



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
CUAUTITLAN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

"MANUAL DE APOYO DIDACTICO PARA LA
ASIGNATURA DE DINAMICA QUE SE IMPARTE EN LA
CARRERA DE INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
P R E S E N T A :
JOSE LUIS MORALES JIMENEZ

ASESOR: IME JUAN MANUEL TORRES MERINO



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION DISCONTINUA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN
UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR
DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES

UNAM
FACULTAD DE ESTUDIOS
SUPERIORES CUAUTITLAN

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS



DR. JUAN ANTONIO MONTARAZ CRESPO
DIRECTOR DE LA FES CUAUTITLAN
P R E S E N T E

ATN: Q. Ma. del Carmen García Mijares
Jefe del Departamento de Exámenes
Profesionales de la FES Cuautitlán

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS:

"Manual de apoyo didáctico para la asignatura de Dinámica
que se imparte en la carrera de Ingeniero Mecánico Electri-
cista"
que presenta El pasante: José Luis Morales Jiménez
con número de cuenta: 09202810-4 para obtener el título de :
Ingeniero Mecánico Electricista

Considerando que dicho trabajo reúne los requisitos necesarios para ser discutido en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO.

ATENTAMENTE

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cuautitlán Izcalli, Méx. a 16 de Mayo de 2002

PRESIDENTE

Ing. Francisco Rodríguez López

VOCAL

Ing. Jaime Rodríguez Martínez

SECRETARIO

Ing. Juan Manuel Torres Merino

PRIMER SUPLENTE

Ing. Ramón Osorio Galicia

SEGUNDO SUPLENTE

Dr. Zbigniew Oziewicz Kwaas

Francisco Rodríguez López
Jaime Rodríguez Martínez
Juan Manuel Torres Merino
Ramón Osorio Galicia
Zbigniew Oziewicz Kwaas

DEDICATORIA

Este trabajo de Tesis te lo dedico a ti Mamá, ya que esto es el reflejo de todo el esfuerzo y sacrificio de tu parte, ya que cada día me inspiras a ser como tú: una persona incansable, perseverante, decidida y comprometida con todo lo que hace. Espero que la confianza que en mí depositaste no haya sido en vano.

Gracias por ser simplemente la mejor.

Con todo mi cariño y respeto:

IME José Luis Morales Jiménez

AGRADECIMIENTOS

A mis Padres:

Que siempre procuraron y han procurado nuestro bienestar, pero en especial a ti Mamá ya que sin tu apoyo no lo hubiese logrado, gracias por ser para mí todo un ejemplo a seguir y gracias por ser mi Madre.

A mis Hermanos:

Hans y Abraham que desde siempre me han apoyado y me han enseñado a ser cada vez una mejor persona.

A Juan Manuel Luján:

Un excelente amigo y un extraordinario ser humano, que siempre me ha apoyado y de quién he aprendido tantas cosas. Que al igual que mi familia siempre estuvo pendiente de mí.

A IME Juan Manuel Torres Merino:

El Asesor de este trabajo, un gran amigo y simplemente el mejor Profesor, el cual confió en mí y me apoyó, además de soportarme durante todo el tiempo que duró esta Tesis.

A la FESC C4 - UNAM:

Que me permitió viajar en sus aulas por el maravilloso mundo del conocimiento al lado de excelentes profesores y al lado de grandes compañeros y amigos.

A DIOS:

Ya que sin Él, simplemente yo no estaría aquí.

Gracias por todo.

Con todo mi cariño y respeto:

IME José Luis Morales Jiménez

ÍNDICE

PÁGINA

Introducción	I
Objetivos	V

CAPÍTULO 1: DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

1.1	Cantidad de movimiento lineal	1
1.2	Segunda Ley de Newton	3
1.3	Ecuaciones de movimiento a partir de la 2ª Ley de Newton con masa constante	5
	1.3.1 Componentes tangencial y normal	6
	1.3.2 Componentes radial y transversal	7
1.4	Ley de gravitación de Newton	8
1.5	Trabajo de la fuerza de un resorte	9
1.6	Energía cinética de una partícula. El principio del trabajo y la energía	12
1.7	Potencia y eficiencia	15
1.8	Fuerzas conservadoras	17
1.9	Cantidad de movimiento angular de una partícula	19
	1.9.1 Conservación de la cantidad de movimiento angular	20
1.10	Problemas resueltos referentes al capítulo 1	22

CAPÍTULO 2: DINÁMICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

2.1	Cantidad de movimiento lineal y angular de un sistema de partículas	40
2.2	Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas	40
2.3	Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas con respecto a su centro de masa	42
2.4	Conservación de la cantidad de movimiento para un sistema de partículas	43
2.5	Energía cinética de un sistema de partículas	44
2.6	Principio del trabajo y la energía. Conservación de energía para un sistema de partículas	45
2.7	Principio del impulso y la cantidad de movimiento para un sistema de partículas	46

2.8	Impacto (Impacto central directo)	47
2.9	Problemas resueltos referentes al capítulo 2	54

CAPÍTULO 3: DINÁMICA DE CUERPO RÍGIDO CON MOVIMIENTO PLANO

3.1	Traslación	77
3.2	Rotación con respecto a un eje fijo	77
3.2.1	Ecuaciones que definen la rotación de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo	79
3.3	Movimiento plano general	80
3.3.1	Velocidad absoluta y velocidad relativa en el movimiento plano	81
3.3.2	Aceleración absoluta y aceleración relativa en el movimiento plano	82
3.4	Ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido	82
3.5	Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en movimiento plano	83
3.6	Movimiento plano de un cuerpo rígido. Principio de D'Alembert	84
3.7	Principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido	86
3.8	Energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano	87
3.9	Conservación de la energía	88
3.10	Potencia	88
3.11	Principio del impulso y la cantidad de movimiento para el movimiento plano de un cuerpo rígido	89
3.12	Conservación de la cantidad de movimiento angular	90
3.13	Problemas resueltos referentes al capítulo 3	92

CAPÍTULO 4: PROBLEMAS PROPUESTOS Y COMPLEMENTARIOS

4.1	Problemas propuestos referentes al capítulo 1	114
4.2	Problemas propuestos referentes al capítulo 2	116
4.3	Problemas propuestos referentes al capítulo 3	118

Conclusiones	120
--------------	-----

Bibliografía	121
--------------	-----

INTRODUCCIÓN

Dinámica es una asignatura que se imparte en el 4° semestre de la Carrera de Ingeniero Mecánico Electricista de la FES Cuautitlán UNAM; es una asignatura común para tres diferentes áreas en que se divide la Carrera, el área Mecánica, Eléctrica-Electrónica y el área Industrial.

Este manual surge de la necesidad de contar con material de apoyo para todas aquellas personas interesadas en profundizar sus conocimientos dentro de esta asignatura, pero de ninguna manera surge como sustituto de ningún libro de texto, sino sólo como un elemento de apoyo o un elemento auxiliar al que el estudiante puede recurrir fácilmente y donde podrá poner término a muchas de sus dudas, o donde simplemente puede encontrar una guía para resolver un problema determinado.

El manual cuenta con teoría básica y con una serie de ejercicios resueltos y propuestos; sin tener la ambigüedad de algunos textos, pues posee la característica distintiva básica de contener notas que generalmente no se encuentran en los libros de texto (nos lleva paso a paso hasta llegar a la correcta solución del problema), dichas notas son los comentarios o la explicación que el Académico da al estar impartiendo su Asignatura, y que la mayoría de las veces uno como estudiante no toma nota debido a la naturaleza de la clase.

Cabe mencionar que el tratamiento de un curso de Dinámica para Ingeniería se fundamenta en la teoría, pero la mayoría de sus ejercicios y problemas son de tipo algebraico y numérico, para que de esta manera se pueda cuantificar el grado de avance de los estudiantes.

Los temas que se abordan en este trabajo de Tesis están contenidos dentro de los siguientes cuatro capítulos:

- 1.- Dinámica de la Partícula
- 2.- Dinámica de un Sistema de Partículas
- 3.- Dinámica de Cuerpo Rígido con Movimiento Plano
- 4.- Problemas Propuestos y Complementarios

El capítulo 1 (*Dinámica de la Partícula*) tiene un campo de estudio muy importante, ya que estudia los fenómenos de la Dinámica mediante diversas técnicas de solución, una de ellas corresponde a la utilización del Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) empleando el cálculo de su aceleración en vez de contar con un desequilibrio de fuerzas externas. Existen otros métodos de solución que están relacionados a partir de las variables, como es el caso de un movimiento ligado a la velocidad y al factor tiempo, para el cual se cuenta con el método del impulso y la cantidad de movimiento lineal a partir de una fuerza impulsiva que presenta una

interacción durante un intervalo de tiempo. El principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal también nos permite analizar problemas de impacto, el cual ocurre cuando dos cuerpos chocan uno contra otro durante un intervalo de tiempo muy corto, haciendo que se ejerzan fuerzas impulsivas relativamente grandes entre los cuerpos.

En este capítulo también se podrá observar también la utilidad de emplear los métodos del principio del trabajo y la energía cinética, donde los términos $1/2m v_2^2 - 1/2m v_1^2$ son cantidades escalares positivas, pues no dependen de la dirección y sentido de la velocidad de la partícula.

En la mayoría de los problemas que conforman este trabajo se tiene un especial interés en cuerpos de tamaño finito como bloques, cajas o vehículos. Tales objetos los podemos considerar como partículas, siempre y cuando su movimiento esté caracterizado por el movimiento de su centro de masa y pueda desprejiciarse cualquier rotación del cuerpo.

De igual forma, emplearemos las ecuaciones de movimiento para resolver problemas que relacionen fuerzas actuando sobre una partícula y el movimiento acelerado que originan, y no debemos olvidar las ecuaciones cinemáticas ya que serán de gran utilidad.

Cabe mencionar que en la mayoría de los problemas que así lo requieren se ha supuesto que el sentido positivo de la aceleración es el mismo que la dirección positiva del eje sobre el cual se realiza el movimiento.

En el capítulo 2 (*Dinámica de un sistema de partículas*) se contemplan ejercicios en los cuales están acoplados dos o más cuerpos, se estudian interacciones parecidas a las estudiadas en el capítulo anterior, de tal manera que se hace una revisión que involucre los diferentes métodos de solución como corresponde a las Leyes de Newton, Impulso y cantidad de movimiento lineal y el principio del trabajo y la energía cinética para un sistema de partículas, el cual puede aplicarse a cada partícula de un sistema de partículas y sumarse los resultados algebraicamente. Cuando las partículas del sistema están unidas por medio de eslabones o cables inextensibles, el trabajo producido por las fuerzas internas es cero, esto se debe a que dichas fuerzas ocurren en parejas de igual magnitud pero de sentido opuesto, y cada par de fuerzas que actúa sobre partículas adyacentes se desplaza en la misma cantidad.

Estos métodos de solución permiten resolver problemas con diversos grados de dificultad y que se adecuan a las habilidades y conocimientos de los estudiantes interesados en el tema, de modo tal que un estudiante que cursa por vez primera la Asignatura no tendrá problemas de ninguna índole para comprender fácilmente la teoría y los ejercicios, y tendrá la capacidad de resolver sin menoscabo los problemas propuestos y complementarios ubicados al final de este trabajo, e incluso podrá resolver problemas de algunos otros textos.

Para el caso del capítulo 3 (*Dinámica de Cuerpo Rígido con Movimiento Plano*) los métodos de solución implican algunas consideraciones que corresponden a movimientos que

presentan rotación en un eje fijo, traslación curvilínea y movimiento plano general, para el cual existen procedimientos equivalentes a los ya estudiados en los capítulos anteriores; además, se tiene la particularidad de dar solución a problemas típicos que le permiten al estudiante introducirse en un contexto sencillo en el estudio en cuestión, donde la respuesta correspondiente a un problema determinado podrá contemplarse a partir del número de variables que involucran su solución.

En los ejercicios se observará que el movimiento plano de un cuerpo rígido se puede especificar completamente si conocemos los movimientos de dos puntos cualesquiera sobre el cuerpo. Para determinar la velocidad y la aceleración de un punto localizado en un cuerpo rígido que está girando alrededor de un eje fijo, primero es necesario conocer la velocidad angular ω y la aceleración angular α del cuerpo.

En múltiples ocasiones la velocidad y las dos componentes de la aceleración pueden determinarse a partir de las ecuaciones escalares $v = \omega r$, $a_t = r \alpha$, $a_n = r \omega^2$, pero cuando la geometría del problema es difícil de visualizar se deben utilizar las ecuaciones vectoriales $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a}_t = \alpha \times \vec{r}$, y $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

Como un cuerpo tiene tamaño y forma definidos, un sistema de fuerzas no concurrentes aplicado puede hacer que el cuerpo se traslade y gire. La rotación producida por los momentos τ están gobernados por la ecuación de la forma $\tau = I \alpha$, donde I es el momento de inercia, el cual es una medida de la resistencia de un cuerpo a acelerarse angularmente, de la misma forma que la masa es una medida de la resistencia del cuerpo a acelerarse linealmente.

Para el capítulo 4 (*Problemas propuestos y complementarios*) se ha hecho una selección de problemas de forma tal que si el estudiante revisa y estudia los problemas de los diferentes capítulos presentados en este trabajo, no tendrá problemas en resolver de manera satisfactoria los ejercicios propuestos, debido a que éstos son muy similares y de hecho algunos son un poco más sencillos para lograr motivar y dar confianza al estudiante a que continúe preparándose cada vez más y mejor. La solución o respuesta de cada uno de los problemas propuestos y complementarios está ubicada en la parte inferior derecha justo debajo del enunciado o del esquema que ilustra el problema (según sea el caso), evitando así la incomodidad de buscar una hoja o página de respuestas en otra parte del trabajo. Al igual que los problemas resueltos ubicados al final de cada capítulo, el capítulo 4 cuenta con problemas en unidades del sistema inglés y del SI, donde el estudiante en ocasiones deberá hacer algunas conversiones para llegar al resultado correcto.

Enseguida se citarán algunas generalidades: "Cinética es el estudio de la relación entre el sistema resultante de fuerzas y el movimiento asociado a los cuerpos que no se encuentran en equilibrio"¹. Esto corresponde a la investigación de sistemas en los cuales el equilibrio

¹ Ingeniería mecánica, Tomo II Dinámica vectorial versión SI, Higdon, A. & Siles, W. 3ª Edición, Prentice Hall.

parte del concepto del cuerpo libre con una metodología sistemática que corresponde a la visualización de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, parte independiente de la cinemática que revive el estudio geométrico de cualquier tipo de movimiento sin considerar los efectos o causas físicas que llegan a producirlo. La dinámica de la partícula reviste especial interés en sistemas en equilibrio en que se involucran diferentes metodologías de estudio y de solución para los diversos casos específicos de ejercicios y problemas.

"El estudio clásico de la cinemática se fundamenta en el estudio de Isaac Newton (1642-1727) en 1687, aunque se denominan Leyes de Newton del Movimiento, se considera que Newton los extrajo de los trabajos científicos de los investigadores entre los constructores de pirámides y sus contemporáneos. Probablemente los descubrimientos más significativos corresponden a Galileo Galilei (1564-1642), quien llevó a efecto experimentos de la caída libre de los cuerpos y del péndulo, demostrando además que varias de las primeras teorías sobre la dinámica eran erróneas."² Las leyes formuladas por Newton aún se reconocen como las leyes básicas de la cinética de Ingeniería.

Unos de los conceptos importantes con los cuales se parte en el estudio de la cinética es el conocimiento del concepto de *masa*, situación nada simple de definir dado que existen diversas maneras de explicarse; una de ellas es la llamada *cantidad de materia contenida en un cuerpo* definición nada correcta tomando en cuenta la definición de *mol*; una definición más apropiada es la concebida mediante la comparación de un objeto utilizando una balanza de aguja empleando medidas patrón a la cual se considera una definición de medida; existiendo otras más dentro de este campo, pero el objeto de estudio de este concepto es el conocido como *medida de la inercia* el cual nos permite introducir de entrada el concepto con el cual el científico Inglés Isaac Newton formula su trabajo como *Principia* publicado en 1687.

Tomando en cuenta la expresión correspondiente al concepto velocidad tenemos como principio su respectiva definición la cual involucra el desplazamiento llevado a cabo por un cuerpo en un determinado intervalo de tiempo; el concepto velocidad implica una expresión matemática llamada *vector*.

Considerando que todo objeto en movimiento cuenta con una masa y que además lleva a cabo un desplazamiento en el entorno o medio en que se desenvuelve podemos garantizar que dicha situación nos ayudaría a expresar la segunda ley de Newton, a partir de conocer el producto de la masa con la velocidad y la razón de cambio que pudiera darse en un momento determinado, y precisamente es este tema con el que comenzaremos este trabajo.

IME José Luis Morales Jiménez

² Ingeniería mecánica, Tomo II Dinámica vectorial versión SI, Higdon, A. & Stiles, W. 3ª Edición. Prentice Hall.

OBJETIVOS

1.- Preparar material didáctico introductorio con el objeto de auxiliar en el estudio de la Asignatura de Dinámica a toda la comunidad estudiantil de IME.

2.- Desarrollar material no contemplado en otros textos, para complementar la formación del estudiante de la Carrera de Ingeniero Mecánico Electricista.

3.- Preparar material que sirva como texto de estudio para los diferentes interesados en el tema.

CAPÍTULO 1

“DINÁMICA DE LA PARTÍCULA”

1.1 CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

Se tiene un sistema en el cual $\vec{F} = ma$, ecuación que surge del planteamiento de una expresión básica $\vec{p} = m\vec{v}$, donde \vec{p} es la cantidad de movimiento lineal, m la masa y \vec{v} la velocidad. La ecuación

$$\vec{p} = m\vec{v} \dots(1.1.1)$$

tiene como unidades [kg m/s], donde el factor m es el valor de la masa cuantificada por el procedimiento de la balanza de aguja (masa comparada) y v es la velocidad tomada en consideración, que está expresada en una cantidad escalar.

El uso de la expresión matemática "vector", nos permite describir el concepto de velocidad como una función vectorial, la cual en el caso de las coordenadas rectangulares es

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \dots(1.1.2)$$

cuyas unidades son m/s.

El producto de la masa y la velocidad nos entrega una serie de valores como se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{v} = m(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \\ \vec{p} &= m v_x \hat{i} + m v_y \hat{j} + m v_z \hat{k} \dots(1.1.3) \end{aligned}$$

y cuyas componentes de la cantidad de movimiento lineal son

$$\vec{p} = p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k} \dots(1.1.4)$$

Igualando esta última ecuación con la ecuación (1.1.3) tenemos

$$p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k} = m v_x \hat{i} + m v_y \hat{j} + m v_z \hat{k}$$

comparando término a término la ecuación anterior llegamos a

$$p_x = m v_x \dots(1.1.5a) \quad p_y = m v_y \dots(1.1.5b) \quad p_z = m v_z \dots(1.1.5c)$$

de tal manera que esto es válido para una partícula que está en movimiento y se desea calcular su ímpetu lineal.

Cuando un cuerpo "sufre" un cambio en su velocidad, $\Delta \vec{v}$, se puede apreciar un cambio en su momentum lineal $\Delta \vec{p}$, de tal manera que si comparamos su cantidad de movimiento lineal inicial $\vec{p}_i = m \vec{v}_i$ con la cantidad de movimiento lineal final $\vec{p}_r = m \vec{v}_r$ tenemos que

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_r - \vec{p}_i \quad \dots(1.1.6)$$

De modo que otra forma de escribir la ecuación (1.1.6) es

$$\Delta \vec{p} = m_r \vec{v}_r - m_i \vec{v}_i \quad \dots(1.1.7)$$

Si consideramos que la masa se mantiene constante, es decir, $m_r = m_i = m$, la ecuación (1.1.7) la podemos escribir como

$$\Delta \vec{p} = m (\vec{v}_r - \vec{v}_i) .$$

$$\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v} \quad \dots(1.1.8)$$

Si se contempla que el $\Delta \vec{p}$ se efectuó en un intervalo de tiempo Δt podemos tener una expresión conocida como *fuerza promedio* la cual simbolizamos como \bar{F}

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \bar{F} = \frac{m \Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

que no es otra que la expresión de la 2ª Ley de Newton.

La ecuación anterior la podemos escribir como

$$F = \frac{dp}{dt} \quad \dots(1.1.9)$$

la cual corresponde a la "verdadera" Segunda Ley de Newton (expresión definida para un modelo escalar). Euler replantea dicha ecuación de manera reescribiéndola como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \dots(1.1.10)$$

sustituyendo la ecuación (1.1.4) en (1.1.10)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d}{dt} (p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k}) \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{dp_x}{dt} \hat{i} + \frac{dp_y}{dt} \hat{j} + \frac{dp_z}{dt} \hat{k} \dots(1.1.11) \end{aligned}$$

De modo que la ecuación (1.1.11) la podemos escribir como

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \dots(1.1.12)$$

Comparando término a término las ecuaciones (1.1.11) y (1.1.12) tenemos

$$F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = \frac{dp_x}{dt} \hat{i} + \frac{dp_y}{dt} \hat{j} + \frac{dp_z}{dt} \hat{k}$$

De tal modo que podemos escribir

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} \dots(1.1.13a) \quad F_y = \frac{dp_y}{dt} \dots(1.1.13b) \quad F_z = \frac{dp_z}{dt} \dots(1.1.13c)$$

componente a componente puede apreciarse que la expresión que define a la fuerza (Segunda ley de Newton), corresponde a la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal.

1.2 SEGUNDA LEY DE NEWTON

Esta ley establece que si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula no es nula, la partícula adquiere una aceleración de módulo proporcional a la fuerza resultante y en la misma dirección y sentido.

Podemos entender mejor esta ley si consideramos una partícula sujeta a una fuerza \vec{F}_1 de dirección constante y magnitud también constante F_1 . Bajo la acción de esta fuerza, la partícula se mueve en línea recta y en la dirección de la fuerza (figura 1.2.1a).

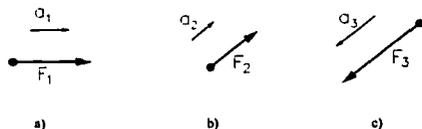


Figura 1.2.1

Determinando la posición de la partícula en diferentes instantes, encontramos que su aceleración tiene una magnitud constante a_1 . Si repetimos lo anterior con las fuerzas $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ de magnitud o dirección diferentes (figuras 1.2.1b y c), siempre se encuentra que la partícula se mueve en la dirección de la fuerza que actúa sobre ella y que las magnitudes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ de las aceleraciones son proporcionales a las magnitudes $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ de las fuerzas correspondientes, es decir

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = \frac{F_n}{a_n} = \text{cte} \dots (1.2.1)$$

La constante obtenida es la masa de la partícula y la representamos por m . Cuando una partícula de masa m está sujeta a una fuerza \vec{F} , esta fuerza y la aceleración \vec{a} de la partícula deben satisfacer la siguiente ecuación:

$$\vec{F} = m\vec{a} \dots (1.2.2)$$

La ecuación (1.2.2) es válida aún cuando \vec{F} no es constante pero varíe en el tiempo, en módulo, dirección y sentido.

Si la partícula está sometida a la acción de diversas fuerzas, la ecuación (1.2.2) debe reemplazarse por

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \dots (1.2.3)$$

donde el término del lado derecho representa la resultante, de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

Debe destacarse que el sistema de ejes respecto de los cuales se determina la aceleración \bar{a} no es arbitrario, pues estos ejes deben tener la orientación constante con respecto a las estrellas y su origen debe estar fijo al Sol (más exactamente al centro de masa del sistema solar) o debe moverse con una velocidad constante respecto a éste. A tal sistema de ejes se le llama *sistema de referencia newtoniano o inercial*. Un sistema de ejes fijo a la Tierra no constituye un sistema de referencia newtoniano, porque la tierra gira respecto de las estrellas y está acelerado respecto del Sol. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones de Ingeniería, la aceleración \bar{a} puede determinarse respecto de ejes fijos a la Tierra, y las ecuaciones (1.2.2) y (1.2.3) pueden usarse sin error apreciable. Por otro lado, estas ecuaciones no se cumplen si \bar{a} representa una aceleración relativa medida respecto de ejes en movimiento, como los ejes unidos a un vehículo acelerado o a una pieza de maquinaria en rotación.

