



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE  
DRESSLER PARA EL FLUJO EN CANALES  
RECTANGULARES DE FONDO CURVO**

**TESIS LICENCIATURA**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE**

**INGENIERO CIVIL**

**PRESENTA**

**RAFAEL DURAND MAYA**

**Dirigida por :**

**DR. GILBERTO SOTELO ÁVILA**





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**CON AMOR**

**A MI PADRE:**

**QUE ME ENSEÑO EL CAMINO  
DEL TRABAJO Y LA HONRADEZ**

**A MI MADRE:**

**CON PROFUNDO AMOR, QUIEN CON SU CARIÑO  
TEMPLO MI ALMA PARA  
LAS DIFICULTADES DE LA VIDA.**

**A MIS HERMANOS:**

**DANIEL DURAND MAYA.  
BEATRIZ DURAND MAYA.  
AHORA QUE ESTÁN LEJOS DE MI,  
NO SABEN CUANTO LOS EXTRAÑO**

**A MIS HIJOS:**

**BASTIAN Y RAFITA,  
GRACIAS POR SU AMOR  
INCONDICIONAL**

**A UNA GRAN MUJER:**

**MI ESPOSA FABI,  
QUE HA CREIDO EN MI CAPACIDAD,  
GRACIAS AMOR.**

**A MIS SOBRINOS:**

**BETY Y HUGO**

**A MI ASESOR  
DR. GILBERTO SOTELO ÁVILA**

**A MI MAESTRO  
M.I. VÍCTOR FRANCO**

**A MIS MAESTROS DEL CAMPUS  
ACATLAN QUIENES ME DIERON LA  
FORMACIÓN PROFESIONAL**

**A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**A LA ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
CAMPUS ACATALAN**

Hay hombres que luchan un día y son buenos. Hay otros que luchan un año y son mejores. Hay quienes luchan muchos años y son muy buenos. Pero hay los que luchan toda la vida: esos son los imprescindibles.

***Bertolt Brecht***

# **1 Flujo en fondos curvos**

## **1.1 Aspectos generales**

## **1.2 Antecedentes**

## **1.3 Recientes aplicaciones y nuevos desarrollos**

## **1.4 Limitaciones de las ecuaciones de Saint-Venant**

## **1.5 La necesidad de nuevas ecuaciones con términos que contengan las características geométricas del fondo**

# **2 Ecuaciones de Dressler**

## **2.1 Introducción**

## **2.2 Ecuaciones de Dressler**

### **2.2.1 Coordenadas curvilíneas**

### **2.2.2 Ecuaciones exactas de Dressler**

### **2.2.3 Ecuaciones de Dressler para flujos poco profundos**

### **2.2.4 Inclusión de un término de resistencia**

## **2.3 Flujo permanente y la generalización del perfil de Bresse.**

# **3 Aplicación de las ecuaciones de Dressler a un modelo hidráulico realizado por Sivakumaran y Yevjevich (1987)**

## **3.1 Dispositivo experimental y mediciones efectuadas**

## **3.2 Solución numérica a las discontinuidades del modelo**

## **3.3 Solución de las ecuaciones de Dressler por el método de Runge-Kutta.**

### **3.3.1 Método de Runge-Kutta de cuarto orden.**

### **3.3.2 Aplicación del método de Runge-Kutta a las ecuaciones de Dressler**

#### **4 Elaboración del programa de cómputo**

**4.1 Elección del lenguaje de programación.**

**4.2 Principios de MATLAB**

**4.3 Desarrollo del programa de cómputo aplicado a las ecuaciones de**

**Dressler.**

#### **5 Resultados y conclusiones**

# CAPITULO 1

## Flujo en fondos curvos

### 1.1 Aspectos generales

El flujo curvilíneo ocurre con frecuencia en obras que debe diseñar el ingeniero, donde el fondo del canal posee curvatura vertical apreciable que se mantiene o no constante en grandes distancias y que induce a su vez curvaturas importantes en las líneas de flujo. Es el caso de las obras de excedencia a cielo abierto o en túnel, donde es frecuente encontrar deflexiones verticales obligadas por el tipo de obra, por la topografía del terreno o para dirigir el flujo y producir su despegue con el ángulo adecuado en cubetas de lanzamiento.

Aún en estas condiciones, el flujo suele analizarse aceptando que el movimiento sea rectilíneo, es decir, que posee líneas de corriente de escasa o nula curvatura sin importar si el fondo es plano o de curvatura vertical. Con ello se admiten los procedimientos convencionales de análisis, es decir, que existe una distribución hidrostática de la presión en la sección vertical y que hay un sólo componente de la velocidad paralelo a dicho fondo, el cual es supuestamente plano.

El fondo curvo de un canal ejerce una influencia importante en la forma de la trayectoria de las partículas en cada punto del campo de flujo, al grado que adoptan curvaturas variables que modifican la distribución de la velocidad y la presión respecto de la observada en un flujo rectilíneo. En la figura 1.1 se muestran las líneas de corrientes instantáneas que se considerarían al aceptar que el flujo en el canal mostrado fuese rectilíneo, es decir, líneas de corriente

rectas y horizontales. Con ellas, la condición de frontera en el fondo curvo del canal sería continuamente violada ya que la velocidad no sería tangente a dicho fondo. Asimismo, la condición de frontera en la superficie libre del flujo curvilíneo también se violaría, toda vez que su perfil no sería horizontal ni de pequeña curvatura.

Esto significa que las trayectorias reales de las partículas del líquido adquieren curvatura cuando el movimiento es sobre un fondo curvo y se desarrollan aceleraciones normales importantes. Estas dan lugar a fuerzas centrífugas que apartan bastante la distribución de la presión en el seno del flujo respecto de la hidrostática, que es la que se acepta en el rectilíneo.

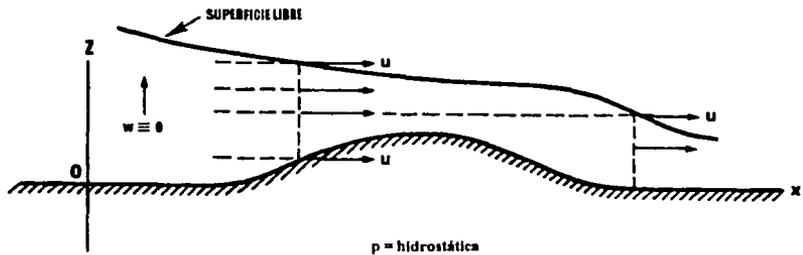


Figura 1.1 Violación de las condiciones de frontera con las ecuaciones de Saint-Venant

El flujo curvilíneo es frecuente en muchos problemas que debe resolver el ingeniero, siendo muy común que la solución se obtenga con base en los criterios válidos para el flujo rectilíneo. Por ello, es clara la necesidad de contar con un método de análisis basado en ecuaciones con términos que contengan, no sólo la inclinación del fondo del canal, sino también su curvatura. Esto conduce a que en las soluciones aparezcan los efectos importantes que la curvatura tiene en la distribución de la velocidad de las partículas, en el perfil de la superficie libre y en la distribución de la presión,

con el fin de satisfacer con precisión las condiciones de frontera del flujo (figura 1.2).

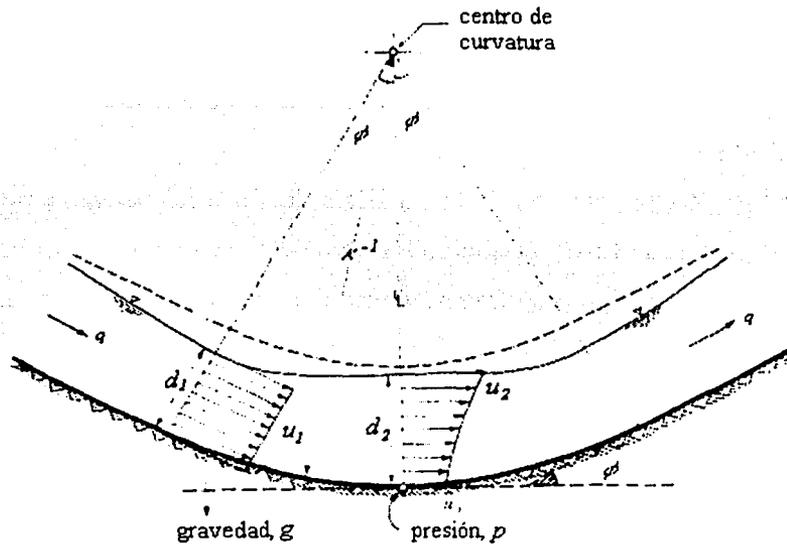


Figura 1.2 Comparación de la distribución de presiones

El propósito de esta tesis es dar la solución numérica a las ecuaciones de Dressler para el flujo en canales rectangulares con fondo curvo, aplicadas a un modelo hidráulico con determinada geometría. Esto tuvo por objeto de que los resultados obtenidos en el análisis numérico y por medio de un programa de cómputo, puedan ser verificados con los valores experimentales obtenidos por Sivakumaran y Yevjevich (1987). El programa permite determinar el tirante a lo largo de la sección cóncava o convexa, para dar solución a las ecuaciones de Dressler aplicando el método de Runge-Kutta. Se pretende que éste programa pueda definir el perfil del flujo para la sección rectangular de fondo curvo (cóncavo o convexo) y con las generalizaciones del caso, sea aplicado en obras de excedencia a cielo abierto o en túnel, donde se utilizan curvas, a

veces muy forzadas, para producir deflexiones verticales obligadas por el tipo de obra (canal abierto, túnel o cimacio), o por el terreno natural (curvas cóncavas o convexas, circulares o parabólicas). Las curvas verticales se utilizan también para dirigir el flujo y producir el despegue con un ángulo adecuado en cubetas deflectoras de lanzamiento o ahogadas.

## 1.2 Antecedentes

La base para la mayoría de los análisis de flujo no permanente en canales de fondo plano es el muy conocido sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales (1.01, 1.02), comúnmente llamadas “ecuaciones no lineales de flujo poco profundo”, atribuidas a Saint-Venant. Éstas han sido usadas en ingeniería por mas de un siglo y se han empleado comúnmente para flujos no permanentes, aunque también para análisis ondulatorio no permanente.

Algunos años después del trabajo de Saint-Venant, Boussinesq derivó ecuaciones adicionales que representan correcciones de orden superior a las ecuaciones de flujo poco profundo, para incluir un poco los efectos de la curvatura en las velocidades de las partículas, no presentes en las ecuaciones de Saint-Venant. Sin embargo, el método de Boussinesq no era sistemático o riguroso y sus resultados son ahora principalmente de interés histórico.

En la derivación de las ecuaciones de Saint-Venant se asume que la aceleración vertical de las partículas es despreciable. Esto equivale a suponer que la distribución de la presión vertical es puramente hidrostática. Las ecuaciones de Saint-Venant son :

$$u_t + uu_x + gH_x + g \operatorname{tg} \theta = 0 \quad (1.01)$$

$$H_t + uH_x + Hu_x = 0 \quad (1.02)$$

donde los subíndices denotan las derivadas parciales,  $g$  es la aceleración de gravedad,  $u(x,t)$  es el componente horizontal de la velocidad (constante en cualquier punto vertical de la sección transversal con esta teoría),  $H(x,t)$  es la

distancia vertical  $y=a(x,t)$  de la superficie libre sobre el fondo del canal. El fondo está definido por  $y=d(x)$  y  $\operatorname{tg}\theta = d'$  (el supraíndice prima, siempre denota una derivada ordinaria de una función o de una variable) (figura 1.3). En esta teoría el componente vertical  $w$  de la velocidad desaparece, es decir

$$w(x,t) \equiv 0 \quad (1.03)$$

y la presión hidrostática vale

$$p(x,y,t) = \rho g(a - y) \quad (1.04)$$

donde  $\rho$  es la densidad. Esta teoría describe a un flujo poco profundo que es no viscoso, incompresible, irrotacional y bidimensional.

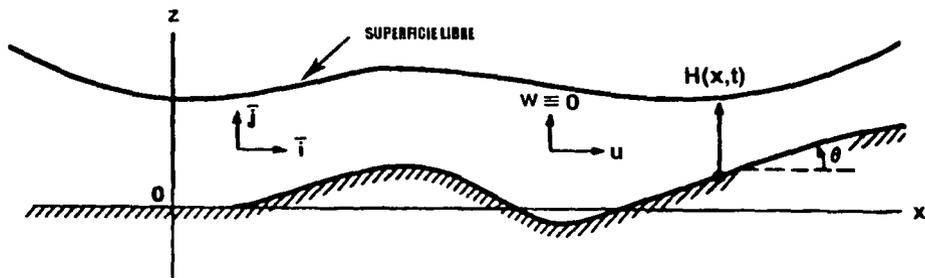


Figura 1.3 Flujo descrito por las ecuaciones de Saint-Venant

### 1.3 Recientes aplicaciones y nuevos desarrollos

Cuando el fondo del canal es lineal, horizontal o con una pequeña inclinación  $\theta$ , las ecuaciones de Saint-Venant conducen a un buen resultado como solución aproximada en los flujos poco profundos; por ello, las ecuaciones mencionadas se han usado extensivamente en su forma matemática para flujos no permanentes, son por ello de gran utilidad práctica en la ingeniería.

Un nuevo y elegante método para derivar las ecuaciones de Saint-Venant fue ideado por Friedrichs, aplicando aproximaciones asintóticas en términos de un parámetro de poca profundidad, para la formulación exacta del

problema del flujo. Friedrichs demostró su método derivando las ecuaciones de Saint-Venant para un canal horizontal en un sólo plano, pero indicando claramente cómo su método podría ser extendido a otros casos. Usando el método de Friedrichs, Keller obtuvo las ecuaciones para un canal de fondo no lineal y un flujo en dos o tres dimensiones. Además, Keller usó este método sistemático para obtener ecuaciones de aproximación superior de una manera rigurosa. El resultado de Keller para el flujo bidimensional es el mismo que el dado en las ecuaciones de Saint-Venant, donde sólo el término  $g \operatorname{tg} \theta$  tiene poca importancia en los efectos de la inclinación del fondo del canal, plano o curvo.

#### **1.4 Limitaciones de las ecuaciones de Saint-Venant**

Queda claro que estas ecuaciones representan el orden mas bajo en aproximación y que no pueden tener exactitud cuando el fondo del canal es apreciablemente curvo. La figura 1.1 muestra la línea del fondo curvo de un canal. Las condiciones de frontera en este caso son violadas. Igualmente, las condiciones de frontera en la superficie libre siempre se violan cuando el perfil no es horizontal.

La trayectoria real de la partícula es curva sobre cualquier fondo muy curvo y por consiguiente posee una aceleración vertical importante. Por lo tanto, la consideración de presión hidrostática en la ecuación (1.04) es también imprecisa.

#### **1.5 La necesidad de nuevas ecuaciones con términos que contengan las características geométricas del fondo**

Para la solución práctica en el análisis de problemas que involucran al flujo en un canal de fondo curvo, es necesario algún tipo de generalización de las ecuaciones de Saint-Venant para que ambas ecuaciones incluyan los términos que tomen en cuenta la inclinación  $\theta$  del canal, pero que también contengan

explícitamente la curvatura del fondo  $\kappa$  y su proporción de cambio  $\kappa'$ . La solución de estas ecuaciones generalizadas podría mostrar los efectos de la curvatura del fondo en la velocidad de las partículas, en el perfil de la superficie libre y en la distribución de presiones. Ésta debe obtenerse directamente de las ecuaciones de menor orden, es decir no debe requerir de soluciones adicionales de mayor orden en la corrección de las ecuaciones.

## CAPITULO 2

### Ecuaciones de Dressler

#### 2.1 Introducción

Dressler (1978) estableció nuevas ecuaciones que corresponden a una generalización de las ecuaciones diferenciales parciales definidas por la trayectoria de un flujo variado poco profundo, usualmente llamadas ecuaciones de Saint-Venant. Las nuevas ecuaciones poseen términos que contienen explícitamente la curvatura en el fondo del canal y la derivada de la curvatura. Por lo tanto el resultado es para el flujo en un fondo curvo, y la expresión contiene términos de la presión, además de los términos de la hidrostática, la cual describe el efecto de la curvatura del flujo. Las nuevas ecuaciones deben dar una solución más exacta del flujo que las de Saint-Venant, siempre que el fondo del canal sea curvo o no horizontal. Cuando el fondo es plano las ecuaciones se reducen a las de Saint-Venant. Las ecuaciones muestran también que la velocidad no es constante a lo largo de la sección ortogonal a la curvatura del fondo.

El método de derivación empieza con una posición específica de las coordenadas curvilíneas y, siguiendo una condición de frontera del método asintótico, se requiere extender el flujo dominante en transformadas de variables independientes.

Para el flujo permanente, las nuevas ecuaciones definen una generalización de la ecuación del perfil de Bresse y el término de la resistencia de Chezy se modifica para poder agregarlo a la curvatura. Las nuevas ecuaciones son hiperbólicas y se deriva la dirección de las características

reales de la curva. El punto para un flujo crítico se grafica como una función de la curva.

Aunque las ecuaciones de Dressler contienen más términos y más coeficientes complicados que las de Saint-Venant, ambas son idénticas en estructura, y por consiguiente fáciles de resolver con la computadora para un flujo variado, como se ha demostrado con las ecuaciones de Saint-Venant. Las ecuaciones de Dressler son inmediatamente aplicables a flujos a superficie libre.

## 2.2 Ecuaciones de Dressler

### 2.2.1 Coordenadas curvilíneas

En el análisis se acepta que el flujo en el canal sea bidimensional, no viscoso, incompresible e irrotacional, en principio no permanente y sometido a la acción de un campo de gravedad  $g$  constante. La dimensión del flujo en dirección ortogonal al fondo es pequeña (poco profunda) si se compara con el radio de curvatura del fondo, éste tiene la misma curvatura en todo el ancho pero varía de manera continua en la dirección del flujo.

Su derivación puede realizarse con el sistema fijo de coordenadas cartesianas  $(x, z)$ , siendo  $x$  el eje horizontal que sirve a su vez como nivel arbitrario de referencia y  $z$  el eje vertical. Sobre ellos se alojan los vectores unitarios  $i, j$  respectivamente. El origen del sistema es también arbitrario. Como se muestra en la figura 2.1

El éxito de las ecuaciones de Dressler es la correcta selección de coordenadas curvilíneas ortogonales  $(s, n)$  asociadas con la curvatura de la plantilla, en cambio, se usan coordenadas rectilíneas horizontales y verticales  $(x, z)$  en las ecuaciones de Saint-Venant.

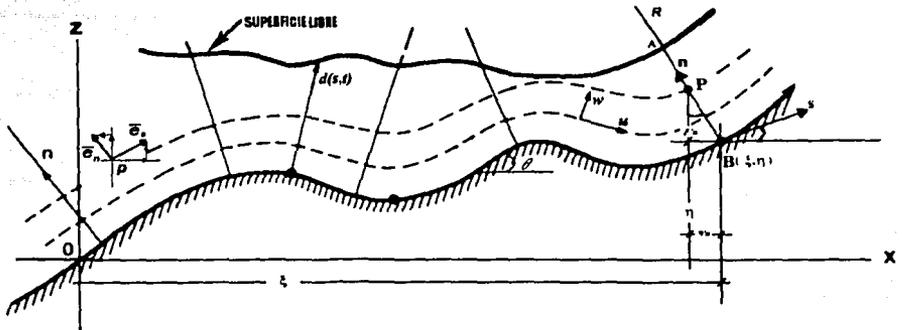


Figura 2.1 Definición de coordenadas curvilíneas

Se introduce también un sistema específico de coordenadas curvilíneas  $(s, n)$ . La coordenada  $s$  sigue fielmente la forma del fondo curvo y mide la longitud de arco de dicho fondo. La coordenada  $n$  de un punto  $P$  en el campo de flujo se establece desde el punto  $B$ , en dirección ortogonal al fondo hasta dicho punto  $P$ . El punto  $B$  en el fondo se localiza mediante las coordenadas  $x = \xi$ ,  $z = \eta$ . De este modo la curvatura que representa al fondo se define a través de las funciones (sólo de  $s$ ):

$$x = \xi(s) \quad (2.01)$$

$$z = \eta(s) \quad (2.02)$$

siendo necesario que la curvatura y la pendiente sean continuas.

