

14



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNCIONES DE WIGNER EN DIVERSOS CASOS DE ESTADOS COHERENTES, APLASTADOS Y GATOS DE SCHRÖDINGER.

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
F I S I C O  
P R E S E N T A :  
ERNESTO ANTONIO COLAVITA GOMEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. SHAMSI HAJIAN SALERYAN



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR  
2002



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**

Jefa de la División de Estudios Profesionales de la

Facultad de Ciencias

Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Funciones de Wigner en diversos casos de estados coherentes, aplastados y gatos de Schrödinger"

realizado por COLAVITA GOMEZ ERNESTO ANTONIO

con número de cuenta 9223383-8 , quién cubrió los créditos de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Propietario

Propietario

Suplente

Suplente

DR. SHAHEN HACYAN SALERYAN

DR. RAMON LOPEZ PERA

DR. JOSE RECAMIER ANGELINI

DR. RAUL PATRICIO ESQUIVEL SIRVENT

DR. GASTON GARCIA CALDERON

*Ramon Lopez Pera*  
*Jose Recamier Angelini*  
*Raul Patricio Esquivel Sirvent*  
*Gaston Garcia Calderon*

Consejo Departamental de Física

*Patricia Goldstein Memache*

DR. PATRICIA GOLDSTEIN MEMACHE

Cordinadora de Licenciatura

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Gracias a todos mis maestros de la Facultad de Ciencias y en particular a mi gran maestro Miguel Socolovsky por presentarme la mecánica cuántica de manera excelente.

Agradezco a Dr. Ramón López Peña, Dr. Raúl Esquivel Sirvent, Dr. Gastón García Calderón y Dr. José Recamier Angelini, por sus muy valiosos comentarios que ayudaron a mejorar esta tesis.

En especial agradezco al Dr. Shahen Hacyan Saleryan, quien generosamente me brindó la oportunidad de trabajar con él y me guió a lo largo de este trabajo. Gracias por introducirme a la óptica cuántica.

**Gracias papás por insistir en mi educación.**

**Gracias Mariana por estar conmigo y darme lo que nadie más.**

*Con todo mi corazón,  
te dedico esta tesis y todo lo que  
haga como físico.*

*Gracias abuelo.*

# Índice

<b>Introducción General</b> .....	1
<b>Capítulo I. Introducción</b> .....	8
1.1 Estados coherentes y “aplastados” (squeezed states) .....	8
1.2 Matriz de densidad .....	15
1.3 Distribución de Wigner .....	18
1.4 El oscilador paramétrico y la resortera cuántica .....	22
<b>Capítulo II. La resortera cuántica y el oscilador paramétrico</b>	
<b>analizadas desde el espacio fase</b> .....	27
2.1 Distribución de Wigner para el caso general del oscilador .....	27
2.2 La resortera cuántica .....	33
2.3 El oscilador paramétrico .....	39
<b>Conclusiones</b> .....	55
<b>Referencias</b> .....	58

## Introducción General

Desde el nacimiento de la mecánica cuántica se han producido problemas y cuestionamientos que frecuentemente han puesto en duda la veracidad de la teoría; por ejemplo, Einstein recalca la ausencia de la mayoría de los fenómenos cuánticos a nivel macroscópico. Esto queda claro viendo como ejemplo el experimento de Davisson y Germer en 1927, donde lograron confirmar la hipótesis de de Broglie, al demostrar que los electrones producen difracción cuando son dispersados en ciertos cristales. Un problema que se estudia actualmente es la transición del mundo microscópico, regido por la mecánica cuántica, al macroscópico, descrito por la mecánica clásica. Si aceptamos que un electrón puede estar en más de un lugar a la vez, ¿por qué no podemos pensar en una pelota en ambos lados de una cancha al mismo tiempo?

Precisamente este problema es el que representa la aparente paradoja del principio de superposición, en la que se encuentran los estados que son llamados "gatos de Schrödinger", en donde se tiene una superposición cuántica de dos estados macroscópicamente distinguibles.

Partiendo de este tipo de problemas Glauber [1] introdujo el concepto de estados coherentes. Estos estados, definidos como eigenestados del operador de aniquilación,  $a\alpha = \alpha\alpha$ , son de vital importancia en el estudio de la transición cuántico-clásico debido a que sus propiedades representan el estado cuántico más parecido a un estado clásico. Una de estas propiedades es que la



partícula tiene la mínima dispersión en la posición y el momento permitidas por el principio de indeterminación de Heisenberg. Una generalización de estos estados son los estados coherentes correlacionados propuestos por Dodonov, Kurmyshev y Man'ko en la Ref. [2], en los que utilizan una relación de indeterminación más apropiada, encontrada por Schrödinger y Robertson para operadores Hermitianos. Los estados aplastados o "squeezed" son también de gran importancia en el área. Estos estados son otro tipo de estados coherentes. Partiendo de que los estados coherentes se verían en el espacio fase como simples gaussianas con curvas de nivel circulares, se puede observar que en los estados aplastados encontramos en las curvas de nivel elipses como lo describen Dodonov, Klimov y Man'ko en la Ref. [3]. Esto se debe a que la disminución en la dispersión en la posición es a expensas del aumento en la del momento y viceversa. De manera geométrica también se pueden encontrar diferencias entre los estados aplastados y los correlacionados, y esto es que en las distribuciones de Wigner la forma elíptica de las gaussianas debe de ser paralela al eje de la posición para que no haya correlación; así elipses diagonales indicarán la existencia de correlación. Estas diferencias serán claras en los resultados de esta tesis, ya que para algunos casos tendremos estados coherentes, coherentes correlacionados y para otros aplastados.

Yurke y Stoler [4], tomaron el caso de un oscilador anarmónico y encontraron soluciones que eran estados coherentes y notaron que una superposición finita de estos estados (como los llamados estados coherentes pares e impares:  $\alpha \pm -\alpha$ ), son macroscópicamente distinguibles, con lo que sería un ejemplo de los estados de gato de Schrödinger. En este trabajo se utilizarán estos estados como solución del oscilador paramétrico.

Existen muchas publicaciones en las que se habla de esta transición cuántico-clásico y se ha encontrado que la razón por la que no podríamos encontrar una piedra en dos lugares diferentes es por un fenómeno llamado decoherencia [5, 6].

Los estados cuánticos evolucionan según la ecuación de Schrödinger, que es lineal; por lo que el principio de superposición es fundamental. Un factor importante es que los sistemas macroscópicos están acoplados al ambiente, por lo que en general trabajamos con sistemas abiertos en los que la ecuación de Schrödinger no nos funciona; así, un sistema que se encuentre en una superposición de estados coherentes pierde la coherencia por el acoplamiento al ambiente. A esto se le llama decoherencia. Se le han llamado sistemas clásicos a los que están asociados con lo macroscópico; sin embargo esta "definición" no es muy adecuada porque en la actualidad los estudios de algunos sistemas macroscópicos muestran efectos cuánticos.

Como ejemplo del estudio de decoherencia tenemos un artículo escrito por Barberis y Hacyan [7], en el que se describen estados múltiples de gatos de Schrödinger y se estudia la decoherencia debida a un baño térmico. Esto es, el desvanecimiento de los términos de interferencia; lo que termina con la superposición haciéndola decaer en una mezcla estadística. Se ha encontrado que la interacción con el medio disminuye el tiempo de decoherencia. Por este decaimiento es difícil encontrar este tipo de estados experimentalmente.

Utilizando la interacción entre átomos y el campo electromagnético, se han logrado exitosos experimentos sobre estos temas, como el expuesto por

Haroche [8], utilizando un dispositivo que consta de un horno seguido por un par de láseres para ajustar las velocidades de los átomos, una cavidad en la que se acoplan a radiación, para finalmente pasar por unos detectores de ionización. El principio fundamental del dispositivo es generar la interacción entre fotones dentro de la cavidad y átomos que salen de un horno. Se pueden generar átomos de dos niveles y, después de haber seleccionado los átomos útiles para el experimento y de haberlos puesto a punto en las primeras regiones, se hacen interactuar con el campo para su posterior medición. Dentro de la cavidad el átomo puede excitar al campo acoplado a la cavidad o éste se puede excitar dependiendo del estado de la cavidad. Posteriormente, son contados por los detectores los átomos que se encuentren en cada uno de los niveles. Es posible crear átomos en superposición coherente de los estados correspondientes a los dos niveles, y medir el término de interferencia al reconstruir la distribución de Wigner que describe el sistema. De esta forma se pueden construir estados de Gato de Schrödinger.

La óptica cuántica estudia con profundidad este tema, utilizando la interacción del campo electromagnético con átomos. Con fotones se han podido crear experimentalmente gatos de Schrödinger donde dos paquetes se separan ampliamente sin perder la coherencia.

En el artículo "The Quantum Sling And The Schrödinger Cat" escrito por Hacyan [9], se describe un modelo en el que se produce uno de estos estados cuánticos, partiendo del problema del oscilador paramétrico para el caso de la resorte cuántica, donde hay un abrupto desvanecimiento de la frecuencia, como en una liga oscilante que repentinamente suelta una partícula. Este artículo será el punto de partida de esta tesis.

Dremin y Man'ko [10] hablan de partículas y núcleos como resorteras cuánticas utilizando física de altas energías. En este artículo, consideran el problema clásico en el que una pelota recibe un golpe, así la velocidad del lado del golpe es mayor a la del centro de masa. Si un pequeño pedazo de la superficie sale volando con la misma velocidad se puede pensar en que su momento es del orden del momento inicial. Este ejemplo es como el de una piedra en una resortera. El artículo propone que se pueden aplicar los mismos argumentos a colisiones de núcleos, con energías del orden de 2.5 GeV y 4.5 GeV por núcleo.

Por otro lado, Monroe, Meekhof, King y Wineland en la Ref. [11] describen un experimento en una trampa de iones de radio frecuencia. En el experimento crean un gato de Schrödinger del oscilador armónico al formar una superposición de dos estados coherentes de un ion atrapado con una secuencia de láseres. En su trabajo primero enfrían con láser al ion con lo que logran que se encuentre en el estado base por más del 95% del tiempo. Después aplican una secuencia de láseres con lo que logran poner al ion en una superposición de estados coherentes y, al medir la probabilidad de que se encuentre en uno de los estados al ir cambiando una fase (con fluorescencia), se puede confirmar que no se trata de una mezcla estadística. Si estuviera involucrada interacción con algún medio, como un baño térmico, la coherencia se perdería decayendo en una mezcla estadística.

En este trabajo se tratan de analizar los estados correspondientes a la resortera cuántica y a otro caso del oscilador paramétrico utilizando la ecuación de Mathieu. El análisis se hará en el espacio fase, donde se puede visualizar de

mejor manera la evolución de la partícula, utilizando la distribución de Wigner. De esta manera se encontrarán estados de gato de Schrödinger y su evolución temporal.

En el primer capítulo se desarrollan de manera resumida las bases del trabajo como el problema del oscilador paramétrico con las respectivas soluciones, así como los conceptos de estados coherentes, la distribución de Wigner, etc.

