de L_2 (si n=2, Π distinto de $\approx_2$) y para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$: $(\mathcal{D},M)(\Pi)=(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\Pi))$.

Demostración:

- Si $\Pi=X$ es un símbolo de variable relacional, entonces $(\mathcal{D},M)(\Pi)=(\mathcal{D},M)(X)=M(X)=(\mathcal{B},M)(X)=(\mathcal{B},M)(TRANS\$(X))=(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\Pi))$
- Si Π no es un símbolo de variable relacional, entonces Π es un símbolo de constante relacional. Así, $\Pi\in CONS.OP$ y $FUNC(\Pi)=(0,1,..^n..,1)$ para algún $n\in N\setminus\{0\}$. Por lo tanto $(\mathcal{D},M)(\Pi)=\Pi^{\mathcal{D}}={}_{\Pi}W^{\mathcal{B}}=(\mathcal{B},M)({}_{\Pi}W)=(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\Pi))$, donde ${}_{\Pi}W\in W$ y $FUNC\$({}_{\Pi}W)=((0,1,..^n..,1))$.

▼

(b) Para cualquier símbolo de constante n-ario relacional P, $P\in CONS.OP$, para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$, y para cualquiera $(z_1,...,z_n)\in D_0x..^n..xD_0$ ocurre que: $(z_1,...,z_n)\in(\mathcal{D},M)(P)$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\in P^{\mathcal{D}}={}_{P}W^{\mathcal{B}}$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\in(\mathcal{B},M)({}_{P}W)$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\in((\mathcal{B},M)(TRANS\$(P)))$.

(c) Para todo i, tal que $i\in N$, para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$ y para todo $(z_1,z_2)\in D_ixD_i$ se tiene que: $(z_1,z_2)\in(\mathcal{H},M)(\approx_i)$ si y sólo si $z_1=z_2$ si y sólo si $((\mathcal{B},M)(\approx))(z_1,z_2)=V$ si y sólo si $((\mathcal{B},M)(TRANS\$(\approx_i)))(z_1,z_2)=V$.

■

(3++): Para cualquier fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$ y para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$ se tiene que $(\mathcal{D},M)\models_{\mathcal{F}}\varphi$ si y sólo si $(\mathcal{B},M)\models TRANS\$(\varphi)$.

Demostración:

(Por inducción sobre la formación de las fórmulas de L_2)

F1 Sean Π un predicado n-ario, $n\in N\setminus\{0\}$, y $\tau_1,..,\tau_n$ términos.

- Si $\Pi=X$, tal que X es un símbolo de variable relacional –es decir, es variable de tipo $(0,1,..^n..,1)$–:
  $(\mathcal{D},M)\models_{\mathcal{F}}X(\tau_1,...,\tau_n)$ si y sólo si $((\mathcal{D},M)(\tau_1),..,(\mathcal{D},M)(\tau_n))\in(\mathcal{D},M)(X)=M(X)$ si y sólo si $((\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1)),...,(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_n)))\in M(X)\in D_n=B_{(0,1,..^n..,1)}$ (debido a (1++)) si y sólo si $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathcal{B}}(M(X),(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1)),...,(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_n)))=V$ (debido a la definición de $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathcal{B}}$) si y sólo si $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathcal{B}}((\mathcal{B},M)(X),(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1)),...,(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_n)))=V$ –debido a que $M(X)=(\mathcal{B},M)(X)$– si y sólo si $(\mathcal{B},M)(\varepsilon_{n+1}(X,TRANS\$(\tau_1),....TRANS\$(\tau_n)))=V$ si y sólo si $(\mathcal{B},M)(TRANS\$(X(\tau_1,...,\tau_n)))=V$ si y sólo si $(\mathcal{B},M)\models TRANS\$(X(\tau_1,...,\tau_n))$ para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$.
- Si $\Pi=P$, P un símbolo de constante relacional –es decir, $P\in CONS.OP$, y es tal que $FUNC(P)=(0,1..^n..,1)$–, entonces $(\mathcal{D},M)\models_{\mathcal{F}}P(\tau_1,...,\tau_n)$ si y sólo si $((\mathcal{D},M)(\tau_1),...,(\mathcal{D},M)(\tau_n))\in(\mathcal{D},M)(P)=P^{\mathcal{D}}$ si y sólo si $P^{\mathcal{B}}((\mathcal{D},M)(\tau_1),..,(\mathcal{D},M)(\tau_n))=V$ (por la manera en que se definió $P^{\mathcal{D}}$) si y sólo si $((\mathcal{B},M)(P))((\mathcal{D},M)(\tau_1),..,(\mathcal{D},M)(\tau_n))=V$ si y sólo si

$((\mathcal{B},M)(P))((\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1)),\ldots,(\mathcal{B},M)(TRANS(\tau_n)))=V$ (debido a (1++)) si y sólo si $(\mathcal{B},M)(P(TRANS\$(\tau_1),\ldots,TRANS\$(\tau_n)))=V$ si y sólo si $(\mathcal{B},M)(TRANS\$(P(\tau_1,\ldots,\tau_n)))=V$ si y sólo si $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(P(\tau_1,\ldots,\tau_n))$ para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$.

F2 Sean τ_1 y τ_2 términos arbitrarios y sean Π y Ψ predicados n-arios cualesquiera (para n=2, Π y Ψ distintos de $\approx_2$), con $n \in N \setminus \{0\}$.

- $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} (\tau_1 \approx_0 \tau_2)$ si y sólo si $((\mathcal{D},M)(\tau_1),(\mathcal{D},M)(\tau_2)) \in (\mathcal{D},M)(\approx_0)=\{(x,y)\in(D_0)^2 \mid x=y\}$ si y sólo si $(\mathcal{D},M)(\tau_1)=(\mathcal{D},M)(\tau_2)$ si y sólo si $((\mathcal{B},M)(\approx))((\mathcal{D},M)(\tau_1),(\mathcal{D},M)(\tau_2))=V$ (por (2++) inciso (c)) si y sólo si $((\mathcal{B},M)(\approx))((\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1)),(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_2)))=V$ (por (1++)) si y sólo si $(\mathcal{B},M)(\approx(TRANS\$(\tau_1),TRANS\$(\tau_2)))=V$ si y sólo si $(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1)\approx TRANS\$(\tau_2))=V$ (pues recuérdese que cuando se definieron las expresiones en los lenguajes multivariados, se hizo la convención de escribir la fórmula $\approx(\tau_1,\tau_2)$ como $(\tau_1\approx\tau_2)$. Ver: Notación inciso (a5) página 45) si y sólo si $(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\tau_1\approx_0\tau_2))=V$ si y sólo si $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\tau_1\approx_0\tau_2)$ para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$.
- $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} (\Pi\approx_n\Psi)$ si y sólo si $((\mathcal{D},M)(\Pi),(\mathcal{D},M)(\Psi))\in(\mathcal{D},M)(\approx_n)=\{(X,Y)\in(A_n)^2 | X=Y\}$ si y sólo si $(\mathcal{D},M)(\Pi)=(\mathcal{D},M)(\Psi)$ si y sólo si $(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\Pi))=(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\Psi))$ (por (2++) inciso (a)) si y sólo si $(\mathcal{B},M)((TRANS\$(\Pi)\approx TRANS\$(\Psi))=V$ si y sólo si $(\mathcal{B},M)(TRANS\$(\Pi\approx_n\Psi))=V$ si y sólo si $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\Pi\approx_n\Psi)$, para toda asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$.