1.3 ECUACIONES DE MOVIMIENTO A PARTIR DE LA 2ª LEY DE NEWTON CON MASA CONSTANTE

Comenzaremos este análisis recurriendo a la ecuación (1.2.3), la cual nos dice que

$$\sum \bar{F} = m \bar{a} \quad \dots(1.2.3)$$

Descomponiendo la ecuación (1.2.3) en sus componentes rectangulares tenemos

$$\sum (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) = m(a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \quad \dots(1.3.1)$$

donde igualando término a término tenemos:

$$\sum F_x = m a_x \quad \dots(1.3.1a) \quad \sum F_y = m a_y \quad \dots(1.3.1b) \quad \sum F_z = m a_z \quad \dots(1.3.1c)$$

tomando en cuenta que las componentes de la aceleración son iguales a las segundas derivadas de las coordenadas de la partícula, tenemos que

$$\sum F_x = m \ddot{x} \quad \dots(1.3.2a) \quad \sum F_y = m \ddot{y} \quad \dots(1.3.2b) \quad \sum F_z = m \ddot{z} \quad \dots(1.3.2c)$$

* *Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica*, Beer, Ferdinand P. & Johnston, E. R. 6ª Edición, McGraw-Hill.

Tomando como ejemplo el movimiento de un proyectil al ser disparado, si se desprecia la resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre él es su propio peso, así que escribimos

$$\vec{W} = -W\hat{j} \dots(1.3.3)$$

donde de acuerdo a las ecuaciones (1.3.2) las ecuaciones de movimiento son:

$$m\ddot{x} = 0 \quad m\ddot{y} = -W \quad m\ddot{z} = 0$$

y las componentes de la aceleración del proyectil resultan

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = -\frac{W}{m} = -g \quad \ddot{z} = 0$$

donde g es la aceleración de la gravedad que equivale a 9.8 m/s^2 en el SI y 32.2 ft/s^2 en el Sistema Inglés.

1.3.1 COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL

Si observamos la figura (1.3.1.1) podemos observar las componentes de la fuerza y aceleración de una partícula, sus componentes a lo largo de la tangente a la trayectoria de la partícula (y en la dirección del movimiento) y la normal (hacia el interior de la trayectoria), y sustituyendo en la ecuación (1.2.3) obtenemos las siguientes dos ecuaciones escalares

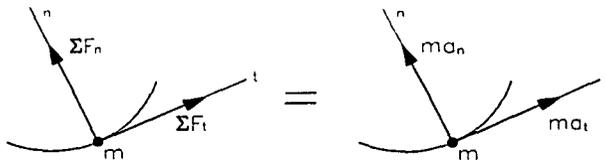


Figura 1.3.1.1

$$\sum F_t = m a_t \dots(1.3.1.1)$$

$$\sum F_n = m a_n \dots(1.3.1.2)$$

donde sabemos que

$$a_r = \frac{dv}{dt} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{v^2}{r}$$

sustituyendo respectivamente estas dos últimas ecuaciones en (1.3.1.1) y (1.3.1.2) tenemos

$$\sum F_t = m \frac{dv}{dt} \quad \dots(1.3.1.3)$$

$$\sum F_n = m \frac{v^2}{r} \quad \dots(1.3.1.4)$$

1.3.2 COMPONENTES RADIAL Y TRANSVERSAL

Consideremos una partícula P de coordenadas polares r y θ , que se mueve en un plano bajo la acción de varias fuerzas. Si descomponemos las fuerzas y la aceleración de la partícula en sus componentes radial y transversal (figura 1.3.2.1) y sustituyendo en la ecuación (1.2.3), obtenemos las dos ecuaciones escalares

$$\sum F_r = m a_r \quad \dots(1.3.2.1)$$

$$\sum F_\theta = m a_\theta \quad \dots(1.3.2.2)$$

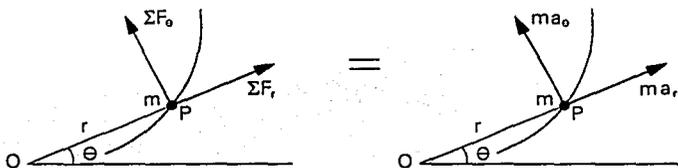


Figura 1.3.2.1

Sabemos que las componentes escalares de la aceleración en las direcciones radial y transversal, respectivamente, son

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

sustituyendo las ecuaciones anteriores en (1.3.2.1) y (1.3.2.2) tenemos

$$\sum F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad \dots(1.3.2.3)$$

$$\sum F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad \dots(1.3.2.4)$$

donde estas dos últimas ecuaciones pueden resolverse para dos incógnitas.

1.4 LEY DE LA GRAVITACIÓN DE NEWTON

Newton en su ley de la gravitación universal, establece que dos partículas de masas M y m , separadas una distancia r , se atraen mutuamente con fuerzas iguales y opuestas \vec{F} y $-\vec{F}$ dirigidas a lo largo de la línea que une a las partículas (figura 1.4.1).

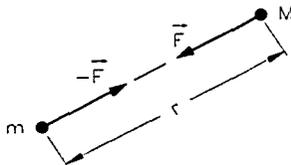


Figura 1.4.1

La magnitud común F de las dos fuerzas es

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \dots(1.4.1)$$

donde G es una constante universal, llamada *constante de gravitación*. Los expertos han demostrado que el valor de G es $(66.73 \pm 0.03) \times 10^{-12} \text{ m}^3 / \text{kg} \cdot \text{s}^2$ en las unidades del SI, o aproximadamente $34.4 \times 10^{-9} \text{ ft}^4 / \text{lb} \cdot \text{s}^2$ en las unidades del sistema Inglés. Aunque las fuerzas gravitacionales existen entre cualquier par de cuerpos, su efecto es apreciable únicamente cuando uno de ellos tiene una masa muy grande comparada con el otro. El efecto de las fuerzas gravitacionales queda de manifiesto en el caso del movimiento de un planeta alrededor del Sol, de los satélites que giran alrededor de la tierra o de los cuerpos que caen de la superficie de nuestra planeta.

La fuerza que la tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m localizado en el espacio a una distancia r de su centro, puede encontrarse a partir de la ecuación (1.4.1).

Como la fuerza que ejerce la tierra sobre un cuerpo de masa m localizado sobre su superficie o cerca de ella, está definida por el peso \vec{W} del cuerpo, en la ecuación (1.4.1) podemos sustituir la magnitud $W = mg$ del peso por F , y el radio de R de la tierra por r , de modo que llegamos a

$$W = mg = \frac{GM}{R^2} m \dots(1.4.2)$$

* Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica, Beer, Ferdinand P. & Johnston, E. R. 6ª Edición. McGraw-Hill.

donde M es la masa de la tierra. Como la tierra no es totalmente esférica, la distancia R desde su centro depende del punto seleccionado sobre su superficie, y los valores de W y g varían con la altitud y la latitud del punto considerado. Otra razón por la que W y g varían con la latitud es que un sistema de ejes fijó a la tierra no constituye un sistema de referencia newtoniano, de modo que una definición más exacta del peso de un cuerpo debe incluir una componente que represente la fuerza centrífuga provocada por la rotación de la tierra. Los valores de g al nivel del mar varían desde 9.781 m/s^2 (32.09 ft/s^2) en el ecuador, hasta 9.833 m/s^2 (32.26 ft/s^2) en los polos. Para la solución de los problemas y ejercicios planteados en este trabajo tomaremos el valor promedio de $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ (32.2 ft/s^2).

Frecuentemente, el descubrimiento de la ley de la gravitación universal se ha atribuido al supuesto de que, después de observar una manzana que caía de un árbol, Newton reflexionó que la tierra debía atraer a una manzana y a la Luna de la misma forma. Se puede decir que Newton no habría formulado su ley, si antes no hubiera percibido que la aceleración de un cuerpo que cae y la aceleración que mantiene a la Luna en su órbita tienen la misma causa.*

1.5 TRABAJO DE LA FUERZA DE UN RESORTE

El trabajo de la fuerza de un resorte, conlleva a estudiar el caso del comportamiento de una fuerza en función de su desplazamiento, el cual corresponde a una ley llamada "Ley de Hooke", $F = kr$, en donde F es la fuerza aplicada y la respuesta correspondiente al resorte, aplicando con ello la 3ª Ley de Newton. Una gráfica del comportamiento de la fuerza de respuesta de un resorte versus el desplazamiento (figura 1.5.1), nos muestra una gráfica de una línea recta que cruza por el origen y que tiene como valor de la pendiente el módulo de elasticidad del resorte k .

El trabajo de un resorte puede encontrarse calculando el área del trapecio mostrado (figura 1.5.1).

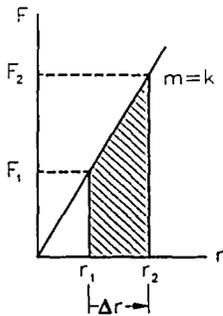


Figura 1.5.1

* Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica, Beer, Ferdinand P. & Johnston, E. R. 6ª Edición. McGraw-Hill.

Si estudiáramos el comportamiento de un resorte tenemos que el valor del mismo tiene una longitud libre l_0 .

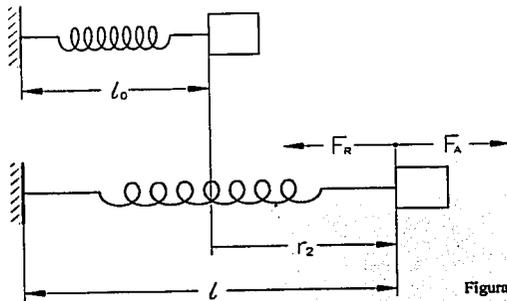


Figura 1.5.2

De la figura 1.5.2 podemos apreciar que

$$r_2 = l - l_0$$

y que

$$l > l_0$$

es decir, el resorte está sometido a tensión, donde

l_0 = longitud libre del resorte

l = longitud deformada del resorte

F_R = fuerza del resorte

F_A = fuerza aplicada

r_2 = deformación del resorte medida cuando sobre él actúa alguna carga

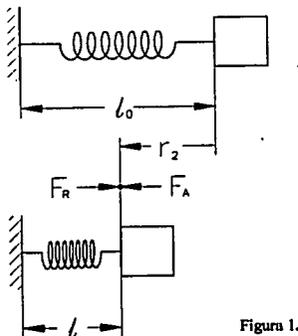


Figura 1.5.3

De la figura 1.5.3 podemos apreciar que

$$r_2 = l - l_0$$

y también que

$$l < l_0$$

es decir, el resorte está sometido a compresión.

Si deseamos calcular el trabajo del resorte, sabemos que el trabajo se define como

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \dots(1.5.1)$$

Para el caso de la fuerza del resorte, la cual como se ilustra en las figuras, es opuesta al desplazamiento, tenemos que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F dr$$

$$\text{donde } F = k r$$

$$W_{(1 \rightarrow 2)_R} = \int_{r_1}^{r_2} -k r dr = -k \int_{r_1}^{r_2} r dr = -\left[\frac{k r^2}{2} \right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{k}{2} [r_2^2 - r_1^2]$$

$$\therefore W_{(1 \rightarrow 2)_R} = -\frac{k}{2} [r_2^2 - r_1^2] \dots(1.5.2)$$

Para el caso de una fuerza aplicada, el trabajo de dicha fuerza en el sentido y dirección del desplazamiento es

$$W_{(1 \rightarrow 2)_A} = \int_{r_1}^{r_2} k r dr = k \int_{r_1}^{r_2} r dr = \left[\frac{k r^2}{2} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{k r_2^2}{2} - \frac{k r_1^2}{2}$$

$$\therefore W_{(1 \rightarrow 2)_A} = \frac{k}{2} [r_2^2 - r_1^2] \dots(1.5.3)$$

De las ecuaciones (1.5.2) y (1.5.3) podemos notar que

$$W_{(1 \rightarrow 2)_A} = -W_{(1 \rightarrow 2)_R}$$

donde los subíndices A y R corresponden a la fuerza aplicada y a la fuerza del resorte, respectivamente.

1.6 ENERGÍA CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA. EL PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA.

Consideremos una partícula de masa m , sobre la que actúa una fuerza \vec{F} , y que se mueve a lo largo de una trayectoria que puede ser rectilínea o curvilínea (figura 1.6.1).

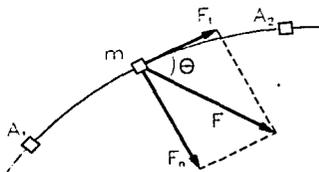


Figura 1.6.1

Expresando la segunda ley de Newton en función de las componentes tangenciales de la fuerza y de la aceleración escribimos

$$F_t = m a_t = m \frac{dv}{dt}$$

del movimiento curvilíneo de partículas podemos escribir

$$F_t = m \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = m v \frac{dv}{dr}$$

$$F_t dr = m v dv \quad \dots(1.6.1)$$

Integrando desde A_1 (donde $r = r_1$ y $v = v_1$) a A_2 (donde $r = r_2$ y $v = v_2$), tenemos

$$\int_{r_1}^{r_2} F_t \, dr = m \int_{v_1}^{v_2} v \, dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \dots(1.6.2)$$

El lado izquierdo de la ecuación (1.6.2) representa el trabajo $W_{1 \rightarrow 2}$ de la fuerza \vec{F} ejercida sobre la partícula durante el desplazamiento de A_1 a A_2 , y es una cantidad escalar. La expresión

$$\frac{1}{2} m v^2$$

también es una cantidad escalar, la cual se define como la energía cinética de la partícula, y se representa por T . De modo que

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \dots(1.6.3)$$

sustituyendo la ecuación (1.6.3) en (1.6.2) tenemos

$$W_{1 \rightarrow 2} = \Delta T = T_2 - T_1 \dots(1.6.4)$$

donde la ecuación (1.6.4) expresa que cuando una partícula se mueve de A_1 a A_2 bajo la acción de una fuerza \vec{F} , *el trabajo de la fuerza \vec{F} es igual al cambio en la energía cinética de la partícula.* Esto se conoce como el *Principio del trabajo y la energía cinética.*

Al igual que la segunda ley de Newton, el principio del trabajo y la energía se aplica sólo respecto a un sistema de referencia newtoniano.

Como el trabajo y la energía cinética son cantidades escalares, su suma debe calcularse como una suma algebraica ordinaria; el trabajo $W_{1 \rightarrow 2}$ dependiendo de la dirección de \vec{F} se considera positivo o negativo. Cuando actúan varias fuerzas sobre la partícula, la expresión $W_{1 \rightarrow 2}$ representa el trabajo total de las fuerzas, el cual se obtiene sumando algebraicamente el trabajo realizado por cada una de las de las distintas fuerzas que actúan sobre el sistema.

La energía cinética T de una partícula es siempre positiva, sin importar la dirección del movimiento, y representa también la capacidad de realizar trabajo, asociado a la rapidez de la partícula.

El trabajo efectuado por la fuerza \vec{F} durante un desplazamiento se define por el producto escalar:

* Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica, Beer, Ferdinand P. & Johnston, E. R. 6ª Edición. McGraw-Hill.

$$dW = F r \cos \theta \dots(1.6.5)$$

donde

W = trabajo

F = fuerza

r = desplazamiento

θ = ángulo entre la fuerza y el desplazamiento

Por definición vectorial

$$F r \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

El trabajo es igual al producto del desplazamiento por la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento.

El trabajo es el producto escalar de dos vectores, el vector fuerza y el vector desplazamiento

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

donde el trabajo lo podemos escribir también como

$$\int_{W_1}^{W_2} dW = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Resolviendo la integral anterior tenemos

$$W_2 - W_1 = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$= (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot [(x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j} + (z_2 - z_1) \hat{k}] \dots(1.6.6)$$

donde

$$x_2 - x_1 = x$$

$$y_2 - y_1 = y$$

$$z_2 - z_1 = z$$

De tal modo que la ecuación (1.6.6) la podemos escribir como

$$W_2 - W_1 = F_x x + F_y y + F_z z$$

$$\Delta W = F_x x + F_y y + F_z z \dots(1.6.7)$$

Las siguientes aseveraciones corresponden a la interpretación del trabajo a partir del ángulo entre la fuerza aplicada y el desplazamiento:

(1) El trabajo es máximo cuando

$$\theta = 0^\circ$$

(2) El trabajo es nulo cuando

$$\theta = 90^\circ$$

(3) El Trabajo es negativo cuando

$$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$$

(4) El Trabajo es positivo cuando

$$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$$

1.7 POTENCIA Y EFICIENCIA

En aplicaciones de Ingeniería y mecanismos es importante conocer la rapidez del trabajo efectuado, es decir, la potencia P, la cual se define como:

$$P = \frac{W}{t} \dots(1.7.1)$$

donde

W = trabajo y t = tiempo

Al diseñar una máquina se considera la rapidez con la que puede efectuar un trabajo, así como la cantidad total de trabajo que puede desarrollar.

La *potencia promedio* \bar{P} está definida como

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W_2 - W_1}{t_2 - t_1} \dots(1.7.2)$$

cuando Δt es tan pequeño que tiende a cero, obtenemos el límite

$$P_{ins} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \dots(1.7.3)$$

la cual se define como *potencia instantánea*, donde sabemos que $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, esto lo podemos sustituir en la ecuación (1.7.3) de modo que llegamos a

$$P_{ins} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \dots(1.7.4)$$

Para determinar las unidades de la potencia en el SI, vemos que el trabajo está en términos del producto de la fuerza (la cual se mide en Newton [N]) y la distancia (medida en [m]), y el tiempo se mide en segundos [s], así que haciendo el análisis dimensional escribimos

$$P = \frac{W}{t} = \left[\frac{N \cdot m}{s} \right] \left[\frac{J}{N \cdot m} \right] \left[\frac{W \text{ (Watt)}}{J/s} \right]$$

mientras que en el sistema Inglés, la potencia se mide en [hp] donde $\left[\frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ lb ft/s}} \right]$.

La *eficiencia mecánica* η de una máquina se define como el cociente del trabajo de salida entre el trabajo de entrada:

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \dots(1.7.5)$$

Esta definición está basada en la suposición de que el trabajo se realiza a una razón constante. El cociente del trabajo de salida entre el de entrada es, por lo tanto, igual al cociente de las razones con las que se realizan, de modo que

$$\eta = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \dots(1.7.6)$$

Debido a que se pierde energía por causa de la fricción, el trabajo de salida siempre es menor que el de entrada y, por tanto, la potencia de salida siempre es menor que la potencia de entrada, de tal modo que la eficiencia mecánica de una máquina es siempre menor que 1.

1.8 FUERZAS CONSERVADORAS

Se dice que una fuerza \vec{F} que actúa sobre una partícula A es conservadora si su trabajo $W_{1 \rightarrow 2}$ es independiente de la trayectoria seguida por la partícula A al moverse de A_1 a A_2 , de tal modo que escribimos

$$W_{1 \rightarrow 2} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) \dots(1.8.1)$$

o en forma condensada

$$W_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \dots(1.8.2)$$

donde la función $V(x, y, z)$ es llamada energía potencial, o *función potencial* de \vec{F} .

Aplicando la ecuación (1.8.1) entre dos puntos vecinos A (x, y, z) y A' ($x + dx, y + dy, z + dz$), el trabajo elemental dW correspondiente al desplazamiento $d\vec{r}$ desde A hasta A', es

$$dW = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz)$$

$$dW = -dV(x, y, z) \dots(1.8.3)$$

de tal manera que el trabajo elemental de una fuerza conservadora es una *diferencial exacta*.

El trabajo dW lo podemos expresar también en función de las componentes rectangulares de la fuerza y del desplazamiento:

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz \dots(1.8.4)$$

Sustituyendo la ecuación (1.8.4) en la ecuación (1.8.3) y usando la definición de la diferencial de una función de varias variables podemos escribir

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right) \dots(1.8.5)$$

de donde podemos deducir que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \dots(1.8.6a)$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \dots(1.8.6b)$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \dots(1.8.6c)$$

Debe aclararse que las componentes de \vec{F} deben ser funciones de las coordenadas x , y , z . De modo que una *condición necesaria* para una fuerza conservadora es que dependa sólo de la posición de su punto de aplicación, de tal manera que las relaciones (1.8.6) pueden expresarse más concisamente escribiendo

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}\right) \dots(1.8.7)$$

El término del lado derecho que está entre paréntesis es un vector que se conoce como *gradiente de la función escalar* V , y se representa con $\text{grad } V$. De tal forma que, para cualquier fuerza conservadora escribimos

$$\vec{F} = -\text{grad } V \dots(1.8.8)$$

Podemos concluir que si una fuerza \vec{F} satisface al menos una de las ecuaciones mencionadas en esta sección, la fuerza \vec{F} debe ser conservadora.

1.9 CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

Consideremos una partícula P de masa m, que se mueve respecto de un sistema de referencia newtoniano Oxyz. Como vimos en la sección 1.1, la cantidad de movimiento lineal \vec{p} está definida como $m\vec{v}$ que se obtiene al multiplicar la masa m de la partícula por su velocidad \vec{v} . Al momento del vector $m\vec{v}$ respecto a O se le llama *momento de la cantidad de movimiento*, o *cantidad de movimiento angular*, de la partícula alrededor de O en ese instante y se representa con \vec{L}_O . El momento de un vector lo escribimos como

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} \dots(1.9.1)$$

donde \vec{r} es el vector de posición de P y observamos que \vec{L}_O es un vector perpendicular al plano que contiene a \vec{r} y a $m\vec{v}$, cuya magnitud es

$$|\vec{L}_O| = r m v \sin \theta \dots(1.9.2)$$

donde θ es el ángulo entre \vec{r} y $m\vec{v}$ (figura 1.9.1), y el sentido de \vec{L}_O puede determinarse a partir del sentido de $m\vec{v}$ aplicando la regla de la mano derecha.

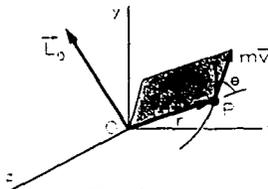


Figura 1.9.1

Las unidades de la cantidad de movimiento angular se obtienen multiplicando las unidades de longitud y de la cantidad de movimiento lineal, de modo que en el SI tenemos

$$m(\text{kg} \cdot \text{m} / \text{s}) = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$$

mientras que para el sistema inglés son

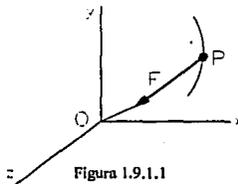
$$\text{ft}(\text{lb} \cdot \text{ft} / \text{s}) = \text{lb} \cdot \text{ft}^2 / \text{s}$$

La siguiente ecuación (1.9.3) resulta directamente de la segunda ley de Newton, y establece que la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la partícula alrededor de O es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular de la partícula alrededor de O.

$$\sum \bar{\tau}_O = \dot{\bar{L}}_O \dots(1.9.3)$$

1.9.1 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Cuando la única fuerza que actúa sobre una partícula P es una fuerza \bar{F} dirigida hacia fuera o hacia dentro de un punto fijo O, se dice que la partícula se está moviendo *bajo la acción de una fuerza central*, y al punto O se le llama *centro de la fuerza* (figura 1.9.1.1). Como la línea de acción de \bar{F} pasa por O, debemos tener $\sum \bar{\tau}_O = 0$ en cualquier instante.



Sustituyendo en la ecuación (1.9.3), tenemos

$$\dot{\bar{L}}_O = 0 \dots(1.9.1.1)$$

para todos los valores de t, e integrando en t,

$$\bar{L}_O = \text{cte} \dots(1.9.1.2)$$

De tal forma que concluimos que *la cantidad de movimiento angular de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central, es constante, tanto en magnitud como en dirección.*

* Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica, Beer, Ferdinand P. & Johnston, E. R. 6ª Edición. McGraw - Hill.

De la definición de la cantidad de movimiento angular de una partícula tenemos

$$\vec{r} \times m \vec{v} = \vec{L}_O = \text{cte} \dots(1.9.1.3)$$

de donde se sigue que el valor del vector de posición \vec{r} de la partícula P debe ser perpendicular al vector constante \vec{L}_O . Así, una partícula sujeta a una fuerza central se mueve en un plano fijo perpendicular a \vec{L}_O .