En el segundo capítulo se encontrará la distribución de Wigner para el caso general del oscilador paramétrico (ya visto en el capítulo anterior) y se desarrollarán los casos de la resorte cuántica, en el que la frecuencia es constante hasta que desaparece repentinamente.

Posteriormente se tratará el caso de la ecuación de Mathieu, de manera análoga a las trampas de Paul. De manera similar Schrade, Man'ko, Schleich y Glauber [12], analizan este caso pero para un solo estado, no para un gato de Schrödinger como se hará aquí. En la Ref. [12] se muestran funciones de Wigner para el caso estable de las funciones de Mathieu y se puede observar cómo se aplasta el estado y la forma de las dispersiones, de igual forma como se mostrará aquí.

Otro caso parecido a esta tesis es el expuesto por Castaños, Jáuregui, Lopez-Peña, Recamier y Man'ko en [13]. En este artículo se ha calculado numéricamente la evolución temporal de estados coherentes y de gato de Schrödinger en trampas de radio frecuencia o trampas de Paul. En esta tesis se trabajará con los dos tipos de soluciones a la ecuación de Mathieu; las soluciones estables e inestables, en las que se encontrarán resultados muy

diferentes. Se muestran las gráficas de las distribuciones de Wigner correspondientes a cada uno de estos casos, así como las dispersiones correspondientes al oscilador paramétrico, y finalmente se hace un análisis de los resultados.

## Capítulo I.

### Introducción.

#### 1.1 Estados coherentes y aplastados.

Un concepto importante en el estudio de la transición a la mecánica clásica es el de los estados coherentes, que fueron introducidos por Schrödinger [14] y posteriormente por Glauber [1]. Estos se definen como los eigenestados del operador de aniquilación de un sistema tipo oscilador armónico, es decir:

$$\hat{a} \alpha = \alpha \alpha \quad (1)$$

donde  $\alpha$  es un número complejo. De aquí se puede demostrar que el número promedio de fotones en un estado coherente está dado por

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (2)$$

Los estados de Fock, o estados de número, son los eigenestados del operador de número  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , por lo que satisfacen la ecuación

$$\hat{N} n = n n \quad (3)$$

donde  $n$  se interpreta como el número de fotones en el campo. Ahora, estos estados forman una base y podemos expandir al estado coherente en esta base de la siguiente forma [15]:

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (4)$$

de donde se puede obtener

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= \sum c_n \sqrt{n} |n-1\rangle \\ &= \alpha \sum c_n |n\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

y se obtiene la relación

$$c_n = \frac{\alpha^n}{n!} c_0 \quad (6)$$

El coeficiente  $c_0$  se obtiene al normalizar la función de onda. Una de las características más importantes de los estados coherentes es que son estados de mínima dispersión. De la relación común entre los operadores  $a$ ,  $a^\dagger$  con los de posición  $q$  y momento, tenemos:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} (\omega q + ip) \\ a^\dagger &= \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} (\omega q - ip) \end{aligned} \quad (7)$$



Al invertir las relaciones (7) y calculando el valor de expectación sobre un estado coherente se obtiene:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle_{\alpha} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \langle \alpha | (a + a^\dagger) | \alpha \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\alpha + \alpha^*)\end{aligned}\quad (8)$$

y

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle_{\alpha} &= \frac{\hbar}{2\omega} \langle \alpha | (a + a^\dagger)^2 | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2\omega} (1 + (\alpha + \alpha^*)^2)\end{aligned}$$

Por lo que

$$(\Delta x)_{\alpha}^2 = \langle x^2 \rangle_{\alpha} - \langle x \rangle_{\alpha}^2 = \frac{\hbar}{2\omega} \quad (9)$$

De una manera similar se encuentra que lo mismo sucede con  $p$ , es decir:

$$(\Delta p)_{\alpha}^2 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (10)$$

Por lo anterior tenemos que

$$(\Delta x)_\alpha^2 (\Delta p)_\alpha^2 = \frac{\hbar^2}{4} \quad (11)$$

y por esto tenemos que los estados coherentes son estados de mínima dispersión.

Se define el operador de desplazamiento como [3]

$$D(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}). \quad (12)$$

Haciendo uso de la relación Baker-Campbell-Hausssdorf (BCH) [16]

$$e^{(A+B)} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \quad (13)$$

válida siempre que  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ , y aplicando el operador de desplazamiento  $D(\alpha)$  al estado de vacío, vemos que:

$$\begin{aligned} D(\alpha) 0 &= \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) 0 \\ &= \exp(\alpha \hat{a}^\dagger) \exp(-\alpha^* \hat{a}) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) 0 \\ &= \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \exp(\alpha \hat{a}^\dagger) \exp(-\alpha^* \hat{a}) 0 \\ &= \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \exp(\alpha \hat{a}^\dagger) 0 \end{aligned}$$

$$= \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (14)$$

y finalmente

$$D(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle \quad (15)$$

En el último paso se usó la propiedad:

$$(a^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle. \quad (16)$$

Por lo anterior, un estado coherente  $|\alpha\rangle$  se puede obtener al aplicar el operador de desplazamiento  $D(\alpha)$  al estado de vacío. El operador de desplazamiento está muy relacionado con el operador de evolución de la interacción del campo electromagnético con una corriente clásica. Esta interacción es descrita por el hamiltoniano

$$H_{int} = \int J \cdot \vec{A} d^3r \quad (17)$$

que puede ser expresado con la forma  $H_{int} = i(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$  [15]. El operador de evolución correspondiente a esta interacción coincide, excepto por una fase, con  $D(\alpha)$ . Por lo tanto la ecuación (15) implica que las corrientes clásicas generan estados coherentes del vacío.

Por otro lado, en términos de los eigenestados de las cuadraturas  $q$ , se puede escribir

$$\langle q | \alpha_0 \rangle = \left( \frac{1}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\eta_0 p_0 / 2} e^{i p_0 q} e^{-(q - q_0)^2 / 2}, \quad (19)$$

donde

$$\alpha_0 = (q_0 + i p_0) / 2. \quad (20)$$

Por lo tanto, la probabilidad de encontrar una cuadratura  $q$  del campo con un valor  $q$ , para un estado coherente  $|\alpha_0\rangle$ , está dado por una gaussiana:

$$P(q) = \left( \frac{1}{\pi} \right)^{1/2} \exp[-(q - q_0)^2]. \quad (21)$$

Definimos los operadores de cuadraturas  $q$  y  $p$  adimensionales

$$\begin{aligned} q &= \frac{a + a^*}{2} = \sqrt{\frac{\omega m}{2\hbar}} q \\ p &= \frac{a - a^*}{2i} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega m}} p \end{aligned} \quad (22)$$

que son operadores Hermitianos y están sujetos a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} [q, p] &= \frac{i}{2} \\ (\Delta q)^2 \cdot (\Delta p)^2 &\geq \frac{1}{16} \end{aligned} \quad (23)$$

y en el caso de los estados coherentes, de acuerdo con (9) y (10), se encuentra que

$$(\Delta q)^2 = \frac{1}{4}, \quad (\Delta p)^2 = \frac{1}{4} \quad (24)$$

De manera pictórica, un estado coherente se puede pensar en el plano complejo como un círculo de diámetro  $\frac{1}{2}$  y con centro desplazado  $\alpha$ . Si pensamos en un estado en las que alguna de las variables  $q$  o  $p$  tiene una dispersión menor que  $\frac{1}{4}$  a expensas de la otra, entonces su representación en el plano complejo será una elipse y a este estado se le llama estado aplastado, comprimido o *squeezed*. Obviamente, se puede generalizar a compresiones no sólo en alguna de las dos direcciones, sino a lo largo de cualquier par de ejes. La familia más general de estados con mínima dispersión es [17]

$$\Psi(q) = \Psi = (2\pi\Delta^2 q)^{-1/4} \exp(ip_0 q) \exp\left(-\frac{(q - q_0)^2}{4\Delta^2 q}\right) \quad (25)$$

función de onda representada en términos de  $q$ , donde la varianza  $\Delta^2 q$  ahora no es necesariamente  $\frac{1}{2}$ , como es el caso de los estados coherentes. Ahora es claro ver que un estado comprimido se puede obtener de un estado coherente al aplicarle alguna transformación de escala, que compense la contracción de uno de los ejes con la dilatación del otro. Ahora, definiendo el operador de aplastamiento o compresión como:

$$S(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a'^2)\right] \quad (26)$$

que es una transformación unitaria, y  $\xi = r \exp(i\theta)$  es llamado el *parámetro de compresión*. Se puede definir un operador de aniquilación generalizado como:

$$\begin{aligned}
 A &= S(\xi) a S^\dagger(\xi) \\
 &= \hat{a} \cosh(r) + \hat{a}^\dagger \exp(i\theta) \sinh(r) \\
 &\equiv \mu \hat{a} + \nu \hat{a}^\dagger
 \end{aligned} \tag{27}$$

donde podemos demostrar fácilmente que  $[A, A^\dagger] = 1$ . Entonces un estado aplastado se puede definir como

$$\alpha, \xi = D(\alpha) S(\xi) 0 \tag{28}$$

Un resultado similar se puede encontrar al aplicar el operador de compresión a un estado coherente  $\alpha$ . De (29), al invertir, se encuentra

$$\begin{aligned}
 \hat{a} &= \mu A - \nu A^\dagger \\
 \hat{a}^\dagger &= \mu A^\dagger - \nu^* A
 \end{aligned} \tag{29}$$

## 1.2 Matriz de densidad

Al tener información incompleta acerca de un sistema, uno acostumbra abordar el concepto de probabilidad. Sin embargo, generalmente, la falta de información se presenta por sí misma en la mecánica cuántica de la siguiente forma: el estado del sistema es  $\psi_1$  con una probabilidad  $p_1$  o el estado  $\psi_2$  con una probabilidad  $p_2$ , etc. Claramente

$$p_1 + p_2 + \dots = \sum p_k = 1 \quad (1)$$

Entonces estaremos hablando de un estado que es una *mezcla estadística* de los estados  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$  con probabilidades  $p_1, p_2, \dots$ . Ahora, no se debe confundir a una mezcla estadística con una superposición lineal de estados como:

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle \quad (2)$$

En estos estados, no es necesariamente cierto que sean equivalentes a un sistema en el que hay una probabilidad  $c_1^2$  de que se encuentre en el estado  $|\psi_1\rangle$ ,  $c_2^2$  de estar en el estado  $|\psi_2\rangle$ , etc... De hecho en una combinación lineal como en (2) existen, en general, efectos de interferencia entre los estados (resultado de los términos cruzados de la forma  $c_k c_l$ , obtenidos al calcular la amplitud de probabilidad), que son de suma importancia, como lo será en el presente trabajo.