F3 Sean φ y π fórmulas tales que $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} \varphi$ si y sólo si $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\varphi)$, y $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} \pi$ si y sólo si $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\pi)$, para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$. Entonces:

- $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} (\varphi\vee\pi)$ **si y sólo si** $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} \varphi$ ó $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} \pi$ **si y sólo si** $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\varphi)$ ó $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\pi)$ **si y sólo si** $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\varphi)\vee TRANS\$(\pi)$ **si y sólo si** $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\varphi\vee\pi)$ para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$.
- $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} \neg\varphi$ **si y sólo si** no es cierto que $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} \varphi$ **si y sólo si** no es cierto que $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\varphi)$ **si y sólo si** $(\mathcal{B},M) \models \neg TRANS\$(\varphi)$ **si y sólo si** $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\neg\varphi)$ para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$.

F4 Sea φ una fórmula de L_2 tal que $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} \varphi$ si y sólo si $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\varphi)$ para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$, y sea x un símbolo de variable individual. Entonces:

- $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} \exists x\varphi$ **si y sólo si** hay $a\in D_0$ tal que $(\mathcal{D},M(x/a)) \models_{\mathcal{F}} \varphi$ **si y sólo si** hay $a\in D_0$ tal que $(\mathcal{B},M(x/a)) \models TRANS\$(\varphi)$ **si y sólo si** hay $a\in D_0=B_1$ tal que $(\mathcal{B},M(x/a)) \models TRANS\$(\varphi)$ **si y sólo si** $(\mathcal{B},M) \models \exists x TRANS\$(\varphi)$ **si y sólo si** $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\exists x\varphi)$ para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$.

F5 Sea φ una fórmula de L_2 tal que $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} \varphi$ si y sólo si $(\mathcal{B},M) \models TRANS\$(\varphi)$ para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$, y sea X un símbolo de variable relacional de aridad n. Entonces:

- $(\mathcal{D},M) \models_{\mathcal{F}} \exists X\varphi$ **si y sólo si** hay $R\in D_n$ tal que $(\mathcal{D},M(X/R)) \models_{\mathcal{F}} \varphi$ **si y sólo si hay**

$R \in D_n$ tal que $(\mathcal{B}, M(X/R)) \models TRANS\$(\varphi)$ **si y sólo si** hay $R \in D_n = B_{(0,..n..,1)}$, **tal que** $(\mathcal{B}, M(X/R)) \models TRANS\$(\varphi)$ **si y sólo si** $(\mathcal{B}, M)$ sat $\exists X TRANS\$(\varphi)$ **si y sólo si** $(\mathcal{B}, M) \models TRANS\$(\exists X\varphi)$ para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$.

F6 Sea φ una fórmula de L_2 tal que $(\mathcal{D}, M) \models_{\mathcal{F}} \varphi$ si y sólo si $(\mathcal{B}, M) \models TRANS\$(\varphi)$ para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$, y sea Q un símbolo de variable funcional de aridad n. Entonces:

- $(\mathcal{D}, M) \models_{\mathcal{F}} \exists Q\varphi$ **si y sólo si** hay una función $f{:}D_0 x..^{n}..xD_0 \rightarrow D_0$, $f \in D_{n+1}$, **tal que** $(\mathcal{D}, M(Q/f)) \models_{\mathcal{F}} \varphi$ **si y sólo si** hay una función $f{:}D_0 x..^{n}..xD_0 \rightarrow D_0$, $f \in D_{n+1}$, **tal que** $(\mathcal{B}, M(Q/f)) \models TRANS\$(\varphi)$ **si y sólo si** hay $f \in B_{(1,1,..n..,1)}$ tal que $(\mathcal{B}, M(Q/f)) \models TRANS\$(\varphi)$ (debido a la observación(iv6) inciso (2)) **si y sólo si** $(\mathcal{B}, M) \models \exists Q TRANS\$(\varphi)$ **si y sólo si** $(\mathcal{B}, M) \models TRANS\$(\exists Q\varphi)$ **para cualquier** asignación M de L_2 en $\mathcal{B}$.

■

(4++): De acuerdo a nuestra convención de escribir $\varphi\$ = TRANS\$(\varphi)$ y simplemente reenunciando el resultado anterior tenemos que: Para cualquier fórmula $\varphi \in FORM(L_2)$ y para cualquier asignación M de L_2 en $\mathcal{D}$, $(\mathcal{D}, M) \models_{\mathcal{F}} \varphi$ si y sólo si $(\mathcal{B}, M) \models \varphi\$$.

Lema(iv5): Con todas las definiciones anteriores, $\mathcal{D}$ es una estructura general de tipo Σ.

Demostración:

Probaremos que $\mathcal{D} \models_{\mathcal{F}} Comp(L_2)$. Recuérdese que $Comp(L_2) = re \cup fu$ es el conjunto de la cerradura universal de las fórmulas de comprensión de L_2 (véase página 40). Prueba por casos:

(1) Sea $\pi \in re$. Entonces existe $n \in N\backslash\{0\}$ y $\varphi \in FORM(L_2)$ tal que $\pi = \forall\exists X \forall x_1 ... \forall x_n (X(x_1,...,x_n) \leftrightarrow \varphi)$; donde $X \in R_n$ es variable relacional y $x_1,...,x_n \in F_0$ son variables individuales. Por otro lado, si $\{v_1,...,v_m\} = FREE(\exists X \forall x_1 ... \forall x_n (X(x_1,...,x_n) \leftrightarrow \varphi)$, para alguna $m \in N\backslash\{0\}$, entonces $\pi = \forall v_1 ... \forall v_m \exists X \forall x_1 ... \forall x_n (X(x_1,...,x_n) \leftrightarrow \varphi)$. Así, tenemos que $\pi\$ = \forall v_1 ... \forall v_m \exists X \forall x_1 ... \forall x_n (\varepsilon_{n+1}(X, x_1,...,x_n) \leftrightarrow \varphi\$)$ y como $\mathcal{A} \in MOD(\Delta(\Sigma))$, entonces $\mathcal{A} \models RComp$, donde $RComp = \{\forall RComp^n\varphi \mid n \in N\backslash\{0\}$ y $\varphi \in FORM(L_2\$)\}$, y en particular $\mathcal{A} \models \forall v_1 ... \forall v_m \exists X \forall x_1 ... \forall x_n (\varepsilon_{n+1}(X, x_1,...,x_n) \leftrightarrow \varphi\$)$. Por ser $\mathcal{B} = H(\mathcal{A})$ isomorfo a $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B} \models \forall v_1 ... \forall v_m \exists X \forall x_1 ... \forall x_n (\varepsilon_{n+1}(X, x_1,...,x_n) \leftrightarrow \varphi\$)$, (por el teorema del isomorfismo); pero esto último es lo mismo que $\mathcal{B} \models \pi\$$. Finalmente, por (4++), $\mathcal{D} \models \pi$.

