



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Sobre la estabilidad hidrodinámica de pilas
cilíndricas**

T E S I S

Como requisito para obtener el título de

Ingeniero Civil

P r e s e n t a

ALBERTO AVILA ARMELLA

DIRECTOR DE TESIS

DR. RODOLFO SILVA CASARÍN



MÉXICO, D.F.

MAYO 2002



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN

DISCONTINUA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
FING/DCTG/SEAC/UTIT/ 070/02

Señor
ALBERTO AVILA ARMELLA
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **DR. RODOLFO SILVA CASARÍN**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

"SOBRE LA ESTABILIDAD HIDRODINÁMICA DE PILAS CILÍNDRICAS"

- INTRODUCCION**
- I. CONCEPTOS BÁSICOS DEL ESTUDIO DE OLEAJE**
 - II. ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA DE FLUÍDOS**
 - III. TEORÍA LINEAL**
 - IV. INTERACCIÓN DEL OLEAJE CON UNA PILA IMPERMEABLE**
 - V. INTERACCIÓN DEL OLEAJE CON UN JUEGO DE PILAS IMPERMEABLES**
 - VI. CONCLUSIONES**
- FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO**
BIBLIOGRAFÍA

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria a 2 de mayo de 2002
EL DIRECTOR

M.C. GERARDO FERRANDO BRAVO
GFB/GMP/mstg.

*A mis padres Alberto y Cristina,
por la vida, su amor y valores.*

AGRADECIMIENTOS

Muy agradable tarea es recordar a todos aquellos que, de una forma u otra, han participado en la propia formación. Sirvan pues, estas líneas, como humilde homenaje tanto a los aquí mencionados, como a los que tal vez la mente ha olvidado, pero el corazón no.

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México, que siempre siga viva y egresando profesionistas comprometidos con su país.

Gracias a la Facultad de Ingeniería, por la formación que en ella recibí.

Gracias al Instituto de Ingeniería por su preocupación por formar grandes ingenieros.

Quiero agradecer de forma muy especial al Dr. Rodolfo Silva Casarín; por su apoyo, confianza y enorme entusiasmo por compartir sus conocimientos e impulsar el desarrollo personal de cada uno de los integrantes de su equipo de trabajo.

Para el M.I. Victor Franco, un agradecimiento especial por las oportunidades que me ha brindado.

Gracias a todos y cada uno de los profesores que ayudaron en mi formación, en especial a M.I. Humberto Gardea, M.I. Ricardo Padilla, M.I. Alba Vázquez, y M.C. Rogelio Soto.

A Héctor, Liliana, Marisela, Norman, Ricardo, y Dulce, por ser mis amigos, y haberlo demostrado cuando más los necesité.

A mis amigos del Grupo de Ingeniería de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería, Diana, Dulce, Edgar, Evelyn, Gregorio, Gustavo, Juan, Megumi; y muy en especial al Dr. Georges Govaere, porque su amistad y disposición para transmitir sus conocimientos fueron parte fundamental de éste trabajo.

ÍNDICE

LISTA DE SÍMBOLOS	V
LISTA DE FIGURAS	VIII
LISTA DE TABLAS	X
INTRODUCCIÓN	XIII
OBJETIVOS	XIII
ORGANIZACIÓN DE LA TESIS	XIV
1 CONCEPTOS BÁSICOS DEL ESTUDIO DE OLEAJE	3
1.1 ANTECEDENTES E IMPORTANCIA DEL ESTUDIO DEL OLEAJE	3
1.2 FUERZAS ACTUANTES	5
1.3 PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DEL OLEAJE	6
1.4 CLASIFICACIÓN DEL OLEAJE	7
1.4.1 <i>Clasificación del oleaje de acuerdo al viento y al fetch.</i>	7
1.4.2 <i>Clasificación de las ondas por su periodo</i>	9
1.5 FENÓMENOS DE LA PROPAGACIÓN DEL OLEAJE	10
1.6 EL OLEAJE COMO PROCESO ESTOCÁSTICO	11
1.6.1 <i>El oleaje como un proceso estacionario</i>	13
1.6.2 <i>El oleaje como un proceso ergódico</i>	13
1.6.3 <i>El oleaje como proceso gaussiano</i>	14
1.7 DEFINICIÓN DE UN ESTADO DE MAR	14
1.7.1 <i>Descripción estadística de un estado de mar</i>	14
1.7.2 <i>Descripción espectral de un estado de mar</i>	17
1.8 DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS DE UN ESTADO DE MAR	20
1.8.1 <i>Distribuciones de alturas de ola</i>	20
1.8.2 <i>Distribuciones conjuntas altura - periodo de ola</i>	24
1.8.3 <i>Distribuciones de periodos de olas</i>	27
1.9 MODELOS ESPECTRALES DE UN ESTADO DE MAR	28
1.9.1 <i>Estado de saturación</i>	28
1.9.2 <i>Principales modelos espectrales</i>	29
1.10 TEORÍAS DE OLEAJE	35
2 ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS	41
2.1 ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD	41
2.2 ECUACIÓN DE LAPLACE	44
2.3 ECUACIONES DE NAVIER-STOKES	45
2.4 ECUACIÓN DE EULER	52
2.5 ECUACIÓN DE BERNOULLI	52
3 TEORÍA LINEAL	59
3.1 INTRODUCCIÓN	59
3.2 CONDICIONES DE CONTORNO.	59

3.2.1	<i>Condición cinemática de contorno.</i>	60
3.2.2	<i>Condición dinámica de contorno</i>	63
3.2.3	<i>Condición de contorno mixta de superficie libre</i>	64
3.3	TEORÍA LINEAL PARA FONDO CONSTANTE	67
3.3.1	<i>Separación de la variable profundidad.</i>	72
3.3.2	<i>Condición de periodicidad espacial.</i>	73
3.3.3	<i>Solución General</i>	74
3.3.4	<i>Caso Tridimensional.</i>	76
3.3.5	<i>Caso en dos dimensiones.</i>	77
3.4	TREN DE OLAS PROPAGÁNDOSE SOBRE UNA CORRIENTE DE AGUA UNIFORME U_0.	77
3.4.1	<i>Condición de contorno dinámica de superficie libre.</i>	77
3.4.2	<i>Condición de contorno cinemática de superficie libre</i>	79
3.5	PROPIEDADES INGENIERILES DE LAS ONDAS	80
3.5.1	<i>Relaciones básicas</i>	80
3.5.2	<i>Campo de presiones</i>	81
3.5.3	<i>Energía</i>	82
3.5.4	<i>Resumen de expresiones y aproximaciones para calcular propiedades ingenieriles de las ondas</i>	88
3.6	FLUJO POTENCIAL EN COORDENADAS CILÍNDRICAS	91
3.6.1	<i>Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas</i>	91
3.6.2	<i>Potencial de velocidades para fondo impermeable en coordenadas cilíndricas</i>	93
3.7	ANEXOS	95
3.7.1	<i>Anexo 1. Problema regular de Sturm-Liouville</i>	95
3.7.2	<i>Anexo 2. Teoremas de la ecuación de Helmholtz</i>	95
3.7.3	<i>Anexo 3. Autovalores y autofunciones del problema en la variable z con $k^2 > 0$ y $k^2 < 0$</i>	96
4	INTERACCIÓN DEL OLEAJE CON UNA PILA IMPERMEABLE	101
4.1	INTRODUCCIÓN	101
4.2	OLEAJE INCIDENTE	101
4.3	OLEAJE PERTURBADO	103
4.4	POTENCIAL TOTAL	104
4.5	EFFECTOS DEL OLEAJE SOBRE UNA PILA IMPERMEABLE	105
4.5.1	<i>Presiones</i>	105
4.5.2	<i>Fuerzas</i>	106
4.5.3	<i>Momentos Flexionantes</i>	110
4.5.4	<i>Resultados</i>	111
5	INTERACCIÓN DEL OLEAJE CON UN JUEGO DE PILAS IMPERMEABLES	119
5.1	INTRODUCCIÓN	119
5.2	CONDICIONES DEL PROBLEMA Y NOMENCLATURA	119
5.3	POTENCIAL DE VELOCIDADES	120
5.3.1	<i>Potencial incidente</i>	121
5.3.2	<i>Potencial perturbado</i>	121
5.3.3	<i>Potencial total</i>	122

5.3.4	<i>Solución a los Coeficientes C_m^j</i>	123
5.4	EFFECTOS DEL OLEAJE PERTURBADO SOBRE LAS PILAS	124
5.4.1	<i>Presión</i>	125
5.4.2	<i>Fuerza</i>	125
5.4.3	<i>Momento flexionante</i>	126
5.5	RESULTADOS	126
5.5.1	<i>Ejemplo 1</i>	127
5.5.2	<i>Ejemplo 2 (aplicación en pilas pequeñas)</i>	134
5.6	CONCLUSIONES	137
6	CONCLUSIONES	141
	FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO	143
	BIBLIOGRAFÍA	147



LISTA DE SÍMBOLOS

a	Amplitud de onda
a_x	Aceleración en dirección X
a_y	Aceleración en dirección Y
a_z	Aceleración en dirección Z
a_j	Radio de la pila j
dF	Fuerza puntual en la pared de una pila
dF_x/dz	Fuerza unitaria sobre una pila en dirección X
dF_y/dz	Fuerza unitaria sobre una pila en dirección Y
div	Divergente de una función vectorial
dx	Incremento diferencial en la dirección X
dy	Incremento diferencial en la dirección Y
dz	Incremento diferencial en la dirección Z
f	Frecuencia
$f(z)$	Función de profundidad
g	Aceleración de la gravedad
grad	Gradiente de una función escalar
h	Tirante de agua
m	Masa
m_n	Momento de orden n
i	Número complejo i
\hat{i}	Vector ortonormal
\hat{j}	Vector ortonormal
\hat{k}	Vector ortonormal
k	Número de onda
kh	Profundidad relativa
n	Vector unitario normal a la superficie libre
p	Probabilidad, presión
p_D	Presión dinámica
r	Radio en coordenadas cilíndricas
(r_j, θ_j)	posición de un punto en coordenadas polares locales de la pila j
s	Separación diagonal entre pilas
t	Variable tiempo
ωT	Fase de la onda
u	Componente de la velocidad en X
v	Componente de la velocidad en Y
ν	Viscosidad cinemática
w	Componente de la velocidad en Z
w	Separación ortogonal entre pilas

x	Coordenada cartesiana en la dirección X
y	Coordenada cartesiana en la dirección Y
z	Coordenada cartesiana o cilíndrica en la dirección Z
A	Área
A	Amplitud de onda incidente
C	Celeridad de onda
C_D	Coefficiente de arrastre
C_g	Celeridad de grupo
C_M	Coefficiente de inercia
C_m^j	Coefficiente m de la pila j
D	Diámetro de una pila
\bar{F}	Flujo de energía
F_x	Fuerza externa por unidad de masa en la dirección X
F_x	Fuerza total sobre la pila en dirección X
F_y	Fuerza externa por unidad de masa en la dirección Y
F_y	Fuerza total sobre la pila en dirección Y
F_z	Fuerza externa por unidad de masa en la dirección Z
H	Altura de ola
H_n	Número de Hankel de primera especie, de orden n
I_j	Factor de fase del oleaje incidente en la pila j
J_n	Número de Bessel de orden n
KE	Energía cinética
L	Longitud de onda
M	Masa de un cubo diferencial
$M_{\text{volteo } x}$	Momento de volteo en la dirección X
$M_{\text{volteo } y}$	Momento de volteo en la dirección Y
Mx_z	Momento flexionante en la dirección X a una profundidad z
My_z	Momento flexionante en la dirección Y a una profundidad z
N	Número de pilas
P	Densidad de probabilidad
PE	Energía potencial
Q_p	Agudeza de pico espectral
$\Re[]$	Parte real de un número complejo
R_{ij}	Distancia entre el centro de las pilas i y j
$S(f)$	Función espectral
T	Periodo de la onda
U_0	Corriente uniforme
V	Velocidad, volumen
Y_n	Número de Weber de orden n
α_j	Ángulo respecto a la horizontal de la línea que une las pilas i y j
β	Ángulo de incidencia del oleaje
δ_m	Número de Jacobi
ε	Anchura espectral

ϕ	Potencial de velocidades en x, y
ϕ_i	Potencial incidente
ϕ^j	Potencial de velocidades calculado desde la pila j
ϕ_p	Potencial perturbado
η	Superficie libre del agua
λ	Parámetro de forma espectral
μ	Viscosidad dinámica
ν	Anchura espectral
θ	Ángulo en coordenadas polares
ρ	Densidad
σ	Frecuencia angular, esfuerzo normal
τ	Esfuerzo cortante
ξ	Componente vertical del desplazamiento orbital
ζ	Componente horizontal del desplazamiento orbital
Δ	Incremento diferencial
ΔA	Área diferencial en la pared de una pila
$\Delta \theta$	Incremento diferencial de ángulo
Δz	Incremento diferencial de la profundidad
Φ	Potencial de velocidades en x, y, z, t
∇	Operador nabla
∇^2	Laplaciano de una función escalar

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Plataforma tipo gravedad	4
Figura 1.2 Plataforma tipo TLP (Tension Leg Platform)	4
Figura 1.3 Tsunami	5
Figura 1.4 Características del oleaje	6
Figura 1.5 Registro de oleaje	6
Figura 1.6 Suma de ondas sinusoidales.	7
Figura 1.7 Oleaje SEA	8
Figura 1.8 Oleaje SWELL	8
Figura 1.9 Periodo – Energía de las ondas	10
Figura 1.10 Fenómenos de la propagación del oleaje	11
Figura 1.11 Estructura del oleaje aleatorio, Pierson et al. (1958)	12
Figura 1.12 Perfil de oleaje para cada teoría.	36
Figura 1.13 Regiones de validez para diferentes teorías de oleaje	37
Figura 2.1 Cubo infinitesimal en coordenadas ortonormales	41
Figura 2.2 Nomenclatura utilizada para los esfuerzos	42
Figura 2.3 Esfuerzos sobre un volumen de control	46
Figura 2.4 Distribución de velocidades de un fluido entre dos placas deslizándose	49
Figura 2.5 Diagrama de deformaciones en el plano x-y	49
Figura 3.1 Condiciones de contorno	60
Figura 3.2 Teoría Lineal	67
Figura 3.3 Caso de ondas de crestas largas	70
Figura 3.4 Oleaje oblicuo a los ejes de referencia	76
Figura 3.5 Esquema para determinar la energía potencial	83
Figura 3.6 Trabajo sobre una sección vertical	85
Figura 3.7 Grupo de olas	87
Figura 3.8 Función tangente hiperbólica	88
Figura 3.9 Ejes coordenados cilindricos y cartesianos	91
Figura 3.10 Obtención de las raíces reales gráficamente	97
Figura 3.11 Obtención de las raíces imaginarias puras	97
Figura 4.1 Nomenclatura en coordenadas polares	101
Figura 4.2 Fuerza sobre un diferencial de área	107
Figura 4.3 Diagrama de presiones y fuerzas unitarias a una profundidad z	107
Figura 4.4 Dimensiones relativas (ka) Vs $ \Pi_1 (ka) ^{-1}$	109
Figura 4.5 Dimensiones relativas del cilindro Vs coeficiente de inercia	110
Figura 4.6 Variación de T respecto a kh cuando $h = 80$ m	111
Figura 4.7 Profundidad relativa kh Vs fuerza y momento máximos	112
Figura 4.8 Comparación de diagramas de fuerzas y de momentos	113
Figura 4.9 Superficie libre al instante en que se presenta	113
Figura 4.10 Fuerza resultante Vs tiempo variando kh	114
Figura 4.11 Momento de volteo Vs tiempo variando kh	114
Figura 4.12 Diagrama de presiones en $z = -0.1h$ al instante	115
Figura 5.1 Nomenclatura del problema con múltiples pilas	119
Figura 5.2 Nomenclatura de los elementos diferenciales	124

Figura 5.3 Nomenclatura para denotar la separación entre pilas	127
Figura 5.4 Esquema caso 1	128
Figura 5.5 Profundidad relativa al Vs fuerza resultante máxima, caso 1	128
Figura 5.6 Comportamiento de las componentes de la fuerza durante el paso de la ola	129
Figura 5.7 Esquema caso 2	130
Figura 5.8 Profundidad relativa al Vs fuerza resultante máxima, caso 2	130
Figura 5.9 Esquema caso 3	131
Figura 5.10 Profundidad relativa al Vs fuerza resultante máxima, caso 3	131
Figura 5.11 Esquema caso 4	132
Figura 5.12 Profundidad relativa al Vs fuerza resultante máxima, caso 4	132
Figura 5.13 Esquema caso 5	133
Figura 5.14 Profundidad relativa al Vs fuerza resultante máxima, caso 5	133
Figura 5.15 Planta típica de una plataforma octapoda tipo jacket en la Zona de Cutipuecho	134
Figura 5.16 Plataforma tipo jacket	134
Figura 5.17 Periodo 1 Vs fuerza resultante máxima, h = 10 m	135
Figura 5.18 Periodo 1 Vs fuerza resultante máxima, h = 20 m	135
Figura 5.19 Periodo 1 Vs fuerza resultante máxima, h = 30 m	136
Figura 5.20 Periodo 1 Vs fuerza resultante máxima a diferentes profundidades	137

LISTA DE TABLAS

Tabla 1-1 Clasificación de las ondas por su período	9
Tabla 3-1 Posibles soluciones a la ecuación de Laplace.	71
Tabla 3-2 Resumen de las características del oleaje	90
Tabla 5-1 Datos caso 1	128
Tabla 5-2 Datos caso 2	130
Tabla 5-3 Datos caso 3	131
Tabla 5-4 Datos caso 4	132
Tabla 5-5 Datos caso 5	133

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

México, delimitado al oeste por el océano Pacífico y al este por el Atlántico, con alrededor de 11 200 km de litoral, sin contar la línea de costa de sus islas, posee innumerables recursos marítimos. Entre los más importantes están los hidrocarburos, cuyas principales reservas se encuentran en el Golfo de México. La creciente producción de petróleo ha ido consumiendo los yacimientos en aguas poco profundas, haciéndose necesario ampliar el conocimiento en todas las disciplinas involucradas, para extraerlo eficientemente a profundidades cada vez mayores.

Cuando por algún motivo es necesaria la construcción de una estructura fija en el mar, como una plataforma para extraer hidrocarburos, la forma más socorrida de fijarla al fondo marino es apoyarla en elementos cilíndricos, que son la solución más económica para reducir la interacción con el oleaje y con esto, las fuerzas a que estarán sometidos.

Cuando las pilas son de dimensiones pequeñas respecto al oleaje, que es un movimiento oscilatorio, hay separación de flujo, y las fuerzas provocadas por este dependen tanto de la inercia o del empuje provocado por la aceleración de las partículas de agua, como del arrastre debido a la fricción dinámica entre el flujo y el material del cilindro. Así mismo, cuando éste es pequeño, puede considerarse que su presencia no modifica las características del oleaje, y por lo tanto no es necesario estudiar la interacción entre ambos. Sin embargo, cuando las dimensiones de la pila son comparables con las del oleaje, ésta puede modificarlo por fenómenos tales como la reflexión o difracción, y es necesario considerar los cambios en el entorno por la presencia del objeto, es decir, debe analizarse la interacción oleaje – estructura. Además, a medida que aumenten las dimensiones relativas de la pila, la fuerza de inercia será preponderante y la de arrastre despreciable.

Aunado a lo anterior, cuando se utilizan sistemas de varias pilas para apoyar una estructura, la práctica común es calcular las fuerzas en cada una de ellas considerándola como aislada, es decir, como si la única en modificar el oleaje fuera esa pila, siendo que en la realidad la interacción entre el conjunto y el oleaje puede ser importante, ya que se generan fuerzas en sentido transversal al de propagación distintas para cada pila, dependiendo de su posición relativa, de las condiciones de oleaje incidente y de la perturbación causada por la presencia de todas las demás.

Objetivos

- Presentar las bases del estudio de oleaje utilizadas para llegar a las expresiones que lo definen en las condiciones objeto del presente trabajo.
- Mostrar la metodología que conduce a las expresiones analíticas utilizadas para calcular las fuerzas hidrodinámicas y momentos flexionantes por oleaje sobre una pila aislada de dimensiones relativas grandes, considerando la perturbación que ella misma induce.

- Ejemplificar mediante casos particulares, la forma en que varían las fuerzas al cambiar características de la pila y del medio.
- Presentar las expresiones analíticas que permiten modelar la transformación y efectos hidrodinámicos del oleaje al interactuar con un sistema de pilas cilíndricas impermeables, y con base en ello, proponer una metodología para calcular las fuerzas y momentos sobre cada pila considerando la perturbación total del conjunto.
- Ilustrar mediante casos particulares, la magnitud de la perturbación del oleaje por todo un conjunto de pilas, así como el error que pudiera cometerse al despreciar en una pila los efectos inducidos por las demás.
- Obtener conclusiones que ayuden a formar un criterio que facilite el análisis de la interacción oleaje – estructura.

Organización de la tesis

Para presentar este trabajo, los temas de estudio se dividieron de la siguiente manera:

Capítulo 1. Conceptos Básicos del Estudio de Oleaje.

Se desarrollan los conceptos y definiciones básicas para el estudio del oleaje, tales como su caracterización, la forma de medirlo, su clasificación, y los principales fenómenos que intervienen en su formación y propagación.

Se define un estado de mar y se presentan las principales formas de caracterizarlo: mediante distribuciones estadísticas y mediante modelos espectrales; describiendo las hipótesis necesarias para hacerlo de cada forma.

También se aborda sobre las principales teorías existentes y las razones por las que se escogió la teoría lineal para realizar este trabajo.

Capítulo 2. Ecuaciones Fundamentales de la Mecánica de Fluidos.

Se desarrollan las ecuaciones básicas de la hidrodinámica, con un enfoque que servirá en capítulos posteriores. Primero se obtiene la ecuación de continuidad, a partir de la cual se llega a la ecuación de Laplace, posteriormente, a partir de las ecuaciones de Saint Venant se deducen las ecuaciones de Navier-Stokes, que conducen a las ecuaciones de Euler y por último a la ecuación de Bernoulli.

Capítulo 3. Teoría Lineal.

Se hace el desarrollo para encontrar el potencial de velocidades, que es la ecuación que describe la propagación del oleaje, considerándolo como ondas monocromáticas de amplitud pequeña respecto al fondo y a la longitud de onda, en fondo constante e impermeable, flujo irrotacional, fluido incompresible, etc. Para ello se establecen primero las condiciones de contorno, y se llega a una solución general, que posteriormente permite desarrollar expresiones que definen explícitamente las propiedades ingenieriles de las ondas, tales como la presión dinámica, velocidades y aceleraciones orbitales, etc.

También se muestra la transformación de la ecuación de Laplace y del potencial de velocidades, de coordenadas cartesianas (en las que se dedujeron), a coordenadas cilíndricas, que son las más apropiadas para resolver los problemas planteados en este trabajo, dada la simetría radial de los elementos que se analizan.

Capítulo 4. Interacción del oleaje con una pila impermeable.

En este capítulo se presenta la solución al potencial de velocidades del oleaje perturbado en las inmediaciones de una pila impermeable, obtenido como la suma de un oleaje incidente y otro perturbado. De este potencial total se obtiene la presión hidrodinámica en puntos sobre la pared de la pila, e integrando esa presión se llega a expresiones analíticas para calcular las fuerzas y momentos flexionantes, que en este caso sólo se presentan en la dirección en que el oleaje se propaga. Se muestran casos específicos donde se analizan las condiciones de oleaje y características geométricas con que se presentan los efectos máximos, así como la relación entre la fuerza resultante máxima y el momento de volteo máximo.

Capítulo 5. Interacción del oleaje con un juego de pilas impermeables.

Se presenta la metodología y procedimientos propuestos por Linton y Evans (1990) para definir la ecuación del potencial de velocidades que describe el oleaje dentro, y en las inmediaciones de un juego de pilas, así como el sistema de ecuaciones que resuelve los coeficientes introducidos para el análisis.

Además se propone un procedimiento para calcular numéricamente las fuerzas y momentos sobre cada una de las pilas del sistema, a partir del potencial de velocidades obtenido con las expresiones analíticas previas, en puntos sobre la pared de las pilas. Se resuelven casos particulares donde se hacen variar datos para mostrar la importancia de considerar la perturbación total del conjunto en el cálculo de las fuerzas sobre cada pila.

Capítulo 6. Conclusiones.

Se enuncian las conclusiones obtenidas del desarrollo de este trabajo, así como un criterio para distinguir aproximadamente la situación en que comienza a ser importante la perturbación del oleaje provocada por todas las pilas en la determinación de las fuerzas sobre cada una de ellas.

Futuras líneas de trabajo.

En este apartado se listan líneas de investigación que pudieran ampliar, complementar o mejorar lo desarrollado en esta tesis.

CAPÍTULO 1 CONCEPTOS BÁSICOS DEL ESTUDIO DE OLEAJE

1 CONCEPTOS BÁSICOS DEL ESTUDIO DE OLEAJE

1.1 Antecedentes e importancia del estudio del oleaje

El oleaje es un fenómeno natural con el que el hombre ha tenido que enfrentarse y convivir desde su existencia, sin embargo, aún en este siglo no se ha escrito la última palabra en cuanto a su estudio ni se ha aprovechado suficientemente como fuente de energía.

Aristóteles, en su libro "Acerca del cielo, Meteorológicos", ya relacionaba al viento con la generación de oleaje. El primero en hacer observaciones y descripciones del fenómeno fue Leonardo da Vinci, aunque nunca en un estudio específicamente dedicado a ello. Entre los siglos XVI y XIX se realizaron estudios teóricos importantes, base de los actuales, tales como los de Airy y Stokes. El inicio de los intentos contemporáneos por predecir el oleaje lo marcaron los trabajos de Svedrup y Munk para planear el desembarque aliado en Normandía el día D (Segunda Guerra Mundial), los cuales fueron secreto militar hasta 1947. Posteriormente, Bretschneider (1952-1957) realizó mejoras a los estudios anteriores. La representación espectral de las olas en el dominio de la frecuencia fue introducida por Newman (1953) y Pierson (1954). Pierce (1957) hizo análisis estocásticos de las ondas oceánicas. Los desarrollos de las relaciones analíticas entre energía espectral y probabilidad de amplitud de onda en un proceso gaussiano aleatorio, fueron realizados por Rice (1944-1945), lo cual permitió evaluar parámetros tales como la altura característica y la altura promedio a través del análisis espectral. Longuet y Higgins (1952) estudiaron las propiedades estadísticas de la altura de ola en un registro de oleaje, introduciendo entre otros conceptos el análisis de probabilidades conjuntas altura-período. Los principales estudios para resolver problemas de ingeniería a través de enfoques estocásticos fueron los de Denis y Person (1953), seguidos de Walden (1964) y Hogben-Lumb (1967). Últimamente la cantidad de trabajos ha aumentado de forma importante, sobre todo los de aplicación, pero muy pocos utilizan modelos estadísticos y estocásticos.

Uno de los retos más difíciles de la mecánica de fluidos, que no se ha logrado superar de manera satisfactoria, es el representar los fenómenos naturales, como los atmosféricos y oceánicos, en modelos y métodos hidrodinámicos, dado que las matemáticas utilizadas en el desarrollo requieren una definición precisa del medio continuo y de sus condiciones de contorno, lo cual es imposible lograr considerando las irregularidades naturales del medio, la inmensa cantidad de factores que contribuyen para conformar un fenómeno, etc. Es por esto que la irregularidad y variabilidad del fenómeno hace necesario abordarlo utilizando métodos estadísticos, con lo que se considera al oleaje un fenómeno aleatorio.

El análisis de los efectos físicos (presiones, fuerzas, momentos, sobrelevaciones) provocados por el oleaje en estructuras marítimas, como plataformas fuera de la costa, boyas, tanques de almacenamiento, etc., no solo no puede descartarse, sino que en gran parte de ellas es la condición de carga lateral que rige en el diseño de los elementos estructurales, así como la elevación a la que deben colocarse ciertas instalaciones; esto por

la magnitud que puede alcanzar el fenómeno bajo una tormenta extrema. En plataformas apoyadas sobre estructuras masivas, como pilas, el oleaje sufre perturbaciones que cambian drásticamente las condiciones del fenómeno en sus inmediaciones, por lo que es necesario analizar dicha perturbación; tal es el caso de las plataformas de tipo gravedad, Figura 1.1 y de las TLP (Tension Leg Platform), Figura 1.2.

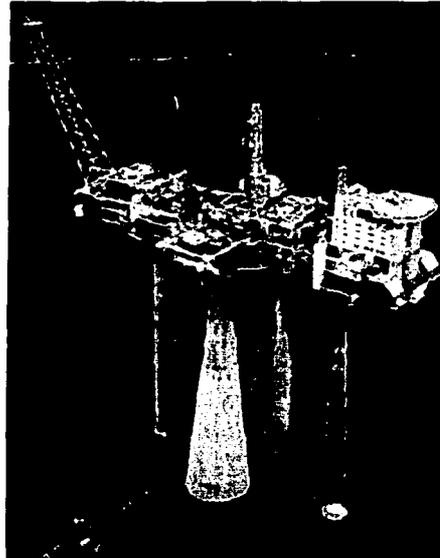


Figura 1.1 Plataforma tipo gravedad

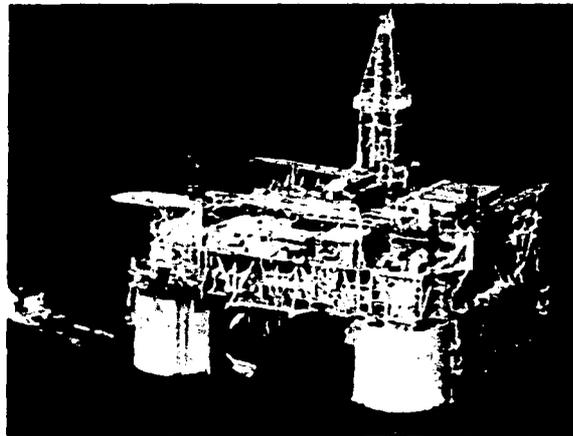


Figura 1.2 Plataforma tipo TLP (Tension Leg Platform)

1.2 Fuerzas actuantes

El oleaje es un fenómeno en el que interactúan diversas fuerzas, agrupadas en dos bloques, de acuerdo al papel que juegan: fuerzas generadoras, fuerzas restauradoras.

Las fuerzas generadoras son las que inicialmente perturban el equilibrio estático en la superficie libre del agua, es decir, son las que forman la onda en sí. Pensando en un vaso con agua, se puede generar una onda soplando sobre la superficie, moviendo el vaso, golpeándolo, o arrojando un objeto al agua; ampliando este ejemplo, en la naturaleza las olas se generan principalmente por: efectos de la componente vertical del viento, lluvia, por movimientos tectónicos (sismos), atracción gravitatoria de cuerpos celestes, entre otros.

Los sismos generan las olas más grandes, un ejemplo de esto son los *Tsunamis*, Figura 1.3, que pueden alcanzar hasta 40 m de altura; sin embargo, la mayoría de las olas en un cuerpo de agua se deben al viento, y se conoce como *Ferch* al área en que este actúa, es decir, el lugar de generación del oleaje. Es durante los huracanes, al presentarse importantes velocidades de viento, cuando éste último genera sus olas más grandes (del orden de 20 m de altura).



Figura 1.3 Tsunami

Por otro lado, las fuerzas restauradoras son las que intentan regresar la superficie libre del agua a su estado de equilibrio original, y además son las que dan lugar a la propagación del oleaje en el tiempo y en el espacio, aún cuando las fuerzas generadoras hubiesen cesado su acción. A ellas se debe en gran parte la característica de periodicidad del fenómeno. Son: el peso del agua (fuerza de gravedad) principalmente; y la tensión superficial y fuerza de Coriolis en menor medida.

1.3 Parámetros característicos del oleaje

El oleaje se puede describir por diversos parámetros: longitud de onda (L), altura de ola (H), amplitud de onda (a), periodo (T), y profundidad del agua en que se propaga (h); principalmente. Otros parámetros como velocidades y aceleraciones inducidas se pueden calcular con posteriores formulaciones.

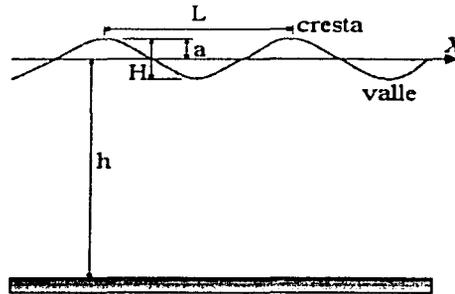


Figura 1.4 Características del oleaje

La Figura 1.4 muestra esquemáticamente una onda propagándose en la dirección del eje X . Como el oleaje se mueve una distancia L (longitud de onda) en un tiempo T (periodo), la velocidad de propagación, también llamada celeridad C , se define como $C = L / T$.