Considerando un sistema cuya función de onda está descrita por (2), donde  $\{|\psi_n\rangle\}$  forma una base ortonormal, tenemos que si  $A$  es una observable, con elementos de matriz

$$\langle \psi_n | A | \psi_m \rangle = A_{nm} \quad (3)$$

se satisface

$$A = \psi A \psi = \sum_{n,m} c_n^* c_m A_{n,m} \quad (4)$$

Ahora, de la relación (4) observamos que los términos  $c_n^* c_m$  son los elementos de la matriz del operador  $\psi \psi$ . Así se introduce el operador de densidad, definido por la expresión [16]:

$$\rho = \psi \psi \quad (5)$$

Si sabemos que estamos en un estado en el que hay una probabilidad  $p_i$  de que se encuentre en el estado  $|\psi_i\rangle$ , entonces el operador de densidad es definido como

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (6)$$

Gracias a esta definición podemos encontrar que el valor esperado de un observable  $A$  se puede escribir en términos de  $\rho$ . Tomando (3) y (6) tenemos que:

$$\begin{aligned} A &= \psi A \psi \\ &= \sum_{n,m} \langle \psi_n | \rho | \psi_m \rangle \langle \psi_n | A | \psi_m \rangle \\ &= \sum_n \langle \psi_n | \rho A | \psi_n \rangle = \text{Tr}\{\rho A\}, \end{aligned} \quad (7)$$

válido para estados puros y mezclas estadísticas. De la definición se obtiene inmediatamente que:

$$\sum_n c_n^* c_n = \sum_n \rho_{nn} = \text{Tr}\rho = 1. \quad (8)$$



Además se puede ver que  $\rho$  es Hermitiano, por lo que puede ser diagonalizado. Ahora si tomamos el conjunto de eigenestados de  $\rho$ ,  $|\phi_n\rangle$  podemos escribir

$$\rho = \sum_n p_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \quad (9)$$

y

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm}, \quad (10)$$

que implica que

$$\rho^2 = \sum_n p_n^2 |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \Rightarrow \text{Tr} \rho^2 = \sum_n p_n^2 \leq 1. \quad (11)$$

El caso de la igualdad se toma cuando se trata de un estado puro,  $\text{Tr} \rho^2 = 1$ , y la desigualdad estricta cuando se trate de una mezcla estadística,  $\text{Tr} \rho^2 < 1$ . Además, una propiedad también importante es que para un estado puro se tiene que

$$\rho^2 = \rho \quad (12)$$

Que es consecuencia directa de la definición (5).

### 1.3 Distribución de Wigner.

Una descripción de la física cuántica se puede dar a través del operador de densidad, sin embargo, en la óptica cuántica, es de gran utilidad hacer un

descripción alternativa, pero equivalente, en términos de funciones de distribución. La distribución- $Q$ , distribución- $P$ , introducida por Glauber y Sudarshan, y la distribución de Wigner son las más comunes [18]. En este trabajo utilizamos la distribución de Wigner.

Es sabido que en la física el espacio fase es de gran utilidad, y la mecánica cuántica no es la excepción. El principio de incertidumbre de Heisenberg prohíbe la existencia de distribuciones de probabilidad bien portadas en el espacio fase, ya que no se puede determinar la posición y el momento de una partícula simultáneamente. Aun así, las distribuciones en el espacio fase son de gran importancia en la mecánica cuántica.

El problema que produce la relación entre la posición y el momento se puede visualizar en el siguiente ejemplo [19]:

Supongamos que un par de monedas se colocan en una caja. La caja reporta sólo uno de los siguientes tres resultados: (1) la cara de la primera moneda (Águila o Sol), (2) la cara de la segunda moneda o (3) si las monedas coinciden o difieren. El objetivo será una distribución de probabilidad para las cuatro posibles lecturas (AA, SS, AS, SA) basada en muchas lecturas de la caja negra. Supongamos que al medir la cara de cada moneda, dos terceras partes de las veces que se mide cae Sol cuando son medidas individualmente y sin embargo nunca coinciden cuando se comparan. Se busca un distribución que refleje estos dos fenómenos y la única forma de que sea de un tercio para Águila y dos tercios Sol, y de que nunca coincidan es hacer  $P(AA)$  sea negativa, ya que  $P(SS)$  debería de ser mayor que  $P(AA)$ , para poder tener  $P(SS) + P(AA)$  igual a cero. Esto es debido a una correlación entre las

monedas. Lo mismo pasa en la mecánica cuántica con el momento y la posición.

En 1932, Eugene Wigner presentó una construcción matemática para visualizar trayectorias cuánticas en el espacio fase [20]. La distribución de Wigner, o la función de Wigner  $W(x, p)$ , posee muchas de las cualidades de una distribución de probabilidad, excepto que puede ser negativa para algunos puntos en el espacio fase.

Esta distribución coincide con las distribuciones de probabilidad de las cuadraturas de la siguiente manera:

$$\int W(q, p) dp = \langle q | \rho | q \rangle, \quad \int W(q, p) dq = \langle p | \rho | p \rangle \quad (1)$$

Por lo que, para un estado puro,  $\langle q | \rho | q \rangle = \psi(q)^2$ ,  $\langle p | \rho | p \rangle = \varphi(p)^2$ . Además de que por (1) tenemos la propiedad de normalización

$$\int W(q, p) dp dq = 1. \quad (2)$$

Las propiedades (1) se deben de cumplir aún haciendo rotaciones en el espacio fase. La expresión escrita por Wigner de su distribución termina siendo

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i p x} \left\langle q - \frac{x}{2} | \rho | q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \quad (3)$$

La función de Wigner puede ser expresada en términos de los operadores  $a$  y  $a^\dagger$ . Partiendo de

$$q = \frac{1}{2} (a + a^\dagger), \quad p = \frac{i}{2} (a^\dagger - a) \quad (4)$$

se puede obtener la expresión

$$W(\alpha, \alpha^*) = 2 \text{Tr} \left[ \rho D(\alpha) e^{i\alpha a^\dagger} D^{-1}(\alpha) \right], \quad (5)$$

donde  $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$  es el operador de desplazamiento.

Algunos ejemplos de funciones de Wigner se presentan a continuación. Para un estado coherente es la gausianna

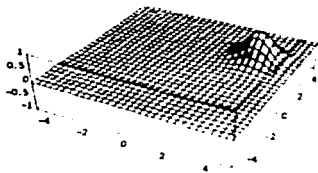
$$W(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(q-q_0)^2 - (p-p_0)^2}; \quad (6)$$

representado en la *Fig 1 (a)*, mientras que para un estado aplastado sería de la forma

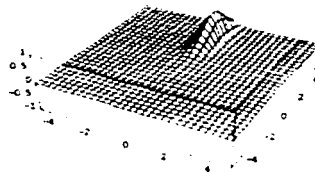
$$W_c(q, p) = \frac{1}{\pi} \exp(-e^{2c} q^2 - e^{-2c} p^2), \quad (7)$$

que se representa en la *Fig 1 (b)*. En este trabajo se encontrará una superposición de estados coherentes y se podrá ver el término de interferencia con oscilaciones que toman valores negativos [18].

Fig 1. Gráficas de funciones de Wigner. (a) Estado coherente, (b) Estado aplastado.



(a)



(b)

#### 1.4 El oscilador paramétrico y la resorte cuántica.

La presente tesis está basada en un artículo de Hacyan [9] en el que se trata el caso de la resorte cuántica. En esta sección se hará un breve resumen sobre dicho artículo con el fin de introducir el problema a analizar.

El problema está basado en un caso del oscilador paramétrico descrito por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \right] \Psi \quad (1)$$

en donde la frecuencia es una función del tiempo, *i.e.*  $\omega = \omega(t)$ . Una solución de esta ecuación es

$$\psi = N \exp \left\{ -\frac{m}{2i\hbar} \dot{f} x^2 + \frac{2m}{\hbar} \frac{\alpha}{f} x \right\} \quad (2)$$

donde el factor de normalización  $N$  y la función  $f$  son funciones del tiempo:  $N=N(t)$ ,  $f=f(t)$ . Al sustituir directamente en la ecuación se encuentran ciertas condiciones para la función  $f$ ; las cuales son:

$$\ddot{f} + \omega^2(t)f = 0 \quad (3)$$

y

$$\dot{f} f^* - f \dot{f}^* = 2i. \quad (4)$$

El estado (2), es en general un estado coherente correlacionado, por lo que es eigenestado del operador de aniquilación, que es definido para este caso como [7]:

$$a = \frac{-i}{(2\hbar m)^{1/2}} (m \dot{f} q - f p) \quad (5)$$

es decir  $a \alpha = \alpha a$ . El punto importante es que el operador  $a$  es una constante de movimiento siempre que  $f$  cumpla con la ecuación (3). El valor esperado de cualquier operador  $O$  en el estado  $\alpha$  es  $O_{\alpha} = \alpha O \alpha / \alpha \alpha$ , por lo que es fácilmente calculable. Por lo tanto la dispersión en el momento y la posición es:

$$\sigma_x = \frac{\hbar}{2m} \dot{f}^2 \quad (6)$$

y

$$\sigma_{pp} = \frac{hm}{2} |f|^2 \quad (7)$$

mientras que la correlación está dada por

$$\sigma_{xp} = \frac{h}{4} (f f^* + f^* f) \quad (8)$$

Así la relación que lo hace un estado coherente correlacionado se cumple [3, 21]:

$$\sigma_{xx} \sigma_{pp} - \sigma_{xp}^2 = \frac{h^2}{4} \quad (9)$$

Una vez visto lo anterior, podremos entrar en el caso de la resorte cuántica. Consideremos la situación en la que la frecuencia  $\omega(t) = \omega_0$  es una constante para  $t < 0$  y una frecuencia nula  $\omega(t) = 0$  para tiempos  $t > 0$ . Este es el caso de la resorte cuántica, ya que la analogía con un caso clásico sería el de una liga tensa que oscila a una frecuencia constante y cuando  $t = 0$  suelta una partícula que sale volando como partícula libre, que se moverá con velocidad constante, con la que fue soltada. En el artículo [9] se aplica este caso al oscilador paramétrico, por lo que el problema parte de la forma que debe tener  $f$ . La solución a la ecuación (3) debe ser continua junto con su primera derivada; la solución general que cumple con las condiciones necesarias es:

$$f(t) = \begin{cases} \omega_0^{-1/2} e^{i\omega_0 t} & \text{para } t < 0 \\ \omega_0^{-1/2} (1 + i\omega_0 t) & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (10)$$

con lo que se describe un estado coherente.

La varianza y la correlación de los operadores de posición y momento, se pueden evaluar rápidamente utilizando las expresiones (6)-(8), de donde para  $t < 0$  tenemos un estado coherente original, mientras que para  $t > 0$  tenemos:

$$\sigma_{xx} = \frac{\hbar}{2m\omega} (1 + \omega^2 t^2), \quad (11)$$

$$\sigma_{pp} = \frac{hm\omega}{2}, \quad (12)$$

$$\sigma_{xp} = \frac{\hbar\omega}{2} t. \quad (13)$$

La partícula lanzada por la resorte es descrita por un paquete de ondas que tiene dispersión constante en el momento pero una dispersión en la posición que crece como  $t^2$ . Aun así, el estado sigue siendo coherente correlacionado, porque satisface la igualdad (9) para todo tiempo, debido a la fuerte correlación entre el momento y la posición.