(2) Sea $\pi \in fu$. Entonces existe $n \in N\backslash\{0\}$ y $\varphi \in FORM(L_2)$ tal que $\pi = \forall(\forall x_1 ... \forall x_n \exists! x_{n+1} \varphi \rightarrow \exists D \forall x_1 .... \forall x_{n+1} (D(x_1,..,x_n) \approx x_{n+1}) \leftrightarrow \varphi))$, donde $D \in F_n$ es símbolo de variable funcional de aridad n tal que $D \notin FREE(\varphi)$, y $x_1,...,x_n \in F_0$ son símbolos de variables individuales. Además, si $\{v_1,...,v_m\} = FREE(\forall x_1 ... \forall x_n \exists! x_{n+1} \varphi \rightarrow \exists D \forall x_1 .... \forall x_{n+1} (D(x_1,..,x_n) \approx x_{n+1}) \leftrightarrow \varphi))$, para alguna $m \in N\backslash\{0\}$, entonces $\pi = \forall v_1 ... \forall v_m (\forall x_1 ... \forall x_n \exists! x_{n+1} \varphi \rightarrow \exists D \forall x_1 .... \forall x_{n+1} (D(x_1,..,x_n) \approx x_{n+1}) \leftrightarrow \varphi))$ y entonces $\pi\$ = \forall v_1 ... \forall v_m (\forall x_1 ... \forall x_n \exists! x_{n+1} \varphi \rightarrow \exists D \forall x_1 .... \forall x_{n+1} (E_{n+1}(D, x_1,...x_n) \approx x_{n+1}) \leftrightarrow \varphi\$))$. Por otro lado, como $\mathcal{A} \in MOD(\Delta(\Sigma))$, en particular $\mathcal{A} \models fComp$, y entonces $\mathcal{A} \models \forall v_1 ... \forall v_m (\forall x_1 ... \forall x_n \exists! x_{n+1} \varphi \rightarrow \exists D \forall x_1 .... \forall x_{n+1} (E_{n+1}(D, x_1,...x_n) \approx x_{n+1}) \leftrightarrow \varphi\$))$. Por lo tanto, debido a que $\mathcal{B} = H(\mathcal{A})$ es isomorfo a $\mathcal{A}$ y al teorema del isomorfismo, $\mathcal{B} \models \forall v_1 ... \forall v_m (\forall x_1 ... \forall x_n \exists! x_{n+1} \varphi \rightarrow \exists D \forall x_1 .... \forall x_{n+1} (E_{n+1}(D, x_1,...x_n) \approx x_{n+1}) \leftrightarrow \varphi\$))$, es decir

$\mathcal{B} \models \pi\$$. Finalmente, por (4++), $\mathcal{D} \models \pi$.
Los casos anteriores prueban que $\mathcal{D} \models_{\mathcal{F}} Comp(L_2)$ y por lo tanto, por el teorema(iv0) página 74, $\mathcal{D}$ es estructura general de tipo Σ.

■

Lema(iv6): De acuerdo a toda la notación anterior, $\mathcal{B}=H(\mathcal{A}) \in CONV[ST(EGL_2)]$.

Demostración:
Por el lema(iv5), $J(\mathcal{B})=\mathcal{D}=(D_0,(D_n)_{n\in N\setminus\{0\}},(C^{\mathcal{D}})_{c\in CONS.OP})$ es tal que $\mathcal{D}\in ST(EGL_2)$.
Veamos que $CONV(\mathcal{D})=\mathcal{B}$. Por definición,
$CONV(\mathcal{D})=\mathcal{D}\$=((D\$_i)_{i\in SORT\$},(C^{\mathcal{D}\$})_{c\in SIM.OP\$})$ es tal que:

- $D\$_0=\{V,F\}=B_0$; $D\$_1=D_0=B_1$; para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $D\$_{(0,1,..^n..,1)}=D_n=B_{(0,1,..^n..,1)}$. Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $D\$_{(1,1,..^n..,1)}=\{Z\in D_{n+1} \mid Z:A_0x..^n..xA_0\to A_0$ es función$\}=B_{(1,1,..^n..,1)}$ (por la observación(iv6) inciso (2)).
- Para cada $C\in CONS.OP\cap SIM.OP\$$, –se tiene que $FUNC\$(C)=FUNC(C)$–:
  + Si $FUNC\$(C)=1$, entonces $C^{\mathcal{D}\$}=C^{\mathcal{D}}=C^{\mathcal{B}}$.
  + Si $FUNC\$(C)=(1,1,..^n..,1)$, con $n\in N\setminus\{0\}$, entonces $C^{\mathcal{A}\$}: D\$_1x..^n..xD\$_1\to D\$_1$ es una función n-aria definida como: $C^{\mathcal{D}\$}=C^{\mathcal{A}}=C^{\mathcal{B}}$.
  + Si $FUNC\$(C)=(0,1,..^n..,1)$, con $n\in N\setminus\{0\}$, entonces $C^{\mathcal{D}\$}:D\$_1x..^n..xD\$_1\to D\$_0$ es una relación n-aria definida como:
    $C^{\mathcal{D}\$}(z_1,...,z_n)=V$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\in C^{\mathcal{D}}$,
    $C^{\mathcal{D}\$}(z_1,...,z_n)=F$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\notin C^{\mathcal{D}}$. Pero, por definición,
    $C^{\mathcal{D}}=\{(z_1,...,z_n)\in(D_0)^n \mid C^{\mathcal{B}}(z_1,...,z_n)=V\}$, por lo que $C^{\mathcal{D}\$}=C^{\mathcal{B}}$.
- Para cada los elementos de $(SIM.OP\$\setminus CONS.OP)=\varepsilon\cup E\cup W\cup\{\neg,\vee,\approx\}$:
  + Si $C\in\{\neg,\vee,\approx\}$, entonces $C^{\mathcal{D}\$}$ es la función definida de manera canónica en la lógica multivariada de los símbolos $\{\neg,\vee,\approx\}$ sobre la estructura $\mathcal{D}\$$. Por lo tanto, $C^{\mathcal{D}\$}=C^{\mathcal{B}}$
  + Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathcal{D}\$}$ es la relación n+1-aria
    $\varepsilon_n{}^{\mathcal{D}\$}:D\$_{(0,1,..^n..,1)}xD\$_1x..^n..xD\$_1\to D\$_0$ definida como:
    $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathcal{D}\$}(Z,z_1,...,z_n)=V$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\in Z$,
    $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathcal{D}\$}(Z,z_1,...,z_n)=F$ si y sólo si $(z_1,...,z_n)\notin Z$. Así, $\varepsilon_{n+1}{}^{\mathcal{D}\$}=\varepsilon_{n+1}{}^{\mathcal{B}}$
  + Para cada $n\in N\setminus\{0\}$, E_{n+1} es la función n+1-aria
    $E_{n+1}{}^{\mathcal{D}\$}:D\$_{(1,1,..^n..,1)}xD\$_1x..^n..xD\$_1\to D\$_1$ definida como:
    $E_{n+1}{}^{\mathcal{D}\$}(Z,z_1,...,z_n)=Z(z_1,...,z_n)=E_{n+1}{}^{\mathcal{B}}(Z,z_1,...,z_n)$
  + Si $C\in W=\{{}_RW \mid R\in CONS.OP$ y $FUNC(R)=(0,1,..^m..,1)$ para algún $m\in N\setminus\{0\}\}$ entonces $C={}_RW$ para algún $R\in CONS.OP$ tal que $FUNC(R)=(0,1,..^n..,1)$ para algún $n\in N\setminus\{0\}$. Así, ${}_RW^{\mathcal{D}\$}=C^{\mathcal{D}\$}$ está definida como $C^{\mathcal{D}\$}={}_RW^{\mathcal{D}\$}=R^{\mathcal{D}}$.
    Pero $R^{\mathcal{D}}=\{(z_1,...,z_n)\in(D_0)^n \mid R^{\mathcal{B}}(z_1,...,z_n)=V\}=\{(z_1,...,z_n)\in(D_0)^n \mid R^{\mathcal{A}}(z_1,...,z_n)=V\}=$ $\{(z_1,...,z_n)\in(B_1)^n \mid R^{\mathcal{A}}(z_1,...,z_n)=V\}={}_RW^{\mathcal{B}}$, –esta última igualdad se debe a la observación(iv8)–. Por lo tanto, $C^{\mathcal{D}\$}={}_RW^{\mathcal{D}\$}={}_RW^{\mathcal{B}}$.