En la realidad los registros de oleaje son muy diferentes al de la Figura 1.4, pues las oscilaciones no son tan marcadas ni tan uniformes. En la Figura 1.5 se muestra un ejemplo de un registro real de oleaje, donde se aprecia la necesidad de establecer criterios para definir una ola, los más utilizados se describen a continuación, en todos se considera la lectura del registro de izquierda a derecha:

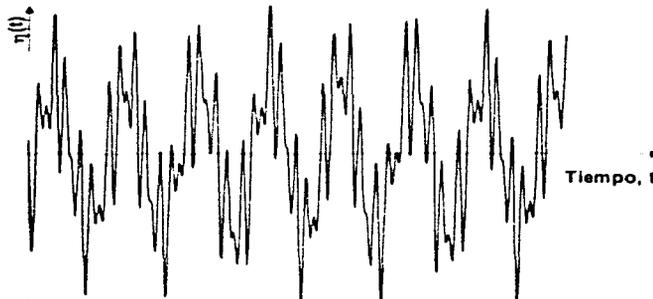


Figura 1.5 Registro de oleaje

- a) Método de pasos ascendentes por el nivel medio. Una ola empieza cuando la pendiente de la superficie libre del mar, siendo positiva (ascendente), cruza el nivel

- medio del mar; y termina cuando la pendiente vuelve a ser positiva y cruza de nuevo el nivel medio del mar; a partir de ese punto inicia una nueva ola.
- Método de pasos descendente por el nivel medio. Una ola inicia cuando la pendiente de la superficie libre del mar al cruzar el nivel medio es negativa, y termina cuando la pendiente vuelve a ser negativa al cruzar el nivel medio.
 - Método de pasos sucesivos por crestas. Una ola comienza cuando la superficie libre del mar está por encima del nivel medio y alcanza una pendiente de cero (punta de la cresta), y la ola termina, dando lugar a otra, cuando la situación anterior se vuelve a presentar.
 - Método de pasos sucesivos por valles. Una ola comienza cuando la superficie libre del mar se encuentra por debajo del nivel medio y su pendiente es cero (valle), y termina, dando paso a una nueva ola, cuando se vuelve a presentar esta situación.

Como el fenómeno del oleaje es muy complejo y no existe repetibilidad alguna ni en el espacio ni en el tiempo, no puede representarse por un modelo sencillo de olas monocromáticas (Figura 1.4), sin embargo se pueden hacer aproximaciones por medio de la superposición de olas sinusoidales, monocromáticas, de diferente frecuencia y amplitud, obteniéndose un registro de olas similar al observado, como se muestra en la Figura 1.6.

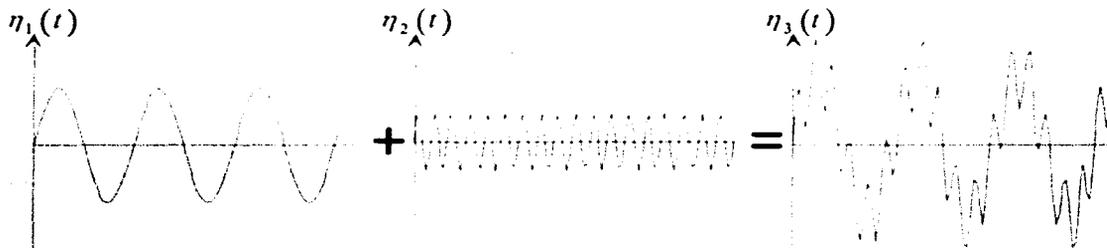


Figura 1.6 Suma de ondas sinusoidales.

La descomposición de un registro de oleaje en varias olas sinusoidales se logra mediante el análisis de Fourier.

1.4 Clasificación del oleaje

1.4.1 Clasificación del oleaje de acuerdo al viento y al fetch.

Existen diversos tipos de oleaje, dependiendo sobre todo de las características del viento que los genera y de la posición del fetch respecto al punto analizado, pero se definen mediante dos tipos extremos: SEA (oleaje local) y SWELL (oleaje distante).

1.4.1.1 Oleaje local (SEA)



Figura 1.7 Oleaje SEA

Es el oleaje que se presenta dentro del fetch, es decir en el lugar donde el viento está transfiriendo su energía al agua, generalmente en altamar. Se caracteriza porque la secuencia y dirección de las olas son caóticas, no se presentan periodos definidos, ni crestas o valles claros. Casi no hay relación entre la altura de dos olas consecutivas, es decir, que dada una ola de cierta altura, la siguiente tiene la misma probabilidad de ser más grande o de ser más pequeña. Hay una marcada superposición de olas, lo que significa que olas grandes soportan o contienen ondas más pequeñas.

Las dos características más claras del SEA son la asimetría y el apuntalamiento (gran peralte o pendiente) de sus olas. Bajo estas condiciones no se pueden medir periodos ni longitudes de onda.

1.4.1.2 Oleaje distante (SWELL)



Figura 1.8 Oleaje SWELL

Se presenta cuando las olas se propagan y salen de la zona de generación, o dicho de otra manera, cuando fuera del fetch el oleaje va "madurando". Se debe principalmente a los siguientes fenómenos:

- Pérdida de energía, porque una ola avanza consumiendo su propia energía.

- **Dispersión**, que puede ser de dos tipo:
 - **Dispersión angular**, ya que las olas se dispersan en todas direcciones.
 - **Dispersión radial**, que es un filtrado de las olas, ya que la velocidad es función directa del periodo, y por lo tanto las ondas largas viajan más rápido que las cortas.
- **Soldadura**, donde las ondas de periodos similares se unen (soldan) en largas crestas de onda, con lo que la superficie caótica del SEA se va simplificando.

Este tipo de oleaje es más marcado sobre la plataforma costera, en profundidades reducidas, debido a que a los tres fenómenos anteriores se agrega la refracción, que hace que las ondas tiendan a progresar en forma paralela a las líneas batimétricas.

El oleaje SWELL es más regular, se forman frentes de crestas paralelas de hasta cientos de metros de longitud, y tanto el periodo como la longitud de olas sucesivas difieren poco. Aquí sí se presenta periodicidad, las direcciones no son tan dispersas: hay direcciones predominantes. En resumen, el fenómeno posee cierto orden.

1.4.2 Clasificación de las ondas por su período

Como se observa en la Figura 1.5, Figura 1.6 y Figura 1.11, las ondas que componen un registro de oleaje son de una amplia gama de periodos, alturas y longitudes. De acuerdo a su período, se pueden distinguir los siguientes tipos de ondas:

Nombre	Periodo T	Longitud L	Altura H	Fuerza generadora	Fuerza restauradora
Capilares	0 - 0.1 s	2 - 7 cm	1 - 2 mm	viento	tensión superficial
Ultragravedad	0.1 s - 1 s	centímetros	milímetros	viento	tensión superficial y gravedad
Gravedad	1 s - 30 s	metros a cientos de metros	centímetros - 15 m	viento	gravedad
Infragravedad	30 s - 5 min	100 - 200 m	pequeña	viento	gravedad, Coriolis
Largo período	5 min - 24 hr	-	1 - 5 m	sismo, derrumbes, atracción de cuerpos celestes	gravedad, Coriolis
Transmarca	más de 24 hr	-	-	atracción de cuerpos celestes	gravedad, Coriolis

Tabla 1-1 Clasificación de las ondas por su período

En la Figura 1.9 se muestra de forma esquemática la cantidad de energía que normalmente portan las ondas de acuerdo a su período:

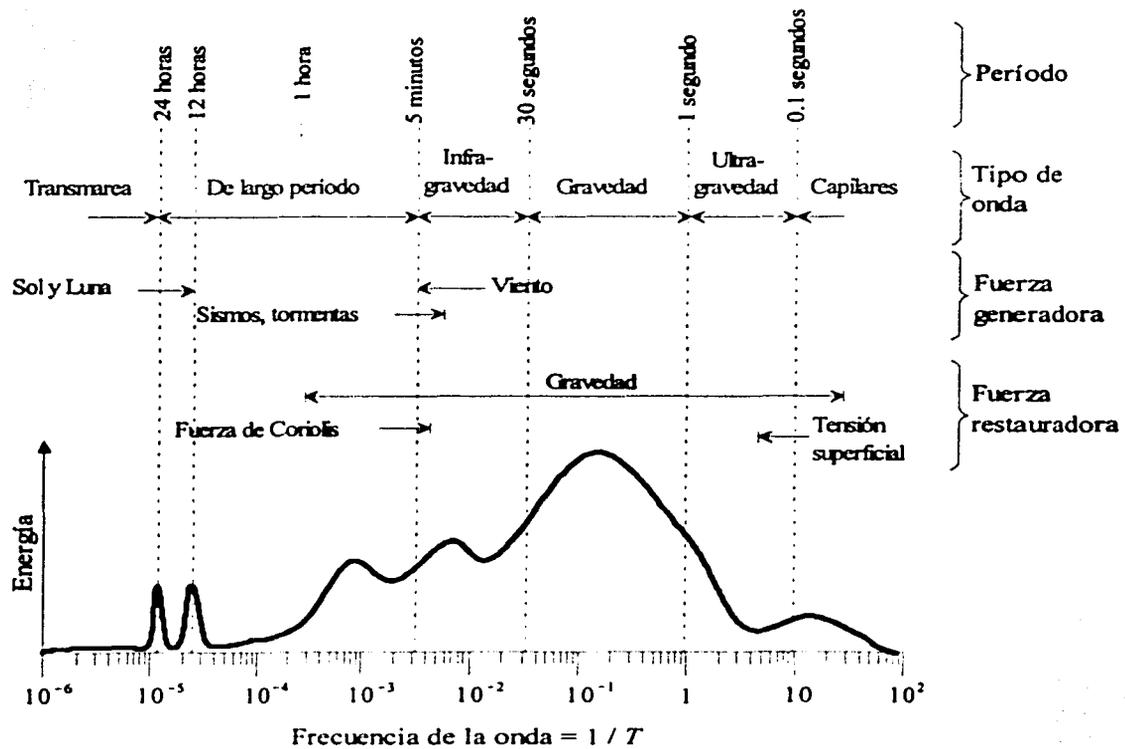


Figura 1.9 Período - Energía de las ondas

1.5 Fenómenos de la propagación del oleaje

El oleaje en su propagación se ve modificado principalmente por los siguientes fenómenos:

- Refracción, consistente en que al propagarse hacia tierra, tiende a hacerse paralelo a la línea de costa, debido a la disminución de la profundidad del mar.
- Difracción, observado directamente en los rompeolas, debido a la transferencia lateral de energía. Es el efecto de "sombra" o disminución de la altura de ola, que se da en la cara opuesta a la que recibe el oleaje incidente en una estructura.
- Reflexión, cuando un frente de oleaje se encuentra con un obstáculo o estructura que refleja parcial o totalmente su energía se forman nuevas ondas.
- Rompiente, que es un medio de disipar o desviar la energía que el oleaje ya no puede portar, o el efecto de la desestabilización del mismo al disminuir la profundidad.

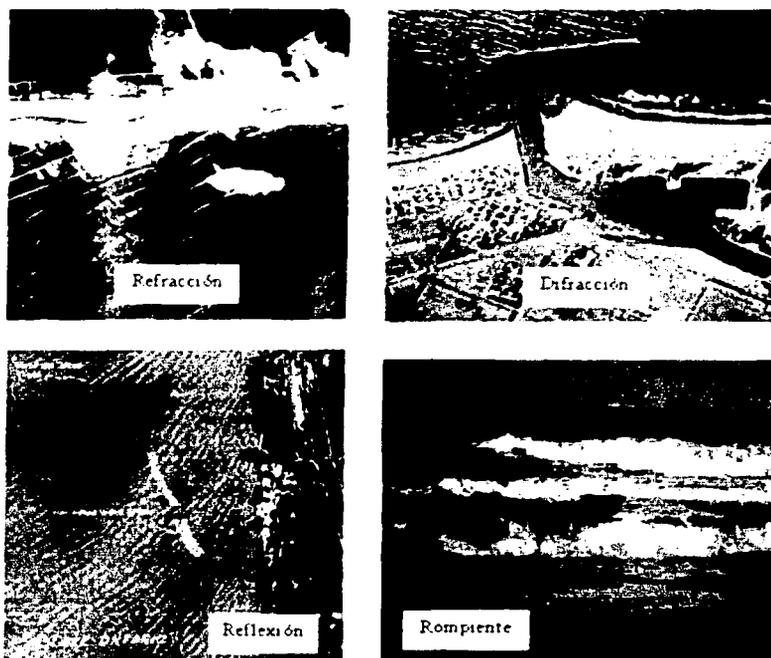


Figura 1.10 Fenómenos de la propagación del oleaje

1.6 El oleaje como proceso estocástico

El oleaje es un proceso estocástico porque en él se combinan muchas variables independientes, de tal manera que la superficie libre del mar η varía en forma aleatoria, es decir que las condiciones de oleaje en un punto y momento dado no se pueden evaluar de forma determinista, sino que cada situación tiene una probabilidad de ocurrencia.

Este proceso puede definirse como el ensamble de un número infinito de distintos registros de oleaje que corresponden a un cierto estado de mar.

$$\eta(t) = \{\eta(t_1), \eta(t_2), \dots, \eta(t_n), \dots\} \quad (1.1)$$

La Figura 1.11 ilustra lo anterior. El oleaje como se observa es un conjunto de ondas de distinta amplitud, frecuencia, fase, etc., propagándose en diversas direcciones.

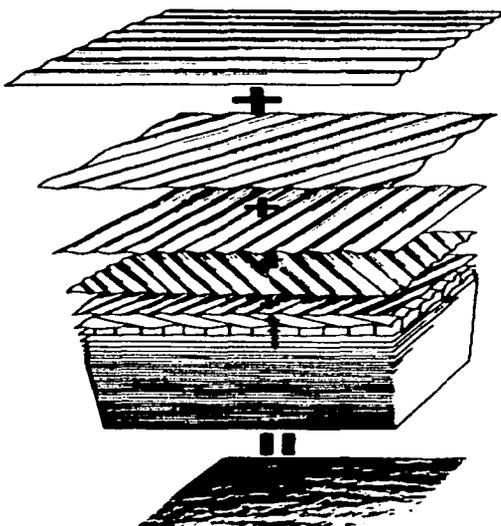


Figura 1.11 Estructura del oleaje aleatorio, Pierson et al. (1958)

Por lo anterior, el oleaje puede ser estudiado como una superposición lineal de ondas armónicas simples, tal que el perfil de la superficie libre, $\eta(x,y,t)$, puede ser descrito por:

$$\eta(x,y,t) = \sum_i a_i \cos \left[\frac{\sigma_i^2}{g} (x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) - \sigma_i t + \varepsilon_i \right] \quad (1.2)$$

donde:

- a es la amplitud
- σ es la frecuencia angular ($2\pi/T$)
- T es el periodo de la onda
- θ es el ángulo de incidencia con respecto al eje X
- ε es la fase
- x,y la posición de la onda en el espacio
- t es el tiempo

Si para cualquiera n instantes t_1, t_2, \dots, t_n se conoce la función de distribución; entonces el proceso $\eta(t)$ puede considerarse definido.

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = P[\eta(t_1) \leq x_1, \eta(t_2) \leq x_2, \dots, \eta(t_n) \leq x_n] \quad (1.3)$$

de la variable n dimensional $\eta(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Para simplificar el estudio del proceso estocástico $\eta(t)$ que constituye el oleaje (estudio estadístico) es necesario tomar en cuenta tres hipótesis estadísticas importantes, consistentes en considerar al oleaje como un proceso estacionario, ergódico y gaussiano.

1.6.1 El oleaje como un proceso estacionario

Si las propiedades estadísticas de un proceso $\eta(t)$, tales como la varianza o media, se mantienen constantes en el tiempo, el proceso es estacionario. En el caso del oleaje, esto se puede considerar razonable para intervalos de tiempo de varios minutos. Haciendo una analogía, la estacionariedad en el tiempo es similar a la homogeneidad en el espacio.

Si se acepta que el proceso $\eta(t)$ es estacionario, se deduce que el valor medio es una constante

$$m(t) = m \quad (1.4)$$

y la función de autocorrelación depende sólo de la diferencia $\tau = t - s$.

$$Bc(t, s) = R(\tau) \quad (1.5)$$

1.6.2 El oleaje como un proceso ergódico

Si las características estadísticas de un proceso en el tiempo (media, desviación estándar, distribución de probabilidad, etc.) pueden ser tomadas de un evento cualquiera $\eta(t_0)$ y son iguales a las estadísticas de ensamble a través de todas las realizaciones de $\eta(t)$, entonces el proceso es estacionario ergódico. Esta consideración se aplica por la limitación física de medir una superposición de registros bajo condiciones estacionarias.

Si $\eta(t)$ es un proceso estocástico estacionario que satisface ciertas condiciones, entonces:

$$m = E\eta(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt \quad (1.6)$$

donde m es la medida de variación de la superficie libre del mar con respecto al tiempo.

La ventaja de utilizar la hipótesis de ergodicidad es que permite sustituir los promedios espaciales de sucesos, por promedios temporales de un solo evento.

1.6.3 El oleaje como proceso gaussiano

El utilizar el modelo gaussiano (Rosengaus M., 1997) implica que se considera una simetría respecto al nivel medio del agua, que lleva a aceptar que la media es igual a cero, y por tanto su función de densidad de probabilidad es:

$$p(\eta) = \frac{1}{\eta_{rms} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\eta_{rms}} \right)^2} \quad (1.7)$$

Gracias a las anteriores suposiciones se acepta caracterizar un cierto estado de oleaje mediante un solo registro, y analizarlo descomponiéndolo en elementos frecuenciales sinusoidales.

1.7 Definición de un estado de mar

Un estado de mar se define como una situación o periodo de tiempo en el cual la inercia del fenómeno propicia un cierto equilibrio entre las fuerzas generadoras y restauradoras que interactúan, y donde los efectos de dichas fuerzas permanecen de forma aproximadamente estacionaria. Dicho de otra forma, un estado de mar es cada una de las "posiciones" de la dinámica del oleaje, considerando que estas varían de forma suficientemente lenta para que sea válido aceptar que durante cierto tiempo el fenómeno es estacionario.

El oleaje presenta, por un lado, variaciones de periodo corto, segundos durante los cuales el proceso se considera estacionario; y por otro lado, variación de periodo largo, horas durante las cuales evoluciona el estado de mar.

Al registrar la variación de la superficie libre del mar con el fin de realizar análisis estadísticos, debe estudiarse un periodo de tiempo que sea suficientemente corto para que la hipótesis de estacionariedad sea válida, y suficientemente largo para que contenga un adecuado número de olas. Por lo general se mide un periodo de 10 a 20 minutos (estado de mar) por cada hora (o más). Los parámetros estadísticos evaluados para cada muestra se consideran válidos para toda la hora, admitiendo que la duración del estado de mar es de una hora (o más).

1.7.1 Descripción estadística de un estado de mar

Para describir estadísticamente un estado de mar se utilizan propiedades estadísticas temporales, parámetros y distribuciones. Primeramente se requiere separar las olas del registro por alguno de los métodos expuestos en el apartado 1.3. Posteriormente se realiza

otro registro con los valores de altura H y período T de cada ola, ordenándolas de mayor a menor por su altura.

1.7.1.1 Parámetros estadísticos

Para caracterizar un estado de mar a partir de una serie de tiempo se utilizan principalmente los siguientes parámetros estadísticos (Dean R. y Dalrymple A., 1991):

- **Variación del nivel medio del mar $\bar{\eta}(t)$**

También llamado *set-up* o *set-down*.

$$\bar{\eta}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i \quad (1.8)$$

donde:

η_i es la elevación de la superficie libre del agua en el tiempo t_i .

N es el número de eventos o muestras.

$\bar{\eta}(t)$ es la variación media de la superficie libre del mar con respecto al tiempo.

- **Variación cuadrática media (varianza) de la superficie libre del agua η_{rms}^2**

$$\eta_{rms}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\eta_i - \bar{\eta}(t)]^2 \quad (1.9)$$

- **Altura media de las olas \bar{H}**

$$\bar{H} = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} H_i \quad (1.10)$$

donde:

N_0 es el número de olas individuales identificadas en todo el registro.

H_i es la altura de la ola i .

- **Período medio de las olas \bar{T}**

$$\bar{T} = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} T_i \quad (1.11)$$

donde:

T_i es el período de la ola i .

- *Altura cuadrática media* H_{rms}

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} H_i^2} \quad (1.12)$$

- *Coefficiente de sesgo o asimetría* Skw

$$Skw = \frac{1}{N_0 H_{rms}^3} \sum_{i=1}^{N_0} H_i^3 \quad (1.13)$$

- *Altura y período significantes* H_s, T_s

La altura significativa es la altura promedio de un tercio del registro (de las olas más altas). El período significativo es el período promedio de un tercio del registro (de las olas más ALTAS).

$$H_s = \frac{1}{N_0/3} \sum_{i=1}^{N_0/3} H_i \quad (1.14)$$

$$T_s = \frac{1}{N_0/3} \sum_{i=1}^{N_0/3} T_i \quad (1.15)$$

donde i es el número de orden, recordando que las olas del registro están ordenadas de mayor a menor altura.

- *Alturas Características* $H_{1/n}$

Altura de ola "un-décimo". Similar al caso de la altura significativa, pero en este caso es el promedio de la fracción décima de las olas más altas del registro.

$$H_{1/10} = \frac{1}{N_0/10} \sum_{i=1}^{N_0/10} H_i \quad (1.16)$$

$$T_{1/10} = \frac{1}{N_0/10} \sum_{i=1}^{N_0/10} T_i \quad (1.17)$$

Como también son útiles lo promedios de una fracción n de las olas más grandes del registro, generalizando:

$$H_{1/n} = \frac{1}{N_0/n} \sum_{i=1}^{N_0/n} H_i \quad (1.18)$$

$$T_{1/n} = \frac{1}{N_0/n} \sum_{i=1}^{N_0/n} T_i \quad (1.19)$$

NOTA: En todos los cálculos del periodo, el número de orden i también se refiere al ordenamiento descendente por altura de ola, y no por magnitud del periodo.

1.7.2 Descripción espectral de un estado de mar

Un estado de mar también puede describirse mediante sus características y propiedades espectrales. El espectro de oleaje representa la cantidad de energía que cada frecuencia de onda contiene.

Los estudios espectrales de registros de oleaje son tan válidos como preciso haya sido el cálculo de la función de densidad espectral. Por este motivo se han desarrollado muchas técnicas para mejorar la precisión con la que se calculan los valores en el dominio de la frecuencia (suavizar el espectro), sin embargo, en muchas ocasiones dichas mejoras implican una pérdida de resolución espectral.

Por lo general los valores espectrales se obtienen mediante el cálculo de los coeficientes de las series de Fourier. Para esto se utiliza el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT), que agiliza el proceso de obtención del espectro. Este algoritmo se basa en una propiedad de la transformada discreta de Fourier (DFT) que permite calcular la DFT de una sucesión, a partir de la DFT de subsucesiones más cortas.

Para describir completamente el estado de la superficie libre del agua en el dominio de la frecuencia, se necesita describir tanto las fases como las amplitudes de cada una de las componentes sinusoidales independientes, que superponiéndose entre sí, constituyen un estado de mar (ver figuras Figura 1.6 y Figura 1.11). Esto quiere decir que todo espectro de oleaje completo tiene dos componentes: el espectro de amplitud (o de energía, ya que ésta es proporcional al cuadrado de la amplitud); y el espectro de las fases. Sin embargo, para analizar el oleaje basta con el espectro de amplitudes (o de energía), ya que las fases por lo general son aleatorias. El espectro de fases únicamente se utiliza para controlar la calidad en experimentos de laboratorio.

1.7.2.1 Parámetros Espectrales

Todos los parámetros espectrales se calculan a partir de momentos de distinto orden, mediante la ecuación generadora de momentos, que es:

$$m_n = \int_0^{\infty} f^n S(f) df \quad (1.20)$$

donde:

m_n es el momento de orden n .
 $S(f)$ es la función de densidad espectral.
 f es la frecuencia.

- **Anchura espectral**

Los espectros se pueden clasificar como de banda ancha o angosta. Un espectro de banda angosta es aquel en que la energía se concentra en un intervalo de frecuencias reducido. En un espectro de banda ancha la energía se distribuye a lo largo de todas las frecuencias.

Cartwright y Longuet-Higgins (1956) propusieron un parámetro para definir la anchura espectral (ε):

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}} \quad (1.21)$$

Donde:

Si el espectro es de banda angosta, ε tiende a 0.
 Si el espectro es de banda ancha, ε tiende a 1.

Utilizar el parámetro ε tiene la desventaja de que depende del momento de cuarto orden, y por lo tanto su estimación es muy sensible ante valores que tiendan a frecuencias altas. Adicional a esto, se ha comprobado que ε no es representativo en espectros que definen un estado de mar.

Para solucionar el problema expuesto anteriormente Longuet-Higgins propuso otro parámetro de anchura espectral en función de momentos de orden inferior (ν):

$$\nu = \sqrt{\frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1} \quad (1.22)$$

En espectros de banda angosta ν puede aproximarse a $\varepsilon/2$.

- **Agudeza de pico Q_p**

Es otro parámetro que permite definir la forma del espectro, fue propuesto por Goda en 1970.

$$Q_p = \frac{2}{m_0} \int_0^{\infty} f(S(f))^2 df \quad (1.23)$$

Según Goda, para olas generadas por viento Q_p es cercano a 2.

El período medio de las olas también puede calcularse a partir del espectro, utilizando cualquiera de las expresiones siguientes:

$$T_{01} = \frac{m_0}{m_1} \quad (1.24)$$

$$T_{02} = \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \quad (1.25)$$

Existen diversas expresiones para relacionar los parámetros obtenidos a partir del espectro con los calculados con series de tiempo. Tal es el caso del ancho espectral, ya que el parámetro ε puede estimarse directamente a partir de un registro de oleaje:

$$\varepsilon^2 = 4r(1-r) \quad (1.26)$$

donde:

$$r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N_0^*}{N_c} \right) \quad (1.27)$$

N_0^* es el número de intersecciones entre el nivel medio del mar y la superficie libre del agua con pendiente positiva.

N_c es el número total de crestas en el registro.

Además, cuando la distribución de olas se aproxima a la de Rayleigh (oleaje SWELL), es posible estimar el valor de la altura cuadrática media (H_{rms}) y al de la altura significativa (H_s) directamente a partir del espectro; si este es el caso a H_s se le denomina H_{m0} .

$$H_{m0} = 4.004 \sqrt{m_0} = \sqrt{2} H_{rms} \quad (1.28)$$

$$H_{rms} = \sqrt{8m_0} \quad (1.29)$$

Bajo la misma suposición que en el caso anterior, otras alturas características pueden calcularse a partir de H_{rms} :

$$H_{1/10} = 1.8H_{rms} \quad (1.30)$$

$$H_{1/100} = 2.359H_{rms} \quad (1.31)$$

1.8 Distribuciones estadísticas de un estado de mar

Se considera que la variación de la superficie libre del agua en el mar tiene la forma de una distribución de probabilidad gaussiana (distribución normal), por lo tanto su media es cero y su función de densidad de probabilidad es:

$$p(\eta) = \frac{1}{\eta_{rms} \sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\eta^2}{2\eta_{rms}^2}\right)} \quad (1.32)$$

Se han propuesto diferentes funciones de probabilidad para describir los parámetros de un estado de mar, pero se pueden clasificar en tres grupos: distribución de altura de olas, distribución de periodos de olas, y distribuciones conjuntas de altura-periodo.

1.8.1 Distribuciones de alturas de ola

La estimación de la altura de ola es de suma importancia en la navegación, para valuar condiciones de operatividad en puertos, en el diseño de estructuras marítimas y costeras, fijas o móviles, etc.

Para utilizar estas distribuciones, el registro de oleaje irregular se divide en olas individuales utilizando el método de pasos ascendentes por cero (ver apartado 1.3, inciso a)). El período de la onda es el tiempo transcurrido entre dos cruces ascendentes sucesivos y la altura de onda es la diferencia entre el nivel máximo y el mínimo (cresta y valle) que alcanzó la superficie libre dentro del intervalo.

1.8.1.1 Distribución de Rayleigh

Rice (1944-1945) utilizó una función de distribución de alturas de crestas para señales aleatorias de origen electromagnético. Cartwright y Longuet-Higgins (1983) ampliaron los estudios de Rice y demostraron que la distribución de Rayleigh (desarrollada originalmente

para fenómenos eléctricos) puede ser satisfactoriamente utilizada para describir la distribución de alturas de ola.

La distribución de Rayleigh supone que hay una correlación perfecta entre una cresta y el siguiente valle, es decir, que si se tiene una cresta grande, el siguiente valle también será grande. Es por esto que cuando se tiene un estado de mar SWELL puro, con una anchura espectral $\varepsilon=0$, la descripción de la altura de las olas dada por Rayleigh es exacta.

La función de densidad de probabilidad Rayleigh está dada en forma adimensional por la siguiente expresión:

$$p(\xi) = 2\xi e^{-\xi^2} \quad (1.33)$$

donde:

$$\xi = \frac{H}{H_{rms}} \quad (1.34)$$

o en forma dimensional:

$$p(H) = \frac{H}{4m_0} e^{-\frac{H^2}{8m_0}} \quad (1.35)$$

Otra forma dimensional aceptada es:

$$p(H) = \frac{2H}{H_{rms}^2} e^{-\left(\frac{H}{H_{rms}}\right)^2} \quad (1.36)$$

1.8.1.2 Distribución de Longuet-Higgins

Fue propuesta en 1956 por Cartwright y Longuet-Higgins. Es una distribución de crestas de ola aplicable para anchos espectrales diferentes de cero. La fórmula se utiliza desde $\varepsilon=0$ hasta $\varepsilon=1$.

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_0}} \varepsilon \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)^2} + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \eta \cdot e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \int_{-\infty}^{\eta} e^{(1-\varepsilon^2)^{1/2} x} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (1.37)$$

En los extremos del rango de aplicación de la fórmula se presenta lo siguiente: cuando $\varepsilon=0$ se obtiene una distribución de Rayleigh; y si $\varepsilon=1$ se trata de una distribución de densidad normal trucada en cero.

En 1983, Longuet-Higgins propuso una distribución conjunta altura - periodo (tratada posteriormente), que al ser aislada la distribución de densidad de altura de ola se tiene la ecuación siguiente, cuyos parámetros se definen más adelante.

$$p(H) = \frac{L(\nu)H}{8m_0\nu e^{\frac{H^2}{8m_0}}} \operatorname{Erfc}\left(-\frac{H}{2\sqrt{2m_0\nu}}\right) \quad (1.38)$$

donde *Erfc* se conoce como función error complementaria, y está dada por:

$$\operatorname{Erfc}\left(-\frac{H}{2\sqrt{2m_0\nu}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{H}{2\sqrt{2m_0\nu}}\right)^2} dH \quad (1.39)$$

1.8.1.3 Distribución de Tayfun

Tayfun propuso en 1981 una distribución de altura de olas limitada por la altura de rotura y por un parámetro N_T , que relaciona al estado de mar con la profundidad. Su principal característica es suponer que existe una mediana relación entre una cresta y el siguiente valle; es decir, que si una cresta es grande, lo más probable es que el valle siguiente también sea grande, pero sin que deje de existir la posibilidad de que sea mediano o pequeño.

Recordando que $\xi = \frac{H}{H_{ms}}$;

Si $0 \leq \xi \leq N_T^{1/2}$:

$$p(\xi, N_T) = \xi \int_0^{\infty} u J_0^{N_T} \left(\frac{u}{N_T^{1/2}} \right) J_0(\xi u) du \quad (1.40)$$

Si $N_T^{1/2} \leq \xi \leq \sqrt{2N_T}$:

$$p(\xi, N_T) = \xi \left[1 - \frac{4}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{N_T^{1/2}}{\xi} \right) \right] \int_0^{\infty} u J_0^{N_T} \left(\frac{u}{N_T^{1/2}} \right) J_0(\xi u) du \quad (1.41)$$

El parámetro de Tayfun o N_T , que como se dijo anteriormente, está relacionado con el estado de mar, es función del periodo de onda y de la profundidad. Si N_T tiende a infinito, entonces se tiene un estado de mar SWELL y la distribución de Tayfun se iguala a la de Rayleigh. N_T queda definido como sigue:

$$N_T = \left(\frac{\pi \tanh(k_0 h)}{7\sqrt{2} k_0 \sqrt{2m_0}} \right)^2 \quad (1.42)$$

En las expresiones anteriores:

J_0 es la función de Bessel de orden 0.

k_0 es el número de onda asociado a la frecuencia media, $k_0 2\pi / L_m$, y se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{\sigma^2 h}{g} = k_0 h \cdot \tanh(k_0 h) \quad (1.43)$$

1.8.1.4 Distribución de Carter

En 1981 Carter propuso una ecuación de distribución de altura de ola, la cual supone que no hay relación alguna entre crestas y valles consecutivos, es decir, que dada una cresta grande, el valle siguiente puede ser de cualquier tamaño.

La función de probabilidad acumulada o probabilidad acumulada propuesta por Carter es:

$$P(H \geq H_0) = 1 - \left[e^{-\left(\frac{H_0}{H_s}\right)^2} + 2\sqrt{\pi} \frac{H_0}{H_s} e^{-\left(\frac{H_0}{H_s}\right)^2} \operatorname{Erf}\left(2 \frac{H_0}{H_s}\right) \right] \quad (1.44)$$

donde Erf es la función error, definida como:

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (1.45)$$

1.8.1.5 Conclusiones de las distribuciones de altura de ola

Green (1994) realizó un análisis donde llegó a las siguientes conclusiones:

- La ecuación de Carter es la que mejor representa el oleaje en un estado de mar SEA (muy desordenado).
- La ecuación de Tayfun es la que representa mejor el estado de mar en la zona de transición, es decir, cuando es un poco más ordenado que el SEA.
- La distribución de Rayleigh es la más adecuada para utilizarse en un estado de mar tipo SWELL (muy ordenado).