En la siguiente parte se trabajó con los estados coherentes pares e impares, una superposición de estados, como los definidos por la ecuación (2), de la siguiente forma:

$$\Psi_x = N_x \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar} \frac{f}{f} x^2\right\} \left\{ \exp\left\{\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{1/2} \frac{\alpha_0}{f} x\right\} \pm \exp\left\{-\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{1/2} \frac{\alpha_0}{f} x\right\} \right\} \quad (14)$$



donde  $N_z$  es la constante de normalización. Estos estados son los llamados "gatos de Schrödinger", al ser superposiciones cuánticas de estados coherentes. Al aplicar el operador de aniquilación (5) a estos estados obtenemos:

$$a|\alpha_{\pm}\rangle = \frac{N_{\pm}}{N_{\pm}} \alpha_{\pm} |\alpha_{\pm}\rangle \quad (15)$$

y

$$\langle \alpha_{\pm} | a |\alpha_{\pm}\rangle = 0 = \langle \alpha_{\pm} | a^\dagger | \alpha_{\pm}\rangle. \quad (16)$$

Al calcular la densidad de probabilidad de la función (14), el estado de gato de Schrödinger, y al hacer un cambio de variable

$$\zeta = \sqrt{\frac{m}{\hbar\omega}} \frac{x}{t} \quad (17)$$

y, realizando las aproximaciones para  $\omega t \gg 1$  y algo de álgebra, llegamos a:

$$\psi_+ \psi_-^* = \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar\omega}} \frac{1}{2(1 - e^{-(\alpha+\beta)})} \left\{ e^{-(\zeta-\zeta_0)^2} + e^{-(\zeta+\zeta_0)^2} \pm e^{-(\zeta^2-\zeta_0^2)} \cos \left[ 2 \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} x_0 \zeta \right] \right\} \quad \dots (18)$$

De esta ecuación se puede ver que la función consta de dos gaussianas moviéndose en direcciones opuestas con velocidad constante, y un término de interferencia entre los dos estados.

Posteriormente se analizarán con más detalle, en el espacio fase, estos estados.

## Capítulo II

### 2.1 Distribución de Wigner para el caso general del oscilador.

En este capítulo haremos un análisis de los estados correspondientes al oscilador paramétrico en el espacio fase, por lo que encontraremos una expresión general para la distribución de Wigner correspondiente a la solución definida por la Ec. (14) de la sección 1.4.

Partiendo de que la distribución de Wigner está definida por

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi^* \left( q - \frac{x}{2} \right) \Psi \left( q + \frac{x}{2} \right) dx, \quad (1)$$

evaluaremos primero la función de onda como sigue:

$$\begin{aligned} \Psi(q + x/2) = & N_+ \exp \left\{ -\frac{m}{2i\hbar} \frac{f}{f} q^2 + \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{\alpha_0}{f} q + \left( \left( \frac{m}{2\hbar} \right)^{1/2} \frac{\alpha_0}{f} - \frac{m}{2i\hbar} \frac{f}{f} q \right) x - \frac{m}{8i\hbar} \frac{f}{f} x^2 \right\} \\ \pm N_- \exp \left\{ -\frac{m}{2i\hbar} \frac{f}{f} q^2 - \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{\alpha_0}{f} q - \left( \left( \frac{m}{2\hbar} \right)^{1/2} \frac{\alpha_0}{f} + \frac{m}{2i\hbar} \frac{f}{f} q \right) x - \frac{m}{8i\hbar} \frac{f}{f} x^2 \right\} \\ & \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^+(q-x/2) &= N_+^* \exp \left\{ \frac{m f^*}{2ih f^*} q^2 + \left( \frac{2m}{h} \right)^{1/2} \frac{\alpha_0^*}{f^*} q - \left( \left( \frac{m}{2h} \right)^{1/2} \frac{\alpha_0^*}{f^*} + \frac{m f^*}{2ih f^*} q \right) x + \frac{m f^*}{8ih f^*} x^2 \right\} \\ &\pm N_+^* \exp \left\{ \frac{m f^*}{2ih f^*} q^2 - \left( \frac{2m}{h} \right)^{1/2} \frac{\alpha_0^*}{f^*} q + \left( \left( \frac{m}{2h} \right)^{1/2} \frac{\alpha_0^*}{f^*} - \frac{m f^*}{2ih f^*} q \right) x + \frac{m f^*}{8ih f^*} x^2 \right\} \end{aligned}$$

..... (3)

Definiendo  $\Psi^+$ ,  $\Psi^-$ ,  $\Psi^{+\cdot}$  y  $\Psi^{-\cdot}$  como el primer y segundo sumando de la función de estado y su conjugada, evaluadas en  $q + x/2$  y  $q - x/2$  respectivamente, tenemos que la función de Wigner es:

$$\begin{aligned} W_{\pm}(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\pm}^*(q-x_2) \Psi_{\pm}(q+x_2) e^{-ipx/\hbar} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi^{+\cdot} \pm \Psi^{-\cdot}) (\Psi^+ \pm \Psi^-) e^{-ipx/\hbar} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Psi^{+\cdot} \Psi^+ + \Psi^{-\cdot} \Psi^- \pm (\Psi^{+\cdot} \Psi^- + \Psi^{-\cdot} \Psi^+)] e^{-ipx/\hbar} dx \end{aligned} \quad (4)$$

Ahora, llamando  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $W^{\pm}$  y  $W^{\pm}$  a los sumandos de la última expresión respectivamente, veremos cómo es cada una de estas funciones por separado. Tomemos el primer caso:

$$\begin{aligned}
 W^*(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi^* e^{-ipx/\hbar} dx \\
 &= \frac{|N_s|^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m}{\hbar f_1^2} q^2 + 2\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{1/2} \Re\left(\frac{\alpha_0}{f}\right) q + i\left[\frac{m}{\hbar} \Re\left(\frac{f}{f_1}\right) q + \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{1/2} \Im\left(\frac{\alpha_0}{f}\right) x - \frac{m}{4\hbar f_1^2} x^2\right]\right\} e^{-ipx/\hbar} dx \\
 &= |N_s|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hbar}{m\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{m}{\hbar f_1^2} q + 2\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{1/2} \Re\left(\frac{\alpha_0}{f}\right) q\right\} \exp\left\{-\left[\frac{-p}{\hbar} + \frac{m}{\hbar} \Re\left(\frac{f}{f_1}\right) q + \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{1/2} \Im\left(\frac{\alpha_0}{f}\right)\right]^2 \frac{\hbar f_1^2}{m}\right\} dx \\
 &\quad \dots (5)
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\gamma\alpha x - \beta x^2\} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{4\beta}\right\}, \quad (6)$$

siempre que  $\beta > 0$ , como es este caso. Al tomar la definición del operador de aniquilación

$$\hat{a} = \frac{-i}{(2\hbar m)^{1/2}} (m\hat{q} - f\hat{p}), \quad (7)$$

y sabiendo que

$$\hat{a}\alpha = \alpha\hat{a}, \quad (8)$$

por ser las funciones  $\langle\alpha\rangle$ , funciones que representan estados coherentes, se obtiene

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} (f^* \alpha + f \alpha^*), \quad p = \sqrt{\frac{\hbar m}{2}} (f^* \alpha + f \alpha^*), \quad (9)$$

y utilizando las propiedades de  $f$ , tenemos que

$$W^+(\alpha, \alpha^*) = N_+^{-2} f\left(\frac{\hbar}{m\pi}\right)^{-2} \exp\left\{\text{Re}(\alpha_0^2 f^* f) + \alpha_0^2 - 2\alpha - \alpha_0^2\right\}. \quad (10)$$

Para el caso de  $W^-$  tenemos algo similar pero con la diferencia de algunos signos, lo que nos lleva a

$$W^-(\alpha, \alpha^*) = N_-^{-2} f\left(\frac{\hbar}{m\pi}\right)^{-2} \exp\left\{\text{Re}(\alpha_0^2 f^* f) + \alpha_0^2 - 2\alpha + \alpha_0^2\right\} \quad (11)$$

Ahora tomemos los términos cruzados, que nos darán la interferencia;

$$\begin{aligned} & W^{+-} + W^{-+} \\ &= \frac{N_+^{-2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m}{\hbar f_+^2} q^2 - 2i\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{1/2} \text{Im}\left(\frac{\alpha_0}{f}\right)q + \left(i\frac{m}{\hbar} \text{Re}\left(\frac{f}{f}\right)q - \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{1/2} \text{Re}\left(\frac{\alpha_0}{f}\right)\right)x - \frac{m}{4\hbar f_+^2} x^2\right\} e^{-\alpha_0^2/\hbar} dx \\ &+ \frac{N_-^{-2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{m}{\hbar f_-^2} q^2 + 2i\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{1/2} \text{Im}\left(\frac{\alpha_0}{f}\right)q + \left(i\frac{m}{\hbar} \text{Re}\left(\frac{f}{f}\right)q + \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{1/2} \text{Re}\left(\frac{\alpha_0}{f}\right)\right)x - \frac{m}{4\hbar f_-^2} x^2\right\} e^{-\alpha_0^2/\hbar} dx \\ & \dots (12) \end{aligned}$$

Integrando y acomodando los términos, se obtiene

$$\begin{aligned}
& W^{\pm} + W^{\mp} \\
& = |N_s|^2 f \left( \frac{\hbar}{m\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{m}{\hbar f^2} q^2 + 2f^2 \text{Re}^2 \left( \frac{\alpha_0}{f} \right) - \frac{\hbar f^2}{m} \left( \frac{m}{\hbar} \text{Re} \left( \frac{f}{f} \right) q - \frac{p}{\hbar} \right)^2 + i \left( -2 \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \Im m \left( \frac{\alpha_0}{f} \right) q - \frac{\hbar f^2}{m} \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Re} \left( \frac{\alpha_0}{f} \right) \left( \frac{m}{\hbar} \text{Re} \left( \frac{f}{f} \right) q - \frac{p}{\hbar} \right) \right) \right\} \\
& + |N_s|^2 f \left( \frac{\hbar}{m\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{m}{\hbar f^2} q^2 + 2f^2 \text{Re}^2 \left( \frac{\alpha_0}{f} \right) - \frac{\hbar f^2}{m} \left( \frac{m}{\hbar} \text{Re} \left( \frac{f}{f} \right) q - \frac{p}{\hbar} \right)^2 - i \left( -2 \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \Im m \left( \frac{\alpha_0}{f} \right) q - \frac{\hbar f^2}{m} \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Re} \left( \frac{\alpha_0}{f} \right) \left( \frac{m}{\hbar} \text{Re} \left( \frac{f}{f} \right) q - \frac{p}{\hbar} \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