El perfil de la superficie libre se desconoce, pero se representa por  $n = d(s, t)$ , donde  $d$  es la distancia ortogonal desde el fondo hasta la superficie libre (según  $n$ ) y es función de  $s$  y la variable  $t$  (tiempo).

Las nuevas variables  $(s, n)$  forman un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, como se muestra en la figura 2.1; deduciendo así que las ecuaciones de transformación entre los dos sistemas coordenados para un punto cualquiera  $P$  son :

$$x(s,n) = \xi - \eta'n \quad (2.03)$$

$$y(s,n) = \eta + \xi'n \quad (2.04)$$

donde

$$\xi'(s) = \frac{\partial \xi}{\partial s} = \cos \theta \quad (2.05)$$

$$\eta'(s) = \frac{\partial \eta}{\partial s} = \text{sen} \theta \quad (2.06)$$

son funciones sólo de  $s$ , siendo  $\theta$  el ángulo de inclinación de la tangente al fondo en el punto B respecto de la horizontal, cumpliéndose la identidad  $(\xi')^2 + (\eta')^2 = 1$ .

Los vectores unitarios base  $\bar{e}_s$  y  $\bar{e}_n$  son tangentes a las curvas que siguen las coordenadas  $(s,n)$  y ortogonales entre si (figura 2.1). Los vectores unitarios  $\bar{i}$  y  $\bar{j}$ , según  $(x,y)$  son fijos cualquiera que sea el punto en cuestión.

El vector de posición del punto P es  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$ , de manera que los vectores unitarios en dicho punto son

$$\bar{e}_s = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \right|} \quad (2.07a)$$

$$\bar{e}_n = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial n}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial n} \right|} \quad (2.07b)$$

donde los denominadores se conocen como factores de escala.

De las ecuaciones (2.03) y (2.04) resulta

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}(s, n) = (\xi' - \eta'' n) \vec{i} + (\eta' + \xi'' n) \vec{j} \quad (2.08a)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial n}(s, n) = -\eta' \vec{i} + \xi' \vec{j} \quad (2.08b)$$

donde  $\xi'' = \frac{\partial \xi'}{\partial s}$  y  $\eta'' = \frac{\partial \eta'}{\partial s}$ .

Es suficiente con definir los vectores base en el fondo ( $n=0$ ) de modo que sean función sólo de  $s$ , es decir

$$\vec{e}_s(s) = \xi' \vec{i} + \eta' \vec{j} \quad (2.09)$$

$$\vec{e}_n(s) = -\eta' \vec{i} + \xi' \vec{j} \quad (2.10)$$

ya que para  $n=0$ , de las ecuaciones (2.8a) y (2.8b) se tiene

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} \right| = \sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2} = 1$$

De acuerdo con la primera ecuación de Frenet-Serret, para el punto B en el fondo se cumple que

$$\frac{d\vec{e}_s}{ds} = \kappa \vec{e}_n$$

donde  $\kappa(s) = 1/R(s)$  es la curvatura del fondo en el punto B, definida como el recíproco del radio de curvatura  $R$  en dicho punto.

De la ecuación (2.09) se obtiene el vector

$$\frac{d\vec{e}_s}{ds} = \xi'' \vec{i} + \eta'' \vec{j} \quad (2.11)$$

el cual es perpendicular a  $\vec{e}_s$  y colineal con  $\vec{n}$ . Se cumple así que

$$\kappa^2 = \left| \frac{d\vec{e}_s}{ds} \right|^2 = (\xi'')^2 + (\eta'')^2 \quad (2.12)$$

ya que

$$|\vec{e}_n| = \sqrt{(-\text{sen } \theta)^2 + (\text{cos } \theta)^2} = 1.$$

Según las reglas del producto escalar, también se cumple que

$$\vec{e}_n \cdot \frac{d\vec{e}_s}{ds} = \vec{e}_n \cdot \kappa \vec{e}_n = \kappa$$

ya que  $\vec{e}_n \cdot \vec{e}_n = 1$ . De este modo, con las ecuaciones (2.10) y (2.11) resulta

$$\kappa = \xi' \eta'' - \eta' \xi'' \quad (2.13)$$

donde  $\kappa > 0$  describe un fondo cóncavo y  $\kappa < 0$  a uno convexo.

Para que las ecuaciones (2.03) y (2.04) sean las de transformación entre los dos sistemas coordenados, es necesario que el jacobiano de transformación sea distinto de cero, en cuyo caso deben existir ecuaciones similares para la transformación recíproca. En efecto, el jacobiano de transformación se expresa como sigue

$$J \left( \begin{array}{c} x, y \\ s, n \end{array} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial n} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial s} = (\xi' - \eta'' n) \xi' + \eta' (\eta' + \xi'' n)$$

$$J \left( \begin{array}{c} x, y \\ s, n \end{array} \right) = (\xi')^2 + (\eta')^2 - (\xi' \eta'' - \eta' \xi'') n$$

donde las derivadas parciales se han obtenido de las ecuaciones de transformación antes mencionadas. De acuerdo con las ecuaciones (2.05) y (2.06), la suma de los dos primeros términos en la anterior vale uno y con la ecuación (2.13) el jacobiano se reduce a la forma

$$J\left(\frac{x, y}{s, n}\right) = 1 - \kappa n \quad (2.14)$$

Es decir,  $J(s, n) \neq 0$  y el mapeo es posible uno a uno siempre que para  $\kappa > 0$ ,  $n \leq 1/\kappa = R$ , lo que es obvio geoméricamente; lo contrario haría que el mapeo cesara de ser uno a uno. El valor máximo de  $\kappa n$  es para  $n = d$ , la condición anterior restringe la dimensión  $d$  en todos los flujos donde  $\kappa > 0$  a que  $\kappa d < 1$ .

El factor de escala en la ecuación (2.07a) es la magnitud del vector expresado por la ecuación (8.08a), como sigue

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right| = \left[ (\xi' - \eta'' n)^2 + (\eta' + \xi'' n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Al desarrollar los binomios y agrupar términos

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right| = \left[ 1 - 2(\xi' \eta'' - \eta' \xi'') n + [(\eta'')^2 + (\xi'')^2] n^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

y de las ecuaciones (2.12) y (2.13)

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right| = \left[ 1 - 2\kappa n + \kappa^2 n^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ (1 - \kappa n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$J = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right| = 1 - \kappa n$$

En la misma forma para la ecuación 8.08b

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial n}\right| = \left[ (-\eta')^2 + (\xi')^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 1$$

esto significa que un incremento  $ds$  a partir del punto B equivale a un incremento diferencial  $J ds$  a partir del punto P y que el incremento  $dn$  es el

mismo en B es el mismo que en P, es decir, el jacobiano es el factor de escala para  $s$ , y el valor 1 lo es para  $n$ . De este modo, el incremento diferencial de arco ( $d\bar{s} + d\bar{n}$ ) en B equivale al incremento diferencial de arco en el punto P, de valor

$$da = \sqrt{(J ds)^2 + (dn)^2} \quad (2.15)$$

### 2.2.2 Ecuaciones exactas de Dressler

Las consideraciones anteriores permiten convertir las ecuaciones diferenciales básicas del movimiento para el flujo en el sistema  $(x,y)$  al propuesto  $(s,n)$ . Este sistema es ortogonal en cualquier punto del fondo del canal, pero la trayectoria de las partículas que pasan por cualquier punto P en el campo de flujo no son necesariamente ortogonales a la dirección  $n$  en que se ubica dicho punto. Esto quiere decir que el vector velocidad en el punto P tiene las componentes  $w$  y  $u$ , el primero normal al fondo y el segundo tangente al fondo como lo muestra la figura 2.2.

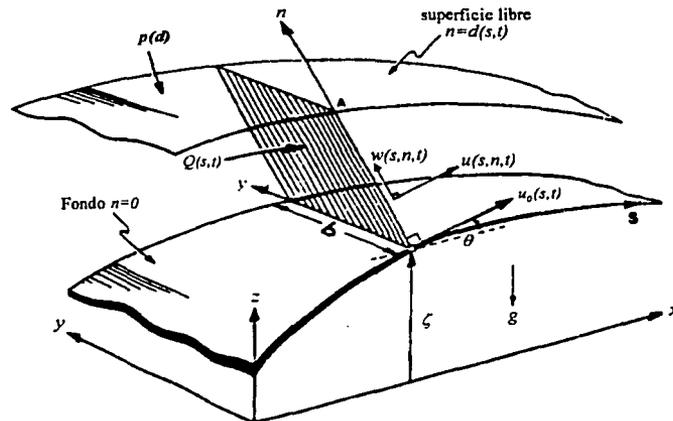


Figura 2.2 flujo curvilíneo

En ambos sistemas es  $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} = u \vec{e}_s + w \vec{e}_n$ , y de las ecuaciones (2.09) y (2.10) se obtienen las relaciones

$$u_x = u \cos \theta - w \sin \theta \quad (2.16a)$$

$$u_y = u \sin \theta - w \cos \theta \quad (2.16b)$$

Los componentes del gradiente de cualquier función escalar  $\psi$  (diferenciable en el campo de flujo) en el sistema coordenado  $(s, n)$  son:

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial s} \text{ según } s; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \text{ según } n.$$

Dentro de un campo de flujo el vector rot  $\mathbf{v}$  es igual a cero para cualquier punto e instante y la irrotacionalidad del flujo queda satisfecha cuando se cumple

$$\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial n} (Ju) = 0 \quad (2.17)$$

Asimismo, la ecuación de continuidad ( $\text{div } \vec{v} = 0$ ) se convierte en

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} (Jw) = 0 \quad (2.18)$$

por ultimo, la ecuación de Euler para flujo sin fricción, Sotelo (2001), es

$$\text{grad } H + \frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$$

O bien, en términos de sus componentes, en la dirección  $n$  se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial n} + \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (2.19)$$

y en la dirección  $s$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.20)$$

donde

$$H(s, n, t) = z + n \cos \theta + \frac{p}{g\rho} + \frac{u^2 + w^2}{2g} \quad (2.21)$$

es la energía total de una partícula de líquido en un punto P. Se ha sustituido  $\eta = z$  para referirse al perfil del fondo y mantener la simbología estandar, siendo  $p$  la presión en el punto y  $\rho$  la densidad del agua.

Las condiciones de frontera a considerar se establecen a continuación. Para un líquido no viscoso, la velocidad de la partícula en cualquier punto del fondo ( $n = 0$ ) debe ser tangencial, es decir

$$w(s, 0, t) = 0 \quad (2.22)$$

Para un punto en la superficie libre,  $n=d(s, t)$  y la presión vale

$$p(s, d, t) = 0 \quad (2.23)$$

La única condición cinemática de frontera consiste en que cualquier partícula en dicha superficie siempre permanece en ella. De este modo, con la función  $\psi(s, n, t) = n - d(s, t) = 0$ , se define a la superficie libre móvil de manera que el componente de la velocidad de la partícula superficial en dirección normal a la superficie móvil ( $\psi=0$ ) debe ser igual al componente de la velocidad también normal a dicha superficie.

El vector unitario normal a la superficie libre es

$$\bar{e}_\psi = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|}$$

La velocidad en dirección normal a dicha superficie se define por  $-(\partial\psi/\partial t)/|\nabla\psi|$  y es igual a  $\bar{u} \cdot \bar{e}_\psi$ , es decir

$$\bar{u} \cdot \nabla \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial d}{\partial t}$$

En el sistema coordenado  $(s, n)$  el vector velocidad en la superficie libre se expresa en la forma :  $\bar{u} = u_d \bar{e}_s + w_d \bar{e}_n$ . Además

$$\nabla\psi = \text{grad}\psi = \frac{1}{J} \frac{\partial\psi}{\partial s} \bar{e}_s + \frac{\partial\psi}{\partial n} \bar{e}_n = -\frac{1}{J_d} \frac{\partial d}{\partial s} \bar{e}_s + \bar{e}_n$$

donde  $\bar{e}_s$  y  $\bar{e}_n$  son los vectores unitarios básicos previamente definidos. De este modo, al efectuar el producto escalar se obtiene

$$-\frac{u_d}{J_d} \frac{\partial d}{\partial s} + w_d = \frac{\partial d}{\partial t}$$

donde  $J_d$  es el valor del jacobiano en la superficie libre y la condición de frontera en dicha superficie resulta

$$w_d = \frac{u_d}{1 - \kappa d} \frac{\partial d}{\partial s} + \frac{\partial d}{\partial t} \quad (2.24)$$

La dificultad principal en resolver cualquier problema de flujo mediante el sistema de ecuaciones (2.17) a (2.24) no es tanto la no linealidad del sistema, si no el hecho de que la posición de la frontera superior del flujo (superficie libre) se desconoce y no se sabe de antemano donde imponer la condición de frontera necesaria (ecuaciones 2.23 y 2.24). Este es un ejemplo típico del llamado *problema de frontera libre*. En cambio, la gran virtud de las ecuaciones de Saint-Venant es que proporcionan un medio de solución para encontrar la posición aproximada de la superficie libre, ya que esta aparece como una de las incógnitas en ellas.

### 2.2.3 Ecuaciones de Dressler para flujos poco profundos

Por las razones antes mencionadas, es necesario restringir los flujos definidos por las ecuaciones (2.17) y (2.24) a aquellos poco profundos o someros. Esto equivale a aceptar las condiciones:

$$\frac{\partial w}{\partial s} \approx 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} \approx 0 \quad (2.26)$$

$$|w| \ll |u| \quad (2.27)$$

Con la ecuación (2.25), la (2.17) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial n}(Ju) = 0 \quad (2.28)$$

es decir,  $Ju = \text{constante}$  a lo largo de  $n$ , de modo que en el fondo ( $n=0$ ),  $J=1$  (ecuación 2.14) y  $u = u_0(s, t)$  es el valor de dicha constante. Por tanto, en el plano ortogonal de coordenada  $s = s_b$ , la velocidad en P resulta

$$u(s, n, t) = \frac{u_0(s, t)}{1 - \kappa n} \quad (2.29)$$

que equivale a la distribución típica de la velocidad en un vórtice libre o potencial.

En efecto

$$1 - \kappa n = 1 - \frac{n}{R} = \left( \frac{R - n}{R} \right) = \frac{r}{R}$$

donde  $r$  es la distancia del centro de curvatura al punto P (figura 2.1), es decir  $ur = u_0 R = \text{constante}$ .

La velocidad en el punto A sobre la superficie libre vale

$$u_d = \frac{u_0(s, t)}{1 - \kappa d} \quad (2.30)$$

El gasto unitario en la sección plana definida por  $s = s_b$ ,  $0 \leq n \leq d$ , se obtiene con el auxilio de la ecuación (2.29), en la forma

$$q(s, t) = \int_0^d u dn = -\frac{u_0}{\kappa} \ln(1 - \kappa d) \quad (2.31a)$$

y el gasto total,  $Q = qb$ , vale

$$Q = -\frac{b u_0}{\kappa} \ln(1 - \kappa d) \quad (2.31b)$$

Así mismo, la ecuación de continuidad (2.18) se integra en la sección como sigue

$$-\int_0^d d(Jw) = \int_0^d \frac{\partial}{\partial s} u(s, n, t) dn$$

$$-J_d w_d = \frac{\partial}{\partial s} \int_b^d u dn - b u_d(s, t) \frac{\partial d}{\partial s}$$

$$-(1 - \kappa d) w_d = \frac{\partial q}{\partial s} - u_d \frac{\partial d}{\partial s}$$

Al sustituir la condición de frontera en la superficie libre (2.24) en el primer término de la anterior y con  $q=Q/b$ , resulta

$$\frac{1}{b} \frac{\partial Q}{\partial s} + (1 - \kappa n) \frac{\partial d}{\partial t} = 0 \quad (2.32)$$

Esta ecuación es la de conservación de la masa, ya que  $(\partial q / \partial s) ds$  se interpreta como la tasa neta de variación del flujo que sale en un volumen de control de longitud  $ds$  y  $(1 - \kappa d) ds (\partial d / \partial t)$  es la tasa neta de variación del almacenaje superficial en dicho volumen, ambas por unidad de ancho del canal.

De la ecuación (2.29) se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u_0}{\partial s} \frac{1}{1 - \kappa n} + u_0 \frac{d\kappa}{ds} \frac{n}{(1 - \kappa n)^2}$$

y con ésta, la ecuación de continuidad (2.18) se expresa en la forma

$$J w = - \frac{\partial u_0}{\partial s} \int \frac{dn}{1 - \kappa n} - u_0 \frac{d\kappa}{ds} \int \frac{n dn}{(1 - \kappa n)^2} + C$$

Al integrar y despejar a  $w$ , sustituyendo a  $J$  de la ecuación (2.14), se llega a:

$$(1 - \kappa n) w = \left[ \frac{\ln(1 - \kappa n)}{\kappa} \right] \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds} \left[ \ln \left( 1 - \kappa n + \frac{1}{1 - \kappa n} \right) \right] u_0 + C$$

La constante de integración  $C$  resulta de la condición de frontera (2.22) y vale

$$C = \frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds} u_0$$

de manera que al despejar  $w$ , resulta

$$w = \left[ \frac{\ln(1 - \kappa n)}{\kappa(1 - \kappa n)} \right] \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds} \left[ \frac{\ln(1 - \kappa n)}{1 - \kappa n} + \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} - \frac{1}{1 - \kappa n} \right] u_0$$

pero

$$\frac{1}{(1-\kappa n)^2} - \frac{1}{1-\kappa n} = \frac{1-(1-\kappa n)}{(1-\kappa n)^2} = \frac{\kappa n}{(1-\kappa n)^2}$$

Resulta así la ecuación

$$w(s, n, t) = \left[ \frac{\ln(1-\kappa n)}{\kappa(1-\kappa n)} \right] \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds} \left[ \frac{\ln(1-\kappa n)}{1-\kappa n} + \frac{\kappa n}{(1-\kappa n)^2} \right] u_0 \quad (2.33)$$

cuya solución permite determinar el otro componente de la velocidad en un punto P cualquiera del campo de flujo.

Para  $n=d$ ,  $w=w_d$ , y con las ecuaciones (2.24) y (2.30) la anterior resulta

$$(2.34)$$

$$\frac{u_0}{(1-\kappa d)^2} \frac{\partial d}{\partial s} - \left[ \frac{\ln(1-\kappa d)}{\kappa(1-\kappa d)} \right] \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds} \left[ \frac{\ln(1-\kappa d)}{1-\kappa d} + \frac{\kappa d}{(1-\kappa d)^2} \right] u_0 + \frac{\partial d}{\partial t} = 0$$

donde se ha eliminado el componente transversal  $w_d$  de la velocidad.

De la condición (2.26) para el flujo poco profundo, la ecuación (2.19) se convierte en  $\partial H / \partial n = 0$  y de las ecuaciones (2.21), (2.27) y (2.29) resulta la conocida ecuación de Bernoulli para una sección ortogonal al fondo, que es

$$H(s, t) = z + n \cos \theta + \frac{p}{g\rho} + \frac{1}{(1-\kappa n)^2} \frac{u_0^2}{2g} = \text{constante} \quad (2.35)$$

En cualquier punto sobre la superficie libre la presión  $p=0$ , y con  $n=d$  en la ecuación anterior, la energía total también es

$$H(s, t) = z + d \cos \theta + \frac{1}{(1-\kappa n)^2} \frac{u_0^2}{2g} \quad (2.36)$$

O bien, de la ecuación 2.30 se tiene también que

$$H = z + d \cos \theta + \frac{u_d^2}{2g} \quad (2.37)$$

En las dos últimas ecuaciones,  $H$  es independiente de  $n$ , es decir, la energía cinética del flujo, calculada con el componente de la velocidad tangente a la superficie libre, separa a dicha superficie de la línea de energía.