Problema 1.1

El pasado 11 de Septiembre de 2001, entre las 8:00 y las 10:00 h, sucedieron hechos que impactaron a nuestro mundo occidental. El buen Osama Bin Laden presumiblemente orquestó actos terroristas en Nueva York, estos hechos permiten arrancar con los problemas de este trabajo de tesis.

El Boeing 757 viajaba a una velocidad de crucero de 900 mi/h y contaba con una masa de 200 toneladas (información mencionada en el programa Discovery Channel en Cablevisión), calcule la cantidad de movimiento lineal de la aeronave.

La cantidad de movimiento lineal correspondiente del Boeing la calculamos con la siguiente ecuación:

$$p = m v \dots(1.1.1)$$

Evaluando numéricamente en (1.1.1) tenemos

$$p = 200 \text{ ton} \left(\frac{1000 \text{ kg}}{1 \text{ ton}} \right) \left(\frac{900 \text{ mi}}{\text{h}} \right) \left(\frac{1609 \text{ m}}{1 \text{ mi}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \left(\frac{1 \text{ N}}{\text{kg m/s}^2} \right) \left(\frac{\text{M}}{10^6} \right)$$

$$\therefore p = 80.45 \text{ MN} \cdot \text{s}$$

Problema 1.2

El cuerpo A de 2 kg representado en la figura 1.2.1 posee una velocidad inicial de 5 m/s en el sentido de ascenso sobre el plano. El coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es 0.2. La transición entre la superficie inclinada y la superficie horizontal es gradual. Localice la posición final de reposo del bloque.

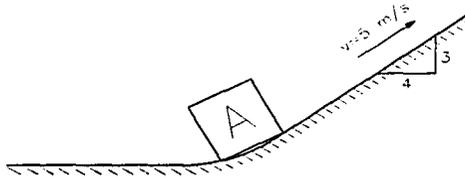
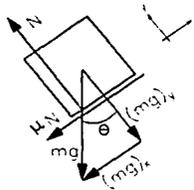


Figura 1.2.1

Para encontrar la solución de este ejercicio debemos analizar tres etapas, la primera de ellas se da cuando el bloque va hacia arriba del plano inclinado; la segunda cuando el bloque desciende del plano inclinado y la tercera cuando el bloque se desplaza sobre el plano horizontal moviéndose a la izquierda de la figura mostrada.

Analizando la primera etapa, dibujamos su correspondiente D.C.L. donde el peso se ha descompuesto en sus componentes rectangulares, la fuerza normal se muestra perpendicular a la superficie de contacto y la fuerza de fricción en sentido opuesto al movimiento del bloque.



Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje y y del sistema de referencia mostrado tenemos que

$$F_y = N - (mg)_y = ma_y = 0 \dots(1.2.1)$$

$$N = (mg)_y \dots(1.2.1')$$

vemos que

$$(mg)_y = mg \cos \theta$$

$$\therefore N = mg \cos \theta \dots(1.2.1'')$$

cabe señalar que la ecuación (1.2.1) se igualó con cero debido a que la aceleración es nula sobre el eje y rotado, pues el movimiento se da exclusivamente sobre el eje x rotado.

Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje x rotado vemos que

$$F_x = -\mu N - (mg)_x = ma_x \dots(1.2.2)$$

$$\text{donde } (mg)_x = mg \sin \theta \dots(1.2.2')$$

sustituyendo las ecuaciones (1.2.1'') y (1.2.2') en (1.2.2)

$$F_x = -\mu mg \cos \theta - mg \sin \theta = ma_x \dots(1.2.3)$$

$$F_x = -mg (\mu \cos \theta + \sin \theta) = ma_x \dots(1.2.3')$$

$$\therefore a_x = -g (\mu \cos \theta + \sin \theta) \dots(1.2.4)$$

De las ecuaciones cinemáticas sabemos que

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a \Delta r \dots(1.2.5)$$

$$\Delta r = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} \dots(1.2.6)$$

Podemos apreciar que la velocidad final del bloque es cero puesto que va a llegar a un punto máximo donde se detendrá y comenzará la segunda etapa del problema, precisamente el descenso. El término Δr es la distancia que habrá recorrido el bloque en el sentido de ascenso hasta que se detiene.

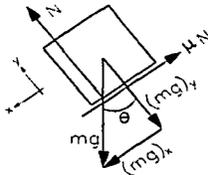
Sustituyendo (1.2.4) en (1.2.6) y evaluando numéricamente tenemos

$$\therefore \Delta r = \frac{v_f^2 - v_i^2}{-2g (\mu \cos \theta + \sin \theta)} = \frac{\left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{-(2) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) [(0.2)(0.8) + 0.6]}$$

$$\therefore \Delta r = 1.6783 \text{ m}$$

Analizaremos ahora la segunda etapa del problema, es decir, cuando el bloque ha llegado al punto más alto y comienza a descender.

El D.C.L. es muy parecido al anterior, sólo cambia el sentido de la fuerza de fricción y también el sistema de referencia, el cual considera positivo al eje x hacia donde se realiza el movimiento, es decir, hacia abajo del plano inclinado.



Podemos apreciar que las ecuaciones (1.2.1') y (1.2.1'') obtenidas anteriormente también son válidas para éste caso, pues las fuerzas que actúan a lo largo del eje y permanecen constantes.

Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje x del sistema de referencia mostrado tenemos que

$$F_x = (mg)_x - \mu N = ma_x \dots(1.2.7)$$

$$\begin{aligned} F_x &= mg \operatorname{sen} \theta - \mu mg \cos \theta = ma_x \dots(1.2.7') \\ &= mg (\operatorname{sen} \theta - \mu \cos \theta) = ma_x \end{aligned}$$

$$\therefore a_x = g (\operatorname{sen} \theta - \mu \cos \theta) \dots(1.2.8)$$

Despejando la v_r de la ecuación (1.2.5) escribimos

$$v_r = \sqrt{2a \Delta r + v_i^2} \dots(1.2.5')$$

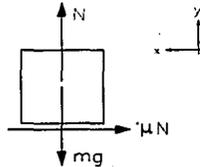
Sustituyendo (1.2.8) en (1.2.5') y evaluando numéricamente vemos que

$$v_f = \sqrt{2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\Delta r + v_i^2} = \sqrt{2\left(9.8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\left[(0.6) - (0.2)(0.8)\right](1.6783\text{ m}) + \left(0\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}$$

$$\therefore v_f = 3.8044 \text{ m/s}$$

Este valor obtenido, funcionará como la velocidad inicial del cuerpo A, cuando éste se desplaza en el plano horizontal y podremos entonces determinar la posición final del cuerpo.

Analizando la tercera y última etapa en la cual el cuerpo se desplaza horizontalmente hacia la izquierda tenemos que el D.C.L. es el siguiente:



Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje y del sistema de referencia mostrado

$$F_y = N - mg = ma_y = 0 \quad \dots(1.2.9)$$

$$\therefore N = mg \quad \dots(1.2.9')$$

Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje x

$$F_x = -\mu N = ma_x \quad \dots(1.2.10)$$

sustituyendo (1.2.9') en (1.2.10)

$$F_x = -\mu mg = ma_x \quad \dots(1.2.10')$$

$$\therefore a_x = -\mu g \quad \dots(1.2.11)$$

Sustituyendo (1.2.11) y los valores correspondientes de la velocidad en (1.2.6), tenemos que

$$\Delta r = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2(-\mu g)} = \frac{\left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(3.8044 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{-2(0.2)\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}$$

$$\therefore \Delta r = 3.6922 \text{ m}$$

Problema 1.3

Se requiere diseñar un "parachoques" que detenga un paquete de 50 lb que se mueve a 10 ft/s a 6 pulgadas del punto de contacto (ver figura 1.3.1). Si la fricción es insignificante, ¿cuál es la constante del resorte k necesaria?

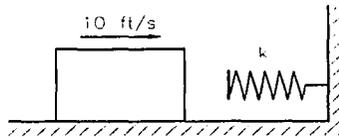
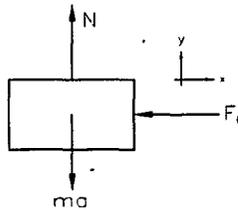


Figura 1.3.1

El D.C.L. del sistema es el siguiente:



El trabajo total que realiza el sistema es igual a la suma de los trabajos individuales de cada una de las fuerzas que actúan sobre él, de tal forma que:

$$W_T = W_{F_R} + W_N + W_{mg} \dots (1.3.1)$$

pero sabemos que el trabajo que realizan las fuerzas que son normales al desplazamiento es nulo, por lo tanto la ecuación (1.3.1) se reduce a:

$$W_T = W_{F_R} \dots (1.3.1')$$

Sabemos que el trabajo de la fuerza del resorte se define como

$$W_{F_R} = -\frac{k}{2} (r_2^2 - r_1^2) \dots (1.3.2)$$

Sustituyendo (1.3.2) en (1.3.1') se tiene que

$$W_T = -\frac{k}{2} (r_2^2 - r_1^2) \dots(1.3.3)$$

Utilizando el principio del trabajo y la energía cinética podemos escribir

$$W_T = -\frac{k}{2} (r_2^2 - r_1^2) = \Delta T = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \dots(1.3.4)$$

pero sabemos que $r_1 = 0$ ft pues el resorte inicialmente no está deformado, y $v_f = 0$ ft/s pues se requiere que el paquete sea detenido, por lo tanto la ecuación (1.3.4) queda como sigue:

$$-\frac{k}{2} (r_2^2) = -\frac{1}{2} m v_i^2 \dots(1.3.5)$$

Despejando k de (1.3.5) tenemos

$$k = \frac{m v_i^2}{r_2^2} \dots(1.3.6)$$

Evaluando numéricamente en la ecuación (1.3.6) llegamos al resultado correcto:

$$k = \frac{50 \bar{\text{lb}} (10 \text{ ft/s})^2}{\left(\frac{32.2 \text{ ft}}{\text{s}^2}\right) \left(\frac{1}{2} \text{ ft}\right)^2}$$
$$\therefore k = 621.118 \frac{\bar{\text{lb}}}{\text{ft}}$$

Problema 1.4

Una caja de 100 lb parte del reposo y está sometida a la fuerza mostrada en la gráfica de la figura 1.4.1. Si el coeficiente de fricción entre la caja y el piso es 0.2. ¿Cuál es la velocidad de la caja en $t = 8$ s?

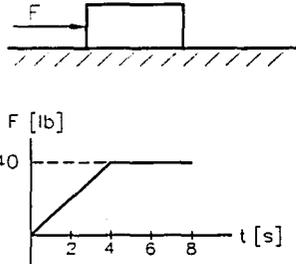


Figura 1.4.1

Primeramente vamos a determinar los valores de la fuerza mediante la siguiente ecuación:

$$F - F_2 = \frac{F_2 - F_1}{t_2 - t_1} (t - t_2)$$

El primer valor de la fuerza, corresponde a la diagonal que va desde el origen de la gráfica hasta el punto (4,40), sustituyendo estos valores en la ecuación anterior tenemos

$$F - 40 = \frac{40 - 0}{4 - 0} (t - 4)$$

$$F = 40 + \frac{40}{4} (t - 4)$$

$$F = 40 + 10t - 40$$

$$\therefore F = 10t$$

Para determinar el segundo valor, vemos que la fuerza va desde el punto (4,40) hasta (8,40), de modo que

$$F - 40 = \frac{40 - 40}{8 - 4} (t - 8)$$

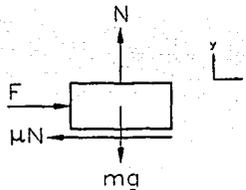
$$F = 40 + (0)(t - 8)$$

$$\therefore F = 40$$

De tal forma que podemos escribir que la fuerza total está compuesta de dos partes que están caracterizadas por dos diferentes intervalos de tiempo como se indica enseguida

$$F = \begin{cases} 10t & 0 < t < 4 \\ 40 & 4 < t < 8 \end{cases}$$

Ahora se ilustrará el D.C.L. de la caja



Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje y del sistema de referencia mostrado tenemos:

$$F_y = N - mg = ma_y = 0 \dots(1.4.1)$$

$$N = mg \dots(1.4.1')$$

La ecuación (1.4.1) se igualó con cero debido a que la aceleración es nula en dicho eje, pues el movimiento es exclusivamente sobre el eje x .

Analizando ahora las fuerzas que actúan a lo largo del eje x

$$F_x = F - \mu N \dots(1.4.2)$$

sustituyendo (1.4.1') en (1.4.2)

$$F_x = F - \mu mg \dots(1.4.2')$$

Sabemos que el impulso lineal I está definido como

$$I_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) \dots(1.4.3)$$

Sustituyendo el primer valor de la fuerza en (1.4.2') llegamos a:

$$F_x = 10t - \mu mg \dots(1.4.4)$$

Igualando con cero a la ecuación (1.4.4) y despejando t encontramos el valor en el cual la caja comienza a moverse, dicho tiempo debe ser mayor que cero.

$$t > \frac{\mu mg}{10} \dots(1.4.5)$$

evaluando numéricamente en (1.4.5) tenemos

$$t > \frac{0.2(100\text{lb})}{10 \text{ lb/s}} = 2\text{s}$$

Sustituyendo (1.4.4) en (1.4.3) tenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_2^4 (10t - \mu mg) dt = m(v_f - v_i) \dots(1.4.6) \text{ donde } v_i = 0 \text{ (reposo)} \\ &= 10 \left[\frac{t^2}{2} \right]_2^4 - \mu mgt \Big|_2^4 \\ &= 5[(4)^2 - (2)^2] - (0.2)(100)(4 - 2) \\ &= 20 \text{ lb} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

Despejando v_f de 1.4.6 tenemos

$$v_f = \frac{I_1}{m} \dots(1.4.7)$$

sustituyendo los valores correspondientes en (1.4.7) llegamos a

$$v_1 = \frac{20 \bar{\text{lb}} \cdot \text{s}}{100 \bar{\text{lb}}} = 6.44 \text{ ft/s}$$
$$\frac{32.2 \text{ ft/s}^2}$$

Haciendo algo similar pero ahora para el segundo valor de la fuerza se tiene:

$$I_2 = \int_4^8 (40 - \mu mg) dt = 40t \Big|_4^8 - \mu mgt \Big|_4^8$$
$$= [40 - (0.2)(100)](8 - 4) = 80 \bar{\text{lb}} \cdot \text{s}$$

$$I_2 = m(v_2 - v_1) \dots(1.4.8)$$

$$v_2 = \frac{I_2}{m} + v_1 \dots(1.4.8')$$

sustituyendo los valores correspondientes en (1.4.8')

$$v_2 = \frac{80 \bar{\text{lb}} \cdot \text{s}}{100 \bar{\text{lb}}} + 6.44 \text{ ft/s}$$
$$\frac{32.2 \text{ ft/s}^2}$$

$$\therefore v_2 = 32.2 \text{ ft/s}$$

Problema 1.5

La partícula A de 2 kg está atada al extremo de una cuerda de 2.5 m y oscila en un plano vertical tal como se indica en la figura 1.5.1. Cuando el ángulo $\theta = 30^\circ$, la magnitud de la velocidad de A es 1.5 m/s. Calcule la tensión en la cuerda y la aceleración angular en la posición definida.

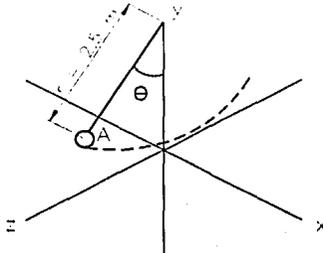
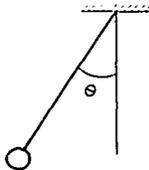
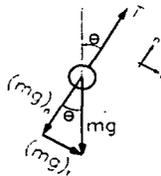


Figura 1.5.1

Para solucionar este problema dibujaremos un D.C.L. de la partícula, aunque un esquema como el siguiente nos puede facilitar la construcción del D.C.L.



Ilustrando de una manera más clara, en el D.C.L. se muestran las componentes rectangulares del peso de la partícula y la fuerza de tensión T:



Analizando las fuerzas que actúan tangencialmente, tenemos lo siguiente de acuerdo al sistema de referencia mostrado

$$F_t = (mg)_t = m a_t \dots(1.5.1)$$

$$\text{donde } (mg)_t = mg \operatorname{sen} \theta \dots(1.5.1')$$

sabemos que la aceleración tangencial se define como

$$a_t = r \alpha \dots(1.5.2)$$

sustituyendo las ecuaciones (1.5.1') y (1.5.2) en (1.5.1) tenemos que

$$F_t = mg \operatorname{sen} \theta = m r \alpha \dots(1.5.3)$$

Analizando las fuerzas normales de acuerdo al sistema de referencia mostrado vemos que:

$$F_n = T - (mg)_n = m a_n \dots(1.5.4)$$

$$\text{donde } (mg)_n = mg \operatorname{cos} \theta \dots(1.5.4')$$

Por definición la aceleración normal es

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \dots(1.5.5)$$

sustituyendo las ecuaciones (1.5.4') y (1.5.5) en (1.5.4) tenemos

$$T - mg \operatorname{cos} \theta = m \frac{v^2}{r} \dots(1.5.6)$$

$$T = m \left(\frac{v^2}{r} + g \operatorname{cos} \theta \right) \dots(1.5.6')$$

Sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación (1.5.6') determinamos el valor de la tensión T de la cuerda

$$T = 2 \text{ kg} \left[\frac{(1.5)^2 \text{ m}^2 / \text{s}^2}{2.5 \text{ m}} + (9.8 \text{ m} / \text{s}^2) (\cos 30^\circ) \right] \left(\frac{\text{N}}{\text{kg m} / \text{s}^2} \right)$$

$$\therefore T = 18.774 \text{ N}$$

Despejando la aceleración angular α de (1.5.3)

$$\alpha = \frac{g \sin \theta}{r} \dots (1.5.7)$$

Evaluando numéricamente tenemos en (1.5.7)

$$\alpha = \frac{9.8 \text{ m} / \text{s}^2 (\sin 30^\circ)}{2.5 \text{ m}}$$

$$\therefore \alpha = 1.96 \text{ rad} / \text{s}^2$$

Problema 1.6

Los bloques A y B mostrados en la figura 1.6.1 tienen masas de 15 y 35 kg, respectivamente. El coeficiente de fricción entre los bloques A y B, y entre B y el plano es 0.25. Si el sistema parte del reposo, calcule la aceleración de A y de B cuando: a) $P = 100$ N, b) $P = 200$ N.

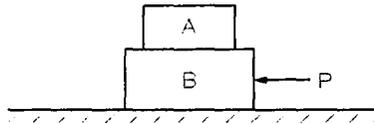
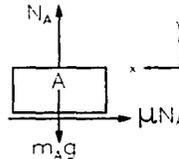


Figura 1.6.1

Para resolver el problema se plantea un D.C.L. para cada bloque, para el bloque A vemos que sólo actúa una fuerza activa (el peso del bloque) y hay dos fuerzas reactivas, que son, la normal y la fuerza de fricción entre A y B, que actúan perpendicularmente a la superficie de contacto y en oposición al movimiento, respectivamente. El D.C.L. de A es el siguiente:



Haciendo la sumatoria de fuerzas sobre el eje y y de acuerdo al sistema de referencia mostrado, vemos que sólo actúan la normal y el peso, la sumatoria se iguala con cero debido a que la aceleración es nula pues el movimiento se da exclusivamente sobre el eje x .

$$F_y = N_A - m_A g = m_A a_A, = 0 \dots(1.6.1)$$

$$N_A = m_A g \dots(1.6.1')$$

Ahora analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje x vemos que sólo actúa la fuerza de fricción, la cual presenta oposición al movimiento, de tal modo que escribimos:

$$F_x = -\mu N_A = m_A a_A \dots(1.6.2)$$

sustituyendo (1.6.1') en (1.6.2)

$$-\mu m_A g = m_A a_A$$

$$\therefore a_A = -\mu g \dots(1.6.3)$$

Evaluando numéricamente en la ecuación (1.6.3) encontramos la magnitud de la aceleración:

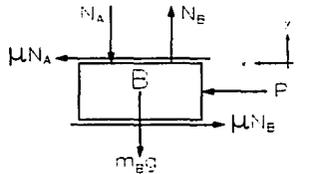
$$a_A = - (0.25)(9.8 \text{ m/s}^2)$$

$$a_A = -2.45 \text{ m/s}^2$$

donde el signo (-) indica que el bloque se está frenando o desacelerando, pero también la podemos expresar como

$$a_A = 2.45 \text{ m/s}^2 \rightarrow$$

Analizando ahora el bloque B, se muestra su correspondiente D.C.L., donde además de las propias fuerzas del bloque, se deben considerar las fuerzas ejercidas por el bloque A sobre el bloque B, quedando el D.C.L. de B como sigue:



Se observa claramente que la normal y la fricción de A tienen sentido contrario a como se mostró en el D.C.L. A, esto se debe a que se utiliza la Tercera Ley de Newton para conservar el equilibrio del sistema. Analizando las fuerzas sobre el eje y tenemos que la ecuación se iguala con cero ya que la aceleración es nula en dicho eje, debido a que no hay movimiento sobre el eje y , de modo que

$$F_y = N_B - N_A - m_B g = m_B a_B, = 0 \dots(1.6.4)$$

$$N_B = N_A + m_B g \dots(1.6.5)$$

Sustituyendo la ecuación (1.6.1') en (1.6.5) tenemos

$$N_B = m_A g + m_B g = g (m_A + m_B) \dots(1.6.5')$$

Analizando las fuerzas que actúan sobre el eje x vemos que en el sentido positivo actúan la fuerza P y la fuerza de fricción del cuerpo A, mientras que en el sentido opuesto, sólo actúa la fuerza de fricción de B.

$$F_x = P + \mu N_A - \mu N_B = m_B a_B \dots(1.6.6)$$

Sustituyendo (1.6.1') y (1.6.5') en (1.6.6) escribimos

$$P + \mu m_A g - \mu g (m_A + m_B) = m_B a_B \dots(1.6.7)$$

$$P + \mu m_A g - \mu m_A g - \mu m_B g = m_B a_B$$

$$P - \mu m_B g = m_B a_B \dots(1.6.8)$$

Despejando la a_B de (1.6.8)

$$\therefore a_B = \frac{P}{m_B} - \mu g \dots(1.6.9)$$

Sustituyendo en (1.6.9) los valores correspondientes para a) cuando $P = 100 \text{ N}$

$$a_B = \frac{100 \text{ N}}{35 \text{ kg}} \left(\frac{\text{kg m/s}^2}{\text{N}} \right) - (0.25)(9.8 \text{ m/s}^2)$$

$$\therefore a_B = 0.4071 \text{ m/s}^2$$

Para b) cuando $P = 200 \text{ N}$

$$a_B = \frac{200 \text{ N}}{35 \text{ kg}} \left(\frac{\text{kg m/s}^2}{\text{N}} \right) - (0.25)(9.8 \text{ m/s}^2)$$

$$\therefore a_B = 3.2642 \text{ m/s}^2$$

Se puede observar claramente de los resultados obtenidos, que la aceleración de A no depende de la magnitud de la fuerza P , ésta fuerza únicamente va a afectar las condiciones del cuerpo B.

CAPÍTULO 2

“DINÁMICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS”

2.1 CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL Y ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

La cantidad de movimiento lineal \vec{p} del sistema de partículas, se define a partir de la suma de las cantidades de movimiento de las diferentes partículas que componen al sistema, es decir

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \dots(2.1.1)$$

mientras que la cantidad de movimiento angular total \vec{L}_O con respecto a O del sistema de partículas se define como

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \dots(2.1.2)$$

Derivando con respecto a t las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2), sustituyendo las fuerzas internas del sistema y sintetizando llegamos a

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{p}} \dots(2.1.3)$$

$$\sum \vec{\tau}_O = \dot{\vec{L}}_O \dots(2.1.4)$$

Donde la ecuación (2.1.3) corresponde a la resultante de las fuerzas externas, que es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal del sistema de partículas; mientras que la ecuación (2.1.4) expresa que el momento resultante con respecto a un punto fijo O de las fuerzas externas es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular respecto al punto O del ya mencionado sistema de partículas.