..... (13)

Aquí podemos observar que son dos sumandos, un complejo y su conjugado, por lo que este término se reduce a

$$\begin{aligned}
W^{\pm} + W^{\mp} & = 2 |N_s|^2 f \left( \frac{\hbar}{m\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{m}{\hbar f^2} q^2 + 2f^2 \text{Re}^2 \left( \frac{\alpha_0}{f} \right) - \frac{\hbar f^2}{m} \left( \frac{m}{\hbar} \text{Re} \left( \frac{f}{f} \right) q - \frac{p}{\hbar} \right)^2 \right\} \\
& \times \cos \left\{ -2 \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \Im m \left( \frac{\alpha_0}{f} \right) q - \frac{\hbar f^2}{m} \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Re} \left( \frac{\alpha_0}{f} \right) \left( \frac{m}{\hbar} \text{Re} \left( \frac{f}{f} \right) q - \frac{p}{\hbar} \right) \right\}
\end{aligned}$$

..... (14)

Al utilizar (7) y (9) terminamos con la expresión

$$(W^{\pm} + W^{\mp})(\alpha, \alpha^*) = 2 |N_s|^2 f \left( \frac{\hbar}{m\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \text{Re}(\alpha_0^2 f^* f) + \alpha_0^2 - 2\alpha^2 \right\} \cos(-2i(\alpha_0^* \alpha - \alpha_0 \alpha^*))$$

..... (15)

Entonces en el caso general la distribución de Wigner para el oscilador paramétrico descrito por la Ec. (1) de la sección 1.4 es:

$$\begin{aligned}
 W_2(\alpha, \alpha^*) &= W^+ + W^- \pm (W^\pm + W^{\mp}) \\
 &= \frac{2}{\pi(e^{-2|\alpha_0|^2} \pm e^{2|\alpha_0|^2})} \left( e^{-2\alpha - \alpha_0^2} + e^{-2\alpha + \alpha_0^2} \pm 2e^{-2\alpha^2} \cos(2i(\alpha_0^* \alpha - \alpha_0 \alpha^*)) \right) \\
 &\dots (16)
 \end{aligned}$$

Hemos encontrado una fórmula general para la distribución de Wigner, resultado que nos servirá para encontrar los casos deseados. Lo que tenemos aquí son dos gaussianas (primer y segundo términos) y un término de interferencia.

La evolución de  $W_2(\alpha, \alpha^*)$ , así como la forma explícita, quedará determinada por el valor de la función  $f$ . Ahora, puede ser de utilidad comparar el tamaño del término de interferencia con el de las dos gaussianas; con lo que podremos determinar qué tan relevante es la interferencia en estos estados. Para esto, utilizamos la definición expuesta en [7] en la que se toma el cociente del producto de los términos cruzados (el producto de los sumandos en  $W^+ + W^-$ ), y el producto de las dos gaussianas:

$$I^{\pm 2} = \frac{W^+ W^{\mp}}{W^+ W^-} \quad (17)$$

Al sustituir los valores de las correspondientes funciones vemos que el resultado es

$$I^{\pm 2} = \exp\{4\alpha_0\}. \quad (20)$$

Como se puede observar el resultado es independiente de  $\alpha$ , y solo depende de  $\alpha_0$ .

## 2.2 La resortera cuántica

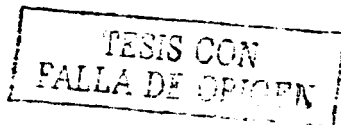
Ahora estamos listos para analizar el caso de la resortera cuántica en el que la función  $f$  está definida por la Ec (10) de la sección 1.4. Entonces partiremos para  $t < 0$ , donde  $f = \omega_0^{-1/2} e^{i\omega_0 t}$ . Para este caso tenemos un oscilador armónico simple con frecuencia constante, así que lo que esperamos es que las gaussianas den vueltas en el espacio fase, alrededor del origen, con un término de interferencia entre ellas. Al sustituir en la Ec. (7) de la sección anterior obtenemos

$$\alpha_0 = q_0 + ip_0 \quad (1)$$

y

$$\alpha(t) = e^{i\omega_0 t} q + ie^{i\omega_0 t} p \quad (2)$$

donde hemos introducido las nuevas variables adimensionales  $q$  y  $p$  definidas por





$$q = q \left( \frac{m\omega_0}{2\hbar} \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad p = p \left( \frac{1}{2m\omega_0\hbar} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Así encontramos la distribución de Wigner:

$$W_{\pm}(q, p) = N_{\pm}^2 \int \left( \frac{\hbar}{m\omega_0\pi} \right)^{1/2} \exp \left\{ \text{Re}(\alpha_0^2 e^{-i\omega_0 t}) + \alpha_0^{-2} \left[ \exp \left\{ -2e^{-i\omega_0 t} \alpha_0 - (q + ip)^2 \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \exp \left\{ -2e^{-i\omega_0 t} \alpha_0 + (q + ip)^2 \right\} \right] \pm 2 \exp \left\{ -2q + ip^2 \right\} \cos \left( -2i(e^{-i\omega_0 t} \alpha_0 (q + ip) - e^{i\omega_0 t} \alpha_0^*(q - ip)) \right) \right\} \\ \dots (4)$$

cuya evolución temporal se muestran en la Fig. 2. En esta figura podemos observar a las dos gaussianas girar en torno del origen con un término de interferencia oscilando entre ellas. Es claro que el movimiento es periódico y que los paquetes mantienen dispersiones constantes, ya que el ancho de las gaussianas es constante.

Para el caso  $t > 0$  tenemos  $\alpha(t) = q + (1 + i\omega_0 t)p$  y, después de algunas operaciones algebraicas, llegamos a

$$W_{\pm}(q, p) = N_{\pm}^2 \int \left( \frac{\hbar}{m\omega_0\pi} \right)^{1/2} \exp \left\{ \text{Re}(\alpha_0^2 (1 - i\omega_0 t)^2 (1 + \omega_0^2 t^2)) + \alpha_0^{-2} \left[ \exp \left\{ -2[(q - q_0 - \omega_0 p)^2 + (p - p_0)^2] \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \exp \left\{ -2[(q + q_0 - \omega_0 p)^2 + (p + p_0)^2] \right\} \right] \pm 2 \exp \left\{ -2[(q - \omega_0 p)^2 + p^2] \right\} \cos(4(q_0 p - p_0 q - p_0 \omega_0 p)) \right\} \\ \dots (5)$$

En la Fig.3 encontramos las gráficas correspondientes, donde podemos observar que hemos obtenido dos paquetes alejándose del origen en direcciones opuestas con un término de interferencia entre ellos. Una de las

observaciones importantes que podemos hacer es que el término de interferencia, conforme el tiempo avanza, tiende a hacerse muy plano en la coordenada  $p$  y muy ancho en la coordenada  $q$  (En las gráficas que presentamos no se nota muy bien este fenómeno debido a la forma en la que se hacen las gráficas, por lo que se presentan, en la *Fig 4*, unos acercamientos para mejorar el análisis).

Al sustituir el valor de la constante  $N$ , tenemos por último el resultado final:

$$W_{1,t,0} = \frac{2e^{i\alpha_0 t}}{\pi(e^{2i\alpha_0 t} \pm e^{-2i\alpha_0 t})} \left( \exp\{-2[e^{-i\omega t} \alpha_0 - (q + ip)]^2\} + \exp\{-2[e^{-i\omega t} \alpha_0 + (q + ip)]^2\} \right. \\ \left. \pm 2 \exp\{-2q + ip\} \cos(-2i(e^{-i\omega t} \alpha_0 (q + ip) - e^{i\omega t} \alpha_0 (q - ip))) \right)$$

$$W_{2,t,0} = \frac{2e^{i\alpha_0 t}}{\pi(e^{2i\alpha_0 t} \pm e^{-2i\alpha_0 t})} \left( \exp\{-2[(q - q_0 - \omega t p)^2 + (p - p_0)^2]\} + \exp\{-2[(q + q_0 - \omega t p)^2 + (p + p_0)^2]\} \right. \\ \left. \pm 2 \exp\{-2[(q - \omega t p)^2 + p^2]\} \cos(4(q_0 p - p_0 q - p_0 \omega t p)) \right) \\ \dots (6)$$

*Fig 2. Esta gráfica muestra la evolución de la distribución de Wigner para cuando no se ha soltado la partícula, donde la frecuencia de oscilación es constante y diferente de cero. Se ha tomado como condición inicial  $\alpha_0 = 1 + i$ .*



$$\alpha = 0$$



$$\alpha = 5\pi/8$$



$$\alpha = \pi/4$$



$$\alpha = 3\pi/4$$



$$\alpha = 3\pi/8$$



$$\alpha = 7\pi/8$$

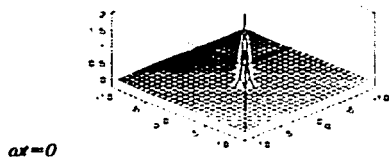


$$\alpha = \pi/2$$

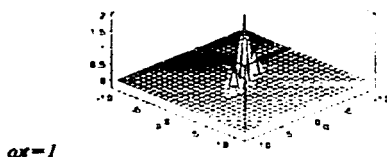


$$\alpha = 9\pi/8$$

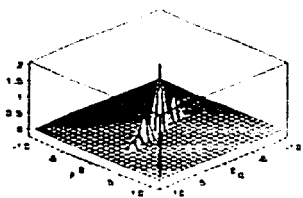
*Fig 3. Gráficas de la distribución de Wigner para tiempos mayores que cero. Se ha puesto  $\alpha_0 = 1 + i$ .*



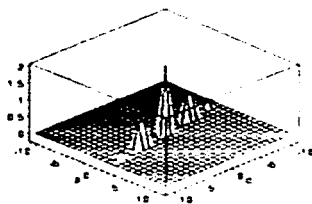
$\alpha x = 0$



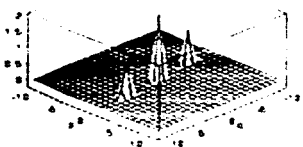
$\alpha x = 1$



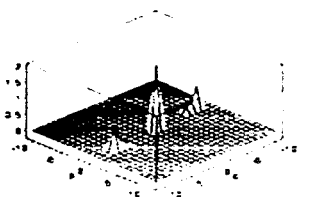
$\alpha x = 2$



$\alpha x = 3$

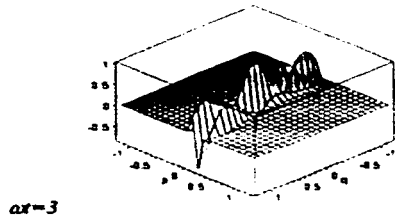
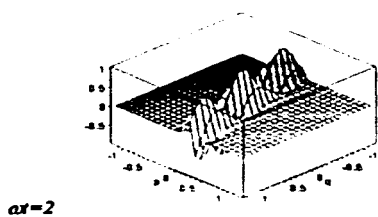
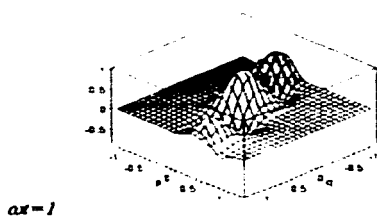
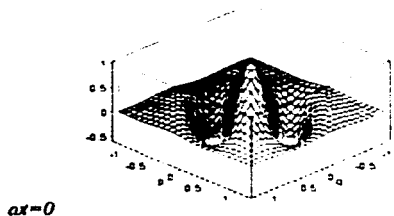