De la ecuación (2.35)

$$\frac{p}{g\rho} = H - z + n \cos \theta - \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \frac{u_0^2}{2g} \quad (2.38a)$$

o bien, al igualar las ecuaciones (2.35) y (2.36), resulta la expresión

$$\frac{p}{g\rho} = (d - n) \cos \theta + \left[ \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} - \frac{1}{(1 - \kappa n)^2} \right] \frac{u_0^2}{2g} \quad (2.38b)$$

que determina la distribución de la carga de presión en la sección ortogonal en términos de la parte hidrostática y la debida al efecto centrífugo (último término).

De la ecuación (2.29) se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{1 - \kappa n} \frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{1}{J} \frac{\partial u_0}{\partial t}$$

con ésta, la ecuación (2.20) para la superficie libre ( $n=d$ ) se convierte en

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0 \quad (2.39)$$

que define la variación de la velocidad en el fondo en términos de  $H$ , ésta expresada por la ecuación (2.36). El termino  $\partial H/\partial s$  es la suma de los términos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (d \cos \theta) = -d \frac{d\theta}{ds} \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial d}{\partial s} = -d \kappa \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial d}{\partial s}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[ (1 - \kappa d)^{-2} \frac{u_0^2}{2g} \right] = (1 - \kappa d)^{-2} \frac{u_0}{g} \frac{\partial u_0}{\partial s} + (1 - \kappa d)^{-3} \left( \kappa \frac{\partial d}{\partial s} + d \frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) \frac{u_0^2}{g}$$

Al agrupar términos y multiplicar por  $g$ , la ecuación 2.39 se convierte en

$$(2.40)$$

$$\frac{u_0}{(1 - \kappa d)^2} \frac{\partial u_0}{\partial s} + \left[ g \cos \theta + \frac{\kappa}{(1 - \kappa d)^2} u_0^2 \right] \frac{\partial d}{\partial s} - \left[ g \kappa \sin \theta - \frac{\partial \kappa / \partial s}{(1 - \kappa d)^3} u_0^2 \right] d + g \sin \theta + \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0$$

donde todos los términos representan a fuerzas por unidad de masa.

El sistema de ecuaciones no lineales (2.29), (2.33), (2.34), (2.38b) y (2.40) fue obtenido por Dressler (1978) usando un método de aproximaciones asintóticas más complicado, pero a su juicio más elegante.

La ecuación (2.32) es una forma simplificada de la (2.34) cuando se usa el gasto unitario en lugar de la velocidad en el fondo. La ecuación (2.39) es también una forma más compacta de la (2.40) y según el tipo de solución, puede ser más conveniente.

Después de resolver el par de ecuaciones diferenciales (2.34) y (2.40) para  $u_0$  y  $d$ , las restantes expresiones permiten valuar a  $u$ ,  $w$  y  $p$ . Los términos que contienen a  $(d\kappa/ds)/\kappa^2$  en las dos ecuaciones diferenciales se mantienen finitos aun para  $\kappa = 0$ . En igual forma que en las ecuaciones de Saint-Venant (figura 1.1) se consideró  $w \equiv 0$ , en el desarrollo de las ecuaciones de Dressler se usó la condición de frontera de que una partícula que viaja sobre la superficie libre siempre permanece sobre ella. Esto significa que la condición de frontera (2.24) no queda satisfecha cuando se utiliza  $w \equiv 0$  para  $n = d$ , al aceptar la ecuación (2.29). Sin embargo, Dressler asegura que el valor de  $w$  obtenido con la (2.33) y de  $u$  con la (2.29) modifica el vector velocidad total lo suficiente para que la condición de superficie libre se satisfaga. En el caso de flujo permanente esto significa que la línea de corriente más elevada coincide con el perfil de la superficie libre obtenido de la solución de las ecuaciones (2.34) y (2.40).

#### **2.2.4 Inclusión del término de resistencia**

Para tomar en cuenta la resistencia al flujo en un canal rugoso y la acción de vórtices producto de la turbulencia, Dressler y Yevjevich (1984) siguieron el camino usual de introducir un término empírico en la ecuación de

la cantidad de movimiento (2.40), como se hizo al derivar la ecuación de Chezy. Para ello consideraron un volumen de control en forma de cuña delgada, como se muestra en la figura (2.3), en un flujo bidimensional (de ancho constante), fondo de curvatura  $\kappa(s) > 0$  y para el instante  $t=t_0$ .

La fuerza de resistencia externa tangente al fondo de la cuña en la dirección negativa de  $s$  vale

$$F_0 = -K\rho u_0^2 b ds$$

donde  $K$  es un factor adimensional (empírico) de proporcionalidad de la masa de líquido contenido en la cuña y el cuadrado de la velocidad en el fondo, similar al introducido al derivar la ecuación de Chezy. Dicho factor depende de parámetros que miden la rugosidad de la frontera y es función también de la curvatura del fondo.

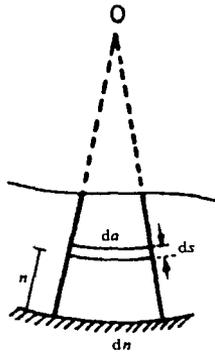


Figura 2.3 Volumen de control en forma de cuña delgada

De manera similar, la fuerza de resistencia en las paredes es:

$$F_w = -2K\rho \int_{n=0}^n u^2(n) da dn$$

donde  $da$  es la diferencial de arco a la distancia  $n$  (ecuación 2.15) cuando hay un incremento  $ds$  en el fondo, es decir,  $da = (1 - \kappa n)ds$ . Con la ecuación (2.29), la integración resulta

$$F_w = 2K\rho u_0^2 \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa} ds$$

al sumar  $F_0$  y  $F_w$ , la fuerza total sobre la masa es

$$F_t = -K\rho u_0^2 \left[ b - 2 \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa} \right] ds = -K\rho u_0^2 \left[ 1 - 2 \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa b} \right] b ds$$

El volumen del elemento de control es  $\frac{1}{2}[(1 - \kappa d)ds + ds]bd$ , el cual se simplifica y conduce a la masa contenida en dicho volumen

$$m = \rho \left( 1 - \frac{\kappa d}{2} \right) b d ds$$

La fuerza total de resistencia ejercida se calcula por unidad de masa y se considera como una fuerza uniformemente distribuida en dicha masa. Su magnitud es

$$F_B = \frac{F_t}{m} = -K \left[ \frac{u_0^2 \left( 1 - \frac{\kappa d}{2} \right) d}{1 - 2 \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa b}} \right] \quad (2.41)$$

que debe ser igual al término del lado izquierdo de la ecuación (2.40) (en lugar de cero).

El esfuerzo tangencial medio de resistencia se consideró  $\tau_0 = K\rho V^2$ , donde  $V$  es la velocidad media del flujo, de manera que la fuerza total de resistencia resulta

$$F_t = -\tau_0 P ds = -K\rho V^2 P ds$$

Siendo  $\rho A ds$  la masa del elemento y  $R_h = A/P$  el radio hidráulico de la sección, la fuerza de resistencia por unidad de masa vale

$$F_B = -K \frac{V^2}{R_h} \quad (2.42a)$$

Además, con  $\tau_0 = K\rho V^2 = g\rho R_h S_f$ ,  $KV^2 = gR_h S_f$  y la anterior resulta

$$F_B = -gS_f \quad (2.42b)$$

donde  $S_f$  representa el gradiente local de fricción.

Al comparar las ecuaciones (2.41) y (2.42) se observa que el radio hidráulico del flujo aquí tratado se interpreta como el término dentro del paréntesis rectangular en la primera ecuación, al cual puede designarse como radio hidráulico efectivo, en la forma

$$R_{he}(b, d, \kappa) = \frac{1}{1 - 2 \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa b}} \quad (2.43)$$

El mismo resultado se obtiene cuando  $\kappa < 0$  (figura 2.4). También, cuando  $(-\kappa) \rightarrow 0$ ,  $\ln(1 - \kappa d) \rightarrow -\kappa d$ ,  $R_{he} = R_h = bd/(b+2d)$ , es decir, la ecuación (2.41) coincide con la (2.42a) para un fondo plano.

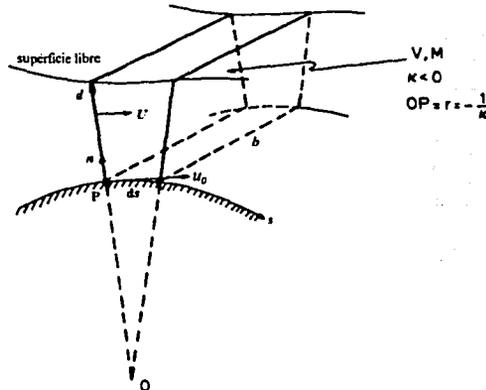


Figura 2.4 Canal rectangular convexo

De  $R_h = bd/(b+2d)$ , resulta  $d = [1 + (2d)/b]R_h$  y los términos restantes de la ecuación (2.43) se convierten en

$$\frac{1 - 2 \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa b}}{d} = \left\{ \frac{1 - 2 \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa b}}{1 + \frac{(2d)}{b}} \right\} \frac{1}{R_h} \quad (2.44)$$

donde se introdujo el radio hidráulico convencional  $R_h$  de la sección.

El término

$$a_v = \frac{1 - 2 \frac{\ln(1 - \kappa d)}{\kappa b}}{1 + (2d)/b} \quad (2.45)$$

se conoce como factor de amplificación de la velocidad, ya que mide el incremento o decremento necesario de  $u_0^2$  para generar la misma fuerza de resistencia que la velocidad variable  $u$ . Por otra parte, cuando se usa la ecuación de Chezy para la fricción o la correspondiente de Manning, el valor de  $K$  resulta

$$K = \frac{g}{C^2} = \frac{g n_M^2}{R_h^{1/3}}$$

donde se ha usado la equivalencia  $C = R_h^{1/6} / n_m$ , siendo  $C$  el factor de Chezy y  $n_M$  el coeficiente de Manning; este no debe confundirse con la coordenada  $n$  empleada en los desarrollos. Si el fondo se comporta como pared hidráulicamente de transición, es suficiente emplear equivalencias similares de  $C$ , como la expresada por la ecuación de Colebrook-White.

Al sustituir  $K$  de la ecuación anterior en la (2.41) la fuerza total de resistencia por unidad de masa se reduce a cualquiera de las formas

$$F_B = -g a_m a_v \frac{u_0^2}{C^2 R_h} = -g a_m a_v \frac{n_M^2 u_0^2}{R_h^{4/3}} \quad (2.46)$$

Hubo una corrección de estos resultados donde se obtiene que  $a_m=1$  donde, según la ecuación (2.42b), la pendiente local de fricción vale

$$S_f = a_v \frac{u_0^2}{C^2 R_h} = a_v \frac{n_M^2 u_0^2}{R_h^{4/3}} \quad (2.47)$$

En forma abreviada se representa con  $LI$  a la suma de términos en el lado izquierdo de la ecuación (2.40) y ésta se reduce a

$$LI = -ga_v \frac{n_M^2 u_0^2}{R_h^{4/3}} \quad (2.48)$$

cuando se usa sólo la ecuación de Manning de la (2.46). En cambio, la equivalente obtenida de la (2.39) sería

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial u_0}{\partial t} = -a_v \frac{n_M^2 u_0^2}{R_h^{4/3}}$$

toda vez que la ecuación (2.39) se multiplicó por  $g$  para obtener la (2.40). Para el calculo de  $S_f$  se usan las siguientes expresiones:

$$S_f = \left\{ \begin{array}{ll} a_v \cdot a_q \left( \frac{\nu^{1/4}}{\sqrt{2} \cdot K^2} \right) \frac{u_0^{7/4}}{R_h^{5/4}} & \text{Blasius generalizado} \quad (2.49) \\ & \text{(pared hidráulicamente lisa)} \\ a_v \frac{u_0}{C^2 R_h} & \text{Chezy generalizado} \quad (2.50) \\ & \text{(pared hidráulicamente de transición)} \\ a_v \frac{(n_M)^2 u_0^2}{R_h^{4/3}} & \text{Manning generalizado} \quad (2.51) \\ & \text{(pared hidráulicamente rugosa)} \end{array} \right.$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática,  $K=15.8 \frac{m^{1/2}}{s}$ , además;

$$a_v = \frac{b - 2\kappa^{-1} \ln(1 - \kappa d)}{b + 2d} \quad (2.52)$$

$$a_q = \left[ \frac{-\kappa d}{\ln(1-\kappa d)} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (2.53)$$

Las ecuaciones de Dressler (2.40a) y (2.34a) se pueden también escribir de manera más compacta como sigue

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial s} = -g S_f \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{1}{(1-\kappa d)b} \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (2.55)$$

### 2.3 Flujo permanente y la generalización del perfil de Bresse.

Para el flujo permanente se pueden resolver las ecuaciones(2.40) y (2.34) por  $dd/ds$  y  $du_0/ds$ , dando dos ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

$$\frac{dd}{ds} = \alpha(s, d(s), u_0(s)) \quad (2.56)$$

$$\frac{du_0}{ds} = \beta(s, d(s), u_0(s)) \quad (2.57)$$

Estas pueden ser simultáneamente integradas numéricamente en  $d$  y  $u_0$  usando las condiciones de frontera  $d = d_0$  y  $u = u_0$  en un punto  $s = s_0$ . sin embargo, este problema se puede reducir a resolver una ecuación (2.55) para flujo permanente, donde  $Q = Q_0 = \text{constante}$  en  $s=s_0$  de manera que  $u_0$ , tomado de la ecuación (2.31b) en la forma

$$u_0(s) = \frac{-\kappa Q_0}{b \ln(1-\kappa d)} \quad (2.58)$$

se sustituye en la ecuación (2.56) y se puede escribir

$$\frac{dd}{ds} = \frac{S_0 - S_f \cdot \sec \theta}{1 - F^2} \quad (2.59)$$

Al generalizar la inclinación de la plantilla  $S_0$  como  $\tan \theta$  y el número de Froude  $F$ , resulta

$$S_0 = -(1-\kappa d) \operatorname{tg} \theta - \frac{u_0^2}{g(1-\kappa d)^2 \cos \theta} \left[ \frac{\kappa d + \ln(1-\kappa d)}{(1-\kappa d) \ln(1-\kappa d)} \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{b'}{b} \right] \quad (2.60)$$

donde dicho número de Froude es

$$F^2 = \frac{u_0^2}{gd \cos \theta} \bigg/ \frac{(1 - \kappa d)^3 \cdot \ln(1 - \kappa d)}{\kappa d [1 + \ln(1 - \kappa d)]} \quad (2.61)$$

La ecuación (2.59) es la expresión generalizada de Bresse para flujo curvilíneo en un canal rectangular. Cuando  $(\kappa, \kappa') \rightarrow 0$ , se llega a la clásica ecuación de Bresse en la teoría de Saint-Venant.

Tanto la ecuación de Dressler como la de Saint-Venant asumen que el flujo es poco profundo (somero) y gradualmente variado. El parámetro de poca profundidad local es la proporción del tirante  $d$  al radio local de curvatura  $R$  del fondo.

$$d/R \equiv \kappa d \quad (2.62)$$

El flujo es gradualmente variado cuando

$$\left( \frac{d_{\max}}{l_{\min}} \right)^2 \equiv \sigma \ll 1 \quad (2.63)$$

donde  $d_{\max}$  es igual a un tirante máximo relativo y  $l_{\min}$  es igual a una característica adyacente de la longitud  $s$  de la superficie libre en un plano  $(s, n)$ . Un valor pequeño de  $\sigma$  se puede interpretar como una inclinación pequeña o moderada de la superficie libre y requiere que las propiedades geométricas de la forma del fondo no varíen rápidamente.

## CAPITULO 3

# Aplicación de las ecuaciones de Dressler a un modelo hidráulico probado por Sivakumaran y Yevjevich (1987)

### 3.1 Dispositivo experimental y mediciones efectuadas .

La comprobación experimental del perfil de la superficie libre y de la distribución de presiones sobre la plantilla fueron analizadas y publicadas por Sivakumaran (1981, 1983). En estos artículos el flujo permanente fue considerado sobre un vertedor, y para un perfil simétrico y uno asimétrico del fondo curvo, dónde  $\kappa$ ,  $\kappa'$  variaban continuamente. Para los experimentos  $\kappa d$  varió de  $-2.00$  a  $+0.54$ , y la teoría de Dressler mostró excelente concordancia de sus resultados con los experimentales dentro del intervalo de  $\kappa d$  mencionado. Sin embargo, se desconoce cuanto más allá se puede extender el intervalo- $\kappa d$ . En los experimentos que el autor expone se añaden las mediciones de la distribución de la velocidad, con el fin de verificar la ecuación del vórtice libre  $u(s,n,t) = \frac{u_0}{1-\kappa d}$ , y el efecto de una plantilla geoméricamente discontinua.

La figura 3.1 representa el perfil del fondo usado en el modelo y que consiste en las tres secciones siguientes:

#### 1. Línea horizontal

$$\theta = 0 \quad \kappa = 0 \quad \kappa' = 0 \quad (s \leq 0)$$

2. Arco circular convexo (radio  $R = 38.1$  cm, ángulo  $\phi = 75.17^\circ$ )

$$\theta = -s/R, \quad \kappa = -1/R, \quad \kappa' = 0 \quad (0 \leq s \leq \phi R)$$

3. Arco circular cóncavo (radio  $R=38.1$  cm, ángulo  $\psi=120.09^\circ$ )

$$\theta = s/R \quad \kappa = 1/R, \quad \kappa' = 0 \quad (\phi R \leq s \leq \phi R + \psi R)$$

Estas tres secciones se unieron tangencialmente en los puntos ( $s = 0$ ) y  $A$  ( $s = \phi R = 49.99$  cm) existiendo una curvatura discontinua (sólo  $\zeta(s)$  y  $\theta(s)$  son continuos). La curvatura  $\kappa$  en  $\mathbf{0}$  y  $A$  presentó un paso discontinuo de función y su derivada  $\kappa'$  una singularidad. Esta configuración geométrica de la plantilla fue seleccionada intencionalmente y fue construida cuidadosamente para conservar los cambios repentinos en  $\kappa$  tanto como fuera posible en  $\mathbf{0}$  y  $A$ , para ver cómo se comporta físicamente el flujo poco profundo en una región donde la plantilla no es gradualmente variada.

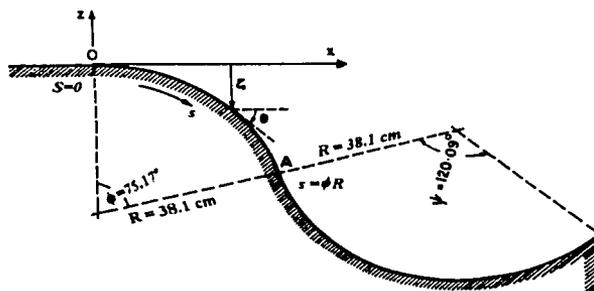


Figura 3.1 Forma del fondo

La figura 3.2 muestra la estructuración del modelo experimental, con un ancho  $b = 20.32$  cm. Éste se alimenta con una bomba de gasto constante en la sección  $X-X$  ( $s = s_0 = -25$  cm, figura 3), el tiempo promedio de la carga de velocidad horizontal en intervalos verticales de 1 cm se midió usando un tubo de pitot (conectado a un tubo U vertical con lecturas de precisión a  $\pm 1$  mm) y se encontró que la grafica de distribución de la velocidad horizontal era

bastante uniforme, excepto para la disminución brusca cercana a la plantilla debido a la capa límite. Ésto dió el promedio de velocidad  $U_0$  aguas arriba. El tirante  $d_0$  del flujo aguas arriba en esta sección se midió usando un limnómetro de punta vertical. El experimento se diseñó de manera tal que aguas arriba fuera  $s = s_0$ , con un flujo estrictamente supercrítico ( $U_0 / \sqrt{gd_0} > 1$ ).

Las cargas de presión medidas en el tiempo promedio  $[p(0)_i - p(d)] / \rho g$  en  $s = 5$  cm,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , a lo largo de la línea central de la plantilla se midieron usando un piezómetro vertical ( con lecturas de precisión  $\pm 2.54$  mm ) sujeto en estos puntos. El tiempo promedio de la profundidad del flujo normal  $d_i$  en los puntos a lo largo del la plantilla se midió con escala de precisión en milímetros. Este procedimiento se repitió para cuatro diferentes gastos de la bomba.