1.8.2 Distribuciones conjuntas altura – período de ola

En un principio, sólo se tomaba en cuenta la altura de ola para el diseño de estructuras marítimas y costeras; sin embargo, en estudios recientes se ha comprobado que el período influye considerablemente en fenómenos como: el ascenso máximo o *run-up*, la estabilidad de piezas en un rompelas, la fatiga en elementos estructurales, etc. Es por esto que últimamente se le ha dado importancia a las distribuciones de probabilidad en función de la altura y el período.

Las funciones que a continuación se presentan aparecen en forma dimensional y adimensional; la forma adimensional sirve para comparar las diferentes fórmulas, mientras que la forma dimensional es útil en cálculos prácticos.

1.8.2.1 Distribución de Longuet-Higgins (1975)

En 1975 Longuet-Higgins, basado en un modelo del oleaje estacionario y gaussiano con espectro de banda estrecha, propuso una función de densidad de probabilidad conjunta de alturas y períodos de ola.

Las principales desventajas de esta fórmula son: que se basa en un espectro de banda estrecha (oleaje SWELL); y que, por consiguiente, no toma en cuenta la asimetría en la distribución de los períodos de ola, propia de los espectros de banda ancha.

En forma adimensional, la densidad de probabilidad de Longuet-Higgins (1975) es:

$$p(\theta, \eta) = \frac{\theta^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2 + \eta^2}{2}} \quad (1.46)$$

donde:

$$\theta = \frac{H}{2\sqrt{m_0}} \quad (1.47)$$

$$\eta = \frac{T - T_{01}}{\nu T_{01}} \quad (1.48)$$

T_{01} es el período medio, ecuaciones (1.24) ó (1.11).

De forma dimensional:

$$p(H, T) = \left(\frac{H^2}{8\nu\sqrt{2\pi\nu T_0} m_0^{3/2}} \right) e^{-\frac{H^2}{8m_0} \left(1 + \frac{T-T_0}{\nu T_0} \right)} \quad (1.49)$$

1.8.2.2 Distribución de Cavanié et al. (1976)

Cavanié, Arhan y Ezraty propusieron en 1976 una distribución teórica, que al igual que la de Longuet-Higgins (1975) se basa en un modelo gaussiano de banda estrecha, pero que sí considera la asimetría de la distribución de los periodos.

Se ha encontrado que esta distribución concuerda aceptablemente con datos reales, pero tiene el defecto de estar en función del parámetro de ancho espectral ε , que como se explicó anteriormente, es función del momento de cuarto orden de la función de densidad espectral (función de densidad espectral a la cuarta potencia), lo que hace que cualquier pequeño error en la distribución se amplifique, sobre todo en frecuencias altas.

La distribución de probabilidad de forma adimensional es:

$$p(h, \tau) = \frac{\alpha^3 h^2}{4\sqrt{2\pi} \varepsilon (1 - \varepsilon^2) \bar{T}^4 \tau^5} e^{-\frac{h^2 (\bar{T} \tau)^2}{8\varepsilon^2} \left[(\tau^2 \rho^2 - \alpha^2)^2 + \beta^2 \alpha^2 \right]} \quad (1.50)$$

donde:

$$h = \frac{H}{\sqrt{m_0}} \quad (1.51)$$

$$\tau = \frac{T}{\bar{T} T_C} \quad (1.52)$$

$$T_C = \frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \quad (1.53)$$

$$\bar{T} = \left(\frac{T}{T_C} \right) \quad (1.54)$$

si $\varepsilon \leq 0.95$, entonces $\bar{T} = 1$.

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \right) \quad (1.55)$$

$$\beta^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \quad (1.56)$$

Esta ecuación se obtuvo con registros donde el período de ola se midió entre cresta y cresta, por lo que no sería correcto aplicarla a olas definidas por el método de paso ascendentes por cero (Battjes, 1977); sin embargo Goda (1978) señala que también en este caso la distribución arroja buenos resultados.

Para aplicar la forma dimensional se utiliza:

$$Tc = Tz; \quad \tau = \frac{Tz}{Tz}; \quad y \quad h = \frac{H}{\sqrt{m_0}} \quad (1.57)$$

Con lo que se tiene:

$$p(H, T) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha^3 \bar{T}^4}{m_0^{3/2} \varepsilon (1-\varepsilon) \bar{T}^4} \frac{H^2}{Tz^5} e^{-\frac{Tz^4}{2m_0 \alpha^2 \bar{T}^4} \left[\left(\frac{Tz^2}{Tz^2} - \alpha^2 \right)^2 + \alpha^4 \beta^2 \right]} \quad (1.58)$$

1.8.2.3 Distribución Longuet-Higgins (1983)

En 1983 Longuet-Higgins propuso otra distribución, también basada en un espectro de banda estrecha. Al igual que la fórmula de Cavanié et al., la segunda de Longuet-Higgins contempla la asimetría de la distribución de períodos, pero además, tiene la gran ventaja de utilizar el parámetro de ancho espectral ν , que depende del segundo y no del cuarto momento.

La densidad de probabilidad en forma adimensional es:

$$p(R, \tau) = \left(\frac{2}{\nu \pi^{1/2}} \right) \left(\frac{R^2}{\tau^2} \right) e^{-R^2 \left[\left(1 + \frac{1}{\nu^2} \right) \left(1 - \frac{1}{\nu^2} \right) \right]} L(\nu) \quad (1.59)$$

donde:

$$\tau = \frac{T}{\bar{T}} \quad (1.60)$$

$$R = \frac{H/2}{\sqrt{2m_0}} \quad (1.61)$$

$$\frac{1}{L(\nu)} = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 + \nu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (1.62)$$

$$\bar{T} = \frac{m_0}{m_1} = T_{01} \quad (1.63)$$

La ecuación en forma dimensional es:

$$p(H, T) = \left(\frac{H^2 \bar{T}}{8\nu \sqrt{2\pi} m_0^{2/3} T^2} \right) e^{-\frac{H^2}{8m_0} \left[1 + \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{T}{\bar{T}} \right)^2 \right]} L(\nu) \quad (1.64)$$

donde $L(\nu)$ se calcula con la ecuación (1.62).

1.8.3 Distribuciones de períodos de olas

Las distribuciones de probabilidad de períodos de olas no surgen como tales, sino que son derivaciones de las distribuciones conjuntas de período y altura de ola, y por lo tanto, las consideraciones hechas para las primeras, aplican también para las que se muestran a continuación.

1.8.3.1 Distribución de Bretschneider (1959)

Bretschneider encontró en 1959, que el cuadrado de los períodos se ajusta a una función de densidad de probabilidad de Rayleigh, y propuso la siguiente ecuación:

$$p(T) = 2.7 \frac{T^3}{\bar{T}^4} e^{-0.675 \left(\frac{T}{\bar{T}} \right)^4} \quad (1.65)$$

1.8.3.2 Distribución de Longuet-Higgins (1975)

$$p(T) = \frac{T_{01}^2 \nu^2}{2 \left[\nu^2 T_{01}^2 + (T - T_{01})^2 \right]^{3/2}} \quad (1.66)$$

1.8.3.3 Distribución de Cavanié et al. (1976)

Propuesta en 1976 por Cavanié, Arhan y Ezraty.

$$p(T) = \frac{\alpha^3 \beta^2 \bar{\delta}^2 T}{\bar{T}^2 \left[\alpha^4 \beta^2 + \left(\frac{\bar{\delta}^2 T^2}{\bar{T}^2} - \alpha^2 \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (1.67)$$

donde:

$$\delta = \frac{T}{\bar{T}} \quad (1.68)$$

1.8.3.4 Distribución de Longuet-Higgins (1983)

$$p(T) = \frac{L(\nu) \bar{T}}{2\nu T^2} \left[1 + \left(1 - \frac{\bar{T}}{T} \right)^2 \frac{1}{\nu^2} \right]^{-3/2} \quad (1.69)$$

1.9 Modelos espectrales de un estado de mar

Después de haber analizado gran cantidad de espectros de oleaje, se ha encontrado que tienen características similares que pueden relacionarse con ciertos fenómenos físicos; como el viento y su área de acción. Esto permite generar numéricamente espectros de oleaje esperados para condiciones específicas.

Los factores físicos que hacen variar la forma del espectro de un estado de mar son muchos y muy diversos, entre ellos están: la velocidad del viento, la magnitud del fetch, etc. Sin embargo, la forma de un espectro no es arbitraria, ya que diversas propiedades físicas del oleaje se representan en él.

1.9.1 Estado de saturación

Aunque la acción del viento sobre el mar es incesante, y esto podría sugerir que la cantidad de energía que porta el oleaje es proporcional a la cantidad de trabajo que el viento realiza sobre la superficie libre del mar, existe un límite a partir del cual la energía no se absorbe, sino que se disipa de diversas formas, tales como la rotura de las olas, la formación de ondas capilares (de muy alta frecuencia), o la transferencia de energía a olas de diferente frecuencia. El ocurrir de alguno de los mecanismos de disipación es indicativo de que se ha llegado a un estado de saturación de los componentes del oleaje, donde hay un balance entre la energía suministrada por el viento y la energía perdida por dichos mecanismos. Es por esto que una de las principales características de los espectros de oleaje es que tienen un

límite superior para la densidad de energía espectral, es decir, que cuando llegan a una condición de saturación (energía máxima), la energía adicional que aporta el viento se pierde, o mejor dicho, se desvía hacia algún medio de disipación como los anteriormente mencionados.

Por lo anterior, el estado de saturación debe describirse únicamente mediante los parámetros físicos locales que definen la configuración extrema de las olas, por ejemplo: la aceleración de la gravedad (g), la velocidad del viento sobre la superficie libre (U) y la frecuencia local (f).

1.9.2 Principales modelos espectrales

Los espectros más conocidos son: Phillips, Zaslavavskii-Zacarov, Toba, Neumann, Pierson-Moskowitz, Bretschneider, ISSC (International Ship Structures Congress), ITTC (International Towing Tank Conference), JONSWAP (Joint North Sea Wave Project), TMA, Krylov, Davidan et al., Wallops, Ochi-Hubble, Kitaigorodskii, etc, sin embargo solo se describirán los más útiles para este trabajo.

Los modelos espectrales generalmente se basan en uno o más parámetros. El modelo de Pierson - Moskowitz (1964) es el modelo de un parámetro más conocido; los modelos de Bretschneider (1969), ISSC (International Ship Structures, 1964) y el ITTC (International Towing Tank Conference, 1966, 1969, y 1972) son los modelos de dos parámetros más importantes. Modelos como el JONSWAP y el TMA son función de cinco parámetros, pero usualmente tres de ellos se consideran constantes.

1.9.2.1 Modelo de Phillips

Phillips (1959) estudió la variación de la velocidad del viento a diferentes alturas sobre la superficie del mar, y a partir de ello determinó que el espectro se puede definir con los parámetros siguientes: la frecuencia, la gravedad, la velocidad del viento, y el fetch. Sin embargo, al hacer el análisis dimensional de varios espectros de oleaje, y considerando el estado de saturación, definió el espectro utilizando únicamente dos parámetros: la velocidad al cortante del viento y el fetch:

$$S(f) = \alpha g^2 f^{-5} (2\pi)^{-4} \quad (1.70)$$

Para frecuencias superiores a la frecuencia pico, la función de densidad espectral se expresa como sigue:

$$S(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5} \quad (1.71)$$

En las ecuaciones (1.70) y (1.71):

α depende del fetch y del viento.

ω es la frecuencia angular ($2\pi f$).

f es la frecuencia (en Hz).

1.9.2.2 Espectro de Pierson – Moskowitz

Es un modelo espectral de un parámetro, desarrollado por Pierson y Moskowitz en 1964, a partir de estudios de espectros de oleaje del Atlántico Norte. Representa estados de mar generados por viento y completamente desarrollados, es decir, que el espectro no depende del fetch, sino únicamente de la velocidad del viento. La expresión para generar el espectro es la siguiente:

$$S(f) = 8.1 \times 10^{-3} (2\pi)^{-4} g^2 f^{-5} e^{-0.24(2\pi U_{19.5}/f)^4} \quad (1.72)$$

donde:

$U_{19.5}$ es la velocidad del viento a 19.5 metros sobre la superficie libre del mar.

f es la frecuencia.

También se puede obtener a partir de la frecuencia pico (f_p) de la siguiente forma:

$$S(f) = 8.1 \times 10^{-3} g^2 (2\pi)^{-4} f^{-5} e^{-\frac{5}{4} \left(\frac{f_p}{f}\right)^4} \quad (1.73)$$

En esta expresión se reconocen dos partes: el exponencial, llamado también "función de forma de Pierson – Moskowitz"; y la parte fuera de él, que es la fórmula desarrollada por Phillips (1.70).

1.9.2.3 Espectro de Bretschneider

Se trata de un modelo de dos parámetros, que supone un espectro de banda estrecha, y que las alturas y periodos de olas individuales se ajustan a una distribución de probabilidad tipo Rayleigh. La expresión es la siguiente:

$$S(f) = 0.128 H_s^2 \frac{f_s^4}{f^3} e^{\left[-0.675 \left(\frac{f_s}{f}\right)^4\right]} \quad (1.74)$$

donde:

$$f_s = \frac{1}{T_s} \quad (1.75)$$

Con este modelo se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$T_s = 0.946 T_p \quad (1.76)$$

$$f_p = 0.00408 \frac{g}{H_s} \quad (1.77)$$

donde T_p es el período de pico espectral.

1.9.2.4 Espectro JONSWAP

Se conoce por sus siglas en inglés (Joint North Sea Wave Project). El modelo es de cinco parámetros. Fue propuesto por Hasselman y otros, en 1973. Se generó con los datos finales de los 1970's, parte de un amplio proyecto de medición de oleaje sobre una zona de 160 km. en el Mar del Norte, a partir de la Isla Sylt.

Se formuló para estados de mar generados por viento, con fetch limitado y para profundidad de agua indefinida. El espectro JONSWAP se expresa de la siguiente manera:

$$S_J(f) = S_p(f) \phi_{PM} \left(\frac{f}{f_p} \right) \phi_J(f, f_p, \gamma, \sigma) \quad (1.78)$$

Donde:

$S_p(f)$ es la fórmula de Phillips, ecuación (1.70).

$\phi_{PM} \left(\frac{f}{f_p} \right)$ es la función de forma de Pierson - Moskowitz:

$$\phi_{PM} \left(\frac{f}{f_p} \right) = e^{-\frac{5}{4} \left(\frac{f}{f_p} \right)^4} \quad (1.79)$$

ϕ_J es el factor de forma del espectro JONSWAP:

$$\phi_J = \gamma e^{-\frac{(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}} \quad (1.80)$$

y σ es:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_A & f_p \leq f \\ \sigma_B & f_p > f \end{cases} \quad (1.81)$$

A continuación se listan los valores medios (normales) de los parámetros utilizados para generar el espectro JONSWAP:

γ , conocido como el factor de forma de pico del espectro.

$$\gamma = 3.30 \quad (1.82)$$

σ , que es el ancho de la base del espectro antes (σ_A) y después (σ_B) de la frecuencia pico.

$$\sigma_A = 0.07; \quad \sigma_B = 0.09 \quad (1.83)$$

α , es el factor de escala, asociado con la energía total del espectro. Es función directa del fetch y de la velocidad del viento, como se puede ver en las expresiones siguientes:

$$\alpha = 0.076(\bar{x})^{-0.22} \quad (1.84)$$

La frecuencia pico del espectro (f_p), como se ha observado, también está relacionada con el fetch y la velocidad del viento:

$$f_p = 3.5 \left(\frac{g}{U_{10}} \right) (\bar{x})^{-0.33} \quad (1.85)$$

donde:

$$\bar{x} = \frac{g x}{U_{10}^2} \quad \text{Fetch adimensional} \quad (1.86)$$

x es el fetch.

U_{10} es la velocidad del viento a 10 m sobre el nivel medio del mar.

Este espectro, como se puede ver en sus expresiones, tiene un fetch limitado, es decir, que el estado de mar no está todavía completamente desarrollado.

Goda (1983) propone que un oleaje tipo SWELL que ya haya viajado cientos o miles de kilómetros en aguas profundas puede representarse mediante un espectro JONSWAP con un factor de forma de pico $7 \leq \gamma \leq 10$.

1.9.2.5 Espectro TMA

Fue presentado en 1985 por Bows, Günther, Rosenthal y Vincent. El modelo es de cinco parámetros. Los estudios se realizaron analizando cerca de 2800 espectros de oleaje en aguas poco profundas. Está directamente relacionado con la profundidad del agua, por lo

que es muy utilizado para conocer los cambios que sufre un espectro al propagarse en aguas someras. Su nombre se debe a las fuentes de información:

- **TELEX**, cuyos datos se obtuvieron cerca de Holanda, por el barco-faro "Telex" (a 30 m de profundidad), y por la estación Euro-5 (a 20 m de profundidad).
- **MARSEN**, que recopiló datos en la costa norte de Alemania, por medio de dos estaciones directamente expuestas a oleajes del mar del norte, entre 10 y 50 m de profundidad
- **ARSLOE**, que aportó datos de las costas de Carolina del Norte, con profundidades variables de hasta 40 m.

El espectro TMA se define a partir del espectro JONSWAP:

$$S_{TMA} = S_J(f) \phi_k(\omega_H) \quad (1.87)$$

donde:

$$\phi(\omega_H) = \tanh^2(kh) \left[1 + \frac{2kh}{\sinh(kh)} \right] \quad (1.88)$$

y k se evalúa con la ecuación de dispersión:

$$(2\pi f)^2 = gk \tanh(kh) \quad (1.89)$$

Los diversos efectos propios de las aguas someras, tales como la fricción de fondo, rompiente y refracción se incluyen dentro del parámetro ϕ_k . Si se adapta el factor de transformación que se introdujo inicialmente para aguas poco profundas, el espectro queda definido por:

$$S_{TMA} = S_J \phi(\omega_H) \quad (1.90)$$

Goda recomienda utilizar el espectro TMA con reservas, debido a que fue formulado para oleaje en crecimiento en el área de generación.

1.9.2.6 Espectro Ochi-Hubble

Fue desarrollado por Ochi y Hubble en 1976, es un modelo espectral de seis parámetros que consta de dos partes: una para componentes de energía de baja frecuencia, y otra para componentes de alta frecuencia. El espectro total es una combinación lineal de las dos componentes, que dependen de tres parámetros cada una. Gracias a la combinación lineal se pueden modelar la mayoría de los estados de mar que se presentan en una tormenta, además de que hace posible representar un doble pico espectral, donde un pico está relacionado con el oleaje SEWELL (baja frecuencia, oleaje distante), y el otro con oleaje SEA (alta frecuencia, oleaje local).

El espectro se define mediante la siguiente expresión:

$$S(f) = \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\left(\frac{4\lambda_j + 1}{4} (2\pi f_{0j})^4 \right)^{\lambda_j}}{\Gamma(\lambda_j)} \frac{H_y^2}{(2\pi f)^{4\lambda_j + 1}} \exp \left[- \left(\frac{4\lambda_j + 1}{4} \right) \left(\frac{f_{0j}}{f} \right)^4 \right] \quad (1.91)$$

donde:

H_{s1}, H_{s2} es la altura de ola significativa.

f_{01}, f_{02} es la frecuencia modal.

λ_1, λ_2 es el parámetro de forma espectral.

En las literales anteriores el subíndice 1 indica que se trata de una componente de baja frecuencia, y el subíndice 2 refiere a componentes de alta frecuencia.

En la expresión (1.91), donde λ_j es el parámetro de forma espectral, si $\lambda_1 = 1$, y $\lambda_2 = 0$, se obtiene un espectro tipo Pierson-Moskowitz.

La altura de ola significativa H_s de la ecuación (1.91) se obtiene con la siguiente fórmula:

$$H_s = \sqrt{H_{s1}^2 + H_{s2}^2} \quad (1.92)$$

En espectros de banda estrecha, normalmente λ_1 es mucho mayor que λ_2 , siendo los valores típicos:

$$\lambda_1 = 2.72; \quad y \quad \lambda_2 = 1.82e^{-H_s/1215} \quad (1.93)$$

donde las unidades H_s deben ser metros.

1.9.2.7 Espectro direccional.

Un espectro direccional es aquel que representa la distribución de energía del oleaje en el dominio de la frecuencia, y además en el dominio de la dirección. Esto se expresa de la siguiente forma:

$$S(f, \theta) = S(f)G(f, \theta) \quad (1.94)$$

donde:

$S(f, \theta)$ es la función de densidad espectral del oleaje direccional, o *espectro de oleaje direccional*.

$G(f, \theta)$ es la función de distribución direccional, o *distribución angular*.

La función de distribución angular $G(f, \theta)$ representa la distribución direccional de energía del oleaje, que aunque se ha comprobado que varía con la frecuencia, algunas formulaciones no la toman en cuenta. Esta función es adimensional y se normaliza de la siguiente forma, donde γ se usa como función de pico:

$$\gamma \int_{-\pi}^{\pi} G(f, \theta) d\theta = 1 \quad (1.95)$$

Mitsuyasu et. al en 1975, propusieron la siguiente expresión después de haber analizado datos medidos en campo:

$$G(f, \theta) = \left[\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \cos^{2s} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \right]^{-1} \quad (1.96)$$

En esta expresión, s es un parámetro que representa el grado de concentración de energía por direcciones, su valor pico se presenta alrededor de la frecuencia pico del espectro, y va decreciendo conforme se aleja de esta.

Goda y Suzuki modificaron la expresión original para que fuera más práctica en casos de aplicación, mediante la introducción del valor pico s_{\max} en lugar de s .

$$s = \begin{cases} s_{\max} \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-2.5} & \text{si } f \geq f_p \\ s_{\max} \left(\frac{f}{f_p} \right)^5 & \text{si } f \leq f_p \end{cases} \quad (1.97)$$

1.10 Teorías de oleaje

Como se ha explicado anteriormente, el oleaje es un fenómeno muy complejo, en él influyen innumerables factores y se propaga en tres dimensiones, por lo que su modelación matemática es sumamente difícil. A pesar de esto se han desarrollado varias teorías para analizar matemáticamente el fenómeno, cada una con sus consideraciones particulares.

La *Teoría de ondas de pequeña amplitud*, también llamada *Teoría Lineal* o *Teoría de Airy*, fue desarrollada por este último en 1845. Es junto con la de *Stokes* (1880) una de las teorías clásicas, ambas se ajustan bastante bien al comportamiento real del oleaje donde la

profundidad es muy grande respecto a la longitud de onda, y cuando la altura de ola es pequeña respecto a la longitud de onda, además son de fácil aplicación.

En 1802 Gerstner desarrolló una teoría contemplando por primera vez ondas de amplitud finita, conocida como *Teoría Trocoidal*, que aunque es muy acertada para definir el perfil de la onda, no es tan precisa estimando el movimiento orbital de las partículas.

Las teorías anteriores son útiles únicamente en aguas profundas ya que no consideran la influencia del fondo marino. La *Teoría de Korteweg* o *Teoría Cnoidal* es la que mejor describe el comportamiento del oleaje en aguas someras, pero es sumamente complicado usarla en aplicaciones prácticas. Esta teoría deja de ser válida en la zona de rotura del oleaje, pero para esas condiciones la *Teoría de la Onda Solitaria* es una buena aproximación y no es tan difícil de manejar.

En la Figura 1.12 se muestra esquemáticamente la diferencia entre los perfiles de oleaje de cada teoría.

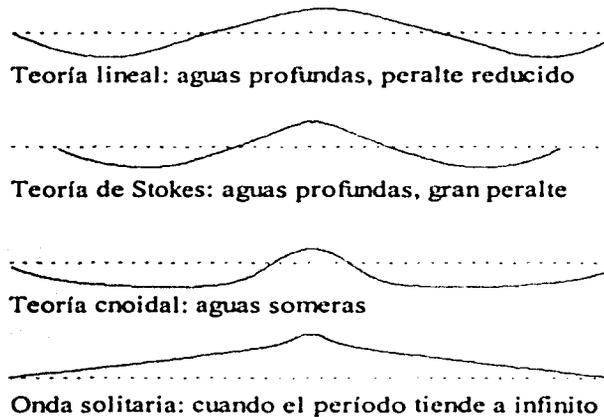


Figura 1.12 Perfil de oleaje para cada teoría.

Es importante escoger adecuadamente la teoría a utilizar en cada circunstancia. No es fácil definir los límites de aplicación de cada una de ellas, sin embargo Le Mehaute (1969) propuso el criterio de rango de validez de cada teoría mostrado en la Figura 1.13.

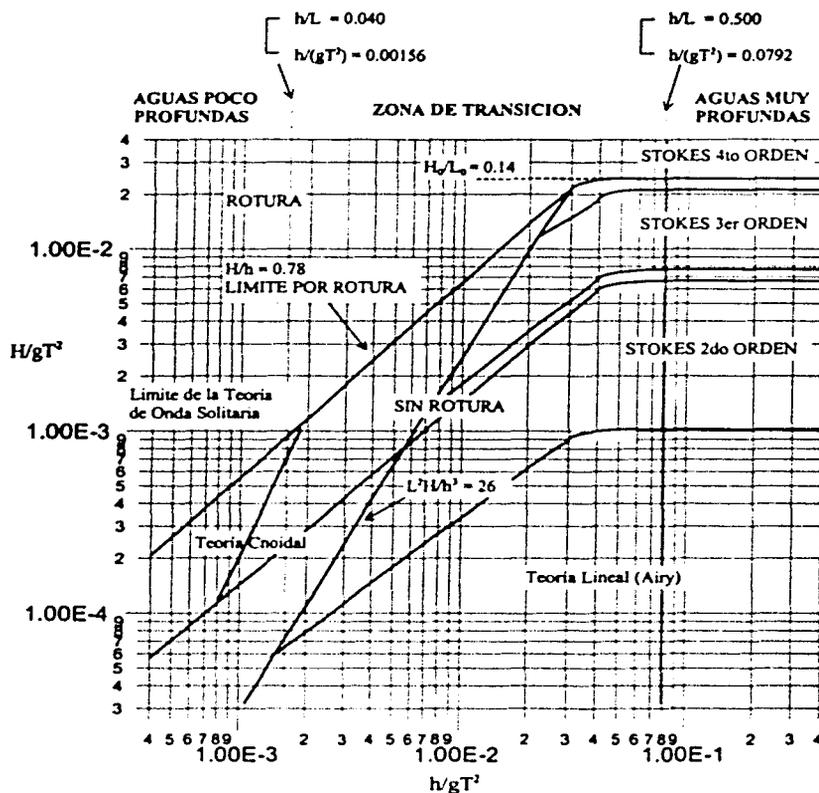


Figura 1.13 Regiones de validez para diferentes teorías de oleaje

Aún cuando la teoría lineal es la base de otras mucho más complejas, ha sido más utilizada debido a su asombrosa exactitud, comprobada al cotejar sus resultados con mediciones de campo o laboratorio (sobre todo en aguas profundas). Además, a diferencia de otras teorías no lineales, permite por sí misma la superposición y manejos más complejos.

CAPÍTULO 2 ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

2 ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

2.1 Ecuación de la continuidad

Para los desarrollos y deducciones posteriores se utilizará un cubo infinitesimal en un sistema de coordenadas ortonormales como el que se muestra en la Figura 2.1.

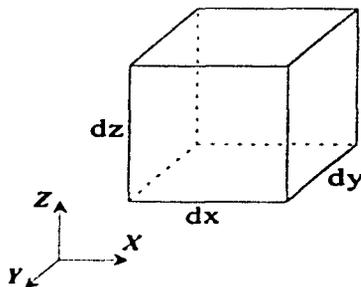


Figura 2.1 Cubo infinitesimal en coordenadas ortonormales

Si la densidad del fluido es ρ , la cantidad de masa dentro del cubo en un instante determinado es: el volumen del cubo por su densidad:

$$M = V \cdot \rho = dx \, dy \, dz \cdot \rho \quad (2.1)$$

Debido a que la densidad no es constante en el tiempo, la masa dentro del cubo varía con éste. La masa después de un intervalo de tiempo dt es

$$M_{t+dt} = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) \cdot dx \, dy \, dz \quad (2.2)$$

El incremento de masa durante ese intervalo dt se obtiene por diferencia: ec.(2.1) – ec.(2.2)

$$\Delta M = \rho \cdot dx \, dy \, dz - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) \cdot dx \, dy \, dz = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx \, dy \, dz \cdot dt \quad (2.3)$$

Esto en lo que se refiere a la variación de la masa con el tiempo.

Por otra parte se debe analizar la entrada y salida de masa por cada cara del cubo, para ello es útil apoyarse en la Figura 2.2, donde se muestra la nomenclatura utilizada para el análisis en la dirección del eje X .

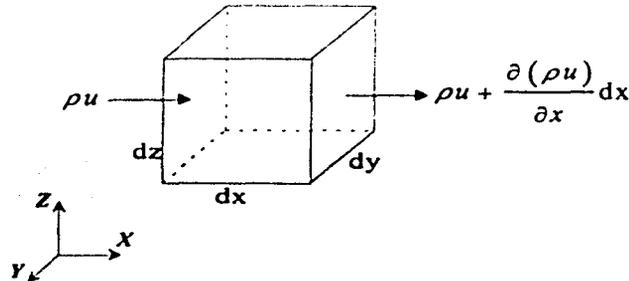


Figura 2.2 Nomenclatura utilizada para los esfuerzos

Si el flujo de masa es de izquierda a derecha, la cantidad de materia que entra al cubo por la cara $dy \cdot dz$ izquierda, en un intervalo de tiempo dt , es

$$\rho u \, dy \, dz \, dt \quad (2.4)$$

donde u es la velocidad del flujo. De la misma forma, la cantidad de masa que sale por la cara $dy \cdot dz$ derecha, durante un intervalo dt , considerando que ρ varía en el espacio, es:

$$\left(\rho u + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \, dx \right) \, dy \, dz \, dt \quad (2.5)$$

Por lo tanto la diferencia de masa a la entrada y a la salida en el eje X se obtiene por diferencia entre las ecuaciones (2.5) y (2.4):

$$\left(\rho u + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \, dx \right) \, dy \, dz \, dt - \rho u \, dy \, dz \, dt = \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \, dx \, dy \, dz \, dt \quad (2.6)$$

Este desarrollo es válido también para las direcciones Y y Z , por lo que por analogía con la ec. (2.6) se tiene

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial y} \, dx \, dy \, dz \, dt \quad (2.7)$$

y

$$\frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \, dx \, dy \, dz \, dt \quad (2.8)$$

en las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.8) u , v y w son las componentes de la velocidad del flujo en las direcciones X , Y , y Z respectivamente.

El cambio total de masa en un intervalo dt es la suma de los cambios en cada dirección: ec(2.6) + ec(2.7) + (2.8), donde $dx dy dz dt$ es un término común:

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz dt \quad (2.9)$$

Las ecuaciones (2.3) y (2.9) expresan el cambio de masa en un intervalo de tiempo dt , pero una lo hace en función únicamente del tiempo y otra considera también la variación espacial de ρ , por lo que igualándolas se tiene

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz dt = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx dy dz dt \quad (2.10)$$

Ordenando y agrupando:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

Desarrollando las derivadas parciales de la siguiente forma

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2.12)$$

se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \left(\rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \left(\rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.13)$$

ordenando

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (2.14)$$

si

$$V = u \hat{i} + v \hat{j} + z \hat{k} \quad (2.15)$$

el divergente de V es

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.16)$$

y el gradiente de la densidad es

$$\operatorname{grad} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \hat{k} \quad (2.17)$$

Por lo que la ecuación (2.14) queda expresada de forma general como sigue, siendo la representación más usual de la ecuación de la continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} V + V \cdot \operatorname{grad} \rho = 0 \quad (2.18)$$

Si el flujo se considera incompresible, la densidad (ρ) no varía, es decir: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ y $\operatorname{grad} \rho = 0$, por lo que la ecuación de la continuidad se reduce a

$$\rho \operatorname{div} V = \operatorname{div} V = 0 \quad (2.19)$$

2.2 Ecuación de Laplace

Se considerará una función escalar Φ , llamada potencial de velocidades:

$$\Phi = f(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z, t) \quad (2.20)$$

tal que

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.21)$$

Si el flujo es irrotacional, el *Lapaciano* (∇^2) del potencial de velocidades debe ser igual a cero, esto es, sustituir (2.21) en (2.19). Esta condición es conocida como la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.22)$$

2.3 Ecuaciones de Navier-Stokes

Primeramente debe recordarse la segunda ley de Newton en dirección del eje X :

$$\sum F_x = m \cdot a_x \quad (2.23)$$

donde la aceleración de las partículas (a_x) puede expresarse como la derivada de la velocidad (u) respecto del tiempo:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad (2.24)$$

Esto permite expresar la ecuación de movimiento en la dirección X de la siguiente forma

$$\sum F_x = m \frac{Du}{Dt} \quad (2.25)$$

La velocidad, en este caso u , es función del tiempo y del espacio, es decir $u = f(x, y, z, t)$, y su derivada total es

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (2.26)$$

también se sabe que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = w \quad (2.27)$$

por lo tanto la aceleración total sobre el eje X – ecuación (2.26) – puede expresarse de la siguiente forma

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.28)$$

el primer término de la ecuación anterior representa la aceleración local, es decir la variación de la velocidad respecto al tiempo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.29)$$

los siguientes tres términos, en conjunto representan la aceleración convectiva, que es la variación de la aceleración respecto a la posición de la partícula en el espacio:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.30)$$

Por otro lado, se examinarán los esfuerzos actuantes sobre cada una de las caras de un cubo infinitesimal que será utilizado como volumen de control, tal como se muestra en la Figura 2.3:

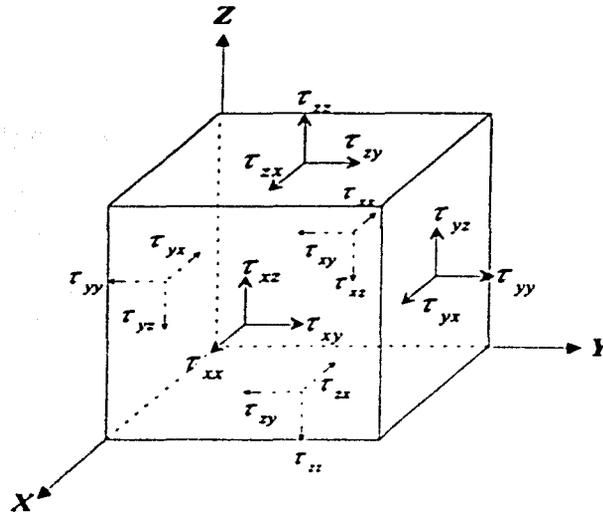


Figura 2.3 Esfuerzos sobre un volumen de control

Se observa que sobre cada una de las seis caras del cubo actúan tres esfuerzos, dos tangenciales y uno normal, este último incluye la presión (p), es el caso de σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , donde

$$\sigma_{xx} = -p + \tau_{xx}; \quad \sigma_{yy} = -p + \tau_{yy}; \quad \sigma_{zz} = -p + \tau_{zz}; \quad (2.31)$$

A continuación se obtendrán las fuerzas actuantes en las caras del cubo sobre la dirección X multiplicando el área de acción (de la cara del cubo) por el esfuerzo. Los valores σ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} , etc., tal cual, son los esfuerzos para el centro del cubo infinitesimal, pero los de interés son los que actúan en las caras, por lo que se obtiene la variación de su magnitud derivando respecto al eje en que sean movidos.