De todo lo anterior, $CONV(\mathcal{D})=\mathcal{B}=H(\mathcal{A})$.

■

Teorema(iv2): Existe una funcional $H:MOD(\Delta(\Sigma))\rightarrow CONV[ST(EGL_2)]$ tal que para cada estructura multivariada $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{A}\in MOD(\Delta(\Sigma))$, $H(\mathscr{A})$ es isomorfo a $\mathscr{A}$.

Demostración:
El lema(iv3) muestra la existencia de H y el lema(iv6) muestra que H tiene como contradominio a $CONV[ST(EGL_2)]$. Por lema(iv4) tenemos que $H(\mathscr{A})$ es isomorfo a $\mathscr{A}$.
■

Teorema(iv3): Para cualquier estructura multivariada $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{A}\in MOD(\Delta(\Sigma))$, existe una estructura general $\mathscr{D}\in ST(EGL_2)$ tal que para cualquier asignación M de $L_2\$$ en $\mathscr{A}$ el isomorfismo dado en el lema(iv4) $f:\mathscr{A}\rightarrow H(\mathscr{A})$ induce una asignación $f\circ M$ de L_2 en $\mathscr{D}$ tal que para cualquier fórmula $\varphi\in FORM(L_2)$, $(\mathscr{A},M)\models\varphi\$$ si y sólo si $(\mathscr{D},f\circ M)\models_{GE}\varphi$.

Demostración:
Usando todas las definiciones y notación anteriores, sea $\mathscr{D}=(J\circ H)(\mathscr{A})$. De acuerdo al lema(iv5), $\mathscr{D}\in ST(EGL_2)$. Sean $\varphi\in FORM(L_2)$ una fórmula arbitraria del lenguaje L_2 y M una asignación arbitraria de $L_2\$$ en $\mathscr{A}$. Por la proposición(iii2), $f\circ M$ es una asignación de $L_2\$$ en $H(\mathscr{A})$, y entonces, por la observación(iv9), $f\circ M$ es una asignación de L_2 en $\mathscr{D}$. Probemos ahora la doble implicación:
(Suficiencia). Supongamos que $(\mathscr{A},M)\models\varphi\$$. Entonces $(H(\mathscr{A}),f\circ M)\models\varphi\$$ (debido al teorema(iii3) del isomorfismo para estructuras multivariadas). Así, $\mathscr{D}=J(H(\mathscr{A}))\in ST(EGL_2)$ es tal que $(\mathscr{D},f\circ M))\models_{\mathcal{F}}\varphi$ (por (4++)).
(Necesidad) Supongamos que $(\mathscr{D},f\circ M)\models_{GE}\varphi$. Entonces $(\mathscr{D},f\circ M)\models_{\mathcal{F}}\varphi$ (por la observación(iv3), pagina 77) y entonces $(H(\mathscr{A}),f\circ M)\models\varphi\$$ (por (4++)). Por lo tanto, $(\mathscr{A},M)\models\varphi\$$ (por el teorema(iii3) del isomorfismo para estructuras multivariadas).
■

Finalmente ya podemos mostrar cómo están relacionadas las nociones de consecuencia lógica en la lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales y la lógica multivariada. Esta relación queda explícita en nuestro siguiente teorema.

Teorema(iv4): Sea L_2 el lenguaje arbitrario de segundo orden de tipo Σ que se ha venido usando desde el principio del capítulo y sea $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_2)$. Entonces $\Gamma\models_{GE}\varphi$ si y sólo si $TRANS\$[\Gamma]\cup\Delta(\Sigma)\models\varphi\$$

Demostración:
(Suficiencia). Supongamos que $\Gamma\models_{GE}\varphi$ y sea $(\mathscr{A},M_1)$ un modelo arbitrario multivariado de $TRANS\$[\Gamma]\cup\Delta(\Sigma)$. Por el teorema(iv3), existe una estructura general $\mathscr{D}$ tal que para toda fórmula $\pi\in FORM(L_2)$, $(\mathscr{D},f\circ M_1)\models_{GE}\pi$ si y sólo si $\mathscr{A}\models\pi\$$. Así, $(\mathscr{D},f\circ M_1)\models_{GE}\Gamma$ (puesto que $(\mathscr{A},M_1)\models TRANS\$[\Gamma]$), y como $\Gamma\models_{GE}\varphi$, entonces $(\mathscr{D},M_1)\models_{GE}\varphi$. Finalmente, otra vez por el teorema(iv3), $(\mathscr{A},M_1)\models\varphi\$$.
(Necesidad). Supongamos que $TRANS\$[\Gamma]\cup\Delta(\Sigma)\models\varphi\$$ y sea $(\mathscr{D},M_2)$ un *EG*-modelo arbitrario de Γ. Entonces existe una estructura multivariada $\mathscr{D}\$$ de tipo $\Sigma\$$ tal que $(\mathscr{D}\$,M_2)\models TRANS\$[\Gamma]$ (esto por el corolario(iv4) página 90); además $(\mathscr{D}\$,M_2)\models\Delta(\Sigma)$,

por la Indicación(iv1), página 93. Así, $(\mathcal{D}\$,M_2) \models TRANS\$[\Gamma]\cup\Delta(\Sigma)$ y como $TRANS\$[\Gamma]\cup\Delta(\Sigma) \models \varphi\$$, entonces $(\mathcal{D}\$,M_2) \models \varphi\$$. Así, tenemos que $(\mathcal{D},M_2) \models_{GE} \varphi$, otra vez por el corolario(iv4).

■

Definición:

La cardinalidad de una pre-estructura $\mathcal{A}=((A_n)_{n\in N}, (f^{\mathcal{A}})_{f\in CONS.OP})$ es $|A_0|$.

Teorema de compacidad para lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales: Sea L_2 un lenguaje de segundo orden de tipo Σ y sea Γ un conjunto arbitrario de enunciados de L_2. Si para cualquier subconjunto finito Θ de enunciados de Γ existe una estructura general que es modelo de Θ, entonces existe una estructura general modelo de Γ cuya cardinalidad es menor o igual a $|\Gamma|+|\Delta(\Sigma)|+|\Phi(\Sigma\$)|+\aleph_0$. (Donde $\Phi(\Sigma\$)$ es el conjunto de enunciados de primer orden que se define en el capítulo III, página 56).