Tabla 3.1 Condiciones límite aguas arriba

Flujo	$D_0$ ( cm )	$U_0$ ( cm/s )	$Q_0 = b d_0 U_0$ ( cm <sup>3</sup> / s )	$(U_0 / \sqrt{gd_0})$
(a)	17.4	140.21	49573.77	1.073
(b)	13.0	118.87	31400.70	1.053
(c)	10.0	100.58	20437.86	1.016
(d)	6.5	80.77	10668.10	1.012

Los valores de  $d_0$  y  $Q_0$  se midieron en los límites aguas arriba. Para los flujos (a) y (b), la variable de distribución  $u(n)$  del tiempo promedio de la componente de velocidad en la dirección  $s$  en la sección  $Y-Y(s=22.57$  cm, figura 3.2) se midió de nuevo usando el mismo tubo de pitot utilizado para medir las distribuciones de velocidad aguas arriba.

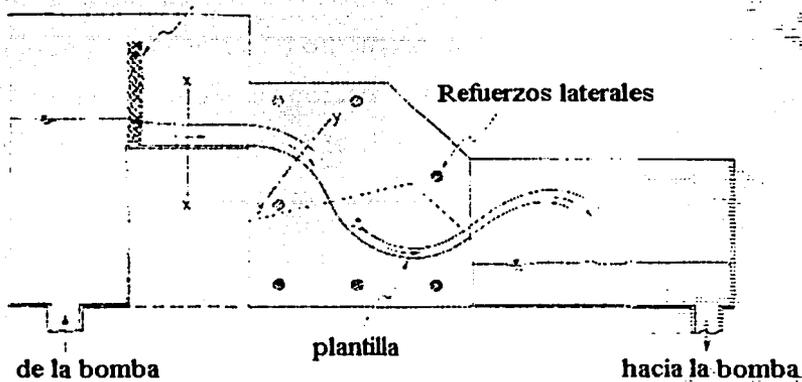


Figura 3.2 Modelo experimental

Las cantidades  $U_0$ ,  $d_0$ ,  $[p(0)_i - p(d)] / \rho g$ ,  $d_i$ , y  $u(n)$  se determinaron tan precisos como lo permitieron las fluctuaciones turbulentas del flujo en el uso de los instrumentos, ya que se omitieron las mediciones cuando las fluctuaciones fueron excesivas, lo cual ocurrió para flujos de alta velocidad (ejemplos *a* y *b* de la tabla 3.1) en la sección cóncava del modelo aguas abajo con respecto a la localización de la superficie libre y a las mediciones de la distribución de la velocidad.

Los resultados de estos cuatro ejemplos se dan en las figuras 5.1, 5.3, 5.5 y 5.7, ya que el procedimiento numérico y los resultados se omitieron en el artículo original. En el capítulo 3.3 se dará el desarrollo matemático y los resultados para los cuatro ejemplos una vez que se elaboró el programa de cómputo (capítulo 4).

### 3.2 Solución numérica a las discontinuidades del modelo

La EDO (2.56) de flujo permanente no uniforme para la condición límite aguas arriba de  $s_0 = -25$  cm es

$$\frac{dd}{ds} = \alpha(s, d(s), Q_0), \quad d(s_0) = d_0$$

Esta se integró numéricamente desde  $s_0$  hacia aguas abajo y a lo largo de la plantilla, usando el método de Runge-Kutta hasta producir la solución  $d(s)$ . Entonces la velocidad tangencial  $u_0(s)$  en el fondo se obtuvo de la ecuación (2.55). Las paredes y la forma curvilínea del fondo en el canal se construyeron de acrílico liso, la pendiente empírica apropiada de fricción  $S_f$  de Blasius fue modificada para las ecuaciones de Dressler (2.41). La solución numérica de la ecuación (2.56) se obtuvo con y sin  $S_f$  y se encontró que la diferencia calculada en cada uno era menor del 1 por ciento.

La función de paso discontinua en  $\kappa$  y la singularidad de la función delta en  $\kappa'$  en **0** y **A** hacen indefinida a  $\alpha$  de la ecuación (2.56) en estos puntos. Por tanto, la integración de la ecuación (2.56) no puede continuarse a través de **0** y **A**. Para resolver esto se introdujeron cerca de  $0(s=0)$  y  $A(s=\phi R)$ , los puntos de transición de la plantilla geométrica de curvas continuas; dentro de los intervalos gradualizados  $-L_1 \leq s \leq L_1$  y  $\phi R - L_2 \leq s \leq \phi R + L_2$ ,  $\kappa'$ , se hizo que  $\kappa$  y  $\theta$  varíen continuamente e igualen los valores respectivos en los límites de los intervalos. Así, el perfil completo de la plantilla se modifica a una curva con variación continua de  $\theta$ ,  $\kappa$  y  $\kappa'$ ; sin embargo, en **0** y **A** la geometría de la plantilla varía rápidamente debido a los pequeños valores usados para la longitud de intervalos gradualizados:  $2L_1=2L_2=2$  cm. La integración de las ecuaciones de Saint-Venant no requiere la introducción de intervalos semejantes porque estas ecuaciones no contienen  $\kappa$  y  $\kappa'$ , pero su solución en cualquier caso no es válida para flujo curvilíneo. Los resultados obtenidos forman la teoría del flujo gradualmente variado que siempre mostrará transiciones rápidas en las soluciones debido a la introducción de los pequeños intervalos semejantes, ya que estos definen una geometría que no es gradualmente variada pero que sirve para evitar la singularidad infinita en  $\kappa'$ .

Los resultados calculados en estas regiones no eran los que se esperaban para describir exactamente el flujo. Debido a una suposición básica, la teoría es claramente violada. Las ecuaciones para los intervalos gradualizados se dan a continuación:

Intervalos gradualizados  $-L_1 \leq s \leq L_1$

$$\varepsilon \equiv L_1 / R \quad \text{y} \quad \lambda \equiv s / L_1$$

donde  $R$  denota el radio del círculo convexo (figura 3.1). entonces la transición de la curva en  $-1 \leq \lambda \leq 1$  tiene los siguientes valores:

$$\kappa' = \frac{3}{4R^2\varepsilon}(\lambda^2 - 1), \quad \kappa = \frac{1}{4R}(\lambda^3 - 3\lambda - 2),$$

$$\theta = \frac{\varepsilon}{16}(\lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3) \equiv \varepsilon f(\lambda),$$

$$\zeta = \frac{\varepsilon^2 R}{80}(\lambda^5 - 10\lambda^3 - 20\lambda^2 - 15\lambda - 4) + R o(\varepsilon^4),$$

Al derivar éstos, se supone que  $\kappa' = m(\lambda^2 - 1)$ , (donde  $m$  es una constante) se integra sucesivamente y se obtiene

$$\frac{d\kappa}{d\lambda} = \varepsilon R \kappa', \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = \varepsilon R \kappa,$$

$$\frac{d\zeta}{d\lambda} = \varepsilon R \text{sen } \theta = \varepsilon R \left[ \varepsilon f - \frac{\varepsilon f}{3!} + \dots \right] = \varepsilon^2 R f(\lambda) + R o(\varepsilon^4)$$

Usando las condiciones de frontera

$$\text{en } \lambda = -1: \kappa' = 0, \kappa = 0, \theta = 0, \text{ y } \zeta = 0;$$

$$\text{en } \lambda = 1: \kappa' = 0, \kappa = -1/R$$

En  $s = L_1 (\lambda = 1)$ , se tiene  $\theta_1 = -\varepsilon = \theta_c$ , las elevaciones del fondo resultan

$$\zeta_1 = -\frac{3}{5}\varepsilon^2 R + R o(\varepsilon^4)$$

$$\zeta_c = -R[1 - \cos(-\varepsilon)] = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 R + R o(\varepsilon^4)$$

por lo tanto, como  $s = L_1$ ; el error  $\Delta\zeta_1 \equiv \zeta_1 - \zeta_c$  en la elevación de la plantilla es

$$\frac{\Delta\zeta_1}{R} = \frac{\varepsilon^2}{10} + o(\varepsilon^4);$$

y el arco circular convexo se desplaza verticalmente hacia abajo la misma cantidad (debido a que  $\Delta\zeta_1 < 0$ ) para hacer que  $\zeta$  sea también continua en  $s=L_1$ .

En  $L_1 \leq s \leq \phi R - L_2$

El fondo es el arco circular convexo de radio  $R$ , donde

$$\kappa' = 0, \quad \kappa = -1/R, \quad \theta = -s/R \quad \text{y} \quad \zeta = -R[1 - \cos(s/R)] + \Delta\zeta_1$$

En los intervalos de gradualización:  $\phi R - L_2 \leq s \leq \phi R + L_2$  sean:

$$\delta \equiv L_2/R \quad \text{y} \quad \mu \equiv (s - \phi R)/L_2.$$

Entonces la curva de transición en  $-1 \leq \mu \leq 1$  tiene los valores:

$$\kappa' = \frac{3}{2R^2\delta}(1 - \mu^2); \quad \kappa = \frac{1}{2R}(3\mu - \mu^3);$$

$$\theta = \frac{\delta}{8}(\lambda_3 + 6\mu^2 - \mu^4) - \phi \equiv \delta g(\mu) - \phi;$$

$$\zeta = -R(1 - \cos \phi) - \delta(R \operatorname{sen} \phi)\mu + \delta^2 \left( \frac{R \cos \phi}{40} \right) (4 + 15\mu + 10\mu^3 - \mu^5) + \Delta\zeta_1 + R o(\delta^3),$$

Al derivar estas ecuaciones se supone  $\kappa' = w_1(1 - \mu^2)$ , donde  $w$  es una constante y al integrar se tiene que:

$$\frac{d\kappa}{d\mu} = \delta R \kappa'; \quad \frac{d\theta}{d\mu} = \delta R \kappa;$$

$$\frac{d\zeta}{d\mu} = \delta R \operatorname{sen} \theta = -\delta(R \operatorname{sen} \phi) + \delta^2(R \cos \phi)g(\mu) + R o(\delta^3);$$

Usando las condiciones de frontera

$$\text{en } \mu = -1 : \kappa' = 0; \kappa = -1/R, \theta = -\theta + \delta$$

$$\begin{aligned} \zeta &= -R [1 - \cos(\theta - \delta)] + \Delta\zeta_1 \\ &= -R(1 - \cos \phi) + \delta(R \text{ sen } \phi) - \delta^2 \left( \frac{R \cos \phi}{2} \right) + \Delta\zeta_1 + R o(\delta^3) \end{aligned}$$

$$\text{en } \mu = 1 : \kappa' = 0, \kappa = 1/R$$

En  $s = \phi R + L_2 (\mu = 1)$ , se tiene  $\theta = -\phi + \delta = \theta_c$ , pero las elevaciones del fondo son:

$$\zeta_i = -R(1 - \cos \phi) - \delta(R \text{ sen } \phi) + \delta^2 \left( \frac{7R \cos \phi}{10} \right) + \Delta\zeta_1 + R o(\delta^3)$$

$$\begin{aligned} \zeta_c &= -R[1 - 2 \cos \phi + \cos(\phi - \delta)] + \Delta\zeta_1 \\ &= -R(1 - \cos \phi) - \delta(R \text{ sen } \phi) + \delta^2 \left( \frac{R \cos \phi}{2} \right) + \Delta\zeta_1 + R o(\delta^3) \end{aligned}$$

De esta manera, en  $s = \phi R + L_2$ , el error  $\Delta\zeta_2 = \zeta_i - \zeta_c$  en la elevación del fondo:

$$\frac{\Delta\zeta_2}{R} = \left( \frac{\cos \theta}{5} \right) \delta^2 + o(\delta^3);$$

y el arco circular cóncavo asciende verticalmente la misma cantidad dada por este valor (debido a que  $\Delta\zeta_2 < 0$ ) para hacer que  $\zeta$  sea también continua en  $s = \phi R + L_2$ .

$$\text{En } \phi R + L_2 \leq s \leq \phi R - \psi R$$

El fondo es el arco circular cóncavo de radio  $R$ . En éste vale:

$$\kappa' = 0, \kappa = 1/R, \theta = s/R - 2\phi \text{ y } \zeta = -R[1 - 2\cos \phi + \cos(s/R - 2\phi)] + \Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2.$$

Nota 1: para  $R = 38.1$  cm y  $\phi = 75.17^\circ$ , se tiene

$$\Delta\zeta_1 \approx -0.0026 L_1^2 \text{ cm y } \Delta\zeta_2 \approx -0.0013 L_2^2 \text{ cm y para } L_1 = L_2 = 1 \text{ cm, se tiene}$$

$$\Delta\zeta_1 \approx -0.0026 \text{ cm y } \Delta\zeta_2 \approx -0.0013 \text{ cm}$$

Nota 2: en  $A(s = \phi R)$ ,  $\kappa = 0$  pero  $\kappa \neq 0$  para la curva de transición en dicho punto las ecuaciones (2.12), (2.13), (2.19), (2.18), (2.25) y (2.26) se reducen a :

$$a_v = 1 \quad a_q = 1$$

$$w(s, n, t) = -n \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{1}{2} n^2 \kappa' u_0$$

$$u_0(s) = \frac{Q_0}{bd}$$

$$S_0 = -\tan \theta - \frac{u_0^2}{gd \cos \theta} \left( \frac{1}{2} d \kappa' - \frac{b'}{b} \right) \quad y \quad F^2 = \frac{u_0^2}{gd \cos \theta}$$

### 3.3 Solución de las ecuaciones de Dressler por el método de Runge-Kutta.

#### 3.3.1 Método de Runge-Kutta de cuarto orden.

El orden de exactitud en los métodos de Runge-Kutta se incrementa mediante el empleo de un método de integración numérica de orden mayor. La mejor exactitud implica que el resultado obtenido es el más exacto y también que los errores se reducen con mayor rapidez al disminuir  $h$  (incrementos).

Se considera una ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$y' = f(y, t), \quad y(0) = y_0 \quad (3.3.1)$$

Si se quiere calcular  $y_{n+1}$  con un valor conocido de  $y_n$ , se integra la ecuación (3.3.1) en el intervalo  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$  y se obtiene

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, t) dt$$

Los métodos de Runge-Kutta se deducen aplicando un procedimiento de integración numérica al miembro derecho de la ecuación anterior. El de cuarto orden es exacto hasta el término de cuarto orden de la expansión de Taylor, de modo que el error local es proporcional a  $h^5$ .

A continuación se presenta la versión del método de Runge-Kutta de cuarto orden:

$$k_1 = y'(x_i, y_i)$$

$$k_2 = y'(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1)$$

$$k_3 = y'(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2)$$

$$k_4 = y'(x_i + h, y_i + h k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left( \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \right)$$

para cada  $i=0,1,\dots,N-1$ . Este método tiene un error de truncamiento de  $O(h^4)$ , siempre y cuando la solución  $y(x)$  tenga cinco derivadas continuas. La simbología  $k_1, k_2, k_3, k_4$  se introduce en el método para eliminar la necesidad de insertar sucesivamente la evaluación en la segunda variable de la función  $f(x,y)$ .

### 3.3.2 Aplicación del método de Runge-Kutta a las ecuaciones de Dressler

Se aplica el método de Runge-Kutta de cuarto orden en la EDO (2.24) de forma manual, pero sólo para el caso convexo en un sólo punto de  $s$ , ya que el desarrollo de la ecuación (2.24) es muy grande; y el método de Runge-Kutta es demasiado largo. Posteriormente se desarrolla el programa para la solución de la EDO (2.24).

Desarrollo:

Datos del problema y condiciones iniciales

$$\kappa = -0.02625 \text{ cm} \quad Q_0 = 49573.7692 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$R = 38.1 \text{ cm} \quad D(0) = 12.50 \text{ cm}$$

$$B = 20.32 \text{ cm} \quad D(5) = ?$$

$$v = 0.01007 \text{ cm}^2/\text{s} \quad H = 5 \text{ cm}$$

$$K = 158 \text{ cm}^{1/2}/\text{s} \quad H_0 = 17.4 \text{ cm}$$

$$V_0 = 140.21 \text{ cm}$$

Ecuaciones por aplicar

$$\frac{dd}{ds} = \frac{S_0 - S_f \cdot \sec \theta}{1 - F^2};$$

$$u_0(s) = \frac{-\kappa Q_0}{b \ln(1 - \kappa d)}; \quad S_0 = -(1 - \kappa d) \operatorname{tg} \theta; \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos\left(\frac{-s}{R}\right)}$$

$$F^2 = \frac{u_0^2}{gd \cos \theta} \cdot \frac{(1 - \kappa d)^3 \cdot \ln(1 - \kappa d)}{\kappa d \cdot [1 + \ln(1 - \kappa d)]}; \quad S_f = a_v \cdot a_q \left( \frac{v^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2} \cdot K^2} \right) \frac{u_0^{\frac{7}{4}}}{R_h^{\frac{5}{4}}}$$

$$a_v = \frac{B - 2\kappa^{-1} \cdot \ln(1 - \kappa d)}{B + 2d}; \quad a_q = \left[ \frac{-\kappa d}{\ln(1 - \kappa d)} \right]^{\frac{1}{4}};$$

para la parte convexa:  $\theta = -s/r$   $\kappa = -1/r$

Resolviendo la EDO ( 2.24 ) por partes

Para  $k1$

$$k_1 = d'(s_i, d_i)$$

$$S_0 = -(1 - (-0.02625)(12.50)) \operatorname{tg}(-0/38.1) = 0$$

$$a_v = (20.32) - 2(-0.02625)^{-1} \ln(1 - (-0.02625)(12.50)) = 0.9254$$

$$a_q = \left[ \frac{-(-0.2625)(12.50)}{\ln(1 - (-0.02625)(12.50))} \right]^{1/4} = 1.03698$$

$$u_0 = \frac{-(-0.02625)(49573.769)}{(20.32) \ln(1 - (-0.02625)(12.50))} = 225.6804$$

$$R_k = \frac{(20.32)(12.50)}{20.32 + 2(12.50)} = 5.6046$$

$$S_f = (0.9173)(1.0398) \left[ \frac{(0.01007)^{1/4}}{\sqrt{2}(158)^2} \right] \left[ \frac{(210.1798)^{7/4}}{(5.8099)^{5/4}} \right] = 0.01312$$

$$F^2 = \frac{\frac{(225.6804)^2}{(981)(12.50) \cos\left(\frac{-0}{38.1}\right)}}{\frac{(1 - (-0.02625)(12.50))^3 \ln(1 - (-0.02625)(12.50))}{(-0.02625)(12.50)[1 + \ln(1 - (-0.02625)(12.50))]}} = 2.63181$$

$$k_1 = \frac{0 - (0.01312) \left[ \frac{1}{\cos\left(-\frac{0}{38.1}\right)} \right]}{1 - 2.63181} = 0.00804$$