El esfuerzo normal actuando en la dirección X , en la cara derecha es:

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \quad (2.32)$$

el mismo pero sobre la cara de la izquierda es

$$\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \quad (2.33)$$

ambos actúan sobre un área $\Delta y \Delta z$.

De la misma forma, los esfuerzos tangenciales en la dirección X que se presentan en las caras normales a la dirección Y , que tienen un área $\Delta x \Delta z$, son

$$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}; \quad y \quad \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \quad (2.34)$$

y por último, los esfuerzos tangenciales en dirección X presentes en las caras normales a la dirección Z , que tienen un área $\Delta y \Delta x$ son

$$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}; \quad y \quad \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \quad (2.35)$$

De esta forma, la ecuación (2.25), haciendo uso de las ecuaciones (2.32), (2.33), (2.34), (2.35) puede expresarse de la siguiente forma

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - \left(\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x \Delta z \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y \end{aligned} \right\} + \rho \Delta x \Delta y \Delta z F_x = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{Du}{Dt} \quad (2.36)$$

donde $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ es la masa del cubo, y F_x es una fuerza externa por unidad de masa actuando en la dirección X , que aunque no está representada en la Figura 2.3 será de utilidad para posteriores desarrollos.

Operando la ecuación (2.36) y dividiéndola por el volumen del cubo ($\Delta x \Delta y \Delta z$), se obtiene

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho F_x \quad (2.37)$$

sustituyendo (2.31) en (2.37)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho F_x \quad (2.38)$$

ordenando y despejando la aceleración (Du/Dt)

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + F_x \quad (2.39)$$

Con un desarrollo similar en las direcciones Y y Z se llega a

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + F_y \quad (2.40)$$

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + F_z \quad (2.41)$$

Las ecuaciones (2.39), (2.40) y (2.41) se conocen como ecuaciones de Saint Venant.

Para solucionar gran parte de los problemas de hidrodinámica conviene expresar todo en función de las deformaciones que experimenta el fluido, y no en función de los esfuerzos, como lo hacen las ecuaciones de Saint Venant. Para expresarlas en función de las deformaciones se puede hacer uso del concepto de viscosidad (μ), que es la propiedad física que caracteriza la resistencia de los fluidos a moverse.

Considérense dos placas paralelas de área muy grande A , separadas una pequeña distancia y , cuyo espacio de separación está ocupado por un fluido. Si hasta un tiempo $t = 0$ las placas permanecen estáticas entre ellas (Figura 2.4a), pero en ese instante la placa inferior comienza a moverse con una velocidad constante V , el fluido comenzará a moverse también conforme transcurra el tiempo, presentando inicialmente un perfil de velocidades no lineal (Figura 2.4b), hasta que dicho perfil alcanza una distribución uniforme (Figura 2.4c). Para mantener constante la velocidad de la placa inferior, es necesario aplicar permanentemente una fuerza F que contrarreste la resistencia impuesta por el líquido, que será directamente proporcional al área de la placa A y a la velocidad V , e inversamente proporcional a la distancia entre placas y . La constante de proporcionalidad de dichas relaciones es la viscosidad μ .

$$F = \mu \frac{AV}{y} \quad (2.42)$$

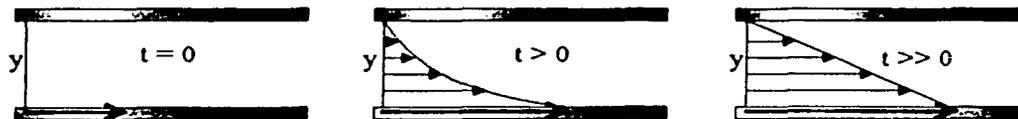


Figura 2.4 Distribución de velocidades de un fluido entre dos placas deslizándose

Por definición, el esfuerzo cortante es la fuerza entre el área de las placas, $\tau = F / A$, y la velocidad angular es V / y , que se puede expresar como $\partial u / \partial y$. Por lo tanto, el esfuerzo cortante acorde a la Figura 2.3, expresado como τ_{xy} (donde x es la dirección en la que actúa y la letra y denota que se encuentra en una superficie normal a la dirección Y), queda de la siguiente forma

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.43}$$

Para que el cubo infinitesimal esté en equilibrio de fuerzas y de momentos, es decir que no presente aceleraciones que induzcan rotación, el esfuerzo τ_{xy} debe estar complementado con un esfuerzo τ_{yx} de la misma magnitud sobre la cara vertical del elemento (Figura 2.5). Es decir

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{2.44}$$

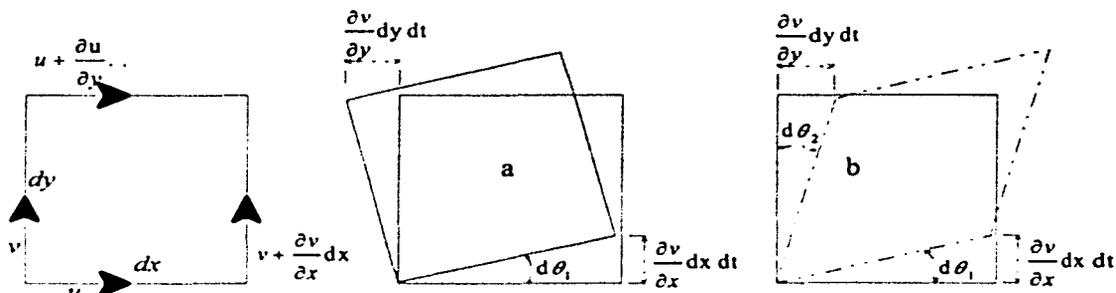


Figura 2.5 Diagrama de deformaciones en el plano x-y

Con un razonamiento similar al utilizado para obtener la ecuación (2.43) pero en con un flujo en el eje Y (Figura 2.5b) el esfuerzo τ_{yx} es

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.45}$$

De esta forma, para cualquier combinación de flujo, los esfuerzos viscosos que se generan son simplemente la suma de las contribuciones independientes:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.46)$$

y haciendo una analogía para los planos (x,z) y (y,z) :

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.47)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.48)$$

Si se sigue el mismo procedimiento utilizado anteriormente para los esfuerzos tangenciales, con los esfuerzos normales a los planos X , Y , y Z se tiene

$$\tau_{xx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.49)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.50)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.51)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.49), (2.50) y (2.51) en las ecuaciones de Saint Venant - (2.39), (2.40) y (2.41) - se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + F_x \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + F_x \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + F_y \quad (2.53)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + F_z \quad (2.54)$$

Si se asume que la viscosidad μ es constante en todo el dominio, las ecuaciones (2.52), (2.53) y (2.54) se pueden simplificar como sigue

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_x \quad (2.55)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_y \quad (2.56)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_z \quad (2.57)$$

O, de forma vectorial:

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 V + \frac{\mu}{\rho} \nabla(\text{div} V) + \bar{F} \quad (2.58)$$

Si se trata de un fluido Newtoniano (en el que el esfuerzo cortante generado entre el fluido y la pared es mayor al que hay entre las capas adyacentes del mismo), como el agua, la viscosidad cinemática ν está definida como la relación dinámica entre la viscosidad μ , y la densidad ρ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.59)$$

Haciendo uso del concepto de viscosidad cinemática (2.59), y de la ecuación de continuidad para flujos incompresibles (2.19), las ecuaciones (2.55), (2.56) y (2.57) se pueden expresar de la siguiente forma

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F_x \quad (2.60)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + F_y \quad (2.61)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + F_z \quad (2.62)$$

Las ecuaciones anteriores, (2.60), (2.61) y (2.62), son conocidas como Ecuaciones de Navier-Stokes (En memoria de Louis Marie Henri Navier, 1785-1836, y Georges Gabriel Stokes, 1819-1903), y también se pueden expresar de forma vectorial:

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 V + \frac{\mu}{\rho} \nabla(\operatorname{div} V) + \bar{F} \quad (2.63)$$

2.4 Ecuación de Euler

Para aplicar las ecuaciones de Navier-Stokes es necesario conocer los valores de las tensiones en el fluido, lo cual resulta sumamente impráctico, además de que sus efectos son mínimos, por lo tanto, se opta por tomar la misma consideración que se hace en muchos otros problemas de hidráulica, que consiste en suponer que las tensiones tangenciales son iguales a cero, es decir, que los efectos de la fricción son despreciables, o que el fluido es no viscoso. Además se dará un sentido físico real a las fuerzas externas del volumen de control por unidad de masa (aceleraciones) que se introdujeron desde la ecuación (2.36), dando valor de cero a F_x y F_y ; mientras que F_z se utilizará para considerar el efecto de la gravedad, por lo que se sustituirá por $-g$.

Esto da lugar a las Ecuaciones de Euler:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2.64)$$

2.5 Ecuación de Bernoulli

La Ecuación de Bernoulli es una forma integrada de la ecuación de movimiento o de Euler, y relaciona al campo de presiones con el cinemático.

El siguiente desarrollo se hará para el plano x - z , sin perder de vista que el flujo se considera incompresible. Si se desarrolla el término de la izquierda de la ecuación (2.64)_a, considerando que $u = f(x, z)$ y que $x, z = f(t)$:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (2.65)$$

donde

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dt} = w \quad (2.66)$$

entonces

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.67)$$

y siguiendo el mismo procedimiento con la ecuación (2.64)_c:

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.68)$$

Igualando (2.67) y (2.68) con (2.64)_a y (2.64)_c respectivamente:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.69)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.70)$$

Considerando la condición de flujo irrotacional en dos direcciones:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & w \end{array} \right| = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.71)$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.72)$$

Utilizando la expresión (2.72), las ecuaciones (2.69) y (2.70) pueden expresarse

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.73)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.74)$$

mediante la siguiente relación

$$\frac{\partial(u^2/2)}{\partial x} = \frac{1}{2} 2u \frac{\partial u}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.75)$$

las ecuaciones (2.73) y (2.74) pueden expresarse

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2/2)}{\partial x} \quad (2.76)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(u^2/2)}{\partial z} + \frac{\partial(w^2/2)}{\partial z} \quad (2.77)$$

Además, si se recuerda la ecuación (2.21):

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.78)$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x}; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} \quad (2.79)$$

Y sustituyendo (2.79) en (2.76) y (2.77)

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial(u^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2/2)}{\partial x} \quad (2.80)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial(u^2/2)}{\partial z} + \frac{\partial(w^2/2)}{\partial z} \quad (2.81)$$

ordenando (2.80) y (2.81):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} \right] = 0 \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} \right] = -g \quad (2.83)$$

Es estas ecuaciones se ha asumido que la densidad es uniforme a través del fluido.

Integrado respecto a x la ecuación (2.82), y respecto a z la ecuación (2.83) se tiene, respectivamente

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} = C_1(z, t) \quad (2.84)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} = -gz + C_2(x, t) \quad (2.85)$$

donde $C_1(z, t)$ y $C_2(x, t)$ son variables propias de cada integración. Se observa que los términos del lado izquierdo de ambas ecuaciones son idénticos, por lo que los términos del lado derecho se pueden igualar

$$C_1(z, t) = -gz + C_2(x, t) \quad (2.86)$$

Si se comparan las variables que componen la expresión a cada lado de la igualdad, se observa que C_2 no puede depender de x , sino que en su lugar debe haber una función que sólo dependa del tiempo: $C(t)$, es decir

$$C_1(z, t) = -gz + C(t) \quad (2.87)$$

Sustituyendo (2.87) en (2.84) y ordenando se tiene

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (2.88)$$

Que se conoce como Ecuación de Bernoulli, la cual define la condición dinámica de superficie libre. Recordando la ecuación (2.21), se puede expresar de la siguiente forma

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (2.89)$$

CAPÍTULO 3 TEORÍA LINEAL

1. \mathbb{R}^2 es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

3 TEORÍA LINEAL

3.1 Introducción

La teoría lineal o teoría de ondas de pequeña amplitud fue desarrollada por Airy en 1845. Con diversas suposiciones, durante su deducción pueden eliminarse los términos no lineales de las ecuaciones fundamentales por considerarse que al ser valores muy pequeños, elevados a una potencia serán mucho menores, con lo que se hace fácilmente aplicable y se ajusta bastante bien al comportamiento del oleaje en aguas profundas. Está pensada fundamentalmente para olas de poco peralte (H/L), las demás suposiciones son:

- Fluido homogéneo e incompresible (densidad ρ constante).
- Tensión superficial despreciable.
- Efecto de Coriolis despreciable.
- Presión en la superficie del agua uniforme y constante (igual a cero).
- Fluido ideal (no viscoso).
- Inexistencia de interacción entre ondas.
- Fondo marino horizontal, continuo, y en este caso impermeable.
- Amplitud de onda pequeña respecto a la profundidad e invariable en tiempo y espacio.
- Ondas de gran longitud respecto a su amplitud.
- El flujo es irrotacional.
- Las ondas son bidimensionales (x, z).
- El período es constante.

3.2 Condiciones de contorno.

Para resolver cualquier problema de flujo, la mecánica de fluidos exige establecer, además de la ecuación de gobierno, las condiciones de frontera o contorno a las que se someterá dicho fluido. Para el caso del análisis de oleaje deben establecerse condiciones de superficie libre, de fondo y de contorno lateral. Dado que el desarrollo de la teoría en dos dimensiones es más manejable y que fácilmente se puede ampliar al caso de tres dimensiones, los ejes coordenados se definen como lo muestra la Figura 3.1, (donde C.C. = condición de contorno):

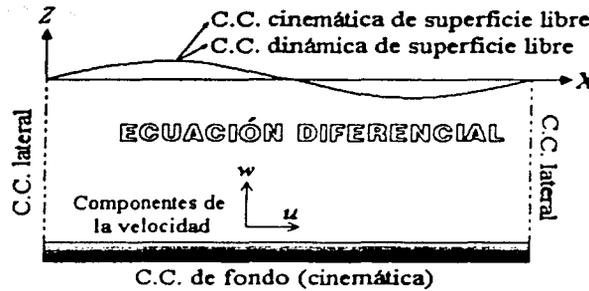


Figura 3.1 Condiciones de contorno

3.2.1 Condición cinemática de contorno.

Para empezar, se propone una función que describe la condición cinemática de contorno, que como toda superficie, fija o móvil, puede ser expresada de la siguiente forma

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (3.1)$$

Como el oleaje varía con el tiempo, entonces la derivada total de la función anterior respecto del tiempo debe ser igual a cero en donde se cumpla que $F(x, y, z, t) = 0$:

$$\frac{DF(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} \Big|_{F(x, y, z, t)=0} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{DF(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{F(x, y, z, t)=0} = 0 \quad (3.3)$$

Agrupando y expresando en forma vectorial

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \vec{u} \cdot \nabla F = \vec{u} \cdot n |\nabla F| \quad (3.4)$$

donde n es el vector unitario normal a la superficie libre

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (3.5)$$

y

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \quad (3.6)$$

Reagrupando la ecuación (3.4), la condición cinemática de contorno puede expresarse

$$\bar{u} \cdot n = \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{en} \quad F(x, y, z, t) = 0 \quad (3.7)$$

3.2.1.1 Condición cinemática en el fondo

Como se considera que el fondo es impermeable se puede crear una condición que indique que la velocidad del flujo en el fondo es nula; se expresa así

$$\bar{u} \cdot n = 0 \quad (3.8)$$

Además existe una función que describe la forma del fondo:

$$F(x, y) = z + h(x, y) = 0 \quad (3.9)$$

Sustituyendo la ecuación (3.9) en (3.5) se obtiene el vector n

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\frac{\partial h}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (3.10)$$

Si con la expresión anterior (n) se realiza el producto punto $\bar{u} \cdot n$, y esto se multiplica por el radical del denominador, es decir $(\bar{u} \cdot n)|\nabla F|$, se tiene

$$\begin{aligned} (\bar{u} \cdot n)|\nabla F| &= (u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k}) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{j} + \hat{k} \right) \\ &= u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

en $z = -h(x, y)$

despejando w y expresando en forma vectorial

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi \quad \text{en } z = -h(x, y) \quad (3.12)$$

donde la expresión $z = -h(x, y)$ indica que la condición se cumple únicamente en el fondo.

si el fondo es horizontal, $h(x, y)$ es constante, por lo tanto

$$\nabla_h h = 0 \quad (3.13)$$

con lo que la ecuación (3.12) para el caso particular de fondo constante quedaría

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (3.14)$$

donde $z = -h$ indica que la condición (3.14) se cumple en el fondo, si este es horizontal.

3.2.1.2 Condición cinemática en la superficie libre

Se empleará una función η que describe el movimiento de la superficie libre del agua sobre el eje Z , y que depende del espacio y del tiempo, con lo que la ecuación de la superficie libre queda expresada como

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \quad (3.15)$$

Sustituyendo la ecuación de la superficie (3.15) en la ecuación (3.7) se obtiene

$$\bar{u} \cdot n = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (3.16)$$

Por otro lado, el vector n se obtiene usando la ecuación (3.5):

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{-\frac{\partial \eta}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (3.17)$$

Haciendo el producto punto $\bar{u} \cdot n$ con la ecuación (3.17), e igualando al de la ecuación (3.16):

$$\bar{u} \cdot n = (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \cdot \frac{-\frac{\partial \eta}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (3.18)$$

desarrollando

$$-u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3.19)$$

despejando w

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (3.20)$$

o bien

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (3.21)$$

3.2.2 Condición dinámica de contorno

La condición dinámica de superficie libre está definida por la ecuación de Bernoulli (2.88)

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (3.22)$$

que como se vio en el capítulo 2, también puede expresarse como sigue

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (3.23)$$

Como el movimiento se considera al primer orden, es coherente despreciar los términos cuadráticos, de aquí que el objetivo de la teoría lineal es encontrar el potencial de velocidades que satisfaga las condiciones de contorno en el fondo y en la superficie libre.

3.2.3 Condición de contorno mixta de superficie libre

Recordando que se hizo la hipótesis de que el fluido es incompresible, ecuación (2.19), la expresión que define la conservación de la masa es

$$\nabla \bar{u} = 0 \quad (3.24)$$

donde el operador ∇ (nabla) representa

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (3.25)$$

y la velocidad expresada vectorialmente es \bar{u} (antes denominada V):

$$\bar{u} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k} \quad (3.26)$$

Cuando la vorticidad \bar{W} del flujo es igual a cero, este es irrotacional

$$\nabla \times \bar{u} = \bar{W} = 0 \quad (3.27)$$

Si se cumple la condición anterior, entonces puede demostrarse que existe una función potencial $\Phi(x, y, z, t)$ tal que

$$\bar{u} = -\nabla \Phi \quad (3.28)$$

lo cuál se ya había expresado en la ecuación (2.21) de la siguiente forma

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.29)$$

De aquí se derivó la ecuación (2.22), que es la expresión de la conservación de la masa:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.30)$$

también conocida como Ecuación de Laplace, que gobierna el movimiento del fluido, y por eso es la ecuación en derivadas parciales que será objeto del estudio. Para integrarla deben establecerse condiciones de frontera a lo largo del dominio de integración, mismas que se vieron en los apartados anteriores, y que son:

Ecuación (3.11), condición cinemática de fondo impermeable:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{en } z = -h(x, y) \quad (3.31)$$

Ecuación (3.21), condición cinemática de superficie libre:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (3.32)$$

Ecuación(3.23), condición dinámica de superficie libre, considerada bajo presión atmosférica, o ecuación de Bernoulli:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = 0 \quad \text{en } \eta(x, y, t) = 0 \quad (3.33)$$

Se necesita una condición de contorno mixta de superficie, por lo tanto se seguirá un procedimiento para combinar las ecuaciones (3.32) y (3.33). Primero se calculará la derivada total de la ecuación (3.33), que previamente se ordena de la siguiente forma

$$g\eta = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.34)$$

derivando el término de la izquierda:

$$g \frac{d\eta}{dt} = g \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (3.35)$$

derivando ahora el término de la derecha:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} = \\ & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

en $z = \eta(x, y, t)$

simplificando

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \\ + \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) &\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

en $z = \eta(x, y, t)$

Igualando (3.35) y (3.37) de acuerdo a (3.34)

$$\begin{aligned} g \left(-\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \\ + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) &\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

en $z = \eta(x, y, t)$

La ecuación (3.38) es la derivada total de la condición dinámica de superficie libre, ecuación (3.33), y al sustituirla en la condición cinemática de superficie libre, ecuación (3.32), se tiene

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.39)$$

en $z = \eta(x, y, t)$

No es posible evaluar a priori la superficie libre $\eta(x, y, z, t)$, pero se puede igualar a lo que se ve, es decir, considerar que tiene una forma sinusoidal. La estimación se hace con una expansión en serie de Taylor de la siguiente forma

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Phi_m \quad (3.40)$$

$$\eta = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \eta_m \quad (3.41)$$

Donde ε es un parámetro de pequeña magnitud que debe ser evaluado. Cada potencial de velocidades Φ debe satisfacer la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi_m = \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2} = 0 \quad (3.42)$$

Si se hace una expansión en serie de Taylor de las condiciones de contorno de superficie libre (3.33) y (3.38) sobre el nivel del agua en reposo ($\eta = 0$), se tiene

$$\eta = -\frac{1}{g} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \quad \text{en } z = 0 \quad (3.43)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \\ \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \end{array} \right\} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (3.44)$$

3.3 Teoría Lineal para fondo constante

El que se trate de una teoría lineal implica que los términos de inercia convectivos no lineales se consideren pequeños, y por lo mismo se desprecien. También se conoce como teoría de ondas de pequeña amplitud porque sus ecuaciones arrojan resultados exactos cuando el movimiento de la superficie es nulo, y considerando olas pequeñas su utilización es adecuada y sus resultados satisfactorios.

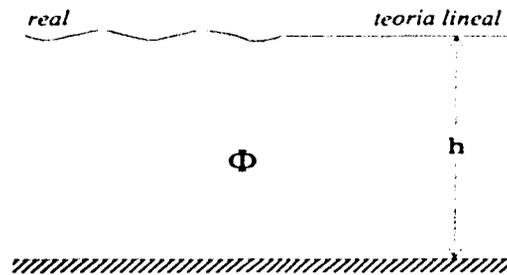


Figura 3.2 Teoría Lineal

Para dar solución a este problema se considera la expansión en serie de Taylor solo al primer orden de una onda viajando en la dirección x (x, y) sobre un fondo horizontal.

Para fondo horizontal:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0; \quad \text{y} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (3.45)$$

con lo que la condición cinemática de fondo impermeable (3.31) se reduce a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = -h \quad (3.46)$$

Y despreciando los términos no lineales, por las razones antes expuestas, la condición dinámica de superficie libre (3.33), y la condición de contorno mixta de superficie libre (3.39) quedan

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (3.48)$$

donde se asume, por la hipótesis propia de la teoría lineal de que la altura de la ola es muy pequeña respecto a su longitud y a la profundidad, que $z = \eta(x, y, t)$ es aproximadamente $z = 0$.

Para completar las fronteras de la integración se deben definir dos condiciones de contorno laterales (recordando que se están analizando dos dimensiones, ver Figura 3.1), para lo cual se aprovechará la característica del oleaje de ser periódico tanto en el tiempo como en el espacio, es decir, tanto en el dominio de x como en el de t .

En su propagación en el eje X el oleaje es periódico cada longitud de onda L , esto se puede expresar

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x + L, z, t) \quad (3.49)$$

donde $x = (x, y)$ si se amplía el caso a tres dimensiones.

Así mismo, la periodicidad temporal puede considerarse como una condición inicial del problema:

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x, z, t + T) \quad (3.50)$$

En adelante se utilizará el método de separación de variables para encontrar la solución de Φ que satisfaga la ecuación de Laplace y las condiciones de contorno en $z = 0$ y $z = -h$ así como las condiciones laterales. Como la ecuación de Laplace no incluye derivadas respecto

al tiempo, el análisis del problema puede reducirse al caso de un tren periódico T , tal que la variable temporal del potencial puede expresarse de la siguiente forma

$$\Phi(x, z, t) = \Re[\phi^*(x, z)e^{i\sigma t}] \quad (3.51)$$

donde \Re indica que se toma únicamente la parte real de la función compleja y σ es la frecuencia angular:

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (3.52)$$

con esto la ecuación de Laplace (3.30) queda en función de ϕ^* :

$$\nabla^2 \phi^* = \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} = 0 \quad (3.53)$$

Como la ecuación diferencial objeto del análisis es lineal y homogénea en z , con condiciones de contorno lineales y homogéneas, cumple los requisitos para que se le pueda aplicar el método de separación de variables, esto es, que la ecuación continúa estando en derivadas parciales aunque ya no contenga a la variable tiempo.

Dadas las condiciones del problema analizado, se propone la siguiente separación de variables para ϕ^* :

$$\phi^*(x, z) = \phi(x) \cdot f(z) \quad (3.54)$$

donde $\phi(x)$ todavía no se conoce y es función de x y de y , por lo que se denomina función potencial plana.

En caso de que el oleaje analizado en el plano sea regular y continuo en el eje X y las crestas de las ondas se prolonguen paralelamente en Y sin estar confinadas en esta última dirección, se trata de un caso particular conocido como "caso de ondas de crestas largas" (Figura 3.3), es factible analizarlo únicamente en el plano (x, z) . Para casos en que los límites laterales no marquen regiones rectangulares o circulares, el análisis que aquí se hace no es válido y se requieren otras técnicas.

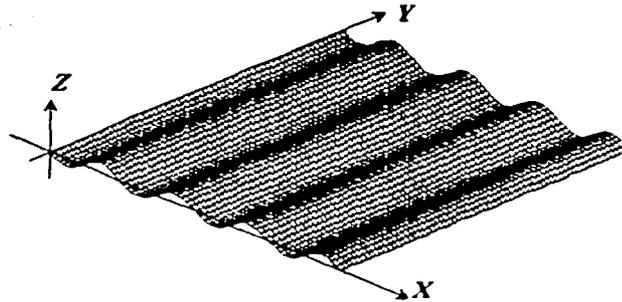


Figura 3.3 Caso de ondas de crestas largas

Sustituyendo el potencial de velocidades descompuesto de la ecuación (3.54) en la ecuación de Laplace (3.53):

$$f(z) \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] + \phi(x) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} \quad (3.55)$$

para hacer que cada término dependa únicamente de una variable, se divide por $\phi(x) \cdot f(z)$:

$$\frac{1}{\phi(x)} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (3.56)$$

Esto permite escribir la ecuación de la siguiente forma

$$\frac{1}{\phi(x)} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] = - \frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = -k^2 \quad (3.57)$$

Como una parte de la igualdad depende únicamente de x y la otra sólo de z , ambas funciones deben ser iguales a una constante, porque al modificar x , la función de z no se afecta y viceversa. Esto permite separar en dos ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} - k^2 \cdot f(z) = 0 \quad (3.58)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] + k^2 \cdot \phi(x) = 0 \quad (3.59)$$

Donde k es una constante, que se expresa en la forma $-k^2$ para que en desarrollos posteriores, cuando se cumpla que $k^2 > 0$ se cree una dependencia en x que no sea oscilatoria, sino exponencial, decreciente con la profundidad. Sin embargo también se

considerarán los casos en que $k^2 < 0$ donde el movimiento en z será oscilatorio, lo cual corresponde con los modos llamados *evanescentes*.

La ecuación (3.59), que sigue siendo una ecuación en derivadas parciales, tiene la forma de la llamada ecuación de Helmholtz (Anexo 2. Teoremas de la ecuación de Helmholtz).

Con la separación de (3.57) en (3.58) y (3.59) se tiene un problema de contorno homogéneo con condiciones de contorno homogéneas en z , ecuación (3.58).

Aplicando las condiciones de contorno de las ecuaciones (3.46) y (3.48) al potencial total de la ecuación (3.51) $\Phi = \phi^* \cdot e^{i\sigma t} = \phi(x) \cdot f(z) \cdot e^{i\sigma t}$, se tiene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \phi \frac{df(z)}{dz} = 0; \quad \frac{df(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (3.60)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= (i\sigma)^2 \Phi + g \frac{\partial \phi^*}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} \phi^* &= \phi \left[\frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g} f(z) \right] = 0; \quad \frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g} f(z) = 0 \quad \text{en } z = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Esto es un problema de autovalores de Sturm-Liouville (Anexo 1. Problema regular de Sturm-Liouville). También es regular. La siguiente tabla contiene los resultados a dicha problema:

Caso	Ecuación diferencial ordinaria	Solución
Real $k^2 > 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$	$X(x) = A \cos kx + B \sin kx$ $Z(z) = C e^{kz} + D e^{-kz}$
$k = 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$	$X(x) = Ax + B$ $Z(z) = Cz + D$
Imaginaria $k^2 < 0, \quad k = i k $ $ k = \text{magnitud de } k$	$\frac{d^2 X}{dx^2} - k ^2 X = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} + k ^2 Z = 0$	$X(x) = A e^{k x } + B e^{-k x }$ $f(z) = C \cos k z + D \sin k z$

Tabla 3-1 Posibles soluciones a la ecuación de Laplace.
Utilizando separación de variables. DEAN, et al. (1984).

3.3.1 Separación de la variable profundidad.

En las soluciones de la Tabla 3-1 resulta obvia la solución para $k^2 = 0$, donde la solución es $f(z) = D = 0$. Se desea incluir las soluciones real e imaginaria en una sola. La solución real, $k^2 > 0$, puede expresarse como

$$k^2 = -\mu^2 \quad -\mu^2 > 0 \quad (3.62)$$

con esto, la solución dada en la Tabla 3-1 puede escribirse

$$f(z) = A \cos(\mu z) + B \operatorname{sen}(\mu z) = A \cos(ikz) + B \operatorname{sen}(ikz) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad (3.63)$$

Si se considera que la estructura de esta solución (3.63) es la misma para $k^2 > 0$ y $k^2 < 0$, y si se le aplica la condición de fondo (3.60), se tiene

$$\left. \frac{d}{dz} f(z) \right|_{z=-h} = k [Ae^{kz} + Be^{-kz}] = 0 \quad (3.64)$$

despejando A

$$A = Be^{2kh} \quad (3.65)$$

Sustituyendo (3.65) en (3.63)

$$f(z) = (Be^{2kh})e^{kz} + Be^{-kz} \quad (3.66)$$

desarrollando

$$f(z) = B[e^{2kh}e^{kz} + e^{-kz}] = B[e^{kh}e^{kh}e^{kz} + e^{-kz}] \quad (3.67)$$

multiplicando por $\left(\frac{e^{kh}}{e^{kh}}\right)$

$$\begin{aligned} f(z) &= Be^{kh} \left[\frac{e^{kh}e^{kh}e^{kz}}{e^{kh}} + \frac{e^{-kz}}{e^{kh}} \right] = Be^{kh} [e^{kh}e^{kz} + e^{-kz}e^{-kh}] \\ f(z) &= Be^{kh} [e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}] \end{aligned} \quad (3.68)$$

multiplicando por $\left(\frac{2}{2}\right)$

$$f(z) = 2Be^{kh} \left[\frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{2} \right] \quad (3.69)$$

si $B' = Be^{kh}$, que es constante, y $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; entonces

$$f(z) = B' \cosh k(h+z) \quad (3.70)$$

Sustituyendo (3.70) en la condición de contorno mixta en la superficie (3.61), en $z = 0$:

$$\left. \frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g} f(z) \right|_{z=0} = B'k \sinh(kh) - \frac{\sigma^2}{g} B' \cosh(kh) = 0 \quad (3.71)$$

despejando σ^2

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (3.72)$$

La ecuación (3.72) es conocida como *ecuación de la dispersión*, que permite identificar los autovalores del problema gracias a que relaciona k con σ . Una vez que se conocen dichos autovalores, puede buscarse la solución a la ecuación (3.59). La ecuación de dispersión tiene sólo una solución real, pero infinitas soluciones imaginarias puras, llamadas *modos evanescentes* de k (ver Anexo 3. Autovalores y autofunciones del problema en la variable z con $k^2 > 0$ y $k^2 < 0$).