Demostración:
Supongamos que para cualquier subconjunto finito Θ de enunciados de Γ existe una estructura general que es modelo de Θ.
Para probar nuestra afirmación, primero veamos que cualquier subconjunto finito de enunciados de $TRANS\$[\Gamma]\cup\Delta(\Sigma)$ tiene un modelo multivariado. Sea Ω un subconjunto finito y arbitrario de enunciados de $TRANS\$[\Gamma]\cup\Delta(\Sigma)$. Entonces $\Omega\cap TRANS\$[\Gamma]$ es finito y ocurre que para cualquier $\pi\in\Omega\cap TRANS\$[\Gamma]$, $\pi=\varphi\$$, donde $\varphi\in\Gamma$. Así, existe un subconjunto $\tilde{N}$ finito de Γ tal que $TRANS\$[\tilde{N}]=\Omega\cap TRANS\$[\Gamma]$. Como por hipótesis para cualquier subconjunto finito de Γ existe una estructura general que es modelo de él, entonces existe $\mathcal{A}\in EG$ tal que $\mathcal{A}\models_{EG}\tilde{N}$. Consecuentemente la estructura multivariada $\mathcal{A}\$$ es tal que $\mathcal{A}\$ \models TRANS\$[\tilde{N}]$ (debido al corolario(iv4), página 90); además, por la Indicación(iv1), página 93, $\mathcal{A}\$ \models \Delta(\Sigma)$ y entonces, como $\Omega=(\Omega\cap TRANS\$[\Gamma])\cup(\Omega\cap\Delta(\Sigma))$, $\mathcal{A}\$ \models \Omega$. Esto prueba que cualquier subconjunto finito de $TRANS\$[\Gamma]\cup\Delta(\Sigma)$ tiene un modelo multivariado, y por el teorema de compacidad para lógica multivariada, concluimos que existe una estructura multivariada $\mathcal{B}$ modelo de $TRANS\$[\Gamma]\cup\Delta(\Sigma)$ con cardinalidad menor o igual que $|TRANS\$[\Gamma]\cup\Delta(\Sigma)|+|\Phi(\Sigma\$)|+\aleph_0$. Finalmente, por el teorema(iv3), existe una estructura general $\mathcal{G}\in ST(EGL_2)$ modelo de Γ cuya cardinalidad es menor o igual que $|TRANS\$[\Gamma]\cup\Delta(\Sigma)|+|\Phi(\Sigma\$)|+\aleph_0\leq|TRANS\$[\Gamma]|+|\Delta(\Sigma)|+|\Phi(\Sigma\$)|+\aleph_0=$ $|\Gamma|+|\Delta(\Sigma)|+|\Phi(\Sigma\$)|+\aleph_0$. (Esto último se debe a que el universo de individuos de $\mathcal{G}$ es el universo de tipo 1 de $\mathcal{B}$).

■

Teorema de Löwenheim-Skolem para lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales: Sea L_2 un lenguaje de segundo orden de tipo Σ y sea Γ un conjunto arbitrario de enunciados de L_2. Si existe una estructura general de cardinalidad infinita que es modelo Γ, entonces Γ tiene un EG-modelo de cualquier cardinalidad κ, con $\kappa\geq|\Gamma|+|\Delta(\Sigma)|+|\Phi(\Sigma\$)|+\aleph_0$. (Donde $\Phi(\Sigma\$)$ es el conjunto de enunciados de primer orden que se define en el capítulo III, página 56).

Demostración:
Sea $\kappa \geq |\Gamma|+|\Delta(\Sigma)|+|\Phi(\Sigma\$)|+\aleph_0$ y supongamos que existe una estructura general $\mathcal{A}$ infinita que es modelo de Γ. Entonces, por el corolario(iv4) y por la Indicación(iv1), $\mathcal{A}\$$ es una estructura multivariada modelo de $\mathrm{TRANS\$}(\Gamma)\cup\Delta(\Sigma)$; además, el universo de tipo 1 de $\mathcal{A}\$$ es el universo de individuos de la estructura general $\mathcal{A}$, el cual, por hipótesis, es infinito. Por lo tanto, por el teorema de Löwenheim-Skolem para lógica multivariada y debido a que $\kappa \geq |\Gamma|+|\Delta(\Sigma)|+|\Phi(\Sigma\$)|+\aleph_0 = |\mathrm{TRANS\$}(\Gamma)|+|\Delta(\Sigma)|+|\Phi(\Sigma\$)|+\aleph_0 \geq |\mathrm{TRANS\$}(\Gamma)\cup\Delta(\Sigma)|+|\Phi(\Sigma\$)|+\aleph_0$, existe una estructura multivariada $\mathcal{B}$ modelo de $\mathrm{TRANS\$}(\Gamma)\cup\Delta(\Sigma)$ y de cardinalidad κ. Así, por el teorema(iv3) existe una estructura general $\mathcal{D}=((D_n)_{n\in N}, (f^{\mathcal{D}})_{f\in CONS.OP})$ modelo de Γ cuya cardinalidad $|D_0|$ aseguramos es κ: esto último se debe a que si uno observa la definición de $\mathcal{D}$ en la proposición(iv12), el universo de individuos D_0 de $\mathcal{D}$ es el mismo que el universo de tipo 1 de $\mathcal{B}$, de lo cual concluimos dos cosas:

- $|D_0|\leq\kappa$, debido a que la cardinalidad de $\mathcal{B}$ es la suma de la cardinalidad de sus distintos universos.
- $\kappa\leq|D_0|$, debido a que, en la prueba del teorema de Löwenheim-Skolem para la lógica multivariada en nuestro caso particular (es decir, donde se construye una estructura multivariada $\mathcal{B}$ de cardinalidad κ a partir de una estructura $\mathcal{A}\$$ y de su universo de tipo 1, el cual es infinito), el universo de tipo 1 de $\mathcal{B}$ tiene cardinalidad mayor o igual a κ.

Por lo tanto, $\mathcal{D}=((D_n)_{n\in N}, (f^{\mathcal{D}})_{f\in CONS.OP})$ es *EG*-modelo de Γ de cardinalidad $|D_0|=\kappa$.
■

Resultados pospuestos.

Corolario(iv6): Sea L_2 un lenguaje de segundo orden arbitrario de tipo Σ. Entonces:
(a) Consecuencia lógica no implica pre-estructura-consecuencia lógica; es decir, existen conjuntos de fórmulas $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_2)$ tales que $\Gamma \models \varphi$ y no es cierto que $\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi$.
(b) *EG*-consecuencia lógica no implica pre-estructura-consecuencia lógica; es decir, existen conjuntos de fórmulas $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_2)$ tales que $\Gamma \models_{EG} \varphi$ y no es cierto que $\Gamma \models_{\mathcal{F}} \varphi$.
(c) Consecuencia lógica no implica *EG*-consecuencia lógica; es decir, existen conjuntos de fórmulas $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_2)$ tales que $\Gamma \models \varphi$ y no es cierto que $\Gamma \models_{EG} \varphi$.