Para  $k_2$  (aumentamos  $h$  y  $k_1$ )

$$k_2 = d \left( s_1 + \frac{h}{2}, d_1 + \frac{h}{2} k_1 \right)$$

$$S_0 = - \left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right) \right] \operatorname{tg} \left( \frac{-(s + h/2)}{R} \right)$$

$$S_0 = - \left[ 1 - (-0.02625)(12.50 + (5/2)(0.00804)) \right] \operatorname{tg} \left( \frac{-(0 + 5/2)}{38.1} \right) = 0.08731$$

$$a_v = \frac{b - 2\kappa^{-1} \ln \left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right) \right]}{b + 2 \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right)}$$

$$a_v = \frac{(20.32) - 2(-0.02625)^{-1} \ln \left[ 1 - (-0.02625) \left[ (12.50) + (5/2)(0.00804) \right] \right]}{(20.32) + 2 \left[ (12.50) + (5/2)(0.00804) \right]} = 0.9253$$

$$a_q = \left[ \frac{-\kappa \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right)}{\ln \left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right) \right]} \right]^{1/4}$$

$$a_q = \left[ \frac{-(-0.02625) [12.50 + (5/2)(0.00804)]}{\ln [1 - (-0.02625)(12.50 + (5/2)(0.00804))]} \right]^{1/4} = 1.03703$$

$$u_0 = \frac{-\kappa Q_0}{b \ln \left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right) \right]}$$

$$u_0 = \frac{-(-0.02625)(49573.769)}{(20.32) \ln [1 - (-0.02625)(12.50 + (5/2)(0.00804))]} = 225.36479$$

$$R_h = \frac{b \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right)}{b + 2 \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right)}$$

$$R_h = \frac{20.32 [12.50 + (5/2)(0.00804)]}{20.32 + 2 [12.50 + (5/2)(0.00804)]} = 5.6086$$

$$S_f = (0.9253)(1.03703) \left[ \frac{(\ln 0.01007)^{1/4}}{\sqrt{2}(158)^2} \right] \left[ \frac{(225.3648)^{7/4}}{(5.6086)^{5/4}} \right] = 0.01308$$

$$F^2 = \frac{\frac{u_0^2}{g \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right) \cos \left( \frac{- \left( s + \frac{h}{2} \right)}{R} \right)}}{\left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right) \right]^3 \ln \left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right) \right]} \frac{\kappa \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right) \left[ 1 + \ln \left( 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right) \right) \right]}{\left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right) \right]^3 \ln \left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_1 \right) \right]}$$

$$F^2 = \frac{(225.3648)^2}{(981) \left( 12.50 + \frac{5}{2}(0.00804) \right) \cos \left( \frac{-(0 + \frac{5}{2})}{38.1} \right)}$$

$$F^2 = \frac{\left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2}(0.00804) \right) \right]^3 \ln \left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2}(0.00804) \right) \right]}{(-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2}(0.00804) \right) \left[ 1 + \ln \left( 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2}(0.00804) \right) \right) \right]}$$

$$F^2 = 2.6241$$

$$k_2 = \frac{0.08731 - 0.01308 \left( \frac{1}{\cos \frac{-(0 + \frac{5}{2})}{38.1}} \right)}{1 - 2.6241} = -0.04569$$

Para  $k_3$  (sigue siendo igual sólo que ahora en lugar de  $k_1$  será  $k_2$ )

$$k_3 = d' \left( s_i + \frac{h}{2}, d_i + \frac{h}{2} k_2 \right)$$

$$S_0 = - \left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right) \right] \operatorname{tg} \left( \frac{-(s + h/2)}{R} \right)$$

$$S_0 = - \left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + (5/2)(-0.04569) \right) \right] \operatorname{tg} \left( \frac{-(0 + 5/2)}{38.1} \right) = 0.08708$$

$$a_v = \frac{b - 2\kappa^{-1} \ln \left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right) \right]}{b + 2 \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right)}$$

$$a_v = \frac{(20.32) - 2(-0.02625)^{-1} \ln \left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + (5/2)(-0.04569) \right) \right]}{(20.32) + 2 \left[ 12.50 + (5/2)(-0.04569) \right]} = 0.9263$$

$$a_q = \left[ \frac{-\kappa \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right)}{\ln \left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right) \right]} \right]^{1/4}$$

$$a_q = \left[ \frac{-(-0.02625) \left[ 12.50 + (5/2)(-0.04569) \right]}{\ln \left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + (5/2)(-0.04569) \right) \right]} \right]^{1/4} = 1.0367$$

$$u_0 = \frac{-\kappa Q_0}{b \ln \left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right) \right]}$$

$$u_0 = \frac{-(-0.02625)(49573.769)}{(20.32) \ln \left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + (5/2)(-0.04569) \right) \right]} = 227.4924$$

$$R_h = \frac{b \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right)}{b + 2 \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right)}$$

$$R_h = \frac{20.32 \left[ 12.50 + (5/2)(-0.04569) \right]}{20.32 + 2 \left[ 12.50 + (5/2)(-0.04569) \right]} = 5.5815$$

$$S_f = (0.9263)(1.03667) \left[ \frac{(0.01007)^{1/4}}{\sqrt{2}(158)^2} \right] \left[ \frac{(227.4924)^{7/4}}{(5.5815)^{5/4}} \right] = 0.01338$$

$$F^2 = \frac{\frac{u_0^2}{g \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right) \cos \left( \frac{- \left( s + \frac{h}{2} \right)}{R} \right)}}{\frac{\left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right) \right]^3 \ln \left[ 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right) \right]}{\kappa \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right) \left[ 1 + \ln \left( 1 - \kappa \left( d + \frac{h}{2} k_2 \right) \right) \right]}}$$

$$F^2 = \frac{(227.4924)^2 (981) \left( 12.50 + \frac{5}{2}(-0.04569) \right) \cos \left( \frac{-(0 + \frac{5}{2})}{38.1} \right)}{\left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2}(-0.04569) \right) \right]^3 \ln \left[ 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2}(-0.04569) \right) \right]} \cdot \frac{1}{(-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2}(-0.04569) \right) \left[ 1 + \ln \left( 1 - (-0.02625) \left( 12.50 + \frac{5}{2}(-0.04569) \right) \right) \right]}$$

$$F^2 = 2.7151$$

$$k_3 = \frac{0.08708 - 0.01338 \left( \frac{1}{\cos \frac{-(0 + \frac{5}{2})}{38.1}} \right)}{1 - 2.7151} = -0.04295$$

para  $k_4$  cambia ahora

$$k_4 = d'(s_i + h, d_i + hk_3)$$

$$S_0 = -[1 - \kappa(d + hk_3)] \operatorname{tg} \left( \frac{-(s + h)}{R} \right)$$

$$S_0 = -[1 - (-0.02625)(12.50 + (5)(-0.04295))] \operatorname{tg} \left( \frac{-(0 + 5)}{38.1} \right) = 0.1746$$

$$a_v = \frac{b - 2\kappa^{-1} \ln[1 - \kappa(d + hk_3)]}{b + 2(d + hk_3)}$$

$$a_v = \frac{(20.32) - 2(-0.02625)^{-1} \ln[1 - (-0.02625)[(12.50) + (5)(-0.04295)]}{(20.32) + 2[12.50 + (5)(-0.04295)]} = 0.9271$$

$$a_q = \left[ \frac{-\kappa(d + hk_3)}{\ln[1 - \kappa(d + hk_3)]} \right]^{1/4}$$

$$a_q = \left[ \frac{-(-0.02625)[12.50 + (5)(-0.04295)]}{\ln[1 - (-0.02625)(12.50 + (5)(-0.04295))]} \right]^{1/4} = 1.0364$$

$$u_0 = \frac{-\kappa Q_0}{b \ln[1 - \kappa(d + hk_3)]}$$

$$u_0 = \frac{-(-0.02625)(49573.769)}{(20.32) \ln[1 - (-0.02625)(12.50 + (5)(-0.04295))]} = 229.1147$$

$$R_h = \frac{b(d + hk_3)}{b + 2(d + hk_3)}$$

$$R_h = \frac{20.32[12.50 + (5)(-0.04295)]}{20.32 + 2[12.50 + (5)(-0.04295)]} = 5.561$$

$$S_f = (0.9271)(1.0364) \left[ \frac{(0.01007)^{1/4}}{\sqrt{2}(158)^2} \right] \left[ \frac{(229.1147)^{7/4}}{(5.561)^{5/4}} \right] = 0.01362$$

$$F^2 = \frac{\frac{u_0^2}{g(d + hk_3) \cos\left(\frac{-(s+h)}{R}\right)}}{\frac{[1 - \kappa(d + hk_3)]^3 \ln[1 - \kappa(d + hk_3)]}{\kappa(d + hk_3)[1 + \ln(1 - \kappa(d + hk_3))]}}$$

$$F^2 = \frac{\frac{(229.1147)^2}{(981)(12.50 + 5(-0.04295)) \cos\left(\frac{-(0+5)}{38.1}\right)}}{\frac{[1 - (-0.02625)(12.50 + 5(-0.04295))]^3 \ln[1 - (-0.02625)(12.50 + 5(-0.04295))]}{(-0.02625)(12.50 + 5(-0.04295))[1 + \ln(1 - (-0.02625)(12.50 + 5(-0.04295))])}}$$

$$F^2 = 2.8040$$

$$k_4 = \frac{0.1746 - 0.01362 \left( \frac{1}{\cos \frac{-(0+5)}{38.1}} \right)}{1 - 2.8040} = -0.08917$$

$$d(s) = d_0 + h \left( \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \right)$$

$$d(5) = 12.50 + 5 \left( \frac{0.00804 + 2(-0.04569) + 2(-0.04295) + (-0.08917)}{6} \right)$$

$$d(5) = 12.2847 \text{ cm}$$

## Hay que verificar el resultado con el del programa

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

Indique los incrementos  $h=5$

¿Cual es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cual es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cual es el gasto en el canal?  $Q=49573.76928$

¿Cual es el tirante al inicio de la curvatura?  $N_0=12.5$

¿cual es el valor inicial de la parte convexa?  $s=0$

¿Cual es el valor final de la parte convexa?  $s=50$

s	N	k1	k2	k3	k4
5.00000	12.28470	0.00804	-0.04569	-0.04295	-0.08914
10.00000	11.68713	-0.08912	-0.12383	-0.11936	-0.14158

los valores de  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  serán posteriormente omitidos, ya que éstos no dicen nada por si mismos.

## CAPITULO 4

### Elaboración del programa de cómputo

#### 4.1 Elección del lenguaje de programación

Para elegir el programa se analizó primero la necesidad de visualización gráfica, ya que además de necesitar los valores en cada punto ( $s$ ) a lo largo de la plantilla, fue necesario el uso de las gráficas para facilitar la interpretación del comportamiento del flujo en las secciones cóncava y convexa.

Al ver estas necesidades se decidió por MATLAB<sup>□</sup>, el cual se puede considerar como un lenguaje de programación como el Fortran o C. Algunas de sus características notables son:

- La programación es más sencilla.
- Hay continuidad entre los valores enteros, reales y complejos.
- La amplitud del intervalo y la exactitud de los números son mayores.
- Proporciona abundantes herramientas gráficas que incluyen funciones de interfaz gráfica con el usuario.
- Capacidad de vincularse con los lenguajes de programación tradicionales.
- Transportabilidad de los programas MATLAB.

Una característica extraordinaria de los números en MATLAB es que no hay distinción entre reales y complejos, enteros, de precisión sencilla y de doble precisión. En MATLAB todos estos números están conectados continuamente, como debe ser. Esto significa que cualquier variable puede contener números

---

□ Fortran y C sigue siendo importantes para la computación de alto rendimiento que requiere abundante memoria o un tiempo de computo largo. La velocidad de computo con MATLAB es significativamente más baja que con Fortran o con C.

de cualquier tipo, sin una declaración especial durante la programación, por lo cual esta última se hace más rápida y productiva. En Fortran se requiere una subrutina distinta para cada variable sencilla o doble, real o compleja, o entera, mientras que en MATLAB no hay necesidad de separarlas.

La biblioteca matemática de MATLAB facilita los análisis matemáticos. Además, el usuario puede crear rutinas matemáticas adicionales con mucha mayor facilidad que en otros lenguajes de programación, gracias a la continuidad entre las variables reales y complejas. Entre numerosas funciones matemáticas, los solucionadores de álgebra lineal desempeñan un papel crucial, ya que todo el sistema MATLAB se basa en ellos.

El análisis visual de los problemas matemáticos ayuda a comprender las matemáticas y a hacerlas más accesibles. Aunque esta ventaja es bien conocida, la presentación de resultados calculados con gráficos de computadora solía requerir un esfuerzo adicional considerable. En cambio, bastan unos cuantos comandos con MATLAB para producir presentaciones gráficas de material matemático. Es posible crear objetos gráficos científicos e incluso artísticos en la pantalla mediante expresiones matemáticas. Se ha comprobado que las gráficas de MATLAB motivan e incluso excitan a los estudiantes para aprender métodos matemáticos y numéricos que de otra forma podrían resultar tediosos.

Nota : hay que tomar en cuenta que el MATLAB tiene el comando *ode45* que resuelve la ecuación diferencial de orden 5.

Se tomó la decisión de desarrollar el programa para que el usuario final no tenga la necesidad de conocer o dominar los comandos del software, por lo que sólo es necesario correr el programa e introducir los valores de las variables que se van pidiendo, haciendo así más fácil su aplicación.

Existen otros paquetes que resuelven las EDO directamente, como lo serían:

- Mathematica
- Mathcad
- Maple
- Matlab

una desventaja es que el usuario tendría que estar familiarizado con alguno de ellos y conocer los comandos que le dan solución a las EDO y la ventaja de conocer alguno de estos software es que uno evita el desarrollo del programa .

#### 4.2 Principios de MATLAB

En este capítulo se explican algunos comandos de MATLAB, pero no es una guía completa del lenguaje. Se recomienda a los lectores interesados en información adicional sobre MATLAB consultar la literatura proporcionada en las referencias

Es importante dar un panorama general de MATLAB, para poder entender el programa que da la solución numérica de las ecuaciones de Dressler.

Se debe tener presente que  $\log$  significa  $\ln$ . La función de logaritmo base 10 se denotará específicamente como  $\log_{10}$ . Las funciones trigonométricas emplean *radianes* pero no grados; por otro lado, los ángulos en las vistas gráficas están en grados.

Los resultados de los cálculos pueden presentar pequeñas diferencias en las diferentes computadoras, debido a que los errores de redondeo no son los mismos en todos los modelos de computadoras.<sup>[4]</sup>

---

<sup>[4]</sup> Las diferencias suelen ser insignificantes, pero algunos problemas son sensibles a errores de redondeo y producen resultados significativamente distintos en diferentes computadoras. Tales problemas se conocen como problemas mal condicionados y por lo regular son difíciles de resolver en cualquier computadora.

**Cómo abrir MATLAB:** en Macintosh o Windows, se hace clic en el ícono de MATLAB o de STUDENT MATLAB. El procedimiento para salir de MATLAB es similar al que se sigue para salir de cualquier otra aplicación en Macintosh o Windows .

#### **GRAFICAS CON MATLAB**

Como la mayor parte de las ecuaciones matemáticas expresa relaciones complicadas en una, dos, tres o más dimensiones, tratar de entenderlas sin gráficas es casi lo mismo que tener los ojos vendados. El empleo de gráficas es importante desde la educación primaria hasta la superior, así como para ingenieros y científicos profesionales por la misma razón. En las presentaciones profesionales, casi todos los análisis matemáticos, científicos y de ingeniería se presentan con gráficas.

Durante las últimas tres décadas, Fortran dominó entre los lenguajes de computación y las gráficas estuvieron desafortunadamente muy desligadas de los cálculos. Por ello, muchos usuarios de Fortran se vieron obligados a leer los resultados calculados en forma de listados de números.

Las gráficas son ahora una parte natural del entorno de computación con MATLAB, y la graficación de los resultados de los cálculos puede efectuarse con algunos comandos. Se recomienda a los lectores graficar las funciones matemáticas con las que se tope, así como los resultados de análisis. Tratar de entender las ecuaciones matemáticas con gráficas es una forma agradable y muy eficiente de aprender matemáticas.

Las gráficas pueden ser 2D o 3D, logarítmicas o semilogarítmicas, polares y vectoriales. Con unos cuantos comandos uno puede generar gráficas sin mayor complejidad. Estas pueden ser dibujadas con diferentes tipos de líneas ( - - - : - . ) o con marcas ( . + \* o x ) y con diferentes colores, conteniendo títulos, textos y leyendas en las gráficas.

Antes de utilizar el programa para la solución de las ecuaciones de Dressler, el lector debe tomar nota de lo siguiente. Algunos comandos de gráficas siguen en vigor incluso después de haber terminado de graficar y pueden interferir trabajos posteriores. Es posible que el comportamiento de MATLAB se haga impredecible después de utilizar algunos comandos como `hold on` o `subplot`, o que se interrumpa bruscamente la ejecución de un guión. Se recomienda a los lectores borrar las variables y las ventanas de gráficas antes de iniciar cualquier trabajo de graficación. Si aun así MATLAB se comporta de forma extraña, salga por completo de MATLAB y ábralo otra vez.

### 4.3 Desarrollo del programa de cómputo aplicado a las ecuaciones de Dressler

Para poder demostrar cual es el verdadero valor de la componente de velocidad  $u$  se dará solución a la ecuación (2.50) y se comparará con el valor de la componente  $w$  para así demostrar que  $u \ll w$ . La ecuación (2.50) presenta una derivada parcial, la solución a esta derivada se da a continuación:

$$\frac{du_0}{ds} = \frac{-\kappa Q_0}{B \ln(1 - \kappa d)}$$

Y como  $k$ ,  $Q_0$  y  $B$  son constantes se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{ds} &= \frac{1}{B \ln(1 - \kappa d)} \cdot \frac{-\kappa Q_0}{B} \\ &= \frac{-\kappa^2 Q_0 \frac{dd}{ds}}{B \ln(1 - \kappa d)^2 (1 - \kappa d)}; \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$w = \frac{\ln(1 - \kappa r)}{(1 - \kappa r)\kappa} \cdot \frac{-\kappa^2 Q_0 \frac{dd}{ds}}{B \ln(1 - \kappa d)^2 (1 - \kappa d)};$$

Como puede verse, en la ecuación anterior se tiene la variable  $dd // ds$ , que es la ecuación (2.56). El valor de  $k_j$  en el método de Runge-Kutta es

$k_1 = d'(s_i, d_i)$ , por lo que este valor se sustituye en el componente de la velocidad vertical ( $w$ ).

Se desarrollan cuatro programas el primero se elaboró para la parte discontinua en el punto 0, el segundo para la parte convexa, el tercero corresponde a la discontinuidad en el punto A y por último, para la parte cóncava. Las variables de entrada son:

```
('Indique los incrementos h=');
('¿Cual es la base del canal? b=');
('¿Cual es el radio del cimacio? R=');
('¿Cual es el gasto en el canal? Q=');
('¿Cual es el tirante al inicio de la curvatura ? N0=');
('¿Cual es la velocidad? v=');
('¿cual es el valor inicial de la parte convexa? s=');
('¿Cual es el valor final de la parte convexa? s=');
```

donde  $h$  representa los incrementos a lo largo de la plantilla; entre más pequeños sean estos incrementos, los resultados son más exactos;  $s$  es la coordenada que sigue fielmente la forma del fondo curvo desde el inicio hasta el final de la parte convexa.

Los valores de salida son:

$s, d, u^2/2g, d+u^2/2g, u, v, RC$

**NOTA:** excepto para los puntos de discontinuidad, donde sólo se darán los valores de  $d$ , ya que en dichos punto el tirante varía muy rápido, se tiene que  $d$  es el tirante en cada punto de la coordenada  $s$ ,  $v^2/2g$  es la carga de velocidad,  $u$  y  $v$  son los componentes de la velocidad en un punto  $s$  paralelo y normal a la curvatura de la plantilla respectivamente,  $RC$  es la resultante de los componentes de la velocidad.

Los signos % en MATLAB indican que los enunciados que siguen al signo en la misma línea son comentarios y deben ignorarse durante los cálculos.

A continuación se presenta el programa para la parte discontinua en el punto 0. El punto inicial en  $s$  debe ser  $< -1$  ya que si empezamos en  $s=-1$  se

tiene la condición  $\kappa'=0$ ,  $\kappa=0$ ,  $\theta=0$ , y  $\zeta=0$ ; por lo que tendríamos el caso de fondo plano.