3.3.2 Condición de periodicidad espacial.

Como ya se había establecido en la definición de las condiciones de contorno, la ecuación (3.59) debe cumplir con la condición de contorno lateral que marca la periodicidad del oleaje en el espacio:

$$\phi(x) = \phi(x+L) \quad (3.73)$$

Como el problema en X no tiene las dos condiciones de contorno homogéneas y lineales requeridas para tener la estructura del problema regular de Sturm-Liouville, no se cumple el teorema por el cual a cada autovalor le corresponde una única autofunción. Al resolver la ecuación diferencial se obtienen dos autofunciones linealmente independientes para el mismo autovalor (seno y coseno). Este problema es del tipo *singular* o *no regular* de

Sturm-Liouville y se le pueden aplicar casi todos los teoremas válidos para el problema regular, entre ellos el de ortogonalidad de las autofunciones, aunque para aplicarlo es necesario utilizar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Para que en desarrollos posteriores pueda aplicarse el principio de superposición, la solución de $\phi(x)$ (Tabla 3-1) se escribirá en forma compleja:

$$\phi(x) = A e^{ikx} \quad (3.74)$$

si se aplica la condición de periodicidad en el espacio (3.73):

$$\phi(x+L) = A e^{ik(x+L)} \quad (3.75)$$

$$e^{ikx} = e^{ik(x+L)} \quad (3.76)$$

$$e^{ikL} = 1 \quad (3.77)$$

recordando que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$; la ecuación (3.77) se puede expresar como

$$\cos kL = 1 \quad (3.78)$$

$$\sin kL = 0 \quad (3.79)$$

observando las ecuaciones (3.78) y (3.79):

$$kL = n\pi, \quad \text{donde } n = 0, 2, 4, \dots \quad (3.80)$$

Las dos primeras repeticiones del movimiento periódico se dan para los dos primeros valores de n : $n = 0$ y $n = 2$, por lo tanto

$$kL = 2\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{L} \quad (3.81)$$

3.3.3 Solución General

Con la relación entre la superficie libre η y el potencial $\Phi(x, z, t)$, dada por la condición dinámica en el nivel medio del mar, ecuación (3.47) en $z = 0$, se tiene

$$\eta = + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad z = 0 \quad (3.82)$$

Recordando la ecuación (3.51)

$$\Phi(x, z, t) = \Re[\phi^*(x, z)e^{i\sigma t}] \quad (3.83)$$

y (3.54):

$$\phi^*(x, z) = \phi(x) \cdot f(z) \quad (3.84)$$

así como (3.74) y (3.70), que definen a $\phi(x)$ y $f(z)$ respectivamente, se tiene que el potencial es

$$\Phi(x, z, t) = \Re[A' \cosh \mathbf{k}(h+z) e^{\pm i(\mathbf{k}x - \sigma t)}] \quad (3.85)$$

donde A' engloba todo los parámetros constantes incluidos en $\phi(x)$ y $f(z)$. Sustituyendo (3.85) en la condición de contorno (3.82) para $z = 0$:

$$\eta = \Re\left[-\frac{i\sigma}{g} \cosh(\mathbf{k}h) \cdot A' \cdot e^{i(\mathbf{k}x - \sigma t)}\right] \quad (3.86)$$

Por otro lado, al observar el fenómeno del oleaje y suponer que tiene una forma sinusoidal, con una amplitud de onda igual a la mitad de la altura de ola ($a = H/2$), periódico en el espacio (x) cada longitud de onda L , y en el tiempo (t) cada periodo T , se tiene

$$\eta = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) = \Re[a e^{i(\mathbf{k}x - \sigma t)}] \quad (3.87)$$

donde

$$\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} = \mathbf{k}x - \sigma t \quad (3.88)$$

se conoce como la *fase* del movimiento ondulatorio.

Igualando la expresión (3.86), que es el desarrollo teórico del movimiento de la superficie libre, y la ecuación (3.87), que es lo que se observa en la realidad, y despejando la constante A' se tiene

$$A' = -\frac{ig}{\sigma} \frac{a}{\cosh \mathbf{k}h} \quad (3.89)$$

Sustituyendo la ecuación (3.89) en la expresión del potencial (3.85):

$$\Phi(x, z, t) = \Re\left[-\frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h} e^{\pm i(\mathbf{k}x - \sigma t)}\right] \quad (3.90)$$

o bien, tomando el signo negativo en la exponencial

$$\Phi(x, z, t) = \Re \left[-\frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(kx - \sigma t)} \right] \quad (3.91)$$

3.3.4 Caso Tridimensional.

Es común el uso de la teoría lineal para frentes de ola propagándose oblicuamente respecto a los ejes coordenados del plano (x, y) .

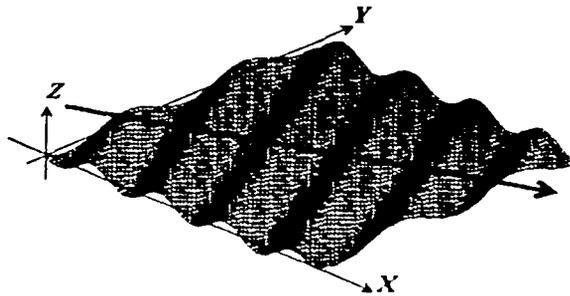


Figura 3.4 Oleaje oblicuo a los ejes de referencia

En estas condiciones, el número de onda k puede expresarse como un vector con componentes en cada eje: $\mathbf{k}(k_x, k_y)$:

$$k_x = |\mathbf{k}_0| \cos \theta \quad (3.92)$$

$$k_y = |\mathbf{k}_0| \sin \theta \quad (3.93)$$

$$|\mathbf{k}_0| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.94)$$

Para un punto del tren $P(x, y)$ cuyo vector de posición es $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, la fase del movimiento ondulatorio Ω está dada por

$$\Omega = \vec{k} \cdot \vec{r} - \sigma t = k_x x + k_y y - \sigma t = \sqrt{k_0^2} x + k_y y - \sigma t \quad (3.95)$$

En ocasiones se utiliza las siguientes igualdades: $k_x = \lambda$; y $k_y = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$, para poder expresar el potencial de un tren de ondas oblicua de la siguiente forma

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(\sqrt{k_0^2 - \lambda^2} x + \lambda y - \sigma t)} = \frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(qx + \lambda y - \sigma t)} \quad (3.96)$$

3.3.5 Caso en dos dimensiones.

Es el caso más sencillo de analizar, donde el oleaje sólo varía en una línea, es decir que se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0; \quad k_y = 0 \quad (3.97)$$

Con lo que el potencial de velocidades queda

$$\Phi(x, y, z, t) = \pm \frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(kx - \sigma t)} \quad (3.98)$$

3.4 Tren de olas propagándose sobre una corriente de agua uniforme U_0 .

Se usará un potencial de velocidades que represente a la corriente uniforme U_0 y a una ola progresiva, satisfaciendo la ecuación de Laplace, denotado por la siguiente expresión

$$\phi = -U_0 x + A \cosh k(h+z) \cos(kx - \sigma t) \quad (3.99)$$

De esta forma se asegura la periodicidad del oleaje en el espacio y en el tiempo, así como también se satisface la condición de ausencia de flujo a través del fondo (3.45). También deberán cumplirse las condiciones de contorno cinemática y dinámica de superficie libre.

3.4.1 Condición de contorno dinámica de superficie libre.

Como una de las hipótesis de la teoría lineal es que la amplitud de la ola es muy pequeña respecto al fondo y respecto a su longitud, entonces se puede considerar que el movimiento es nulo, es decir, que $z = \eta(x, t) \approx 0$, lo cual en la ecuación de Bernoulli (3.22) queda

$$\left[\frac{1}{2}(u^2 + w^2) + gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\eta(x,t)} \approx \left[\frac{1}{2}(u^2 + w^2) + gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=0} = C(t) \quad (3.100)$$

Utilizando el potencial de la ecuación (3.99) se obtiene la velocidad horizontal:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = U_0 + Ak \cosh k(h+z) \sin(kx - \sigma t) \quad (3.101)$$

elevando al cuadrado

$$u^2 = U_0^2 + 2AkU_0 \cosh k(h+z) \sin(kx - \sigma t) + A^2 k^2 \cosh^2 k(h+z) \sin^2(kx - \sigma t) \quad (3.102)$$

Recordando otra de las premisas de la teoría lineal, la componente horizontal de la velocidad (Ak) es muy pequeña, y elevada al cuadrado lo será todavía más, y podrá despreciarse, por lo que la ecuación (3.102) queda

$$u^2 = U_0^2 + 2AkU_0 \cosh k(h+z) \sin(kx - \sigma t) \quad (3.103)$$

También pueden despreciarse los términos cuadráticos de la velocidad vertical, con lo que la ecuación de Bernoulli (3.100), evaluada en $z = 0$ queda

$$\frac{1}{2} [U_0^2 + 2AkU_0 \cosh kh \sin(kx - \sigma t)] + g\eta - A\sigma \cosh kh \sin(kx - \sigma t) = C(t) \quad (3.104)$$

despejando $\eta(x, t)$:

$$\eta(x, t) = -\frac{U_0^2}{2g} + \frac{A\sigma}{g} \left(1 - \frac{U_0 k}{\sigma}\right) \cosh kh \sin(kx - \sigma t) + C(t) \quad (3.105)$$

Para conocer el término $C(t)$ se utilizará un promedio de la ecuación (3.105) en el espacio, y como el promedio espacial de las funciones $\eta(x, t)$ y $\sin(kx - \sigma t)$ es cero:

$$\bar{\eta}(x, t) = -\frac{U_0^2}{2g} + C(t) = 0 \quad (3.106)$$

y despejando el término buscado

$$C(t) = \frac{U_0^2}{2g} \quad (3.107)$$

Sustituyendo (3.107) en (3.105), la ecuación del movimiento de la superficie libre queda

$$\eta(x, t) = \frac{A\sigma}{g} \left(1 - \frac{U_0 k}{\sigma}\right) \cosh kh \sin(kx - \sigma t) \quad (3.108)$$

Por otro lado, al igual que lo realizado para obtener la ecuación (3.87), se define una ecuación acorde a lo que se observa en la realidad, es decir, una onda sinusoidal de amplitud $H/2$, periódica en x cada L ($k = 2\pi/L$), y periódica en t cada T ($\sigma = 2\pi/T$):

$$\eta(x, t) = \frac{H}{2} \operatorname{sen}(kx - \sigma t) \quad (3.109)$$

Al igualar (3.108) con (3.109) y despejar A , se obtiene

$$A = \frac{Hg}{2\sigma(1 - U_0 k / \sigma) \cosh kh} \quad (3.110)$$

Sustituyendo (3.110) en (3.99) se tiene finalmente el potencial de velocidades:

$$\phi = -U_0 x + \frac{gH \cosh k(h+z) \cos(kx - \sigma t)}{2\sigma(1 - U_0 k / \sigma) \cosh kh} \quad (3.111)$$

pero todavía no se determina el valor de k .

3.4.2 Condición de contorno cinemática de superficie libre

La condición de contorno cinemática de superficie libre de primer orden (3.32) es

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (3.112)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.109) y (3.111) en (3.112)

$$\left[-\frac{H\sigma}{2} \cos(kx - \sigma t) \right] + \left[U_0 + \frac{gHk \cosh kh \operatorname{sen}(kx - \sigma t)}{2\sigma(1 - U_0 k / \sigma) \cosh kh} \right] \left[\frac{H}{2} k \cos(kx - \sigma t) \right] + \left[\frac{gHk \tanh kh \cos(kx - \sigma t)}{2\sigma(1 - U_0 k / \sigma)} \right] = 0 \quad (3.113)$$

Dividiendo por $(H/2) \cos(kx - \sigma t)$, y si se desprecian los términos con $(Hk)^2$, se tiene

$$-\sigma + U_0 k + \frac{gk \tanh kh}{\sigma(1 - U_0 k / \sigma)^2} = 0 \quad (3.114)$$

despejando σ

$$\sigma^2 = \frac{gk \tanh kh}{(1 - U_0 k / \sigma)^2} \quad (3.115)$$

Esto es la ecuación de la dispersión, que también se puede expresar de la siguiente forma

$$\sigma^2 \left(1 - \frac{U_0 k}{\sigma}\right)^2 = gk \tanh kh \quad (3.116)$$

3.5 Propiedades ingenieriles de las ondas

3.5.1 Relaciones básicas

Una vez obtenido el potencial de velocidades es posible calcular las propiedades ingenieriles de una onda progresiva. La expresión que describe el movimiento de la superficie libre, ecuación (3.109) es

$$\eta(x, t) = \frac{H}{2} \sin(kx - \sigma t) \quad (3.117)$$

cuyo potencial de velocidades obtenido con la teoría lineal es

$$\Phi(x, z, t) = \Re \left[-\frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(kx - \sigma t)} \right] \quad (3.118)$$

donde $k = 2\pi/L$, $\sigma = 2\pi/T$, y $a = H/2$.

Por otro lado se tiene la ecuación de dispersión (3.72):

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (3.119)$$

que al sustituir los valores de k y σ y despejar L queda

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \left(\frac{2\pi h}{L} \right) \quad (3.120)$$

En esta ecuación no es posible despejar la longitud de onda (L), pero se obtiene mediante algún método numérico.

La celeridad, o velocidad a que viaja la onda, se obtiene utilizando la siguiente relación, sustituyendo σ de la ecuación de la dispersión.

$$C = \frac{L}{T} = \frac{\sigma}{k} = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kh) = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \quad (3.121)$$

Por definición, la derivada del potencial respecto a x es la velocidad orbital horizontal a una profundidad z :

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (3.122)$$

y la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = agk \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad (3.123)$$

de la misma forma para las componentes en z

$$w = \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad (3.124)$$

y

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -agk \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (3.125)$$

Para encontrar las componentes horizontal (ζ) y vertical (ξ) de los desplazamientos orbitales, se integra las componentes de la velocidad (3.122) y (3.124) respecto al tiempo, de manera que el desplazamiento horizontal es

$$\zeta = \int u dt = -a \frac{gk}{\sigma^2} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t) = -a \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad (3.126)$$

y el desplazamiento vertical es

$$\xi = \int w dt = a \frac{gk}{\sigma^2} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) = a \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (3.127)$$

3.5.2 Campo de presiones

La presión que provoca una onda puede determinarse a partir de la ecuación de Bernoulli, ecuación (2.89):

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (3.128)$$

Si se evalúa la ecuación anterior para una profundidad $z = 0$ (en la superficie libre η), donde la presión es igual a cero, desechando los términos no lineales se tiene

$$\left(\frac{p}{\rho} + gz - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_z = g\eta - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (3.129)$$

Recordando que la condición cinemática de superficie libre utilizando únicamente los términos lineales es

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (3.130)$$

Sustituyendo la ecuación (3.130) en (3.129)

$$\frac{p}{\rho} = -gz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3.131)$$

Al sustituir el potencial de la ecuación (3.118) en la ecuación (3.131), se obtiene

$$p = -\rho gz + \rho ga \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (3.132)$$

Donde el término $-\rho gz$ es la presión hidrostática, que se presenta aún sin movimiento en la superficie libre, y el segundo término es la presión debida al oleaje, también llamada presión dinámica (p_D), que se puede expresar de la siguiente forma

$$p_D = p + \rho gz = \rho ga \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (3.133)$$

3.5.3 Energía

La energía contenida en el oleaje es de dos tipos: energía potencial, debida a los cambios de elevación de la superficie libre del agua; y energía cinética, debida al movimiento de las partículas. Es indispensable conocer tanto la energía como su transmisión, ya que de esto depende la forma en que el oleaje se propaga y se modifica al cambiar de medio.

3.5.3.1 Energía potencial

Se debe al movimiento de la superficie del agua respecto al punto de equilibrio que procura la gravedad. Para definirla se utiliza la figura 4.5:

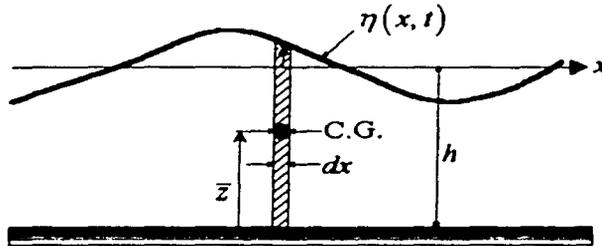


Figura 3.5 Esquema para determinar la energía potencial

La energía potencial respecto al fondo de una columna de agua con masa dm es el producto de la masa por la gravedad y por la altura media:

$$d(PE) = dm \cdot g \cdot \bar{z} \quad (3.134)$$

donde la distancia vertical entre el fondo y el centro de gravedad del diferencial de masa (\bar{z}), se define como

$$\bar{z} = \frac{h + \eta}{2} \quad (3.135)$$

y el diferencial de masa (dm) por anchura unitaria es

$$dm = \rho(h + \eta) dx \quad (3.136)$$

La energía promedio a lo largo del eje x durante una longitud de onda, por ancho unitario se obtiene integrando la ecuación (3.134) y dividiendo entre la longitud analizada (L):

$$(\overline{PE})_r = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} d(PE) = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} \rho g \frac{(h + \eta)^2}{2} dx = \frac{\rho g}{L} \int_x^{x+L} \rho g \frac{(h^2 + 2\eta h + \eta^2)}{2} dx \quad (3.137)$$

El subíndice T indica que se considera el volumen total del agua a lo largo de L . Sustituyendo la ecuación (3.117) en la integral anterior:

$$(\overline{PE})_r = \frac{\rho g}{L} \left(\frac{1}{2} h^2 L + h \int_x^{x+L} \eta dx + \frac{1}{2} \int_x^{x+L} \eta^2 dx \right) \quad (3.138)$$

Al realizar la integración, la energía potencial promedio es

$$\overline{(PE)}_T = \rho g \frac{h^2}{2} + \rho g \frac{H^2}{16} \quad (3.139)$$

La energía potencial debida al oleaje es la diferencia entre la energía total y la energía sin oleaje, es decir, ecuación (3.139) menos $\rho g h^2 / 2$:

$$\overline{PE} = \overline{(PE)}_{\text{oleaje}} = \rho g \frac{H^2}{16} \quad (3.140)$$

3.5.3.2 Energía cinética

Se presenta debido al movimiento orbital de las partículas de agua provocado por el oleaje. Considerando la velocidad como la suma vectorial de las componentes horizontal y vertical, la energía cinética (KE) para un diferencial de masa (dm) es

$$d(KE) = dm \frac{v^2}{2} = dm \frac{u^2 + w^2}{2} \quad (3.141)$$

La energía cinética media por área unitaria se encuentra integrando la ecuación anterior a lo largo de una longitud de onda L en x , y desde el fondo hasta la superficie libre en z :

$$\overline{KE} = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} \int_{-h}^{\eta} \rho \frac{u^2 + v^2}{2} dz dx \quad (3.142)$$

Al sustituir las ecuaciones (3.122) y (3.124) en (3.142), se obtiene

$$\overline{KE} = \frac{\rho}{2L} \left(\frac{gHk}{2\sigma \cosh kh} \right)^2 \int_x^{x+L} \int_{-h}^{\eta} \left[\cosh^2 k(h+z) \cos^2(kx - \sigma t) + \sinh^2 k(h+z) \sin^2(kx - \sigma t) \right] dz dx \quad (3.143)$$

Utilizando identidades trigonométricas, la ecuación (3.143) queda

$$\overline{KE} = \frac{\rho}{2L} \left(\frac{gHk}{2\sigma \cosh kh} \right)^2 \int_x^{x+L} \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} [\cosh 2k(h+z) \cos 2(kx - \sigma t)] dz dx \quad (3.144)$$

Al realizar la integración, se obtiene que la energía cinética promedio por área unitaria es

$$\overline{KE} = \frac{1}{16} \rho g H^2 \quad (3.145)$$

Comparando las ecuaciones (3.140) y (3.145) se observa que los valores de energía potencial promedio y energía cinética promedio son iguales, lo que significa que el sistema es conservativo. La energía media total de una ola, por área unitaria en el plano horizontal (E), es la suma de la energía cinética y potencial:

$$E = \overline{PE} + \overline{KE} = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (3.146)$$

En las ecuaciones (3.140), (3.145) y (3.146) se observa que la energía de una ola no depende más que del cuadrado de su altura.

3.5.3.3 Flujo de energía

Las trayectorias de las partículas de agua provocadas por el oleaje son cerradas, por que la propagación de una ola no produce transmisión de masa a través del fluido, únicamente se transmite energía. La cantidad de energía transmitida se llama *flujo de energía* (F), que según la teoría lineal, es la proporción del trabajo realizado por el fluido de un lado de una sección vertical a otro.

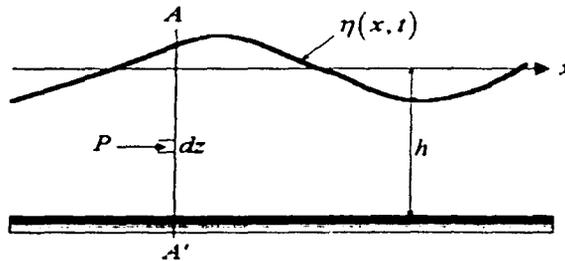


Figura 3.6 Trabajo sobre una sección vertical

En la Figura 3.6, el trabajo realizado por la presión dinámica (p_D) sobre la pared vertical A-A' por ancho unitario en la dirección de propagación del oleaje es

$$F = \int_{-h}^{\eta} p_D \cdot u \, dz \quad (3.147)$$

El flujo de energía medio se obtiene al promediar la ecuación anterior en un período de onda (T):

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^{\eta} p_D \cdot u \, dz \, dt \quad (3.148)$$

Sustituyendo u y p_D por los de las ecuaciones (3.122) y (3.133) respectivamente:

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} \left[\rho g \eta \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \right] \left[\frac{gHk}{2\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \right] dz dt \quad (3.149)$$

Utilizando la expresión de la superficie libre (3.117):

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} \left[\rho g \eta \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \right] \left[\sigma \eta \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \right] dz dt \quad (3.150)$$

Agrupando

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{\eta} \rho g \sigma \eta^2 \frac{\cosh^2 k(h+z)}{\cosh kh \sinh kh} dz dt \quad (3.151)$$

Al realizar la integración se tiene

$$\bar{F} = \frac{\rho g \sigma}{4k} \left(\frac{H}{2} \right)^2 \frac{(2kh + \sinh 2kh)}{\sinh 2kh} \quad (3.152)$$

La ecuación (3.152) puede agruparse de la siguiente forma

$$\bar{F} = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2 \right) \left(\frac{\sigma}{k} \right) \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right] \quad (3.153)$$

Donde pueden identificarse en el primer paréntesis la energía total media, y en el segundo la celeridad. Llamando n a la expresión dentro del corchete, el flujo de energía puede expresarse como sigue

$$\bar{F} = E C n \quad (3.154)$$

En la ecuación (3.154) Cn representa la velocidad a la que se transmite la energía, también llamada *celeridad de grupo* (C_g):

$$C_g = nC \quad (3.155)$$

donde

$$n = \frac{C_g}{C} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (3.156)$$

Otra forma de explicar la celeridad de grupo consiste en analizar un grupo de ondas propagándose. Considerando dos trenes de oleaje (1 y 2) propagándose en la misma dirección, con igual altura de ola pero con período y longitud de onda ligeramente

diferente, ambos trenes pueden superponerse mediante la suma de sus ecuaciones de superficie libre:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{H}{2} \cos(k_1 x - \sigma_1 t) + \frac{H}{2} \cos(k_2 x - \sigma_2 t) \quad (3.157)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma - \frac{\Delta\sigma}{2}; & k_1 &= k - \frac{\Delta k}{2}; \\ \sigma_2 &= \sigma + \frac{\Delta\sigma}{2}; & k_2 &= k + \frac{\Delta k}{2} \end{aligned} \quad (3.158)$$

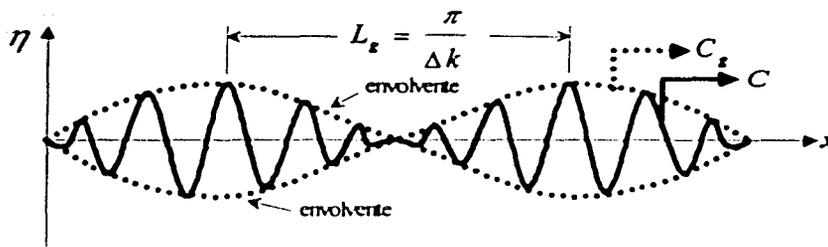


Figura 3.7 Grupo de olas

Mediante identidades trigonométricas y las expresiones (3.158), la ecuación (3.157) puede reducirse a

$$\eta = H \cos(kx - \sigma t) \cos\left[\frac{1}{2}\left(\Delta kx - \frac{\Delta\sigma}{\Delta k} t\right)\right] \quad (3.159)$$

La superficie libre de la ecuación (3.159) representa un oleaje propagándose con velocidad $C = \sigma/k$, cuya envolvente (como la mostrada en la Figura 3.7) se propaga a una velocidad $C_g = \Delta\sigma/\Delta k$, conocida como celeridad de grupo, y que tiene un valor diferente al de C . Como la energía depende únicamente de la altura de ola, en los puntos donde esta fuera igual a cero (nodos) no podría transmitirse, por lo que viaja con la velocidad de la celeridad de grupo, que obtenida a partir de la ecuación (3.159) es

$$C_g = \frac{\Delta\sigma}{\Delta k} \quad (3.160)$$

Si Δk tiende a cero, se tiene una celeridad de grupo para una longitud L_g infinita, donde

$$C_g = \frac{d\sigma}{dk} \quad (3.161)$$

tomando en cuenta la ecuación de la dispersión (3.72) y la expresión siguiente

$$2\sigma \frac{d\sigma}{dk} = g \tanh kh + gkh \operatorname{sech}^2 kh \quad (3.162)$$

Al sustituir la ecuación de dispersión en la expresión (3.161) y resolverla utilizando (3.162) se obtiene

$$C_g = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{(g \tanh kh + gkh \operatorname{sech}^2 kh) \sigma}{2gk \tanh kh} \quad (3.163)$$

Lo anterior se puede reducir a

$$C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh} \right) \quad (3.164)$$

Que es lo mismo a lo que se llegó en la ecuación (3.153), donde $C_g = nC$, y al igual que en la expresión (3.156):

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh} \right) \quad (3.165)$$

3.5.4 Resumen de expresiones y aproximaciones para calcular propiedades ingenieriles de las ondas

La mayoría de las expresiones desarrolladas en el apartado 3.5 dependen de la función tangente hiperbólica con argumento $kh = 2\pi h/L$. Para analizar gráficamente el comportamiento de esta función se utiliza la Figura 3.8:

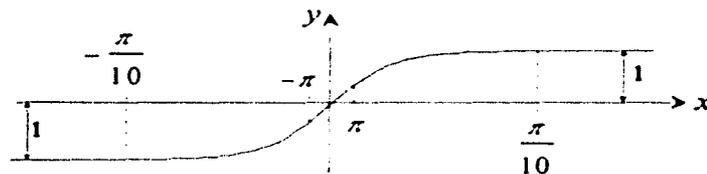


Figura 3.8 Función tangente hiperbólica

Se observa que para valores de x (en este caso kh), superiores a π , la función alcanza un cercano a 1, $\tanh kh \approx 1$; por otro lado, para valores menores $\pi/10$ la pendiente es aproximadamente igual a uno, es decir, que $\tanh kh \approx kh$.

De lo anterior se puede concluir que las aguas profundas dejan de serlo cuando $kh = \pi$, pasando a ser de transición ya que el fondo marino, más cercano a la superficie, comienza a

influir en el comportamiento del oleaje, hasta el límite de aguas someras ($kh = \pi/10$) a partir del cual la influencia del fondo es mucho más importante.

En la tabla que se presenta a continuación se resumen las expresiones para calcular las propiedades ingenieriles en cada una de las zonas descritas anteriormente (aguas profundas, de transición y someras), siendo la solución exacta la correspondiente a las aguas de transición, y las otras dos son aproximaciones muy exactas (error máximo de 1%) utilizando las características encontradas al analizar la función tangente hiperbólica.

		Aguas someras $kh > \pi$	Aguas de transición $\pi/10 < kh < \pi$	Aguas profundas $kh < \pi/10$
Longitud de onda		$L = T\sqrt{gh}$	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kh)$	$L = \frac{gT^2}{2\pi}$
Celeridad		$C = \frac{L}{T} = \sqrt{gh}$	$C = \frac{L}{T} = \frac{\sigma}{k} = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kh)$	$C = \frac{gT}{2\pi}$
Celeridad de grupo		$C_g = C = \sqrt{gh}$	$C_g = nC = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$	$C_g = \frac{C}{2}$
Velocidad de las partículas	Horizontal	$u = a \sqrt{\frac{g}{h}} \cos(kx - \sigma)$	$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agk \cosh k(h+z)}{\sigma \cosh kh} \cos(kx - \sigma)$	$u = a\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma)$
	Vertical	$w = a\sigma \left(1 + \frac{z}{h} \right) \sin(kx - \sigma)$	$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{agk \sinh k(h+z)}{\sigma \cosh kh} \sin(kx - \sigma)$	$w = a\sigma e^{kz} \sin(kx - \sigma)$
Aceleración de las partículas	Horizontal	$a_x = a\sigma \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(kx - \sigma)$	$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = agk \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma)$	$a_x = a\sigma^2 e^{kz} \sin(kx - \sigma)$
	Vertical	$a_z = -a\sigma^2 \left(1 + \frac{z}{h} \right) \cos(kx - \sigma)$	$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -agk \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma)$	$a_z = -a\sigma^2 e^{kz} \cos(kx - \sigma)$
Desplazamiento de las partículas	Horizontal	$\zeta = -a\sigma \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(kx - \sigma)$	$\zeta = \int u dt = -a \frac{gk \cosh k(h+z)}{\sigma^2 \cosh kh} \sin(kx - \sigma)$	$\zeta = -ae^{kz} \sin(kx - \sigma)$
	Vertical	$\xi = a \left(1 + \frac{z}{h} \right) \cos(kx - \sigma)$	$\xi = \int w dt = a \frac{gk \sinh k(h+z)}{\sigma^2 \cosh kh} \cos(kx - \sigma)$	$\xi = ae^{kz} \cos(kx - \sigma)$
Presión total (hidrostática + dinámica)		$p = -\rho g z + \rho g \eta$	$p = -\rho g z + \rho g a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma)$	$p = -\rho g z + \rho g \eta e^{kz}$
Flujo de energía		$F = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2 \right) \sqrt{gh}$	$F = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2 \right) \frac{\sigma}{k} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right]$	$F = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2 \right) \frac{1}{2} C$

Tabla 3-2 Resumen de las características del oleaje

3.6 Flujo potencial en coordenadas cilíndricas

Los elementos que se analizarán serán pilas cilíndricas, por lo que es mucho más conveniente utilizar las coordenadas cilíndricas, dada su simetría circular. Para esto es necesario transformar la ecuación de Laplace y el potencial de velocidades del sistema (x,y,z) al sistema (r,θ,z) , mediante el método de separación de variables.

3.6.1 Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

Como se observa en la figura, la dirección z es la misma en ambos sistemas, por lo que no se incluye en el desarrollo siguiente.