2.2 MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Si consideramos el centro de masa del sistema de partículas, la ecuación (2.1.3) la podemos escribir en una forma alterna. El centro de masa del sistema de partículas es el punto G, el cual está definido por el vector de posición \vec{r} , que satisface la siguiente igualdad:

$$m \bar{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{r}}_i \quad \dots(2.2.1)$$

donde m representa la masa total $\sum_{i=1}^n m_i$ de las partículas del sistema. Transformando en componentes rectangulares a los vectores de posición $\bar{\mathbf{r}}$ y $\bar{\mathbf{r}}_i$, obtenemos tres ecuaciones escalares con las cuales podemos determinar las coordenadas del centro de masa, estas ecuaciones son:

$$m \bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad \dots(2.2.1a) \quad m \bar{y} = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad \dots(2.2.1b) \quad m \bar{z} = \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad \dots(2.2.1c)$$

Al derivar con respecto a t a la ecuación (2.2.1) llegamos a

$$m \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i$$

$$m \bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{v}}_i \quad \dots(2.2.2)$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ representa la velocidad del centro de masa G del sistema de partículas, mientras que el lado derecho de la ecuación, sabemos que es la cantidad de movimiento lineal del sistema. De tal manera que podemos escribir

$$\bar{\mathbf{p}} = m \bar{\mathbf{v}} \quad \dots(2.2.3)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{p}}} = m \bar{\mathbf{a}} \quad \dots(2.2.4)$$

en la cual $\bar{\mathbf{a}}$ representa la aceleración del centro de masa G . Sustituyendo la ecuación (2.2.4) en (2.1.3), escribimos

$$\sum \bar{\mathbf{F}} = m \bar{\mathbf{a}} \quad \dots(2.2.5)$$

la cual define el movimiento del centro de masa G del sistema de partículas.

Por lo tanto, podemos decir que *el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si toda la masa del sistema y todas las fuerzas externas se concentraran en dicho punto.*

2.3 CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS CON RESPECTO A SU CENTRO DE MASA

Si \vec{r}_i' y \vec{v}_i' , representan, respectivamente, el vector de posición y la velocidad de la partícula P_i relativa al sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$, definimos la *cantidad de movimiento angular* \vec{L}_G' del sistema de partículas con respecto al centro de masa G como

$$\vec{L}_G' = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') \dots(2.3.1)$$

Derivando con respecto a t llegamos a

$$\dot{\vec{L}}_G' = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i') \dots(2.3.2)$$

donde \vec{a}_i' representa la aceleración de P_i relativa al sistema de referencia móvil. De acuerdo al movimiento relativo a un sistema de referencia en traslación, escribimos la siguiente ecuación:

$$\vec{a}_i = \vec{\bar{a}} + \vec{a}_i'$$

en la que $\vec{\bar{a}}$ y \vec{a}_i' representan, respectivamente, las aceleraciones de P_i y G relativas al sistema O_{xyz} . Despejando \vec{a}_i' y sustituyendo en (2.3.2), escribimos

$$\dot{\vec{L}}_G' = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i') - \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i' \right) \times \vec{\bar{a}} \dots(2.3.3)$$

donde la primera suma, se reduce al momento resultante respecto a G de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema, mientras que la segunda suma se reduce a cero, de tal modo que la ecuación (2.3.3) la escribimos como

$$\sum \bar{\tau}_G = \dot{\bar{L}}_G \quad \dots(2.3.4)$$

la cual expresa que el momento resultante respecto a G, $\bar{\tau}_G$, de las fuerzas externas es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular del sistema de partículas respecto a G. Pero está demostrado que

$$\bar{L}_G = \bar{L}'_G$$

por lo que la ecuación (2.3.4) también la podemos escribir como

$$\sum \bar{\tau}_G = \dot{\bar{L}}_G \quad \dots(2.3.5)$$

en la que se observa que puede calcularse la cantidad de movimiento angular \bar{L}_G evaluando los momentos respecto a G de las cantidades de movimiento de las partículas en su movimiento con respecto al sistema de referencia newtoniano O_{xyz} , o bien, con respecto al sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$:

$$\bar{L}_G = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i' \times m_i \bar{v}_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i' \times m_i \bar{v}_i') \quad \dots(2.3.6)$$

2.4 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Si la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas de un sistema es cero, los miembros del lado izquierdo de las ecuaciones (2.1.3) y (2.1.4) son cero, y estas ecuaciones se reducen a $\dot{\bar{p}} = 0$ y $\dot{\bar{L}}_G = 0$, respectivamente. Por lo tanto decimos que

$$\bar{p} = \text{cte} \quad \dots(2.4.1)$$

$$\bar{L}_G = \text{cte} \quad \dots(2.4.2)$$

Estas ecuaciones expresan que la cantidad de movimiento lineal del sistema de partículas y la cantidad de movimiento angular respecto al punto fijo O se conservan.

* *Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica*, Beer, Ferdinand P. & Johnston, E. R. 6ª Edición. McGraw-Hill.

Tesista: José Luis Morales Jiménez

Director de Tesis: IME Juan Manuel Torres Merino

La conservación de la cantidad de movimiento, puede aplicarse también al análisis del movimiento del centro de masa G de un sistema de partículas, y también al análisis del movimiento del sistema respecto de G. Por ejemplo, si la suma de las fuerzas externas es cero, se aplica la ecuación (2.4.1). Recordando la ecuación (2.2.3), escribimos

$$\bar{\mathbf{v}} = \text{cte} \dots(2.4.3)$$

esta ecuación expresa que el centro de masa G del sistema se mueve en línea recta y con rapidez constante. Ahora, si la suma de los momentos respecto a G de las fuerzas externas es cero, de acuerdo con la ecuación (2.3.5) se puede afirmar que la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor de su centro de masa se conserva, es decir,

$$\bar{\mathbf{L}}_G = \text{cte} \dots(2.4.4)$$

2.5 ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

La energía cinética T de un sistema de partículas, se define como la suma de todas las energías cinéticas de las diversas partículas que conforman el sistema. Por lo tanto, escribimos

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \dots(2.5.1)$$

Cuando calculamos la energía cinética de un sistema que consta de un gran número de partículas, se recomienda considerar por separado el movimiento del centro de masa G del sistema y el movimiento del sistema relativo a un sistema de referencia en movimiento, fijo en G.

Sabemos que

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}_i' \dots(2.5.2)$$

donde para una partícula P_i del sistema, $\bar{\mathbf{v}}_i$ representa su velocidad relativa al sistema de referencia newtoniano O_{xyz} , y $\bar{\mathbf{v}}_i'$ es su velocidad relativa al sistema de referencia centroidal $G_{x'y'z'}$ que se traslada con respecto a O_{xyz} ; mientras que $\bar{\mathbf{v}}$ representa la velocidad del centro de masa G relativa al sistema de referencia newtoniano O_{xyz} ,

Sustituyendo la ecuación (2.5.2) en (2.5.1) y simplificando llegamos a

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 \dots(2.5.3)$$

Esta última ecuación expresa que la energía cinética T de un sistema de partículas es igual a la suma de la energía cinética del centro de masa G (suponiendo que toda la masa está concentrada en G) más la energía cinética del sistema en su movimiento relativo al sistema $G'x'y'z'$.

2.6 **PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA. CONSERVACIÓN DE ENERGÍA PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS**

En un sistema conservador, el trabajo realizado por las fuerzas es:

$$W_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \dots(2.6.1)$$

el cual también lo podemos expresar de la siguiente manera

$$W_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 \dots(2.6.2)$$

combinando las ecuaciones (2.6.1) y (2.6.2) escribimos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \dots(2.6.3)$$

la ecuación (2.6.3) es el Principio del trabajo y la energía, el cual expresa simbólicamente lo siguiente:

Si las fuerzas que actúan sobre las partículas de un sistema, son conservadoras, la energía total $T + V$ se conserva.

2.7 PRINCIPIO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Al integrar la ecuación (2.1.3) con respecto a t, desde t_1 hasta t_2 tenemos

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 \quad \dots(2.7.1)$$

donde las integrales representan los impulsos lineales de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema. Esta ecuación establece que la suma de los impulsos lineales de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es igual al cambio de la cantidad de movimiento lineal del sistema.

Al integrar la ecuación (2.1.4) respecto a t, desde t_1 hasta t_2 tenemos

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \bar{\tau}_o dt = (\bar{L}_o)_2 - (\bar{L}_o)_1 \quad \dots(2.7.2)$$

De manera análoga para esta ecuación, las integrales se refieren a los impulsos angulares con respecto a O de las fuerzas externas. Por lo tanto, queda establecido que la suma de los impulsos angulares respecto a O de las fuerzas externas es igual al cambio de la cantidad de movimiento angular respecto de O del sistema.

Si sobre las partículas del sistema no actúa ninguna fuerza externa, las ecuaciones (2.7.1) y (2.7.2), respectivamente, se reducen a

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 \quad \dots(2.7.3)$$

$$(\bar{L}_o)_1 = (\bar{L}_o)_2 \quad \dots(2.7.4)$$

De modo que hemos comprobado que:

Si sobre las partículas de un sistema no actúa ninguna fuerza externa, se conservan la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular alrededor del punto O del sistema de partículas.

¹ Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica, Beer, Ferdinand P. & Johnston, E. R. 6ª Edición, McGraw-Hill.

² Idem.

2.8 IMPACTO

Se le conoce como *impacto* al choque entre dos cuerpos, el cual ocurre durante un intervalo de tiempo muy corto y durante el cual los cuerpos ejercen entre sí fuerzas relativamente grandes.

La *línea de impacto* se define como la normal común a las superficies en contacto durante el impacto.

Se le llama *impacto central* cuando los centros de masa de los dos cuerpos que chocan se localizan sobre la línea de impacto. De no ser así, se dice que el impacto es *excéntrico*.

Se produce un impacto *directo* cuando las velocidades de las dos partículas en contacto están dirigidas a lo largo de la línea de impacto. El impacto es *oblicuo* si al menos una de las partículas se mueve en una línea que no sea la de impacto.

Impacto Central Directo

Se tienen dos partículas que poseen masas m_1 y m_2 , las cuales viajan a velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , respectivamente, como se ilustra en la figura (2.8.1)



Figura 2.8.1

sabemos que la cantidad de movimiento lineal se define como

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

de modo que la cantidad de movimiento lineal total \vec{p}_T es:

$$\vec{p}_T = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \dots(2.8.1)$$

Cuando las partículas chocan (figura 2.8.2), modifican su velocidad, ésta cambia de \vec{v}_1 a \vec{v}_1' y de \vec{v}_2 a \vec{v}_2' , pero su cantidad de movimiento lineal al igual que su masa permanecen constantes.



Figura 2.8.2

La cantidad de movimiento lineal total después del choque es:

$$\vec{p}_T' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \dots (2.8.2)$$

$$\vec{p}_T = \vec{p}_T' \dots (2.8.3)$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \dots (2.8.4)$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1' \vec{v}_1' + m_2' \vec{v}_2' \dots (2.8.5)$$

puesto que la masa permanece constante, podemos decir que

$$m_1 = m_1' = m_1 \quad \text{y} \quad m_2 = m_2' = m_2$$

de tal forma que la ecuación (2.8.5) la escribimos como

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \dots (2.8.6)$$

$$m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_1' = m_2 \vec{v}_2' - m_2 \vec{v}_2$$

$$m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = m_2 (\vec{v}_2' - \vec{v}_2) \dots (2.8.7)$$

Puesto que las velocidades consideradas están dirigidas a lo largo del mismo eje, la ecuación (2.8.7) la podemos escribir como sigue

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \dots (2.8.7')$$

en la cual podemos apreciar que únicamente contiene cantidades escalares.

Durante el impacto, la energía cinética antes y después del choque es la misma, entonces podemos hablar de la conservación de la energía cinética T:

$$T_T = T_1 + T_2 \dots(2.8.8)$$

donde

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

$$T_T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$T_T = T_T'$$

$$T_1 + T_2 = T_1' + T_2' \dots(2.8.9)$$

De tal forma que la ecuación (2.8.9) la podemos escribir como

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = \frac{1}{2} m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

$$m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \dots(2.8.10)$$

Comparando la ecuación (2.8.7) con la ecuación (2.8.10) llegamos a la siguiente conclusión:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \dots(2.8.11)$$

De la ecuación (2.8.11) podemos escribir

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \dots(2.8.12)$$

donde e se denomina *coeficiente de restitución*. El numerador en la ecuación (2.8.12) representa la velocidad relativa de las dos partículas después del impacto, mientras que el denominador representa su velocidad relativa antes del impacto.

Debido al impacto, las dos partículas se deformaron, y al final del periodo de deformación tienen ya la misma velocidad, posteriormente ocurre un periodo de *restitución*, al final del cual ambas partículas recuperarán su forma original o quedarán deformadas permanentemente, dependiendo de la magnitud de las fuerzas de impacto y de los materiales de que estén hechas las partículas.

El coeficiente de restitución también lo podemos definir como la relación de las magnitudes de los impulsos que corresponden al periodo de restitución y al periodo de deformación.

El valor de e siempre está entre 0 y 1, y depende principalmente de los materiales que intervienen.

Existen dos casos particulares de impacto, el primero es el *impacto perfectamente plástico*, donde $e = 0$, y la ecuación (2.8.12) se transforma en:

$$v_1' = v_2' \dots (2.8.13)$$

en este caso no hay periodo de restitución, y las dos partículas permanecen unidas después del choque.

Haciendo un análisis más a fondo vamos a demostrar la ecuación (2.8.13); multiplicamos ambos lados de la ecuación (2.8.12) por $(v_1 - v_2)$

$$(v_1 - v_2) e = \left(\frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \right) (v_1 - v_2) \quad ; \quad e (v_1 - v_2) = v_2' - v_1'$$

$$e v_1 - e v_2 = v_2' - v_1' \dots (2.8.14)$$

despejando v_2' de (2.8.14) tenemos

$$v_2' = e v_1 - e v_2 + v_1' \dots (2.8.15)$$

despejando v_1' de (2.8.14) tenemos

$$v_1' = v_2' - e v_1 + e v_2 \dots (2.8.16)$$

sustituyendo (2.8.16) en la ecuación (2.8.5)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 (v_2' - e v_1 + e v_2) + m_2 v_2'$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_2' - e m_1 v_1 + e m_1 v_2 + m_2 v_2'$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + e m_1 v_1 - e m_1 v_2 = v_2' (m_1 + m_2)$$

$$v_1 (m_1 + e m_1) + v_2 (m_2 - e m_1) = v_2' (m_1 + m_2)$$

$$m_1 v_1 (1 + e) + v_2 (m_2 - e m_1) = v_2' (m_1 + m_2)$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 (1 + e) + v_2 (m_2 - e m_1)}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 (1 + e)}{m_1 + m_2} + \frac{v_2 (m_2 - e m_1)}{m_1 + m_2} \dots (2.8.17)$$

Haciendo algo similar para encontrar el valor de v_1' se sustituye la ecuación (2.8.15) en (2.8.5), de modo que

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 (e v_1 - e v_2 + v_1')$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + e m_2 v_1 - e m_2 v_2 + m_2 v_1'$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + e m_2 v_2 - e m_2 v_1 = v_1' (m_1 + m_2)$$

$$v_1 (m_1 - e m_2) + v_2 (m_2 + e m_2) = v_1' (m_1 + m_2)$$

$$v_1 (m_1 - e m_2) + m_2 v_2 (1 + e) = v_1' (m_1 + m_2)$$

$$v_1' = \frac{v_1 (m_1 - e m_2) + m_2 v_2 (1 + e)}{m_1 + m_2}$$

$$v_1' = \frac{v_1 (m_1 - e m_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 v_2 (1 + e)}{m_1 + m_2} \dots (2.8.18)$$

Sabemos que en el caso de impacto perfectamente plástico, $e = 0$, por lo tanto las ecuaciones (2.8.18) y (2.8.17) se transforman respectivamente en

$$v_1' = \frac{v_1 m_1}{m_1 + m_2} + \frac{v_2 m_2}{m_1 + m_2} \dots(2.8.19)$$

$$v_2' = \frac{v_1 m_1}{m_1 + m_2} + \frac{v_2 m_2}{m_1 + m_2} \dots(2.8.20)$$

de estas dos últimas ecuaciones comprobamos que se cumple lo planteado en la ecuación (2.8.13), es decir, observamos que $v_1' = v_2'$ (en un choque plástico los dos cuerpos viajan juntos).

Considerando que $e = 0$ y $m_1 = m_2$ y sustituyendo estos planteamientos en (2.8.17) y (2.8.18), respectivamente, llegamos a:

$$v_2' = \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} \quad ; \quad v_2' = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \dots(2.5.21)$$

$$v_1' = \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} \quad ; \quad v_1' = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \dots(2.5.22)$$

donde lo obtenido se conoce como velocidad media.

El segundo caso es el *impacto perfectamente elástico*, donde $e = 1$, de modo que la ecuación (2.8.17) se transforma en

$$v_2' = v_1 \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} + v_2 \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \dots(2.8.23)$$

de igual modo, la ecuación (2.8.18) se transforma en

$$v_1' = v_1 \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} + v_2 \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} \dots(2.8.24)$$

Si consideráramos que $m_1 = m_2$, las ecuaciones (2.8.23) y (2.8.24) se transformarían respectivamente en

$$v_2' = v_1 \quad \dots(2.8.25)$$

$$v_1' = v_2 \quad \dots(2.8.26)$$

el cual es un caso elástico como ocurre con las bolas de billar.

Problema 2.1

Dos llantas de automóvil, A y B cada una de 10 kg de masa se deslizan sobre una superficie helada para chocar en O (figura 2.1.1). Después del choque las llantas se deslizan en las direcciones que se indican, 4 m y 6 m, respectivamente, antes de detenerse en A' y B', respectivamente. Calcule las velocidades iniciales de las llantas inmediatamente antes del choque. El coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.15$. Desprecie el tamaño de las llantas.

Sugerencia: Como no se ha definido la línea de impacto, aplique la conservación de la cantidad de movimiento a lo largo de los ejes x' y y' , respectivamente.

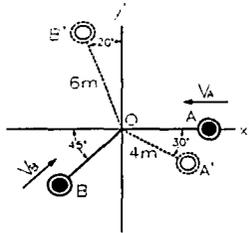


Figura 2.1.1

De acuerdo a la figura 2.1.1, las velocidades de las llantas A y B, antes del impacto, respectivamente son:

$$\vec{v}_A = -v_A \hat{i} \text{ [m/s]} \dots(2.1.1)$$

$$\vec{v}_B = v_B (\cos 45^\circ \hat{i} + \sin 45^\circ \hat{j}) \text{ [m/s]} \dots(2.1.2)$$

y las velocidades de las llantas después del impacto son:

$$\vec{v}_{A'} = v_{A'} (\cos 30^\circ \hat{i} - \sin 30^\circ \hat{j}) \text{ [m/s]} \dots(2.1.3)$$

$$\vec{v}_{B'} = v_{B'} (-\sin 20^\circ \hat{i} + \cos 20^\circ \hat{j}) \text{ [m/s]} \dots(2.1.4)$$

Utilizando para la llanta A la ecuación cinemática de la velocidad para el movimiento rectilíneo de una partícula con aceleración constante tenemos

$$v_{A_f}^2 = v_{A_i}^2 + 2a \Delta r_A \dots(2.1.5)$$

adecuando esta ecuación a las condiciones del problema decimos que $v_{A_i} = v_{A_f}$, sustituyendo esta relación y puesto que la velocidad final es cero, la ecuación (2.1.5) se reduce a:

$$(v_{A_f})^2 = -2a \Delta r_A \dots(2.1.5')$$

$$\therefore a = -\frac{(v_{A_f})^2}{2\Delta r_A} \dots(2.1.5'')$$

Haciendo lo mismo para el caso de la llanta B

$$v_{B_f}^2 = v_{B_i}^2 + 2a \Delta r_B \dots(2.1.6)$$

$$(v_{B_f})^2 = -2a \Delta r_B \dots(2.1.6')$$

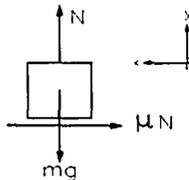
sustituyendo la ecuación (2.1.5'') en (2.1.6')

$$(v_{B_f})^2 = -2 \left[-\frac{(v_{A_f})^2}{2\Delta r_A} \right] \Delta r_B$$

$$(v_{B_f})^2 = (v_{A_f})^2 \frac{\Delta r_B}{\Delta r_A}$$

$$\therefore v_{B_f} = v_{A_f} \sqrt{\frac{\Delta r_B}{\Delta r_A}} \dots(2.1.7)$$

Vamos a hacer uso de un D.C.L. para determinar la aceleración de la llanta A y después encontrar la velocidad de la misma. El D.C.L. de A es el siguiente:



Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje y del sistema de referencia mostrado tenemos que

$$F_y = N - mg = ma_y = 0 \dots(2.1.8)$$

$$\therefore N = mg \dots(2.1.8')$$

Analizando las fuerzas que actúa a lo largo del eje x llegamos a

$$-\mu N = ma_x \dots(2.1.9)$$

$$-\mu mg = ma_x$$

$$\therefore a_x = -\mu g \dots(2.1.9')$$

evaluando numéricamente en (2.1.9') vemos que

$$a_x = -(0.15)(9.8 \text{ m/s}^2)$$

$$\therefore a_x = -1.47 \text{ m/s}^2$$

despejando v_A' de la ecuación (2.1.5')

$$v_A' = \sqrt{-2a \Delta r_A} \dots(2.1.10)$$

sustituyendo los valores correspondientes en (2.1.10)

$$v_A' = \sqrt{-2(-1.47 \text{ m/s}^2)(4 \text{ m})}$$

$$\therefore v_A' = 3.4293 \text{ m/s}$$

Evaluando numéricamente en (2.1.7) tenemos que

$$v_B' = 3.4293 \text{ m/s} \sqrt{\frac{6 \text{ m}}{4 \text{ m}}}$$

$$\therefore v_B' = 4.2 \text{ m/s}$$

Sabemos que la cantidad de movimiento lineal total antes del choque es

$$\vec{p}_T = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B \dots(2.1.11)$$

y después es

$$\vec{p}_T' = m_A' \vec{v}_A' + m_B' \vec{v}_B' \dots(2.1.11')$$

pero también sabemos que $\vec{p}_T = \vec{p}_T'$ de tal forma que escribimos

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A' \vec{v}_A' + m_B' \vec{v}_B' \dots(2.1.12)$$

como la masa se mantiene constante antes y después del choque decimos que

$$m_A = m_A' = m$$

$$m_B = m_B' = m$$

así que la ecuación (2.1.12) se transforma en

$$m \vec{v}_A + m \vec{v}_B = m \vec{v}_A' + m \vec{v}_B'$$

$$\vec{v}_A + \vec{v}_B = \vec{v}_A' + \vec{v}_B' \dots(2.1.13)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) y (2.1.4) en (2.1.13) escribimos:

$$-v_A \hat{i} + v_B (\cos 45^\circ \hat{i} + \sin 45^\circ \hat{j}) = v_A' (\cos 30^\circ \hat{i} - \sin 30^\circ \hat{j}) + v_B' (-\sin 20^\circ \hat{i} + \cos 20^\circ \hat{j})$$

Agrupando término a término la ecuación anterior

$$(-v_A + v_B \cos 45^\circ) \hat{i} + v_B \sin 45^\circ \hat{j} = (v_A' \cos 30^\circ - v_B' \sin 20^\circ) \hat{i} + (-v_A' \sin 30^\circ + v_B' \cos 20^\circ) \hat{j}$$

$$-v_A + v_B \cos 45^\circ = v_A' \cos 30^\circ - v_B' \sin 20^\circ \dots(2.1.14)$$

$$v_B \sin 45^\circ = -v_A' \sin 30^\circ + v_B' \cos 20^\circ \dots(2.1.15)$$

despejando v_B de (2.1.15)

$$v_B = \frac{v_B' \cos 20^\circ - v_A' \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} \dots(2.1.15')$$

evaluando numéricamente en (2.1.15')

$$v_B = \frac{4.2 \text{ m/s} (\cos 20^\circ) - (3.4293) \text{ m/s} (\sin 30^\circ)}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore v_B = 3.1566 \text{ m/s}$$

despejando v_A de (2.1.14)

$$v_A = v_B \cos 45^\circ + v_B' \sin 20^\circ - v_A' \cos 30^\circ \dots(2.1.14')$$

sustituyendo los valores correspondientes en (2.1.14')

$$v_A = 3.1566 \text{ m/s} (\cos 45^\circ) + (4.2 \text{ m/s}) (\sin 20^\circ) - (3.42928 \text{ m/s}) (\cos 30^\circ)$$

$$\therefore v_A = 0.6987 \text{ m/s}$$

Problema 2.2

Obtenga la aceleración de los bloques mostrados en la figura 2.2.1 y la tensión de la cuerda, si el coeficiente de fricción $\mu = 0.1$, $\theta = 45^\circ$, el bloque de masa $m_1 = 10 \text{ kg}$ y $m_2 = 10 m_1$.