### Programa para la discontinuidad en el punto 0

```
% Este programa calcula el perfil de un flujo curvilíneo para la
% discontinuidad en 0
% en donde h son los incrementos de la coordenada s.
% b es la base del canal.
% r y R es el radio de la parte convexa
% q0 es el gasto en el canal
% L1 es el intervalo alisado
% v es la velocidad del flujo
% g es la gravedad
% ka es la constante de Blasius
% vis es la viscosidad cinemática
% k es la curvatura de la plantilla
% nota el punto inicial s debe ser < -1
% por lo que empezaremos en s=-.99
%=====
clear, clf,
disp('La función es dd/ds=f(s,d(s),Q0)')
h=.01;%input('Indique los incrementos h=');
m=1;
b=input('¿Cual es la base del canal? b=');
r=input('¿Cual es el radio del cimacio? R=');
q0=input('¿Cual es el gasto en el canal Q=');
n(m)=input('¿Cual es el tirante al inicio de la curvatura ? N0=');
L1=1;
g=981; %cm/s^2
ka=158; %cm^.5/s
vis=0.01007; %cm^2/s
ep=L1/r;
s(m)=-.99;%input('¿cual es el valor inicial de? s=');
sfin=1;%input('¿Cual es el valor final de la parte convexa? s=');
sf=(sfin-s(1))/h;
disp('      s      d      ')
while m<=sf;
lm=s(m)/L1;
k=(1/(4*r))*(lm^3-3*lm-2);
kp=(lm^2-1)*(3/(4*(r^2)*ep));
teta=(ep/16)*((lm^4)-6*(lm^2)-8*lm-3);
% DETERMINACION DEL VALOR DE K1
s0=- (1-k*n(m))*tan(teta)-((( -k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(2)))/...
(g*(1-k*n(m))^2*cos(teta))*(((k*n(m)+log(1-k*n(m))))/...
((1-k*n(m))*log(1-k*n(m))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*n(m)))/(b+2*n(m));
aq=(( -k*n(m))/(log(1-k*n(m))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((( -k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(7/4)))/...
(b*n(m)/(b+2*n(m)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(2)/(g*n(m)*cos(teta))/...
((-1-k*n(m))^3*log(1-k*n(m))/(k*n(m)*(1+log(1-k*n(m)))));
k1=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
%DETERMINACION DEL VALOR DE K2
s0=- (1-k*(n(m)+h/2*k1))*tan(teta)...
```

```

-((( -k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(2))/...
(g*((1-k*(n(m)+h/2*k1))^2*cos(teta)))*...
(((k*(n(m)+h/2*k1)+log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))/((1-k*(n(m)+h/2*k1))*...
log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))/(b+2*(n(m)+h/2*k1));
aq=((-k*(n(m)+h/2*k1))/(log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k1)/(b+2*(n(m)+h/2*k1)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k1)*cos(teta))/...
(-(1-k*(n(m)+h/2*k1))^3*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))/(k*(n(m)+h/2*k1))*...
(1+log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))));
k2=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
%DETERMINACION DEL VALOR DE K3
s0=- (1-k*(n(m)+h/2*k2))*tan(teta)...
-((( -k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(2))/...
(g*((1-k*(n(m)+h/2*k2))^2*cos(teta)))*...
(((k*(n(m)+h/2*k2)+log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))/((1-k*(n(m)+h/2*k2))*...
log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))/(b+2*(n(m)+h/2*k2));
aq=((-k*(n(m)+h/2*k2))/(log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k2)/(b+2*(n(m)+h/2*k2)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k2)*cos(teta))/...
(-(1-k*(n(m)+h/2*k2))^3*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))/(k*(n(m)+h/2*k2))*...
(1+log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))));
k3=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
%DETERMINACION DEL VALOR DE K4
s0=- (1-k*(n(m)+h*k3))*tan(teta)...
-((( -k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(2))/...
(g*((1-k*(n(m)+h*k3))^2*cos(teta)))*...
(((k*(n(m)+h*k3)+log(1-k*(n(m)+h*k3)))/((1-k*(n(m)+h*k3))*...
log(1-k*(n(m)+h*k3))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h*k3)))/(b+2*(n(m)+h*k3));
aq=((-k*(n(m)+h*k3))/(log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h*k3)/(b+2*(n(m)+h*k3)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(2)/(g*(n(m)+h*k3)*cos(teta))/...
(-(1-k*(n(m)+h*k3))^3*log(1-k*(n(m)+h*k3))/(k*(n(m)+h*k3))*...
(1+log(1-k*(n(m)+h*k3)))));
k4=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
n(m+1)=n(m)+h*(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
s(m+1)=s(m)+h;
fprintf('%10.3f',s(m+1))
fprintf('%10.5f\n',n(m+1))
m=m+1;
plot(s,n,'.')
grid on
xlabel('s')
ylabel('n')
end

```

### programa para la parte convexa:

```

% Este programa calcula el perfil de un flujo curvilíneo convexo
% en donde h son los incrementos de la coordenada s.
% b es la base del canal.
% r y R es el radio de la parte convexa
% q0 es el gasto en el canal
% v es la velocidad del flujo
% g es la gravedad
% ka es la constante de Blasius
% vis es la viscosidad cinemática
% k es la curvatura de la plantilla
%=====
clear, clf, clc
disp('La función es dd/ds=f(s,d(s),Q0)')
h=input('Indique los incrementos h=');
m=1;
b=input('¿Cual es la base del canal? b=');
r=input('¿Cual es el radio de la parte convexa? R=');
q0=input('Cual es el gasto en el canal Q=');
n(m)=input('¿Cual es el tirante normal al inicio de la curvatura ? N0=');
g=981;
ka=158;
vis=0.01007;
k=-1/r;
s(m)=input('¿cual es el valor inicial de la parte convexa? s=');
sfin=input('¿Cual es el valor final de la parte convexa? s=');
sf=(sfin-s(1))/h;
disp('          N      v^2/2g      N+v^2/2g      u          v          Rc')
% s0 es la pendiente
% av y aq son las funciones de Blasius
% blas la ecuación generalizada de Blasius
% F es el numero de Froud
% k1, k2, k3, k4, son los valores del método de Runge-Kutta
% n(m+1) es el valor del tirante en la coordenada s
%=====
while m<=sf;
% DETERMINACION DEL VALOR DE K1
s0=- (1-k*n(m)) *tan(-s(m)/r);
av=(b-2*k^(-1) *log(1-k*n(m)))/(b+2*n(m));
aq=((-k*n(m))/(log(1-k*n(m))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2))) * ((-k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(7/4))/...
(b*n(m)/(b+2*n(m)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(2)/(g*n(m) *cos(-s(m)/r))/...
(-(1-k*n(m))^(3) *log(1-k*n(m)))/(k*n(m) * (1+log(1-k*n(m)))));
k1=(s0-av*aq*blas*(1/cos(-s(m)/r)))/(1-F);
%DETERMINACION DEL VALOR DE K2
s0=- (1-k*(n(m)+h/2*k1)) *tan(-(s(m)+h/2)/r);
av=(b-2*k^(-1) *log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))/(b+2*(n(m)+h/2*k1));
aq=((-k*(n(m)+h/2*k1))/(log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2))) * ((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k1)/(b+2*(n(m)+h/2*k1)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k1) *cos(-(s(m)+h/2)/r))/...
(-(1-k*(n(m)+h/2*k1))^(3) *log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))/(k*(n(m)+h/2*k1) *...
(1+log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))));
k2=(s0-av*aq*blas*(1/cos(-(s(m)+h/2)/r)))/(1-F);

```

```

%DETERMINACION DEL VALOR DE K3
s0=- (1-k*(n(m)+h/2*k2))*tan(-(s(m)+h/2)/r);
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))/(b+2*(n(m)+h/2*k2));
aq=((-k*(n(m)+h/2*k2))/(log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(7/4)/...
(b*(n(m)+h/2*k2)/(b+2*(n(m)+h/2*k2)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k2)*cos(-(s(m)+h/2)/r))/...
(-(1-k*(n(m)+h/2*k2))^(3)*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))/(k*(n(m)+h/2*k2)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))));
k3=(s0-av*aq*blas*(1/cos(-(s(m)+h/2)/r)))/(1-F);
%DETERMINACION DEL VALOR DE K4
s0=- (1-k*(n(m)+h*k3))*tan(-(s(m)+h)/r);
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h*k3)))/(b+2*(n(m)+h*k3));
aq=((-k*(n(m)+h*k3))/(log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(7/4)/...
(b*(n(m)+h*k3)/(b+2*(n(m)+h*k3)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(2)/(g*(n(m)+h*k3)*cos(-
(s(m)+h)/r))/...
(-(1-k*(n(m)+h*k3))^(3)*log(1-k*(n(m)+h*k3))/(k*(n(m)+h*k3)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h*k3)))));
k4=(s0-av*aq*blas*(1/cos(-(s(m)+h)/r)))/(1-F);
n(m+1)=n(m)+h*(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
%en donde 'a' es la componente de velocidad (vel), y c es la derivada
dc/ds,
%u es la componente de velocidad, Rc es la resultante de las componentes
%vel y u alfa es el ángulo de la resultante (Rc),
%carga es la carga de velocidad,
%N0 es la energía real
%=====
a=log(1-k*n(m+1))/((1-k*n(m+1))*k);
c=(-k^2*q0*k1)/(b*(log(1-k*n(m+1)))^2*(1-k*n(m+1)));
vel=a*c;
u=-k*q0/(b*log(1-k*n(m+1)))/(1-k*n(m+1));
alfa=atan(vel/u);
Rc=vel/(sin(alfa));
carga=(R^2)/(2*g);
N0(m+1)=n(m+1)+carga;
s(m+1)=s(m)+h;
fprintf('%10.2f',s(m+1))
fprintf('%10.5f',n(m+1))
fprintf('%10.5f',carga)
fprintf('%10.5f',N0(m+1))
fprintf('%10.5f',u)
fprintf('%10.5f',vel)
fprintf('%10.5f\n',Rc)
m=m+1;
plot(s,n,'.')
grid on
xlabel('s')
ylabel('n')
end

```

## Programa para la discontinuidad en el punto A

```

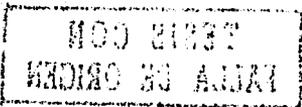
% Este programa calcula el perfil de un flujo curvilíneo para la
% discontinuidad en 0
% en donde h son los incrementos de la coordenada s.
% b es la base del canal.
% r y R es el radio de la parte convexa
% q0 es el gasto en el canal
% L1 es el intervalo alisado
% v es la velocidad del flujo
% g es la gravedad
% ka es la constante de Blasius
% vis es la viscosidad cinemática
% k es la curvatura de la plantilla
% nota el punto inicial s debe ser < -1
% por lo que empezaremos en s=-.99
%=====
clear, clf, clc
disp('La función es dd/ds=f(s,d(s),Q0)')
h=.1; %input('Indique los incrementos h=');
m=1;
b=input('¿Cual es la base del canal? b=');
r=input('¿Cual es el radio del cimacio? R=');
Ang=input('¿cual es el angulo? fi=');
q0=input('Cual es el gasto en el canal Q=');
n(m)=input('¿Cual es el tirante normal? H0=');
v=input('¿Cual es la velocidad? v=');
g=981; %cm/s^2
ka=158; %cm^.5/s
vis=0.01007; %cm^2/s
L2=1;
de=L2/r;
fi=(Ang)*(pi)/180;
s(m)=49; %input('¿cual es el valor inicial de s de la parte concava? s=');
sfin=51; %input('¿Cual es el valor final de s de la parte concava? s=');
sf=(sfin-s(1))/h;
disp('      s      N      ')
while m<=sf;
mi=(s(m)-fi*r)/L2;
k=(1/(2*r))*(3*mi-mi^3);
kp=(3/(2*(r^2)*de))*(1-mi^2);
teta=(de/8)*(3+6*(mi^2)-mi^4)-fi;
%=====
% DETERMINACION DEL VALOR DE K1
s0=-((1-k*n(m))*tan(teta)-(((k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^2))/...
(g*((1-k*n(m))^2*cos(teta))*(((k*n(m)+log(1-k*n(m)))/...
((1-k*n(m))*log(1-k*n(m))))*(kp/k)));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*n(m)))/(b+2*n(m));
aq=((k*n(m))/(log(1-k*n(m))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^(7/4))/...
(b*n(m)/(b+2*n(m)))^(5/4);
F=((k*q0/(b*log(1-k*n(m))))^2)/(g*n(m)*cos(teta))/...
(-((1-k*n(m))^3*log(1-k*n(m)))/(k*n(m)*(1+log(1-k*n(m)))));
k1=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
% DETERMINACION DEL VALOR DE K2
s0=-((1-k*(n(m)+h/2*k1))*tan(teta)...
-(((k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^2))/...

```

```

(g*((1-k*(n(m)+h/2*k1))^2*cos(teta)))*...
(((k*(n(m)+h/2*k1)+log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))/((1-k*(n(m)+h/2*k1))*...
log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))/(b+2*(n(m)+h/2*k1));
aq=((-k*(n(m)+h/2*k1))/(log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k1)/(b+2*(n(m)+h/2*k1)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k1)*cos(teta))/...
(-(1-k*(n(m)+h/2*k1))^3*log(1-k*(n(m)+h/2*k1))/(k*(n(m)+h/2*k1)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h/2*k1)))));
k2=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
%DETERMINACION DEL VALOR DE K3
s0=-((1-k*(n(m)+h/2*k2))*tan(teta)...
-(((k*(n(m)+h/2*k2)+log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))/((1-k*(n(m)+h/2*k2))*...
log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))/(b+2*(n(m)+h/2*k2));
aq=((-k*(n(m)+h/2*k2))/(log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k2)/(b+2*(n(m)+h/2*k2)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k2)*cos(teta))/...
(-(1-k*(n(m)+h/2*k2))^3*log(1-k*(n(m)+h/2*k2))/(k*(n(m)+h/2*k2)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h/2*k2)))));
k3=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
%DETERMINACION DEL VALOR DE K4
s0=-((1-k*(n(m)+h*k3))*tan(teta)...
-(((k*(n(m)+h*k3)+log(1-k*(n(m)+h*k3)))/((1-k*(n(m)+h*k3))*...
log(1-k*(n(m)+h*k3))))*(kp/k));
av=(b-2*k^(-1)*log(1-k*(n(m)+h*k3)))/(b+2*(n(m)+h*k3));
aq=((-k*(n(m)+h*k3))/(log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-k*q0/...
(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h*k3)/(b+2*(n(m)+h*k3)))^(5/4);
F=(-k*q0/(b*log(1-k*(n(m)+h*k3))))^(2)/(g*(n(m)+h*k3)*cos(teta))/...
(-(1-k*(n(m)+h*k3))^3*log(1-k*(n(m)+h*k3))/(k*(n(m)+h*k3)*...
(1+log(1-k*(n(m)+h*k3)))));
k4=(s0-av*aq*blas*(1/cos(teta)))/(1-F);
n(m+1)=n(m)+h*(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
s(m+1)=s(m)+h;
fprintf('%10.2f',s(m+1))
fprintf('%10.5f\n',n(m+1))
m=m+1;
plot(s,n)
grid on
xlabel('s')
ylabel('n')
end

```



Para la parte cóncava sólo varían  $\theta$  y  $k$  :

```

% Este programa calcula el perfil de un flujo curvilíneo cóncavo
% en donde h son los incrementos de la coordenada s.
% b es la base del canal.
% r y R es el radio de la parte convexa
% q0 es el gasto en el canal
% v es la velocidad del flujo
% g es la gravedad
% ka es la constante de Blasius
% vis es la viscosidad cinemática
% kc es la curvatura de la plantilla
% fi esta en radianes
%=====
clear, clf,clc
disp('La función es dd/ds=f(s,d(s),Q0)')
h=input('Indique los incrementos h=');
m=1;
b=input('¿Cual es la base del canal? b=');
r=input('¿Cual es el radio del cimacio? r=');
Ang=input('¿cual es el ángulo? fi=');
q0=input('Cual es el gasto en el canal Q=');
n(m)=input('¿Cual es el tirante normal ? H0=');
g=981; %cm/s^2
ka=158; %cm^.5/s
vis=0.01007; %cm^2/s
fi=(Ang)*(pi)/180
kc=1/r;
s(m)=input('¿cual es el valor inicial de s de la parte cóncava? s=');
sfin=input('¿Cual es el valor final de s de la parte cóncava? s=');
sf=(sfin-s(1))/h;
disp('          s          N          v^2/2g          N+v^2/2g          u          v          Rc')
% s0 es la pendiente
% av y aq son las funciones de Blasius
% blas la ecuación generalizada de Blasius
% F es el numero de froud
% k1, k2, k3, k4, son los valores del método de Runge-Kutta
% n(m+1) es el valor del tirante en la coordenada s
%=====
while m<=sf;
% DETERMINACION DEL VALOR DE K1
s0=- (1-kc*n(m))*tan(s(m)/r-2*fi);
av=(b-2*kc^(-1)*log(1-kc*n(m)))/(b+2*n(m));
aq=(-kc*n(m))/(log(1-kc*n(m)))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-kc*q0/(b*log(1-kc*n(m))))^(7/4))/...
(b*n(m)/(b+2*n(m)))^(5/4);
F=(-kc*q0/(b*log(1-kc*n(m))))^(2)/(g*n(m)*cos(s(m)/r-2*fi))/...
(-(1-kc*n(m))^(3)*log(1-kc*n(m))/(kc*n(m)*(1+log(1-kc*n(m)))));
k1=(s0-av*aq*blas*(1/cos(s(m)/r-2*fi)))/(1-F);
%DETERMINACION DEL VALOR DE K2
s0=- (1-kc*(n(m)+h/2*k1))*tan((s(m)+h/2)/r-2*fi);
av=(b-2*kc^(-1)*log(1-kc*(n(m)+h/2*k1)))/(b+2*(n(m)+h/2*k1));
aq=(-kc*(n(m)+h/2*k1))/(log(1-kc*(n(m)+h/2*k1)))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-kc*q0/...
(b*log(1-kc*(n(m)+h/2*k1))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k1)/(b+2*(n(m)+h/2*k1)))^(5/4);
F=(-kc*q0/(b*log(1-kc*(n(m)+h/2*k1))))^(2)/...

```

```

(g*(n(m)+h/2*k1)*cos((s(m)+h/2)/r-2*fi))/...
(-(1-kc*(n(m)+h/2*k1))^(3)*log(1-kc*(n(m)+h/2*k1))/(kc*(n(m)+h/2*k1)*...
(1+log(1-kc*(n(m)+h/2*k1)))));
k2=(s0-av*aq*blas*(1/cos((s(m)+h/2)/r-2*fi)))/(1-F);
%DETERMINACION DEL VALOR DE K3
s0=-(1-kc*(n(m)+h/2*k2))*tan((s(m)+h/2)/r-2*fi);
av=(b-2*kc^(-1)*log(1-kc*(n(m)+h/2*k2)))/(b+2*(n(m)+h/2*k2));
aq=((-kc*(n(m)+h/2*k2))/(log(1-kc*(n(m)+h/2*k2))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-kc*q0/...
(b*log(1-kc*(n(m)+h/2*k2))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h/2*k2)/(b+2*(n(m)+h/2*k2)))^(5/4);
F=(-kc*q0/(b*log(1-kc*(n(m)+h/2*k2))))^(2)/...
(g*(n(m)+h/2*k2)*cos((s(m)+h/2)/r-2*fi))/...
(-(1-kc*(n(m)+h/2*k2))^(3)*log(1-kc*(n(m)+h/2*k2))/(kc*(n(m)+h/2*k2)*...
(1+log(1-kc*(n(m)+h/2*k2)))));
k3=(s0-av*aq*blas*(1/cos((s(m)+h/2)/r-2*fi)))/(1-F);
%DETERMINACION DEL VALOR DE K4
s0=-(1-kc*(n(m)+h*k3))*tan((s(m)+h)/r-2*fi);
av=(b-2*kc^(-1)*log(1-kc*(n(m)+h*k3)))/(b+2*(n(m)+h*k3));
aq=((-kc*(n(m)+h*k3))/(log(1-kc*(n(m)+h*k3))))^(1/4);
blas=(vis^(1/4)/(2^(1/2)*ka^(2)))*((-kc*q0/...
(b*log(1-kc*(n(m)+h*k3))))^(7/4))/...
(b*(n(m)+h*k3)/(b+2*(n(m)+h*k3)))^(5/4);
F=(-kc*q0/(b*log(1-kc*(n(m)+h*k3))))^(2)/(g*(n(m)+h*k3)*cos((s(m)+h)/r-
2*fi))/...
(-(1-kc*(n(m)+h*k3))^(3)*log(1-kc*(n(m)+h*k3))/(kc*(n(m)+h*k3)*...
(1+log(1-kc*(n(m)+h*k3)))));
k4=(s0-av*aq*blas*(1/cos((s(m)+h)/r-2*fi)))/(1-F);
n(m+1)=n(m)+h*(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
%donde 'a' es la componente de velocidad (vel), y c es la derivada dc/ds,
%'u' es la componente de velocidad, Rc es la resultante de las componentes
%'vel y u alfa es el ángulo de la resultante (Rc),
%'carga es la carga de velocidad,
%'NO es la energía real
%=====
a=log(1-kc*n(m+1))/((1-kc*n(m+1))*kc);
c=(-kc^2*q0*k1)/(b*(log(1-kc*n(m+1))^2)*(1-kc*n(m+1)));
vel=a*c;
u=-kc*q0/(b*log(1-kc*n(m+1)))/(1-kc*n(m+1));
alfa=atan(vel/u);
Rc=vel/(sin(alfa));
carga=(Rc^2)/(2*g);
NO(m+1)=n(m+1)+carga;
s(m+1)=s(m)+h;
fprintf('%10.2f',s(m+1))
fprintf('%10.5f',n(m+1))
fprintf('%10.5f',carga)
fprintf('%10.5f',NO(m+1))
fprintf('%10.5f',u)
fprintf('%10.5f',vel)
fprintf('%10.5f\n',Rc)
m=m+1;
plot(s,n,'.')
grid on
xlabel('s')
ylabel('n')
end

```

## CAPITULO 5

### RESULTADOS Y CONCLUSIONES

#### Resultados

Los resultados que aquí se presentan son para los cuatro ejemplos dados en la tabla 3.1; éstos se comparan con las gráficas obtenidas por Sivakumaran y Yevjevich.