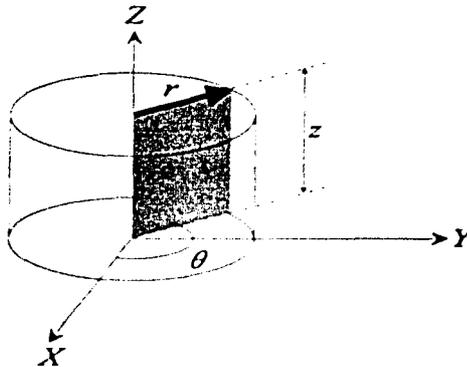


Figura 3.9 Ejes coordenados cilíndricos y cartesianos

Partiendo de la ecuación de Laplace en el plano:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.166)$$

como ϕ será una función de (r, θ) , entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.167)$$

y

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (3.168)$$

desarrollando

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.169)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.170)$$

Además, como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y $\theta = \arctan(y/x)$, se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{r^3} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{2xy}{r^4} \end{aligned} \quad (3.171)$$

Sustituyendo (3.171) en (3.170) se tiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{y^2}{r^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - 2 \frac{xy}{r^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{y^2}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} + 2 \frac{xy}{r^4} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3.172)$$

Con un desarrollo similar al de las ecuaciones (3.167) a (3.172), para el término $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ se llega a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{x^2}{r^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + 2 \frac{xy}{r^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} - 2 \frac{xy}{r^4} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3.173)$$

Sustituyendo (3.172) y (3.173) en la ecuación de Laplace (3.166)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{y^2}{r^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - 2 \frac{xy}{r^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{y^2}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} + 2 \frac{xy}{r^4} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ &+ \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{x^2}{r^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + 2 \frac{xy}{r^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} - 2 \frac{xy}{r^4} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (3.174)$$

Operando se obtiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{x^2 + y^2}{r^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{x^2 + y^2}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (3.175)$$

Utilizando la expresión $r^2 = x^2 + y^2$ se llega finalmente a la ecuación de Laplace en el plano, expresada en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (3.176)$$

En tres dimensiones queda

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.177)$$

3.6.2 Potencial de velocidades para fondo impermeable en coordenadas cilíndricas

Similar a lo que se realizó en el punto 3.3, y con las mismas suposiciones de la teoría lineal explicadas en el apartado 3.1, tales como flujo irrotacional, fluido incompresible, etc., se pretende encontrar un potencial de velocidades tal que cumpla con la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas (3.177). Dicho potencial es función de (r, θ, z, t) , pero como la variable tiempo no se incluye en la ecuación de Laplace, se puede separar de la siguiente manera

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \Phi^*(r, \theta, z) e^{i\sigma t} \quad (3.178)$$

donde el potencial Φ^* también puede dividirse:

$$\Phi^*(r, \theta, z) = R(r) \cdot \Omega(\theta) \cdot f(z) \quad (3.179)$$

Sustituyendo este último potencial en la ecuación de Laplace (3.177), y dividiendo por $R(r)\Omega(\theta)f(z)$ se llega a

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{R(r)r} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Omega(\theta)} \frac{d^2 \Omega(\theta)}{d\theta^2} + f(z) \frac{d^2 f(z)}{dz^2} = 0 \quad (3.180)$$

Lo anterior se puede reagrupar como sigue

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{R(r)r} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Omega(\theta)} \frac{d^2 \Omega(\theta)}{d\theta^2} = -f(z) \frac{d^2 f(z)}{dz^2} = -k^2 \quad (3.181)$$

donde el lado izquierdo de la igualdad depende sólo de r y θ , mientras que el derecho únicamente de z ; esto implica que k debe ser constante, y por lo mismo cada término puede separarse así

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{\Omega(\theta)} \frac{d^2 \Omega(\theta)}{d\theta^2} + r^2 k^2 = 0 \quad (3.182)$$

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + k^2 f(z) = 0 \quad (3.183)$$

A partir de la ecuación (3.183), con un procedimiento igual al del apartado 3.3, se llega a la ecuación de la dispersión:

$$\frac{\sigma^2 h}{g} = kh \tanh kh \quad (3.184)$$

que tiene una raíz real e infinitas imaginarias puras.

Una forma de expresar la ecuación (3.182) es

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{dR(r)}{dr} + r^2 k^2 = -\frac{1}{\Omega(\theta)} \frac{d^2 \Omega(\theta)}{d\theta^2} = \beta^2 \quad (3.185)$$

donde β debe ser una constante, y esto quiere decir que los términos en R y Ω pueden separarse como sigue

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + (r^2 k^2 - \beta^2) R(r) = 0 \quad (3.186)$$

$$\frac{d^2 \Omega(\theta)}{d\theta^2} + \beta^2 \Omega(\theta) = 0 \quad (3.187)$$

Después de la separación, la ecuación (3.187) tiene dos soluciones:

$$\begin{cases} \text{para } \beta = 0 & \Omega(\theta) = A + B\theta \\ \text{para } \beta \neq 0 & \Omega(\theta) = C \cos(\beta\theta) + D \operatorname{sen}(\beta\theta) \end{cases} \quad (3.188)$$

La característica de simetría de estos problemas permite eliminar la primera solución.

Por otro lado, la solución de la primera ecuación, (3.186), originada de la separación de la expresión (3.185), tiene como soluciones las funciones de Bessel de primero orden $J_\nu(z)$, las funciones de Bessel de segundo orden o funciones de Weber $Y_\nu(z)$, y las funciones de Bessel de tercer orden o funciones de Hankel, $H_\nu^{(1)}(z)$ y $H_\nu^{(2)}(z)$.

3.7 Anexos

3.7.1 Anexo 1. Problema regular de Sturm-Liouville

El problema regular de Sturm-Liouville se define por una ecuación diferencial, lineal y homogénea, con condiciones de contorno lineales y homogéneas. Su principal utilidad es la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante separación de variables.

Un problema de Sturm-Liouville es un problema de contorno de segundo orden definido por:

$$\begin{aligned} [p(x)y']' + q(x)y + \lambda r(x)y &= 0 & a < x < b \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) &= 0 \\ \tau y(b) + \delta y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

donde:

a, b son finitos.

p, p', q, r son continuas en $[a, b]$

$p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en $[a, b]$

$\alpha, \beta, \tau, \delta$ no son simultáneamente cero.

$a, b, p(x), r(x), \alpha, \beta, \tau, \delta$ son reales.

3.7.2 Anexo 2. Teoremas de la ecuación de Helmholtz

Es análogo al problema regular de autovalores de Sturm-Liouville, todos los teoremas que aquí se enuncian se relacionan a uno similar en el problema de una dimensión. Sólo se enunciarán los teoremas, porque su demostración, en algunos casos, es muy complicada:

- 1.- Todos los autovalores son números reales.
- 2.- Existe un número infinito de autovalores. Existe un autovalor mínimo, pero no uno máximo.
- 3.- A cada autovalor le puede corresponder más de una autofunción.
- 4.- Las autofunciones $\phi_k(x, y)$ forman un conjunto completo en el dominio en el que han sido obtenidas. Cualquier función $f(x, y)$ "piecewise smooth" puede representarse por medio de una serie generalizada de Fourier de las siguientes autofunciones:

$$f(x, y) \sim \sum_k a_k \phi_k(x, y)$$

donde el término de la sumatoria expresa una combinación lineal de todas las autofunciones. La serie así obtenida converge en la medida en que los coeficientes a_k se eligen correctamente.

5.- Las autofunciones pertenecientes a diferentes autovalores k_1 y k_2 son ortogonales (de peso unitario) en el dominio, es decir:

$$\iint_{\text{dominio}} \phi_{k_1} \phi_{k_2} dx dy = 0; \quad k_1 \neq k_2$$

6.- Un autovalor k puede relacionarse con la autofunción por medio del coeficiente de Rayleigh:

$$k = \frac{-\oint \phi \nabla \phi \cdot \bar{n} ds + \iint_{\text{dominio}} (\nabla \phi)^2 dx dy}{\iint_{\text{dominio}} \phi^2 dx dy}$$

donde \bar{n} es la normal exterior y $\oint ds$ es una integral de línea cerrada sobre todo el contorno del dominio bidimensional estudiado.

3.7.3 Anexo 3. Autovalores y autofunciones del problema en la variable z con $k^2 > 0$ y $k^2 < 0$

La solución para llegar a la ecuación de la dispersión (3.72) puede obtenerse también gráficamente.

Cuando $k^2 > 0$ la ecuación tiene dos raíces reales. En la Figura 3.10 donde el eje de las abscisas representa el valor de kh , se graficaron $\sigma^2 h / gkh$ y $\tanh(kh)$, que son las dos partes de la ecuación de la dispersión. La solución está representada por el punto de intersección entre ambas gráficas. Como se puede observar, existen dos soluciones, es decir, dos raíces reales: $+k$ y $-k$, que son los dos autovalores que tienen una única autofunción $\cosh k(h+z)$, que es simétrica, por lo que basta considerar la raíz positiva, normalmente denotada como k_0 .

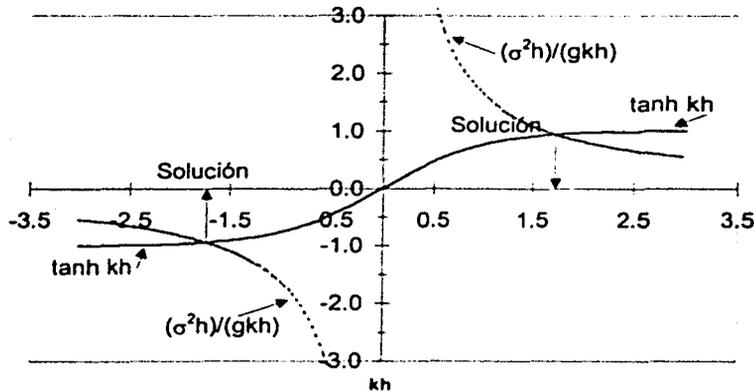


Figura 3.10 Obtención de las raíces reales gráficamente

La ecuación de la dispersión también tiene una serie de raíces (autovalores) imaginarias puras, correspondientes a $k^2 < 0$, donde $k = i\mu$. Estas soluciones pueden verse en la Figura 3.11, donde se han graficado $\sigma^2 h/gkh$ (hipérbola) y $\tan(kh)$, y como la función tangente tiene infinitas ramas, hay también un número infinito de soluciones (raíces) $\mu = \pm k_n$, cuya correspondiente autofunción es $\cosh[ik_n(h+z)] = \cos k_n(h+z)$, que al igual que el caso anterior es una función simétrica, por lo que sólo se utiliza la solución de un signo, que en este caso será la raíz negativa, pues con ello se representan los modos oscilantes en vertical que se amortiguan al propagarse. Estas raíces se encuentran en los siguientes intervalos:

$$\frac{\pi}{2} < k_1 h < \pi, \quad \frac{3}{2}\pi < k_2 h < 2\pi, \dots, \quad \dots, \quad \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi < k_n h < n\pi$$

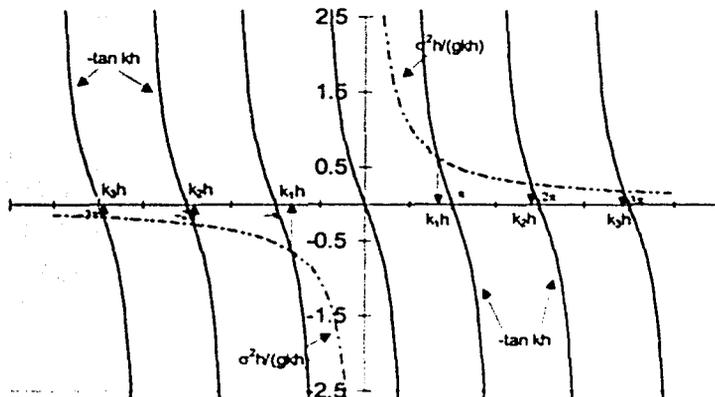


Figura 3.11 Obtención de las raíces imaginarias puras de la ecuación de la dispersión gráficamente

CAPÍTULO 4 INTERACCIÓN DEL OLEAJE CON UNA PILA IMPERMEABLE

4 INTERACCIÓN DEL OLAJE CON UNA PILA IMPERMEABLE

4.1 Introducción

En el cálculo de fuerzas producidas por oleaje en cuerpos cilíndricos pequeños ($D/L < 0.1$, siendo D el diámetro del objeto y L la longitud de onda del oleaje incidente) se obtienen resultados satisfactoriamente cercanos a la realidad si se considera que las olas actuantes no son modificadas por la presencia del objeto (Sarpkaya & Isaacson, 1981); sin embargo, en cuerpos de mayores dimensiones relativas ($D/L > 0.1$), fenómenos como la difracción y reflexión provocan un cambio en el oleaje que ya no es tan conveniente despreciar. Es por esto que en estructuras tales como plataformas tipo gravedad, tanques de almacenamiento, boyas, etc. es muy útil considerar la perturbación que éste sufre para conocer con mayor exactitud las fuerzas que provoca, así como las modificaciones en la superficie libre, y de esta manera lograr diseños más eficientes y seguros.

4.2 Oleaje incidente

Dadas las condiciones del problema, lo más conveniente es resolverlo mediante un sistema de coordenadas polares, utilizando la nomenclatura mostrada en la Figura 4.1.

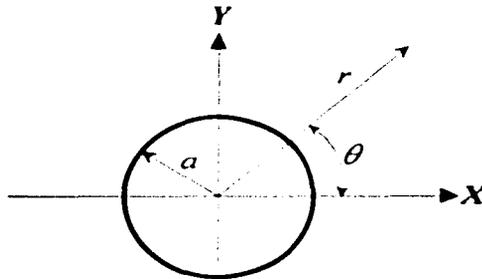


Figura 4.1 Nomenclatura en coordenadas polares

El oleaje incidente se representa como una onda sinusoidal que se propaga desde el infinito hacia el área de influencia de la pila, y según la teoría lineal (Capítulo 3), la superficie libre del oleaje incidente en coordenadas rectangulares se representa como

$$\eta = \Re \left[A e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (4.1)$$

y al separar la variable tiempo (t) queda:

$$\eta = \Re [Ae^{ikx}] = \Re [A(\cos kx + i \operatorname{sen} kx)] \quad (4.2)$$

Como se vio en el capítulo anterior, la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas puede resolverse mediante las funciones de Bessel, Weber o Hankel, y para desarrollos posteriores resulta conveniente expresar la ecuación (4.2) en función de alguna de ellas. Utilizando las siguientes igualdades matemáticas (Abramowish, 1972), que relacionan al seno y al coseno con las funciones de Bessel de primer orden

$$\begin{aligned} \cos z &= J_0(z) - 2J_2(z) + 2J_4(z) - 2J_6(z) + \dots \\ \operatorname{sen} z &= 2J_1(z) - 2J_3(z) + 2J_5(z) - 2J_7(z) + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \cos kx + i \operatorname{sen} kx &= J_0(z) + i2J_1(z) - 2J_2(z) - 2J_3(z) + 2J_4(z) \\ &\quad + 2J_5(z) - 2J_6(z) - 2J_7(z) + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

que puede expresarse como:

$$\cos kx + i \operatorname{sen} kx = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m J_m(kx) \quad (4.5)$$

donde δ_m es el símbolo de Jacobi, y está definido por

$$\begin{aligned} \delta_{m=0} &= 1 \\ \delta_{m \neq 0} &= 2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.5) en (4.2):

$$\eta = \Re \left[A \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m J_m(kx) \right] \quad (4.7)$$

Recordando que $\eta = \frac{1}{g} \Re \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]$, donde $\Phi(r, \theta, z, t) = \Re \left[\phi(r, \theta) I(z) e^{i(kx - \sigma t)} \right]$, el potencial incidente, a partir de la ecuación de superficie libre (4.7) es

$$\phi_i = f(z) A \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m J_m(k_0 r) \cos(m\theta) \quad (4.8)$$

donde $f(z)$ es la función de profundidad en el agua, que se trató en el apartado 3.3, y es

$$f(z) = \frac{ig \cosh k_0 (h+z)}{\sigma \cosh k_0 h} \quad (4.9)$$

Si se quiere que la sumatoria de la ecuación (4.8) vaya de $m = -\infty$ a $m = +\infty$, se puede utilizar la siguiente relación para evaluar la función de Bessel $J_m(z)$ cuando $m < 0$:

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z) \quad (4.10)$$

de esta forma, la ecuación (4.5) puede escribirse de la siguiente manera

$$\cos kx + i \operatorname{sen} kx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kx) \quad (4.11)$$

que permite expresar la ecuación (4.8) de la siguiente forma

$$\phi_l = f(z) A \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k_0 r) \cos(m\theta) \quad (4.12)$$

4.3 Oleaje perturbado

El oleaje total se representa como la suma de una onda incidente y una onda perturbada, donde esta última es la que resulta de la interacción del oleaje incidente con una estructura.

El oleaje perturbado tiene como característica que en el infinito no se refleja, es decir, que muy lejos de la estructura el oleaje total es igual al incidente, lo cual se llama condición de radiación al infinito, y se expresa:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left[\frac{\partial \phi_s}{\partial r} + ik \phi_s \right] = 0 \quad (4.13)$$

Además, el oleaje perturbado debe cumplir con la ecuación diferencial (3.186), y por lo tanto, como se comentó en el apartado 3.6.2, debe utilizarse una función de Bessel (J_v), Weber (Y_v), o Hankel (H_v); de las cuales se prefiere la de Hankel, debido a que, por características propias de dicha función, el potencial de velocidades deducido a partir de ella llevaría implícita la condición de radiación al infinito. Las funciones de Hankel de primer y segundo orden se obtienen a partir de la de Bessel y de la de Weber de la siguiente forma

$$\begin{aligned} H_v^{(1)}(z) &= J_v(z) + i Y_v(z) \\ H_v^{(2)}(z) &= J_v(z) - i Y_v(z) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para facilitar su manejo junto con el potencial incidente, el potencial perturbado se expresa de la siguiente manera

$$\phi_p = f(z) A \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m b_m H_m^{(1)}(k_0 r) \cos(m\theta) \quad (4.15)$$

Cabe aclarar que en la expresión anterior aún no se conoce el valor del parámetro b_m .

Nota: Aunque existen dos tipos de funciones de Hankel: $H_m^{(1)}(z)$ y $H_m^{(2)}(z)$, en los desarrollos posteriores únicamente se utilizará $H_m^{(1)}(z)$, por lo que a continuación se denotará simplemente como $H_m(z)$.

4.4 Potencial total

El potencial de velocidades total es el resultante de sumar los potenciales incidente y perturbado, es decir, ecuación (4.8) mas ecuación (4.15):

$$\phi = \phi_i + \phi_p = f(z) A \left[\sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m J_m(kr) \cos(m\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m b_m H_m(kr) \cos(m\theta) \right] \quad (4.16)$$

operando se llega a

$$\phi(r, \theta) = A \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m [J_m(kr) + b_m H_m(kr)] \cos(m\theta) \quad (4.17)$$

donde A es la amplitud de la onda incidente.

Como la pila es impermeable, no hay flujo de agua a través de ella, y por lo tanto, la condición de contorno en la frontera, en coordenadas polares es

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = a \quad (4.18)$$

que indica que la componente perpendicular a la superficie de la pila de la velocidad del flujo es cero, siendo a el radio de la pila. Ahora solo resta determinar el valor de b_m , lo cual se hace sustituyendo el potencial de velocidades en la condición de contorno anterior, es decir (4.17) en (4.18), obteniéndose que

$$J_m'(ka) + b_m H_m'(ka) = 0 \quad (4.19)$$

despejando b

$$b_m = -\frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} \quad (4.20)$$

Con lo que el potencial total finalmente puede expresarse como

$$\phi(r, \theta) = A \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m \left[J_m(kr) - \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} H_m(kr) \right] \cos(m\theta) \quad (4.21)$$

4.5 Efectos del oleaje sobre una pila impermeable

4.5.1 Presiones

Como se vio en el apartado 3.5.2, la presión del agua en un punto está dada por

$$p = -\rho g z + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (4.22)$$

donde el primer término es la presión hidrostática a la profundidad z debida únicamente a la posición del punto respecto al nivel de aguas tranquilas, y el segundo es la presión dinámica debida al oleaje. Como la presión hidrostática no es función más que de z , es decir que es constante para una determinada profundidad, no conlleva un gradiente de presiones en el plano horizontal ni en el tiempo que pudiera generar un desequilibrio de fuerzas; en otras palabras, no provoca fuerzas hidrodinámicas. Entonces, la presión de interés para el cálculo de fuerzas se obtiene a partir del potencial de la ecuación (4.21).

$$p(r, \theta, z, t) = \rho \frac{\partial \phi(r, \theta, z, t)}{\partial t} = \rho \frac{\partial}{\partial t} [\phi(r, \theta, z) e^{i\sigma t}] \quad (4.23)$$

derivando se obtiene

$$p(r, \theta, z, t) = i\sigma \rho \phi(r, \theta, z) e^{i\sigma t} = i\sigma \rho \phi(r, \theta) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{i\sigma t} \quad (4.24)$$

separando la variable tiempo

$$p(r, \theta, z) = i\sigma \rho \phi(r, \theta) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (4.25)$$

Las expresiones (4.24) y (4.25) son útiles para calcular la presión dinámica en puntos donde ya se conoce el potencial, si no es el caso, puede obtenerse una expresión independiente

para evaluar la presión en puntos alrededor de la pila ($r = a$), sustituyendo el potencial perturbado (4.21) en (4.23)

$$p(a, \theta, z) = \rho g A \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m \left[J_m(ka) - H_m(ka) \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} \right] \cos(m\theta) \quad (4.26)$$

desarrollando

$$p(a, \theta, z) = \rho g A \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^m \left[\frac{J_m(ka) H'_m(ka) - H_m(ka) J'_m(ka)}{H'_m(ka)} \right] \cos(m\theta) \quad (4.27)$$

Utilizando la siguiente igualdad matemática (Abromowitz 1972)

$$J_m(c\xi) H'_m(c\xi) - H_m(c\xi) J'_m(c\xi) = \frac{2ic}{\pi\xi} \quad (4.28)$$

donde c es una constante y ξ una variable, entonces la presión sobre la pared de la pila a una profundidad z y un ángulo θ es

$$p(a, \theta, z) = \rho g A \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\delta_m i^{m+1}}{\pi a H'_m(ka)} \cos(m\theta) \quad (4.29)$$

Si se quiere calcular la presión en un punto donde ya se conoce el potencial resulta más práctico utilizar la expresión (4.25), en caso contrario es recomendable obtenerla mediante la ecuación (4.29).

4.5.2 Fuerzas

La fuerza actuante sobre un punto en la pared de la pila (dF), es la presión por un diferencial de área (Figura 4.2). Como se había dicho, esta presión no es uniforme ni en z ni en θ , por lo que para un nivel z dado, la fuerza unitaria (dF_x/dz) actuante sobre una dirección (x en este caso) se obtiene integrando la componente en x de la presión con respecto a θ (ver Figura 4.3), esto es

$$\frac{dF_x}{dz} = -a \int_0^{2\pi} p(a, \theta, z) \cos \theta d\theta \quad (4.30)$$

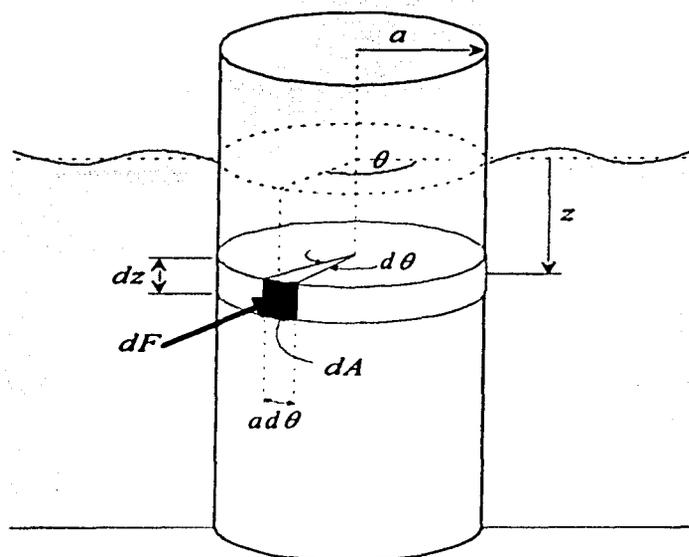


Figura 4.2 Fuerza sobre un diferencial de área

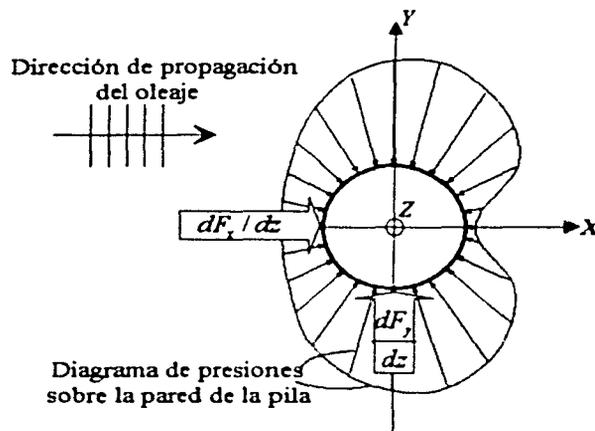


Figura 4.3 Diagrama de presiones y fuerzas unitarias a una profundidad z

sustituyendo (4.29) en (4.30)

$$\frac{dF_x}{dz} = -a\rho gA \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\delta_m i^{m+1}}{\pi a H'_m(ka)} \cos(m\theta) \right) \cos\theta d\theta \quad (4.31)$$

con la siguiente propiedad del coseno, válida para toda m diferente de 1

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \cos(m\theta) d\theta = 0 \quad (4.32)$$

la fuerza unitaria en la dirección X (dF_x / dz) a una profundidad z es

$$\frac{dF_x}{dz} = \frac{4A}{ka} \frac{\rho g a}{H_1(ka)} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (4.33)$$

Para obtener la fuerza total sobre la pila en la dirección X (F_x), se integra verticalmente la ecuación anterior sobre toda la profundidad:

$$F_x = \int_{-h}^0 \frac{dF_x}{dz} dz = \int_{-h}^0 \frac{4A}{ka} \frac{\rho g a}{H_1(ka)} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} dz = \frac{4A}{ka} \frac{\rho g a h}{H_1(ka)} \frac{\tanh kh}{kh} \quad (4.34)$$

simplificando

$$F_x = \frac{4A}{k^2} \frac{\rho g}{H_1(ka)} \tanh kh \quad (4.35)$$

Para calcular fuerzas en cuerpos cilíndricos pequeños ($D/L < 0.1$), una de las metodologías más utilizadas es la fórmula de Morison, que depende de la distribución de velocidades y aceleraciones incidente al cilindro, así como de dos coeficientes experimentales (C_d o coeficiente de arrastre y C_m o coeficiente de inercia). Dicha fórmula es:

$$F = \frac{1}{2} C_D \rho A u^2 + C_M \rho V a_x \quad (4.36)$$

donde:

F = Fuerza unitaria de arrastre, kg/m.

C_D = Coeficiente de arrastre.

C_M = Coeficiente de inercia.

ρ = γ/g

A = Área expuesta de la tubería por metro, m^2/m .

u = Componente horizontal de la velocidad orbital.

V = Volumen del objeto por metro, m^3/m .

a_x = componente horizontal de la aceleración orbital.

La fórmula de Morison puede utilizarse satisfactoriamente para calcular las fuerzas sobre una pila impermeable ancha ($D/L > 0.1$), obteniendo resultados similares a los calculados con la ecuación (4.35), si los coeficientes de arrastre (C_D) y de inercia (C_M) se obtienen de la siguiente forma

$$C_D = \frac{4}{\pi} \frac{J_1'(ka)}{(ka)^2 |H_1'(ka)|^2} \quad (4.37)$$

$$C_M = \frac{4}{\pi} \frac{Y_1'(ka)}{(ka)^2 |H_1'(ka)|^2} \quad (4.38)$$

Estas dos fórmulas se originan al hacer una analogía entre las expresiones (4.35) y (4.36).

Analizando datos experimentales y el comportamiento de $|H_1'(ka)|^{-1}$ (Figura 4.4) se observa que para cilindros pequeños dichos coeficientes tienden a los siguientes valores:

$$C_D \rightarrow \frac{\pi(ka)^2}{2}; \quad C_M \rightarrow 2 \quad (4.39)$$

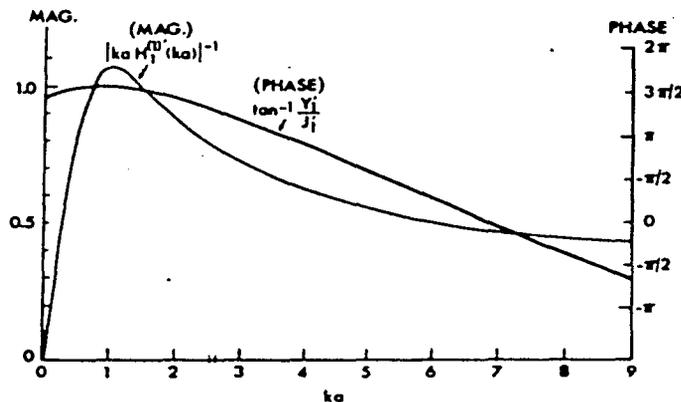


Figura 4.4 Dimensiones relativas (ka) Vs $|H_1'(ka)|^{-1}$

Lo anterior se observa claramente en la Figura 4.5, que muestra la relación entre las dimensiones relativas del cilindro (ka o D/L) y valores experimentales de C_M .

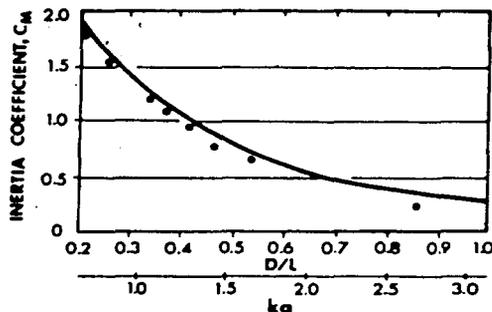


Figura 4.5 Dimensiones relativas del cilindro Vs coeficiente de inercia

4.5.3 Momentos Flexionantes

El momento flexionante en la dirección X a una profundidad cualquiera z_0 (Mx_{z_0}) se obtiene integrando la fuerza unitaria a cada profundidad por su brazo de palanca ($z - z_0$), desde $z = z_0$ hasta $z = 0$, esto es

$$Mx_{z_0} = \int_{z_0}^0 \frac{dF_z}{dz} (z - z_0) dz \quad (4.40)$$

sustituyendo (4.33) en (4.40)

$$Mx_{z_0} = \frac{4A}{ka} \frac{\rho g a}{H_1'(ka) \cosh kh} \int_{z_0}^0 \cosh k(z+h)(z-z_0) dz \quad (4.41)$$

realizando la integración

$$Mx_{z_0} = \frac{4A\rho g a}{kaH_1'(ka) \cosh kh} \left[\frac{k^2 \cosh k(z_0+h) - z_0 k \sinh kh - \cosh kh}{k^2} \right] \quad (4.42)$$

simplificando, y recordando que $\gamma = \rho \cdot g$:

$$Mx_{z_0} = \frac{4A\gamma}{k^3 H_1'(ka) \cosh kh} \left[k^2 \cosh k(z_0+h) - z_0 k \sinh kh - \cosh kh \right] \quad (4.43)$$

donde:

a es el radio de la pila,

- A la amplitud de la onda incidente,
 z_0 la profundidad a la cual se desea calcular el momento flexionante,
 k el número de onda,
 h el tirante de agua,
 γ el peso específico del agua, y
 H_1' el módulo de la derivada del número de Hankel (que es número complejo).

El momento de volteo ($M_{\text{volteo } x}$) se calcula valuando la ecuación (4.43) cuando $z_0 = -h$

$$M_{\text{volteo } x} = Mx_{z_0} \Big|_{z_0 = -h} = \frac{4A\gamma}{k^3 H_1'(ka) \cosh kh} [1 + kh \sinh kh - \cosh kh] \quad (4.44)$$

4.5.4 Resultados

Se realizó un programa en lenguaje Fortran para calcular los elementos mecánicos antes descritos, así mismo, se compararon distintos escenarios resultantes de la variación de algunos de los datos.

Se analizó una pila de radio $a = 20$ m, colocada en un tirante de agua $h = 80$ m, y un oleaje incidente de amplitud $A = 1$ m, variando la profundidad relativa kh , de acuerdo a la ecuación de la dispersión:

$$\sigma^2 = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = kg \tanh kh \quad (4.45)$$

Para modificar kh se mantuvo constante la profundidad ($h = 80$ m) y se cambiaron los valores del periodo T . La variación de kh respecto a T se muestra en la Figura 4.6.

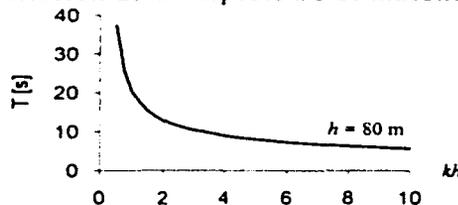


Figura 4.6 Variación de T respecto a kh cuando $h = 80$ m

Para cada kh se obtuvieron los diagramas de fuerzas y momentos sobre la pila en distintos tiempos de fase (t o t/T), como los presentados en la Figura 4.8. Comparando las fuerzas resultantes máximas y momentos de volteo máximos provocados por cada kh se llegó a los resultados mostrados en la Figura 4.7.