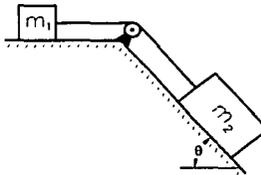
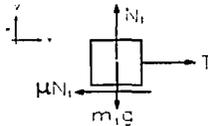


Figura 2.2.1

Para resolver este problema se plantea un D.C.L. para cada uno de los bloques, vamos a comenzar por el bloque m_1 como se ilustra en el siguiente esquema, donde como fuerzas activas tenemos al peso del bloque y a la fuerza de tensión de la cuerda que interconecta a ambos bloques; y como fuerzas reactivas tenemos a la normal que actúa perpendicularmente a la superficie de contacto y a la fuerza de fricción la cual presenta oposición al movimiento.



Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje y del sistema de referencia mostrado, vemos que

$$F_y = N_1 - m_1 g = m_1 a_{1y} = 0 \dots(2.2.1)$$

$$\therefore N_1 = m_1 g \dots(2.2.1')$$

Cabe mencionar que la ecuación (2.2.1) se igualó con cero debido a que la aceleración es nula a lo largo del eje y , pues el movimiento se da exclusivamente a lo largo del eje x .

Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje x del sistema de referencia mostrado tenemos

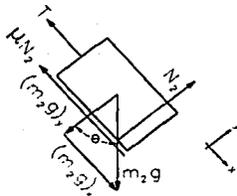
$$F_x = T - \mu N_1 = m_1 a_1 \quad \dots(2.2.2)$$

sustituyendo (2.2.1') en (2.2.2) tenemos

$$F_x = T - \mu m_1 g = m_1 a_1 \quad \dots(2.2.3)$$

$$\therefore T = m_1 (a_1 + \mu g) \quad \dots(2.2.4)$$

Ahora dibujaremos el D.C.L. para el bloque de masa m_2 , el cual se muestra a continuación:



Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje y del sistema de referencia mostrado tenemos que

$$F_y = N_2 - (m_2 g)_y = m_2 a_2 = 0 \quad \dots(2.2.5)$$

donde $(m_2 g)_y = m_2 g \cos \theta \quad \dots(2.2.5')$

$$\therefore N_2 = m_2 g \cos \theta \quad \dots(2.2.6)$$

Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje x vemos que

$$F_x = (m_2 g)_x - \mu N_2 - T = m_2 a_2 \quad \dots(2.2.7)$$

sustituyendo (2.2.6) en (2.2.7) tenemos

$$F_x = m_2 g \sen \theta - \mu m_2 g \cos \theta - T = m_2 a_2 \quad \dots(2.2.8)$$

Considerando que el cable que interconecta a ambos bloques es inextensible, podemos decir que $a_1 = a_2 = a$, de modo que de aquí en adelante a la aceleración la llamaremos únicamente a y haremos las sustituciones pertinentes.

Sumando las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.8) tenemos

$$\begin{aligned} T - \mu m_1 g &= m_1 a \\ m_2 g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta - T &= m_2 a \\ \hline m_2 g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta - \mu m_1 g &= a(m_1 + m_2) \\ \therefore a &= \frac{m_2 g (\sin \theta - \mu \cos \theta) - \mu m_1 g}{m_1 + m_2} \dots(2.2.9) \end{aligned}$$

Evalutando numéricamente en la ecuación (2.2.9)

$$\begin{aligned} a &= \frac{10(10 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) [\sin 45^\circ - (0.1)(\cos 45^\circ)] - (0.1)(10 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{(10 + 100) \text{ kg}} \\ \therefore a &= 5.58062 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Para determinar el valor de la tensión del cable, evaluamos numéricamente en la ecuación (2.2.4)

$$T = m_1 (a + \mu g) = 10 \text{ kg} [5.58062 + (0.1)(9.8)] \text{ m/s}^2 \left(\frac{\text{N}}{\text{kg m/s}^2} \right)$$

$$\therefore T = 65.6062 \text{ N}$$

Se le sugiere al estudiante que obtenga el valor de la tensión T de la ecuación (2.2.8) y compruebe que se obtiene el mismo resultado debido a que el sistema se encuentra en equilibrio.

Problema 2.3

Las masas de los cuerpos A y B representados en la figura 2.3.1 son 5 y 3 kg, respectivamente. Los cuerpos están interconectados por una cuerda que pasa por las poleas existentes en el cuerpo A y en el punto C. El coeficiente de fricción entre B y el plano es 0.3, y entre la corredera y el cuerpo A es nulo. La magnitud de la fuerza F es de 50 N. Los cuerpos están inicialmente en reposo. Calcule el valor de la aceleración de cada bloque y la tensión de la cuerda.

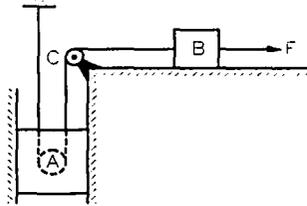
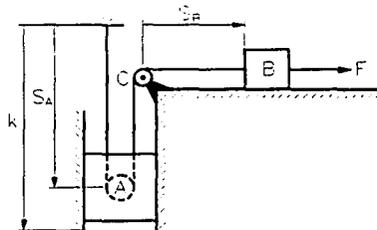


Figura 2.3.1

Para llegar al resultado correcto de este ejercicio primero debemos dibujar un esquema que nos permita determinar las relaciones de posición entre ambos cuerpos para posteriormente encontrar las relaciones de velocidad y aceleración.

El esquema es el siguiente:



De este esquema podemos notar que para determinar la posición del cuerpo A se ha trazado S_A que va desde el soporte ubicado en el punto más alto hasta el centro de polea ubicada en A; también se ha trazado una longitud auxiliar k que se mide desde el mismo

soporte hasta el punto más bajo de la corredera, de modo que podemos ver que la longitud de la cuerda que corresponde al cuerpo A es $2(k - S_A)$. También se ha trazado la posición del cuerpo B, S_B , la cual se extiende desde el centro de la polea ubicada en el punto C hasta el extremo izquierdo del cuerpo B.

Podemos decir que la longitud total L de la cuerda es una constante K y su ecuación es:

$$L = 2(k - S_A) + S_B \quad \dots(2.3.1)$$

$$L = 2k - 2S_A + S_B$$

$$L - 2k = K = S_B - 2S_A \quad \dots(2.3.1')$$

$$K = S_B - 2S_A \quad \dots(2.3.2)$$

Derivando la ecuación (2.3.2) con respecto al tiempo encontramos la relación de velocidades entre los cuerpos A y B.

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dS_B}{dt} - 2 \frac{dS_A}{dt}$$

$$0 = v_B - 2v_A$$

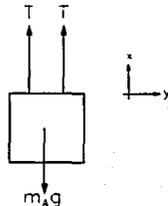
$$\therefore v_B = 2v_A \quad \dots(2.3.3)$$

Ahora derivando la ecuación (2.3.3) con respecto al tiempo determinamos la relación de aceleraciones entre los cuerpos A y B.

$$\frac{dv_B}{dt} = 2 \frac{dv_A}{dt}$$

$$\therefore a_B = 2a_A \quad \dots(2.3.4)$$

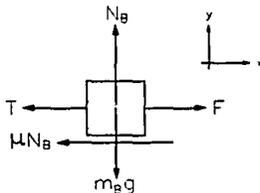
Ahora se muestra el D.C.L. correspondiente al bloque A



Nótese que se ha dibujado el sistema de referencia con la dirección positiva del eje x hacia donde se realiza el movimiento. De acuerdo al sistema de referencia mostrado vemos que sólo tenemos componentes a lo largo del eje x , así que escribimos:

$$F_x = 2T - m_A g = m_A a_A \dots(2.3.5)$$

Ahora se muestra el D.C.L. correspondiente al bloque B



Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje y del sistema de referencia mostrado vemos que en sentido positivo sólo actúa la fuerza normal (actúa perpendicularmente a la superficie de contacto) y en sentido opuesto sólo actúa el peso del bloque:

$$F_y = N_B - m_B g = m_B a_{B_y} = 0 \dots(2.3.6)$$

$$\therefore N_B = m_B g \dots(2.3.6')$$

cabe señalar que la ecuación (2.3.6) se igualó con cero debido a que la aceleración sobre el eje y es nula pues el movimiento se da exclusivamente a lo largo del eje x .

Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje x del sistema de referencia mostrado vemos que en sentido positivo sólo actúa la fuerza F y en sentido opuesto actúan la fuerza de tensión T y la fuerza de fricción la cual presenta oposición al movimiento.

$$F_x = F - T - \mu N_B = m_B a_B \dots(2.3.7)$$

sustituyendo la ecuación (2.3.6') en (2.3.7) tenemos

$$F_x = F - T - \mu m_B g = m_B a_B \dots(2.3.7')$$

Multiplicando por 2 la ecuación (2.3.7') y sumándola con la ecuación (2.3.5) tenemos:

$$\begin{array}{r} 2F - 2T - 2\mu m_B g = 2m_B a_B \\ 2T - m_A g = m_A a_A \\ \hline 2F - g(m_A + 2\mu m_B) = 2m_B a_B + m_A a_A \quad \dots(2.3.8) \end{array}$$

sustituyendo la ecuación (2.3.4) en (2.3.8)

$$2F - g(m_A + 2\mu m_B) = 2m_B (2a_A) + m_A a_A \quad \dots(2.3.8')$$

$$2F - g(m_A + 2\mu m_B) = a_A (4m_B + m_A) \quad \dots(2.3.8'')$$

$$\therefore a_A = \frac{2F - g(m_A + 2\mu m_B)}{4m_B + m_A} \quad \dots(2.3.9)$$

Evaluando numéricamente en (2.3.9) tenemos

$$a_A = \frac{2(50 \text{ N}) \left(\frac{\text{kg m/s}^2}{\text{N}} \right) - 9.8 \text{ m/s}^2 [5 + (2)(0.3)(3)] \text{ kg}}{[4(3) + 5] \text{ kg}}$$

$$\therefore a_A = 1.96235 \text{ m/s}^2$$

de tal forma que la aceleración de B es

$$a_B = 2(1.96235 \text{ m/s}^2)$$

$$\therefore a_B = 3.9247 \text{ m/s}^2$$

Para determinar el valor de la tensión de la cuerda, debemos despejar a T ya sea de la ecuación (2.3.5) o de la (2.3.7'), con cualquiera de las dos obtendríamos el mismo resultado. En este caso la vamos a despejar de la ecuación (2.3.7'), así que escribimos:

$$T = F - m_B (\mu g + a_B)$$

Evaluando numéricamente en la ecuación anterior tenemos que

$$T = 50 \text{ N} - 3 \text{ kg} \left[(0.3)(9.8) + 3.9247 \right] \text{ m/s}^2 \left(\frac{\text{N}}{\text{kg m/s}^2} \right)$$

$$\therefore T = 29.4059 \text{ N}$$

Le sugerimos al estudiante que verifique el valor de la tensión T mediante la ecuación (2.3.5).

Problema 2.4

El camión A de 6000 lb que circula a 40 ft/s choca con el automóvil B de 4000 lb que circula a 30 ft/s (ver figura 2.4.1).

- (a) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de su centro de masa común después del impacto?
- (b) Si la colisión se trata como un impacto perfectamente plástico, ¿cuánta energía cinética se pierde?

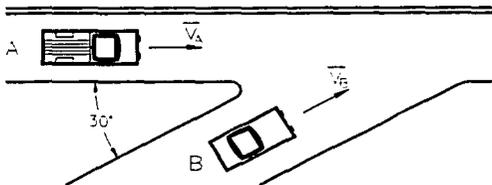


Figura 2.4.1

La cantidad de movimiento lineal total, es la suma de la cantidad de movimiento lineal de cada uno de los cuerpos, es decir:

$$\vec{p}_T = \vec{p}_A + \vec{p}_B \dots(2.4.1)$$

y sabemos que la cantidad de movimiento lineal es igual al producto de la masa por la velocidad, de tal forma que la ecuación (2.4.1) también podemos escribirla como:

$$\vec{p}_T = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B \dots(2.4.1')$$

donde $m = W / g$, sustituyendo esta relación en (2.4.1') tenemos que

$$\vec{p}_T = \frac{1}{g} (W_A \vec{v}_A + W_B \vec{v}_B) \dots(2.4.2)$$

De la figura (2.4.1) vemos que las velocidades de A y B, respectivamente, las escribimos como:

$$\vec{v}_A = 40 \hat{i} \text{ [ft/s]} \dots(2.4.3)$$

$$\vec{v}_B = 30 (\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j}) \text{ [ft/s]} \dots(2.4.4)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.4.3) y (2.4.4) en la ecuación (2.4.2) tenemos

$$\vec{p}_T = \frac{1}{g} \left[W_A (40 \hat{i}) + W_B (30)(\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j}) \right] \dots(2.4.5)$$

Evaluando numéricamente en (2.4.5) llegamos a

$$\begin{aligned} \vec{p}_T &= \frac{1}{32.2 \text{ ft/s}^2} \left[(6000 \text{ lb})(40 \text{ ft/s}) \hat{i} + (4000 \text{ lb})(30 \text{ ft/s})(\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j}) \right] \\ &= \frac{1}{32.2 \text{ ft/s}^2} \left[(240000 \text{ lb ft/s}) \hat{i} + (120000 \text{ lb ft/s})(0.866 \hat{i} + 0.5 \hat{j}) \right] \\ &= \frac{1}{32.2 \text{ ft/s}^2} \left[(240000 \text{ lb ft/s}) \hat{i} + (103923.0485 \text{ lb ft/s}) \hat{i} + (60000 \text{ lb ft/s}) \hat{j} \right] \\ &= \frac{1}{32.2 \text{ ft/s}^2} \left[(343923.0485) \hat{i} + (60000) \hat{j} \right] \left[\frac{\text{lb} \cdot \text{ft/s}^2}{\text{lb}} \right] \\ \therefore \vec{p}_T &= (10680.84001 \hat{i} + 1863.354 \hat{j}) \text{ lb} \cdot \text{ft/s} \dots(2.4.6) \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\vec{p}_T = \vec{p}_T' \dots(2.4.7)$$

Para determinar la magnitud de la velocidad del centro de masa común después del impacto, consideremos la siguiente ecuación:

$$\vec{p}_T' = m_T \vec{v}_T' \dots(2.4.8)$$

donde m_T , es la masa total de ambos vehículos y \vec{v}_T' es la velocidad del centro de masa común después del impacto. Despejando \vec{v}_T' de (2.4.8) escribimos

$$\vec{v}_T' = \frac{\vec{p}_T'}{m_T} \dots(2.4.9)$$

Sustituyendo (2.4.6) en (2.4.9) y evaluando numéricamente llegamos a

$$\vec{v}_T' = \frac{(10680.84001 \hat{i} + 1863.354 \hat{j}) \text{ lb} \cdot \text{ft} / \text{s}}{\frac{(6000 + 4000) \text{ lb}}{32.2 \text{ ft} / \text{s}^2}} \left[\frac{\text{lb}}{\text{lb} \cdot \text{ft} / \text{s}^2} \right]$$

$$\therefore \vec{v}_T' = (34.3923 \hat{i} + 6.00 \hat{j}) \text{ ft} / \text{s}$$

$$\therefore |v_T'| = 34.91175 \text{ ft} / \text{s}$$

Para resolver (b), de la sección 2.8 sabemos que en el caso de un impacto perfectamente plástico, $e = 0$, de tal manera que

$$v_A' = v_B' = v_A \left(\frac{m_A}{m_A + m_B} \right) + v_B \left(\frac{m_B}{m_A + m_B} \right) \dots(2.4.10)$$

Debido a que las velocidades tienen componentes en x y en y se debe escribir la ecuación (2.4.10) para cada eje, así que para el eje x es:

$$v_{Ax}' = v_{Bx}' = v_{Ax} \left(\frac{m_A}{m_A + m_B} \right) + v_{Bx} \left(\frac{m_B}{m_A + m_B} \right) \dots(2.4.11)$$

De acuerdo a los datos proporcionados y al esquema sabemos que

$$v_{Ax} = 40 \text{ ft} / \text{s}$$

$$v_{Bx} = 30 \text{ ft} / \text{s} (0.866) = 25.9808 \text{ ft} / \text{s}$$

$$v_{Ay} = 0 \text{ ft} / \text{s}$$

$$v_{By} = 30 \text{ ft} / \text{s} (0.5) = 15 \text{ ft} / \text{s}$$

Evaluando numéricamente en (2.4.11) se tiene

$$v_{Ax}' = v_{Bx}' = (40 \text{ ft/s}) \left(\frac{6000}{10000} \right) + (25.9808 \text{ ft/s}) \left(\frac{4000}{10000} \right)$$

$$\therefore v_{Ax}' = v_{Bx}' = 34.3923 \text{ ft/s}$$

Escribiendo la ecuación (2.4.10) para el eje y tenemos que:

$$v_{Ay}' = v_{By}' = v_{Ay} \left(\frac{m_A}{m_A + m_B} \right) + v_{By} \left(\frac{m_B}{m_A + m_B} \right) \dots(2.4.12)$$

Evaluando numéricamente en (2.4.12) obtenemos

$$v_{Ay}' = v_{By}' = 0 \text{ ft/s} \left(\frac{6000}{10000} \right) + (15 \text{ ft/s}) \left(\frac{4000}{10000} \right) = 6 \text{ ft/s}$$

$$\therefore v_{Ay}' = v_{By}' = 6 \text{ ft/s}$$

La energía cinética total, es igual a la suma de la energía cinética de cada uno de los vehículos, es decir

$$T_T = T_A + T_B = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \dots(2.4.13)$$

Sustituyendo los valores correspondientes en (2.4.13) encontramos el valor de T_T

$$T_T = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{6000 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (40 \text{ ft/s})^2 + \left(\frac{4000 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (30 \text{ ft/s})^2 \right]$$

$$\therefore T_T = 204968.9441 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

La energía cinética total después del impacto es

$$T_T' = \frac{1}{2}(m_A + m_B) (v_T')^2 \dots(2.4.14)$$

Evaluando numéricamente en la ecuación (2.4.14) tenemos

$$T_T' = \frac{1}{2} \left(\frac{10000 \bar{\text{lb}}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \right) (34.91175 \text{ ft/s})^2$$

$$\therefore T_T' = 189259.3615 \bar{\text{lb}} \cdot \text{ft}$$

La pérdida de energía cinética es la diferencia entre la energía cinética después del impacto menos la energía cinética antes del impacto, es decir

$$\Delta T = T_T' - T_T \dots(2.4.15)$$

Evaluando numéricamente en esta última ecuación llegamos a la solución del problema

$$\Delta T = (189259.3615 - 204968.9441) \bar{\text{lb}} \cdot \text{ft}$$

$$\therefore \Delta T = -15709.5826 \bar{\text{lb}} \cdot \text{ft}$$

Problema 2.5

El cuerpo A de 50 kg y el cuerpo B de 20 kg mostrados en la figura 2.5.1 se mantienen en equilibrio por la acción de la fuerza P y la fuerza del resorte. La constante del resorte es de 150 N/m y en la situación mostrada su tensión es de 50 N. El coeficiente de fricción entre los bloques y los planos es de 0.1. Para permitir el movimiento de los cuerpos se retira la fuerza P. Calcule la velocidad de A después de haberse desplazado 2m.

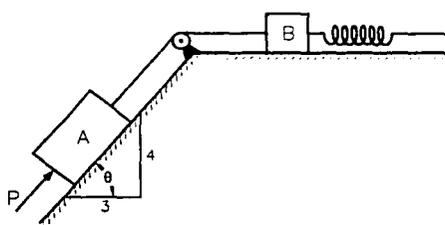
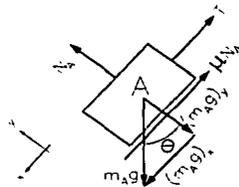


Figura 2.5.1

Para resolver el problema dibujamos primero un D.C.L. para el cuerpo A como se muestra a continuación, donde hemos considerado que el movimiento se da hacia abajo del plano inclinado debido a que como se ha retirado la fuerza P, el cuerpo A tiende a caer por la acción de la gravedad, esto sin contar que la masa de A es mayor que la de B.



Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje y del sistema de referencia mostrado vemos que en sentido (+) solo actúa la fuerza normal de A perpendicularmente a la superficie de contacto y en sentido opuesto sólo actúa la componente del peso en dicho eje. Así que podemos escribir:

$$F_{y_A} = N_A - (m_A g)_y = m_A a_A, = 0 \dots(2.5.1)$$

$$N_A = (m_A g)_y \dots(2.5.1')$$

$$\therefore N_A = m_A g \cos \theta \dots(2.5.1'')$$

cabe mencionar que la ecuación (2.5.1) se igualó con cero ya que la aceleración sobre el eje y del sistema de referencia mostrado es nula, pues el movimiento se da únicamente a lo largo del eje x.

Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje x, vemos que en sentido (+) sólo actúa la componente del peso en dicho eje, mientras que en sentido (-) actúan la tensión T de la cuerda, la cual interconecta a los bloques A y B, y la fuerza de fricción que presenta oposición al movimiento. Así que podemos escribir

$$F_{x_A} = (m_A g)_x - T - \mu N_A = m_A a_A \dots(2.5.2)$$

obteniendo la proyección de la componente del peso en x y sustituyendo la ecuación (2.5.1'') en (2.5.2) escribimos

$$F_{x_A} = m_A g \sin \theta - T - \mu m_A \cos \theta = m_A a_A \dots(2.5.2')$$

El trabajo realizado por el cuerpo A es igual a la sumatoria del trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, del D.C.L. de A podemos escribir

$$W_A = W_{(m_A g)_x} + W_T + W_{\mu N_A} + W_{N_A} + W_{(m_A g)_y}, \dots(2.5.3)$$

pero como las fuerzas que son perpendiculares al desplazamiento no realizan trabajo, la ecuación (2.5.3) se reduce a

$$W_A = W_{(m_A g)_x} + W_T + W_{\mu N_A} \dots(2.5.4)$$

Sabemos que el trabajo está definido como

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \dots(2.5.5)$$

así que el trabajo de A es

$$W_A = \int_{r_1}^{r_2} F_{x_A} dr = \int_{r_1}^{r_2} (m_A g \sin \theta - T - \mu m_A g \cos \theta) dr \dots(2.5.5')$$

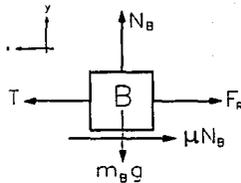
donde el signo lo determina el sentido del movimiento (según el sistema de referencia en el D.C.L.). Resolviendo la integral de (2.5.5') llegamos a

$$W_A = (m_A g \sin \theta - T - \mu m_A g \cos \theta) \Delta r \dots(2.5.6)$$

Utilizando el principio del trabajo y la energía cinética podemos escribir

$$W_A = (m_A g \sin \theta - T - \mu m_A g \cos \theta) \Delta r = \frac{1}{2} m_A (v_{r_A}^2 - v_{i_A}^2) \dots(2.5.6')$$

El D.C.L. del cuerpo B es el siguiente:



Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje y del sistema de referencia tenemos que

$$F_{y_B} = N_B - m_B g = m_B a_{B_y} = 0 \dots(2.5.7)$$

$$\therefore N_B = m_B g \dots(2.5.7')$$

Analizando las fuerzas que actúan a lo largo del eje x apreciamos que en sentido (+) sólo actúa la fuerza de tensión T , mientras que en sentido opuesto actúan la fuerza del resorte F_R y la fuerza de fricción μN_B , así que

$$F_{x_B} = T - F_R - \mu N_B \dots(2.5.8)$$

sustituyendo (2.5.7') en (2.5.8)

$$F_{x_B} = T - F_R - \mu m_B g \dots(2.5.8')$$

Utilizando el mismo método que para el cuerpo A, escribimos para B

$$W_B = T \Delta r - \frac{k}{2} (r_2^2 - r_1^2) - \mu m_B g \Delta r = \frac{1}{2} m_B (v_{r_B}^2 - v_{i_B}^2) \dots (2.5.9)$$

El trabajo total realizado por el sistema es

$$W_T = W_A + W_B = \Delta T_A + \Delta T_B \dots (2.5.10)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.5.6') y (2.5.9) en (2.5.10) tenemos

$$\begin{aligned} m_A g \sin \theta \Delta r - T \Delta x - \mu m_A g \cos \theta \Delta r &= \frac{1}{2} m_A v_{r_A}^2 \\ T \Delta r - \frac{k}{2} (r_2^2 - r_1^2) - \mu m_B g \Delta r &= \frac{1}{2} m_B v_{r_B}^2 \end{aligned}$$

$$m_A g \sin \theta \Delta r - \mu m_A g \cos \theta \Delta r - \frac{k}{2} (r_2^2 - r_1^2) - \mu m_B g \Delta r = \frac{1}{2} (m_A v_{r_A}^2 + m_B v_{r_B}^2) \dots (2.5.11)$$

cabe mencionar que el término v_i^2 se eliminó de las primeras dos ecuaciones ya que el sistema parte del reposo. Considerando que la cuerda que conecta a ambos bloques es inextensible, podemos decir que las velocidades finales de los bloques son iguales, es decir

$$v_{r_A} = v_{r_B} = v_f \dots (2.5.12)$$

Sustituyendo (2.5.12) en (2.5.11) llegamos a

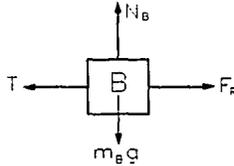
$$g \Delta r \left[(m_A) (\sin \theta - \mu \cos \theta) - \mu m_B \right] - \frac{k}{2} (r_2^2 - r_1^2) = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_f^2 \dots (2.5.13)$$

Despejando la velocidad final de la ecuación (2.5.13) tenemos que

$$v_f = \pm \sqrt{\frac{2g \Delta r \left[(m_A) (\sin \theta - \mu \cos \theta) - \mu m_B \right] - k (r_2^2 - r_1^2)}{m_A + m_B}} \dots (2.5.14)$$

Antes de evaluar numéricamente en la ecuación (2.5.14), es necesario determinar los valores de r_1 y r_2 , para lo cual hacemos la siguiente consideración:

Dibujando el D.C.L. del bloque B en el instante inicial cuando el sistema está en equilibrio, tenemos que es el siguiente



nótese que no hay fuerza de fricción, debido a que el sistema está en equilibrio, y solamente las cuatro fuerzas mostradas son las encargadas de mantenerlo así. Del D.C.L. (y de las condiciones del problema) podemos ver que $T = F_R = 50 \text{ N}$ y sabemos que $F_R = k r$, de tal modo que sustituyendo $r = r_1$ en la última ecuación y despejando tenemos

$$r_1 = \frac{F_R}{k} = \frac{50 \text{ N}}{150 \text{ N/m}} = \frac{1}{3} \text{ m}$$

y por las condiciones del problema

$$r_2 = r_1 + 2 \text{ m}$$

$$r_2 = \left(\frac{1}{3} + 2 \right) \text{ m} = \frac{7}{3} \text{ m}$$

Ahora sí, evaluando numéricamente en la ecuación (2.5.14) llegamos al resultado correcto:

$$v_f = \pm \sqrt{\frac{(2)(9.8 \text{ m/s}^2)(2 \text{ m})\{ (50 \text{ kg})(0.8) - (0.1)(0.6) - (0.1)(20 \text{ kg}) \} - (150 \text{ kg/s}^2)[(7/3)^2 - (1/3)^2] \text{ m}^2}{(50+20) \text{ kg}}}$$

$$\therefore v_f = \pm 2.858571 \text{ m/s}$$

Para las condiciones del problema el valor correcto de la velocidad es el valor (+).

CAPÍTULO 3

“DINÁMICA DE CUERPO RÍGIDO CON MOVIMIENTO PLANO”

3.1 TRASLACIÓN

Un *cuerpo rígido* es el caso especial de los sistemas con muchas partículas, donde todos sus componentes permanecen constantes bajo la aplicación de una fuerza o un momento. Un cuerpo rígido conserva su forma durante todo su movimiento.

Sean A y B dos partículas de un cuerpo rígido que se encuentra en traslación (rectilínea o curvilínea). Si \vec{r}_A y \vec{r}_B representan a los vectores de posición A y B, respectivamente, con respecto a un sistema de referencia fijo, y $\vec{r}_{B/A}$ es el vector que une A y B, tenemos que

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \quad \dots(3.1.1)$$

Si derivamos la ecuación (3.1.1) con respecto a t, el vector $\vec{r}_{B/A}$ debe mantener su magnitud y dirección constantes, ya que A y B pertenecen al mismo cuerpo rígido, de modo que

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A \quad \dots(3.1.2)$$

Diferenciando nuevamente llegamos a

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A \quad \dots(3.1.3)$$

Así que podemos concluir que cuando un cuerpo rígido se encuentra en un movimiento de traslación, todos los puntos tienen la misma velocidad y la misma aceleración en cualquier instante dado. En el caso de traslación rectilínea, todas las partículas del cuerpo se desplazan a lo largo de líneas rectas paralelas, y su velocidad y aceleración conservan la misma dirección durante todo el movimiento; mientras que en la traslación curvilínea, la velocidad y la aceleración cambian tanto de dirección como de magnitud en cada instante.

3.2 ROTACIÓN CON RESPECTO A UN EJE FIJO

El movimiento es de rotación alrededor de un eje fijo, cuando todas las partículas describen trayectorias circulares concéntricas alrededor de una línea denominada eje de rotación. Sabemos que la velocidad se define como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \dots(3.2.1)$$

donde a su vez el vector $\vec{\omega}$ está definido como

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k} = \dot{\theta} \hat{k} \quad \dots(3.2.2)$$

este vector está dirigido a lo largo del eje de rotación y es llamado *velocidad angular* del cuerpo rígido, cuya magnitud es igual a la razón de cambio $\dot{\theta}$ de la coordenada angular, y su sentido lo obtenemos mediante la regla de la mano derecha.

Para obtener la aceleración \vec{a} de una partícula P del cuerpo rígido, derivamos la ecuación (3.2.1) con respecto a t y llegamos a

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \dots(3.2.3)$$

pero sabemos que

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} \quad , \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

donde $\vec{\alpha}$ es el vector aceleración angular. Sustituyendo las relaciones anteriores en (3.2.3) tenemos

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \dots(3.2.4)$$

Al derivar con respecto a t la ecuación (3.2.2), donde la magnitud y dirección de \hat{k} son constantes, escribimos

$$\vec{\alpha} = \alpha \hat{k} = \dot{\omega} \hat{k} = \ddot{\theta} \hat{k} \quad \dots(3.2.5)$$

Concluimos que la aceleración angular $\vec{\alpha}$ de un cuerpo rígido que gira con respecto a un eje fijo es un vector dirigido a lo largo del eje de rotación, y cuya magnitud es igual a la razón de cambio de la velocidad angular.

Si sustituimos $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ y $\vec{\alpha} = \alpha \hat{k}$ en la ecuación (3.2.4), la aceleración la expresamos como

$$\vec{a} = \alpha \hat{k} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \quad \dots(3.2.6)$$

se dio este resultado ya que multiplicando vectorialmente dos veces a \vec{r} por \hat{k} se produce una rotación de 180° del vector \vec{r} .

Transformando \vec{a} en su componentes tangencial y normal, tenemos

$$\vec{a}_t = \alpha \hat{k} \times \vec{r} ; a_t = r\alpha \dots(3.2.7)$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} ; a_n = r\omega^2 \dots(3.2.8)$$

Recordemos que si el escalar α es positivo, la componente tangencial apunta en la dirección antihoraria, y en la dirección horaria si α es negativo, mientras que la componente normal siempre apunta hacia O, o sea, en la dirección opuesta a la de \vec{r} .

3.2.1 ECUACIONES QUE DEFINEN LA ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO CON RESPECTO A UN EJE FIJO

Cuando la coordenada angular θ de un cuerpo rígido se puede expresar como una función conocida de t , teóricamente, se dice que se conoce el movimiento de ese cuerpo rígido que gira con respecto a un eje fijo, pero, en la práctica, la rotación de un cuerpo rígido casi nunca queda definida por una relación entre θ y t . Generalmente, el tipo de aceleración angular que el cuerpo posee especifica las condiciones del movimiento, es decir, α puede estar en función de t , de θ o de ω .

De acuerdo a las ecuaciones (3.2.2) y (3.2.5) escribimos

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \dots(3.2.1.1)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \dots(3.2.1.2)$$

o despejando dt de (3.2.1.1) y sustituyendo en (3.2.1.2) tenemos

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \dots(3.2.1.3)$$

Por lo general se presentan dos casos particulares de rotación:

- (1) *Rotación uniforme*, donde la característica básica es que la aceleración angular es cero, la velocidad angular es constante, y la coordenada angular θ está dada por

$$\theta_r = \theta_i + \omega t \dots (3.2.1.4)$$

- (2) *Rotación uniformemente acelerada*, en este caso la aceleración angular es constante, y las siguientes ecuaciones relacionan la velocidad angular, la coordenada angular y el tiempo.

$$\omega_r = \omega_i + \alpha t \dots (3.2.1.5)$$

$$\theta_r = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \dots (3.2.1.6)$$

$$\omega_r^2 = \omega_i^2 + 2 \alpha (\theta_r - \theta_i) \dots (3.2.1.7)$$

3.3 MOVIMIENTO PLANO GENERAL

El movimiento plano general es un movimiento plano que no es de traslación ni de rotación, pero que se puede considerar como la suma de una traslación y una rotación.

En el caso general de movimiento plano, consideremos un desplazamiento pequeño que hace que dos partículas A y B de un cuerpo rígido se desplacen, respectivamente, desde A_1 y B_1 hasta A_2 y B_2 (figura 3.3.1). Este desplazamiento se puede dividir en dos partes: en una, las partículas se desplazan hasta A_2 y B_1' , mientras que la línea AB conserva la misma dirección; en la otra, B_1' se desplaza hasta B_2 , mientras que A permanece fijo. La primera parte del movimiento es una traslación, y la segunda, una rotación con respecto al punto A.

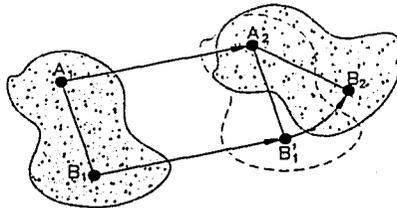


Figura 3.3.1

3.3.1 VELOCIDAD ABSOLUTA Y VELOCIDAD RELATIVA EN EL MOVIMIENTO PLANO

La velocidad absoluta \vec{v}_B de una partícula B de una placa representativa, se obtiene con la fórmula para la velocidad relativa, la cual se escribe como

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \dots(3.3.1.1)$$

puede apreciarse que el lado derecho de la ecuación representa una suma vectorial. La velocidad \vec{v}_A denota la traslación de la placa junto con A, en tanto que la velocidad relativa $\vec{v}_{B/A}$ corresponde a la rotación de la placa en torno de A, y se mide con respecto a ejes con centro en A y de orientación fija. Si $\vec{r}_{B/A}$ representa el vector de posición de B con respecto a A, y $\omega \hat{k}$ corresponde a la velocidad angular de la placa con respecto a los ejes de orientación fija, podemos escribir

$$\vec{v}_{B/A} = \omega \hat{k} \times \vec{r}_{B/A} \dots(3.3.1.2) ; v_{B/A} = \omega r \dots(3.3.1.2')$$

donde r es la distancia de A a B. Sustituyendo (3.3.1.2) en (3.3.1.1) tenemos

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega \hat{k} \times \vec{r}_{B/A} \dots(3.3.1.3)$$

Si se utiliza B como punto fijo, se obtiene el mismo resultado. Si se descompone el movimiento dado en una traslación junto con B y una rotación simultánea con respecto a B, tenemos que

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \dots(3.3.1.4)$$

Podemos ver que $\vec{v}_{A/B}$ y $\vec{v}_{B/A}$ tienen la misma magnitud, pero tienen sentido opuesto. Por lo tanto, podemos concluir que el sentido de la velocidad relativa depende del punto de referencia seleccionado, mientras que la velocidad angular $\vec{\omega}$ de un cuerpo rígido en movimiento plano es independiente del punto de referencia.

3.3.2 ACELERACIÓN ABSOLUTA Y ACELERACIÓN RELATIVA EN EL MOVIMIENTO PLANO

La aceleración absoluta \vec{a}_B de una partícula B de una placa representativa, la podemos obtener mediante la fórmula de aceleración relativa, la cual se escribe como

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \dots(3.3.2.1)$$

donde el lado derecho de la ecuación representa una suma de vectores. La aceleración \vec{a}_A denota la traslación de la placa junto con A, mientras que la aceleración relativa $\vec{a}_{B/A}$ corresponde a la rotación de la placa en torno de A, y se mide con respecto a ejes con centro en A y de orientación fija. La aceleración relativa $\vec{a}_{B/A}$ se puede descomponer en dos componentes: una componente tangencial y una normal. Si $\vec{r}_{B/A}$ representa el vector de posición de B con respecto a A, y $\omega \hat{k}$ y $\alpha \hat{k}$ denotan, respectivamente, la velocidad angular y la aceleración angular de la placa con respecto a ejes de orientación fija, tenemos

$$(\vec{a}_{B/A})_t = \alpha \hat{k} \times \vec{r}_{B/A} \dots(3.3.2.2) \quad ; \quad (\dot{a}_{B/A})_t = r\alpha \dots(3.3.2.2')$$

$$(\vec{a}_{B/A})_n = -\omega^2 \vec{r}_{B/A} \dots(3.3.2.3) \quad ; \quad (a_{B/A})_n = r\omega^2 \dots(3.3.2.3')$$

donde r es la distancia de A a B. Nótese que las ecuaciones de la izquierda están escritas en forma vectorial, y las de la derecha representan su correspondiente magnitud.

Sustituyendo en la ecuación (3.3.2.1) las ecuaciones (3.3.2.2) y (3.3.2.3) tenemos que

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \alpha \hat{k} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A} \dots(3.3.2.4)$$

3.4 ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA UN CUERPO RÍGIDO

Consideremos un cuerpo rígido en el que actúan varias fuerzas externas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$. Suponiendo que el cuerpo se compone de un gran número n de partículas de masa Δm_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), y si consideramos primeramente el movimiento del centro de masa G del cuerpo con respecto al sistema de referencia newtoniano O_{xyz} , de acuerdo con la ecuación (2.2.5) podemos escribir

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \dots(3.4.1)$$

donde m es la masa del cuerpo y \vec{a} es la aceleración del centro de masa G . Regresando al movimiento del cuerpo con respecto al sistema de referencia centroidal G_x, y, z , y de acuerdo con la ecuación (2.3.5) escribimos

$$\sum \tau_G = \dot{\vec{L}}_G \dots(3.4.2)$$

donde $\dot{\vec{L}}_G$ denota la razón de cambio de \vec{L}_G , la cantidad de movimiento angular con respecto a G del sistema de partículas que forman el cuerpo rígido. De aquí en adelante, nos referiremos a \vec{L}_G simplemente como la cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido con respecto a su centro de masa G . Juntas, las ecuaciones (3.4.1) y (3.4.2) expresan que el sistema de fuerzas externas es equipolente al sistema compuesto por el vector $m \vec{a}$ fijo en G y del par de momento $\dot{\vec{L}}_G$.

3.5 CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

La cantidad de movimiento angular \vec{L}_G de una placa con respecto a su centro de masa es

$$\vec{L}_G = \vec{I} \vec{\omega} \dots(3.5.1)$$

donde \vec{I} representa el momento de inercia de la placa con respecto a un eje centroidal perpendicular a la placa. Al derivar la ecuación (3.5.1) obtenemos

$$\dot{\vec{L}}_G = \vec{I} \dot{\vec{\omega}} = \vec{I} \vec{\alpha} \dots(3.5.2)$$

Vemos que la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular de la placa está representada por un vector de la misma dirección que $\vec{\alpha}$ (es decir, perpendicular a la placa) y de magnitud $\vec{I} \alpha$.

3.6 MOVIMIENTO PLANO DE UN CUERPO RÍGIDO. PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

Si tenemos una placa rígida de masa m que se mueve bajo la acción de varias fuerzas externas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$, contenidas en el plano xy de la placa, sustituyendo $\dot{\vec{L}}_G$ de la ecuación (3.5.2) en la ecuación (3.4.2), y escribiendo las ecuaciones fundamentales de movimiento (3.4.1) y (3.4.2) en forma escalar tenemos

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \dots(3.6.1a) ; \quad \sum F_y = m\bar{a}_y \dots(3.6.1b) ; \quad \sum \tau_G = I\bar{\alpha} \dots(3.6.1c)$$

Estas ecuaciones demuestran que si determinamos la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la placa y su momento resultante con respecto a G , obtendríamos fácilmente la aceleración del centro de masa G de la placa y su aceleración angular $\bar{\alpha}$.

Como el movimiento de un cuerpo rígido depende únicamente de la resultante y la resultante de momentos de las fuerzas externas que actúan sobre él, se deduce que *dos sistemas de fuerzas equipolentes* (es decir, que tienen la misma fuerza resultante y el mismo momento resultante) *también son equivalentes*, es decir, tienen exactamente el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado.*

Cuando un cuerpo rígido está en *traslación*, la aceleración angular de éste es nula, y sus fuerzas efectivas se reducen al vector $m\bar{a}$ fijo en G (figura 3.6.1). Por tanto, la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido en traslación pasa por el centro de la masa del cuerpo, y es igual a $m\bar{a}$.

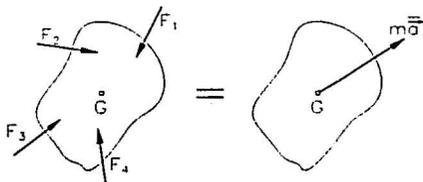


Figura 3.6.1

* *Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica*, Beer, Ferdinand P. & Johnston, E. R. 6ª Edición. McGraw-Hill.

Tesisista: José Luis Morales Jiménez

Director de Tesis: IME Juan Manuel Torres Merino

Un cuerpo rígido se encuentra en *rotación centroidal*, cuando es simétrico con respecto al plano de referencia, gira alrededor de un eje fijo perpendicular al plano de referencia y pasa por su centro de masa G . Como la aceleración \vec{a} es nula, las fuerzas efectivas del cuerpo se reducen al par $\vec{I}\vec{\alpha}$ (figura 3.6.2). De modo que, las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en rotación centroidal equivalen a un par de momento $\vec{I}\vec{\alpha}$.

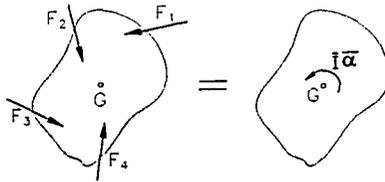


Figura 3.6.2

Las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido en realidad son equivalentes a las fuerzas efectivas de las diversas partículas que forman el cuerpo.* Este enunciado, conocido como Principio de D'Alembert, se puede expresar en forma de diagrama vectorial (figura 3.6.3) donde las fuerzas efectivas están representadas por un vector $m\vec{a}$ fijo en G y un par $\vec{I}\vec{\alpha}$. En el caso particular de una placa en traslación, las fuerzas efectivas mostradas en el esquema del lado derecho de la figura 3.6.3, se reducen a un solo vector $m\vec{a}$, mientras que en el caso de una rotación centroidal para la misma placa, se reducen a un solo par $\vec{I}\vec{\alpha}$, pero en cualquier otro caso de movimiento plano, se debe incluir tanto el vector $m\vec{a}$ como el par $\vec{I}\vec{\alpha}$.

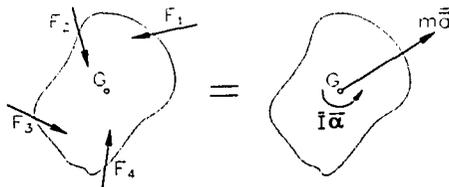


Figura 3.6.3

* Mecánica vectorial para Ingenieros. Dinámica, Beer, Ferdinand P. & Johnston, E. R. 6ª Edición, McGraw-Hill.

Tesista: José Luis Morales Jiménez

Director de Tesis: IME Juan Manuel Torres Merino

El centro de masa G de un cuerpo rígido en *movimiento plano general* se mueve como si toda la masa del cuerpo estuviera concentrada en él, y como si todas las fuerzas externas actuaran sobre dicho punto. Cabe mencionar que se entiende por movimiento plano general, cualquier movimiento plano que no es ni traslación ni rotación. También se observa que el sistema de las fuerzas externas, en general, no se reduce a un solo vector $\vec{m}\vec{a}$ con origen en G . Por lo tanto, en el caso más general del movimiento plano de un cuerpo rígido, la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo no pasa por el centro de masa de éste.

Finalmente, vemos que la ecuación (3.6.1c) seguiría siendo válida, si el cuerpo rígido al estar sometido a las mismas fuerzas aplicadas, no pudiera girar alrededor de un eje fijo que pasa por G . Así que, un cuerpo rígido en movimiento plano gira alrededor de su centro de masa como si este punto estuviera fijo.

3.7 PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA PARA UN CUERPO RÍGIDO

Supongamos que el cuerpo rígido se compone de un gran número n de partículas de masa Δm_i . De acuerdo con la ecuación (2.6.2) de la sección 2.6 escribimos

$$W_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 \quad \dots(3.7.1)$$

donde T_1 y T_2 , son los valores inicial y final, respectivamente, de la energía cinética total de las partículas que forman el cuerpo rígido, y $W_{1 \rightarrow 2}$ es el trabajo de todas las fuerzas (internas y externas) que actúan sobre las diversas partículas del cuerpo.

La energía cinética total la escribimos como

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i^2 \quad \dots(3.7.2)$$

la cual se obtiene sumando cantidades escalares positivas, y por sí misma es una cantidad escalar positiva.

El trabajo total realizado por las fuerzas internas que actúan sobre las partículas de un cuerpo rígido es cero, por lo tanto la expresión $W_{1 \rightarrow 2}$ de la ecuación (3.7.1) se reduce al trabajo efectuado por las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo durante un desplazamiento determinado. La principal ventaja de este método, es que el trabajo de las fuerzas y la energía cinética son cantidades escalares, y éste método es muy útil para la solución de problemas que implican velocidades y desplazamientos.

3.8 **ENERGÍA CINÉTICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO**

La expresión para obtener la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano es

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 \quad \dots(3.8.1)$$

donde \bar{v} es la velocidad del centro de masa G del cuerpo, ω es la velocidad angular del cuerpo e \bar{I} es su momento de inercia con respecto a un eje que pasa por G perpendicular al plano de referencia. Cabe destacar que la ecuación (3.8.1) es aplicable a cualquier movimiento plano.

Si $\omega = 0$ (caso particular de un cuerpo en traslación), la ecuación (3.8.1) se reduce a

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 \quad \dots(3.8.2)$$

y en el caso de una rotación centroidal (cuando $\bar{v} = 0$), la ecuación (3.8.1) se reduce a

$$T = \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 \quad \dots(3.8.3)$$

De esta manera podemos concluir que la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano se puede dividir en dos partes: (1) la asociada con el movimiento del centro de masa G del cuerpo, representada por la ecuación (3.8.2), y (2) la energía cinética asociada con la rotación del cuerpo alrededor de G, representada por la ecuación (3.8.3).

Para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo que pasa por O, con una velocidad angular ω , la energía cinética queda definida por

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \quad \dots(3.8.4)$$

donde I_O es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje fijo que pasa por O. La ecuación anterior es aplicable sólo en casos de que implican rotación no centroidal.