Datos para el primer caso

(a)  $d_0=17.4$ ,  $U_0=140.21$ ,  $Q_0=49573.77$

Tabla para el punto 0, que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h=0.01$  cm (empezando con  $s=-0.99$ , porque con  $s=-1$  la función es infinita), para que el valor de  $d$  fuera lo más exacto posible. En los resultados que se dan a continuación se omiten los valores intermedios entre 0.01 y 0.05 cm.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=49573.77$

¿Cuál es el tirante al inicio de la curvatura?  $d=17.4$

$s$	$d$	$s$	$d$	$s$	$d$	$s$	$d$
-0.980	17.39584	-0.450	15.24301	0.050	13.59792	0.550	12.66856
-0.900	17.22483	-0.400	15.04255	0.100	13.47511	0.600	12.61057
-0.850	17.03563	-0.350	14.85022	0.150	13.35926	0.650	12.55880
-0.800	16.81762	-0.300	14.66605	0.200	13.25024	0.700	12.51330
-0.750	16.58693	-0.250	14.49003	0.250	13.14789	0.750	12.47413
-0.700	16.35250	-0.200	14.32205	0.300	13.05211	0.800	12.44141
-0.650	16.11936	-0.150	14.16199	0.350	12.96279	0.850	12.41526
-0.600	15.89043	-0.100	14.00972	0.400	12.87983	0.900	12.39588
-0.550	15.66743	-0.050	13.86506	0.450	12.80317	0.950	12.38349
-0.500	15.45142	0.000	13.72784	0.500	12.73276	1.000	12.37836

Tabla para la parte convexa, con incrementos de  $h=1$  cm, omitiendo valores intermedios y se muestran sólo valores a cada 5 cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d=12.37836$  cm

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio de la parte convexa?  $R=38.1$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=49573.77$

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte convexa?  $d=12.37836$

$R_c$  es la resultante de las componentes de velocidad

$v^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $R_c$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte convexa?  $s=1$

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte convexa?  $s=49$

$s$	$d$	$R_c$	$R_c^2/2g$	$d+R_c^2/2g$	$u$	$w$
2.00	12.35589	172.14982	15.10477	27.46067	172.14220	-1.61987
5.00	12.17646	175.21511	15.64747	27.82392	174.97593	-9.15186
10.00	11.60275	185.55110	17.54802	29.15076	184.63661	-18.39922
15.00	10.87337	199.76228	20.33892	31.21229	198.42056	-23.11387
20.00	10.13016	215.98517	23.77655	33.90671	214.54604	-24.89158
25.00	9.43592	233.29598	27.74058	37.17650	231.94288	-25.09010
30.00	8.81152	251.16127	32.15188	40.96339	249.96735	-24.46027
35.00	8.25963	269.21664	36.94067	45.20030	268.19865	-23.38981
40.00	7.77585	287.18548	42.03644	49.81229	286.33516	-22.08338
45.00	7.35346	304.84413	47.36490	54.71837	304.14368	-20.65340
49.00	7.05502	318.62042	51.74260	58.79762	318.02533	-19.46442

Tabla para el punto A, que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h=0.1$  cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d=7.05502$  cm

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=49573.77$

¿Cuál es el tirante al inicio de la discontinuidad?  $d=7.05502$

$s$	$d$	$s$	$d$
49.10	7.05011	49.80	7.37236
49.20	7.05953	49.90	7.46323
49.30	7.08216	50.00	7.56423
49.40	7.11723	50.10	7.67470
49.50	7.16415	50.20	7.79364
49.60	7.22252	50.30	7.91949
49.70	7.29201	50.40	8.04988
		50.50	8.18133
		50.60	8.30892
		50.70	8.42600
		50.80	8.52423
		50.90	8.59403
		51.00	8.62581

Tabla para la parte cóncava, con incrementos de  $h=1$  cm, omitiendo valores intermedios y se muestran sólo valores a cada 5 cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d=8.62581$  cm

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cuál es el ángulo?  $\phi_i=75.17$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=49573.77$

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte cóncava?  $d=8.62581$

$Rc$  es la resultante de las componentes de velocidad

$v^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $Rc$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte cóncava?  $s=51$

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte cóncava?  $s=130$

$s$	$d$	$Rc$	$Rc^2/2g$	$d+Rc^2/2g$	$u$	$w$
52.00	8.55563	326.05713	54.18616	62.74179	324.69169	-29.80870
55.00	8.35700	332.40473	56.31647	64.67347	331.25070	-27.67449
60.00	8.06406	342.39317	59.75182	67.81588	341.53838	-24.17883
65.00	7.81575	351.50055	62.97280	70.78855	350.88536	-20.78689
70.00	7.60875	359.58609	65.90324	73.51199	359.15953	-17.50981
75.00	7.44009	366.53364	68.47447	75.91456	366.25286	-14.34412
80.00	7.30721	372.24945	70.62673	77.93394	372.07858	-11.27749
85.00	7.20808	376.66004	72.31029	79.51837	376.56875	-8.29241
90.00	7.14116	379.71038	73.48623	80.62738	379.67243	-5.36839
95.00	7.10542	381.36237	74.12704	81.23247	381.35429	-2.48326
100.00	7.10037	381.59386	74.21706	81.31743	381.59367	0.38626
105.00	7.12599	380.39804	73.75263	80.87863	380.38403	3.26424
110.00	7.18283	377.78325	72.74219	79.92502	377.73277	6.17551
115.00	7.27195	373.77327	71.20614	78.47809	373.66136	9.14567
120.00	7.39499	368.40805	69.17660	76.57159	368.20595	12.20101
125.00	7.55419	361.74495	66.69695	74.25114	361.41836	15.36823
130.00	7.75244	353.86063	63.82128	71.57371	353.36757	18.67371

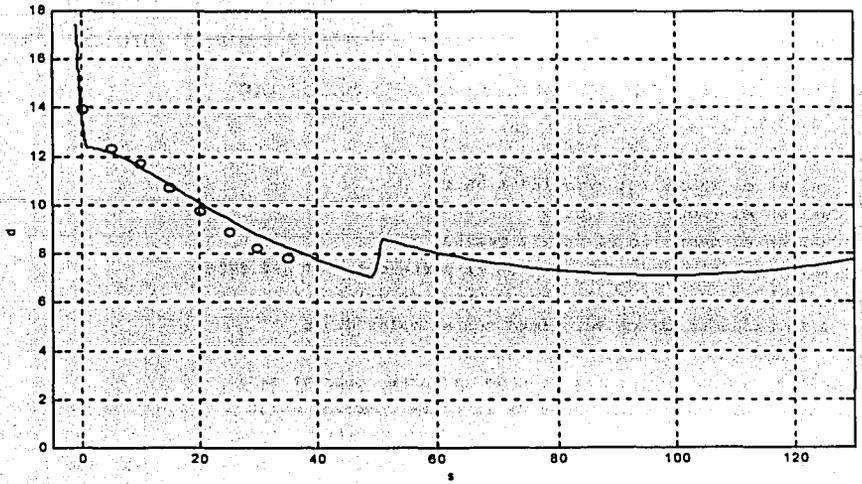


Figura 5.1 Ejemplo (a) con los valores de Matlab

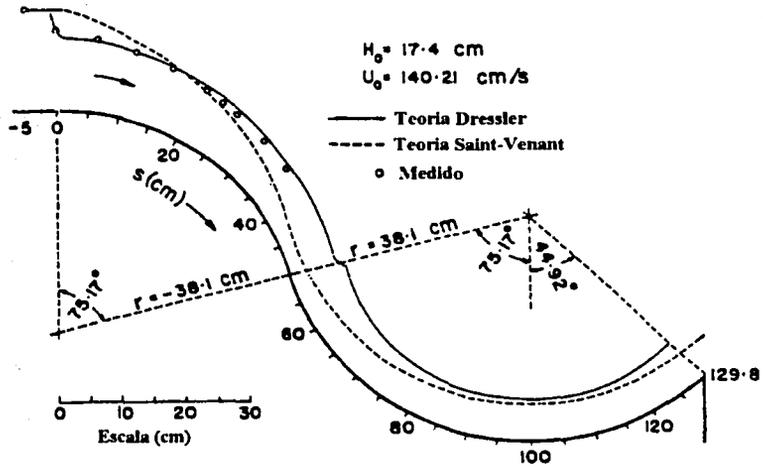


Figura 5.2 Ejemplo (a) resultados Sivakumaran y Yevjevich

(b)  $d_0=13$ ,  $U_0=118.87$ ,  $Q_0=31400.70$

Tabla para el punto 0, que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h=0.01$  cm, para que el valor de  $d$  fuera lo más exacto posible. En los resultados que se dan a continuación se omiten por razones de espacio valores intermedios entre 0.01 y 0.05 cm.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=31400.7$

¿Cuál es el tirante al inicio de la curvatura?  $d=13$

$s$	$d$	$s$	$d$
-0.980	12.99702	0.050	10.43988
-0.950	12.96907	0.100	10.35574
-0.900	12.87312	0.150	10.27614
-0.850	12.74111	0.200	10.20104
-0.800	12.59271	0.250	10.13036
-0.750	12.43801	0.300	10.06406
-0.700	12.28211	0.350	10.00207
-0.650	12.12770	0.400	9.94438
-0.600	11.97631	0.450	9.89095
-0.550	11.82883	0.500	9.84177
-0.500	11.68579	0.550	9.79683
-0.450	11.54752	0.600	9.75615
-0.400	11.41419	0.650	9.71976
-0.350	11.28592	0.700	9.68770
-0.300	11.16274	0.750	9.66003
-0.250	11.04463	0.800	9.63684
-0.200	10.93158	0.850	9.61824
-0.150	10.82352	0.900	9.60435
-0.100	10.72040	0.950	9.59534
-0.050	10.62214	1.000	9.59142
0.000	10.52866		

Tabla para la parte convexa, con incrementos de  $h=1$  cm, omitiendo valores intermedios y se muestran sólo valores a cada 5 cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d=9.59142$  cm

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio de la parte convexa?  $R=38.1$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=31400.7$

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte convexa?  $d=9.59142$

$R_c$  es la resultante de las componentes de velocidad

$v^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $R_c$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte convexa?  $s=1$

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte convexa?  $s=49$

$s$	$d$	$R_c$	$R_c^2/2g$	$d+R_c^2/2g$	$U$	$w$
2.00	9.56457	144.76244	10.68102	20.24559	144.75120	-1.80400
5.00	9.36235	148.46573	11.23449	20.59685	148.18070	-9.19523
10.00	8.76507	160.15976	13.07398	21.83905	159.24791	-17.06616
15.00	8.06801	175.42216	15.68447	23.75248	174.26435	-20.12138
20.00	7.40161	192.41986	18.87126	26.27287	191.29723	-20.75505
25.00	6.80660	210.33663	22.54918	29.35579	209.35410	-20.30666
30.00	6.28886	228.69384	26.65692	32.94578	227.87226	-19.36763
35.00	5.84272	247.15489	31.13432	36.97704	246.48346	-18.20565
40.00	5.45948	265.45872	35.91658	41.37606	264.91703	-16.94995
45.00	5.13039	283.39111	40.93299	46.06338	282.95776	-15.66617
49.00	4.90082	297.34649	45.06368	49.96450	296.98575	-14.64250

Tabla para el punto A, que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h=0.1$  cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d=4.90082$  cm

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=31400.7$

¿Cuál es el tirante al inicio de la discontinuidad?  $d=4.90082$

$s$	$d$	$s$	$d$	$s$	$d$
49.10	4.89654	49.80	5.04489	50.50	5.38273
49.20	4.89968	49.90	5.08625	50.60	5.42905
49.30	4.90960	50.00	5.13130	50.70	5.46956
49.40	4.92579	50.10	5.17941	50.80	5.50178
49.50	4.94780	50.20	5.22976	50.90	5.52311
49.60	4.97525	50.30	5.28134	51.00	5.53107
49.70	5.00774	50.40	5.33286		

Tabla para la parte cóncava con incrementos de  $h=1$  cm, omitiendo valores intermedios y se muestran sólo valores a cada 5 cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d=5.53107$  cm

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cuál es el ángulo?  $\phi=75.17$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=31400.7$

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte cóncava?  $d=5.53107$

$Rc$  es la resultante de las componentes de velocidad

$v^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $Rc$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte cóncava?  $s=51$

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte cóncava?  $s=130$

$s$	$d$	$Rc$	$Rc^2/2g$	$d+Rc^2/2g$	$u$	$w$
52.00	5.47970	305.64742	47.61486	53.09456	305.07988	-18.61765
55.00	5.33577	313.07178	49.95614	55.29191	312.60258	-17.13390
60.00	5.12730	324.59452	53.70112	58.82842	324.25772	-14.78287
65.00	4.95399	334.93835	57.17824	62.13222	334.70225	-12.57396
70.00	4.81188	343.99381	60.31180	65.12367	343.83383	-10.49015
75.00	4.69777	351.67303	63.03462	67.73239	351.57001	-8.51197
80.00	4.60915	357.90630	65.28895	69.89810	357.84508	-6.61950
85.00	4.54410	362.63951	67.02723	71.57133	362.60784	-4.79319
90.00	4.50127	365.83235	68.21269	72.71397	365.81993	-3.01409
95.00	4.47978	367.45696	68.81989	73.29967	367.45479	-1.26378
100.00	4.47923	367.49710	68.83492	73.31416	367.49680	0.47592
105.00	4.49968	365.94760	68.25568	72.75536	365.94084	2.22338
110.00	4.54163	362.81406	67.09177	71.63339	362.79204	3.99759
115.00	4.60609	358.11299	65.36438	69.97047	358.06571	5.81872
120.00	4.69464	351.87208	63.10599	67.80064	351.78763	7.70874
125.00	4.80945	344.13106	60.35993	65.16938	343.99455	9.69211
130.00	4.95346	334.94300	57.17982	62.13328	334.73520	11.79643

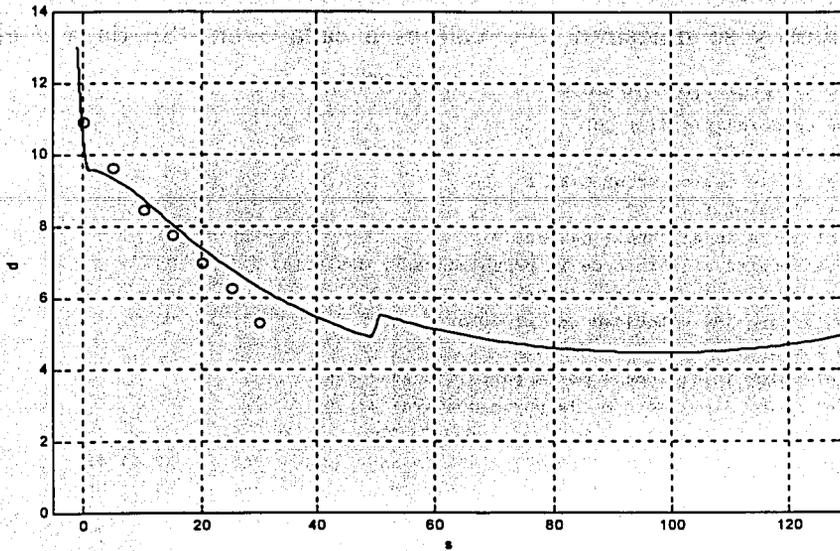


Figura 5.3 Ejemplo (b) con los valores de Matlab

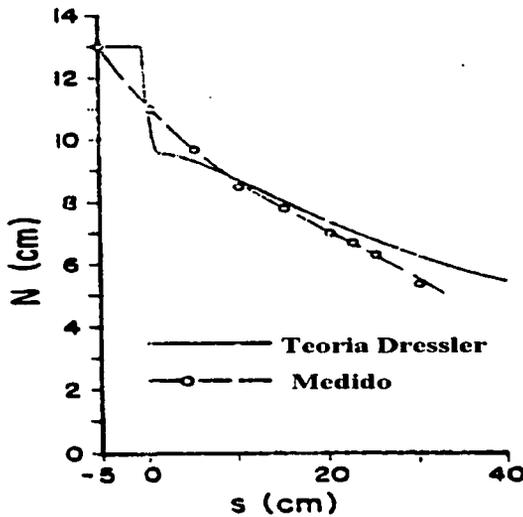


Figura 5.4 Ejemplo (b) Sivakumaran y Yevjevich

(c)  $d_0=10$ ,  $U_0=100.58$ ,  $Q_0=20437.86$

Tabla para el punto 0, que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h=0.01$  cm, para que el valor de  $d$  fuera lo más exacto posible. En los resultados que se dan a continuación se omiten valores intermedios entre 0.01 y 0.05 cm por razones de espacio.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=20437.86$

¿Cuál es el tirante al inicio de la curvatura?  $d=10$

$s$	$d$	$S$	$d$
-0.980	9.99488	0.050	8.11490
-0.950	9.95204	0.100	8.05627
-0.900	9.84516	0.150	8.00069
-0.850	9.72926	0.200	7.94813
-0.800	9.61310	0.250	7.89857
-0.750	9.49886	0.300	7.85198
-0.700	9.38732	0.350	7.80834
-0.650	9.27886	0.400	7.76764
-0.600	9.17367	0.450	7.72986
-0.550	9.07185	0.500	7.69502
-0.500	8.97347	0.550	7.66312
-0.450	8.87854	0.600	7.63417
-0.400	8.78707	0.650	7.60821
-0.350	8.69905	0.700	7.58528
-0.300	8.61445	0.750	7.56542
-0.250	8.53324	0.800	7.54871
-0.200	8.45538	0.850	7.53521
-0.150	8.38084	0.900	7.52503
-0.100	8.30956	0.950	7.51829
-0.050	8.24151	1.000	7.51513
0.000	8.17664		

Tabla para la parte convexa, con incrementos de  $h=1$  cm, omitiendo valores intermedios y se muestran sólo valores a cada 5 cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d=7.51513$  cm

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio de la parte convexa?  $R=38.1$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=20437.86$

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte convexa?  $d=7.51513$

$Rc$  es la resultante de las componentes de velocidad

$v^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $Rc$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte convexa?  $s=1$