$\alpha x = 4$



$\alpha x = 5$

*Fig 4. El término de interferencia en la figura 2 no se ve oscilar, por lo que esta figura muestra de cerca cómo cambia el término de interferencia. Se puede observar que en la coordenada  $p$  la superficie se aplana conforme pasa el tiempo, mientras que en la coordenada  $q$  se ensancha.*



### 2.3 El oscilador paramétrico

Ya con la solución general de la distribución de Wigner, Ec. (16) de la sección 2.1, lo único que resta hacer para resolver cualquier caso del oscilador paramétrico será encontrar la función  $f(t)$  que sea solución a la ecuación  $\ddot{f} + \omega^2(t)f = 0$  para cualquier  $\omega(t)$  dada. Ya se resolvió para el caso de la resortera cuántica, y en lo que sigue, se trabajará con una frecuencia oscilante. Tomando una frecuencia de la forma

$$\omega^2(t) = A + B \cos \omega_0 t, \quad (1)$$

se llega a la ecuación diferencial

$$\ddot{f} + (A + B \cos \omega_0 t)f = 0 \quad (2)$$

Este caso de frecuencias oscilantes tiene importancia en las trampas de iones, en particular, en las llamadas trampas de Paul. Dichas trampas constan de un conjunto de electrodos, como los que se muestra en la *Fig 5*.

Esta trampa usa un potencial dinámico que consta de una componente alterna, lo que significa que usa un potencial dado por  $U_0 + V_0 \cos \Omega t$ . Con este potencial se pueden encontrar soluciones al movimiento estables en el eje  $z$  y otras estables en el plano radial; pero lo importante es que se pueden encontrar valores de los parámetros que hagan estable el movimiento en ambas direcciones. Al escribir la ecuación de movimiento encontramos que

$$z = (U_0 + V_0 \cos \Omega t) \left( 4z \right) \left( e / m R_0^2 \right). \quad (3)$$

Esta ecuación se puede reparametrizar como

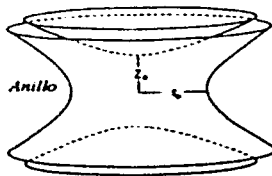
$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + (a_z - 2q_z \cos 2\tau)z = 0, \quad (4)$$

donde

$$a_z = -\frac{16eU_0}{m\Omega^2 R_0^2},$$

$$q_z = \frac{8eV_0}{m\Omega^2 R_0^2}. \quad (5)$$

*Fig 5. Configuración de los electrodos para la trampa de Paul. El potencial  $U_0$  es el potencial entre el anillo y las tapas.*



La ecuación (9) es conocida como la ecuación de *Mathieu* [22], y tiene como solución dos tipos de funciones: unas estables y otras inestables; esto, dependiendo del valor de los parámetros  $a_z$  y  $q_z$ . Las constantes  $a_z$  y  $q_z$  dependen de la masa de la partícula, por lo que la trampa de Paul puede ser también un selector de masas, haciendo que sólo sea estable para algún valor particular de  $m$ .

Ahora es claro que la ecuación (2) es una ecuación de *Mathieu*, a excepción de la parametrización necesaria, por lo que la describimos como

$$\frac{d^2}{d\tau^2} f + (a + 2q \cos 2\tau)f = 0 \quad (6)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{4A}{\omega_0^2} \\ q &= \frac{2Q}{\omega_0^2}, \\ \tau &= \frac{\omega_0 t}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

además

$$\frac{d}{dt} = \frac{\omega_0}{2} \frac{d}{d\tau}. \quad (8)$$

Se puede observar que las unidades de la función  $f$  son de  $\text{seg}^{1/2}$ , así que podemos definir una nueva función adimensional de la siguiente forma:

$$f = \omega_0^{1/2} f. \quad (9)$$



Al observar que las condiciones iniciales para la función  $f(t)$  son  $f(0) = \omega_0^{-1/2}$  y  $\dot{f}(0) = i\omega_0^{1/2}$ , para la nueva función adimensional tendremos las condiciones iniciales:

$$f(0) = 1; \quad \dot{f}(0) = 2i. \quad (10)$$

Las soluciones de la ecuación (6) se deben calcular con las condiciones iniciales (Ec. (10)), lo que nos dará la función definida por (9). Sabiendo que podemos encontrar soluciones estables e inestables, trabajaremos con ambas soluciones, tomando valores para  $a$  y  $q$  a partir de la Fig 6, en donde se muestran regiones de estabilidad e inestabilidad según [23].

Los valores que se eligieron arbitrariamente son:

Caso estable:  $a = -0.1, q = 0.75$

Caso inestable:  $a = -0.5, q = 0.3$

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

De esta forma obtenemos dos ecuaciones para  $f$ :

$$\frac{d^2}{d\tau^2} f + (-0.1 + 1.5 \cos 2\tau)f = 0, \quad \text{caso estable}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} f + (-0.5 + 0.6 \cos 2\tau)f = 0. \quad \text{caso inestable}$$

Las soluciones, al no ser analíticas, se calcularon numéricamente con una computadora, y se presenta la gráfica de la parte real y la parte imaginaria como función de  $\tau$ , para los casos inestable y estable, Fig. 7.

*Fig 6. Diagrama de estabilidad para las funciones de Mathieu. La función correspondiente a los valores de  $a$  y  $q$  (o el movimiento dentro de la trampa) será estable dentro de la zona sombreada.*

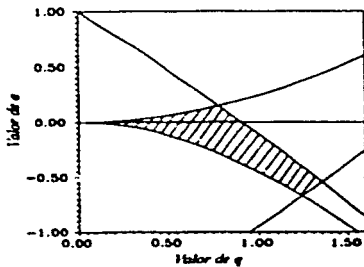
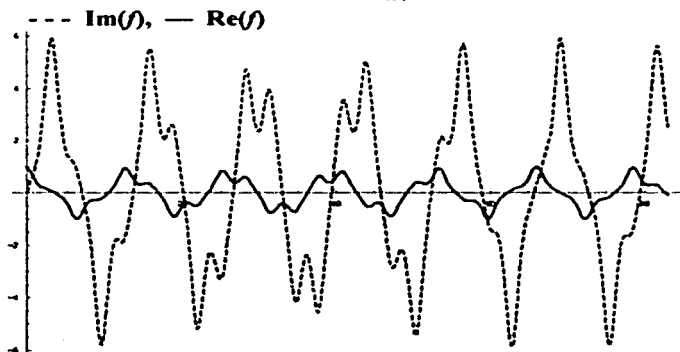
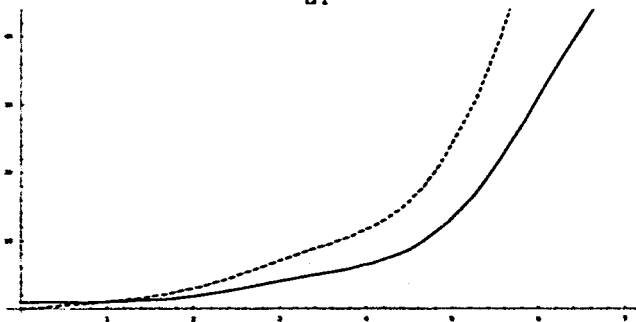


Fig 7.

a) Gráfica de la función de Mathieu, parte real y parte imaginaria, para el caso estable ( $a = -0.1, q = 0.75$ ), solución de la ecuación  $\frac{d^2}{d\tau^2} f + (-0.1 + 1.5 \cos 2\tau) f = 0$ .



b) Gráfica de la función de Mathieu, parte real y parte imaginaria, para el caso inestable ( $a = -0.5, q = 0.3$ ), solución de la ecuación  $\frac{d^2}{d\tau^2} f + (-0.5 + 0.6 \cos 2\tau) f = 0$ .



Dadas las condiciones iniciales (10) se debe de cumplir la condición (4) de la sección 1.4.

Para este caso de gato de Schrödinger podemos calcular las dispersiones, que están dadas por [9]:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_z &= \frac{\hbar}{2m} \left[ f'^2 \alpha^2 + f^2 \alpha'^2 + f f' \left( 2 \frac{|N_{\pm}|^2}{|N_{\mp}|^2} |\alpha|^2 + 1 \right) \right], \\ \langle p^2 \rangle_z &= \frac{\hbar m}{2} \left[ f'^2 \alpha^2 + f^2 \alpha'^2 + f f' \left( 2 \frac{|N_{\pm}|^2}{|N_{\mp}|^2} |\alpha|^2 + 1 \right) \right], \\ \frac{1}{2} \langle xp + px \rangle_z &= \frac{\hbar}{2} \left[ f' f'' \alpha^2 + f f' \alpha'^2 + \frac{1}{2} (f'' f + f' f') \left( 2 \frac{|N_{\pm}|^2}{|N_{\mp}|^2} |\alpha|^2 + 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

al introducir los valores de la función  $f$  que previamente se encontraron, y ya que el valor esperado de  $x$  y  $p$  es nulo. Esto se muestra en la *Fig 8*.

Ya con los datos correspondientes y las comprobaciones necesarias, se graficaron las distribuciones de Wigner para cada uno de los casos, tomando en cuenta que

$$\alpha = -i(\mathcal{J}q - fp),$$

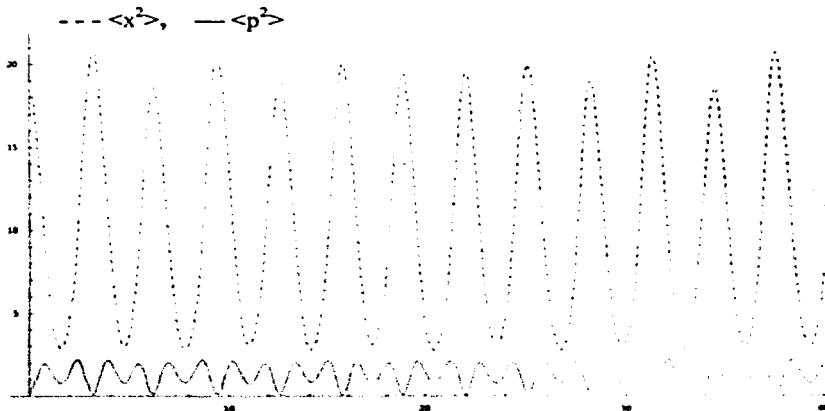
con las variables adimensionales  $q$  y  $p$ . Así se encontraron las *Figs. 9 y 10*.