Demostración:
(a) y (b)
Sean z,w variables individuales y X variable relacional de aridad 1 de L_2. El enunciado $\exists z\exists w(\forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))\wedge\neg(z\approx w))$ es una fórmula de L_2 tal que no es satisfacible de manera estándar ni es *EG*-satisfacible, sin embargo, sí es pre-estructura-satisfacible –véase la prueba de los incisos (1) y (2) de la proposición(iv11)–. De este resultado, es inmediato que:
$z\approx w \models \neg\exists z\exists w(\forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))\wedge\neg(z\approx w))$,
pero no es cierto que $z\approx w \models_{\mathcal{F}} \neg\exists z\exists w(\forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))\wedge\neg(z\approx w))$; además:
$z\approx w \models_{EG} \neg\exists z\exists w(\forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))\wedge\neg(z\approx w))$,

pero no es cierto que $z\approx w \models_{\mathcal{F}} \neg\exists z\exists w(\forall X(X(z)\leftrightarrow X(w))\wedge\neg(z\approx w))$.
Por lo tanto, hemos probado (a) y (b).

(c)
Para cada $n\in N$, $n\geq 2$, sea φ_n la fórmula "hay n elementos":
$\varphi_n=\exists\alpha_1,..,\exists\alpha_n(\neg(\alpha_1\approx_0\alpha_2)\wedge\neg(\alpha_1\approx_0\alpha_3)\wedge...\wedge\neg(\alpha_1\approx_0\alpha_n)\wedge...\wedge\neg(\alpha_{n-1}\approx_0\alpha_n))$, donde $F_0=\{\alpha_i|i\in N\}$ es el conjunto de variables individuales de L_2. Además, sean $K=\{\varphi_n|n\in N\}$ y $\varphi_{inf}=\exists D(\forall\alpha\forall\beta((D(\alpha)\approx_0 D(\beta))\rightarrow(\alpha\approx_0\beta))\wedge\exists\alpha\forall\beta\neg(\alpha\approx_0 D(\beta)))$ –recuérdese que en la lógica estándar de segundo orden φ_{inf} expresa la noción "ser infinito"–. Es claro que $K\cup\{\varphi_{inf}\}\subseteq SENT(L_2)\subseteq FORM(L_2)$. Además, $K \models \varphi_{inf}$, pero no es cierto que $K \models_{EG} \varphi_{inf}$.
Para ver esto, obsérvese que si $K \models_{EG} \varphi_{inf}$ entonces, por el teorema de compacidad para lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales, existiría un conjunto finito $G\subseteq K$ tal que
$G \models_{EG} \varphi_{inf}$, y entonces, por el corolario(iv2) inciso (2), tendríamos que $G \models \varphi_{inf}$.
Nótese que esto es contradictorio con nuestra prueba del teorema(i1), en la cual se mostró que no existe un conjunto finito $L\subseteq K$ tal que $L \models \varphi_{inf}$.
Por lo tanto, no es cierto que $K \models_{EG} \varphi_{inf}$.
■

Corolario(iv7): Sea Σ el tipo de un lenguaje de segundo orden L_2. Entonces $EE(\Sigma)$ es una clase propia de $EG(\Sigma)$ y $EG(\Sigma)$ es una clase propia de $\mathcal{F}(\Sigma)$.

Demostración:
Por la proposición(iv9) sabemos que $EE(\Sigma)\subseteq EG(\Sigma)\subseteq\mathcal{F}(\Sigma)$; así, sólo nos hace falta ver que tales contenciones son propias:

Veamos que $EE(\Sigma)\neq EG(\Sigma)$:
Con toda la notación de la prueba del inciso (c) del corolario(iv6) y por la prueba misma, el conjunto de enunciados $K\cup\{\varphi_{inf}\}\subseteq SENT(L_2)$ es tal que $K \models \varphi_{inf}$, y sin embargo, no es cierto que $K \models_{EG} \varphi_{inf}$. Esto último significa que existe una estructura general $\mathcal{A}$ que es modelo de K, pero que no es modelo de φ_{inf}. Nótese que entonces esta estructura general no es estructura estándar (de otro modo sería modelo de φ_{inf}).

Veamos que $EG(\Sigma)\neq\mathcal{F}(\Sigma)$:
Sea $\mathcal{A}=((A_n)_{n\in N}, (f^{\mathcal{A}})_{f\in CONS.OP})$ una estructura general arbitraria de tipo Σ tal que el universo de individuos A_0 tiene al menos dos elementos y sean $a,b\in A_0$, $a\neq b$. Nótese que $\{a\}$ y $\{b\}$ pertenecen al universo de relaciones unitarias A_1 de $\mathcal{A}$, ya que para todo $z\in A_0$, $\{z\}$ es paramétricamente $\mathcal{A}$-definible como: $\{z\}=\{q\in A_0 \mid \mathcal{A}(x/q,w/z) \models (x\approx w)\}$, donde x y w son variables individuales de L_2.
Definimos la pre-estructura $\mathcal{B}=((B_n)_{n\in N}, (f^{\mathcal{B}})_{f\in CONS.OP})$ de tipo Σ como:
- Para todo $n\in N\setminus\{1\}$, $B_n=A_n$,
- $B_1=\{\{b\}\}$,
- Para todo $f\in CONS.OP$ tal que $FUNC(f)\neq(0,1)$, $f^{\mathcal{B}}=f^{\mathcal{A}}$,
- Para todo $f\in CONS.OP$ tal que $FUNC(f)=(0,1)$, $f^{\mathcal{B}}=\{b\}$.

Así, $\mathcal{B}$ es pre-estructura de tipo Σ, pero no es estructura general de tipo Σ.
■

Conclusiones del capítulo

A través de todos los capítulos anteriores hemos pretendido dar una exposición amplia de los hechos básicos de la lógica de segundo orden; en particular se ha trabajado mucho en relación a la reductibilidad de la lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales a lógica de primer orden, y sin embargo, no hemos hecho explícita tal reducción. Con la intención de que esta reducción quede totalmente clara, la mostraremos aquí:

Por lo realizado en este capítulo, tenemos:

- Para todo lenguaje L_2 de segundo orden de tipo Σ=(VAR,FUNC), tal que FUNC:CONS.OP$\rightarrow$VAR existe un lenguaje multivariado $L_2\$$ de tipo $\Sigma\$$=(SORT\$,FUNC\$), tal que FUNC\$:SIM.OP\$$\rightarrow(S_\omega(\text{SORT\$})\cup(N\setminus\{0\}))\setminus\{(0)\}$, donde SIM.OP\$=CONS.OP$\cup\{\neg,\vee,\approx\}\cup\varepsilon\cup E\cup W$ y donde ε, E y W son ciertos conjuntos de símbolos de constante relacional, funcional e individual respectivamente, ajenos a CONS.OP.
- Cada fórmula $\varphi\in L_2$ está asociada a una fórmula $\varphi\$\in L_2\$$.
- Cada estructura general $\mathcal{A}$ de tipo Σ está asociada a una estructura multivariada $\mathcal{A}\$$ de tipo $\Sigma\$$.
- A cada asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$ corresponde una asignación M\$ de $L_2\$$ en $\mathcal{A}\$$ tal que $(\mathcal{A},M)\models_{EG}\varphi$ si y sólo si $(\mathcal{A}\$,M\$)\models\varphi\$$.
- Existe un conjunto de enunciados multivariados $\Delta(\Sigma)\subseteq SENT(L_2\$)$ tal que para cualquier conjunto de fórmulas de segundo orden $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_2)$ existe un conjunto de fórmulas multivariadas $TRANS\$[\Gamma]\cup\{\varphi\$\}\subseteq FORM(L_2\$)$ tal que $\Gamma\models_{EG}\varphi$ si y sólo si $TRANS\$[\Gamma]\cup\Delta(\Sigma)\models\varphi\$$.