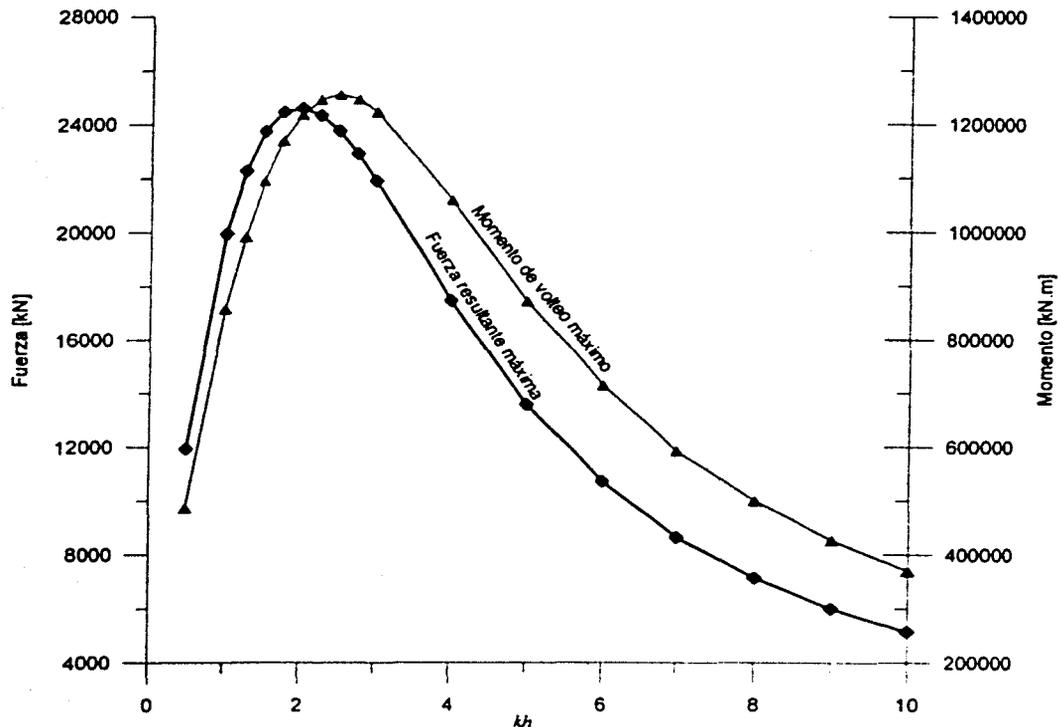


Figura 4.7 Profundidad relativa kh Vs fuerza y momento máximos

Analizando la gráfica anterior (Figura 4.7) se observa que es un kh específico el que provoca los efectos máximos, y aunque los valores son cercanos, no es exactamente el mismo el que corresponde al momento de volteo máximo ($kh = 2.5$) y a la fuerza resultante máxima ($kh = 2.0$). Esto se debe a la forma del diagrama de distribución de fuerzas (Figura 4.8), ya que aunque del primer caso resulta la fuerza resultante máxima, en el segundo el diagrama está más sesgado en la parte superior, donde las fuerzas tienen mayor brazo de palanca respecto al fondo, y por lo tanto provocan mayor momento de volteo.

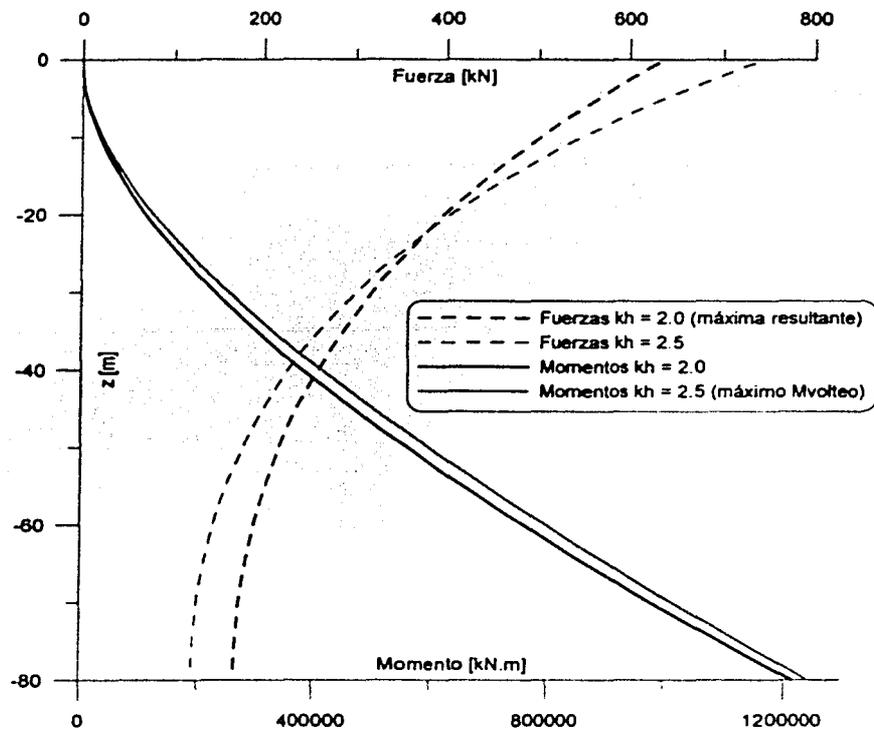


Figura 4.8 Comparación de diagramas de fuerzas y de momentos

La Figura 4.9 permite apreciar físicamente la posición de la ola respecto a la pila, así como sus dimensiones relativas (longitud de onda, diámetro) al momento en que se presenta el momento de volteo máximo.

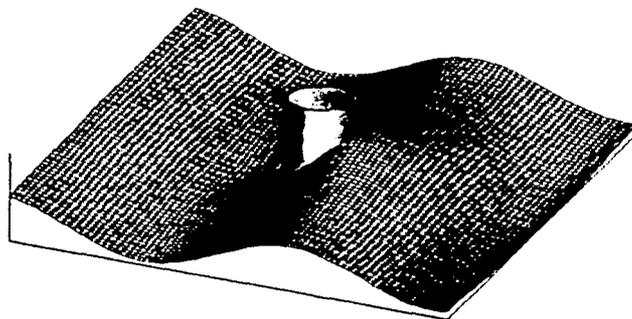


Figura 4.9 Superficie libre al instante en que se presenta el momento de volteo máximo ($kh = 2.5$, $t/T = 0.21$)

Para ejemplificar el comportamiento de la fuerza resultante (Figura 4.10) y del momento de volteo (Figura 4.11) durante el paso de una ola (respecto al tiempo), para distintos kh 's se presentan las siguientes gráficas:

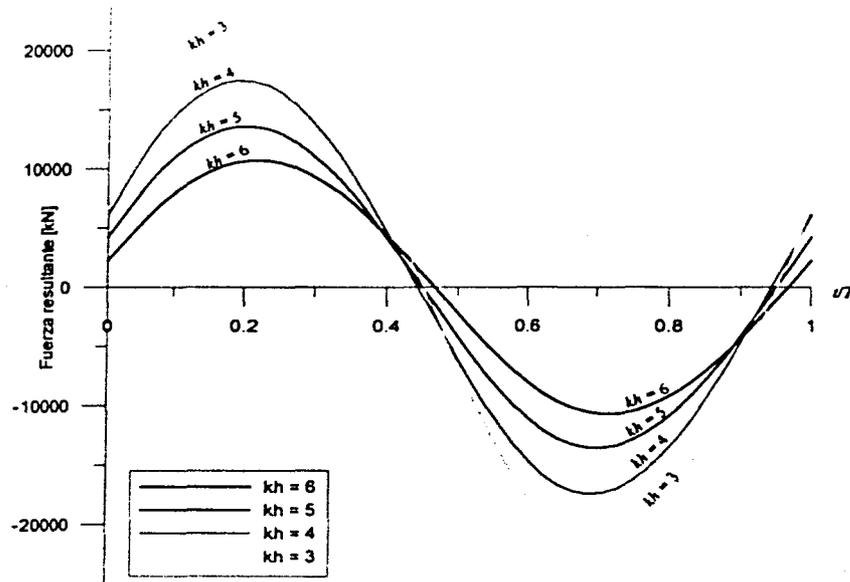


Figura 4.10 Fuerza resultante Vs tiempo variando kh

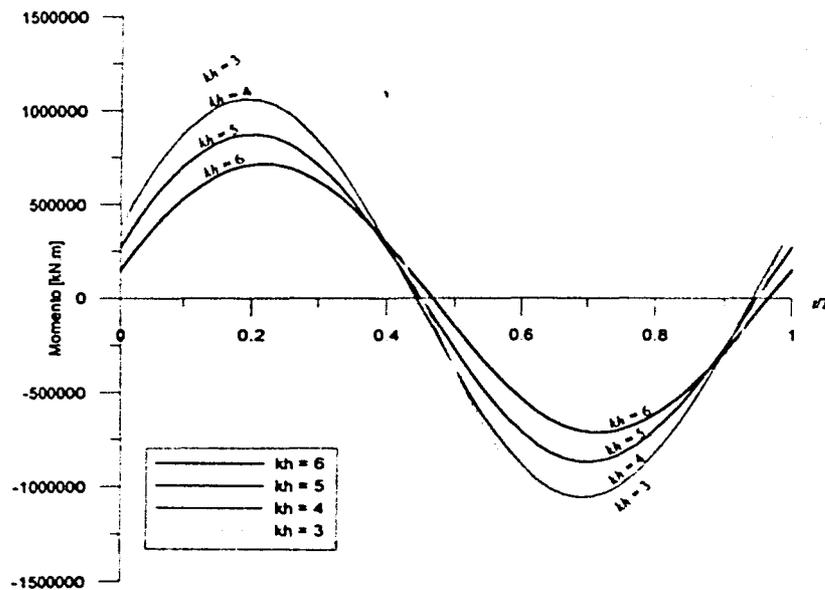


Figura 4.11 Momento de volteo Vs tiempo variando kh

La distribución de presiones dinámicas alrededor de la pila varía también, en forma y magnitud, para cada kh , como se muestra en la Figura 4.12, que contiene los diagramas de distribución de presiones dinámicas a una profundidad $z = -0.1h$, obtenidos en el instante en que se presenta el momento de volteo máximo.

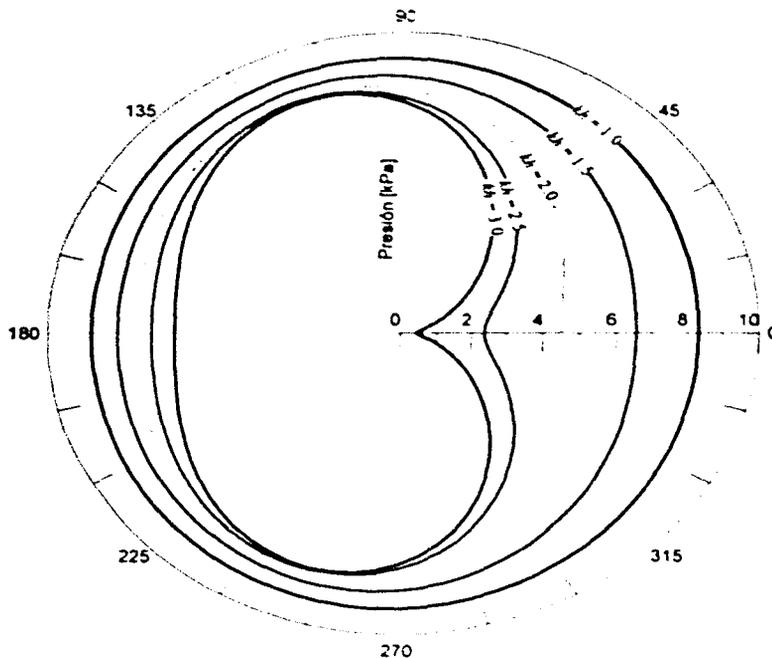


Figura 4.12 Diagrama de presiones en $z = -0.1h$ al instante en que se presenta el momento de volteo máximo

Aunque pareciera que a mayor kh las fuerzas y momentos serán mayores, por tener un diagrama de presiones más irregular, esto no es así (ver Figura 4.7), porque aunque la forma sea más irregular, la diferencia en la magnitud de las presiones alrededor de la pila sigue el patrón definido en la Figura 4.7.

CAPÍTULO 5 INTERACCIÓN DEL OLEAJE CON UN JUEGO DE PILAS IMPERMEABLES

5 INTERACCIÓN DEL OLEAJE CON UN JUEGO DE PILAS IMPERMEABLES

5.1 Introducción

En este capítulo se estudiarán arreglos de varias pilas impermeables, como los comúnmente utilizados en configuraciones estructurales de plataformas marinas, muelles, etc. La metodología utilizada para evaluar el potencial de velocidades se basa en la propuesta realizada por Linton et al. (1990). En estos casos, el oleaje perturbado por las pilas produce fuerzas en sentido transversal al de propagación, que en algunos casos pueden ser considerables, y cuantificarlas permite tener una representación más fiel del fenómeno.

Para resolver el problema se requiere definir el potencial de velocidades, y a partir de éste, como se vio en el capítulo 4, obtener la presión, fuerzas y momentos actuantes.

5.2 Condiciones del problema y nomenclatura

Para este caso, se asume que existen N cilindros verticales ($N \geq 1$) que se extienden desde el fondo ($z = -d$) hasta rebasar la superficie libre ($z > 0$). El oleaje incidente es monodimensional y llega con un ángulo de incidencia β a cada pila. Para obtener el potencial de velocidades en un punto P se utiliza la nomenclatura mostrada en la Figura 5.1:

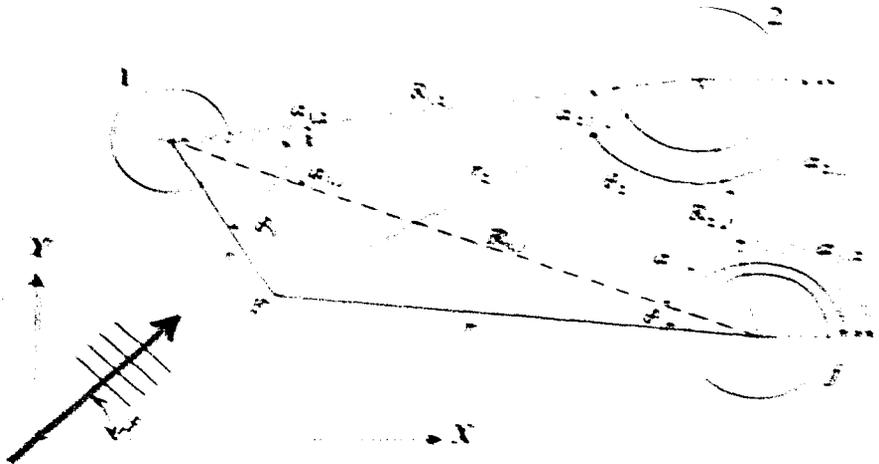


Figura 5.1 Nomenclatura del problema con múltiples pilas

- P es el punto donde se desea conocer el potencial
 j es el número de pila
 β es el ángulo de incidencia del oleaje
 R_{ij} es la distancia entre el centro de las pilas i y j
 α_{ij} es el ángulo respecto al eje X de la línea que va del centro de la pila i al centro de la pila j
 r_j es la distancia entre el centro de la pila j y el punto P
 θ_j es el ángulo respecto al eje X de la línea que va del centro de la pila j al punto P
 a_j es el radio de la pila j
 N número de pilas

Dado que las pilas se extienden a lo largo de todo el tirante de agua, es posible factorizar la función de profundidad $f(z)$ y, para los casos particulares cuando éstas se encuentren en aguas relativamente profundas o intermedias, hace que no sea necesario utilizar modos evanescentes. La factorización de $f(z)$ permite hacer una analogía con el problema acústico en dos dimensiones de la perturbación del sonido por un arreglo de cuerpos cilíndricos acústicamente aislantes, sobre el que se han hecho muchos estudios y se han dado diversas soluciones matemáticas, como la de Záviska (1913), redescubierta y aplicada al caso de oleaje por Spring & Monkmeyer (1974), o la de Twersky (1952).

5.3 Potencial de velocidades

De acuerdo con la Teoría Lineal, existe un potencial de velocidades $\Phi(x, y, z, t)$ que caracteriza el comportamiento del agua. Factorizando la función de profundidad, y aceptando que el movimiento del agua es periódico en el tiempo, con una frecuencia angular $\sigma = 2\pi/T$, el potencial de velocidades puede escribirse:

$$\Phi(x, y, z, t) = \Re \{ \phi(x, y) f(z) e^{-i\sigma t} \} \quad (5.1)$$

donde

$$f(z) = -\frac{igA \cosh k(h+z)}{\sigma \cosh kh} \quad (5.2)$$

siendo k (número de onda), la solución real positiva de la ecuación de la dispersión:

$$\sigma^2 = kg \tanh kh \quad (5.3)$$

La superficie libre está dada por

$$\eta(x, y) = \Re \{ A\phi(x, y) e^{i\sigma t} \} \quad (5.4)$$

donde A es la amplitud de la onda incidente.

Se utilizarán $N + 1$ sistemas coordenados: uno global o general (r, θ) ; y otro local por cada una de las pilas (r_j, θ_j) , con origen en (x_j, y_j) que es la localización del centro de la pila j respecto al sistema global.

5.3.1 Potencial incidente

Gracias a la posibilidad de superponer efectos que la teoría lineal ofrece, el potencial total será la suma de un potencial incidente más uno perturbado. El oleaje incidente se define de forma similar al caso de una pila aislada, con la única diferencia de que es necesario considerar adicionalmente el ángulo de incidencia (β) .

$$\phi_i = A e^{ik(x \cos \beta + y \operatorname{sen} \beta)} = A e^{ikr \cos(\theta - \beta)} \quad (5.5)$$

Como las pilas no se encuentran necesariamente en línea, en un instante dado la fase de la onda incidente es distinta en cada cilindro, por lo que se define un factor de fase del oleaje incidente para cada uno de ellos (I_j) :

$$I_j = e^{ik(x_j \cos \beta + y_j \operatorname{sen} \beta)} = e^{ikr_j \cos(\theta_j - \beta)} \quad (5.6)$$

Con esta última consideración el potencial incidente queda

$$\phi_i = A I_j e^{ikr_j \cos(\theta_j - \beta)} \quad (5.7)$$

Utilizando la relación (4.11) para expresarlo mediante la función de Bessel:

$$\phi_i = A I_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr_j) e^{im\left(\frac{\pi}{2} - \theta_j + \beta\right)} \quad (5.8)$$

5.3.2 Potencial perturbado

El oleaje incidente será perturbado por una pila, y este incidirá sobre otra, que también lo modificará, y así sucesivamente. Para describir todas estas posibles interacciones se define un potencial de velocidades que caracterice la radiación saliente de cada una de las pilas. De esta forma el potencial total será la suma del incidente más el potencial saliente de cada pila.

Una forma general de describir la radiación emitida por cada cilindro es; similar a lo hecho en el capítulo 4 para una pila aislada, ecuación (4.15):

$$\phi_p^j = A \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^j Z_m^j H_m(kr_j) e^{im\theta_j} \quad (5.9)$$

donde

$$Z_m^j = \frac{J_m'(ka_j)}{H_m'(ka_j)} \quad (5.10)$$

A es la amplitud del oleaje incidente y C_m^j es un parámetro por conocer.

5.3.3 Potencial total

El potencial total es la suma del potencial incidente más el potencial perturbado por cada pila:

$$\phi = \phi_i + \sum_{j=1}^N \phi_p^j \quad (5.11)$$

Pero como el potencial incidente está en diferente fase en cada pila, es necesario tomarlo también como una sumatoria, es decir, que utilizando las expresiones (5.8) y (5.9) en la ecuación (5.11), se tiene

$$\phi = A \sum_{j=1}^N \left[I_j \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr_j) e^{im\left(\frac{\pi}{2} - \theta_j + \beta\right)} \right] + A \sum_{j=1}^N \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^j Z_m^j H_m(kr_j) e^{im\theta_j} \right] \quad (5.12)$$

El potencial total de la ecuación (5.12) puede ser utilizado como se presenta, siempre y cuando se conozcan los coeficientes C_m^j . El desarrollo siguiente tiene como objetivo referir el potencial de velocidades a una pila k , es decir, expresarlo en función de las coordenadas locales (r_k, θ_k) , con el fin de llegar a una expresión que facilite la aplicación de las condiciones de frontera necesarias para solucionar los coeficientes en cuestión.

Utilizando el teorema de Graf para la suma de funciones de Bessel (Abramowitz, 1972, relación 9.1.79):

$$H_n(kr_\lambda) e^{in(\theta_\lambda - \alpha_\lambda)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{n-m}(kR_\lambda) J_m(kr_j) e^{im(\pi - \alpha_\lambda - \theta_j)} \quad (5.13)$$

para $j=1, 2, \dots, N, \lambda \neq j$

válido para $r_j > R_j$; condición que se cumple para todo λ en la periferia del cilindro j .

El potencial de velocidades en un punto con coordenadas referidas a la pila k puede ser expresado como

$$\begin{aligned} \phi^k(r_k, \theta_k) = & A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[I_k J_m(kr_k) e^{im\left(\frac{\pi}{2} - \theta_k - \beta\right)} + C_m^k Z_m^k H_m(kr_k) e^{im\theta_k} \right] \\ & + A \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^N \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[C_m^j Z_m^j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(H_{m+n}(kR_{jk}) J_n(kr_k) e^{in(\pi - \theta_k)} e^{i(m+n)\alpha_k} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dicho de otra forma, el potencial de la ecuación anterior está visto desde la pila k . En el primer término (primer sumatoria) se calcula el potencial incidente y la perturbación provocada por la pila k , y en el segundo término, la perturbación causada por las demás pilas j , utilizando la nomenclatura mostrada en la Figura 5.1. El segundo término de la ecuación puede simplificarse reemplazando n por $-n$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^N \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[C_m^j Z_m^j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(H_{m+n}(kR_{jk}) J_n(kr_k) e^{in(\pi - \theta_k)} e^{i(m+n)\alpha_k} \right) \right] \right\} \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ J_n(kr_k) e^{in\theta_k} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^N \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(C_m^j Z_m^j H_{m-n}(kR_{jk}) e^{i(m-n)\alpha_k} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Sustituyendo (5.15) en (5.14), el potencial de velocidades referido a la pila k puede también definirse como:

$$\begin{aligned} \phi^k(r_k, \theta_k) = & A \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[I_k J_m(kr_k) e^{im\left(\frac{\pi}{2} - \theta_k - \beta\right)} + C_m^k Z_m^k H_m(kr_k) e^{im\theta_k} \right] \\ & + A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ J_n(kr_k) e^{in\theta_k} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^N \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(C_m^j Z_m^j H_{m-n}(kR_{jk}) e^{i(m-n)\alpha_k} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde sólo resta por conocer C_m^j

5.3.4 Solución a los Coeficientes C_m^j

Es necesario definir la condición de frontera en la pared de las pilas impermeables, que consiste en considerar que la velocidad del agua a través de ésta es nula:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r_k} = 0 \quad (5.17)$$

Sustituyendo el potencial de la ecuación (5.16) en la condición de contorno (5.17) se obtiene

$$kI_k J'_m(ka_k) e^{in\left(\frac{\pi}{2}-\theta_k-\beta\right)} + kC_n^k Z_n^k H'_n(ka_k) e^{in\theta_k} + k J'_n(ka_k) e^{in\theta_k} \sum_{j=1}^N \left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ j \neq k}}^{\infty} \left(C_m^j Z_n^j H_{m-n}(kR_{jk}) e^{i(m-n)\alpha_{jk}} \right) \right] = 0 \quad (5.18)$$

Operando se llega a:

$$\sum_{j=1}^N \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(C_m^j Z_n^j H_{m-n}(kR_{jk}) e^{i(m-n)\alpha_{jk}} \right) \right] = -C_n^k - I_k e^{in\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} \quad (5.19)$$

Resolviendo la ecuación (5.19) se encuentran los coeficientes C_m^j , que habían sido introducidos en las ecuaciones (5.9) y (5.12) para definir el potencial perturbado.

5.4 Efectos del oleaje perturbado sobre las pilas

A diferencia del caso de una pila aislada (Capítulo 4), las ecuaciones que describen el potencial total en las inmediaciones de un conjunto de pilas, (5.12) y (5.16), así como la utilizada para resolver los coeficientes, (5.19), son muy complejas, y sería sumamente difícil obtener expresiones que proporcionaran directamente las presiones, fuerza unitaria, fuerza total, momento flexionante y momento de volteo en cada pila, como las que se encontraron en el capítulo anterior. El cálculo de los efectos físicos antes mencionados se realizará numéricamente a partir de la obtención del potencial de velocidades en puntos sobre la pared de cada pila, separados verticalmente Δz y angularmente $\Delta\theta$. A mayor número de puntos analizados, o menores Δz y $\Delta\theta$, serán más precisos los resultados obtenidos (Figura 5.2).

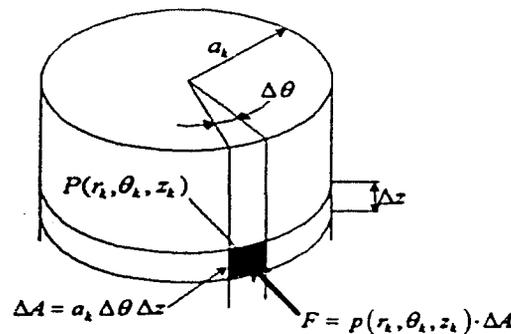


Figura 5.2 Nomenclatura de los elementos diferenciales

5.4.1 Presión

De acuerdo con la ecuación (4.24), la presión en un punto $P(r, \theta, z)$, en función del potencial de velocidades $\phi(r, \theta)$, obtenido previamente mediante la ecuación (5.12) o (5.14), es

$$p(r, \theta, z, t) = i\sigma\rho\phi(r, \theta) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{i\sigma t} \quad (5.20)$$

5.4.2 Fuerza

La fuerza sobre un diferencial de área ($\Delta A = a \Delta\theta \Delta z$) en la pared de la pila ($r = a$) es

$$\Delta F = -a \Delta\theta \Delta z p(a, \theta, z, t) \quad (5.21)$$

Para encontrar las fuerzas unitarias en X y Y se integran las componentes respectivas de la ecuación (5.21) de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$ manteniendo z constante, de manera que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F_x}{\Delta z} &= -a \sum_{\theta=0}^{2\pi} p(a, \theta, z, t) \cos \theta \Delta\theta \\ \frac{\Delta F_y}{\Delta z} &= -a \sum_{\theta=0}^{2\pi} p(a, \theta, z, t) \operatorname{sen} \theta \Delta\theta \end{aligned} \quad (5.22)$$

y la fuerza total sobre la pila en cada dirección se obtiene integrando las fuerzas unitarias desde $z = -h$ hasta $z = 0$.

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{z=-h}^0 \frac{\Delta F_x}{\Delta z} \\ F_y &= \sum_{z=-h}^0 \frac{\Delta F_y}{\Delta z} \end{aligned} \quad (5.23)$$

La resultante de dicha fuerza es

$$F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} \quad (5.24)$$

y su dirección es

$$\theta_F = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) \quad (5.25)$$

5.4.3 Momento flexionante

El momento flexionante a una altura z_0 se obtiene integrando cada fuerza unitaria por su brazo de palanca, de la siguiente forma

$$M_{x_{z_0}} = \sum_{z=z_0}^0 \frac{\Delta F_x}{\Delta z} (z - z_0) \Delta z$$

$$M_{y_{z_0}} = \sum_{z=z_0}^0 \frac{\Delta F_y}{\Delta z} (z - z_0) \Delta z$$
(5.26)

El momento de volteo se obtiene sustituyendo z_0 por $-h$:

$$M_{\text{volteo } x} = \sum_{z=-h}^0 \frac{\Delta F_x}{\Delta z} (z + h) \Delta z$$

$$M_{\text{volteo } y} = \sum_{z=-h}^0 \frac{\Delta F_y}{\Delta z} (z + h) \Delta z$$
(5.27)

5.5 Resultados

Al igual que en el capítulo 4, se realizó un programa en lenguaje Fortran, con el que se analizó mediante casos particulares, la variación de las fuerzas y momentos sobre cada una de las pilas de un juego, cambiando características geométricas y dimensiones relativas de la configuración. También se compararon los resultados obtenidos al tomar en cuenta el efecto de la perturbación del oleaje por todas las pilas, con los obtenidos al considerar cada una aislada.

Como las fuerzas y momentos sobre cada pila dependen linealmente de la amplitud del oleaje incidente (A), en los ejemplos mostrados se utilizó $A = 1.0$, de manera que de forma práctica, pueden obtenerse las magnitudes de fuerzas para amplitudes diferentes de uno.

Los casos analizados son arreglos de pilas del mismo diámetro con igual separación ortogonal (w) en ambas direcciones. La Figura 5.3 muestra la notación utilizada para la distancia ortogonal (w) y diagonal (s) entre los centros de las pilas.

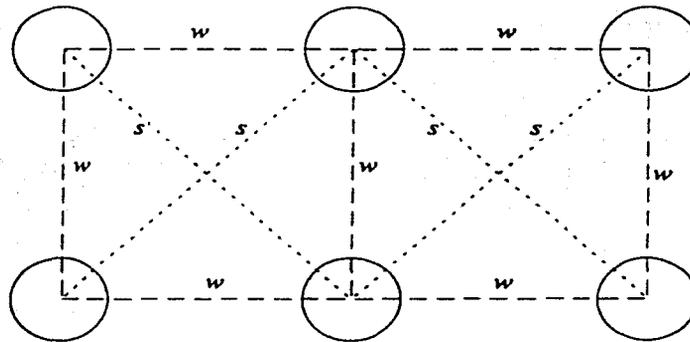


Figura 5.3 Nomenclatura para denotar la separación entre pilas

5.5.1 Ejemplo 1

Con el fin de observar el comportamiento de las fuerzas actuantes debidas a oleaje al cambiar ciertas características de una configuración, se analizó un conjunto compuesto de cuatro cilindros, con un tirante de agua $h = 80$ m, variando el ángulo de incidencia del oleaje (β), la separación entre pilas (w), y su radio (a).

En cada caso se obtuvieron las fuerzas resultantes máximas para valores de profundidad relativa dentro del rango: $0.50 < kh < 10.0$, variando el periodo de la onda incidente de acuerdo a la ecuación de la dispersión:

$$\sigma^2 = kg \tanh kh \quad (5.28)$$

$$kh \tanh kh = \frac{\sigma^2 h}{g} = \frac{4\pi^2 h}{T^2 g}$$

5.5.1.1 Primer caso

Incidencia: $\beta = 0^\circ$			
Pila	Coordenadas [m]		Radio [m]
j	x_j	y_j	a_j
1	-45	45	20
2	45	45	20
3	-45	-45	20
4	45	-45	20

Tabla 5-1 Datos caso 1

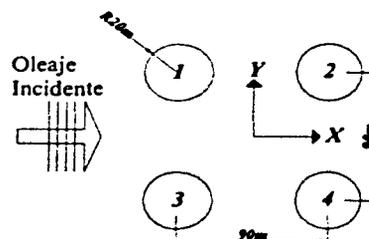


Figura 5.4 Esquema caso 1

En este caso, como el oleaje incidente tiene un ángulo $\beta = 0^\circ$, y la configuración de las pilas es simétrica a su dirección de propagación, las fuerzas y momentos sobre las pilas 1 y 2 son simétricos a los de las pilas 3 y 4, respectivamente, y en magnitud, las fuerza resultante y el momento de volteo son iguales (ver Figura 5.4), por lo que en la Figura 5.5 la fuerzas resultantes máximas de las pilas 1 y 3, así como 2 y 4 se muestran en una misma gráfica.

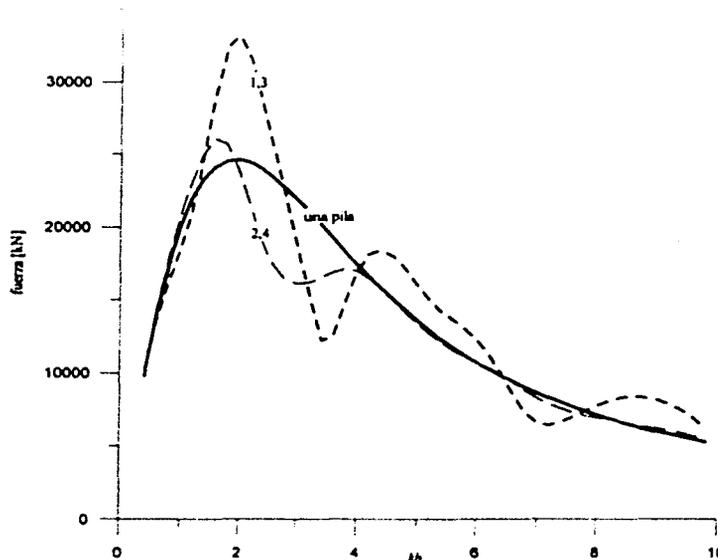


Figura 5.5 Profundidad relativa kh Vs fuerza resultante máxima, caso 1

En la Figura 5.5 se observa que la difracción provocada por las pilas que reciben directamente el oleaje (1 y 3), mitiga los efectos sobre las que están detrás de ellas (2 y 4). Además, comparando con las fuerzas obtenidas al considerar cada pila aislada, se observa que la magnificación de efectos debida a la presencia conjunta de todas las pilas es de consideración, sobre todo para valores de profundidad relativa entre $1 < kh < 3$.

Para observar la relación entre la magnitud de las componentes de la fuerza en sentido longitudinal y transversal al de propagación, así como su importancia respecto a la magnificación o mitigación de efectos, se presenta la Figura 5.6, que ilustra lo anterior en la pila 1 para dos situaciones: cuando se presenta la mayor magnificación ($kh \approx 2.0$), y cuando hay una mitigación importante ($kh \approx 3.5$).