De las figuras de las dispersiones (Fig. 8) podemos observar que los estados en el caso estable se aplastan, ya que en los puntos más altos de la dispersión en  $\langle x^2 \rangle$  se hace mínima en  $\langle p^2 \rangle$ , mientras que en los puntos más bajos de  $\langle x^2 \rangle$  coincide con mínimos en  $\langle p^2 \rangle$ . La relación  $\sigma_x \sigma_p - \sigma_{xp}^2$  muestra que se mantiene constante salvo errores del cálculo numérico. Para el caso inestable simplemente crecen rápidamente las dispersiones en las dos variables, y por lo tanto, crece el error rápidamente produciendo una gran pérdida de precisión. Por eso la gráfica es corta en  $\tau$  y muestra fluctuaciones grandes.

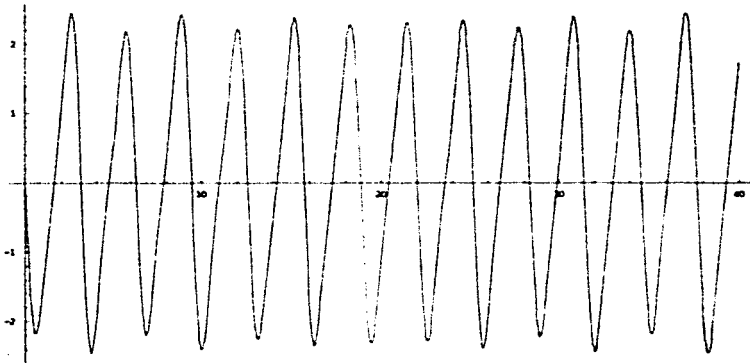
Fig. 8.

Gráficas de dispersiones para ambos casos de la ecuación de Mathieu. Ya que  $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$ , tenemos que  $\sigma_x \sigma_p - \sigma_{xp}^2 = \langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle - \langle xp + px \rangle^2$ .

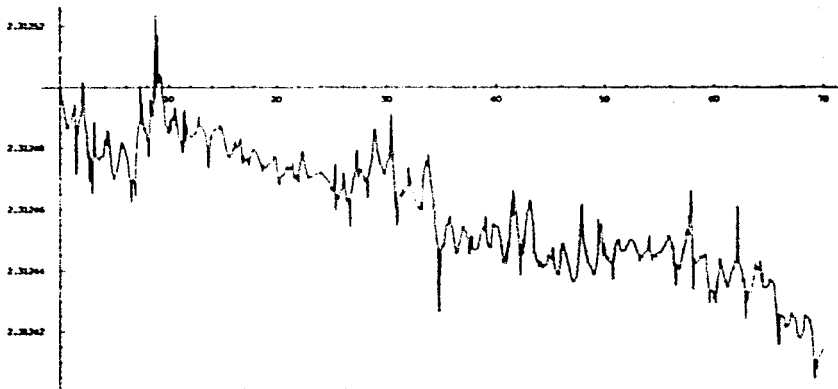
a) *Dispersiones del gato*  $\langle x^2 \rangle$  y  $\langle p^2 \rangle$ . Caso estable.



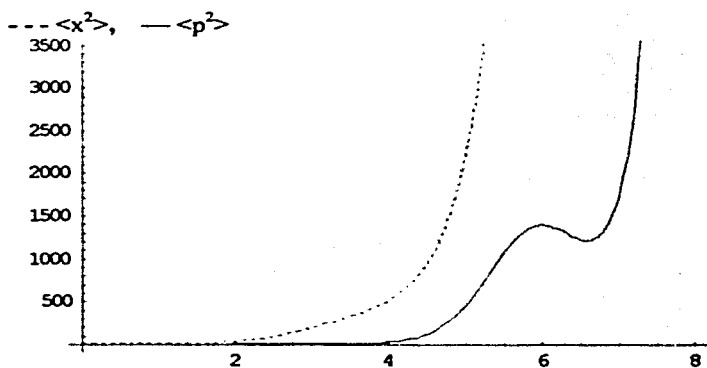
b) *Dispersión de  $\langle xp+px \rangle$ . Caso estable.*



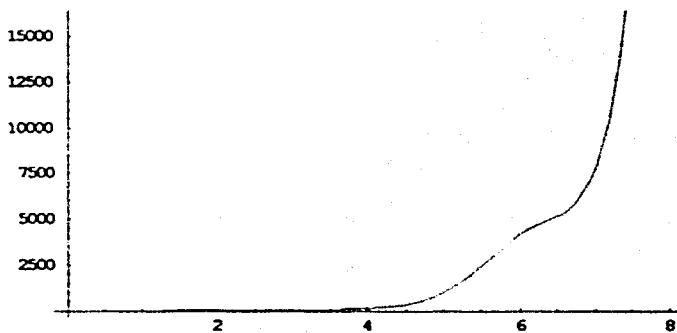
c) *Relación de Schrödinger-Robertson. Caso estable.*



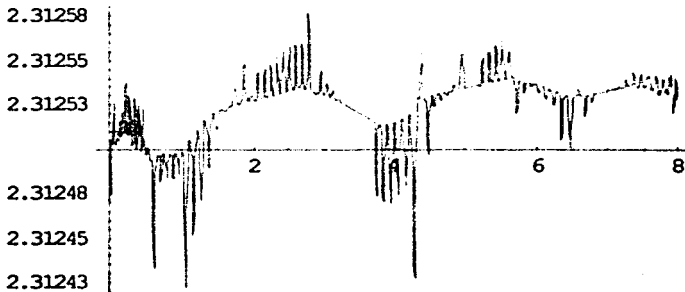
d) *Dispersiones del gato  $\langle x^2 \rangle$  y  $\langle p^2 \rangle$ . Caso inestable.*



e) *Dispersión de  $\langle xp+px \rangle$ . Caso inestable.*



f) Relación de Schrödinger-Robertson. Caso inestable



Otros trabajos describen teóricamente las distribuciones de Wigner para el caso de la trampa de Paul, como es el caso de la Ref. [12]. En esta referencia se muestran estas funciones, pero la diferencia es que se hace para un estado solo, no para un gato de Schrödinger. Las dispersiones, a pesar de mostrar ciertas diferencias, tienen los mismos efectos de aplastamiento que se ven en la Fig. 10.

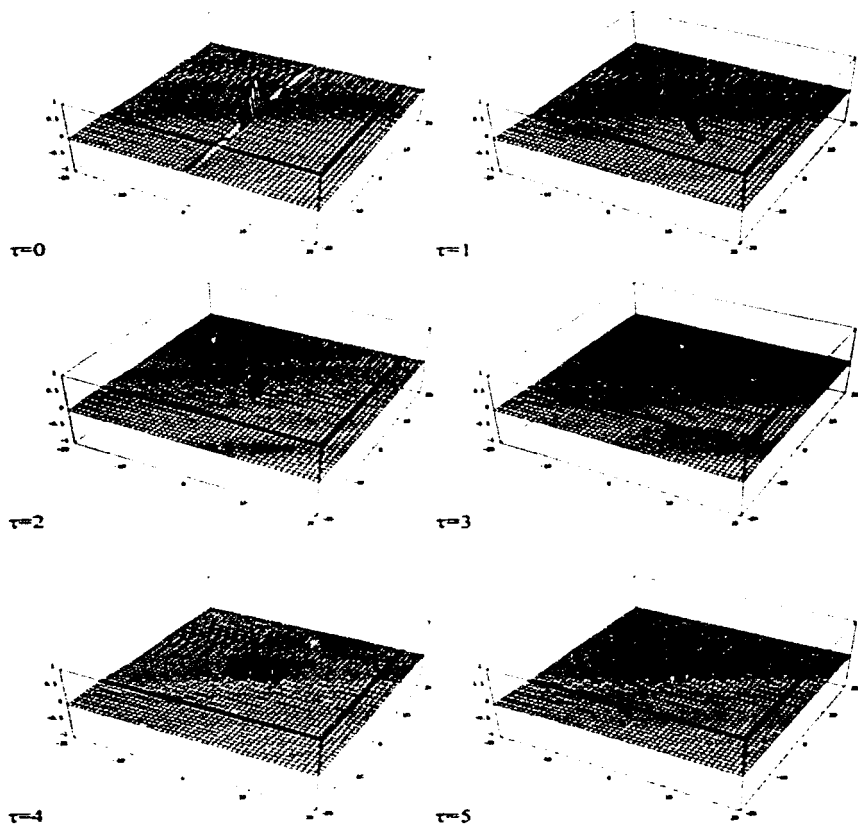
Las gráficas que se muestran en esta tesis están calculadas para un valor de  $\alpha = 3$ , y para el caso  $W_{\cdot}$ . Sin embargo es importante notar que el cambiar tanto el valor de la  $\alpha$ , como si se trata del gato par o impar, cambiará la forma de las distribuciones así como el de las dispersiones. El valor de la relación de Robertson-Schrödinger es menor para el caso del gato par, sin embargo esta

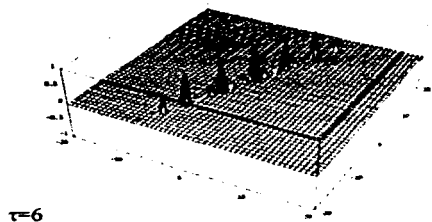


diferencia está en función del valor de  $\alpha$ : mientras el valor de  $|\alpha|$  sea menor la diferencia entre el valor de la relación Robertson-Schrödinger para los gatos par e impar será mayor. De hecho, para el valor tomado en esta tesis la diferencia es mínima.

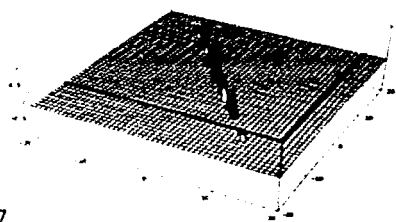
Fig 9.

Caso estable  $a = -0.15$ ,  $q = 0.8$ . En estas gráficas lo que se puede encontrar es que nuevamente giran en torno del origen, pero no con una frecuencia angular constante. Aquí se grafica un ciclo completo, con lo que se observa la periodicidad del movimiento. En ambos casos, tanto el estable como el inestable para la función de Mathieu, observamos que los estados se aplastan.