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte convexa?  $s=49$

$s$	$d$	$Rc$	$Rc^2/2g$	$d+Rc^2/2g$	$u$	$w$
2.00	7.48355	123.05479	7.71788	15.20143	123.03942	-1.94464
5.00	7.25885	127.47852	8.28276	15.54161	127.15267	-9.10884
10.00	6.65404	140.46303	10.05599	16.71003	139.61804	-15.38391
15.00	6.00916	156.62629	12.50346	18.51263	155.69828	-17.02463
20.00	5.42852	174.29114	15.48288	20.91140	173.47085	-16.88986
25.00	4.93067	192.73791	18.93369	23.86436	192.06453	-16.09713
30.00	4.51004	211.52753	22.80525	27.31529	210.99095	-15.05703
35.00	4.15575	230.34176	27.04247	31.19822	229.91976	-13.93660
40.00	3.85692	248.92896	31.58289	35.43981	248.59916	-12.80958
45.00	3.60419	267.08033	36.35673	39.96092	266.82352	-11.70945
49.00	3.42995	281.16697	40.29300	43.72295	280.95721	-10.85876

Tabla para el punto A, que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h=0.1$  cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d=3.42995$  cm

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=20437.86$

¿Cuál es el tirante al inicio de la discontinuidad?  $d=3.42995$

$s$	$d$	$s$	$d$	$s$	$d$
49.10	3.42645	49.80	3.49150	50.50	3.63587
49.20	3.42678	49.90	3.51013	50.60	3.65387
49.30	3.43058	50.00	3.53018	50.70	3.66905
49.40	3.43754	50.10	3.55126	50.80	3.68053
49.50	3.44738	50.20	3.57293	50.90	3.68740
49.60	3.45984	50.30	3.59467	51.00	3.68881
49.70	3.47464	50.40	3.61588		

Tabla para la parte cóncava, con incrementos de  $h=1$  cm, se omiten valores intermedios y se muestran sólo valores a cada 5 cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d=3.68881$  cm

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cuál es el ángulo?  $\phi=75.17$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=20437.86$

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte cóncava?  $d=3.68881$

$R_c$  es la resultante de las componentes de velocidad

$v^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $R_c$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte cóncava?  $s=51$

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte cóncava?  $s=130$

s	d	$R_c$	$R_c^2/2g$	$d+R_c^2/2g$	u	w
52.00	3.65080	290.12094	42.90018	46.55098	289.85482	-12.42352
55.00	3.54523	298.23762	45.33419	48.87942	298.02217	-11.33425
60.00	3.39470	310.70112	49.20244	52.59713	310.55103	-9.65602
65.00	3.27168	321.75190	52.76467	56.03635	321.64938	-8.12178
70.00	3.17232	331.31233	55.94692	59.11925	331.24451	-6.70342
75.00	3.09368	339.32028	58.68413	61.77781	339.27768	-5.37671
80.00	3.03355	345.72640	60.92087	63.95442	345.70184	-4.12075
85.00	2.99032	350.49227	62.61205	65.60237	350.48013	-2.91724
90.00	2.96289	353.58923	63.72342	66.68631	353.58490	-1.74976
95.00	2.95059	354.99742	64.23199	67.18258	354.99691	-0.60312
100.00	2.95312	354.70520	64.12629	67.07941	354.70479	0.53728
105.00	2.97062	352.70865	63.40642	66.37704	352.70462	1.68608
110.00	3.00359	349.01119	62.08400	65.08759	348.99948	2.85861
115.00	3.05297	343.62327	60.18193	63.23491	343.59915	4.07168
120.00	3.12023	336.56225	57.73402	60.85425	336.51981	5.34446
125.00	3.20745	327.85228	54.78446	57.99192	327.78382	6.69966
129.00	3.29349	319.71781	52.09963	55.39312	319.62114	7.86163
130.00	3.31749	317.52462	51.38730	54.70479	317.41962	8.16510

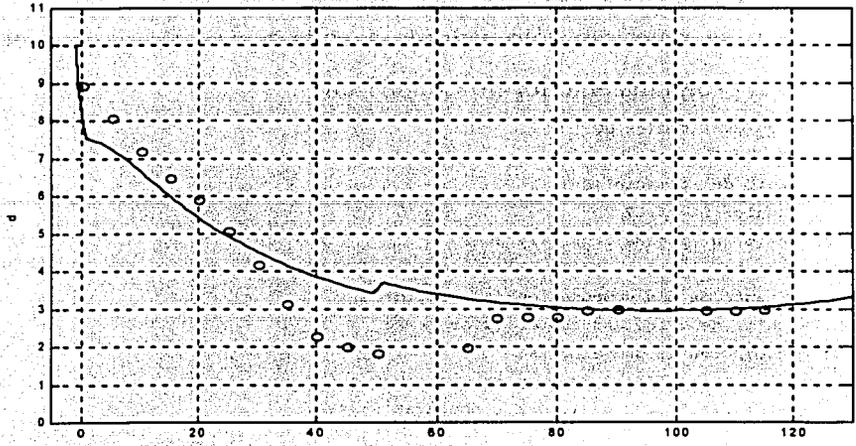


Figura 5.5 Ejemplo (c) con los valores de Matlab

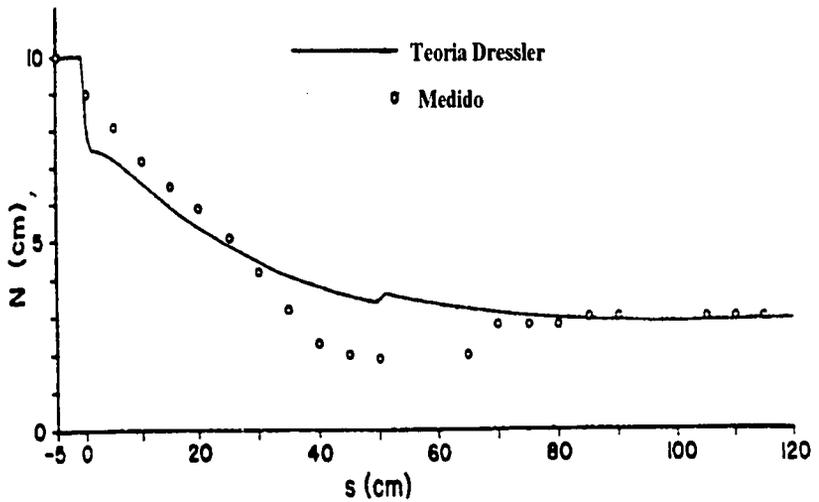


Figura 5.6 Ejemplo (c) Sivakumaran y Yevjevich

(d)  $d_0=6.5$ ,  $U_0=80.77$ ,  $Q_0=10668.10$

Tabla para el punto 0, que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h=0.01$  cm, para que el valor de  $d$  fuera lo más exacto posible. En los resultados que se dan a continuación se omiten valores intermedios entre 0.01 y 0.05 cm por razones de espacio.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=10668.10$

¿Cuál es el tirante al inicio de la curvatura?  $d=6.5$

s	d	s	d
-0.980	6.49789	0.050	5.48711
-0.950	6.47571	0.100	5.45419
-0.900	6.41923	0.150	5.42286
-0.850	6.35816	0.200	5.39313
-0.800	6.29597	0.250	5.36498
-0.750	6.23671	0.300	5.33842
-0.700	6.17774	0.350	5.31345
-0.650	6.12024	0.400	5.29007
-0.600	6.06429	0.450	5.26828
-0.550	6.00994	0.500	5.24809
-0.500	5.95724	0.550	5.22953
-0.450	5.90620	0.600	5.21260
-0.400	5.85682	0.650	5.19733
-0.350	5.80912	0.700	5.18374
-0.300	5.76308	0.750	5.17188
-0.250	5.71872	0.800	5.16177
-0.200	5.67602	0.850	5.15348
-0.150	5.63497	0.900	5.14706
-0.100	5.59556	0.950	5.14258
-0.050	5.55779	1.000	5.14011
0.000	5.52165		

Tabla para la parte convexa, con incrementos de  $h=1$  cm, omitiendo valores intermedios, mostrando sólo valores a cada 5 cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d=5.14011$  cm

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio de la parte convexa?  $R=38.1$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=10668.10$

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte convexa?  $d=5.14011$

$R_c$  es la resultante de las componentes de velocidad

$v^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $R_c$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte convexa?  $s=1$

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte convexa?  $s=49$

s	d	$R_c$	$R_c^2/2g$	$d+R_c^2/2g$	u	w
5.00	4.84874	102.39795	5.34421	10.19295	102.04261	-8.52329
10.00	4.27624	117.10174	6.98920	11.26544	116.46822	-12.16433
15.00	3.74472	134.39316	9.20567	12.95038	133.82761	-12.31635
20.00	3.30402	152.91230	11.91752	15.22153	152.47115	-11.60693
25.00	2.94645	172.03899	15.08533	18.03178	171.70727	-10.67829
30.00	2.65647	191.36640	18.66519	21.32166	191.11937	-9.72050
35.00	2.41995	210.58750	22.60300	25.02296	210.40361	-8.79862
40.00	2.22565	229.45489	26.83463	29.06028	229.31767	-7.93437
45.00	2.06490	247.76215	31.28750	33.35240	247.65946	-7.13232
49.00	1.95597	261.88551	34.95618	36.91214	261.80399	-6.53387

Tabla para el punto A, que muestra sólo los valores de  $s$  y  $d$ . En el programa se hicieron incrementos de  $h=0.1$  cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d=1.95597$  cm.

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=10668.10$

¿Cuál es el tirante al inicio de la discontinuidad?  $d=1.95597$

s	d	s	d	s	d
49.10	1.95364	49.80	1.96725	50.50	2.00268
49.20	1.95263	49.90	1.97204	50.60	2.00652
49.30	1.95280	50.00	1.97718	50.70	2.00948
49.40	1.95403	50.10	1.98251	50.80	2.01135
49.50	1.95620	50.20	1.98790	50.90	2.01192
49.60	1.95921	50.30	1.99318	51.00	2.01099
49.70	1.96293	50.40	1.99817		

Tabla para la parte cóncava, con incrementos de  $h=1$  cm, omitiendo valores intermedios y mostrando sólo valores a cada 5 cm. Se da a  $d$  el valor obtenido en el programa anterior  $d=2.01099$  cm

La función es  $dd/ds=f(s,d(s),Q_0)$

¿Cuál es la base del canal?  $b=20.32$

¿Cuál es el radio del cimacio?  $R=38.1$

¿Cuál es el ángulo?  $\phi_i=75.17$

¿Cuál es el gasto en el canal?  $Q=10668.10$

¿Cuál es el tirante al inicio de la parte cóncava?  $d=2.01099$

$R_c$  es la resultante de las componentes de velocidad

$v^2/2g$  es la carga de velocidad con el valor de  $R_c$

$u$  y  $w$  son las componentes de velocidad

¿Cuál es el valor inicial de  $s$  de la parte cóncava?  $s=51$

¿Cuál es el valor final de  $s$  de la parte cóncava?  $s=130$

s	d	$R_c$	$R_c^2/2g$	$d+R_c^2/2g$	u	w
52.00	1.98783	271.39798	37.54173	39.52956	271.31329	-6.77967
55.00	1.92430	280.08849	39.98449	41.90879	280.02202	-6.10176
60.00	1.83570	293.21987	43.82155	45.65726	293.17565	-5.09168
65.00	1.76512	304.63009	47.29841	49.06353	304.60117	-4.19758
70.00	1.70949	314.28891	50.34532	52.05481	314.27063	-3.39011
75.00	1.66664	322.17071	52.90212	54.56876	322.15983	-2.64719
80.00	1.63501	328.25432	54.91891	56.55392	328.24852	-1.95162
85.00	1.61352	332.52295	56.35653	57.97005	332.52045	-1.28938
90.00	1.60149	334.96404	57.18701	58.78850	334.96341	-0.64850
95.00	1.59854	335.56896	57.39374	58.99228	335.56896	-0.01821
100.00	1.60458	334.33256	56.97159	58.57617	334.33200	0.61187
105.00	1.61985	331.25249	55.92671	57.54657	331.25012	1.25232
110.00	1.64488	326.32826	54.27632	55.92120	326.32265	1.91472
115.00	1.68058	319.55998	52.04820	53.72878	319.54930	2.61252
120.00	1.72831	310.94655	49.28020	51.00852	310.92837	3.36227
125.00	1.79010	300.48341	46.01951	47.80961	300.45426	4.18540
130.00	1.86881	288.15917	42.32197	44.19079	288.11384	5.11103

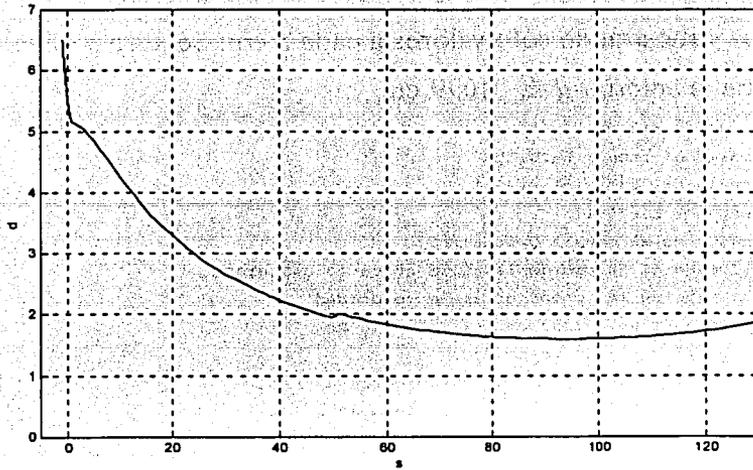


Figura 5.7 Ejemplo (d) con los valores de Matlab

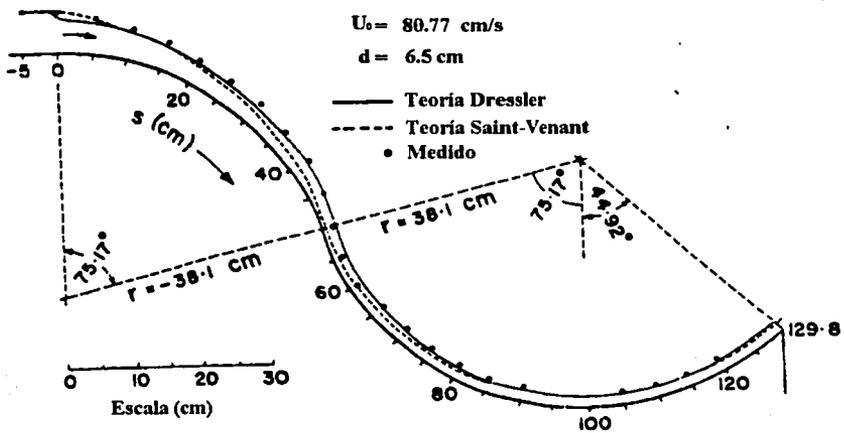


Figura 5.7 Ejemplo (d) Sivakumaran y Yevjevich

## Conclusiones

Los resultados numéricos y las gráficas del programa son muy semejantes a las gráficas presentadas por Sivakumaran y Yevjevich (1987); la única manera de comprobar la similitud de resultados es medir con el escalímetro y verificar con la tabla de resultados del programa. El programa puede aplicarse a otros modelos similares con sección rectangular de curvatura y ancho constante; ya que se hicieron los programas por separado para las partes convexa, cóncava y puntos singulares 0 y A (sólo tomando en cuenta que en el artículo de Sivakumaran y Yevjevich (1987) no se da una amplia explicación de las ecuaciones para puntos singulares).

Los resultados varían rápidamente en los puntos, dentro de los 2 cm ( $s=-1$  a  $s=1$ ,  $s=49$  a  $s=51$ ) del intervalo gradualizado, siendo que el flujo real varía lentamente entre  $s=40$  a  $s=70$  cm. Debido a que las ecuaciones de Dressler se derivaron aceptando un flujo gradualmente variado, esta aceptación se viola en los intervalos gradualizados cerca de A y 0 debido a que  $\kappa$  y  $\kappa'$  varían rápidamente, por lo que no se puede representar con exactitud el flujo real en estos puntos.

Se comprobó que la componente transversal de la velocidad es mucho menor comparada con la magnitud de la componente longitudinal, corroborando así lo expresado por Sivakumaran y Yevjevich (1987). Sólo que en este trabajo sí se muestran los resultados numéricos, quedando así la posibilidad de incluir dicha componente.

El programa puede ser utilizado en un flujo sobre un cimacio o sobre cualquier curva vertical y puede tratarse con suficiente precisión como fue el caso del modelo experimental del vertedor de la Presa Infiernillo en el Instituto de Ingeniería, en el cual se hicieron observaciones del buen funcionamiento, más no mediciones detalladas por la dificultad de hacerlas.

Este trabajo es el inicio para la realización de un trabajo de investigación hasta disponer de un programa de cómputo que permita la aplicación del método a un canal de cualquier geometría y forma de sección.

El ingeniero hoy en día cuenta con una gran variedad de software y calculadoras que dan solución a problemas matemáticos, lo que nos permite realizar un trabajo mucho mas rápido y eficiente, para así poder dar solución a problemas particulares, cómo fue el caso del presente trabajo.

## Simbología

$a_v, a_q$	funciones
$b$	ancho del canal
$b'$	$db/ds$
$u_0$	componente de la velocidad del flujo tangencial
$C$	factor de Chezy
$H$	carga de energía
$F$	numero de Froude generalizado
$f, g$	funciones
$g$	gravedad
$d_0$	tirante
$L_1, L_2$	longitud de intervalos uniformes
$l_{\min}$	característica adyacente de la longitud de la superficie libre
$m$	constante
$d$	tirante normal
$d_{\max}$	tirante máximo relativo
$n$	coordenada normal a la plantilla
$n_M$	coeficiente de Manning
$o()$	orden de magnitud
$p$	presión
$p(d)$	presión en la superficie libre $n=d$
$Q$	gasto
$R_h$	radio hidráulico
$R$	radio local de curvatura
$S_0$	inclinación de la plantilla
$S_f$	pendiente de fricción
$s$	coordenada a lo largo de la plantilla
$t$	coordenada de tiempo
$u$	componente de la velocidad tangente al fondo
$w$	componente de la velocidad normal al fondo
$w_i$	constante
$x, y, z$	coordenadas
$\alpha, \beta$	funciones
$\delta, \varepsilon$	$L_2 / R, L_1 / R$
$\zeta$	elevación de la plantilla sobre el eje $x$
$\theta$	inclinación sobre la horizontal
$\kappa$	curvatura de la plantilla

$\kappa'$	$d\kappa/ds$
$\lambda, \mu$	$s/l_1, (s - \phi R)/L_2$
$\nu$	viscosidad cinemática
$\rho$	densidad del agua
$\sigma$	$d_{\max}/l_{\min}$
$\phi, \psi$	ángulos
$s_0$	punto aguas arriba donde las condiciones limites están definidas

**Referencias:**

1. Dressler, R. F. (1978), New nonlinear shallow-flow equations with curvature, *J. Hydraulic Research*, 16, No. 3, pp. 205-222.
2. Dressler, R. F. and Yevjevich, V. (1983), Comparison of Dressler and Saint-Venant equations for shallow curved flow, *Proc. 20<sup>th</sup> Congres, International Assoc. for Hydraulic Res., Subject B.a, Vol III*, pp. 170-179, Moscow, U.S.S.R.
3. Dressler, R. F. and Yevjevich, V. (1984), Hydraulic resistance terms modified for the Dressler curved-flow equations, *J. Hydraulic Research*, 22, No. 3, pp. 145-156
4. Sivakumaran, S. S.; Tingsanchali, T.; Hosking, R. J. (1981), "Steady shallow flow over curved beds", *Journal of Fluid Mechanics*, 128, pp. 469-487.
5. Sivakumaran, Hosking, R. J. and N. S., Tingsanchali, T. (1983), "Steady shallow flow over a spillway", *Journal of Fluid Mechanics*, 111, pp. 411-420
6. Sivakumaran, N. S., Yevjevich, V., (1987), Experimental verification of the Dressler curved-flow equations, *J. Hydraulics Research.*, 25, No. 3, pp 373-391
7. Shoichiro Nakamura, (1997), *Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB*, Prentice Hall, pp. 1-93, 358-373
8. Sotelo Ávila Gilberto, (2001), *Flujo a superficie libre en fondos curvos*, Tesis Doctoral, Ciudad Universitaria 2001
9. The Mathworks, *The student Edition of MATLAB, Version 4, User's guide*, Prentice-Hall, 1995  
*MATLAB, Reference Guide, MathWorks, 1992*