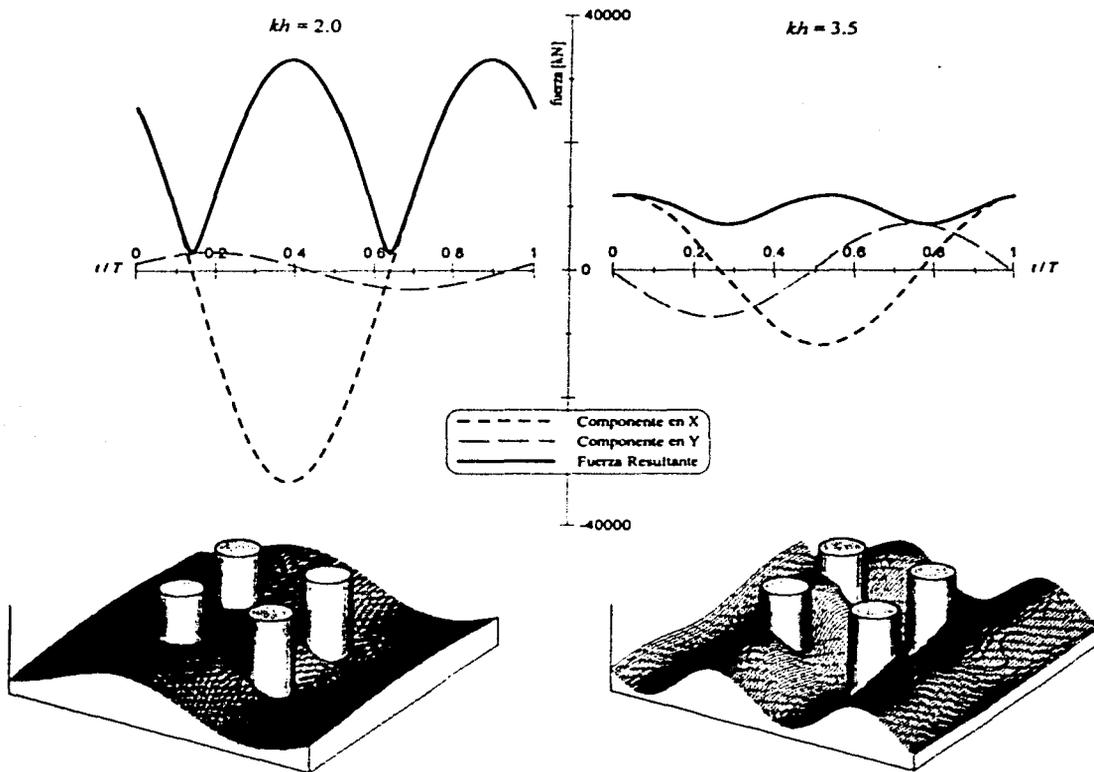


Figura 5.6 Comportamiento de las componentes de la fuerza durante el paso de la ola

5.5.1.2 Segundo caso

Este ejemplo difiere respecto al anterior únicamente en la incidencia del oleaje, que ahora es a 45° . Como los efectos en las pilas 1 y 4 son simétricos e iguales en magnitud, en la Figura 5.8 se presentan en una misma gráfica.

Incidencia: $\beta = 45^\circ$			
Pila	Coordenadas [m]		Radio [m]
j	x_j	y_j	a_j
1	-45	45	20
2	45	45	20
3	-45	-45	20
4	45	-45	20

Tabla 5-2 Datos caso 2

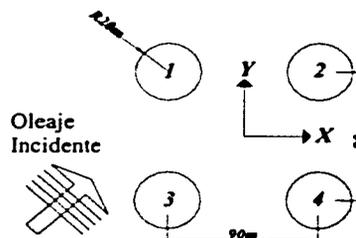


Figura 5.7 Esquema caso 2

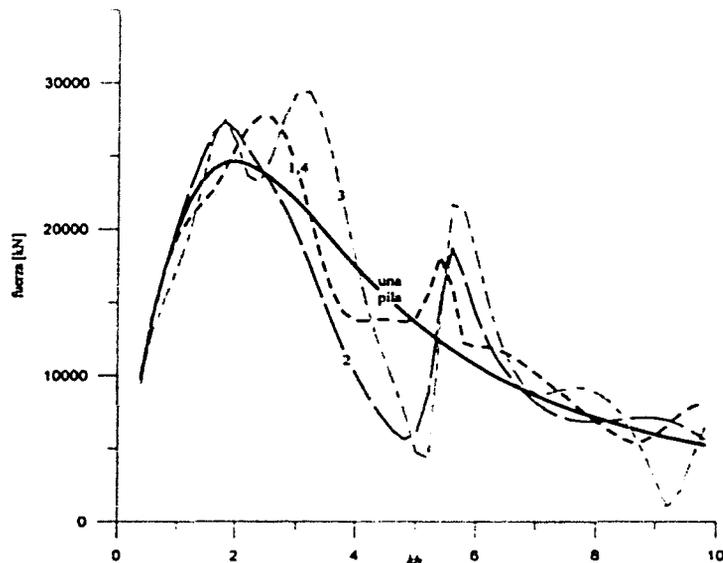


Figura 5.8 Profundidad relativa kh Vs fuerza resultante máxima, caso 2

En la Figura 5.8 se observa que la fuerza resultante máxima presenta variaciones respecto a kh más bruscas que en el caso anterior, y que la pila 3, que es la que recibe directamente el oleaje, presenta los efectos mayores. A pesar de las variaciones, se marcan dos picos, el primero para valores de kh que representan una longitud de onda incidente poco mayor a la distancia diagonal entre pilas (127 m); y el segundo cuando el valor de kh coincide con una longitud de onda incidente de magnitud similar a la separación ortogonal entre pilas (90 m). Al comparar con los resultados obtenidos para una pila aislada, se evidencia la importancia de considerar la perturbación completa.

5.5.1.3 Tercer caso

Este caso cambia, respecto al segundo, en que se ha aumentado casi en un 90% la distancia entre pilas, manteniendo el ángulo de incidencia en 45° .

Incidencia: $\beta = 45^\circ$			
Pila	Coordenadas [m]		Radio [m]
j	x_j	y_j	a_j
1	-85	85	20
2	85	85	20
3	-85	-85	20
4	85	-85	20

Tabla 5-3 Datos caso 3

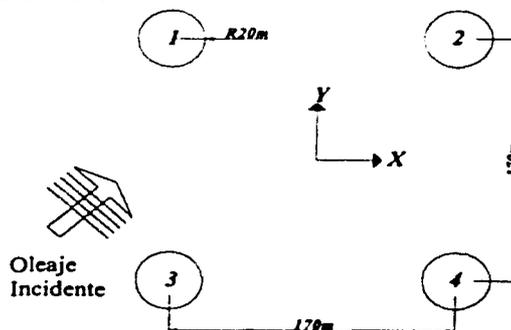


Figura 5.9 Esquema caso 3

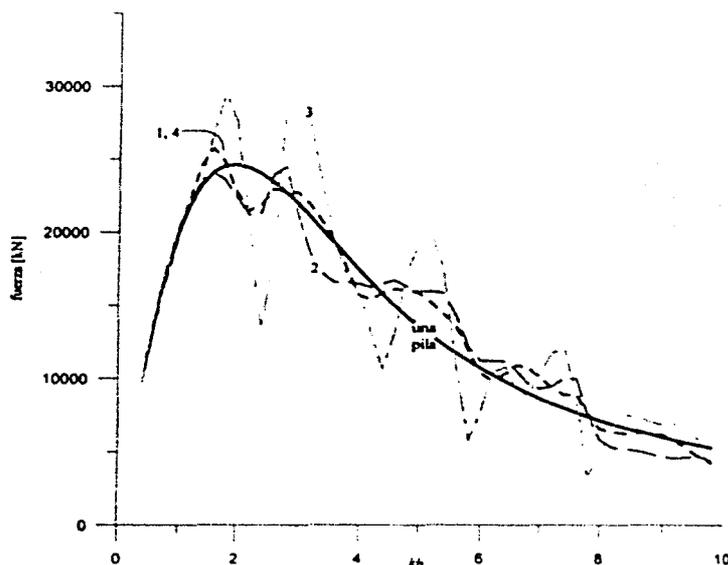


Figura 5.10 Profundidad relativa kh Vs fuerza resultante máxima, caso 3

Al igual que en el caso anterior, es la pila que recibe directamente el oleaje (3) la que está sujeta a los mayores efectos, y la variación de la fuerza resultante máxima respecto a kh es muy brusca, pero ahora se observan más picos, resaltando los dos mayores: uno de ellos, el primero, corresponde al kh en que la longitud de onda incidente es igual a la separación diagonal entre pilas (240 m), el otro es el segundo, que es el más grande, y que coincide con el kh en que se presenta una longitud de onda igual a la separación ortogonal entre pilas (170 m).

5.5.1.4 Cuarto caso

Aquí, la configuración tiene las mismas características geométricas que la anterior (radio y separación entre pilas); pero el ángulo de incidencia cambia a 0° .

Incidencia: $\beta = 0^\circ$			
Pila	Coordenadas [m]		Radio [m]
j	x_j	y_j	a_j
1	-85	85	20
2	85	85	20
3	-85	-85	20
4	85	-85	20

Tabla 5-4 Datos caso 4

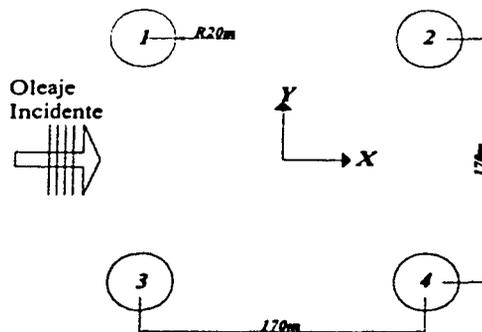


Figura 5.11 Esquema caso 4

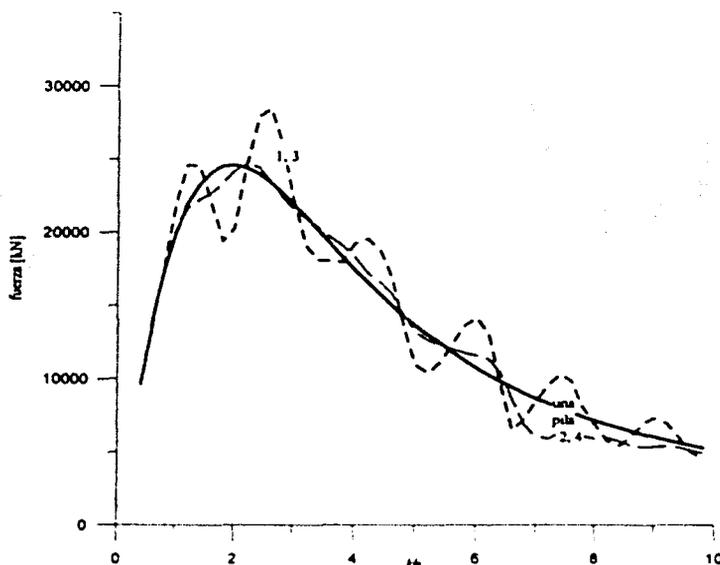


Figura 5.12 Profundidad relativa kh Vs fuerza resultante máxima, caso 4

La variación de la fuerza resultante máxima sobre las pilas respecto a kh es, al igual que en casos anteriores, muy pronunciada, pero en menor medida. Aunque se observan varios picos, sólo uno es marcadamente mayor, y corresponde a un valor de kh coincidente con una longitud de onda de magnitud cercana a la separación ortogonal entre las pilas (170 m).

5.5.1.5 Quinto caso

Este caso es similar al primero, en cuanto a la incidencia del oleaje y a la separación entre pilas; únicamente difiere en que el radio de estas se redujo a la mitad, con el fin de observar en qué medida disminuyen las fuerzas hidrodinámicas al reducirse las dimensiones de las pilas.

Incidencia: $\beta = 0^\circ$			
Pila	Coordenadas [m]		Radio [m]
J	x_j	y_j	a_j
1	-45	45	10
2	45	45	10
3	-45	-45	10
4	45	-45	10

Tabla 5-5 Datos caso 5

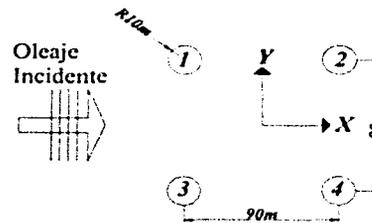


Figura 5.13 Esquema caso 5

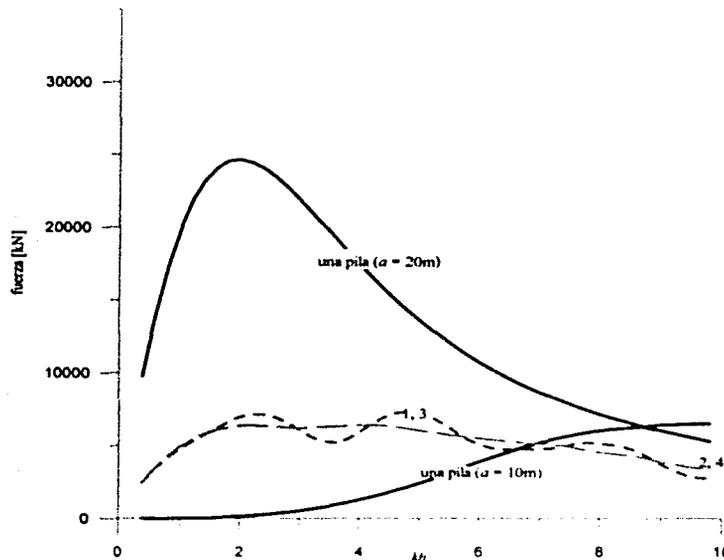


Figura 5.14 Profundidad relativa kh Vs fuerza resultante máxima, caso 5

De acuerdo a lo observado en la Figura 5.14, para el rango de kh en que las fuerzas resultantes máximas alcanzan los valores más altos en los casos anteriores, las fuerzas pico de esta última configuración son del orden de 3 a 4 veces menores que las encontradas para pilas del doble de diámetro. Se observa también que el segundo pico coincide con un kh correspondiente a una longitud de onda similar a la separación ortogonal entre pilas (90 m). Se muestra también la gráfica de una pila de 20 m para resaltar la diferencia resultante de reducir el diámetro a la mitad.

5.5.2 Ejemplo 2 (aplicación en pilas pequeñas)

Para determinar si es importante considerar la perturbación del oleaje en juegos de pilas donde las dimensiones relativas de éstas sean pequeñas, se analizó una configuración típica de plataforma octápoda tipo "jacket" (Figura 5.15 y Figura 5.16), que son las más utilizadas por PEMEX para la extracción de hidrocarburos en la Sonda de Campeche, y en general en tirantes de agua menores a 150 m. Se estudiaron profundidades propias de dicha zona, así como períodos de oleaje representativos en el Golfo de México.

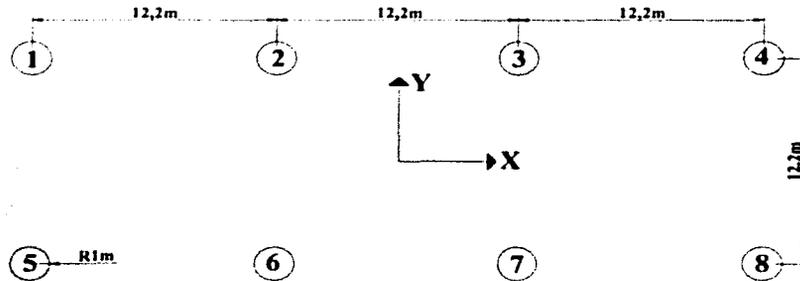


Figura 5.15 Planta típica de una plataforma octápoda tipo *jacket* en la Sonda de Campeche

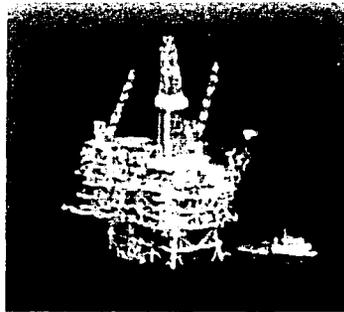
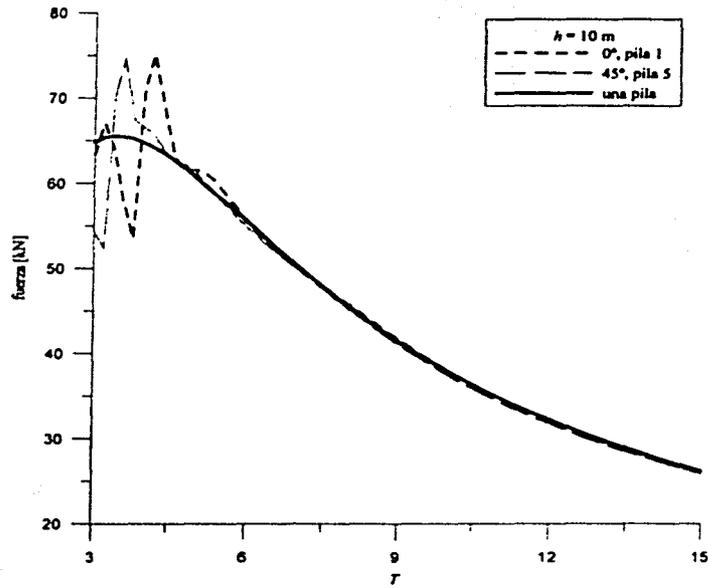
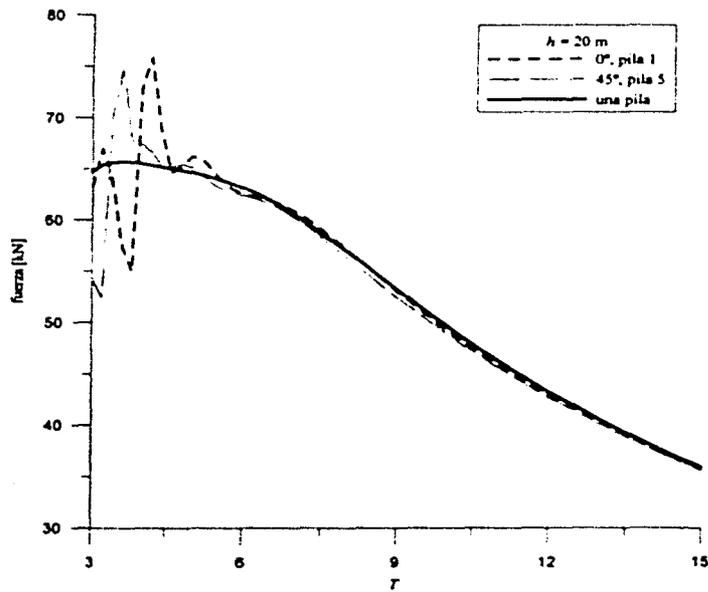


Figura 5.16 Plataforma tipo *jacket*

Se calculó la variación de la fuerza resultante máxima respecto al período de oleaje incidente, en tres diferentes tirantes de agua (10, 20 y 50 metros), y en cada uno de ellos, ángulos de incidencia de oleaje de 0° y 45° . Respecto a este último parámetro, cuando es igual a 0° , su simetría relativa a la posición de las pilas hace que las magnitud de las fuerzas se igual en las pilas 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8; mientras que cuando $\beta = 45^\circ$ no hay simetría alguna y las fuerzas son diferentes en cada pila. Se encontró que al igual que en el apartado 5.5.1, las pilas sujetas a las fuerzas mayores son las que reciben el oleaje, es decir, las pilas 1 y 5 cuando $\beta = 0^\circ$, y la pila 5 cuando $\beta = 45^\circ$, por lo que en los resultados presentados a continuación únicamente se muestran dichos casos (figuras 5.17 a 5.19).

Figura 5.17 Período T Vs fuerza resultante máxima, $h = 10$ mFigura 5.18 Período T Vs fuerza resultante máxima, $h = 20$ m

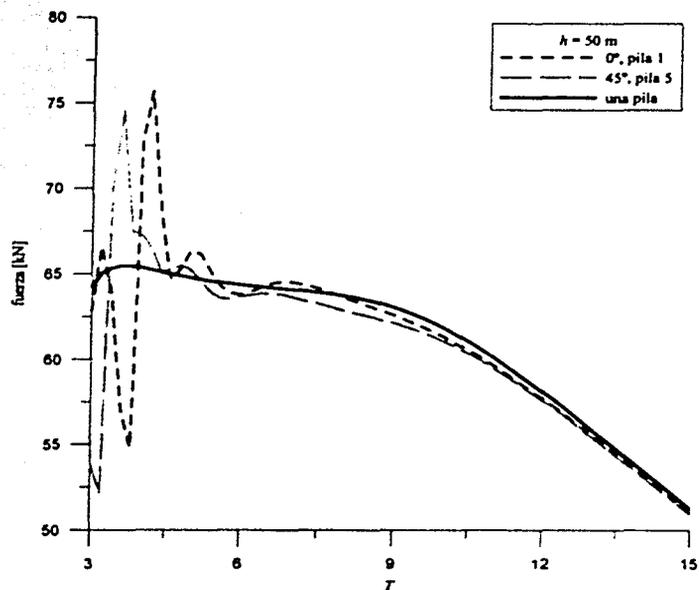


Figura 5.19 Período T Vs fuerza resultante máxima, h = 50 m

En las gráficas anteriores se observa que sólo para un rango de períodos (3 a 4 segundos), es importante el efecto de la perturbación del oleaje debida a todas las pilas del juego, ya que a partir de cierto valor de T las fuerzas resultan iguales si cada pila se considera aislada o como parte de un conjunto.

En la Figura 5.20 se hace una comparación entre fuerzas resultantes máximas sobre pilas a las profundidades analizadas, mostrando únicamente la situación (pila y ángulo de incidencia) donde se alcanza la mayor magnificación de efectos debida a la perturbación total del conjunto.

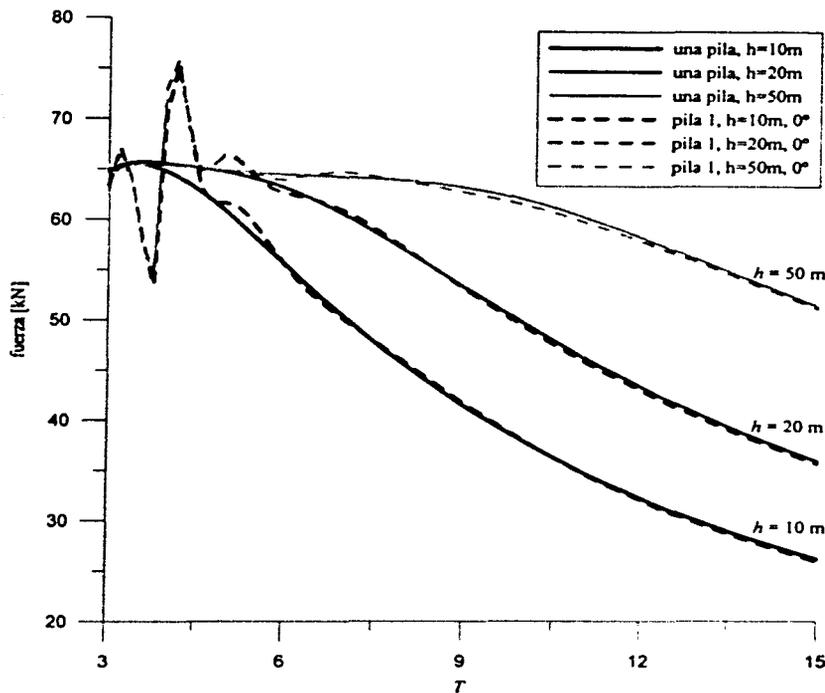


Figura 5.20 Período T Vs fuerza resultante máxima a diferentes profundidades

5.6 Conclusiones

Después de analizar los resultados presentados anteriormente se concluye que:

- La diferencia entre considerar o no la perturbación conjunta de todas las pilas para el cálculo de las fuerzas sobre cada una de ellas puede ser importante.
- Mientras menor sea la separación entre pilas, mayor será la magnificación de fuerzas debida a la perturbación conjunta de todas ellas. Además, las fuerzas más grandes resultarán cuando la dirección de incidencia del oleaje sea perpendicular a alguna de las direcciones de disposición de las pilas.
- Al aumentar la separación entre pilas, la relación entre las fuerzas resultantes máximas y kh se hace más oscilante (aunque no deja de seguir el patrón marcado por una pila aislada), y dicha oscilación aumenta cuando el ángulo de incidencia es oblicuo respecto a los ejes de disposición de los cilindros.
- Las fuerzas de mayor magnitud se presentan cuando la longitud de onda incidente (L) es de dimensiones similares a la separación diagonal (s) y a la separación ortogonal (w) entre pilas, es decir, que en esos casos se presenta el fenómeno de resonancia (ver Figura 5.3).

- La relación entre la fuerza hidrodinámica sobre cada pila y las características geométricas y/o dimensiones del arreglo, es no lineal.
- En los casos analizados se ha observado que para $ks < \pi$ ó $s/L < 1/2$ las fuerzas hidrodinámicas sobre las pilas son iguales aunque no se considere la perturbación de todas ellas (siendo k y L el número y longitud de onda del oleaje incidente, y s la separación diagonal entre pilas, ver Figura 5.3).

Independientemente de que las conclusiones anteriores son de gran utilidad, es importante decir que los parámetros que intervienen (tirante de agua, dimensiones de las pilas, separación entre ellas, dirección, período y amplitud del oleaje incidente, etc.) son tantos, que se hace necesario un análisis exhaustivo de cada caso particular.

CONCLUSIONES

REPORT 19400

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron expresiones analíticas del potencial de velocidades que describen el oleaje regular perturbado por una o varias pilas cilíndricas. Para ello se partió de los conceptos más básicos del estudio de oleaje y de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos, utilizando la teoría lineal. Con base en el potencial de velocidades perturbado, se llegó a expresiones analíticas explícitas para calcular las fuerzas y momentos sobre una pila aislada, y se propuso una metodología para obtener numéricamente los mismos efectos sobre una pila cuando éstas es parte de un conjunto.

Para el caso de una pila aislada se observó lo siguiente:

- Entre mayores sean las dimensiones relativas de la pila respecto a las dimensiones de la onda incidente, mayor será la perturbación del oleaje por la presencia de ésta.
- Utilizando la teoría lineal, los efectos físicos del oleaje sobre una pila dependen linealmente de la amplitud de onda incidente.
- A pesar de lo anterior, es un kh específico (profundidad relativa) el que provoca las mayores fuerzas sobre la pila, y el kh que provoca el momento de volteo máximo, es ligeramente mayor al anterior. Dicho en otras palabras, los efectos máximos se presentan para ciertas condiciones específicas de dimensiones relativas de la onda incidente respecto al tamaño de la pila, que en los casos analizados corresponden a una longitud de onda similar a cuatro veces el diámetro de la pila.
- Para el cálculo de fuerzas sobre la pila, es importante tomar en cuenta la perturbación del oleaje cuando $D/L > 0.1$ (siendo D es el diámetro de la pila y L es la longitud de la onda incidente).
- La utilización de la fórmula de Morison con pilas anchas ($D/L > 0.1$) arroja resultados satisfactoriamente cercanos a los reales sólo si los coeficientes hidrodinámicos C_D y C_M se calculan utilizando las expresiones (4.37) y (4.38).

Del análisis de sistemas de varias pilas puede concluirse lo siguiente:

- Las expresiones que definen el potencial de velocidades y los coeficientes utilizados para definir éste último, son mucho más complejas que para una pila aislada, por lo que resulta necesario calcular numéricamente las fuerzas sobre cada pila.
- La perturbación total del sistema de pilas provoca la aparición de fuerzas en sentido perpendicular al de propagación del oleaje.
- Entre menor sea la separación relativa entre pilas (respecto a sus dimensiones, tirante de agua y onda incidente) mayor será el efecto de la perturbación conjunta.
- Si al calcular las fuerzas y momentos sobre una de las pilas de un conjunto, se despreciara el efecto inducido por las demás pilas, el error puede ser de consideración.

- En una configuración de varias pilas dispuestas sobre dos ejes ortogonales, las fuerzas y momentos máximos se presentan cuando la longitud de onda incidente es similar a la separación diagonal y a la separación ortogonal entre pilas, es decir, que en dichos casos existe resonancia.
- Cuando aumenta la separación entre pilas, la relación entre la profundidad relativa y la fuerza resultante máxima tiene más picos, aunque los más grandes siguen siendo los dos que se enuncian en el punto anterior.
- Las fuerzas máximas se presentan cuando el ángulo de incidencia del oleaje es perpendicular a alguno de los ejes de disposición de las pilas.
- Para cualquier ángulo de incidencia, las pilas que primero reciben el oleaje están sujetas a fuerzas y momentos de mayor magnitud que las demás.
- No existe correlación lineal entre las características geométricas o dimensiones relativas del sistema, y las fuerzas hidrodinámicas sobre cada una de las pilas que lo conforman; a excepción de la relación fuerzas o momentos – amplitud de onda incidente.
- Se observó que las fuerzas sobre las pilas, considerando la interacción del oleaje con todo el conjunto y tomando cada una de ellas como si estuviera aislada, resultan iguales sólo si $ks < \pi$ ó $s/L < 1/2$, siendo k y L el número y longitud de ola, respectivamente, y s la separación diagonal entre pilas.

FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

Este trabajo presenta una metodología para calcular las fuerzas y momentos sobre las pilas de un conjunto considerando la perturbación del oleaje debida a todas ellas, lo cual permite evitar la práctica común de considerar cada una como aislada, aplicando un factor de seguridad conservador; sin embargo falta por profundizar en ciertos puntos, con los que se lograría modelar el fenómeno de forma más apegada a la realidad. De aquí que se propongan las siguientes líneas de investigación:

- Ampliar al caso de oleaje irregular o espectral mediante una función de transferencia.
- Resolver el problema para múltiples pilas en un canal.
- Calcular las fuerzas sobre múltiples pilas considerando oleaje y corriente.
- Analizar más casos, para compararlos con resultados de laboratorio y mediciones en estructuras reales instrumentadas, de manera que se obtengan gráficas o nomogramas útiles en el diseño de elementos de este tipo.
- Resolver el problema utilizando teorías de oleaje no lineales.
- Aplicar la metodología para pilas de material poroso o con protecciones permeables.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El presente estudio se realizó con el propósito de determinar el nivel de conocimiento de los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad de Cuenca, sobre el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en el ámbito académico y profesional. Para ello se diseñó un cuestionario que abarcó aspectos como el uso de correo electrónico, Internet, software de oficina, programación, bases de datos, redes de computadoras, entre otros. Los resultados del estudio indican que los estudiantes poseen un nivel de conocimiento básico a intermedio en el uso de las TIC, lo que sugiere la necesidad de implementar programas de capacitación y actualización en esta área. Asimismo, se recomienda que las instituciones educativas promuevan el uso de las TIC en el aula, así como que los estudiantes desarrollen habilidades prácticas a través de proyectos y prácticas profesionales. En conclusión, el estudio resalta la importancia de la formación en TIC para los futuros profesionales de la ingeniería en sistemas de información, y sugiere que se debe prestar mayor atención a este aspecto en los planes de estudio y en las actividades académicas.

BIBLIOGRAFÍA

1. *Journal of the American Medical Association*, 1964, 191: 1000-1001.

BIBLIOGRAFÍA

1. Abramowitz M., Stegun L. 1972. "Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables". Applied mathematics series N° 55, National Bureau of Standards, US. Department of Commerce. Washington D.C.
2. Chakrabarti S. 1987. "Hydrodynamics of Offshore Structures". Computational Mechanics Publication, Southampton, Boston U.S.A.
3. Chakrabarti S. 1990. "Nonlinear Methods in Offshore Engineering". Developments in marine technology – vol. 5. ELSEVIER. Amsterdam.
4. Chakrabarti S. 1994. "Offshore Structure Modeling". Advanced series on ocean engineering – vol. 9. World Scientific.
5. Goda, Y. 1991. "Distribution of sea state parameters and data fitting". Gulf Publishing. Handbook on Ocean Eng.
6. Govaere G., Silva R. & Maza J.A. 1999. "Wave kinematics around a protected cylindrical impermeable pile". Coastal Structures 99, ASCE, Santander, España.
7. Govaere G. y Silva R. 2000. "Transformación del oleaje debido a la presencia de una estructura cilíndrica permeable". XVI Congreso Nacional de Hidráulica, Morelia, Michoacán.
8. Govaere G., Silva R. 2001. "Directional wave transformation with a cylindrical permeable pile". Pacific Conference PACON 2001, San Francisco, USA.
9. Govaere G. 2002. "Acción de Oleaje sobre Estructuras Disipativas de Simetría Radial". Tesis de Doctorado. División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM.
10. Le Méhauté, Bernard. 1976. "An introduction to hydrodynamics and water waves". Ed. Springer-Verlag, New York.
11. Linton C. & Evans D. 1990. "The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders". Journal of Fluid Mechanics. N° 30 pp 661-682.
12. McCamy R.C., Fuchs R.A. 1954. "Wave forces on piles: A diffraction theory". U.S. Army Corps of Engineers, Beach Erosion Board, Tech. Memo N° 69, 17p.

13. Mei, C. 1989. "The applied dynamics of ocean surfaces waves". Advanced series on ocean engineering – vol. 1. World Scientific.
14. Sarpkaya T. & Isaacson M. 1981. "Mechanics of wave forces on offshore structures". Van Nostrand Reinhold Comp.
15. Silva R. 2001. "Apuntes del curso: Hidráulica Marítima". División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM.
16. Sorensen R. 1993. "Basic Wave Mechanics for coastal and ocean engineers". John Wiley & Sons, Inc. New York.