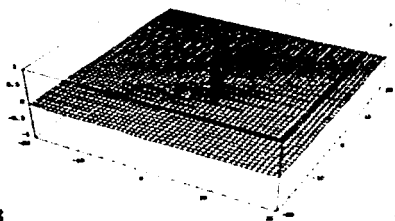




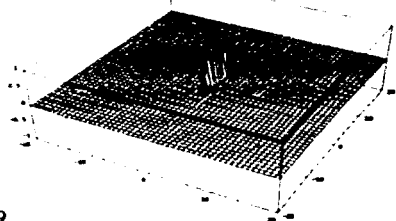
$\tau=6$



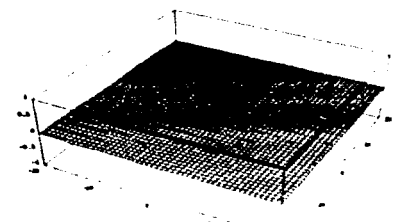
$\tau=7$



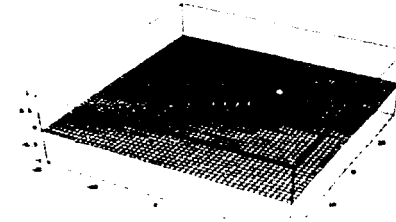
$\tau=8$



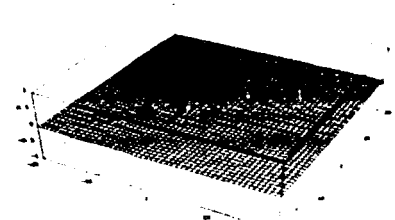
$\tau=9$



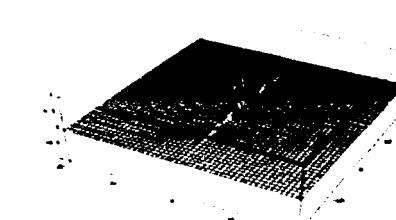
$\tau=10$



$\tau=11$



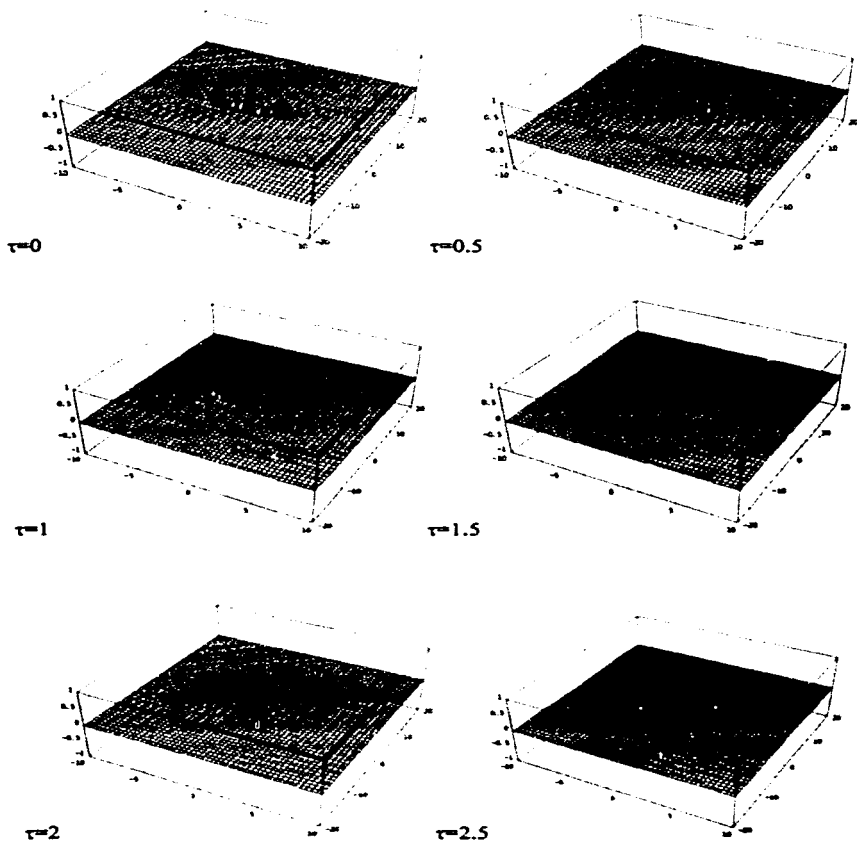
$\tau=12$

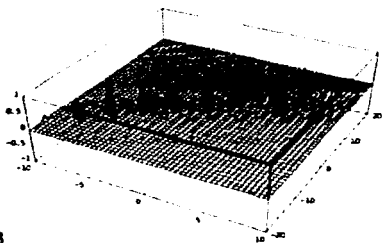


$\tau=12.6$

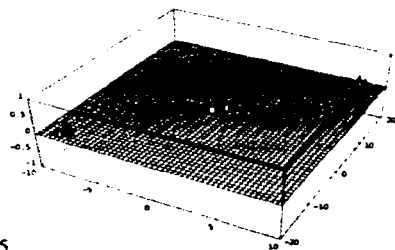
**Fig 10.**

*Caso inestable,  $a = -0.5$ ,  $q = 0.3$ . Para este caso podemos observar que las gaussianas se alejan del origen, pero, a diferencia del caso de la resorte con frecuencia cero, se alejan con velocidad creciente.*

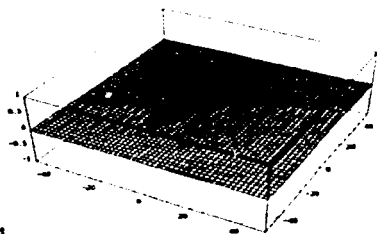




$\tau=3$



$\tau=3.5$



$\tau=4$

## Conclusiones

En el segundo capítulo se llegó a una expresión general de la distribución de Wigner correspondiente a los estados del oscilador paramétrico, en la que queda todo en función de  $\alpha$ , eigenvalor del operador  $\hat{a}$  definido por la ecuación (3) de la sección 2.1.

Utilizando este resultado se analizó el caso de la resorte cuántica, obteniendo los resultados esperados. Cuando la frecuencia es constante y diferente de cero, se observó que la distribución de Wigner consta de dos gaussianas girando en torno del origen con un término de interferencia oscilando. Los estados son coherentes por lo que se observa que tienen la misma dispersión en el momento y en la posición adimensionales definidas por la Ec. (3) de la sección 2.2. Al momento de desvanecerse la frecuencia podemos observar que los paquetes salen en direcciones opuestas y con un movimiento paralelo al eje  $q$ . En las gráficas correspondientes a este estado, podemos observar que se comprime como lo predice el cálculo hecho en la Ref. [9], donde la dispersión en la posición crece como  $r^2$  y en el momento permanece constante para cada gaussiana. El término de interferencia no desaparece pero también se aplasta en la dirección del eje  $p$  al mismo tiempo de que se alarga en el eje  $q$ . De esta forma hemos obtenido la representación gráfica del gato de Schrödinger correspondiente a la resorte cuántica donde además se encontró que el término de interferencia nunca desaparece.

Para el siguiente ejemplo del oscilador paramétrico se ha trabajado con funciones de Mathieu para los diferentes casos: estables e inestables. Como se ha comentado anteriormente, este caso tiene importancia dentro de las trampas de iones, en particular la trampa de Paul. En el cálculo numérico se pasó por las comprobaciones correspondientes entre las que se puede observar primero la condición (4) de la sección 1.4. Se calcularon las dispersiones para cada uno de los casos y se pueden observar en la figura 8. Para el caso estable podemos observar primero que el estado se aplasta; mientras la dispersión aumenta en una de las coordenadas disminuye en la otra y viceversa. Como era predicho [3] la relación de indeterminación de Robertson-Schrödinger se mantiene constante para cada uno de los casos. Para el caso inestable, el crecimiento en las dispersiones es tan grande que la pérdida de precisión crea las grandes irregularidades en la Fig. 9 f). En [13] se muestran cálculos numéricos para el mismo problema, y una similitud, aunque difícil de percibir, es que los mínimos en las dispersiones de la posición coinciden con los máximos en la dispersión del momento.

Ahora es más claro lo que se puede esperar de las gráficas de las distribuciones de Wigner correspondientes a estas funciones de Mathieu. Por un lado será mucho más claro que los estados son aplastados pero no de manera constante. Por ejemplo, dadas las condiciones iniciales el estado deberá estar alargado en la dirección de la posición y así se ve en la primera gráfica de la distribución de Wigner para el caso estable. Mientras avanza el tiempo, podemos observar el movimiento de las gaussianas alrededor del origen con un cambio constante del ancho en ambas direcciones. Finalmente podemos ver en la última gráfica que se regresa al punto de partida, con lo que se confirma la periodicidad del movimiento. Se puede observar que la

interferencia también sufre de grandes oscilaciones cuando las dispersiones son grandes.

Posteriormente podemos observar la forma de la distribución de Wigner para el caso inestable. A diferencia del caso  $t > 0$  de la resortera cuántica, aquí vemos que el movimiento no se da en dirección de ningún eje. Una característica de estas gráficas es que el término de interferencia no está tan bien localizada como en el caso de la resortera. Y se puede ver que la interferencia se alarga en la dirección de las gaussianas. Al pasar del tiempo los dos paquetes alejándose disminuyen en altura debido al ensanchamiento y a que se debe de cumplir siempre la condición (2) de la sección 1.3.



## Referencias

1. R. J. Glauber, *Physical Review*, 131 (1963)
2. V. V. Dodonov, E. V. Kurmyshev, V. I. Man'ko, *Physics Letters*, 79 A, (1980)
3. V. V. Dodonov, A. B. Klimov, V. I. Man'ko, *Proceedings of the XVIII international colloquium*, Moscow (1990)
4. B. Yurke, D. Stoler, *Physical Review Letters*, 57, (1986)
5. W. H. Zurek, *Physical Review D*, Vol 24, No 6, septiembre (1981)
6. W. H. Zurek, *Physical Review D*, Vol 26, No 8, octubre (1982)
7. P. Barberis, S. Hacyan, *J. Opt. B Quantum Semi.*, (2000)
8. S. Haroche, *Latin-American School of Physics XXXI*, 1 (1999)
9. S. Hacyan, *Foundation of Physics Letters*, Vol. 9, No. 3 (1996)
10. I. M. Dremin, V. I. Man'ko, *Il Nuovo Cimento*, Vol 111 A, No. 5 (1998)

11. C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, D. J. Wineland, *Science*, Vol. 272, Mayo (1996)
12. G. Schrader, V. I. Man'ko, W. P. Schleich, R. J. Glauber, *Quantum Semiclass. Opt.* 7 (1995)
13. O. Castañós, R. Jáuregui, R. López-Peña, J. Recamier y V. I. Man'ko, *Physical Review A*, Vol. 55, No. 2, Febrero (1997)
14. E. Schrödinger, *Naturwissenschaften*, 14, 664 (1926)
15. M. Orszag, "*Quantum Optics*", Springer (2000)
16. C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, "*Quantum Mechanics*", Vol. I, John Wiley & Sons, (1977)
17. L. Davidovich, *Latin-American School of Physics XXXI*, I, (1999)
18. M. O. Scully, M. S. Zubairy, "*Quantum Optics*", Cambridge University Press (1997)
19. D. Leibfried, T. Pfau, C. Monroe, *Physics Today*, Abril (1998)
20. E. P. Wigner, *Physical Review*, 40, 749 (1932)
21. H. P. Robertson, *Physical Review*, Vol 35, (1930)

22. Abramowitz, Stegun, "*Handbook Of Mathematical Functions*", Dover (1972)

23. R. Thompson, *Latin-American School of Physics XXXI*, 1, (1999)