Además, por lo realizado en el capítulo III, tenemos:

- Para todo lenguaje L_m de tipo multivariado Σ=(SORT,FUNC) tal que FUNC:SIM.OP$\rightarrow(S_\omega(\text{SORT})\cup(N\setminus\{0\}))\setminus\{(0)\}$ existe un lenguaje de primer orden $L_m{}^*$ de tipo $\Sigma^*=(\text{SIM.OP}\setminus\{\vee,\neg,\approx\})\cup\{Q_i \mid i\in \text{SORT}\setminus\{0\}\}$, donde $\{Q_i \mid i\in\text{SORT}\setminus\{0\}\}$ es un conjunto de símbolos de constante relacional ajeno a SIM.OP
- Cada fórmula $\varphi\in L_m$ está asociada a una fórmula $\varphi^*\in L_m{}^*$.
- Cada estructura multivariada $\mathcal{A}$ de tipo Σ está asociada a una estructura monovariada $\mathcal{A}^*$ de tipo Σ^*.
- A cada asignación M de L_m en $\mathcal{A}$ corresponde una asignación M* de $L_m{}^*$ en $\mathcal{A}^*$ tal que $(\mathcal{A},M)\models\varphi$ si y sólo si $(\mathcal{A}^*,M^*)\models\varphi^*$.
- Existe un conjunto de enunciados de primer orden $\Phi(\Sigma)\subseteq SENT(L_m{}^*)$ tal que para cualquier conjunto de fórmulas multivariadas $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq FORM(L_m)$ existe un conjunto de fórmulas de primer orden $\Gamma^*\cup\{\varphi^*\}\subseteq FORM(L_m{}^*)$ tal que $\Gamma\models\varphi$ si y sólo si $\Gamma^*\cup\Phi(\Sigma)\models\varphi^*$.

Por lo tanto, de las dos listas anteriores tenemos la reducción explícita de la lógica de segundo orden con semántica sobre estructuras generales a lógica de primer orden:

- Para todo lenguaje L_2 de segundo orden de tipo Σ=(VAR,FUNC) tal que Dom(FUNC)=CONS.OP existe un lenguaje de primer orden $L_2\$^*$ de tipo $\Sigma\$^*$=(CONS.OP$\cup\varepsilon\cup$E$\cup$W.)$\cup\{Q_i \mid i\in$SORT\$$\setminus\{0\}\}$.
- Cada fórmula $\varphi\in L_2$ está asociada a una fórmula $\varphi\$^*\in L_2\$^*$.
- Cada estructura general $\mathcal{A}$ de tipo Σ está asociada a una estructura monovariada $\mathcal{A}\$^*$ de tipo $\Sigma\$^*$.
- A cada asignación M de L_2 en $\mathcal{A}$ corresponde una asignación M\$* de $L_2\$^*$ en $\mathcal{A}\$^*$ tal que $(\mathcal{A},M)\models_{EG}\varphi$ si y sólo si $(\mathcal{A}\$^*,M\$^*)\models\varphi\$^*$.
- Existe un conjunto de enunciados de primer orden $[\Delta(\Sigma)]^*\cup\Phi(\Sigma\$)\subseteq$SENT($L_2\$^*$) tal que para cualquier conjunto de fórmulas de segundo orden $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq$FORM($L_2$), existe un conjunto de fórmulas de primer orden [TRANS\$[Γ]]*$\cup\{\varphi\$^*\}\subseteq$FORM($L_2\$^*$) tal que $\Gamma\models_{EG}\varphi$ si y sólo si [TRANS\$[Γ]]*$\cup[\Delta(\Sigma)]^*\cup\Phi(\Sigma\$)\models\varphi\$^*$.

APENDICE 1

El axioma del supremo, el axioma de buen orden, el axioma de inducción, ser infinito o ser finito son ejemplos de propiedades muy usadas –al menos en matemáticas– que no son expresables por medio de una fórmula en un lenguaje de primer orden arbitrario, y sin embargo, si lo son en lenguajes de segundo orden (como se puede ver en la sección desde donde se hace referencia a este apéndice). No es sencillo probar que cierta propiedad no es expresable en ningún lenguaje de primer orden, no obstante, nosotros daremos al menos una prueba completa de una propiedad expresable en segundo orden y no expresable en primer orden:

El enunciado $\exists X(\exists x X(x) \wedge \forall x \forall y[X(x) \wedge A(x,y) \rightarrow \neg(x \approx y) \wedge X(y)])$ (donde X es una variable relacional unitaria, x y y variables individuales y A un símbolo de constante relacional binaria) es conocido como el enunciado Geach-Kaplan (que es simplemente una formalización de la frase "hay críticos que sólo se admiran entre sí", –"some critics admire only one another"–) y no existe una fórmula de primer orden equivalente a él. Para ver esto obsérvese que si substituimos en el enunciado Geach-Kaplan $(x \approx 0) \vee (x \approx y+1)$ en lugar de $A(x,y)$, entonces tenemos la fórmula, de un lenguaje apropiado de segundo orden,

$$\exists X(\exists x X(x) \wedge \forall x \forall y[X(x) \wedge ((x \approx 0) \vee (x \approx y+1)) \rightarrow \neg(x \approx y) \wedge X(y)]) \qquad \text{(GKA)}$$

la cual es verdadera en los modelos no estándar de la aritmética de Peano que tengan elementos que no se obtienen iterando un número finito de veces la operación sucesor sobre el cero, y es falso en el modelo estándar de esta misma:

Sea $\mathcal{T}$ un modelo no-estándar de la aritmética de Peano de primer orden con elementos que no se obtienen iterando un número finito de veces la operación sucesor sobre el cero. Entonces el subconjunto de todos estos elementos del universo de $\mathcal{T}$ no tiene mínimo y hace que $\mathcal{T}$ sea modelo de (GKA).

Sea $\mathcal{A}$ un modelo estándar de la aritmética de Peano de primer orden y sea V un subconjunto arbitrario pero no vacío del universo de $\mathcal{A}$. Por ser $\mathcal{A}$ modelo estándar de la aritmética de Peano de primer orden, entonces V tiene un elemento mínimo; si el mínimo de V es 0, entonces $\mathcal{A}(X/V)$ no es modelo de $(\exists x X(x) \wedge \forall x \forall y[X(x) \wedge ((x \approx 0) \vee (x \approx y+1)) \rightarrow \neg(x \approx y) \wedge X(y)])$. En caso de que el mínimo de V sea g, con $g \neq 0$, entonces $g=w+1$ y por lo tanto $w \notin V$; así, $\mathcal{A}(X/V)$ no es modelo de $(\exists x X(x) \wedge \forall x \forall y[X(x) \wedge ((x \approx 0) \vee (x \approx y+1)) \rightarrow \neg(x \approx y) \wedge X(y)])$. Por lo tanto, en cualquier caso, para todo subconjunto distinto del vacío V del universo de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(X/V)$ no es modelo de $(\exists x X(x) \wedge \forall x \forall y[X(x) \wedge ((x \approx 0) \vee (x \approx y+1)) \rightarrow \neg(x \approx y) \wedge X(y)])$ y por lo tanto $\mathcal{A}$ no es modelo de (GKA).