Las ecuaciones citadas en esta sección no se limitan al movimiento de placas planas o de cuerpos simétricos con respecto al plano de referencia, sino que son válidas sin importar la forma del cuerpo o la ubicación del eje de rotación.

3.9 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Cuando un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, se mueve bajo la acción de fuerzas conservadoras, el principio del trabajo y la energía se expresa como

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \dots(3.9.1)$$

que se conoce como principio de conservación de la energía. Esta ecuación indica que la suma de la energía cinética y la energía potencial del sistema permanece constante. En el caso del movimiento de un cuerpo rígido, la energía cinética del cuerpo debe incluir tanto el término traslacional $\frac{1}{2} m \bar{v}^2$ como el rotacional $\frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$.

Este principio es de gran utilidad para resolver problemas que impliquen fuerzas conservadoras como la fuerza ejercida por un resorte o la fuerza de gravedad, pero, cuando se tienen que determinar reacciones en ejes fijos, rodillos y/o correderas, el principio de conservación de la energía se debe complementar con la aplicación del ya mencionado principio de D'Alembert.

3.10 POTENCIA

En el capítulo 1, sección 7 definimos a la potencia como la rapidez con la cual se realiza un trabajo. En el caso de un cuerpo en el que actúa una fuerza \bar{F} , que se mueve con una velocidad \bar{v} , la potencia se expresó como

$$\text{Potencia} = \frac{dW}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v} \quad \dots(3.10.1)$$

Para un cuerpo rígido que gira con una velocidad angular $\bar{\omega}$ sobre el que actúa un par de momento $\bar{\tau}$ paralelo al eje de rotación, tenemos

$$\text{Potencia} = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} \quad \dots(3.10.2)$$

pero sabemos que por definición $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, así que, sustituyendo ésta última relación en (3.10.2) tenemos

$$\text{Potencia} = \tau \omega \quad \dots(3.10.3)$$

donde τ es la magnitud del par y ω es la velocidad angular del cuerpo, y cuyas unidades son diversas, pero las más utilizadas son el Watt [W] y el caballo de fuerza [hp].

3.11 PRINCIPIO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA EL MOVIMIENTO PLANO DE UN CUERPO RÍGIDO

El principio del impulso y la cantidad de movimiento es muy útil para la solución de problemas que implican tiempo y velocidades, además de ser el único método práctico para la solución de problemas que implican movimiento o impacto impulsivos.

Aplicando el principio del impulso y la cantidad de movimiento deducido en la sección 2.7 para un sistema de partículas, al movimiento de un cuerpo rígido, escribimos

$$(\text{Sis. Imp. Ext.})_{1 \rightarrow 2} = (\text{Sis. Cant. Mov.})_2 - (\text{Sis. Cant. Mov.})_1 \quad \dots(3.11.1)$$

Las cantidades de movimiento $\Delta m_i \bar{v}_i$ de las partículas pueden reducirse a un vector fijo en G, igual a la sumatoria

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \bar{v}_i \quad \dots(3.11.2)$$

y al par de momento igual a la suma de sus momentos con respecto a G

$$\bar{L}_G = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i' \times \Delta m_i \bar{v}_i \quad \dots(3.11.3)$$

Para una placa rígida o un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia, el sistema de las cantidades de movimiento de las partículas que forman el cuerpo rígido es equivalente a un vector $m \bar{v}$ con su punto de aplicación en el centro de masa G del cuerpo y un par $\bar{I}_G \bar{\omega}$ (figura 3.11.1).

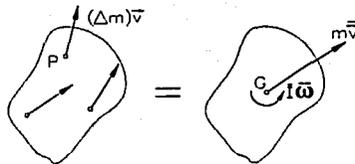


Figura 3.11.1

El vector $m\vec{v}$ está asociado con la traslación del cuerpo junto con G y representa la *cantidad de movimiento lineal* del cuerpo, mientras que el par $I\vec{\omega}$ corresponde a la rotación del cuerpo alrededor de G y representa la *cantidad de movimiento angular* del cuerpo alrededor de un eje que pasa por G.

La ecuación (3.11.1) puede expresarse de manera gráfica mediante tres diagramas que representen en un plano xy, respectivamente, el impulso de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, el sistema de las cantidades de movimiento finales, menos, el sistema de las cantidades de movimiento iniciales del cuerpo. Al sumar e igualar respectivamente las componentes x, las componentes y, y las cantidades de movimiento con respecto a cualquier punto dado de los vectores, se obtienen tres ecuaciones de movimiento que se pueden resolver para las incógnitas deseadas.

En problemas que incluyen varios cuerpos rígidos conectados, cada cuerpo se considera por separado, o, si no están en juego más de tres incógnitas, se puede aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento a todo el sistema, considerando sólo los impulsos de las fuerzas externas.

3.12 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

La ecuación (2.1.4) la cual escribiremos enseguida, demostró que para cualquier sistema de partículas o sistema de cuerpos rígidos, el cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular, calculada con respecto a un punto fijo en el espacio o el centro de masa, es igual al momento resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema calculado con respecto al mismo punto.

* Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica. Beer, Ferdinand P. & Johnston, E. R. 6ª Edición, McGraw-Hill.

Tesis: José Luis Morales Jiménez
Director de Tesis: IME Juan Manuel Torres Merino

$$\sum \dot{\vec{L}}_O = \sum \vec{\tau}_O \quad \dots(2.1.4)$$

La cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido con respecto a un punto fijo o el centro de masa es constante o se conserva, cuando el momento resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema, calculado con respecto al mismo punto es nulo. Lo anterior, matemáticamente queda expresado como

$$(\vec{L}_O)_1 = (\vec{L}_O)_2 \quad \dots(3.12.1)$$

El impulso angular puede desprejarse cuando el momento resultante con respecto a cualquier punto fijo o el centro de masa es pequeño y el intervalo de tiempo durante el cual actúa es aún más pequeño, en este caso puede suponerse que la cantidad de movimiento es constante.

Problema 3.1

El momento de inercia de masa de una polea mostrada es de 0.4 slug ft^2 . Determine en los dos casos la aceleración angular de la polea y la tensión en el cable.

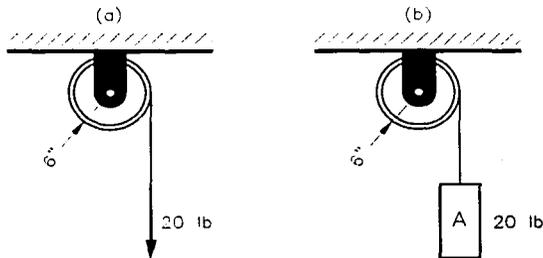


Figura 3.1.1

Resolviendo el problema primeramente para el bloque de 20 lb, dibujamos su correspondiente D.C.L. como se ilustra en la figura 3.1.2

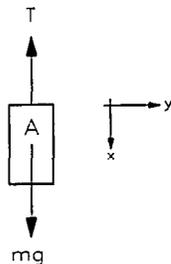


Figura 3.1.2

Haciendo sumatoria de fuerzas en x de acuerdo al sistema de referencia mostrado tenemos

$$F_x = mg - T = ma \quad \dots(3.1.1)$$

$$T = mg - ma \quad \dots(3.1.1')$$

sabemos que $W = mg = 20 \bar{\text{lb}}$. Despejando m de esta última relación y evaluando numéricamente tenemos

$$m = \frac{W}{g} = \frac{20 \bar{\text{lb}}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \left(\frac{1 \text{ slug}}{\bar{\text{lb}} \cdot \text{s}^2 / \text{ft}} \right) = 0.62111 \text{ slug}$$

Mostrando el D.C.L. de la polea (figura 3.1.3) tenemos

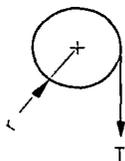


Figura 3.1.3

Haciendo sumatoria de momentos considerando (+) en el sentido de las manecillas del reloj:

$$+ \curvearrowright \tau = r T = I \alpha \quad \dots(3.1.2)$$

sustituyendo (3.1.1') en (3.1.2)

$$r(mg - ma) = I \alpha$$

$$r m g - r m a = I \alpha$$

$$r m g = I \alpha + r m a \quad \dots(3.1.2')$$

pero de la sección 3.2 sabemos que $a = r \alpha$, sustituyendo esta relación en la ecuación (3.1.2')

$$r m g = I \alpha + r m r \alpha$$

$$r m g = I \alpha + r^2 m \alpha$$

$$r m g = \alpha (I + r^2 m) \quad \dots(3.1.3)$$

despejando α de (3.1.3) llegamos a

$$\alpha = \frac{r m g}{I + r^2 m} \dots(3.1.4)$$

evaluando numéricamente en (3.1.4) tenemos

$$\alpha = \frac{(0.5 \text{ ft}) (20 \text{ lb})}{0.4 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2 + (0.5 \text{ ft})^2 (0.62111 \text{ slug})} \left(\frac{1 \text{ slug}}{\text{lb} \cdot \text{s}^2 / \text{ft}} \right)$$

$$\therefore \alpha = 18.0089 \text{ rad/s}^2$$

Para determinar la tensión del cable despejamos T de (3.1.2)

$$\therefore T = \frac{I \alpha}{r} \dots(3.1.5)$$

sustituyendo los valores correspondientes en (3.1.5) tenemos

$$T = \frac{(0.4 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2) (18.0089 \text{ rad/s}^2)}{0.5 \text{ ft}} \left(\frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2 / \text{ft}}{1 \text{ slug}} \right)$$

$$\therefore T = 14.4071 \text{ lb}$$

Para resolver el caso de la fuerza de 20 lb dibujamos un D.C.L. como se ilustra en la figura 3.1.4

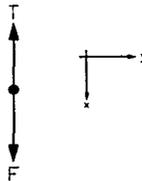


Figura 3.1.4

Haciendo sumatoria de fuerzas en x de acuerdo al sistema de referencia mostrado tenemos:

$$F_x = F - T = ma = 0 \quad \dots(3.1.6)$$

$$T = F = 20 \bar{\text{lb}} \quad \dots(3.1.6')$$

Haciendo sumatoria de momentos con respecto al centro de la polea, pero ahora empleando la regla de la mano derecha, es decir, considerando $(-)$ en el sentido de las manecillas del reloj, tenemos

$$\tau = -rT = I\alpha \quad \dots(3.1.7)$$

Despejando α de (3.1.7) tenemos

$$\alpha = -\frac{rT}{I} \quad \dots(3.1.8)$$

Evaluando numéricamente en (3.1.8) llegamos a

$$\alpha = -\left[\frac{(0.5 \text{ ft})(20 \bar{\text{lb}})}{0.4 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2} \right] \left(\frac{1 \text{ slug}}{\bar{\text{lb}} \cdot \text{s}^2 / \text{ft}} \right)$$

$$\therefore \alpha = -25.00 \text{ rad/s}^2$$

Problema 3.2

Los engranes A y B mostrados en la figura 3.2.1 pueden girar libremente alrededor de sus soportes de pasador. Sus momentos de inercia de masa son $I_A = 0.002 \text{ kg m}^2$ e $I_B = 0.006 \text{ kg m}^2$. Inicialmente están en reposo y en $t = 0$ se aplica una torca constante $\tau = 2 \text{ N} \cdot \text{m}$ al engrane B. ¿Cuántas revoluciones ha girado el engrane A en $t = 4 \text{ s}$?

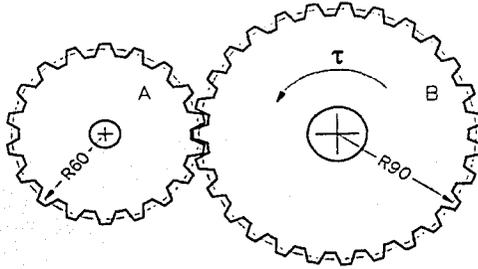


Figura 3.2.1

De las ecuaciones fundamentales de movimiento vistas en la sección 3.6, sabemos que:

$$\tau = I \alpha \dots(3.2.1)$$

adecuando la ecuación anterior para el engrane B, tenemos

$$\tau_B = I_B \alpha_B \dots(3.2.2)$$

Despejando α_B de la ecuación (3.2.2) escribimos

$$\alpha_B = \frac{\tau_B}{I_B} \dots(3.2.2')$$

Las aceleraciones tangenciales de ambos elementos son iguales de modo que

$$a_{t_B} = a_{t_A} \dots(3.2.3)$$

y sabemos que la aceleración tangencial se define como

$$a_{t_A} = r_A \alpha_A \dots(3.2.4)$$

$$a_{t_A} = a_{t_B} = r_B \alpha_B = r_A \alpha_A \dots(3.2.4')$$

Despejando α_A de la ecuación (3.2.4') tenemos

$$\alpha_A = \frac{r_B}{r_A} \alpha_B \dots(3.2.5)$$

Sustituyendo la ecuación (3.2.2') en (3.2.5) escribimos

$$\alpha_A = \frac{r_B}{r_A} \frac{\tau_B}{I_B} \dots(3.2.6)$$

Evaluando numéricamente en ésta última ecuación tenemos

$$\alpha_A = \left(\frac{90 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \right) \left(\frac{2 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.006 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \right) \left(\frac{\text{kg m/s}^2}{1 \text{ N}} \right)$$

$$\therefore \alpha_A = 500 \text{ rad/s}^2$$

Utilizando la ecuación de la posición angular de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo

$$\theta_{A_t} = \theta_{A_i} + \omega_{A_i} t + \frac{1}{2} \alpha_A t^2 \dots(3.2.7)$$

como $\theta_{A_i} = 0 \text{ rad}$ y $\omega_{A_i} = 0 \text{ rad/s}$ la ecuación (3.2.7) se reduce a

$$\theta_{A_t} = \frac{1}{2} \alpha_A t^2 \dots(3.2.7')$$

evaluando numéricamente en (3.2.7) tenemos

$$\theta_{Ar} = \frac{1}{2}(500 \text{ rad/s}^2)(4\text{s})^2$$

$$\therefore \theta_{Ar} = 4000 \text{ rad}$$

$$\theta_{Ar} = 4000 \text{ rad} \left(\frac{1 \text{ vuelta}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 636.6 \text{ vueltas}$$

Problema 3.3

Un anillo delgado y un disco circular, cada uno de masa m y radio R , se liberan del reposo sobre una superficie lisa inclinada y ruedan una distancia D como se ilustra en la figura 3.3.1. Determine la razón de los tiempos requeridos.

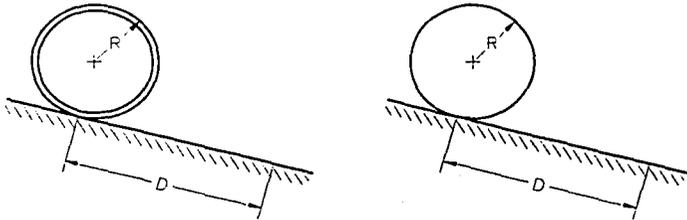
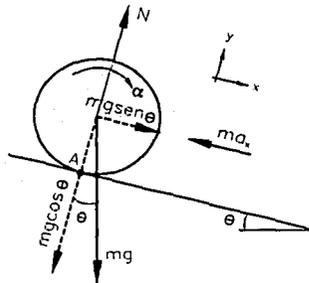


Figura 3.3.1

Para resolver el problema dibujamos un D.C.L. como se muestra a continuación, este D.C.L. nos servirá para ambos cuerpos



Analizando las fuerzas a lo largo del eje y del sistema de referencia mostrado tenemos:

$$F_y = N - mg \cos \theta = ma_y = 0 \dots(3.3.1)$$

$$\therefore N = mg \cos \theta \dots(3.3.1')$$

La ecuación (3.3.1) se igualó con cero debido a que la aceleración es nula en dicho eje, pues el movimiento se da exclusivamente sobre el eje x rotado.

Analizando las fuerzas a lo largo del eje x , vemos que:

$$F_x = mg \operatorname{sen} \theta = ma_x \quad \dots(3.3.2)$$

$$ma_x - mg \operatorname{sen} \theta = 0 \quad \dots(3.3.2')$$

Por lo que la torca o momento correspondiente en el punto A del D.C.L. es:

$$Rma_x - Rmg \operatorname{sen} \theta = -I\alpha \quad \dots(3.3.3)$$

donde los signos son determinados utilizando la Regla de la mano derecha.

Sabemos que la magnitud de la aceleración tangencial se define como

$$a_t = r\alpha \quad \dots(3.3.4)$$

donde en este caso $r = R$. Sustituyendo la ecuación (3.3.4) en (3.3.3) y ordenando los términos tenemos

$$RmR\alpha - Rmg \operatorname{sen} \theta = -I\alpha$$

$$R^2m\alpha - Rmg \operatorname{sen} \theta = -I\alpha$$

$$I\alpha + R^2m\alpha = Rmg \operatorname{sen} \theta$$

$$\alpha(I + R^2m) = Rmg \operatorname{sen} \theta$$

$$\therefore \alpha = \frac{Rmg \operatorname{sen} \theta}{I + R^2m} \quad \dots(3.3.5)$$

Sabemos que

$$\Delta\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

pero como $\omega_i = 0$ rad/s, la ecuación anterior se reduce y la podemos escribir como

$$\Delta r = D = \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad \dots(3.3.6)$$

$$t^2 = \frac{2D}{\alpha} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2D}{\alpha}} \quad \dots(3.3.7)$$

El momento de inercia para el anillo es:

$$I_{z_A} = m R^2 \quad \dots(3.3.8)$$

y el tiempo que tarda el anillo en recorrer la distancia D sobre el plano inclinado es

$$t_A = \sqrt{\frac{2D}{\alpha_A}} \quad \dots(3.3.9)$$

El momento de inercia del disco es :

$$I_{z_D} = \frac{1}{2} m R^2 \quad \dots(3.3.10)$$

y el tiempo que tarda el disco en recorrer la distancia D la definimos como

$$t_D = \sqrt{\frac{2D}{\alpha_D}} \quad \dots(3.3.11)$$

Sustituyendo la ecuación (3.3.8) en (3.3.5) tenemos que la aceleración angular para el anillo es:

$$\alpha_A = \frac{R m g \operatorname{sen} \theta}{m R^2 + R^2 m} = \frac{R m g \operatorname{sen} \theta}{2 R^2 m}$$

$$\therefore \alpha_A = \frac{g \operatorname{sen} \theta}{2 R} \quad \dots(3.3.12)$$

Sustituyendo la ecuación (3.3.10) en (3.3.5) obtenemos la aceleración angular para el disco

* Por cuestiones de espacio hemos omitido la demostración de los momentos de inercia de masa de los cuerpos.

$$\alpha_D = \frac{R mg \operatorname{sen} \theta}{\frac{1}{2} m R^2 + R^2 m} = \frac{R mg \operatorname{sen} \theta}{\frac{3}{2} R^2 m}$$

$$\therefore \alpha_D = \frac{g \operatorname{sen} \theta}{3/2 R} \dots(3.3.13)$$

El problema nos pide determinar cuál es la relación del tiempo entre el anillo y el disco que tardan ambos cuerpos para recorrer la misma distancia D, es decir, queremos determinar

$$\frac{t_A}{t_D}$$

Sustituyendo (3.3.9) y (3.3.11) en la ecuación anterior

$$\frac{t_A}{t_D} = \frac{\sqrt{\frac{2D}{\alpha_A}}}{\sqrt{\frac{2D}{\alpha_D}}} = \sqrt{\frac{\frac{2D}{\alpha_A}}{\frac{2D}{\alpha_D}}} = \sqrt{\frac{\alpha_D}{\alpha_A}} \dots(3.3.14)$$

Sustituyendo (3.3.12) y (3.3.13) en (3.3.14) tenemos

$$\frac{t_A}{t_D} = \sqrt{\frac{\frac{g \operatorname{sen} \theta}{3/2 R}}{\frac{g \operatorname{sen} \theta}{2R}}} = \sqrt{\frac{2R}{\frac{3}{2} R}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Es decir, el anillo tardará más tiempo que el disco en recorrer la misma distancia.

Problema 3.4

Un cuerpo B de 805 lb y de radio de giro 0.5 ft (figura 3.4.1) está articulado en su centro de masa. Se aplica un par horario de magnitud e^t [lb ft] a B en $t = 0$. Encuentre la velocidad angular de B en $t = 3$ s.

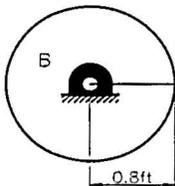


Figura 3.4.1

Sabemos que el peso está definido como

$$W = mg \quad \dots(3.4.1)$$

ahora vamos a calcular la masa del cuerpo, sin olvidar que estamos usando el sistema Inglés de unidades; despejando m de la ecuación (3.4.1)

$$m = \frac{W}{g} \quad \dots(3.4.1')$$

evaluando numéricamente en (3.4.1') tenemos

$$m = \frac{805 \bar{\text{lb}}}{32.2 \text{ ft/s}^2} \left(\frac{\text{lb} \cdot \text{ft/s}^2}{\bar{\text{lb}}} \right)$$

$$\therefore m = 25 \text{ lb}$$

Para determinar el momento de inercia de masa en el eje x , usamos la siguiente ecuación que corresponde a un cilindro

$$I_x = \frac{mR^2}{2} \dots(3.4.2)$$

evaluando numéricamente en (3.4.2)

$$I_x = \frac{25 \text{ lb} (0.8 \text{ ft})^2}{2} = 8 \text{ lb} \cdot \text{ft}^2$$

Sabemos que el par τ está definido como el producto del momento de inercia de masa por la aceleración angular α , es decir

$$\tau = I\alpha \dots(3.4.3)$$

de modo que por las condiciones del problema podemos escribir

$$\tau = I\alpha = -e^t \dots(3.4.3')$$

donde el signo (-) lo determina la regla de la mano derecha, pues el par está aplicado en el sentido de las manecillas de reloj.

Por definición, la aceleración angular es igual a la derivada de la velocidad angular con respecto al tiempo, es decir

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \dots(3.4.4)$$

sustituyendo (3.4.4) en (3.4.3')

$$I \frac{d\omega}{dt} = -e^t \dots(3.4.5)$$

Integrando la ecuación (3.4.5) y resolviendo para determinar el valor de ω tenemos

$$\int_0^{\omega} I d\omega = - \int_0^t e^t dt$$

$$I\omega = -e^t + e^0 \dots(3.4.6)$$

despejando ω de (3.4.6)

$$\omega = \frac{-e^1 + e^0}{I} \dots(3.4.7)$$

evaluando numéricamente en (3.4.7) llegamos al resultado correcto

$$\omega = \frac{-e^1 + e^0}{8 \text{ lb} \cdot \text{ft}^2} = \frac{(-20.08553 + 1) (\overline{\text{lb}} \cdot \text{ft} \cdot \text{s})}{8 \text{ lb} \cdot \text{ft}^2} \left(\frac{\text{lb} \cdot \text{ft} / \text{s}^2}{\overline{\text{lb}}} \right)$$

$$\therefore \omega = -2.38569 \text{ rad/s}$$

Problema 3.5

En el diseño de una motocicleta es necesario calcular las velocidades absolutas de las partículas A y B sobre una rueda (figura 3.5.1). Suponga que el radio es 0.4 m y la velocidad inicial es 100 km/h y que la rueda se mueve sin deslizar. Calcule las velocidades de A y B.

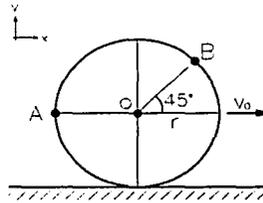


Figura 3.5.1

Para determinar la velocidad del punto A se muestra la siguiente figura:

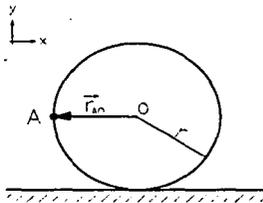


Figura 3.5.2

Donde se muestra un vector de posición que va desde el origen hasta el punto A, dirigido en la dirección negativa del eje x del sistema de referencia mostrado.