El que (GKA) sea verdadera en el modelo no estándar $\mathcal{T}$ de la aritmética de Peano de primer orden y falsa en $\mathcal{A}$ implica que (GKA) no tiene un equivalente de primer orden (puesto que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{T}$ son elementalmente equivalentes, es decir, hacen verdaderos a los mismos enunciados de primer orden) y por lo tanto el enunciado de Geach-Kaplan tampoco tiene un equivalente en primer orden.

En general, una manera de probar que una propiedad no es expresable en primer orden es mostrar que tal propiedad es satisfecha por una estructura $\mathcal{A}$ y no lo es por una estructura $\mathcal{B}$, de tal manera que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son elementalmente equivalentes. Esta es la manera en que se probó el ejemplo anterior y también es la manera en que se pueden probar que el axioma de inducción o el axioma del supremo no son expresables en primer orden:

- Un modelo de los números hiperreales es elementalmente equivalente con los números reales y sin embargo, a diferencia de los reales, no cumple el axioma del supremo (por ejemplo, el conjunto de los infinitesimales está acotado superiormente por cualquier real estándar, pero no tiene una cota superior mínima).
- El que se pueda construir una estructura elementalmente equivalente a los números naturales en la cual haya elementos con un número infinito de antecesores implica que, como se mostrará en el capítulo II y a diferencia de los números naturales, no es posible que tal estructura sea modelo del axioma de inducción (de otro modo sería isomorfa a los números naturales y entonces todos sus elementos tendrían un número finito de antecesores).

APENDICE 2

No es fácil proporcionar un lenguaje de segundo orden de un tipo dado y una fórmula de éste que sea *EG*-satisfacible pero que no sea satisfacible por ninguna estructura estándar del mismo tipo. Nosotros mostraremos este hecho apoyados en un par de resultados que no mostraremos:

[b]**Teorema(*)**: Para todo lenguaje de segundo orden L de tipo Σ, existe un cálculo C tal que para todo conjunto de enunciados $\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq$SENT(L),
$\Gamma \vDash_{EG} \varphi$ si y sólo si $\Gamma \vdash_C \varphi$

Por un cálculo o sistema formal S para fórmulas de un lenguaje L de segundo orden entenderemos la definición usual de cálculo para lenguajes de primer orden (véase Amor J.A. [1999]. "Compacidad en la Lógica de Primer Orden y su Relación con el Teorema de Completad", pagina 102) a excepción de que en lugar de manejar fórmulas de primer orden se manejarán fórmulas de L. Entendido lo anterior, se define de la misma manera que en lógica de primer orden el que un cálculo sea correcto y completo; así, el teorema anterior simplemente dice que existe un cálculo C correcto y completo para la *EG*-consecuencia lógica.

Sea L_{PA^2} el lenguaje de segundo orden de tipo Σ_{PA^2} de la aritmética de Peano de segundo orden (es decir, el lenguaje con el que se trabajó a lo largo del capítulo II) y sea $\Pi=\{P_1, P_2, P_3\}$ el conjunto de axiomas de Peano de segundo orden (véase el capítulo II). Además, sea $\mathscr{N}=(N,0,s^{\mathscr{N}})$ el conjunto de los números naturales con el cero y la operación sucesor. Por último, lo único que nos hace falta definir antes de enunciar el proximo teorema es lo siguiente: Dado un lenguaje de segundo orden L de tipo Σ y $\mathscr{A}$ una estructura estándar de tipo Σ, definimos $Teo(\mathscr{A})=\{\varphi\in SENT(L) \mid \mathscr{A} \vDash \varphi\}$.

[c]**Teorema(**)**: Existe un enunciado $\lambda\in SENT(L_{PA^2})$ tal que $\lambda\in Teo(\mathscr{N})$ y tal que no es cierto que $\Pi \vdash_S \lambda$ en ningún cálculo S correcto de segundo orden.

Con los teoremas anteriores es fácil probar que hay una fórmula *EG*-satisfacible que no lo es de manera estándar: Sea λ el enunciado que asegura el teorema(**). Como no es cierto que $\Pi \vdash_C \lambda$ –por el teorema(**)–, entonces no es cierto que $\Pi \vDash_{EG} \lambda$ –por el teorema(*)–; así, existe un *EG*-modelo de Π que no lo es de λ. De esto último concluimos que el conjunto de enunciados $\Pi\cup\{\neg\lambda\}$ es *EG*-satisfacible, es decir, que $P_1\wedge P_2,\wedge P_3\wedge\neg\lambda$ es *EG*-satisfacible. Por otro lado, $P_1\wedge P_2\wedge P_3\wedge\neg\lambda$ no es satisfacible por ninguna estructura estándar de segundo orden, ya que cualquier estructura estándar que satisfaga a $P_1\wedge P_2\wedge P_3$ será isomorfa a $\mathscr{N}$(en el capítulo II se probó que la aritmética de Peano de segundo orden es categórica), por lo que será modelo de los mismos enunciados que $\mathscr{N}$–esto último debido al teorema(i6)– y como $\neg\lambda\notin Teo(\mathscr{N})$, –ya que $\lambda\in Teo(\mathscr{N})$, según el teorema(**)– entonces $P_1\wedge P_2\wedge P_3\wedge\neg\lambda\notin Teo(\mathscr{N})$, y por lo tanto $P_1\wedge P_2\wedge P_3\wedge\neg\lambda$ no es satisfacible por ninguna estructura estándar.

---

[b] Este resultado se prueba en Manzano M.[1996] "Extensions of First Order Logic", pags 70-112; 289-290. Barcelona: Cambridge University Press.

[c] Una prueba de este teorema se puede encontrar en Robbin J.W.[1969] "Mathematical Logic: a First Course", pag 157. New York: W. A. Benjamín.

BIBLIOGRAFÍA

Amor J.A. [1999]. "Compacidad en la Lógica de Primer Orden y su Relación con el Teorema de Completad". México: Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

\- [1999]. "Teoría de Conjuntos para Estudiantes de Ciencias". México: Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Boolos G. [1998]. "On second Order Logic". Logic, Logic and Logic. Harvard University Press

Enderton, H.B. [1972]. "A Mathematical Introduction to Logic". New York: Academic Press.

Jané Ignacio [ ]. "Modelos generales". Barcelona: Tesis doctoral en Filosofía presentada en la Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación de la Universidad de Barcelona.

\- [1993]. "A Critical Appraisal of Second-Order Logic". History and Philosophy of Logic, **14** (1993), pp 67-86

Manzano, M. [1996]. "Extensions of First Order Logic". Barcelona: Cambridge University Press.

Martinez-Vidal C. [2000]. "Second-order Logic, Set Theory and Aprioricity". Logic, Language and Information: Procedings on the first workshop on logic and Language, pp189-196.

Nepomuceno A. [1995]. "Introduction to Second Order Models". The bulletin of the workshop on model theory and complexity, pp19-27

Preisser A. [1983]. "Limitaciones Gödelianas de la Arimética Formalizada". México: Tesis de Licenciatura, UNAM.

Torres Y. [2002] "Teoremas limitativos de la lógica clásica de primer orden". México: Revista Nexos.