Utilizando la ecuación de velocidad relativa tenemos

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AO} \quad \dots(3.5.1)$$

Convirtiendo la velocidad inicial en unidades de m/s vemos que

$$\vec{v}_o = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) = 27.777 \hat{i} \text{ m/s}$$

Sabemos que la velocidad tangencial (llamada también velocidad periférica o rotacional) está definida como

$$v = \omega r \quad \dots(3.5.2)$$

Ya que conocemos el valor de la velocidad tangencial y del radio, despejamos a ω (velocidad angular) de la ecuación (3.5.2) y evaluando numéricamente determinamos su valor:

$$\omega = \frac{v}{r} \quad \dots(3.5.3) \quad ; \quad \omega = \frac{27.777 \text{ m/s}}{0.4 \text{ m}}$$
$$\therefore \omega = \frac{27.777}{0.4} \text{ rad/s}$$

éste valor de ω está dado en magnitud, pero como vector está expresado de la siguiente manera:

$$\vec{\omega} = (-)\omega \hat{k} \quad \dots(3.5.4)$$

$$\vec{\omega} = -\frac{27.777}{0.4} \hat{k} \text{ rad/s}$$

donde el signo es determinado mediante la *regla de la mano derecha*. La expresión está multiplicada por el vector unitario \hat{k} (vector de magnitud 1, orientado en la dirección positiva del eje z).

El vector de posición de la figura 3.5.2 que va desde el origen O hasta el punto A está definido como

$$\vec{r}_{AO} = -0.4 \hat{i}$$

donde el signo lo determina el sistema de referencia mostrado.

El producto vectorial del segundo término de la ecuación (3.5.1) está definido como

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{AO} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -\frac{27.777}{0.4} \\ -0.4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{27.777}{0.4} \right) (-0.4) \hat{j} = 27.777 \hat{j} \text{ m/s}$$

Así que la velocidad de A de acuerdo con la ecuación (3.5.1) es:

$$\vec{v}_A = (27.777 \hat{i} + 27.777 \hat{j}) \text{ m/s}$$

Para determinar el valor de la velocidad de B observemos la siguiente figura:

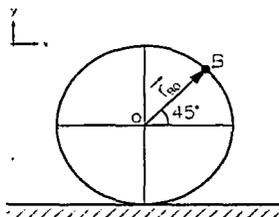


Figura 3.5.3

Utilizando la ecuación de velocidad relativa para este caso escribimos

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BO} \dots (3.5.5)$$

donde los valores de la velocidad inicial y la velocidad angular anteriormente determinados son también válidos para este caso, así que sólo resta determinar el segundo término de la ecuación (3.5.5).

El vector de posición desde O hasta B de acuerdo a la figura 3.5.3 es

$$\vec{r}_{BO} = \frac{r}{\sqrt{2}} (\hat{i} + \hat{j}) = \frac{0.4}{\sqrt{2}} (\hat{i} + \hat{j})$$

y el producto vectorial queda definido como

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{B0} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -\frac{27.777}{0.4} \\ \frac{0.4}{\sqrt{2}} & \frac{0.4}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{27.777}{\sqrt{2}} (\hat{i} - \hat{j}) \text{ m/s}$$

por lo que la velocidad de B de acuerdo a la ecuación (3.5.5) es

$$\vec{v}_B = 27.777 \hat{i} \text{ m/s} + \frac{27.777}{\sqrt{2}} (\hat{i} - \hat{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_B = 27.777 \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j} \right] \text{ m/s}$$

Problema 3.6

La barra AB mostrada en la figura 3.6.1 gira a 12 rad/s, en dirección horaria. Determine las velocidades angulares de las barras BC y CD.

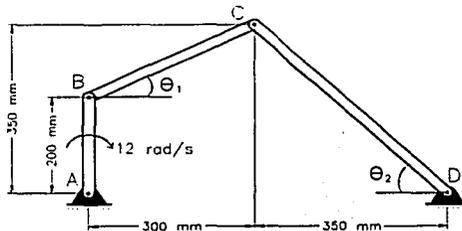


Figura 3.6.1

De la figura vemos que el ángulo θ_1 es

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{150}{300} = 26.565^\circ$$

mientras que θ_2 tiene un valor de

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{350}{350} = 45^\circ$$

De la sección 3.3.1 sabemos que la velocidad absoluta de una partícula, la podemos definir con la siguiente ecuación

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega_{BA} \times \vec{r}_{B/A}$$

donde en este caso, $\vec{v}_A = \vec{0}$ m/s ya que el punto A está fijo. De tal forma que \vec{v}_B queda definida únicamente por el producto vectorial del segundo término de la ecuación anterior, es decir

$$\vec{v}_B = \vec{0} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -\omega_{BA} \\ 0 & r_{B/A} & 0 \end{vmatrix} = \omega_{BA} r_{B/A} \hat{i} \dots(3.6.1)$$

Haciendo lo propio para C, escribimos

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \omega_{CB} \times \vec{r}_{C/B} \dots(3.6.2)$$

Antes de realizar el producto vectorial debemos tener cuidado en descomponer en vector $\vec{r}_{C/B}$ en sus componentes rectangulares, una vez hecho esto, podemos escribir

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_{CB} \\ r_{C/B} \cos \theta_1 & r_{C/B} \sin \theta_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \omega_{CB} r_{C/B} \cos \theta_1 \hat{j} - \omega_{CB} r_{C/B} \sin \theta_1 \hat{i} \dots(3.6.3)$$

Sustituyendo la ecuación (3.6.1) en (3.6.3) tenemos

$$\vec{v}_C = \omega_{BA} r_{B/A} \hat{i} + \omega_{CB} r_{C/B} \cos \theta_1 \hat{j} - \omega_{CB} r_{C/B} \sin \theta_1 \hat{i} \dots(3.6.4)$$

Para el punto D tenemos que su velocidad absoluta es:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \omega_{DC} \times \vec{r}_{D/C} \dots(3.6.5)$$

donde $\vec{v}_D = \vec{0}$ m/s ya que el punto D también está fijo. De igual manera obtenemos las componentes rectangulares del vector $\vec{r}_{D/C}$ y escribimos

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_{DC} \\ -r_{D/C} \cos\theta_2 & r_{D/C} \sin\theta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C - \omega_{DC} r_{D/C} \sin\theta_2 \hat{i} - \omega_{DC} r_{D/C} \cos\theta_2 \hat{j} \dots(3.6.6)$$

Sustituyendo la ecuación (3.6.4) en (3.6.6) llegamos a

$$\vec{0} = \omega_{BA} r_{B/A} \hat{i} + \omega_{CB} r_{C/B} \cos\theta_1 \hat{j} - \omega_{CB} r_{C/B} \sin\theta_1 \hat{i} - \omega_{DC} r_{D/C} \sin\theta_2 \hat{i} - \omega_{DC} r_{D/C} \cos\theta_2 \hat{j} \dots(3.6.7)$$

De esta última ecuación agrupamos para \hat{i}

$$0 = \omega_{BA} r_{B/A} - \omega_{CB} r_{C/B} \sin\theta_1 - \omega_{DC} r_{D/C} \sin\theta_2 \dots(3.6.8)$$

Agrupando para \hat{j}

$$0 = \omega_{CB} r_{C/B} \cos\theta_1 - \omega_{DC} r_{D/C} \cos\theta_2 \dots(3.6.9)$$

Despejando ω_{CB} de la ecuación (3.6.9) tenemos

$$\omega_{CB} = \frac{\omega_{DC} r_{D/C} \cos\theta_2}{r_{C/B} \cos\theta_1} \dots(3.6.10)$$

Sustituyendo la ecuación (3.6.10) en (3.6.8) tenemos

$$0 = \omega_{BA} r_{B/A} - \left(\frac{\omega_{DC} r_{D/C} \cos \theta_2}{r_{C/B} \cos \theta_1} \right) r_{C/B} \sin \theta_1 + \omega_{DC} r_{D/C} \sin \theta_2 \dots (3.6.11)$$

simplicando (3.6.11)

$$0 = \omega_{BA} r_{B/A} - \omega_{DC} \left(\frac{r_{D/C} \cos \theta_2 r_{C/B} \sin \theta_1}{r_{C/B} \cos \theta_1} + r_{D/C} \sin \theta_2 \right)$$

$$\omega_{DC} r_{D/C} (\cos \theta_2 \tan \theta_1 + \sin \theta_2) = \omega_{BA} r_{B/A}$$

$$\therefore \omega_{DC} = \frac{\omega_{BA} r_{B/A}}{r_{D/C} (\cos \theta_2 \tan \theta_1 + \sin \theta_2)} \dots (3.6.12)$$

Evaluando numéricamente en (3.6.12) tenemos:

$$\therefore \omega_{DC} = \frac{-(12 \text{ rad/s})(200 \text{ mm})}{\sqrt{(350)^2 + (350)^2} \text{ mm} [(\cos 45^\circ)(\tan 26.565^\circ) + \sin 45^\circ]} = -4.5714 \text{ rad/s}$$

Evaluando numéricamente en (3.6.10) determinamos el valor de ω_{CB}

$$\omega_{CB} = \frac{(4.571 \text{ rad/s}) \left(\sqrt{(350)^2 + (350)^2} \text{ mm} \right) (\cos 45^\circ)}{\sqrt{(300)^2 + (150)^2} \text{ mm} (\cos 26.565^\circ)} = 5.333 \text{ rad/s}$$

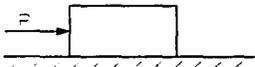
CAPÍTULO 4

“PROBLEMAS PROPUESTOS Y COMPLEMENTARIOS”

4.1 PROBLEMAS PROPUESTOS REFERENTES AL CAPÍTULO 1

4.1.1 El bloque de 25 kg representado en la figura se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el bloque y la superficie son $\mu_s = 0.4$ y $\mu_k = 0.3$, respectivamente. La fuerza P se aplica gradualmente desde cero hasta que el bloque comienza a moverse.

Calcule la magnitud mínima que debe poseer la fuerza P para iniciar el movimiento del bloque y la aceleración correspondiente.

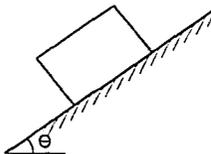


$$P \geq 98 \text{ N}, a = 0.98 \text{ m/s}^2$$

4.1.2 A la caja de 5 kg se le imprime una velocidad de 3 m/s hacia arriba en la dirección de un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de fricción entre la caja y el plano es 0.6. Calcule la velocidad de la caja:

(a) 0.25 segundos después

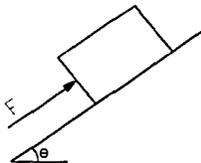
(b) 0.5 segundos después



$$(a) v = 0.50194 \text{ m/s}$$

$$(b) v \approx 0 \text{ m/s}$$

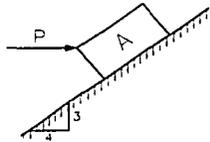
4.1.3 El bloque ilustrado en la figura tiene una masa de 10 kg y se desplaza hacia arriba del plano inclinado a una velocidad de 10 m/s, el plano tiene una inclinación de 30° , la fuerza $F = 100 \text{ t [N]}$ y el coeficiente de fricción es $\mu = 0.3$. Determine la velocidad final del bloque cuando $t = 2 \text{ s}$.



$$v_f = 15.10777 \text{ m/s}$$

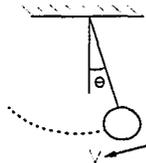
4.1.4 La masa del bloque A de la figura es de 35 kg y el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie inclinada es 0.5. Calcule la aceleración de A sometido a la acción de una fuerza horizontal P de 100 N cuando su velocidad es:

- (a) 2.5 m/s hacia arriba en la dirección del plano
- (b) 5 m/s hacia abajo en la dirección del plano
- (c) Nula



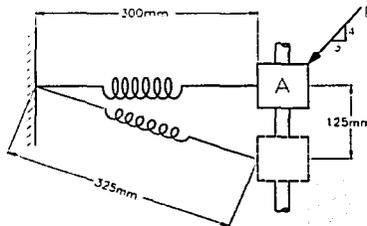
- (a) 8.3714 m/s² ↙
- (b) 1.1828 m/s² ↗
- (c) 0 m/s²

4.1.5 Se tiene un péndulo cuyo radio es de 5 m y el ángulo θ que se ilustra en la figura corresponde a 10° , la velocidad tangencial mostrada en el esquema es de 10 m/s. Si la masa del péndulo es de 10 kg, determine el valor de la tensión del cable que sostiene al objeto, así como la aceleración tangencial.



$T = 296.5111 \text{ N}$
 $a_t = 1.70175 \text{ m/s}^2$

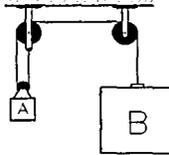
4.1.6 El collar de 30 kg representado en la figura parte del reposo desde la posición A, inicialmente el resorte no se encuentra deformado. Calcule el módulo del resorte si la velocidad del collar es de 1.5 m/s después de haber deslizado hacia abajo 125 mm. La barra es lisa y la fuerza de 250 N conserva su pendiente durante todo el movimiento.



$k = 89.6 \text{ kN/m}$

4.2 PROBLEMAS PROPUESTOS REFERENTES AL CAPÍTULO 2

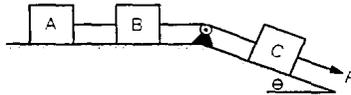
4.2.1 Calcule la velocidad de cada bloque 10 segundos después de liberarlos del reposo. Desprecie la masa de las poleas. El bloque A tiene una masa de 10 kg y el B de 50 kg.



$$v_A = 42 \text{ m/s} \uparrow, \quad v_B = 84 \text{ m/s} \downarrow$$

4.2.2 Las masas de los bloques A, B y C mostrados en la figura son iguales a 10 kg y éstos se encuentran en reposo en el instante inicial. El coeficiente de fricción entre todos los bloques y los planos horizontal e inclinado es 0.3. La fuerza F tiene una magnitud de 1000 N. El ángulo de inclinación del plano es de 22° . Calcule:

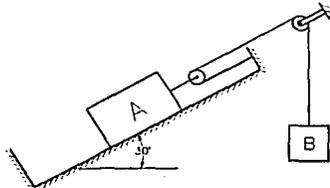
- (a) La aceleración de los bloques
 (b) La tensión de los cables T_1 (cable que interconecta a A y B) y T_2 (cable entre B y C).



$$a_A = a_B = a_C = a = 31.6884 \text{ m/s}^2$$

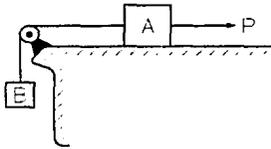
$$T_1 = 346.284 \text{ N}; \quad T_2 = 692.568 \text{ N}$$

4.2.3 Suponga que la velocidad del cuerpo A con masa de 50 kg representado en la figura es 4 m/s en el sentido de descenso del plano inclinado. Calcule la masa del cuerpo B si la aceleración de A es 2.5 m/s^2 en el sentido de ascenso sobre el plano inclinado. El coeficiente de fricción entre A y el plano inclinado es 0.3.



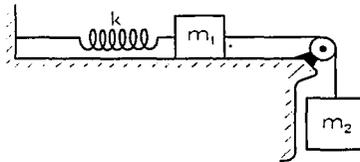
$$m_B = 25.2806 \text{ kg}$$

4.2.4 El coeficiente de fricción entre el cuerpo A de 100 kg y el plano es 0.2. La masa del cuerpo B es de 20 kg. La magnitud de la fuerza \vec{P} es $P = 500 + 90 t^2$, donde P y t se expresan en Newtons y segundos, respectivamente. La velocidad de A es 2 m/s hacia la derecha en el instante $t = 0$. Calcule la velocidad de A cuando $t = 3$ s.



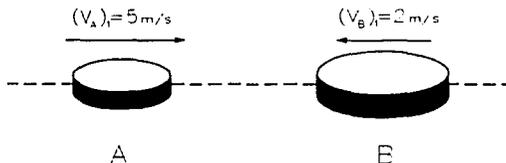
$$v_A = 11.45 \text{ m/s}$$

4.2.5 La velocidad del cuerpo m_1 de 4 kg representado en la figura, es 4 m/s dirigida hacia la derecha cuando el resorte está comprimido 10 cm (su constante es $k = 100 \text{ N/m}$). El coeficiente de fricción entre m_1 y el plano horizontal es 0.3. El cuerpo m_2 posee una masa de 8 kg. Calcule la velocidad final del bloque.



$$v_f = 4.1465 \text{ m/s}$$

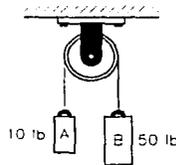
4.2.6 El disco A tiene una masa de 2 kg y se desliza sobre la superficie lisa con velocidad $(v_A)_i = 5 \text{ m/s}$ cuando choca con el disco B de 4 kg, que se deslizaba hacia A con $(v_B)_i = 2 \text{ m/s}$, y el impacto es directo y central. Si el coeficiente de restitución entre los discos es $e = 0.4$, calcule las velocidades de A y B inmediatamente después del choque.



$$v_A' = -1.5333 \text{ m/s} ; v_B' = 1.2666 \text{ m/s}$$

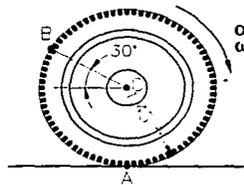
4.3 PROBLEMAS PROPUESTOS REFERENTES AL CAPÍTULO 3

4.3.1 El sistema mostrado se libera del reposo. Aplicando el principio del trabajo y la energía a cada peso, determine la magnitud de la velocidad de los pesos cuando se han movido 1 ft. ¿Cuál es la tensión en el cable durante el movimiento del sistema?



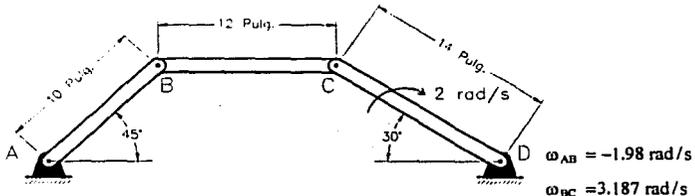
$$v_{r_A} = 8.0249 \text{ ft/s} \uparrow ; v_{r_B} = 8.0249 \text{ ft/s} \downarrow ; T = 16.66 \text{ lb}$$

4.3.2 La rueda mostrada gira hacia la derecha con una aceleración angular $\alpha = 4 \text{ rad/s}^2$ y una velocidad angular $\omega = 2 \text{ rad/s}$ (según figura). No hay resbalamiento en A. Calcule la aceleración del punto B.



$$a_B = 13.9 \text{ ft/s}^2 , \angle 8.79^\circ$$

4.3.3 La barra CD mostrada gira 2 rad/s en dirección horaria. Determine las velocidades angulares de las barras AB y BC.

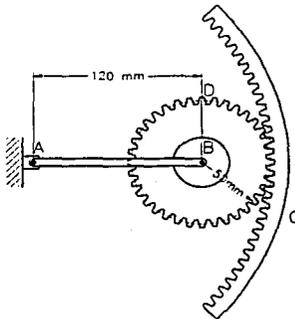


$$\omega_{AB} = -1.98 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{BC} = 3.187 \text{ rad/s}$$

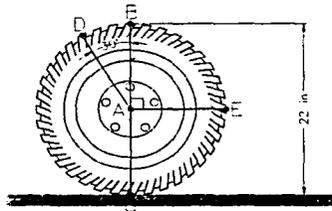
4.3.4 El brazo AB mostrado en la figura gira con una velocidad angular de 20 rad/s en sentido antihorario. Si el engrane externo C es estacionario, determine:

- Las rpm del engrane B
- La velocidad del diente del engrane, localizado en el punto D.



- 48 rpm ↺
- 3.39 m/s $\angle 45^\circ$

4.3.5 Un automóvil viaja hacia la derecha con una rapidez constante de 48 mi / h. Si el diámetro de un neumático es de 22 in., determine las velocidades de los puntos B, C, D y E en el borde del mismo.



$$v_B = 140.8 \text{ ft/s} \rightarrow ; v_C = 0 \text{ ft/s}$$

$$v_D = 136.0 \text{ ft/s} \angle 15^\circ ; v_E = 99.6 \text{ ft/s} \angle -45^\circ$$

4.3.6 Una rueda del tren de aterrizaje de un Boeing 747 pesa 240 lb, tiene un momento de inercia de masa de $17 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$ y un radio de 2 ft. Si el avión se mueve a 245 ft/s y la rueda gira sin resbalar, ¿Cuál es la energía cinética de la rueda? Exprese el resultado en BTU.

$$T=5282.74 \text{ BTU}$$

CONCLUSIONES

Este trabajo reúne los temas mínimos básicos que un estudiante de Dinámica debe conocer, la teoría que contiene es muy básica, la gran mayoría de los problemas resueltos son muy interesantes y los problemas propuestos permitirán que el estudiante de Dinámica de la carrera de Ingeniero Mecánico Electricista se ponga a prueba él mismo y tenga éxito al llegar a la solución correcta y de esta manera es motivado e impulsado a seguir preparándose cada vez más.

Se habrá notado que se requieren algunos conocimientos básicos de otras asignaturas, tales como el cálculo diferencial e integral, la estática, la cinemática, el álgebra vectorial e incluso el álgebra y la trigonometría, y por supuesto no hay que olvidar los factores de conversión que son realmente útiles en muchos de los problemas. Esto no lo mencioné en la introducción ya que como la asignatura de Dinámica es impartida hasta el cuarto semestre de la carrera, para entonces el estudiante ya adquirió los conocimientos antes mencionados y está preparado para cursar ésta y otras asignaturas. Lo importante de esto estriba, en que los conocimientos adquiridos en cualquier asignatura no los debemos "desechar", no se trata de sólo "acreditar la materia" y ya, esto debería ir mucho más allá, se trata de comprender, de aprender y si es posible de aplicar en nuestra vida cotidiana lo que hemos aprendido en las aulas.

Realmente estoy convencido que este manual de apoyo le será de gran utilidad a los estudiantes de IME, porque no está dirigido a un área específica o a un grupo determinado de la comunidad estudiantil de IME, sino está dirigido a todo IME, ya que todos sin excepción deben pasar por Dinámica y que mejor que lo hagan de una manera satisfactoria, donde ellos mismos sientan que su empeño y dedicación ha sido recompensado.

Por último, quiero concluir diciendo que espero que este trabajo sea uno de los muchos que se elaboren de este tipo, ya que de esta manera podemos tener un punto de vista diferente de una misma asignatura, porque tal vez tomamos la asignatura con un Profesor determinado y algún otro Profesor cuenta con material similar a este, de modo tal que tendremos la posibilidad de complementar y enriquecer nuestra formación académica.

IME José Luis Morales Jiménez

BIBLIOGRAFÍA

- 1.- Mecánica para ingeniería. Dinámica. Bedford, Anthony & Fowler, Wallace. Addison –Wesley Iberoamericana.
- 2.- Ingeniería mecánica. Dinámica. Sandor, Bela I. & Richter, Karen J. 2ª Edición. Prentice Hall Internacional.
- 3.- Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica. Beer, Ferdinand P. & Johnston, E.R. 6ª Edición. McGraw-Hill.
- 4.- Ingeniería mecánica. Tomo II Dinámica vectorial versión SI. Higdon, A. & Stiles, W. 3ª Edición. Prentice Hall.
- 5.- Mecánica para ingenieros. Dinámica. Huang, T.C. Fondo Educativo Interamericano.
- 6.- Mecánica para ingenieros. Dinámica. Hibbeler, R.C. 3ª Edición en español. CECSA.
- 7.- Mecánica para ingenieros: Dinámica. Singer, Ferdinand L. 3ª Edición. Harla.
- 8.- Ingeniería mecánica. Dinámica. Shames, Irving H. 2ª Edición. Prentice Hall Internacional.
- 9.- Ingeniería mecánica. Dinámica. McGill, David J. & King, Wilton W. 3ª Edición. Grupo Editorial Iberoamérica.
- 10.- Mecánica vectorial para ingenieros. Parte II: Dinámica. Nara, Harry R. LIMUSA.
- 11.- Mecánica para ingeniería: Dinámica. Shelley, Joseph F. Publicaciones marcombo, S.A.
- 12.- Mecánica para ingenieros. Dinámica. Meriam, J.L. & Kraige L.G. 3ª Edición. Reverté.
- 13.- Ingeniería mecánica. Dinámica. Riley, William F. & Sturges, Leroy D. Reverté.
- 14.- Ingeniería mecánica. Dinámica. Pytel, Andrew & Kiusalaas, Jaan. 2ª Edición. International Thomson Editores.